

RESOLUÇÕES  
**LIVRO**  
DE EXERCÍCIOS

**GDA**

11.º ANO

GEOMETRIA  
DESCRITIVA A

JOSÉ FERNANDO DE SANTA-RITA



Texto



## RESOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**NOTA:** Se bem que os dados métricos dos enunciados estejam em **centímetros**, as soluções apresentadas **não consideraram** o centímetro como unidade. De facto, entende-se que o objetivo da consulta das soluções dos exercícios, na perspetiva do estudante, deve ser a **verificação da correção** dos raciocínios e dos traçados e não a **comparação métrica** dos mesmos. Dessa forma, considerou-se de maior utilidade o desenvolvimento dos relatórios e a resolução gráfica dos problemas a uma escala que evite qualquer tentativa de comparação métrica. De qualquer forma, considera-se relevante informar que a escala utilizada nas resoluções apresentadas foi de  $\frac{1}{2}$ , o que significa que a cada centímetro da resolução do aluno corresponderá 0,5 cm nestas soluções.

## 13 PARALELISMO

### 1.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **A** bem como as retas **r** e **s**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. As projeções da reta **s** estão coincidentes com as projeções de nome contrário da reta **r**, o que significa que se tem  $s_2 \equiv r_1$  (a projeção frontal da reta **s** está coincidente com a projeção horizontal da reta **r**) e  $s_1 \equiv r_2$  (a projeção horizontal da reta **s** está coincidente com a projeção frontal da reta **r**).

- a) As retas **r** e **s** são **paralelas**, pois têm as projeções homónimas paralelas entre si (as projeções horizontais das duas retas são paralelas entre si e as projeções frontais das duas retas também são paralelas entre si).
- b) Em primeiro lugar, determinou-se o traço frontal do plano –  $f_\alpha$ . É pedida uma reta – o traço frontal do plano. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Em primeiro lugar, determinou-se o traço frontal da reta **r** – o ponto **F**. Já temos um ponto para definir  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta **s** – o ponto **F'**. Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\alpha - f_\alpha$  (o traço frontal do plano definido pelas duas retas) está definido por dois pontos – os pontos **F** e **F'**.

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano –  $h_\alpha$ . É pedida uma reta – o traço horizontal do plano. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Em primeiro lugar, determinou-se o traço horizontal da reta **r** – o ponto **H**. Já temos um ponto para definir  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta **s** – o ponto **H'**. Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\alpha - h_\alpha$  (o traço horizontal do plano definido pelas duas retas) está definido por dois pontos – os pontos **H** e **H'**.

Nesta situação particular, os traços do plano ficam coincidentes. Por outro lado, tendo em conta que os traços de um plano são duas retas desse plano que são concorrentes num ponto do eixo **X**, poder-se-ia ter utilizado esse ponto para definir  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ).

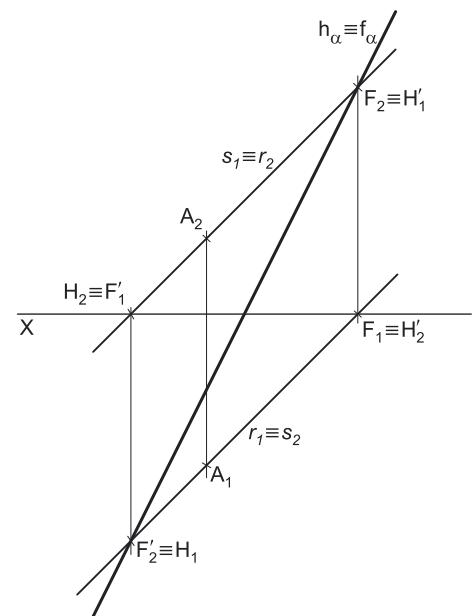
#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas **r** e **s**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  (o plano definido pelas duas retas), representaram-se a **forte** (porque é o pedido – objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.

### 2.

As **retas de perfil** são a única situação em que as projeções da reta não verificam o **Crítério de Reversibilidade** – a partir das projeções de uma reta de perfil não é possível determinar a sua exata localização no espaço, pois existem, no espaço, infinitas retas com as mesmas projeções (ao contrário de todas as outras retas, cujas projeções verificam o **Crítério de Reversibilidade**). Exatamente por isso, quaisquer duas retas de perfil têm, sempre, as suas projeções frontais paralelas entre si e as suas projeções horizontais paralelas entre si, mesmo nas situações em que, **no espaço**, as retas **não são paralelas**.

Nesse sentido, as retas de perfil constituem-se como a única exceção ao **Crítério de paralelismo entre retas**, exatamente porque as projeções de qualquer reta de perfil não verificam o **Crítério de Reversibilidade**.



## 3.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $p$  e  $p'$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $B$ . A reta  $p'$  está definida por dois pontos – os pontos  $C$  e  $D$ .

### Resolução:

Retas de perfil têm sempre as projeções homônimas paralelas entre si, quer sejam paralelas ou não. Para averiguar se as retas  $p$  e  $p'$  são paralelas, comecemos por admitir que as duas retas são efetivamente paralelas. Nesse caso, as duas retas definirão um plano (retas paralelas são retas coplanares).

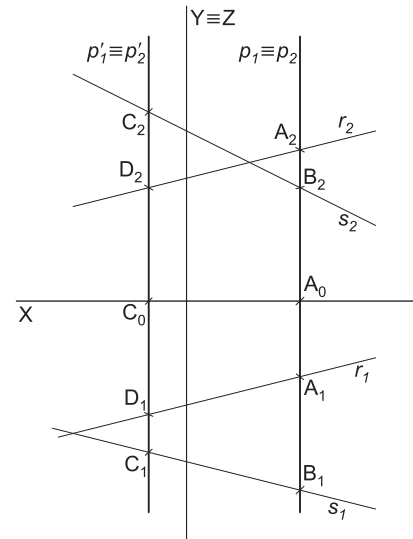
Os dados desse **suposto plano** são insuficientes para averiguar o pretendido, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar desse **suposto plano**, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se a uma reta auxiliar do **suposto plano** – a reta  $r$ . A reta  $r$  é concorrente com a reta  $p$  no ponto  $A$  e concorrente com a reta  $p'$  no ponto  $D$  (a reta  $r$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $D$ ).

Os dados desse **suposto plano** são ainda insuficientes para averiguar o pretendido, pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar desse **suposto plano**, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se a outra reta auxiliar do **suposto plano** – a reta  $s$ . A reta  $s$  é concorrente com a reta  $p$  no ponto  $B$  e concorrente com a reta  $p'$  no ponto  $C$  (a reta  $s$  está definida por dois pontos – os pontos  $B$  e  $C$ ).

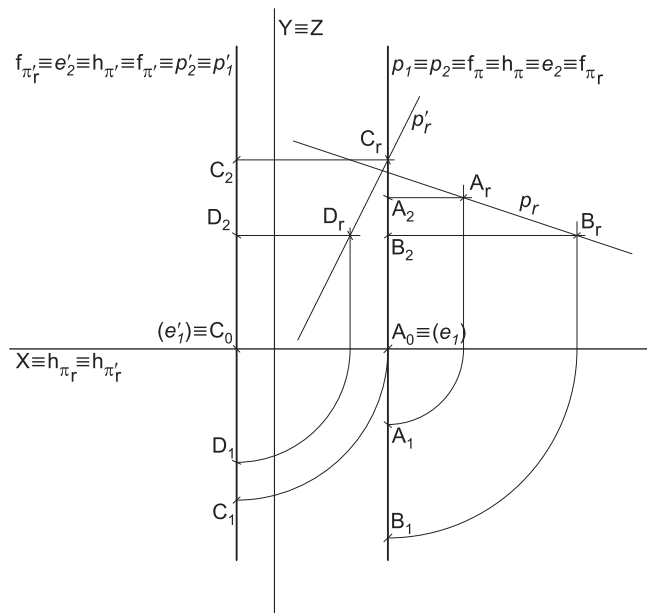
As retas  $r$  e  $s$  são retas **não coplanares** (não são paralelas nem concorrentes), pelo que **não definem plano nenhum**. Assim, o **suposto plano** não existe – as retas  $p$  e  $p'$  **não são paralelas**.

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $p$  e  $p'$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O que é pedido é uma conclusão, pelo que, neste exercício, não há nenhum elemento gráfico que se represente a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 4.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $p$  e  $p'$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $B$ . A reta  $p'$  está definida por dois pontos – os pontos  $C$  e  $D$ .

### Resolução:

Retas de perfil têm sempre as projeções homônimas paralelas entre si, quer sejam paralelas ou não. Para averiguar se as retas  $p$  e  $p'$  são paralelas é necessário um raciocínio auxiliar que pode passar pelo procedimento exposto no exercício anterior ou, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, o recurso a um **processo geométrico auxiliar** (ou, de uma forma mais específica, o recurso ao processo do **rebatimento**).

Tendo em conta que apenas se rebatem planos, o recurso a um **rebatimento** refere-se necessariamente ao **rebatimento do plano de perfil**.

Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano de perfil que a contém – o plano  $\pi$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_{\pi}$ , que é uma reta vertical), rebatendo os pontos  $A$  e  $B$ , o que nos permitiu determinar  $A_r$  e  $B_r$ . Note que os arcos do rebatimento estão contidos em planos horizontais (planos ortogonais à charneira), pelo que se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, os pontos, ao longo do seu rebatimento, mantêm as suas cotas. Em seguida, desenhou-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $B_r$ ).

De forma semelhante, conduziu-se, pela reta  $p'$ , o plano de perfil que a contém – o plano  $\pi'$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi'$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_{\pi'}$ , que é uma reta vertical), rebatendo os pontos  $C$  e  $D$ , o que nos permitiu determinar  $C_r$  e  $D_r$ . Note que os arcos do rebatimento estão contidos em planos horizontais (planos ortogonais à charneira), pelo que se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, os pontos, ao longo do seu rebatimento, mantêm as suas cotas. Em seguida, desenhou-se a reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $C_r$  e  $D_r$ ).

As retas  $p_r$  e  $p'_r$  (as retas  $p$  e  $p'$  rebatidas) não são paralelas, pelo que se conclui que, **no espaço**, as retas  $p$  e  $p'$  também **não são paralelas**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Tenha em conta que o procedimento exposto se fundamenta no rebatimento de dois planos de perfil distintos. Assim, de forma a ser possível averiguar o paralelismo entre as duas retas, o rebatimento dos dois planos de perfil tem de se efetuar **para o mesmo plano de projeção** (o Plano Frontal de Projeção neste caso) e **para o mesmo lado** (para o lado direito, neste caso). Caso se tivesse efetuado o rebatimento dos planos de perfil para planos de projeção distintos ou para lados diferentes, não seria possível extrair nenhuma conclusão sobre o eventual paralelismo entre as duas retas.

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $p$  e  $p'$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O que é pedido é uma conclusão, pelo que, neste exercício, não há nenhum elemento gráfico que se represente a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à execução dos dois rebatimentos ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 5.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $p$  e  $p'$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $B$ . A reta  $p'$  está definida por dois pontos – os pontos  $C$  e  $D$ .

#### Resolução:

Retas de perfil têm sempre as projeções homónimas paralelas entre si, quer sejam paralelas ou não. Para averiguar se as retas  $p$  e  $p'$  são paralelas é necessário um raciocínio auxiliar que pode passar pelo procedimento exposto no exercício anterior ou, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, o recurso a um **processo geométrico auxiliar** (de uma forma mais específica, à **mudança do diedro de projeção**).

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo às retas  $p$  e  $p'$ , de forma a transformar as retas de perfil em retas frontais (de frente). Nesse sentido será criado um novo diedro de projeção, no qual as projeções das retas já verificarão o **Critério de Reversibilidade**.

Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo às retas  $p$  e  $p'$ , o eixo  $X'$  é paralelo às projeções horizontais das duas retas ( $p_1$  e  $p'_1$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).  $A_4$ ,  $B_4$ ,  $C_4$  e  $D_4$  são as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  no **plano 4** e determinaram-se em função das suas cotas, que se mantiveram.

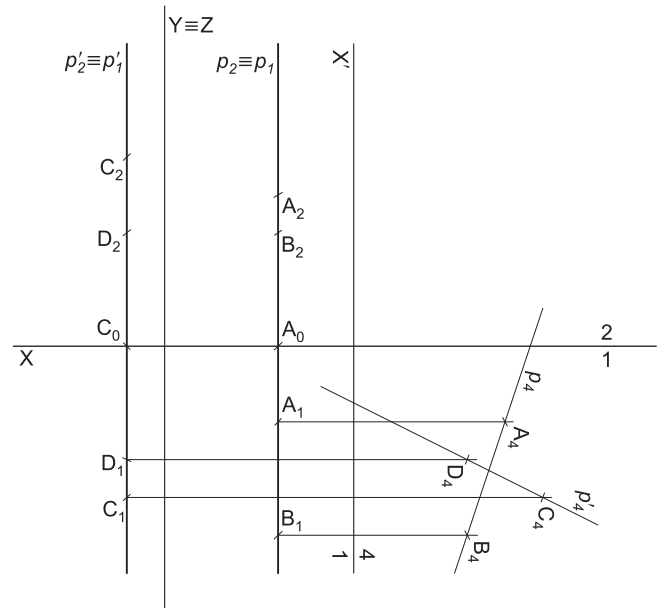
$A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $A$ ).  $B_4$  é a projeção do ponto  $B$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $B$ ).  $C_4$  é a projeção do ponto  $C$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $C_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $C_2$  ao eixo  $X$  (que é 5 cm – a cota de  $C$ ).  $D_4$  é a projeção do ponto  $D$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $D_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $D_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $D$ ).

Em seguida, desenharam-se as projeções das retas  $p$  e  $p'$  no **plano 4** –  $p_4$  (que está definida por  $A_4$  e  $B_4$ ) e  $p'_4$  (que está definida por  $C_4$  e  $D_4$ ). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), as projeções das duas retas já verificam o **Critério de Reversibilidade**. Assim, nesse diedro de projeção, as retas  $p$  e  $p'$  têm as suas projeções horizontais paralelas entre si, mas as suas projeções frontais (as novas projeções frontais) não são paralelas entre si, pelo que se conclui que as retas  $p$  e  $p'$  **não são paralelas**.

Sublinha-se que a mudança do diedro de projeção efetuada poderia ter transformado as retas de perfil em retas oblíquas em vez de retas frontais (de frente) – o objetivo é, afinal, criar um novo diedro de projeção no qual as retas de perfil passem a verificar o **Critério de Reversibilidade**.

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $p$  e  $p'$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O que é pedido é uma conclusão, pelo que, neste exercício, não há nenhum elemento gráfico que se represente a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 6.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $C$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $B$ .

### Resolução:

É pedida uma reta de perfil  $p'$ , passando pelo ponto  $C$  e paralela à reta  $p$ . Assim, foi possível desenhar, de forma imediata, as projeções da reta  $p'$ , passando pelas projeções do ponto  $C$ . No entanto, retas de perfil têm sempre as projeções homónimas paralelas entre si, quer sejam paralelas ou não, pelo que as projeções da reta  $p'$ , **por si só**, não nos garantem que a reta  $p'$  seja paralela à reta  $p$ .

Tendo em conta que existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto  $C$  (e que têm as projeções desenhadas), há a referir que, dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela à reta  $p$ . Assim, para garantir o paralelismo da reta  $p'$  em relação à reta  $p$  é necessário determinar um outro ponto da reta  $p'$ , o que nos garantirá que as duas retas são, efetivamente, paralelas.

Partindo do pressuposto que as duas retas são paralelas (porque é isso que é pedido no enunciado), sabe-se que as duas retas são necessariamente **complanares** (quaisquer duas retas paralelas são retas complanares), ou seja, definem um plano. Os dados desse plano são insuficientes para garantir o paralelismo entre as duas retas, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar desse plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $a$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $a$  é concorrente com a reta  $p$  no ponto  $A$  e concorrente com a reta  $p'$  no ponto  $C$  (a reta  $a$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $C$ ).

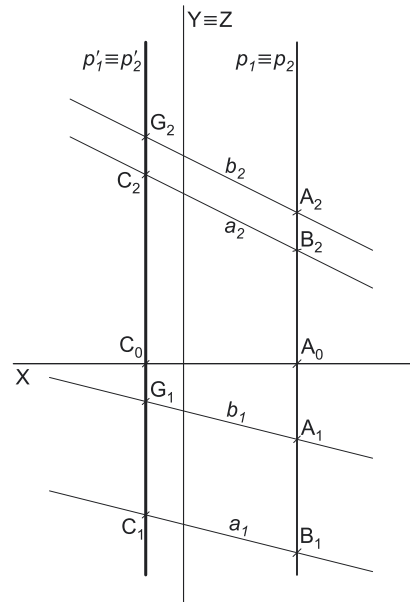
Os dados do plano são ainda insuficientes para averiguar o pretendido, pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $b$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $b$  é concorrente com a reta  $p$  no ponto  $B$  e é paralela à reta  $a$  – a reta  $b$  está definida por um ponto (o ponto  $B$ ) e uma direção (a direção da reta  $a$ ).

Note que já temos quatro retas do mesmo plano – as retas  $p$  e  $p'$  (as retas que definem o plano) e, para além destas, as retas  $a$  e  $b$  (as retas auxiliares). Assim, as retas  $b$  e  $p'$  são retas **complanares** (estão ambas contidas no plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$ ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois não têm as projeções homónimas paralelas entre si, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $G$ .

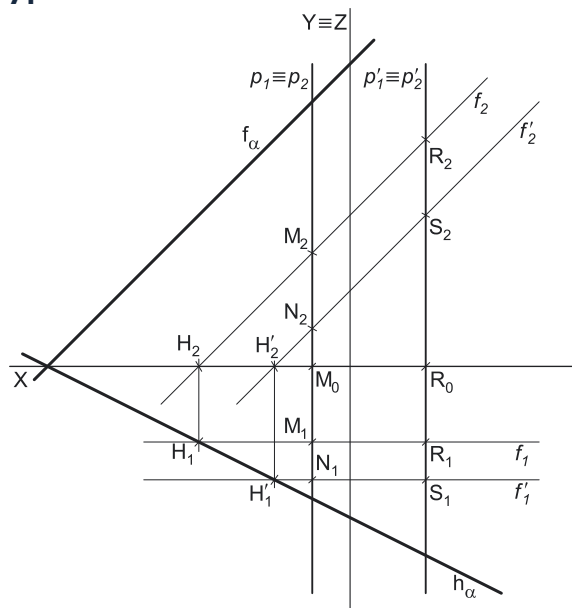
Está garantido que a reta  $p'$ , definida pelos pontos  $C$  e  $G$ , é paralela à reta  $p$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p'$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $a$  e  $b$  ou do eixo  $Y = Z$ , que é uma linha de referência).



## 7.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $p$  e  $p'$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $M$  e  $N$ . A reta  $p'$  está definida por um ponto (o ponto  $R$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $p$ ).

### Resolução:

As duas retas (as retas  $p$  e  $p'$ ), porque são paralelas (é dado no enunciado), definem um plano (o plano  $\alpha$ ). São pedidos os traços desse plano. Poder-se-iam determinar os traços das duas retas, o que implicaria o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, optou-se por uma outra situação, como em seguida se expõe.

E pedida uma reta – o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dados do plano são insuficientes para definir a reta ( $h_\alpha$ ), pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $f$ , como reta auxiliar do plano  $\alpha$ . A reta  $f$  é concorrente com a reta  $p$  no ponto  $M$  e concorrente com a reta  $p'$  no ponto  $R$  (a reta  $f$  está definida por dois pontos – os pontos  $M$  e  $R$ ).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta  $f$  – o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir a reta ( $h_\alpha$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os dados do plano  $\alpha$  são ainda insuficientes para determinar o elemento em falta (o ponto ou a direção), pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $f'$ , como reta auxiliar do plano  $\alpha$ . A reta  $f'$  é concorrente com a reta  $p$  no ponto  $S$  e é paralela à reta  $f$  – a reta  $f'$  está definida por um ponto (o ponto  $R$ ) e por uma direção (a direção da reta  $f$ ).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta  $f'$  – o ponto  $H'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta ( $h_\alpha$ ) –  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos (os pontos  $H$  e  $H'$ ).

Determinemos, em seguida, o traço frontal do plano  $\alpha$ . É pedida uma reta – o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\alpha$  são duas retas do plano que são necessariamente concorrentes num ponto do eixo  $X$ . Assim, já temos um ponto, que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\alpha$  (o ponto em que  $h_\alpha$  é concorrente com o eixo  $X$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, as retas auxiliares a que se recorreu (as retas  $f$  e  $f'$ ) são retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$  e o traço frontal do plano é, também ele, uma reta frontal do plano  $\alpha$  (com afastamento nulo). Assim, já temos a direção que nos faltava – a direção das retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$ .

O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ).

Sublinha-se que, apesar de se terem desenhado, de forma imediata, as projeções da reta  $p'$ , passando pelas projeções do ponto  $R$ , ainda não se garantiu o paralelismo entre as duas retas de perfil. Para garantir que a reta  $p'$  é paralela à reta  $p$ , é necessário determinar um outro ponto da reta  $p'$ , que nos permita garantir isso mesmo.

Por outro lado, note que já temos quatro retas do mesmo plano – as retas  $p$  e  $p'$  (as retas que definem o plano) e, para além destas, as retas  $f$  e  $f'$  (as retas auxiliares a que se recorreu). Assim, as retas  $f'$  e  $p'$  são retas **complanares** (estão ambas contidas no plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$ ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois não têm as projeções homónimas paralelas entre si, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $S$ .

Está garantido que a reta  $p'$ , definida pelos pontos  $R$  e  $S$ , é paralela à reta  $p$ .

Note ainda que a utilidade das retas de perfil para a resolução do exercício foi absolutamente nenhuma. De facto, o exercício teria a mesma resolução caso se tratasse de um plano definido por três pontos não colineares – os pontos  $M$ ,  $N$  e  $R$ . De facto, para se resolver o exercício determinando, por exemplo, os traços das retas  $p$  e  $p'$ , seria necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, pois as projeções das retas de perfil não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $p$  e  $p'$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $f$  e  $f'$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 8.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $p$  e  $p'$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $B$ . A reta  $p'$  está definida por um ponto (o ponto  $C$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $p$ ). Em seguida, representou-se também o plano  $v$  (o plano horizontal), pelo seu traço frontal, em função da sua cota. O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

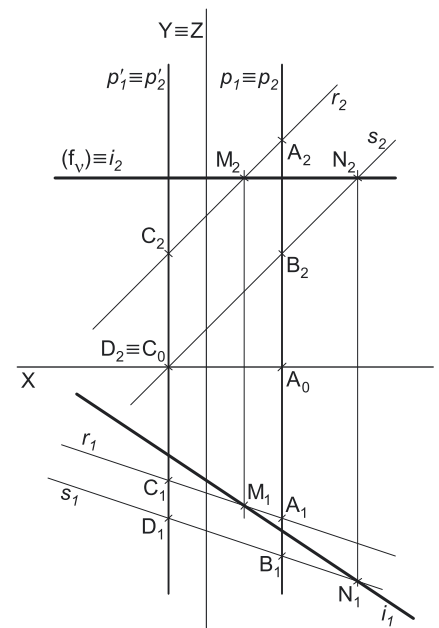
#### Resolução:

As duas retas (as retas  $p$  e  $p'$ ), porque são paralelas (é dado no enunciado), definem um plano (o plano  $\delta$ ). É pedida a reta de interseção desse plano com o plano  $v$  – a reta  $i$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que projeta todas as suas retas e pontos no Plano Frontal de Projeção, sobre o seu traço frontal. Assim, a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ) está sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pelo que se tem imediatamente  $i_2 \equiv (f_v)$ . Poder-se-iam determinar os pontos de interseção das duas retas com o plano  $v$ , mas tal implicaria o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, optou-se por uma outra situação, como em seguida se expõe.

Os dados do plano são insuficientes para definir a reta  $i$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $r$ , como reta auxiliar do plano  $\delta$ . A reta  $r$  é concorrente com a reta  $p$  no ponto  $A$  e concorrente com a reta  $p'$  no ponto  $C$  (a reta  $r$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $C$ ).

A reta  $r$  e a reta  $i$  são **complanares** (pertencem, ambas, ao plano  $\delta$ ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois as suas projeções frontais não são paralelas entre si, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $M$ . Já temos um ponto para definir a reta  $i$ . Falta-nos outro ponto ou a direção.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os dados do plano  $\delta$  são ainda insuficientes para determinar o elemento em falta (o ponto ou a direção), pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $s$ , como reta auxiliar do plano  $\delta$ . A reta  $s$  é concorrente com a reta  $p$  no ponto  $B$  e é paralela à reta  $r$  – a reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto  $B$ ) e por uma direção (a direção da reta  $r$ ).

A reta  $s$  e a reta  $i$  são complanares (pertencem, ambas, ao plano  $\delta$ ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois as suas projeções frontais não são paralelas entre si, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $N$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ .

A reta  $i$  está, assim, definida por dois pontos – o ponto  $M$  e o ponto  $N$ .

Sublinha-se que, apesar de se terem desenhado, de forma imediata, as projeções da reta  $p'$ , passando pelas projeções do ponto  $C$ , ainda não se garantiu o paralelismo entre as duas retas de perfil. Para garantir que a reta  $p'$  é paralela à reta  $p$ , é necessário determinar um outro ponto da reta  $p'$ , que nos permita garantir isso mesmo.

Por outro lado, note que já temos **cinco retas** do mesmo plano – as retas  $p$  e  $p'$  (as retas que definem o plano) e, para além destas, as retas  $r$  e  $s$  (as retas auxiliares a que se recorreu) e, ainda, a reta  $i$ . Assim, as retas  $s$  e  $p'$  são retas **complanares** (estão ambas contidas no plano  $\delta$ ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois não têm as projeções homónimas paralelas entre si, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $D$ .

Está garantido que a reta  $p'$ , definida pelos pontos  $C$  e  $D$ , é paralela à reta  $p$ .

Note ainda que a utilidade das retas de perfil para a resolução do exercício foi absolutamente nenhuma. De facto, o exercício teria a mesma resolução caso se tratasse de um plano definido por três pontos não colineares – os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . De facto, para se resolver o exercício determinando, por exemplo, os pontos de concorrência da reta  $i$  com as retas  $p$  e  $p'$ , seria necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, pois as projeções das retas de perfil não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $p$  e  $p'$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $f$  e  $f'$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 9.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $B$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$ , sendo uma reta passante, é concorrente com o eixo  $X$  (no ponto  $P$ ). Assim, a reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $P$ .

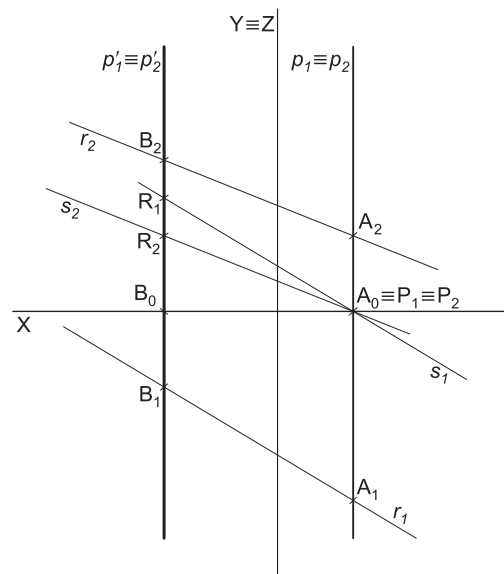
### Resolução:

É pedida uma reta de perfil  $p'$ , passando pelo ponto  $B$  e paralela à reta  $p$ . Assim, foi possível desenhar, de forma imediata, as projeções da reta  $p'$ , passando pelas projeções do ponto  $B$ . No entanto, retas de perfil têm sempre as projeções homónimas paralelas entre si, quer sejam paralelas ou não, pelo que as projeções da reta  $p'$ , **por si só**, não nos garantem que a reta  $p'$  seja paralela à reta  $p$ .

Tendo em conta que existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto  $B$  (e que têm as projeções desenhadas), há a referir que, dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela à reta  $p$ . Assim, para garantir o paralelismo da reta  $p'$  em relação à reta  $p$  é necessário determinar um outro ponto da reta  $p'$ , o que nos garantirá que as duas retas são, efetivamente, paralelas. A determinação desse outro ponto poder-se-ia processar com o recurso a um processo geométrico auxiliar mas, como o enunciado pede expressamente, pretende-se que o exercício seja resolvido **sem o recurso a qualquer processo geométrico auxiliar**.

Assim, partindo do pressuposto que as duas retas são paralelas (porque é isso que é pedido no enunciado), sabe-se que as duas retas são necessariamente **complanares** (quaisquer duas retas paralelas são retas complanares), ou seja, definem um plano. Os dados desse **plano** são insuficientes para garantir o paralelismo entre as duas retas, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar desse plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $r$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $r$  é concorrente com a reta  $p$  no ponto  $A$  e concorrente com a reta  $p'$  no ponto  $B$  (a reta  $r$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $B$ ).

Os dados do **plano** são ainda insuficientes para averiguar o pretendido, pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $s$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $s$  é concorrente com a reta  $p$  no ponto  $P$  e é paralela à reta  $r$  – a reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e uma direção (a direção da reta  $s$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que já temos quatro retas do mesmo plano – as retas  $p$  e  $p'$  (as retas que definem o plano) e, para além destas, as retas  $r$  e  $s$  (as retas auxiliares do plano). Assim, as retas  $s$  e  $p'$  são retas **complanares** (estão ambas contidas no plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$ ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois não têm as projeções homónimas paralelas entre si, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $R$ .

Está garantido o paralelismo entre as retas  $p$  e  $p'$ . A reta  $p'$ , definida pelos pontos  $B$  e  $R$ , é a reta de perfil que passa pelo ponto  $B$  e é paralela à reta  $p$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p'$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 10.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $B$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$ , sendo uma reta passante, é concorrente com o eixo  $X$  (no ponto  $P$ ). Assim, a reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $P$ .

#### Resolução:

É pedida uma reta de perfil  $p'$ , passando pelo ponto  $B$  e paralela à reta  $p$ . Assim, foi possível desenhar, de forma imediata, as projeções da reta  $p'$ , passando pelas projeções do ponto  $B$ . No entanto, retas de perfil têm sempre as projeções homónimas paralelas entre si, quer sejam paralelas ou não, pelo que as projeções da reta  $p'$ , **por si só**, não nos garantem que a reta  $p'$  seja paralela à reta  $p$ .

Tendo em conta que existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto  $B$  (e que têm as projeções desenhadas), há a referir que, dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela à reta  $p$ . Assim, para garantir o paralelismo da reta  $p'$  em relação à reta  $p$  é necessário determinar um outro ponto da reta  $p'$ , o que nos garantirá que as duas retas são, efetivamente, paralelas. A determinação desse outro ponto poder-se-ia processar conforme exposto no exercício anterior ou, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, o recurso a um **processo geométrico auxiliar** (ou, de uma forma mais específica, o recurso ao processo do **rebatimento**).

Tendo em conta que apenas se rebatem planos, o recurso a um **rebatimento** refere-se necessariamente ao **rebatimento do plano de perfil**.

Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano de perfil que a contém – o plano  $\pi$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_{\pi}$ , que é uma reta vertical), rebatendo os pontos  $A$  e  $P$ , o que nos permitiu determinar  $A_r$  e  $P_r$ . O ponto  $P_r$  um ponto da charneira, pelo que se tem imediatamente  $P_r \equiv P_2$ . Note que os arcos do rebatimento estão contidos em planos horizontais (planos ortogonais à charneira), pelo que se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, os pontos, ao longo do seu rebatimento, mantêm as suas cotas. Em seguida, desenhou-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $P_r$ .

De forma semelhante, conduziu-se, pela reta  $p'$ , o plano de perfil que a contém – o plano  $\pi'$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi'$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_{\pi'}$ , que é uma reta vertical), rebatendo o ponto  $B$ , o que nos permitiu determinar  $B_r$ . Note que o arco do rebatimento do ponto  $B$  está contido num plano horizontal (um plano ortogonal à charneira), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, o ponto  $B$ , ao longo do seu rebatimento, mantém a sua cota.

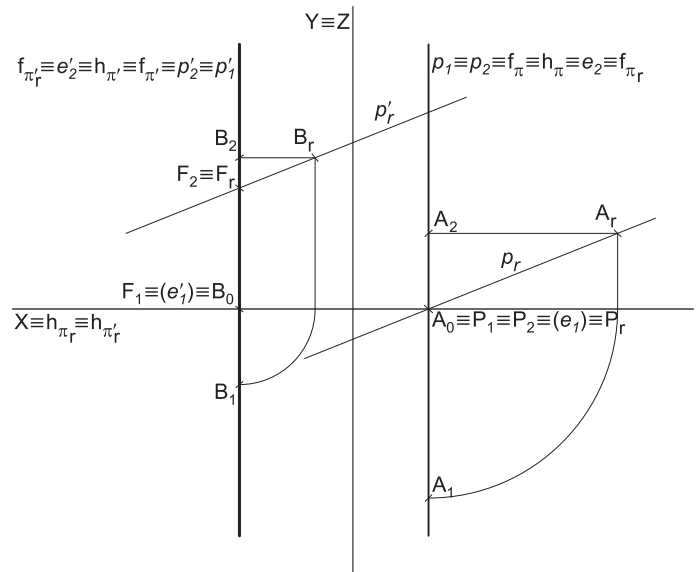
Já temos um ponto para definir a reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  em rebatimento) – o ponto  $B_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. As retas  $p$  e  $p'$  são paralelas (é dado no enunciado), pelo que as retas  $p_r$  e  $p'_r$  (as retas  $p$  e  $p'$  rebatidas) são necessariamente paralelas. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $p'_r$  – a direção da reta  $p_r$ . Assim, por  $C_r$  conduziu-se a reta  $p'_r$ , paralela à reta  $p_r$ . Por fim, representou-se um outro ponto sobre a reta  $p'_r$  – o ponto que nos garante o paralelismo da reta  $p'$  à reta  $p$ . Esse ponto foi o seu traço frontal –  $F_r$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento, determinando as projeções do ponto  $F$  –  $F$  é o traço frontal da reta  $p'$ . O ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que se tem  $F_2 \equiv F_r$  e  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ) situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $F$  tem afastamento nulo.

Está garantido o paralelismo entre as retas  $p$  e  $p'$ . A reta  $p'$ , definida pelos pontos  $B$  e  $F$ , é a reta de perfil que passa pelo ponto  $B$  e é paralela à reta  $p$ .

Tenha em conta que o procedimento exposto se fundamenta no rebatimento de dois planos de perfil distintos. Assim, de forma a ser possível averiguar o paralelismo entre as duas retas, o rebatimento dos dois planos de perfil tem de se efetuar **para o mesmo plano de projeção** (o Plano Frontal de Projeção, neste caso) e **para o mesmo lado** (para o lado direito, neste caso). Caso se tivesse efetuado o rebatimento dos planos de perfil para planos de projeção distintos ou para lados diferentes, não seria possível extrair nenhuma conclusão sobre o eventual paralelismo entre as duas retas.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p'$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à execução dos dois rebatimentos ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 11.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $B$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$ , sendo uma reta passante, é concorrente com o eixo  $X$  (no ponto  $P$ ). Assim, a reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $P$ .

### Resolução:

É pedida uma reta de perfil  $p'$ , passando pelo ponto  $B$  e paralela à reta  $p$ . Assim, foi possível desenhar, de forma imediata, as projeções da reta  $p'$ , passando pelas projeções do ponto  $B$ . No entanto, retas de perfil têm sempre as projeções homónimas paralelas entre si, quer sejam paralelas ou não, pelo que as projeções da reta  $p'$ , **por si só**, não nos garantem que a reta  $p'$  seja paralela à reta  $p$ .

Tendo em conta que existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto  $B$  (e que têm as projeções desenhadas), há a referir que, dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela à reta  $p$ . Assim, para garantir o paralelismo da reta  $p'$  em relação à reta  $p$  é necessário determinar um outro ponto da reta  $p'$ , o que nos garantirá que as duas retas são, efetivamente, paralelas. A determinação desse outro ponto poder-se-ia processar conforme exposto no exercício anterior ou, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, o recurso a um **processo geométrico auxiliar** (ou, de uma forma mais específica, o recurso à **mudança do diedro de projeção**).

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo às retas  $p$  e  $p'$ , de forma a transformar as retas de perfil em retas frontais (de frente). Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção, no qual as projeções das retas já verificarão o **Critério de Reversibilidade**.

Dessa forma, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo às retas  $p$  e  $p'$ , o eixo  $X'$  é paralelo às projeções horizontais das duas retas ( $p_1$  e  $p'_1$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_4$  e  $B_4$  determinaram-se em função das suas cotas, que se mantiveram.  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $A$ ).  $B_4$  é a projeção do ponto  $B$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $B$ ). Em seguida, desenhou-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), passando por  $A_4$  e por  $B_4$ .

$P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve (e que é nula, pois o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $X$ ) – assim,  $P_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois continua a ter cota nula, no novo diedro de projeção.

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), as projeções das duas retas já verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que o paralelismo entre as duas retas é direto, a partir das respetivas projeções. Assim, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $p'_4$  (a projeção da reta  $p'$  no **plano 4**), paralela a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**).

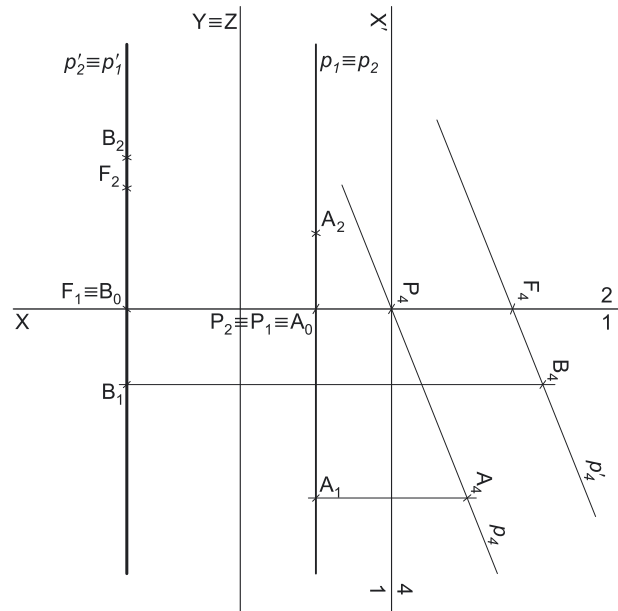
Por fim, representou-se um outro ponto sobre a reta  $p'_4$  – o ponto que nos garante (no diedro de projeção inicial) o paralelismo da reta  $p'$  em relação à reta  $p$  (o ponto  $F$ ). Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, determinando as projeções do ponto  $F$  –  $F$  é o traço frontal da reta  $p'$ .  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ) situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $F$  tem afastamento nulo.  $F_2$  é a projeção frontal do ponto  $F$  e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$ .

Está garantido o paralelismo entre as retas  $p$  e  $p'$ . A reta  $p'$ , definida pelos pontos  $B$  e  $F$ , é a reta de perfil que passa pelo ponto  $B$  e é paralela à reta  $p$ .

Sublinha-se que a mudança do diedro de projeção efetuada poderia ter transformado as retas de perfil em retas oblíquas em vez de retas frontais (de frente) – o objetivo é, afinal, criar um novo diedro de projeção no qual as retas de perfil passem a verificar o **Critério de Reversibilidade**.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p'$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).





## 12.

**Critério de paralelismo entre retas e planos:** uma reta é paralela a um plano se e só se for paralela a uma reta do plano (e não estiver contida nesse plano), ou seja, se pertencer a uma «família» de retas que o plano contenha. De forma recíproca, um plano é paralelo a uma reta se e só se contiver uma reta paralela à reta dada (e não contiver a reta dada), ou seja, se contiver a «família» de retas a que a reta dada pertence.

## 13.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, desenhou-se a projeção horizontal da reta **r** ( $r_1$ ), passando pela projeção horizontal do ponto **P** ( $P_1$ ) e fazendo, com o eixo **X**, o ângulo pedido.

**Resolução:**

Pretende-se uma reta **r**, paralela ao plano  $\alpha$  e passando pelo ponto **P**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **r** passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta **r** ser paralela ao plano  $\alpha$ , a reta **r** tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta **r** tem de ser paralela a uma reta do plano  $\alpha$  (a reta **r** tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\alpha$  contenha).

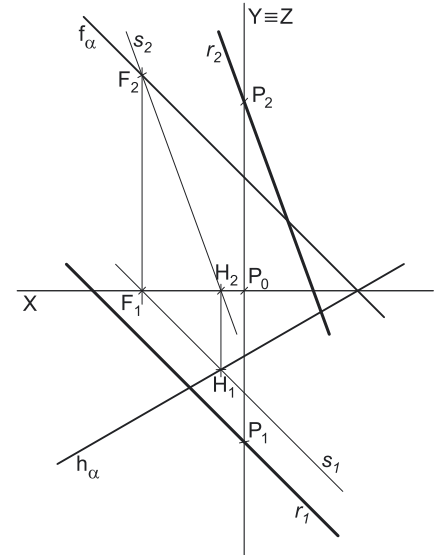
Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\alpha$  (a reta **s**), cuja projeção horizontal ( $s_1$ ) é paralela à projeção horizontal da reta **r** ( $r_1$ ). A reta **s** está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H** – os seus traços) e pertence ao plano  $\alpha$ , pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\alpha$ .

Para a reta **r** ser paralela ao plano  $\alpha$ , a reta **r** tem de ser paralela à reta **s**, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **r**. A reta **r** está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (a direção da reta **s**), pelo que se conduziu  $r_2$  (a projeção frontal da reta **r**) por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto **P**), paralela a  $s_2$  (a projeção frontal da reta **s**).

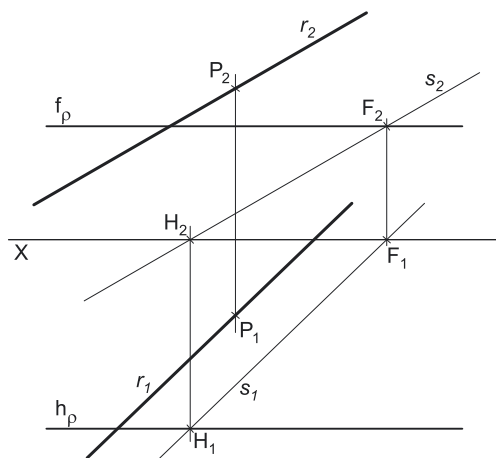
A reta **r** contém o ponto **P** e é paralela ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **r** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **s** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 14.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da reta **r** ( $r_2$ ), passando pela projeção frontal do ponto **P** ( $P_2$ ) e fazendo, com o eixo **X**, o ângulo pedido.

**Resolução:**

Pretende-se uma reta **r**, paralela ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto **P**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **r** passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta **r** ser paralela ao plano  $\rho$ , a reta **r** tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta **r** tem de ser paralela a uma reta do plano  $\rho$  (a reta **r** tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\rho$  contenha).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\rho$  (a reta **s**), cuja projeção frontal ( $s_2$ ) é paralela à projeção frontal da reta **r** ( $r_2$ ). A reta **s** está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H** – os seus traços) e pertence ao plano  $\rho$ , pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\rho$ .

Para a reta **r** ser paralela ao plano  $\rho$ , a reta **r** tem de ser paralela à reta **s**, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **r**. A reta **r** está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (a direção da reta **s**), pelo que se conduziu  $r_1$  (a projeção horizontal da reta **r**) por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto **P**), paralela a  $s_1$  (a projeção horizontal da reta **s**).

A reta **r** contém o ponto **P** e é paralela ao plano  $\rho$ , conforme era pedido.

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **r** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **s**).

## 15.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se uma reta **p**, de perfil, passando pelo ponto **P** e paralela ao plano  $\alpha$ . Assim, foi possível desenhar, de forma imediata, as projeções da reta **p**, passando pelas projeções do ponto **P**. No entanto, as projeções das retas de perfil não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta **p**, **por si só**, não nos garantem que a reta **p** seja paralela ao plano  $\alpha$ .

Analisemos a situação. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Note que a reta **p** está contida no plano **YZ**, pois o ponto **P** tem abcissa nula.

Para a reta **p** ser paralela ao plano  $\alpha$ , a reta **p** tem de verificar o **Crítério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta **p** tem de ser paralela a uma reta do plano  $\alpha$  (a reta **p** tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\alpha$  contenha). Nesse sentido, a reta **p** tem de ser paralela a uma reta de perfil que pertença ao plano  $\alpha$  (tem de pertencer à «família» das retas de perfil do plano  $\alpha$ ).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta de perfil **p'**, auxiliar, pertencente ao plano  $\alpha$ . A reta **p'** está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H** – os seus traços) e pertence ao plano  $\alpha$ , pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\alpha$ . Para a reta **p** ser paralela ao plano  $\alpha$ , a reta **p** tem de ser paralela à reta **p'** – trata-se da situação de paralelismo entre retas de perfil. Assim, pretende-se garantir que a reta **p** é paralela à reta **p'**.

Assim, pretende-se uma reta de perfil **p**, passando pelo ponto **P** e paralela à reta **p'**. Tendo em conta que existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto **P** (e que têm as projeções desenhadas), dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela à reta **p'**. Assim, para garantir o paralelismo da reta **p** em relação à reta **p'** é necessário determinar um outro ponto da reta **p**, o que nos garantirá que as duas retas são, efetivamente, paralelas. A determinação desse outro ponto poder-se-ia processar com o recurso a um processo geométrico auxiliar (à semelhança do efetuado nos exercícios 10. e 11.), mas optou-se pela situação do exercício 9.

Assim, partindo do pressuposto de que as duas retas são paralelas (porque é o que se pretende), sabe-se que as duas retas são necessariamente **complanares** (quaisquer duas retas paralelas são retas coplanares), ou seja, definem um plano (que **não é** o plano  $\alpha$ ). Os dados desse plano são insuficientes para garantir o paralelismo entre as duas retas, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar desse plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta **r**, como reta auxiliar do plano. A reta **r** é concorrente com a reta **p** no ponto **P** e concorrente com a reta **p'** no ponto **H** (o seu traço horizontal) – a reta **r** está definida por dois pontos (os pontos **P** e **H**).

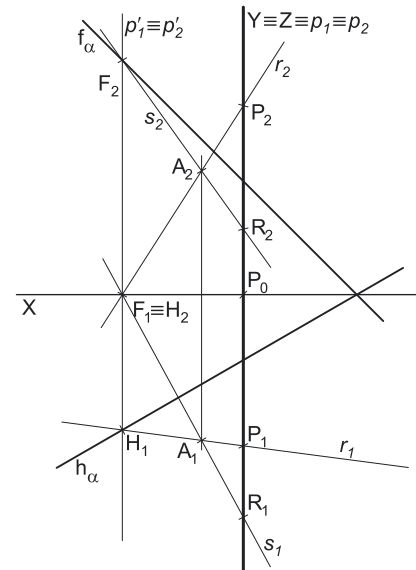
Os dados do plano são ainda insuficientes para averiguar o pretendido, pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta **s**, como reta auxiliar do plano. A reta **s** é concorrente com a reta **p'** no ponto **F** (o seu traço frontal) e é concorrente com a reta **r** no ponto **A** – a reta **s** está definida por dois pontos (os pontos **F** e **A**).

Note que já temos quatro retas do mesmo plano (que **não é** o plano  $\alpha$ ) – as retas **p** e **p'** (as retas que definem esse plano) e, para além destas, as retas **r** e **s** (as retas auxiliares do plano). Assim, as retas **s** e **p** são retas **complanares** (estão ambas contidas no plano definido pelas retas **p** e **p'**), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois não têm as projeções homónimas paralelas entre si, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **R**.

Está garantido o paralelismo entre as retas **p** e **p'**. A reta **p**, definida pelos pontos **P** e **R**, é a reta de perfil que passa pelo ponto **P** e é paralela à reta **p'**. Assim, a reta **p** é paralela ao plano  $\alpha$ , porque é paralela a uma reta do plano  $\alpha$  – a reta **p'**.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **p** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **p'**, **r** e **s**).





## 16.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados.

**Resolução:**

Pretende-se uma reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto **P** e paralela ao plano  $\rho$ . Assim, foi possível desenhar, de forma imediata, as projeções da reta  $p$ , passando pelas projeções do ponto **P**. No entanto, as projeções das retas de perfil não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$ , **por si só**, não nos garantem que a reta  $p$  seja paralela ao plano  $\rho$ .

Analisemos a situação. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta  $p$  ser paralela ao plano  $\rho$ , a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser paralela a uma reta do plano  $\rho$  (a reta  $p$  tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\alpha$  contenha). Nesse sentido, a reta  $p$  tem de ser paralela a uma reta de perfil que pertença ao plano  $\rho$  (tem de pertencer à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ ).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta de perfil  $p'$ , auxiliar, pertencente ao plano  $\rho$ . A reta  $p'$  está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H** – os seus traços) e pertence ao plano  $\rho$ , pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\rho$ . Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta  $p'$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $p$ .

Para a reta  $p$  ser paralela ao plano  $\rho$ , a reta  $p$  tem de ser paralela à reta  $p'$  – trata-se da situação de paralelismo entre retas de perfil. Assim, pretende-se garantir que a reta  $p$  é paralela à reta  $p'$ .

A reta  $p'$  é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir o paralelismo das retas  $p$  e  $p'$ . Assim, optou-se pelo recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível garantir o paralelismo entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

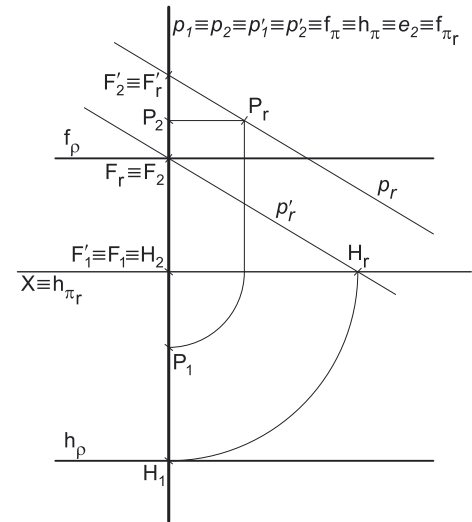
Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ , que é uma reta vertical). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se os pontos **F**, **H** e **P**. Note que os arcos do rebatimento estão contidos em planos horizontais (planos ortogonais à charneira), pelo que se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, os pontos, ao longo do seu rebatimento, mantêm as suas cotas. Em seguida, desenhou-se  $p'_r$ , que passa por  $F_r$  e por  $H_r$  (a reta  $p'_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $F_r$  e  $H_r$ ).

Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , paralela a  $p'_r$ . Já garantimos, em rebatimento, o paralelismo da reta  $p$  em relação à reta  $p'$ , pelo que está garantido o paralelismo da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  pertence à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta  $p$  já é paralela ao plano  $\rho$ .

Sobre a reta  $p_r$ , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $F'_r$  (o seu traço frontal, em rebatimento). Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $F'$ , que é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (e um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F'_2 \equiv F'_r$ . A reta  $p$ , definida pelos pontos **P** e  $F'$ , é a reta de perfil que passa pelo ponto **P** e é paralela à reta  $p'$ . Assim, a reta  $p$  é paralela ao plano  $\rho$ , porque é paralela a uma reta do plano  $\rho$  – a reta  $p'$ .

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e das retas  $p$  e  $p'$ ).



## 17.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **M**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da reta **m** ( $m_2$ ), passando pela projeção frontal do ponto **M** ( $M_2$ ) e fazendo, com o eixo **X**, o ângulo pedido. Salienta-se que os traços do plano  $\rho$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\rho$  nunca poderiam estar coincidentes, a menos que se tratasse de um **plano passante** (o que não é o caso).

### Resolução:

Pretende-se uma reta **m**, paralela ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto **M**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **m** passa pelo ponto **M** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta **m** ser paralela ao plano  $\rho$ , a reta **m** tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta **m** tem de ser paralela a uma reta do plano  $\rho$  (a reta **m** tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\rho$  contenha).

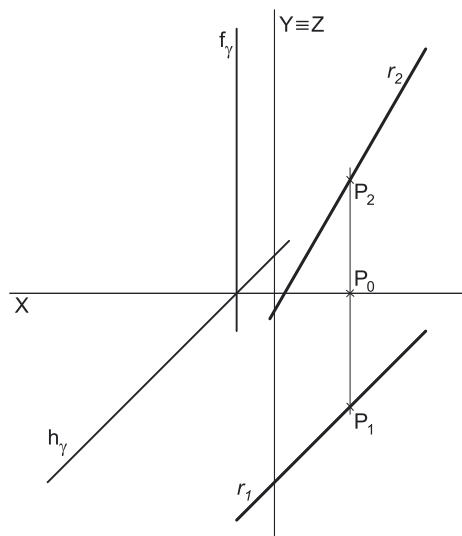
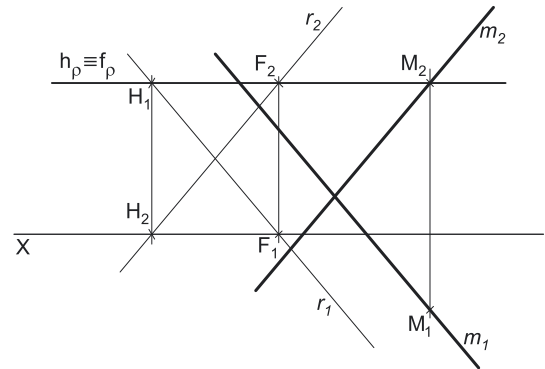
Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\rho$  (a reta **r**), cuja projeção frontal ( $r_2$ ) é paralela à projeção frontal da reta **m** ( $m_2$ ). A reta **r** está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H** – os seus traços) e pertence ao plano  $\rho$ , pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\rho$ .

Para a reta **m** ser paralela ao plano  $\rho$ , a reta **m** tem de ser paralela à reta **r**, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **m**. A reta **m** está definida por um ponto (o ponto **M**) e por uma direção (a direção da reta **r**), pelo que se conduziu  $m_1$  (a projeção horizontal da reta **m**) por  $M_1$  (a projeção horizontal do ponto **M**), paralela a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta **r**).

A reta **m** contém o ponto **M** e é paralela ao plano  $\rho$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **m** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **r**).



## 18.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da reta **r** ( $r_2$ ), passando pela projeção frontal do ponto **P** ( $P_2$ ) e fazendo, com o eixo **X**, o ângulo pedido.

### Resolução:

Pretende-se uma reta **r**, paralela ao plano  $\gamma$  e passando pelo ponto **P**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **r** passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta **r** ser paralela ao plano  $\gamma$ , a reta **r** tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\gamma$ , ou seja, a reta **r** tem de ser paralela a uma reta do plano  $\gamma$  (a reta **r** tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\gamma$  contenha).

Acontece que o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais de todas as suas retas estão sobre o traço horizontal do plano ( $h_\gamma$ ). Assim, a projeção horizontal da reta **r** tem de ser paralela ao traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), o que nos garante imediatamente que a reta **r** será necessariamente paralela a uma reta qualquer do plano  $\gamma$ . Dessa forma, conduziu-se  $r_1$  (a projeção horizontal da reta **r**) por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto **P**), paralela a  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ).

A reta **r** contém o ponto **P** e é paralela ao plano  $\gamma$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\gamma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **r** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo **Y = Z**, que é uma linha de referência).

## 19.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **A**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se uma reta **a**, paralela ao plano  $\theta$  e passando pelo ponto **A**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **a** passa pelo ponto **A** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta **a** ser paralela ao plano  $\theta$ , a reta **a** tem de verificar o **CrITÉrio de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\theta$ , ou seja, a reta **a** tem de ser paralela a uma reta do plano  $\theta$  (a reta **a** tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\theta$  contenha).

Acontece que o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais de todas as suas retas estão sobre o traço frontal do plano ( $f_\theta$ ). Assim, a projeção frontal da reta **a** tem de ser paralela ao traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), o que nos garante imediatamente que a reta **a** será necessariamente paralela a uma reta qualquer do plano  $\theta$ . Dessa forma, conduziu-se  $a_2$  (a projeção frontal da reta **a**) por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), paralela a  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ).

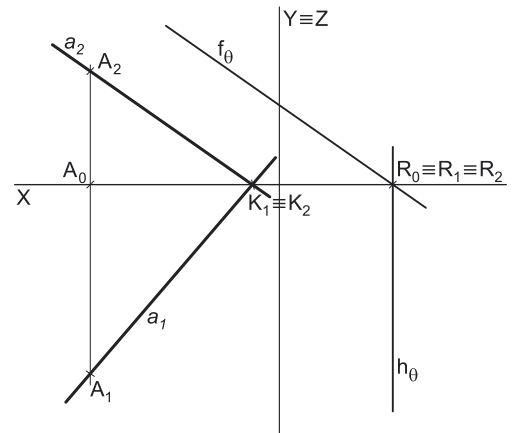
A projeção horizontal da reta **a** ( $a_1$ ) pode ter uma direção qualquer, pois o paralelismo entre a reta **a** e o plano  $\theta$  já está garantido. Sublinha-se, no entanto, que a única direção que a projeção horizontal da reta **a** ( $a_1$ ) não pode ter é a perpendicular ao eixo **X** pois, nesse caso, seria uma reta de topo (não uma reta oblíqua, que é o pedido) e, apesar de ser paralela ao plano  $\theta$ , não teria a projeção frontal já determinada.

Por fim, atendendo a que é pedido que a reta **a** seja uma reta passante (que é concorrente com o eixo **X**), determinou-se o seu ponto de concorrência com o eixo **X** – o ponto **K**. Já temos o ponto que nos faltava para defini a reta **a**.

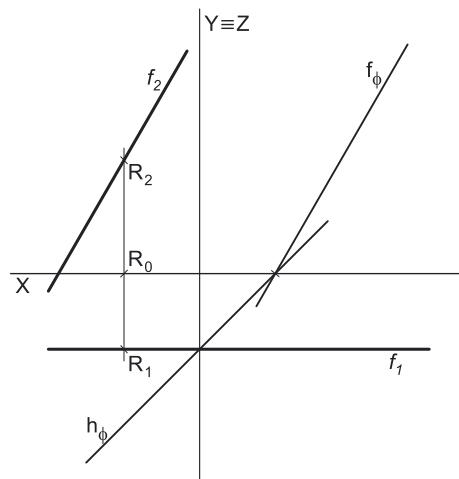
A reta **a** (definida pelos pontos **A** e **K**) contém o ponto **A** e é paralela ao plano  $\theta$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **a** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 20.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **R**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\phi$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, desenhou-se a projeção horizontal da reta **f** ( $f_1$ ), passando pela projeção horizontal do ponto **R** ( $R_1$ ) e paralela ao eixo **X** (trata-se de uma reta frontal).

### Resolução:

Pretende-se uma reta **f**, paralela ao plano  $\phi$  e passando pelo ponto **R**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **f** passa pelo ponto **R** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta **f** ser paralela ao plano  $\phi$ , a reta **f** tem de verificar o **CrITÉrio de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\phi$ , ou seja, a reta **f** tem de ser paralela a uma reta do plano  $\phi$  (a reta **f** tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\phi$  contenha).

Acontece que já é conhecida a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\phi$ , que é a «família» de retas do seu traço frontal ( $f_\phi$  é uma reta frontal do plano  $\phi$ , com afastamento nulo). Assim, para a reta **f** ser paralela ao plano  $\phi$ , basta que a reta **f** seja paralela ao traço frontal do plano ( $f_\phi$ ), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **f**. A reta **f** está definida por um ponto (o ponto **R**) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\phi$ ), pelo que se conduziu  $f_2$  (a projeção frontal da reta **f**) por  $R_2$  (a projeção frontal do ponto **R**), paralela a  $f_\phi$  (o traço frontal do plano  $\phi$ ).

A reta **f** contém o ponto **R** e é paralela ao plano  $\phi$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\phi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **f** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 21.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, desenhou-se a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), passando pela projeção horizontal do ponto **P** ( $P_1$ ) e fazendo, com o eixo **X**, o ângulo pedido. Salienta-se que os traços do plano  $\delta$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\delta$  nunca poderiam estar coincidentes.

### Resolução:

Pretende-se uma reta  $r$ , paralela ao plano  $\delta$  e passando pelo ponto **P**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $r$  passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta  $r$  ser paralela ao plano  $\delta$ , a reta  $r$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\delta$ , ou seja, a reta  $r$  tem de ser paralela a uma reta do plano  $\delta$  (a reta  $r$  tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\delta$  contenha).

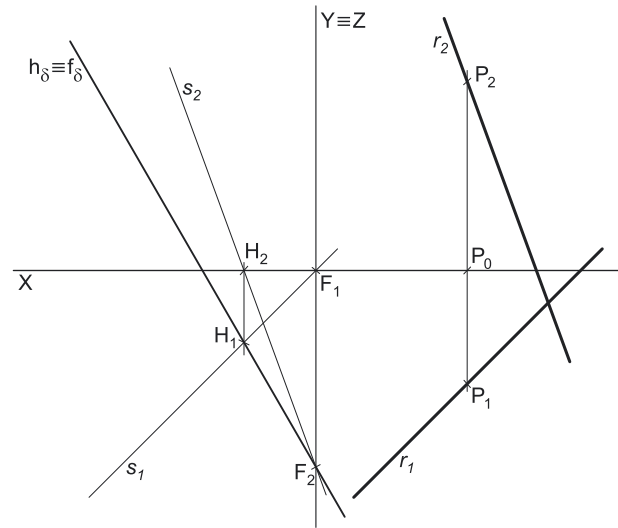
Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\delta$  (a reta  $s$ ), cuja projeção horizontal ( $s_1$ ) é paralela à projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ). A reta  $s$  está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H** – os seus traços) e pertence ao plano  $\delta$ , pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\delta$ .

Para a reta  $r$  ser paralela ao plano  $\delta$ , a reta  $r$  tem de ser paralela à reta  $s$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$ . A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (a direção da reta  $s$ ), pelo que se conduziu  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ) por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto **P**), paralela a  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ).

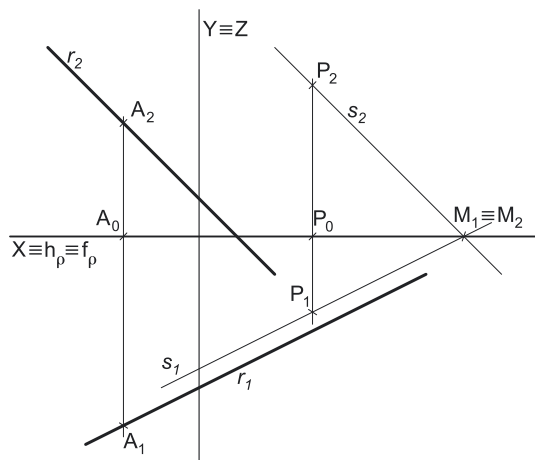
A reta  $r$  contém o ponto **P** e é paralela ao plano  $\delta$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $r$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $s$  e do eixo **Y = Z**, que é uma linha de referência).



## 22.



### Dados:

Em primeiro lugar representaram-se os pontos **P** e **A**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **P**. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ), passando pela projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ) e fazendo, com o eixo **X**, o ângulo pedido.

### Resolução:

Pretende-se uma reta  $r$ , paralela ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto **A**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $r$  passa pelo ponto **A** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta  $r$  ser paralela ao plano  $\rho$ , a reta  $r$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta  $r$  tem de ser paralela a uma reta do plano  $\rho$  (a reta  $r$  tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\rho$  contenha).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\rho$  (a reta  $s$ ), cuja projeção frontal ( $s_2$ ) é paralela à projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ). A reta  $s$  está definida por dois pontos – o ponto **P** (o ponto que define o plano passante) e o ponto **M** (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**). Note que qualquer reta oblíqua pertencente ao plano  $\rho$  (um plano passante) é necessariamente uma reta passante. Por outro lado, tendo em conta que o ponto **P** é um ponto conhecido do plano  $\rho$ , e que a reta  $s$  é uma reta qualquer do plano  $\rho$ , a situação mais conveniente seria, sempre, fazer a reta  $s$  passar pelo ponto **P**.

Para a reta  $r$  ser paralela ao plano  $\rho$ , a reta  $r$  tem de ser paralela à reta  $s$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$ . A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção da reta  $s$ ), pelo que se conduziu  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), paralela a  $s_1$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ).

A reta  $r$  contém o ponto **A** e é paralela ao plano  $\rho$ , conforme era pedido.

### Traçado:

O eixo **X**, onde se situam os traços do plano  $\rho$ , representou-se a **médio** pois é, em simultâneo, a linha estruturante do exercício e os dados. As projeções da reta  $r$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $s$  e do eixo **Y = Z**, que é uma linha de referência).

23.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **A**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto **A** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  tem coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). O plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **R**. Em seguida, desenhou-se a projeção horizontal da reta **m** ( $m_1$ ), passando pela projeção horizontal do ponto **A** ( $A_1$ ) e fazendo, com o eixo **X**, o ângulo pedido.

Resolução:

Pretende-se uma reta **m**, paralela ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto **A**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **m** passa pelo ponto **A** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta **m** ser paralela ao plano  $\rho$ , a reta **m** tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta **m** tem de ser paralela a uma reta do plano  $\rho$  (a reta **m** tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\rho$  contenha).

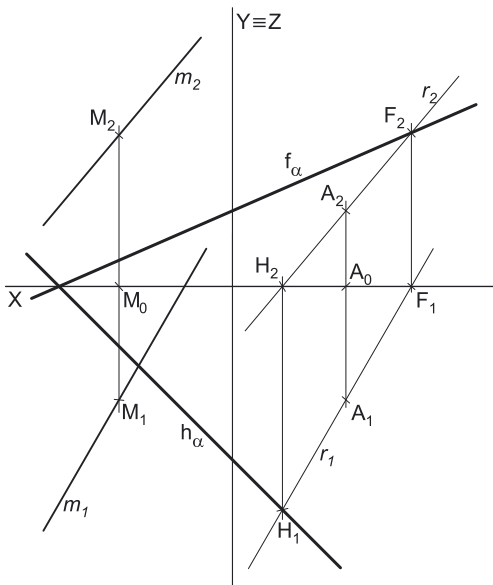
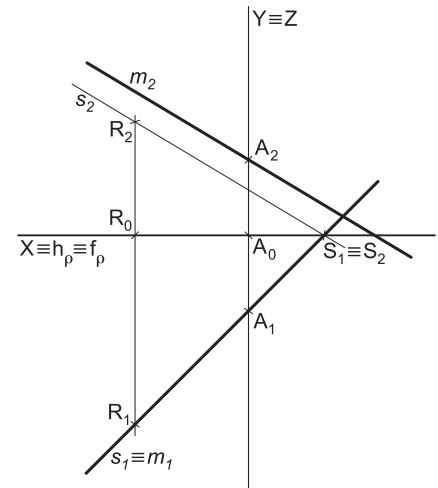
Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\rho$  (a reta **s**), cuja projeção horizontal ( $s_1$ ) é paralela à projeção horizontal da reta **m** ( $m_1$ ). A reta **s** está definida por dois pontos – o ponto **R** (o ponto que define o plano passante) e o ponto **S** (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**). Note que qualquer reta oblíqua pertencente ao plano  $\rho$  (um plano passante) é necessariamente uma reta passante. Por outro lado, tendo em conta que o ponto **R** é um ponto conhecido do plano  $\rho$ , e que a reta **s** é uma reta qualquer do plano  $\rho$ , a situação mais conveniente seria, sempre, fazer a reta **s** passar pelo ponto **R**. Note que, nesta situação, as projeções horizontais das duas retas  $m_1$  e  $s_1$  ficam coincidentes.

Para a reta **m** ser paralela ao plano  $\rho$ , a reta **m** tem de ser paralela à reta **s**, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **m**. A reta **m** está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção da reta **s**), pelo que se conduziu  $m_2$  (a projeção frontal da reta **m**) por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), paralela a  $s_2$  (a projeção frontal da reta **s**).

A reta **m** contém o ponto **A** e é paralela ao plano  $\rho$ , conforme era pedido.

Traçado:

O eixo **X**, onde se situam os traços do plano  $\rho$ , representou-se a **médio** pois é, em simultâneo, a linha estruturante do exercício e os dados. As projeções da reta **m** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **s** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



24.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta **m** e o ponto **A**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta **m** está definida por um ponto (o ponto **M**) e por uma direção (a direção das suas projeções, dadas no enunciado).

Resolução:

Pretende-se um plano  $\alpha$ , paralelo à reta **m** e contendo o ponto **A**. Para o plano  $\alpha$  ser paralelo à reta **m, o plano  $\alpha$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta **m**, ou seja, o plano  $\alpha$  tem de conter uma reta paralela à reta **m** (o plano  $\alpha$  tem de conter a «família» de retas a que a reta **m** pertence).**

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\alpha$  (a reta **r**), paralela à reta **m** e passando pelo ponto **A**. A reta **r** está definida por um ponto (o ponto **A**) e uma direção (a direção da reta **m**).

- A reta **r**, sendo uma reta do plano  $\alpha$ , garante-nos imediatamente os dois factos pedidos no enunciado:
1. que o ponto **A** pertence ao plano  $\alpha$  (pois pertence a uma reta do plano  $\alpha$  – a reta **r**);
  2. que o plano  $\alpha$  é paralelo à reta **m** (porque contém uma reta paralela à reta **m** – a reta **r**).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta **r** (o ponto **H**) e pelo ponto **H** conduziu-se o traço horizontal do plano, atendendo ao ângulo dado. O traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto **H**) e uma direção (a direção dada no enunciado).

Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta **r** (o ponto **F**) e conduziu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) pelo ponto **F**, sendo concorrente com  $h_\alpha$  no eixo **X**. O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) está definido por dois pontos – o ponto **F** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

O plano  $\alpha$  contém o ponto **A** e é paralelo à reta **m**, conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta **m**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **s** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 25.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $A$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (a direção das suas projeções, dadas no enunciado).

### Resolução:

Pretende-se um plano  $\rho$ , de rampa, paralelo à reta  $r$  e contendo o ponto  $A$ . Para o plano  $\rho$  ser paralelo à reta  $r$ , o plano  $\rho$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta  $r$ , ou seja, o plano  $\rho$  tem de conter uma reta paralela à reta  $r$  (o plano  $\rho$  tem de conter a «família» de retas a que a reta  $r$  pertence).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\rho$  (a reta  $s$ ), paralela à reta  $r$  e passando pelo ponto  $A$ . A reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e uma direção (a direção da reta  $r$ ). A reta  $s$ , sendo uma reta do plano  $\rho$ , garante-nos imediatamente os dois factos pedidos no enunciado:

1. que o ponto  $A$  pertence ao plano  $\rho$  (pois pertence a uma reta do plano  $\rho$  – a reta  $s$ );
2. que o plano  $\rho$  é paralelo à reta  $r$  (porque contém uma reta paralela à reta  $r$  – a reta  $s$ ).

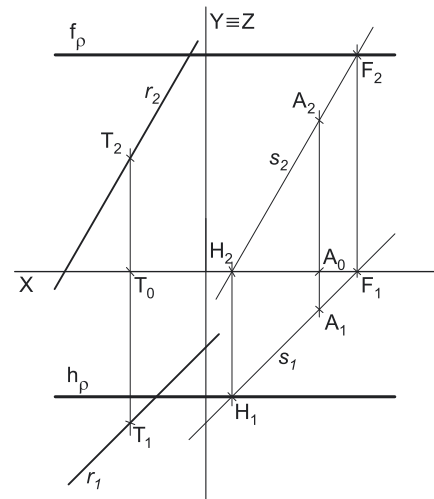
Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta  $s$  (o ponto  $F$ ) e pelo ponto  $F$  conduziu-se o traço frontal do plano  $\rho$ , que é uma reta fronto-horizontal. O traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e uma direção (a direção das retas fronto-horizontais).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta  $s$  (o ponto  $H$ ) e conduziu-se o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ) pelo ponto  $H$ , que é outra reta fronto-horizontal. O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e uma direção (a direção das retas fronto-horizontais).

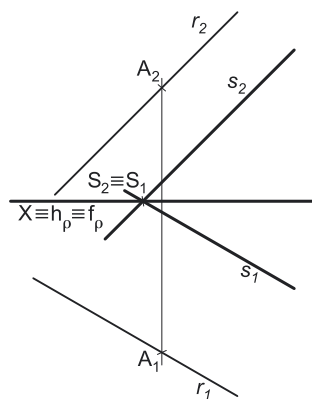
O plano  $\rho$  é um plano de rampa, contém o ponto  $A$  e é paralelo à reta  $r$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\rho$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $s$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 26.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (a direção das suas projeções (dadas no enunciado)).

### Resolução:

Pretende-se um plano  $\rho$ , passante, paralelo à reta  $r$ . Os traços do plano  $\rho$  (o plano passante paralelo à reta  $r$ ) determinaram-se imediatamente – estão ambos coincidentes com o eixo  $X$ . No entanto, os traços do plano  $\rho$ , porque **são uma única reta**, são insuficientes para definir o plano (um plano só pode estar definido por uma única reta se essa reta for uma das suas retas de maior declive ou uma das suas retas de maior inclinação).

Para o plano  $\rho$  ser paralelo à reta  $r$ , o plano  $\rho$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta  $r$ , ou seja, o plano  $\rho$  tem de conter uma reta paralela à reta  $r$  (o plano  $\rho$  tem de conter a «família» de retas a que a reta  $r$  pertence).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\rho$  (a reta  $s$ ), paralela à reta  $r$  e concorrente com o eixo  $X$  no ponto  $S$ . A reta  $s$  e necessariamente uma **reta passante**. A reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto  $S$ ) e uma direção (a direção da reta  $r$ ). A reta  $s$ , sendo uma reta do plano  $\rho$ , garante-nos imediatamente o pedido no enunciado: que o plano  $\rho$  é paralelo à reta  $r$ , porque contém uma reta paralela à reta  $r$  (a reta  $s$ ). O plano  $\rho$  é um plano passante paralelo à reta  $r$ , conforme era pedido.

O plano passante (o plano  $\rho$ ) está definido por **duas retas concorrentes** – o eixo  $X$  e a reta  $s$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\rho$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $s$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 27.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $f$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $f$  está definida por um ponto (o seu traço horizontal, o ponto  $H$ ) e pela sua direção (a direção dada no enunciado).

**Resolução:**

Pretende-se um plano  $\alpha$ , oblíquo, paralelo à reta  $f$  e contendo o ponto  $P$ . Para o plano  $\alpha$  ser paralelo à reta  $f$ , o plano  $\alpha$  tem de verificar o **CrITÉRIO DE PARALELISMO ENTRE PLANOS E RETAS** em relação à reta  $f$ , ou seja, o plano  $\alpha$  tem de conter uma reta paralela à reta  $f$  (o plano  $\delta$  tem de conter a «família» de retas  $a$  que a reta  $f$  pertence).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\alpha$  (a reta  $f'$ ), paralela à reta  $f$  e passando pelo ponto  $P$ . A reta  $f'$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e uma direção (a direção da reta  $f$ ). A reta  $f'$ , sendo uma reta do plano  $\alpha$ , garante-nos imediatamente os dois factos pedidos no enunciado:

1. que o ponto  $P$  pertence ao plano  $\alpha$  (pois pertence a uma reta do plano  $\alpha$  – a reta  $f'$ );
2. que o plano  $\alpha$  é paralelo à reta  $f$  (porque contém uma reta paralela à reta  $f$  – a reta  $f'$ ).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta  $f'$  (o ponto  $H$ ) e por  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H$ ) conduziu-se o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). Tendo em conta que o enunciado pede especificamente que o plano tenha os seus traços coincidentes, já sabemos a direção (no papel) de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – é paralelo à projeção frontal da reta  $f$  ( $f_2$ ).

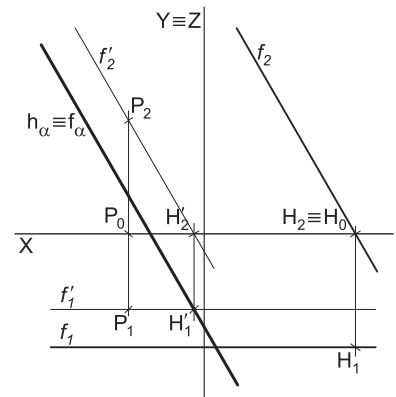
O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é concorrente com  $h_\alpha$  num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir  $f_\alpha$ . A reta  $f'$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (que é uma reta frontal do plano com afastamento nulo). Nesse sentido, o traço frontal do plano  $\alpha$  é paralelo à reta  $f'$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço frontal do plano – a direção das retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$ . O traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$  – é paralelo à reta  $f'$ ).

O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, contém o ponto  $P$  e é paralelo à reta  $f$ , conforme era pedido.

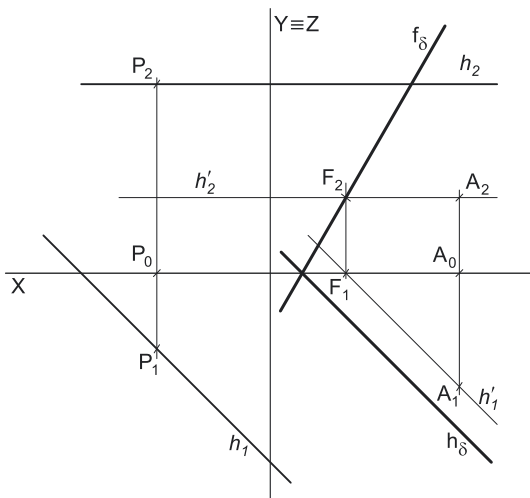
Sublinha-se que os traços do plano  $\alpha$  estão coincidentes **apenas na folha de papel** pois, **no espaço**, os dois traços de um plano nunca estão coincidentes, a menos que se trate de um plano passante (e, nesse caso, os dois traços estão coincidentes no eixo  $X$ ).

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $f'$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 28.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $h$  e o ponto  $A$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (a direção dada no enunciado).

**Resolução:**

Pretende-se um plano  $\delta$ , oblíquo, paralelo à reta  $h$  e contendo o ponto  $A$ . Para o plano  $\delta$  ser paralelo à reta  $h$ , o plano  $\delta$  tem de verificar o **CrITÉRIO DE PARALELISMO ENTRE PLANOS E RETAS** em relação à reta  $h$ , ou seja, o plano  $\delta$  tem de conter uma reta paralela à reta  $h$  (o plano  $\delta$  tem de conter a «família» de retas  $a$  que a reta  $h$  pertence).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\delta$  (a reta  $h'$ ), paralela à reta  $h$  e passando pelo ponto  $A$ . A reta  $h'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$  e está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e uma direção (a direção da reta  $h$ ). A reta  $h'$ , sendo uma reta do plano  $\delta$ , garante-nos imediatamente os dois factos pedidos no enunciado:

1. que o ponto  $A$  pertence ao plano  $\delta$  (pois pertence a uma reta do plano  $\delta$  – a reta  $h'$ );
2. que o plano  $\delta$  é paralelo à reta  $h$  (porque contém uma reta paralela à reta  $h$  – a reta  $h'$ ).

Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta  $h'$  (o ponto  $F$ ) e por  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ) conduziu-se o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), com a direção dada no enunciado –  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (a direção dada no enunciado).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ) é concorrente com  $f_\delta$  num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir  $h_\delta$ . A reta  $h'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (que é uma reta horizontal do plano com cota nula). Nesse sentido, o traço horizontal do plano  $\delta$  é paralelo à reta  $h'$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço horizontal do plano – a direção das retas horizontais (de nível) do plano  $\delta$ . O traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$  – é paralelo à reta  $h'$ ).

O plano  $\delta$  contém o ponto  $A$  e é paralelo à reta  $h$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\delta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $h'$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 29.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e pela sua direção (a direção das suas projeções, dada no enunciado).

### Resolução:

Pretende-se um plano  $\gamma$ , vertical, paralelo à reta  $r$  e contendo o ponto  $P$ . Para o plano  $\gamma$  ser paralelo à reta  $r$ , o plano  $\gamma$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta  $r$ , ou seja, o plano  $\gamma$  tem de conter uma reta paralela à reta  $r$  (o plano  $\gamma$  tem de conter a «família» de retas a que a reta  $r$  pertence).

Uma vez que o plano  $\gamma$  (o plano pedido) é um plano vertical, que é um plano projetante horizontal, sabe-se que o plano  $\gamma$  projeta todas as suas retas e pontos no Plano Horizontal de Projeção, sobre o seu traço horizontal ( $h_\gamma$ ). Assim, toda e qualquer reta do plano  $\gamma$  tem necessariamente a sua projeção horizontal sobre  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ). Por outro lado, qualquer ponto pertencente ao plano  $\gamma$  tem também a sua projeção horizontal sobre  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ).

Dessa forma, conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), paralelo a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ), o que nos garante imediatamente os dois factos pedidos no enunciado:

1. que o ponto  $P$  pertence ao plano  $\gamma$  (pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal e o ponto  $P$  tem a sua projeção horizontal sobre o traço horizontal do plano);
2. que o plano  $\gamma$  é paralelo à reta  $r$  (porque contém necessariamente uma reta qualquer paralela à reta  $r$ ).

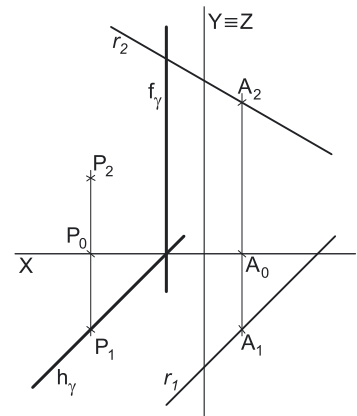
O traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ) é concorrente com  $h_\gamma$  num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano  $\gamma$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir  $f_\gamma$ . Por outro lado, uma vez que o plano  $\gamma$  é um plano vertical, sabe-se imediatamente que as suas retas frontais (de frente) são retas verticais (projetantes horizontais), pelo que  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano) é uma reta vertical do plano com afastamento nulo. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir o traço frontal do plano – a direção das retas verticais (projetantes horizontais). O traço frontal do plano ( $f_\gamma$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é uma reta vertical).

O plano  $\gamma$  contém o ponto  $P$  e é paralelo à reta  $r$ , conforme era pedido.

Sublinha-se que, apesar de não se terem desenhado as projeções de qualquer reta do plano  $\gamma$  que nos garanta o paralelismo do plano  $\gamma$  em relação à reta  $r$ , seria possível tê-lo feito – é possível desenhar as projeções de uma reta passando pelo ponto  $P$ , pertencente ao plano  $\gamma$  e que seja paralela à reta  $r$ . No entanto, por uma questão de economia de traçados, e de acordo com os raciocínios expostos, tal não se revelou necessário – **por se tratar de um plano projetante**.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\gamma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).





## 30.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $A$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por dois pontos – os pontos  $R$  e  $S$ . O ponto  $R$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). O ponto  $S$  tem as suas projeções coincidentes, pois é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes).

**Resolução:**

Pretende-se um plano  $\theta$ , de topo, paralelo à reta  $r$  e contendo o ponto  $A$ . Para o plano  $\theta$  ser paralelo à reta  $r$ , o plano  $\theta$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta  $r$ , ou seja, o plano  $\theta$  tem de conter uma reta paralela à reta  $r$  (o plano  $\theta$  tem de conter a «família» de retas a que a reta  $r$  pertence).

Uma vez que o plano  $\theta$  (o plano pedido) é um plano de topo, que é um plano projetante frontal, sabe-se que o plano  $\theta$  projeta todas as suas retas e pontos no Plano Frontal de Projeção, sobre o seu traço frontal ( $f_\theta$ ). Assim, toda e qualquer reta do plano  $\theta$  tem necessariamente a sua projeção frontal sobre  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Por outro lado, qualquer ponto pertencente ao plano  $\theta$  tem também a sua projeção frontal sobre  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ).

Dessa forma, conduziu-se, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ), o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), paralelo a  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), o que nos garante imediatamente os dois factos pedidos no enunciado:

1. que o ponto  $P$  pertence ao plano  $\theta$  (pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal e o ponto  $A$  tem a sua projeção frontal sobre o traço frontal do plano);
2. que o plano  $\theta$  é paralelo à reta  $r$  (porque contém necessariamente uma reta qualquer paralela à reta  $r$ ).

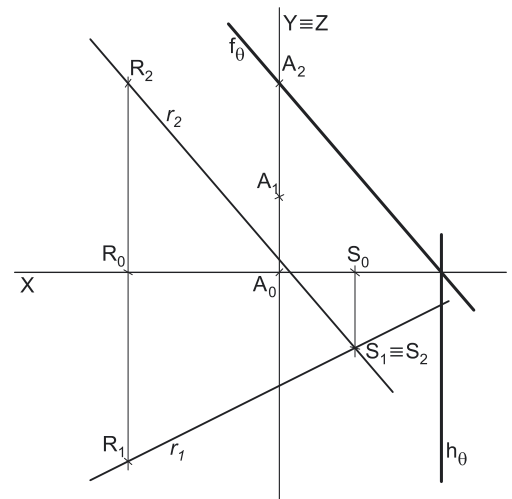
O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) é concorrente com  $f_\theta$  num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $h_\theta$  (o traço horizontal do plano  $\theta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir  $h_\theta$ . Por outro lado, uma vez que o plano  $\theta$  é um plano de topo, sabe-se imediatamente que as suas retas horizontais (de nível) são retas de topo (projetantes frontais), pelo que  $h_\theta$  (o traço horizontal do plano) é uma reta de topo do plano com cota nula. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir o traço horizontal do plano – a direção das retas de topo (projetantes frontais). O traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é uma reta de topo).

O plano  $\theta$  contém o ponto  $A$  e é paralelo à reta  $r$ , conforme era pedido.

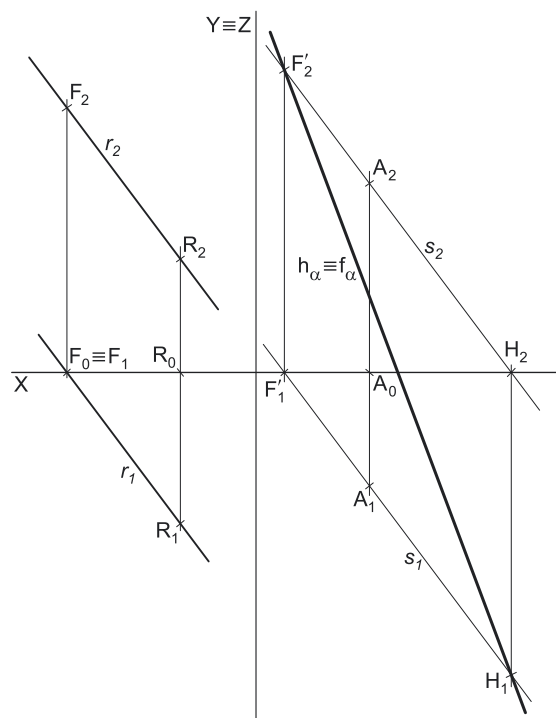
Sublinha-se que, apesar de não se terem desenhado as projeções de qualquer reta do plano  $\theta$  que nos garanta o paralelismo do plano  $\theta$  em relação à reta  $r$ , seria possível tê-lo feito – é possível desenhar as projeções de uma reta passando pelo ponto  $A$ , pertencente ao plano  $\theta$  e que seja paralela à reta  $r$ . No entanto, por uma questão de economia de traçados, e de acordo com os raciocínios expostos, tal não se revelou necessário – **por se tratar de um plano projetante**.

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\theta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y = Z$ , que é uma linha de referência).



31.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $A$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por dois pontos – o ponto  $R$  e o seu traço frontal (o ponto  $F$ ).

**Resolução:**

Pretende-se um plano  $\alpha$ , paralelo à reta  $r$  e contendo o ponto  $A$ . Para o plano  $\alpha$  ser paralelo à reta  $r$ , o plano  $\alpha$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta  $r$ , ou seja, o plano  $\alpha$  tem de conter uma reta paralela à reta  $r$  (o plano  $\alpha$  tem de conter a «família» de retas  $a$  que a reta  $r$  pertence).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\alpha$  (a reta  $s$ ), paralela à reta  $r$  e passando pelo ponto  $A$ . A reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e uma direção (a direção da reta  $r$ ). A reta  $s$ , sendo uma reta do plano  $\alpha$ , garante-nos imediatamente os dois factos pedidos no enunciado:

1. que o ponto  $A$  pertence ao plano  $\alpha$  (pois pertence a uma reta do plano  $\alpha$  – a reta  $s$ );
2. que o plano  $\alpha$  é paralelo à reta  $r$  (porque contém uma reta paralela à reta  $r$  – a reta  $s$ ).

Em seguida, determinaram-se os traços da reta  $s$  – o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $s$ ) e o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $s$ ).

Tendo em conta que o enunciado pede especificamente que o plano tenha os seus traços coincidentes, **os dois traços do plano** têm de estar coincidentes numa mesma reta que passe, simultaneamente, por  $F'_2$  e por  $H_1$ . Nesse sentido, desenhou-se essa reta e identificaram-se os traços do plano  $\alpha$ .

O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, contém o ponto  $A$  e é paralelo à reta  $r$ , conforme era pedido.

Sublinha-se que os traços do plano  $\alpha$  estão coincidentes **apenas na folha de papel** pois, **no espaço**, os dois traços de um plano nunca estão coincidentes, a menos que se trate de um plano passante (e, nesse caso, os dois traços estão coincidentes no eixo  $X$ ).

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $s$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 32.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $m$  e os pontos  $A$  e  $B$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $m$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção das suas projeções, dadas no enunciado). Sublinha-se que as projeções da reta  $m$  são paralelas entre si **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, as projeções da reta  $m$  só poderiam ser efetivamente paralelas entre si, no caso de se tratar de uma reta fronto-horizontal.

**Resolução:**

Pretende-se um plano  $\lambda$ , paralelo à reta  $m$  e contendo os pontos  $A$  e  $B$ . Para o plano  $\lambda$  ser paralelo à reta  $m$ , o plano  $\lambda$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta  $m$ , ou seja, o plano  $\lambda$  tem de conter uma reta paralela à reta  $m$  (o plano  $\lambda$  tem de conter a «família» de retas a que a reta  $m$  pertence).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\lambda$  (a reta  $r$ ), paralela à reta  $m$  e passando pelo ponto  $A$ . A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e uma direção (a direção da reta  $m$ ). Nesta situação particular, a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) ficou coincidente com a projeção horizontal da reta  $m$  ( $m_1$ ). A reta  $r$ , sendo uma reta do plano  $\lambda$ , garante-nos imediatamente dois dos factos pedidos no enunciado:

1. que o ponto  $A$  pertence ao plano  $\lambda$  (pois pertence a uma reta do plano  $\lambda$  – a reta  $r$ );
2. que o plano  $\lambda$  é paralelo à reta  $m$  (porque contém uma reta paralela à reta  $m$  – a reta  $r$ ).

No entanto, ainda não se garantiu que o ponto  $B$  pertence ao plano  $\lambda$ . Prossigamos com a determinação dos traços do plano.

Determinemos o traço horizontal do plano  $\lambda$  ( $h_\lambda$ ), que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da reta  $r$  (o ponto  $H$ ). Já temos um ponto para definir a reta ( $h_\lambda$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano  $\lambda$  são insuficientes, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\lambda$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $s$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto  $B$ , outro ponto do plano que era dado no enunciado) e por uma direção (a direção da reta  $r$ ). Assim, a reta  $s$  garante-nos o último facto pedido no enunciado (e que nos faltava garantir) – que o ponto  $B$  pertence ao plano  $\lambda$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $s$ ).

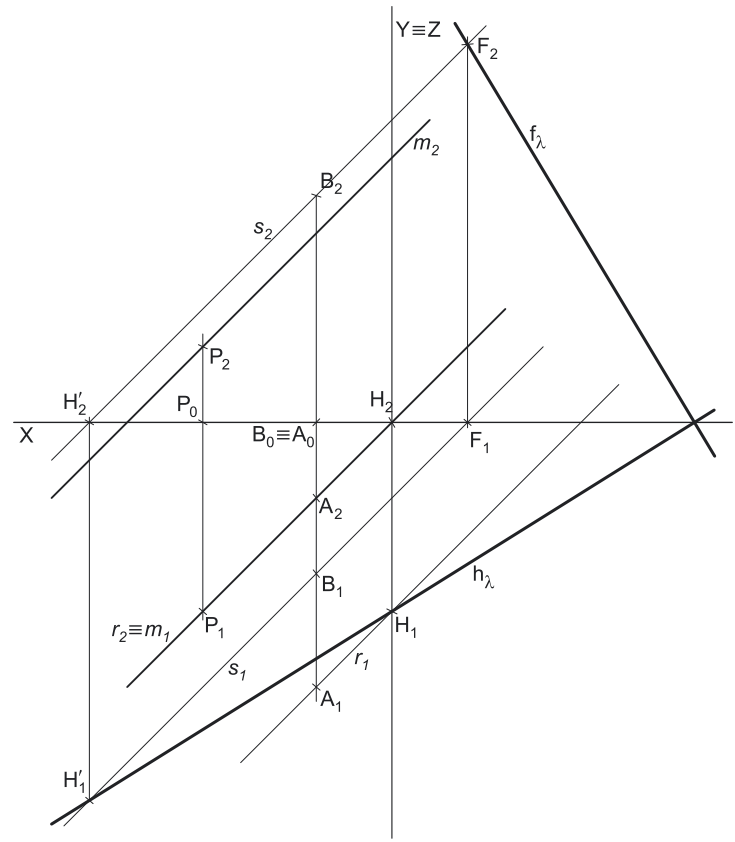
Determinou-se o traço horizontal da reta  $s$  – o ponto  $H'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano ( $h_\lambda$ ). O traço horizontal do plano ( $h_\lambda$ ) está definido por dois pontos – os pontos  $H$  e  $H'$ .

Determinemos, agora, o traço frontal do plano  $\lambda$  ( $f_\lambda$ ), que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $r$  (o ponto  $F$ ). Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que os dois traços do plano são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , já temos o ponto que nos faltava. Assim, o traço frontal do plano  $\lambda$  ( $f_\lambda$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $F$  e o ponto de concorrência com  $h_\lambda$  (no eixo  $X$ ).

O plano  $\lambda$  contém os pontos  $A$  e  $B$  e é paralelo à reta  $m$ , conforme era pedido.

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $m$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\lambda$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 33.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções. Em seguida, desenhou-se a projeção horizontal da reta **r** ( $r_1$ ), passando pela projeção horizontal do ponto **P** ( $P_1$ ) e fazendo, com o eixo **X**, o ângulo pedido.

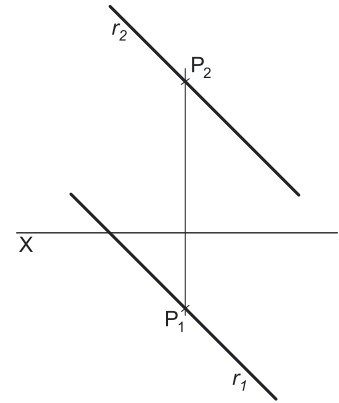
### Resolução:

Pretende-se uma reta **r**, paralela ao  $\beta_{2/4}$  e passando pelo ponto **P**. Tendo em conta que retas do  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções **paralelas entre si**, desenhou-se imediatamente a projeção frontal da reta **r** ( $r_2$ ), passando pela projeção frontal do ponto **P** ( $P_2$ ) e paralela à projeção horizontal da reta **r** ( $r_1$ ).

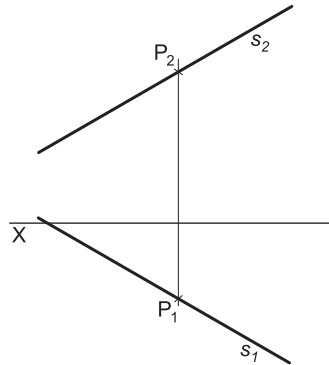
Sublinha-se, no entanto, que as projeções da reta **r** (e de qualquer reta paralela ao  $\beta_{2/4}$ ) são paralelas entre si **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção. De facto, **no espaço** (antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção), a **única situação** em que uma reta tem as suas projeções efetivamente paralelas entre si é a situação das retas fronto-horizontais.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O único dado é um ponto cuja linha de chamada se representou a **leve**, exatamente porque se trata de uma linha de chamada – não há quaisquer dados a **médio**. As projeções da reta **r** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício).



## 34.



### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da reta **s** ( $s_2$ ), passando pela projeção frontal do ponto **P** ( $P_2$ ) e fazendo, com o eixo **X**, o ângulo pedido.

### Resolução:

Pretende-se uma reta **s**, paralela ao  $\beta_{1/3}$  e passando pelo ponto **P**. Tendo em conta que retas do  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes, cujas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, desenhou-se imediatamente a projeção horizontal da reta **s**.

De facto, uma vez que a projeção frontal da reta **s** faz, com o eixo **X**, um ângulo de  $30^\circ$  (de abertura para a direita), sabe-se imediatamente que a projeção horizontal da reta **s** faz, igualmente, um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo **X** (de abertura também para a direita), e que passa por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto **P**).

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O único dado é um ponto cuja linha de chamada se representou a **leve**, exatamente porque se trata de uma linha de chamada – não há quaisquer dados a **médio**. As projeções da reta **s** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício).

## 35.

### Dados:

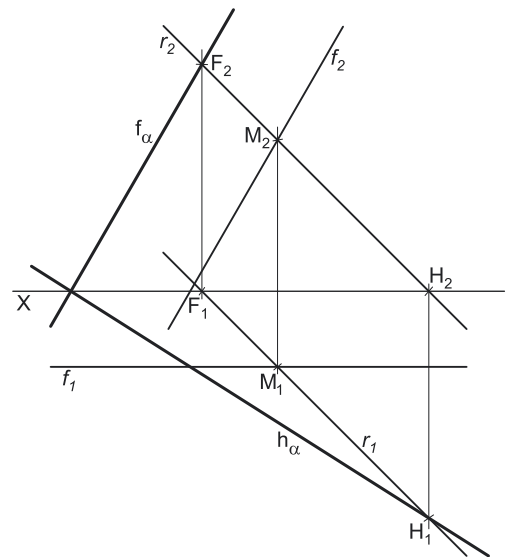
Em primeiro lugar, desenharam-se as projeções das retas **r** e **f**, em função dos dados. A reta **r** é paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem as suas projeções paralelas entre si (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). O plano  $\alpha$  (o plano definido pelas duas retas) está representado pelas projeções das duas retas.

### Resolução:

O **traço frontal do plano  $\alpha$**  é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Determinou-se o traço frontal da reta **r**, o ponto **F**. Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (que é uma reta frontal do plano com afastamento nulo). Nesse sentido, o traço frontal do plano é paralelo à reta **f**, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço frontal do plano – a direção das retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$ . O traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$  – é paralelo à reta **f**).

O **traço horizontal do plano  $\alpha$**  é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal do plano, com cota nula). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinou-se o traço horizontal da reta  $r$ , o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dois traços de um plano são duas retas do plano que são necessariamente concorrentes num ponto do eixo  $X$  (à exceção dos planos de rampa). Assim,  $f_\alpha$  e  $h_\alpha$  têm de ser concorrentes entre si num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ). O traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $H$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

Note que se poderia ter determinado o traço horizontal da reta  $f$ . Nesse caso, teríamos **três pontos** para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) – os traços horizontais das duas retas (dois pontos) e, ainda, o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

#### Traçado:

As projeções das retas dadas (as retas  $r$  e  $f$ ) representaram-se a **médio**, pois integram os dados. Os traços do plano  $\alpha$ , que são pedidos (são o objetivo do exercício), representaram-se a **forte**. O eixo  $X$  representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.

## 36.

#### Dados:

Em primeiro lugar, desenharam-se as projeções da reta  $h$ , em função dos dados. Em seguida, determinou-se o ponto da reta  $h$  que tem 4 cm de afastamento (o ponto  $P$ ), que é o ponto de concorrência das duas retas. Em seguida, desenharam-se as projeções da reta  $r$ , passando pelas projeções homónimas do ponto  $P$ . A reta  $r$  é paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que as suas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado). O plano  $\alpha$  (o plano definido pelas duas retas) está representado pelas projeções das duas retas.

#### Resolução:

O **traço horizontal do plano  $\alpha$**  é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal do plano, com cota nula). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Determinou-se o traço horizontal da reta  $r$ , o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (que é uma reta horizontal do plano com cota nula). Nesse sentido, o traço horizontal do plano é paralelo à reta  $h$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço horizontal do plano – a direção das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ . O traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$  – é paralelo à reta  $h$ ).

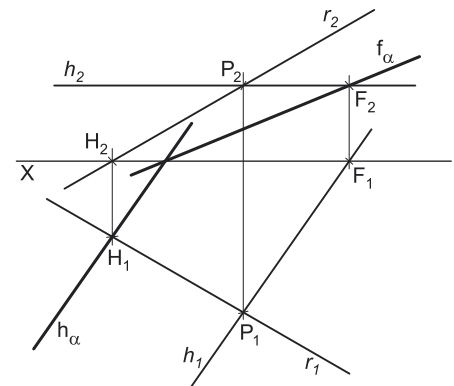
O **traço frontal do plano  $\alpha$**  é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Determinou-se o traço frontal da reta  $h$ , o ponto  $F$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dois traços de um plano são duas retas do plano que são necessariamente concorrentes num ponto do eixo  $X$  (à exceção dos planos de rampa). Assim,  $f_\alpha$  e  $h_\alpha$  têm de ser concorrentes entre si num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). O traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $F$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

Note que se poderia ter determinado o traço frontal da reta  $r$ . Nesse caso, teríamos **três pontos** para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) – os traços frontais das duas retas (dois pontos) e, ainda, o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

#### Traçado:

As projeções das retas dadas (as retas  $r$  e  $h$ ) representaram-se a **médio**, pois integram os dados. Os traços do plano  $\alpha$ , que são pedidos (são o objetivo do exercício), representaram-se a **forte**. O eixo  $X$  representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.



## 37.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, bem como as retas **a** e **b**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta **a** é paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem as suas projeções paralelas entre si (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$ , têm as suas projeções paralelas entre si). A reta **b** é paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que as suas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado). O plano  $\delta$  (o plano definido pelas duas retas) está representado pelas projeções das duas retas.

### Resolução:

O traço horizontal do plano  $\delta$  é a **reta de interseção** do plano  $\delta$  com o Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal do plano, com cota nula). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

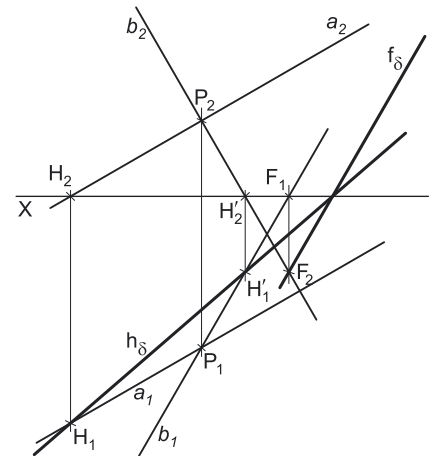
Determinou-se o traço horizontal da reta **a**, o ponto **H**. Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta **b**, o ponto **H'**. Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ). O traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ) está definido por dois pontos – os pontos **H** e **H'**.

O traço frontal do plano  $\delta$  é a **reta de interseção** do plano  $\delta$  com o Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

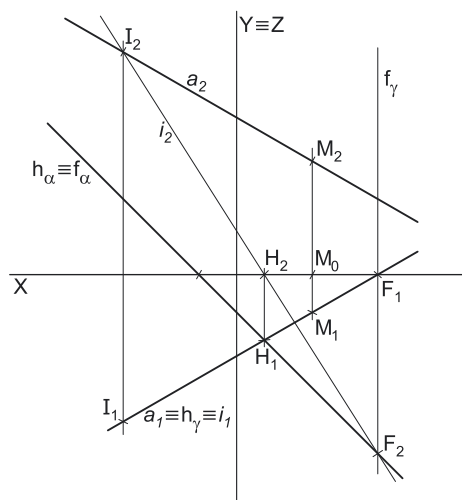
Determinou-se o traço frontal da reta **b**, o ponto **F**. Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_\delta$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dois traços de um plano são duas retas do plano que são necessariamente concorrentes num ponto do eixo **X** (à exceção dos planos de rampa). Assim,  $f_\delta$  e  $h_\delta$  têm de ser concorrentes entre si num ponto do eixo **X**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano ( $f_\delta$ ). O traço frontal do plano ( $f_\delta$ ) está definido por dois pontos – o ponto **F** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

### Traçado:

As projeções das retas dadas (as retas **a** e **b**) representaram-se a **médio**, pois integram os dados. Os traços do plano  $\delta$ , que são pedidos (são o objetivo do exercício), representaram-se a **forte**. O eixo **X** representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.



## 38.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, e a reta **a**, pelas suas projeções, em função dos dados. A reta **a** é paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que as suas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado). Sublinha-se que os traços do plano  $\alpha$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção, o plano  $\alpha$  não pode ter os seus traços coincidentes, a menos que se trate de um plano passante (o que não é o caso).

### Resolução:

E pedido um ponto – o ponto de interseção entre a reta **a** e o plano  $\alpha$ . O ponto de interseção entre uma reta e um plano é um ponto que pertence simultaneamente à reta e ao plano. Assim, a resolução do exercício passa por determinar um ponto que possamos garantir que pertence simultaneamente à reta e ao plano. **Nem a reta nem o plano são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executa em três etapas, a saber:

1. pela reta **a** conduz-se um plano auxiliar que a contenha – pela reta **a** conduziu-se o plano  $\gamma$ , que é o **plano projetante horizontal** da reta **a** (é um plano vertical);
2. determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado – determinou-se a reta **i**, que é a reta de interseção do plano  $\gamma$  com o plano  $\alpha$  (a reta **i** é uma reta oblíqua do plano  $\alpha$  e está definida por dois pontos – os pontos **F** e **H**, os seus traços nos planos de projeção);

3. o ponto de concorrência (ou de interseção) das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado – o ponto de concorrência da reta **i** com a reta **a** (que são coplanares, pois estão ambas contidas no plano  $\gamma$ ) é o ponto **I**, que é o ponto de interseção da reta **a** como plano  $\alpha$ .

### Traçado:

A reta **a** (as projeções da reta) e os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $\gamma$  e da reta **i**).

## 39.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, bem como as retas **r** e **s**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta **r** é paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que as suas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado). A reta **s** é paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem as suas projeções paralelas entre si (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). O plano  $\alpha$  (o plano definido pelas duas retas) está representado pelas projeções das duas retas.

**Resolução:***Determinação das projeções da reta **i**:*

A reta **i** é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o  $\beta_{1/3}$  – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos, ou seja, a reta que pertence simultaneamente aos dois planos. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Determinou-se o traço da reta **s** no  $\beta_{1/3}$ , o ponto **Q**. O ponto **Q** pertence ao plano  $\alpha$ , pois pertence a uma reta do plano – a reta **s**. O ponto **Q** pertence ao  $\beta_{1/3}$ , pois tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**. O ponto **Q** é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que é um ponto da reta **i**. Já temos um ponto para definir a reta **i** – falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta **r** é paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que não intersesta o  $\beta_{1/3}$  (não tem traço no  $\beta_{1/3}$ ). Por outro lado, o plano  $\alpha$  e o  $\beta_{1/3}$  são planos secantes e planos secantes são planos com orientações diferentes e **uma única «família» de retas** em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. Atendendo a que a reta **r** é paralela ao  $\beta_{1/3}$ , a reta **r** é necessariamente paralela a uma reta do  $\beta_{1/3}$ , ou seja, pertence a uma «família» de retas do  $\beta_{1/3}$  (verifica o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao  $\beta_{1/3}$ ). Assim, a reta **r** pertence à única «família» de retas que o plano  $\alpha$  e o  $\beta_{1/3}$  têm em comum, pelo que pertence à «família» de retas a que a reta **i** pertence – já temos a direção que nos faltava para definir a reta **i**.

A reta **i** está definida por um ponto (o ponto **Q**) e por uma direção (a direção da reta **r**).

*Determinação das projeções da reta **i'**:*

A reta **i'** é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o  $\beta_{2/4}$  – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos, ou seja, a reta que pertence simultaneamente aos dois planos. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

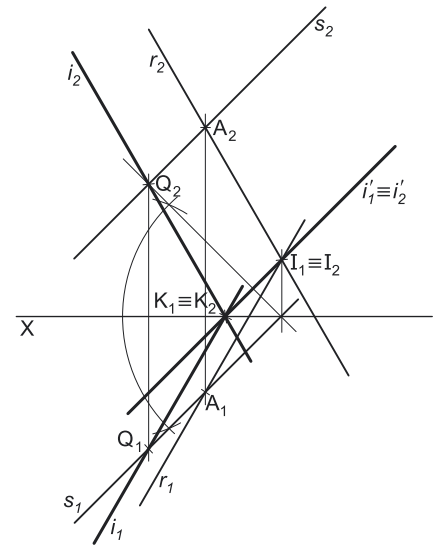
Determinou-se o traço da reta **r** no  $\beta_{2/4}$ , o ponto **I**. O ponto **I** pertence ao plano  $\alpha$ , pois pertence a uma reta do plano – a reta **r**. O ponto **I** pertence ao  $\beta_{2/4}$ , pois tem as suas projeções coincidentes. O ponto **I** é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que é um ponto da reta **i'**. Já temos um ponto para definir a reta **i'** – falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta **s** é paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que não intersesta o  $\beta_{2/4}$  (não tem traço no  $\beta_{2/4}$ ). Por outro lado, o plano  $\alpha$  e o  $\beta_{2/4}$  são planos secantes e planos secantes são planos com orientações diferentes e **uma única «família» de retas** em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. Atendendo a que a reta **s** é paralela ao  $\beta_{2/4}$ , a reta **s** é necessariamente paralela a uma reta do  $\beta_{2/4}$ , ou seja, pertence a uma «família» de retas do  $\beta_{2/4}$  (verifica o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao  $\beta_{2/4}$ ). Assim, a reta **s** pertence à única «família» de retas que o plano  $\alpha$  e o  $\beta_{2/4}$  têm em comum, pelo que pertence à «família» de retas a que a reta **i'** pertence – já temos a direção que nos faltava para definir a reta **i'**.

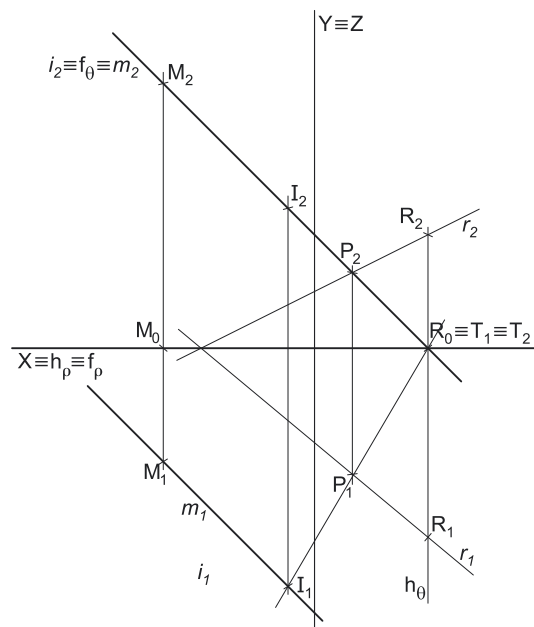
A reta **i'** está definida por um ponto (o ponto **I**) e por uma direção (a direção da reta **s**).

**Traçado:**

As projeções das retas dadas (as retas **r** e **s**) representaram-se a **médio**, pois integram os dados. As projeções das retas **i** e **i'** (as retas de interseção do plano  $\alpha$  com os planos bissetores), que são pedidas (são o objetivo do exercício), representaram-se a **forte**. O eixo **X** representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.



40.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $m$  e o ponto  $R$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $m$  é paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que as suas projeções são paralelas entre si (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). O plano  $\rho$  (o plano passante) está representado pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto  $R$ .

**Resolução:**

É pedido um ponto – o ponto de interseção entre a reta  $m$  e o plano  $\rho$ . O ponto de interseção entre uma reta e um plano é um ponto que pertence simultaneamente à reta e ao plano. Assim, a resolução do exercício passa por determinar um ponto que possamos garantir que pertence simultaneamente à reta e ao plano. **Nem a reta nem o plano são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executa em três etapas, a saber:

1. pela reta  $m$  conduz-se um plano auxiliar que a contenha – pela reta  $m$  conduziu-se o plano  $\theta$ , que é o **plano projetante frontal** da reta  $m$  (é um plano de topo);
2. determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado – determinou-se a reta  $i$ , que é a reta de interseção do plano  $\theta$  com o plano  $\rho$ .

A reta  $i$  é a reta de interseção entre o plano  $\theta$  e o plano  $\rho$  – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos (é a reta que pertence simultaneamente aos dois planos). Para definir uma reta (a reta  $i$ ) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, pelo que projeta todos os seus pontos e todas as suas retas no Plano Frontal de Projeção, sobre o seu traço frontal, pelo que a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ) está sobre o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\theta$ . Falta-nos garantir que a reta  $i$  pertence ao plano  $\rho$ .

A reta  $i$  é uma reta oblíqua do plano  $\rho$  (que é um plano passante), pelo que a reta  $i$  é necessariamente uma reta oblíqua passante. Assim, determinou-se o ponto  $T$ , que é o ponto de concorrência da reta  $i$  com o eixo  $X$ . Já temos um ponto para definir a reta  $i$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $i$ .

Os dados do plano  $\rho$  são insuficientes para definir a reta  $i$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\rho$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $r$ , como reta auxiliar do plano  $\rho$ . A reta  $r$  é uma reta oblíqua passante do plano  $\rho$  e está definida por dois pontos – o ponto  $R$  (dado no enunciado – é o ponto que define o plano passante) e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  (que não se identificou).

As retas  $i$  e  $r$  são coplanares (estão, ambas, contidas no plano  $\rho$ ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois as suas projeções frontais não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $P$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ . A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $T$  e o ponto  $P$ .

3. o ponto de concorrência (ou de interseção) das duas retas (as retas  $m$  e  $i$ ) é o ponto de interseção da reta dada (a reta  $m$ ) com o plano dado (o plano  $\rho$ ) – o ponto de concorrência da reta  $i$  com a reta  $m$  (que são coplanares, pois estão ambas contidas no plano  $\theta$ ) é o ponto  $I$ , que é o ponto de interseção da reta  $m$  com o plano  $\rho$ .

**Traçado:**

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. A reta  $m$  (as projeções da reta) e os traços do plano  $\rho$  (que estão no eixo  $X$ ) representaram-se a **médio**, pois integram os dados. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $\theta$  e das retas  $r$  e  $i$ ).



## 41.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados.

**Resolução:**

É pedida uma reta **p**, de perfil, passando pelo ponto **A** e paralela ao  $\beta_{2/4}$ . Foi possível desenhar, de imediato, as projeções da reta **p**, passando pelas projeções do ponto **A**. A reta **p** passa pelo ponto **A** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta. Sublinha-se que existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto **A** (e que têm as projeções desenhadas), mas, dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela ao  $\beta_{2/4}$ .

Assim, para garantir o paralelismo da reta **p** em relação ao  $\beta_{2/4}$ , a reta **p** tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao  $\beta_{2/4}$ , ou seja, a reta **p** tem de ser paralela a uma reta do  $\beta_{2/4}$  (a reta **p** tem de pertencer à «família» de retas de perfil do  $\beta_{2/4}$ ).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do  $\beta_{2/4}$  (a reta **p'**), cujas projeções se desenharam imediatamente. A reta **p'** é uma **reta de perfil passante** que está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção e atravessa os  $2^\circ$  e  $4^\circ$  Diedros). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se localizar a reta **p'** no mesmo plano de perfil que contém a reta **p**.

Para a reta **p** ser paralela ao  $\beta_{2/4}$ , a reta **p** tem de ser paralela à reta **p'**, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **p**. No entanto, porque se tratam de retas de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, não é possível garantir o paralelismo entre as duas retas de forma direta, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano de perfil (o plano  $\pi$ ) que contém as retas **p** e **p'**, cujos traços se identificaram imediatamente. Efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – identificou-se a charneira do rebatimento (que é  $f_\pi$ ). A charneira do rebatimento é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – a rotação dos pontos processa-se em planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **A**, o que nos permitiu determinar **A<sub>r</sub>**.

Em seguida, desenhou-se **p'<sub>r</sub>**, que é a reta **p'** em rebatimento. Tendo em conta que o ponto **A** se situa no  $1^\circ$  Diedro e que a reta **p'**, sendo uma reta do  $\beta_{2/4}$ , atravessa os  $2^\circ$  e  $4^\circ$  Diedros, **p'<sub>r</sub>** (a reta **p'** rebatida) não pode, nunca, passar pelo quadrante em que se situa **A<sub>r</sub>**. Por outro lado, sendo **p'** uma reta passante, o seu ponto de concorrência com o eixo **X** é fixo, pois situa-se na charneira – assim, **p'<sub>r</sub>** passa pelo ponto de concorrência dos traços do plano e faz, com  $f_\pi$  e  $h_\pi$ , ângulos de  $45^\circ$ .

Note que se poderia ter determinado a reta **p'** em rebatimento, recorrendo a um ponto qualquer da reta – seria um ponto do  $\beta_{2/4}$ , pelo que teria as suas projeções coincidentes. Rebatendo esse ponto, ter-se-ia a reta **p'<sub>r</sub>** definida por dois pontos.

Em seguida, desenhou-se a reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida), passando por **A<sub>r</sub>** e paralela a **p'<sub>r</sub>** – a reta **p<sub>r</sub>** está definida por um ponto (o ponto **A<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a **p'<sub>r</sub>**). Foi possível, em seguida, determinar os traços da reta **p** em rebatimento – **F<sub>r</sub>** (o traço frontal da reta **p** em rebatimento) está sobre  $f_\pi$  e **H<sub>r</sub>** (o traço horizontal da reta **p** em rebatimento) está sobre  $h_\pi$  (a **Condição para que uma reta pertença a um plano** verifica-se tanto no espaço como em projeções e em rebatimento).

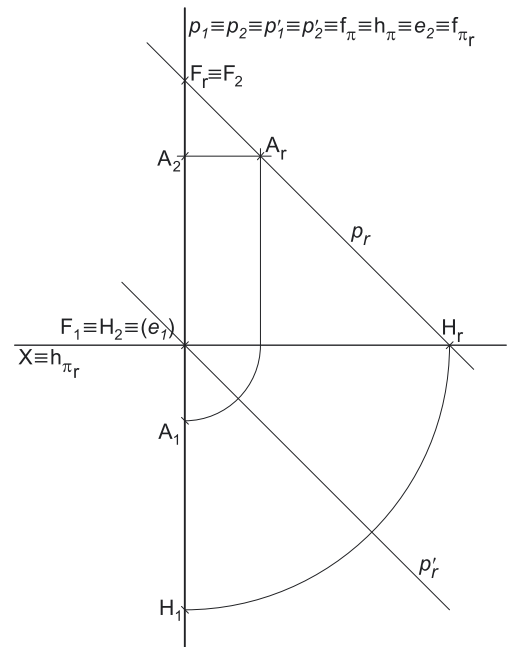
Por fim, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$  e determinaram-se as projeções dos traços da reta. O ponto **F** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (e um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **F<sub>r</sub> ≡ F<sub>2</sub>**.

A reta **p** (definida pelos pontos **A**, **F** e **H**), contém o ponto **A** e é paralela ao  $\beta_{2/4}$ .

Sublinha-se que, na prática, o exercício poderia ter sido resolvido sem o recurso à reta **p'** – bastaria que, ao desenhar a reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida) se tivesse em atenção a direção da reta, não a confundindo com a situação em que a reta seria paralela ao  $\beta_{1/3}$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta **p**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (é a linha estruturante do exercício). Tendo em conta que, neste exercício, o pedido são dois pontos (os traços da reta), não há lugar a qualquer representação a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **p<sub>r</sub>** e **p'<sub>r</sub>**, bem como de todos os traçados necessários ao rebatimento efetuado).



## 42.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

É pedida uma reta **p**, de perfil, passando pelo ponto **P** e paralela ao  $\beta_{1/3}$ . Foi possível desenhar, de imediato, as projeções da reta **p**, passando pelas projeções do ponto **P**. A reta **p** passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta. Sublinha-se que existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto **P** (e que têm as projeções desenhadas) mas, dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela ao  $\beta_{1/3}$ .

Assim, para garantir o paralelismo da reta **p** em relação ao  $\beta_{1/3}$ , a reta **p** tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao  $\beta_{1/3}$ , ou seja, a reta **p** tem de ser paralela a uma reta do  $\beta_{1/3}$  (a reta **p** tem de pertencer à «família» de retas de perfil do  $\beta_{1/3}$ ).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do  $\beta_{1/3}$  (a reta **r**), cujas projeções se desenharam imediatamente. A reta **r** é uma **reta de perfil passante** que está definida por um ponto (o ponto **A**, que é o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e por uma direção (faz ângulos de 45° com os planos de projeção e atravessa os 1ª e 3ª Diedros). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se localizar a reta **r** no mesmo plano de perfil que contém a reta **p**.

Para a reta **p** ser paralela ao  $\beta_{1/3}$ , a reta **p** tem de ser paralela à reta **r**, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **p**. No entanto, porque se tratam de retas de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, não é possível garantir o paralelismo entre as duas retas de forma direta, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Nesse sentido, optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, substituindo o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo às retas **p** e **r**, de forma a transformar as retas de perfil em retas frontais (de frente). Assim, será criado um novo diedro de projeção, no qual as projeções das retas já verificarão o **Critério de Reversibilidade**.

Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo às retas **p** e **r**, o eixo **X'** é paralelo às projeções horizontais das duas retas (**p<sub>1</sub>** e **r<sub>1</sub>**). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). **A<sub>4</sub>** e **P<sub>4</sub>** são as projeções dos pontos **A** e **P** no **plano 4** e determinaram-se em função das suas cotas, que se mantiveram. Note que **A<sub>4</sub>** se situa no eixo **X'**, pois o ponto **A** tem cota nula.

Para desenhar a nova projeção da reta **r** (a projeção da reta **r** no **plano 4**), recorreu-se a um ponto **B**, da reta – o ponto **B**, porque é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**. **B<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve.

Em seguida, desenhou-se **r<sub>4</sub>** (a projeção da reta **r** no **plano 4**), passando por **A<sub>4</sub>** e **B<sub>4</sub>**, o que nos permitiu desenhar **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**), passando por **P<sub>4</sub>** e paralela a **r<sub>4</sub>** – a reta **p<sub>4</sub>** está definida por um ponto (o ponto **P<sub>4</sub>**) e por uma direção (é paralela a **r<sub>4</sub>**). Foi possível, em seguida, determinar os traços da reta **p** (a partir do novo diedro de projeção), em função das projeções e das coordenadas conhecidas.

O traço horizontal da reta **p** tem cota nula, pelo que **H<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **H** no **plano 4**) se situa no eixo **X'**. Por outro lado, o ponto **F** tem afastamento nulo, pelo que **F<sub>1</sub>** se situa no eixo **X** – a partir da sua projeção horizontal (que se mantém), foi possível determinar **F<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **F** no **plano 4**). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, determinaram-se as projeções dos traços da reta **p**.

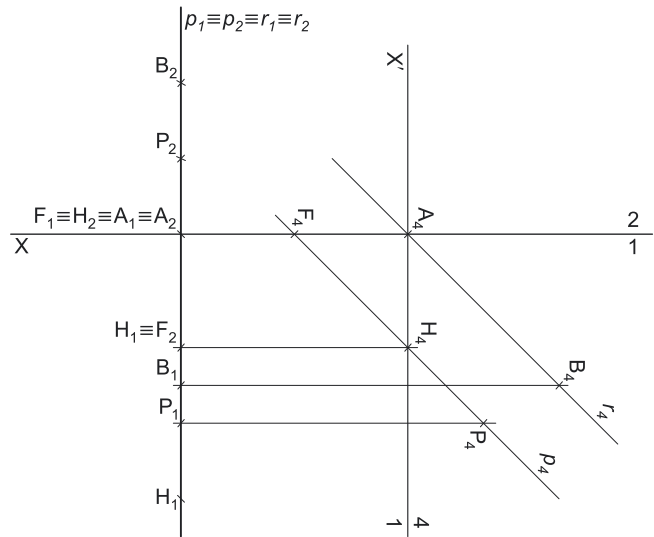
**F<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **F**) determinou-se em função da sua cota (que se manteve e é negativa). **H<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **H**) determinou-se diretamente, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4** – **H<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **H**) situa-se no eixo **X**, pois o ponto **H** tem cota nula.

A reta **p** (definida pelos pontos **P**, **F** e **H**), contém o ponto **P** e é paralela ao  $\beta_{1/3}$ .

Sublinha-se que, na prática, o exercício poderia ter sido resolvido sem o recurso à reta **r** – bastaria que, ao desenhar a reta **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**) se tivesse em atenção a direção da reta, não a confundindo com a situação em que a reta seria paralela ao  $\beta_{2/4}$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta **p**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (é a linha estruturante do exercício). Tendo em conta que, neste exercício, o pedido são dois pontos (os traços da reta), não há lugar a qualquer representação a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **p<sub>4</sub>** e **r<sub>4</sub>**, bem como de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).



## 43.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $p$  e  $h$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

**Resolução:**

A determinação dos traços do plano  $\alpha$  carece, sempre, da determinação dos traços das retas que o definem. A reta  $h$  tem um único traço – o seu traço frontal (que não se determinou). Mas será sempre necessário determinar os traços da reta  $p$ , pois o traço frontal da reta  $h$  é insuficiente para determinar os traços do plano.

Analisemos, então, a determinação dos traços da reta  $p$ . A reta  $p$ , de perfil, passa pelo ponto  $P$  (o ponto de concorrência das duas retas) e é paralela ao  $\beta_{2/4}$  – foi possível desenhar, de imediato, as projeções da reta  $p$ , mas a reta não está totalmente definida (as projeções de retas de perfil não verificam o **Critério de Reversibilidade**), para além de ainda não estar garantido o paralelismo da reta  $p$  em relação ao  $\beta_{2/4}$ . De facto, existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto  $P$  (e que têm as projeções desenhadas) mas, dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela ao  $\beta_{2/4}$ .

Assim, para garantir o paralelismo da reta  $p$  em relação ao  $\beta_{2/4}$ , e porque as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de Reversibilidade**, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por seguir a sugestão no final do relatório do exercício 41., no sentido de evitar uma complexidade desnecessária na resolução do exercício.

Assim, optou-se pelo rebatimento do plano de perfil (o plano  $\pi$ ) que contém a reta  $p$ , cujos traços se identificaram imediatamente. Efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano ( $f_{\pi}$ ). A charneira do rebatimento é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – a rotação dos pontos processa-se em planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto  $P$ , o que nos permitiu determinar  $P_r$  e desenhou-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), passando por  $P_r$  e paralela ao  $\beta_{2/4}$ .

A reta  $p_r$  passa por  $P_r$  e, uma vez que a reta  $p$  é paralela ao  $\beta_{2/4}$ , sabe-se que a reta faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção (e com os traços do plano  $\pi$ ) – os ângulos de  $45^\circ$  com os traços do plano estão em verdadeira grandeza, em rebatimento, nos ângulos que a reta  $p_r$  faz com  $h_{\pi_r}$  e com  $f_{\pi_r}$ . Das duas hipóteses possíveis, apenas a apresentada garante que a reta  $p$  é paralela ao  $\beta_{2/4}$  (na outra situação, a reta seria paralela ao  $\beta_{1/3}$ ) – note que o ponto  $P$  se situa no  $1^a$  Diedro e que a reta, sendo paralela ao  $\beta_{2/4}$ , terá de atravessar os  $2^a$  e  $4^a$  Diedros, bem como um qualquer dos outros dois Diedros (se não atravessasse mais nenhum Diedro, seria uma reta do próprio  $\beta_{2/4}$ ). Em função das coordenadas do ponto  $P$ , a reta  $p$  atravessa os  $2^a$ ,  $1^a$  e  $4^a$  Diedros.

Note que se poderia ter recorrido a uma reta do  $\beta_{2/4}$  e garantir o paralelismo da reta  $p$  em relação a essa reta, conforme exposto no relatório do exercício 41.

Foi possível, em seguida, determinar os traços da reta  $p$  em rebatimento –  $F_r$  (o traço frontal da reta  $p$  em rebatimento) está sobre  $f_{\pi_r}$  e  $H_r$  (o traço horizontal da reta  $p$  em rebatimento) está sobre  $h_{\pi_r}$  (a **Condição para que uma reta pertença a um plano** verifica-se tanto no espaço como em projeções e em rebatimento). Por fim, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$  e determinaram-se as projeções dos traços da reta. O ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (e um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r \equiv F_2$ .

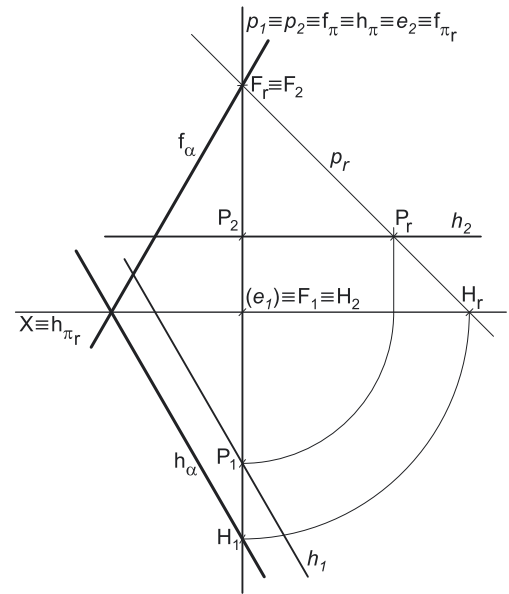
O **traço horizontal do plano  $\alpha$**  é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal do plano, com cota nula). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano ( $h_{\alpha}$ ) – o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $p$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (que é uma reta horizontal do plano com cota nula). Nesse sentido, o traço horizontal do plano é paralelo à reta  $h$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço horizontal do plano – a direção das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ . O traço horizontal do plano ( $h_{\alpha}$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$  – é paralelo à reta  $h$ ).

O **traço frontal do plano  $\alpha$**  é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_{\alpha}$ ) – o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $p$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dois traços de um plano são duas retas do plano que são necessariamente concorrentes num ponto do eixo  $X$  (à exceção dos planos de rampa). Assim,  $f_{\alpha}$  e  $h_{\alpha}$  têm de ser concorrentes entre si num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano ( $f_{\alpha}$ ). O traço frontal do plano ( $f_{\alpha}$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $F$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

Note que se poderia ter determinado o traço frontal da reta  $h$ . Nesse caso, teríamos **três pontos** para definir o traço frontal do plano ( $f_{\alpha}$ ) – os traços frontais das duas retas (dois pontos) e, ainda, o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

**Traçado:**

As projeções das retas dadas (as retas  $p$  e  $h$ ) representaram-se a **médio**, pois integram os dados. Os traços do plano  $\alpha$ , que são pedidos (são o objetivo do exercício), representaram-se a **forte**. O eixo  $X$  representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p_r$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).



## 44.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

A reta  $p$ , de perfil, passa pelo ponto  $S$  e é paralela ao  $\beta_{1/3}$  – foi possível desenhar, de imediato, as projeções da reta  $p$ , mas a reta não está totalmente definida (as projeções de retas de perfil não verificam o **Crítério de Reversibilidade**). De facto, existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto  $S$  (e que têm as projeções desenhadas) mas, dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela ao  $\beta_{1/3}$ . Assim, salienta-se que não está garantido o paralelismo da reta  $p$  em relação ao  $\beta_{1/3}$ .

É pedido o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ), que é o ponto que pertence simultaneamente à reta  $p$  e ao plano  $\rho$ . **Nem o plano nem a reta são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executou em três etapas, como em seguida se expõe.

- 1. Conduz-se, pela reta, um plano que a contenha.** Pela reta  $p$  conduziu-se um plano auxiliar – o plano  $\pi$  (que é um plano de perfil). Os traços do plano  $\pi$  estão coincidentes com as projeções da reta  $p$ .
- 2. Determina-se a reta de interseção dos dois planos – reta  $i$ .** Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano  $\rho$  com o plano  $\pi$ . A reta  $i$  é outra reta de perfil (uma reta de perfil do plano  $\rho$ ) e está definida por dois pontos – os seus traços nos planos de projeção (os pontos  $F$  e  $H$ ). As projeções da reta  $i$  (que é outra reta de perfil) estão coincidentes com os traços do plano  $\pi$  e com as projeções da reta  $p$ .
- 3. O ponto de interseção (ou de concorrência) das duas retas é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ .** O ponto de interseção da reta  $i$  com a reta  $p$  (que são coplanares, pois estão ambas contidas no plano  $\pi$ ) é o ponto  $I$ , que é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Uma vez que as duas retas são retas de perfil e que as projeções das retas de perfil não verificam o Critério de Reversibilidade, o ponto  $I$  não tem determinação direta – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, para garantir o paralelismo da reta  $p$  em relação ao  $\beta_{1/3}$ , é também necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$ .

Efetuuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_{\pi}$ ). A charneira é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos três pontos ( $F$ ,  $H$  e  $S$ ), o que nos permitiu determinar  $F_r$ ,  $H_r$  e  $S_r$ . Note que o ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_r \equiv F_2$ .

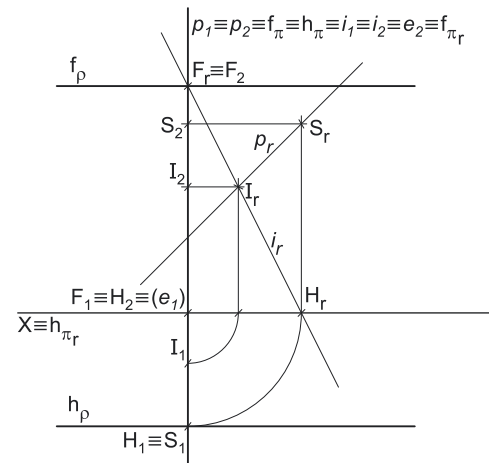
A reta  $p_r$  passa por  $S_r$  e, uma vez que a reta  $p$  é paralela ao  $\beta_{1/3}$ , sabe-se que a reta faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção (e com os traços do plano  $\pi$ ) – os ângulos de  $45^\circ$  com os traços do plano estão em verdadeira grandeza, em rebatimento, nos ângulos que a reta  $p_r$  faz com  $h_{\pi_r}$  e com  $f_{\pi_r}$ . Das duas hipóteses possíveis, apenas a apresentada garante que a reta  $p$  é paralela ao  $\beta_{1/3}$  (na outra situação, a reta seria paralela ao  $\beta_{2/4}$ ) – note que o ponto  $S$  se situa no  $1^\circ$  Diedro e que a reta, sendo paralela ao  $\beta_{1/3}$ , terá de atravessar os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros, bem como um qualquer dos outros dois Diedros (se não atravessasse mais nenhum Diedro, seria uma reta do próprio  $\beta_{1/3}$ ). Em função das coordenadas do ponto  $S$ , a reta  $p$  atravessa os  $1^\circ$ ,  $2^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros.

Por fim, desenhou-se a reta  $i$  em rebatimento – a reta  $i$  rebatida ( $i_r$ ) está definida por  $F_r$  e  $H_r$ .

Em rebatimento, já é possível determinar o ponto de concorrência das duas retas –  $I_r$  é o ponto de concorrência de  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) com  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida). Em seguida, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $I$ . O ponto  $I$ , representado pelas suas projeções, é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$  e os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (é a linha estruturante do exercício). Tendo em conta que, neste exercício, o pedido é um ponto, não há lugar a qualquer representação a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p_r$  e  $i_r$ , bem como de todos os traçados necessários ao rebatimento efetuado).



## 45.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $p$  e  $r$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  é paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que as suas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

**Resolução:**

A determinação dos traços do plano  $\alpha$  carece, sempre da determinação dos traços das retas que o definem. Analisemos a determinação dos traços da reta  $p$ . A reta  $p$ , de perfil, passa pelo ponto  $P$  (o ponto de concorrência das duas retas) e é paralela ao  $\beta_{2/4}$  – foi possível desenhar, de imediato, as projeções da reta  $p$ , mas a reta não está totalmente definida (as projeções de retas de perfil não verificam o **Critério de Reversibilidade**), para além de ainda não estar garantido o paralelismo da reta  $p$  em relação ao  $\beta_{2/4}$ . De facto, existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto  $P$  (e que têm as projeções desenhadas) mas, dessa infinidade de retas, apenas uma delas é paralela ao  $\beta_{2/4}$ .

Assim, para garantir o paralelismo da reta  $p$  em relação ao  $\beta_{2/4}$ , e porque as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de Reversibilidade**, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Assim, optou-se pelo rebatimento do plano de perfil (o plano  $\pi$ ) que contém a reta  $p$ , cujos traços se identificaram imediatamente. Efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ). A charneira do rebatimento é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – a rotação dos pontos processa-se em planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto  $P$ , o que nos permitiu determinar  $P_r$  e desenhou-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), passando por  $P_r$  e paralela ao  $\beta_{2/4}$ .

A reta  $p_r$  passa por  $P_r$  e, uma vez que a reta  $p$  é paralela ao  $\beta_{2/4}$ , sabe-se que a reta faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção (e com os traços do plano  $\pi$ ) – os ângulos de  $45^\circ$  com os traços do plano estão em verdadeira grandeza, em rebatimento, nos ângulos que a reta  $p_r$  faz com  $h_{\pi_r}$  e com  $f_{\pi_r}$ . Das duas hipóteses possíveis, apenas a apresentada garante que a reta  $p$  é paralela ao  $\beta_{2/4}$  (na outra situação, a reta seria paralela ao  $\beta_{1/3}$ ) – note que o ponto  $P$  se situa no  $1^a$  Diedro e que a reta, sendo paralela ao  $\beta_{2/4}$ , terá de atravessar os  $2^o$  e  $4^o$  Diedros, bem como um qualquer dos outros dois Diedros (se não atravessasse mais nenhum Diedro, seria uma reta do próprio  $\beta_{2/4}$ ). Em função das coordenadas do ponto  $P$ , a reta  $p$  atravessa os  $2^o$ ,  $1^o$  e  $4^o$  Diedros.

Foi possível, em seguida, determinar os traços da reta  $p$  em rebatimento –  $F_r$  (o traço frontal da reta  $p$  em rebatimento) está sobre  $f_{\pi_r}$  e  $H_r$  (o traço horizontal da reta  $p$  em rebatimento) está sobre  $h_{\pi_r}$  (a **Condição para que uma reta pertença a um plano** verifica-se tanto no espaço como em projeções e em rebatimento). Por fim, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$  e determinaram-se as projeções dos traços da reta. O ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r = F_2$ .

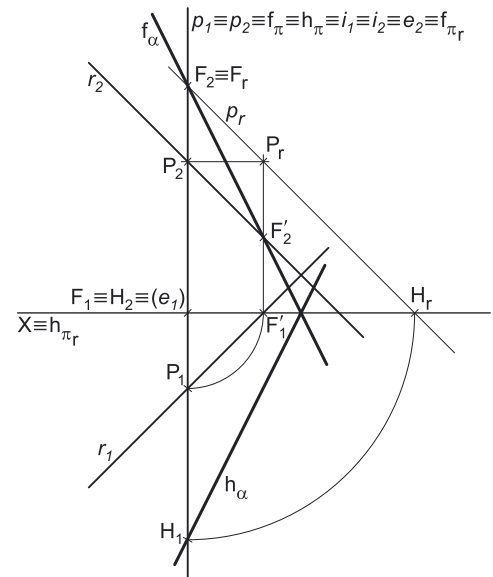
O **traço frontal do plano  $\alpha$**  é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) – o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $p$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $r$ , o ponto  $F'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano. O traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) está definido por dois pontos – os pontos  $H$  e  $H'$ .

O **traço horizontal do plano  $\alpha$**  é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal do plano, com cota nula). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) – o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $p$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dois traços de um plano são duas retas do plano que são necessariamente concorrentes num ponto do eixo  $X$  (à exceção dos planos de rampa). Assim,  $f_\alpha$  e  $h_\alpha$  têm de ser concorrentes entre si num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ). O traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $F$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

Note que se poderia ter determinado o traço horizontal da reta  $r$ . Nesse caso, teríamos **três pontos** para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) – os traços horizontais das duas retas (dois pontos) e, ainda, o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

**Traçado:**

Os dados (as projeções das retas  $p$  e  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$ , que são pedidos (são o objetivo do exercício), representaram-se a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p_r$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).



## 46.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, bem como a abscissa do ponto **C**, em função dos dados. Uma vez que o ponto **C** é o ponto de concorrência de duas retas de perfil, sendo que uma delas passa pelo ponto **M** e a outra passa pelo ponto **N**, foi possível, também, determinar as projeções dos pontos **M** e **N** (em função das respectivas coordenadas), pois os dois pontos têm a abscissa do ponto **C** (todos os pontos de uma reta de perfil têm a mesma abscissa).

### Resolução:

São pedidas as projeções de um triângulo **[ABC]**, sendo dados dois dos seus vértices, sendo que o terceiro vértice (o ponto **C**) é o ponto de concorrência de duas retas de perfil.

A reta **p**, de perfil, passa pelo ponto **M** e é paralela ao  $\beta_{1/3}$  – foi possível desenhar, de imediato, as projeções da reta **p**, mas a reta não está totalmente definida (as projeções de retas de perfil não verificam o **Crítério de Reversibilidade**), para além de ainda não estar garantido o paralelismo da reta **p** em relação ao  $\beta_{1/3}$ . De facto, existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto **M** (e que têm as projeções desenhadas) mas, dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela ao  $\beta_{1/3}$ .

A reta **p'**, de perfil, passa pelo ponto **N** e é paralela ao  $\beta_{2/4}$  – foi possível desenhar, de imediato, as projeções da reta **p'**, mas, à semelhança do exposto para a reta **p**, a reta **p'** não está totalmente definida (as projeções de retas de perfil não verificam o **Crítério de Reversibilidade**), para além de ainda não estar garantido o paralelismo da reta **p'** em relação ao  $\beta_{2/4}$ . De facto, existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto **N** (e que têm as projeções desenhadas) mas, dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela ao  $\beta_{2/4}$ .

Assim, para garantir o paralelismo da reta **p** em relação ao  $\beta_{1/3}$  e o paralelismo da reta **p'** em relação ao  $\beta_{2/4}$ , bem como para determinar as projeções do ponto **C**, e ainda porque as projeções da reta **p** não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Assim, optou-se pelo rebatimento do plano de perfil (o plano  $\pi$ ) que contém as retas **p** e **p'**, cujos traços se identificaram imediatamente. Efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano ( $f_{\pi}$ ). A charneira do rebatimento é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – a rotação dos pontos processa-se em planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos pontos **M** e **N**, o que nos permitiu determinar **M<sub>r</sub>** e **N<sub>r</sub>**.

Em seguida, desenharam-se as retas **p<sub>r</sub>** e **p'<sub>r</sub>**.

A reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida) passa por **M<sub>r</sub>** e, porque é paralela ao  $\beta_{1/3}$ , sabe-se que faz ângulos de 45° com os planos de projeção (e com os traços do plano  $\pi$ ) – os ângulos de 45° com os traços do plano estão em verdadeira grandeza, em rebatimento, nos ângulos que a reta **p<sub>r</sub>** faz com **h<sub>πr</sub>** e com **f<sub>πr</sub>**. Das duas hipóteses possíveis, apenas a apresentada garante que a reta **p** é paralela ao  $\beta_{1/3}$  (na outra situação, a reta seria paralela ao  $\beta_{2/4}$ ) – note que o ponto **M** se situa no 1.<sup>o</sup> Diedro e que a reta, sendo paralela ao  $\beta_{1/3}$ , terá de atravessar os 1.<sup>o</sup> e 3.<sup>o</sup> Diedros, bem como um qualquer dos outros dois Diedros (se não atravessasse mais nenhum Diedro, seria uma reta do próprio  $\beta_{1/3}$ ). Em função das coordenadas do ponto **M**, a reta **p** atravessa os 1.<sup>o</sup>, 4.<sup>o</sup> e 3.<sup>o</sup> Diedros.

A reta **p'<sub>r</sub>** (a reta **p'** rebatida) passa por **N<sub>r</sub>** e, porque é paralela ao  $\beta_{2/4}$ , sabe-se que faz ângulos de 45° com os planos de projeção (e com os traços do plano  $\pi$ ) – os ângulos de 45° com os traços do plano estão em verdadeira grandeza, em rebatimento, nos ângulos que a reta **p'<sub>r</sub>** faz com **h<sub>πr</sub>** e com **f<sub>πr</sub>**. Das duas hipóteses possíveis, apenas a apresentada garante que a reta **p'** é paralela ao  $\beta_{2/4}$  (na outra situação, a reta seria paralela ao  $\beta_{1/3}$ ) – note que o ponto **N** se situa no 1.<sup>o</sup> Diedro e que a reta, sendo paralela ao  $\beta_{2/4}$ , terá de atravessar os 2.<sup>o</sup> e 4.<sup>o</sup> Diedros, bem como um qualquer dos outros dois Diedros (se não atravessasse mais nenhum Diedro, seria uma reta do próprio  $\beta_{2/4}$ ). Em função das coordenadas do ponto **N**, a reta **p'** atravessa os 2.<sup>o</sup>, 1.<sup>o</sup> e 4.<sup>o</sup> Diedros.

Em seguida, em rebatimento, determinou-se o ponto de concorrência das retas **p<sub>r</sub>** e **p'<sub>r</sub>** – o ponto **C<sub>r</sub>**. Inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$  e determinaram-se as projeções do ponto **C**.

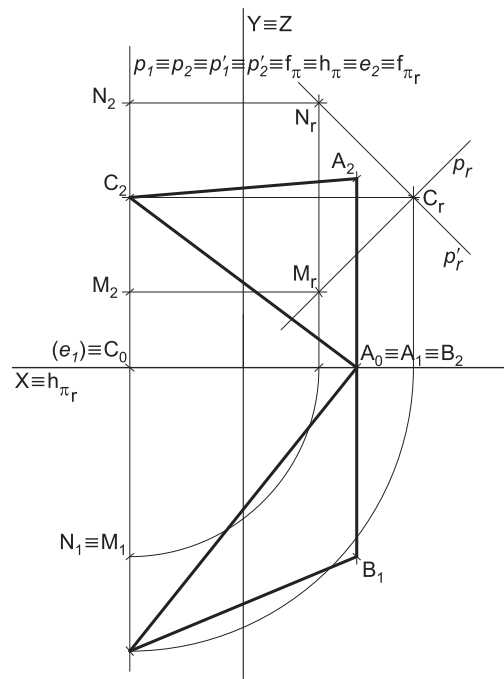
Por fim, desenharam-se as duas projeções do triângulo **[ABC]**

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas **p** e **p'**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções do triângulo **[ABC]**, que são pedidas (são o objetivo do exercício), representaram-se a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **p<sub>r</sub>** e **p'<sub>r</sub>**, bem como de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).

## 47.

**Crítério de paralelismo entre planos:** dois planos são paralelos se e só se um dos planos contiver duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do outro plano, ou seja, se os dois planos tiverem, em comum, duas «famílias» de retas.





## 48.

A afirmação é **falsa**, apesar de o ser apenas parcialmente, porque falta a palavra «concorrentes». De qualquer forma, a ausência dessa palavra faz, precisamente, com que a afirmação passe a ser **falsa**. De facto, segundo o **Critério de paralelismo entre planos**, para que dois planos sejam paralelos, **duas retas concorrentes** de um dos planos têm de ser paralelas a **duas retas concorrentes** do outro plano. Consideremos dois planos – o  $\beta_{1/3}$  e o  $\beta_{2/4}$ . Estes dois planos **não são paralelos**, apesar de ser possível determinar duas retas do  $\beta_{1/3}$  que são paralelas a duas retas do  $\beta_{2/4}$  – desde que essas retas sejam retas fronto-horizontais, o que são retas paralelas e não retas concorrentes.

## 49.

A afirmação é completamente **falsa**, o que pode ser justificado com um pequeno exemplo. Consideremos dois planos – um plano frontal (de frente) e um plano horizontal (de nível). Os dois planos não são paralelos (são ortogonais). No entanto, é possível determinar duas retas paralelas do plano horizontal (duas retas fronto-horizontais) que sejam paralelas a outras duas retas paralelas do plano frontal (outras duas retas fronto-horizontais). Assim, está provada a falsidade da afirmação.

## 50.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projecções, e o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados.

**Resolução:**

Pretende-se um plano  $\theta$ , paralelo ao plano  $\alpha$  e passando pelo ponto **P** – o plano  $\theta$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, o plano  $\theta$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Os traços de um plano oblíquo são **duas retas concorrentes** desse plano. Assim, para que o plano  $\theta$  seja paralelo ao plano  $\alpha$ , basta que os seus traços (que são duas retas concorrentes do plano  $\theta$ ) sejam paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ).

Por outro lado, para que o plano  $\theta$  passe pelo ponto **P**, o ponto **P** tem de pertencer ao plano  $\theta$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\theta$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto **P**, uma reta que pertença ao plano  $\theta$  – essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) ou uma reta horizontal (de nível), pois são essas as «famílias» de retas já conhecidas do plano  $\theta$ . Tenha em conta que  $f_\theta$  é uma reta frontal do plano  $\theta$ , paralela às retas frontais do plano  $\alpha$  (e a  $f_\alpha$ ), tal como  $h_\theta$  é uma reta horizontal do plano  $\theta$ , paralela às retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$  (e a  $h_\alpha$ ).

Nesse sentido, pelo ponto **P** conduziu-se uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$  – a reta  $f$ , paralela às retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$  (que é a direcção das retas frontais do plano  $\theta$ ). A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direcção (a direcção das retas frontais do plano  $\theta$ ).

A reta  $f$  garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\theta$  já tem uma «família» de retas em comum com o plano  $\alpha$  (a «família» das retas frontais);
2. que o ponto **P** pertence ao plano  $\theta$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $f$ ).

Para a reta  $f$  pertencer ao plano  $\theta$ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\theta$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta  $f$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direcção. A direcção de  $h_\theta$  também já é conhecida – é paralelo a  $h_\alpha$ . Assim, pelo ponto **H** conduziu-se  $h_\theta$  (o traço horizontal do plano  $\theta$ ), paralelo a  $h_\alpha$ . O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) está definido por um ponto (o ponto **H**) e uma direcção (a direcção das retas horizontais do plano  $\theta$ ).

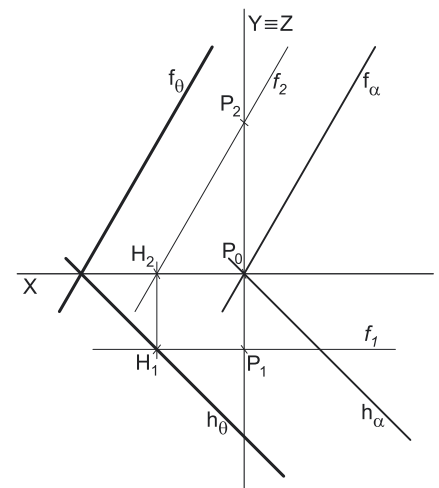
O plano  $\theta$  está definido por duas retas concorrentes – o seu traço horizontal ( $h_\theta$ ) e a reta  $f$ , que são concorrentes no ponto **H**. Já garantimos que o plano  $\theta$  é paralelo ao plano  $\alpha$ , pois as retas  $f$  e  $h_\theta$  (duas retas concorrentes do plano  $\theta$ ) são paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (os traços do plano  $\alpha$ ) – os dois planos já têm, em comum, duas «famílias» de retas (a «família» das retas horizontais e a «família» das retas frontais).

Por fim, desenhou-se o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direcção (a direcção das retas frontais do plano  $\theta$  –  $f_\theta$  é paralelo à reta  $f$  e a  $f_\alpha$ ).

O plano  $\theta$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **P** e é paralelo ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\theta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $f$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 51.

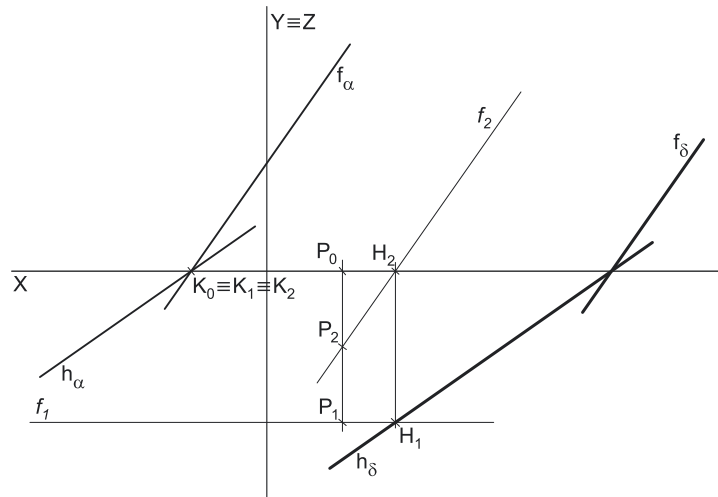
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, e o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se um plano  $\delta$ , paralelo ao plano  $\alpha$  e passando pelo ponto **P** – o plano  $\delta$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, o plano  $\delta$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Os traços de um plano oblíquo são **duas retas concorrentes** desse plano. Assim, para que o plano  $\delta$  seja paralelo ao plano  $\alpha$ , basta que os seus traços (que são duas retas concorrentes do plano  $\delta$ ) sejam paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ).

Por outro lado, para que o plano  $\delta$  passe pelo ponto **P**, o ponto **P** tem de pertencer ao plano  $\delta$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\delta$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto **P**, uma reta que pertença ao plano  $\delta$  – essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) ou uma reta horizontal (de nível), pois são essas as «famílias» de retas já conhecidas do plano  $\delta$ . Tenha em conta que  $f_\delta$  é uma reta frontal do plano  $\delta$ , paralela às retas frontais do plano  $\alpha$  (e a  $f_\alpha$ ), tal como  $h_\delta$  é uma reta horizontal do plano  $\delta$ , paralela às retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$  (e a  $h_\alpha$ ).



Nesse sentido, pelo ponto **P** conduziu-se uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$  – a reta  $f$ , paralela às retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$  (que é a direção das retas frontais do plano  $\delta$ ). A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$ ).

A reta  $f$  garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\delta$  já tem uma «família» de retas em comum com o plano  $\alpha$  (a «família» das retas frontais);
2. que o ponto **P** pertence ao plano  $\delta$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $f$ ).

Para a reta  $f$  pertencer ao plano  $\delta$ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\delta$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta  $f$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção de  $h_\delta$  também já é conhecida – é paralela a  $h_\alpha$ . Assim, pelo ponto **H** conduziu-se  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ), paralela a  $h_\alpha$ . O traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ) está definido por um ponto (o ponto **H**) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ).

O plano  $\delta$  está definido por duas retas concorrentes – o seu traço horizontal ( $h_\delta$ ) e a reta  $f$ , que são concorrentes no ponto **H**. Já garantimos que o plano  $\delta$  é paralelo ao plano  $\alpha$ , pois as retas  $f$  e  $h_\delta$  (duas retas concorrentes do plano  $\delta$ ) são paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (os traços do plano  $\alpha$ ) – os dois planos já têm, em comum, duas «famílias» de retas (a «família» das retas horizontais e a «família» das retas frontais).

Por fim desenhou-se o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$  –  $f_\delta$  é paralelo à reta  $f$  e a  $f_\alpha$ ).

O plano  $\delta$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **P** e é paralelo ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\delta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $f$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 52.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **M**, pelas suas projeções, e o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. Sublinha-se que os traços do plano  $\gamma$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção, o plano  $\gamma$  não pode ter os seus traços coincidentes, a menos que se trate de um plano passante (o que não é o caso).

**Resolução:**

Pretende-se um plano  $\lambda$ , paralelo ao plano  $\gamma$  e passando pelo ponto **M** – o plano  $\lambda$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\gamma$ , ou seja, o plano  $\lambda$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\gamma$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Os traços de um plano oblíquo são **duas retas concorrentes** desse plano. Assim, para que o plano  $\lambda$  seja paralelo ao plano  $\gamma$ , basta que os seus traços (que são duas retas concorrentes do plano  $\lambda$ ) sejam paralelos aos traços homónimos do plano  $\gamma$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\gamma$ ).

Por outro lado, para que o plano  $\lambda$ , passe pelo ponto **M**, o ponto **M** tem de pertencer ao plano  $\lambda$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\lambda$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto **M**, uma reta que pertença ao plano  $\lambda$  – essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) ou uma reta horizontal (de nível), pois são essas as «famílias» de retas já conhecidas do plano  $\lambda$ . Tenha em conta que  $f_\lambda$  é uma reta frontal do plano  $\lambda$ , paralela às retas frontais do plano  $\gamma$  (e a  $f_\gamma$ ), tal como  $h_\lambda$  é uma reta horizontal do plano  $\lambda$ , paralela às retas horizontais (de nível) do plano  $\gamma$  (e a  $h_\gamma$ ).

Nesse sentido, pelo ponto **M** conduziu-se uma reta frontal (de frente) do plano  $\lambda$  – a reta **f**, paralela às retas frontais (de frente) do plano  $\gamma$  (que é a direção das retas frontais do plano  $\lambda$ ). A reta **f** está definida por um ponto (o ponto **M**) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\lambda$ ).

A reta **f** garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\lambda$  já tem uma «família» de retas em comum com o plano  $\gamma$  (a «família» das retas frontais);
2. que o ponto **M** pertence ao plano  $\lambda$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta **f**).

Para a reta **f** pertencer ao plano  $\lambda$ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\lambda$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **f**. Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano  $\lambda$  ( $h_\lambda$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção de  $h_\lambda$  também já é conhecida – é paralelo a  $h_\gamma$ . Assim, pelo ponto **H** conduziu-se  $h_\lambda$  (o traço horizontal do plano  $\lambda$ ), paralelo a  $h_\gamma$ . O traço horizontal do plano  $\lambda$  ( $h_\lambda$ ) está definido por um ponto (o ponto **H**) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\lambda$ ).

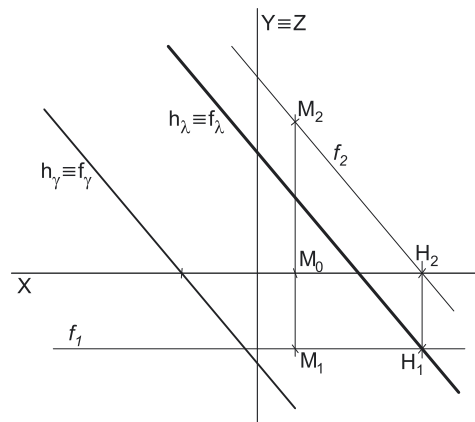
O plano  $\lambda$  está definido por duas retas concorrentes – o seu traço horizontal ( $h_\lambda$ ) e a reta **f**, que são concorrentes no ponto **H**. Já garantimos que o plano  $\lambda$  é paralelo ao plano  $\gamma$ , pois as retas **f** e  $h_\lambda$  (duas retas concorrentes do plano  $\lambda$ ) são paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\gamma$  (os traços do plano  $\gamma$ ) – os dois planos já têm, em comum, duas «famílias» de retas (a «família» das retas horizontais e a «família» das retas frontais).

Por fim desenhou-se o traço frontal do plano  $\lambda$  ( $f_\lambda$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\lambda$  –  $f_\lambda$  é paralelo à reta **f** e a  $f_\gamma$ ).

O plano  $\lambda$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **M** e é paralelo ao plano  $\gamma$ , conforme era pedido.

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\gamma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\lambda$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **f** ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 53.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, e o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O ponto **P** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). Nesta situação particular, as projeções do ponto **P** ficam sobre os traços homónimos do plano  $\alpha$ , mas ainda assim, o ponto **P não pertence** ao plano  $\alpha$  (pois não pertence a qualquer reta que pertença ao plano  $\alpha$ ).

### Resolução:

Pretende-se um plano  $\delta$ , paralelo ao plano  $\alpha$  e passando pelo ponto **P** – o plano  $\delta$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, o plano  $\delta$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Os traços de um plano oblíquo são **duas retas concorrentes** desse plano. Assim, para que o plano  $\delta$  seja paralelo ao plano  $\alpha$ , basta que os seus traços (que são duas retas concorrentes do plano  $\delta$ ) sejam paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ).

Por outro lado, para que o plano  $\delta$  passe pelo ponto **P**, o ponto **P** tem de pertencer ao plano  $\delta$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\delta$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto **P**, uma reta que pertença ao plano  $\delta$  – essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) ou uma reta horizontal (de nível), pois são essas as «famílias» de retas já conhecidas do plano  $\delta$ . Tenha em conta que  $f_\delta$  é uma reta frontal do plano  $\delta$ , paralela às retas frontais do plano  $\alpha$  (e a  $f_\alpha$ ), tal como  $h_\delta$  é uma reta horizontal do plano  $\delta$ , paralela às retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$  (e a  $h_\alpha$ ).

Nesse sentido, pelo ponto **P** conduziu-se uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$  – a reta **h**, paralela às retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$  (que é a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ). A reta **h** está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ). Note que, nesta situação particular, a projeção horizontal da reta **h** ( $h_1$ ) fica coincidente com o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), mas a reta **h não pertence** ao plano  $\alpha$ .

A reta **h** garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\delta$  já tem uma «família» de retas em comum com o plano  $\alpha$  (a «família» das retas horizontais);
2. que o ponto **P** pertence ao plano  $\delta$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta **h**).

Para a reta **h** pertencer ao plano  $\delta$ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\delta$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto **F**, o traço frontal da reta **h**. Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção de  $f_\delta$  também já é conhecida – é paralelo a  $f_\alpha$ . Assim, pelo ponto **F** conduziu-se  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ), paralelo a  $f_\alpha$ . O traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ) está definido por um ponto (o ponto **F**) e uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$ ).

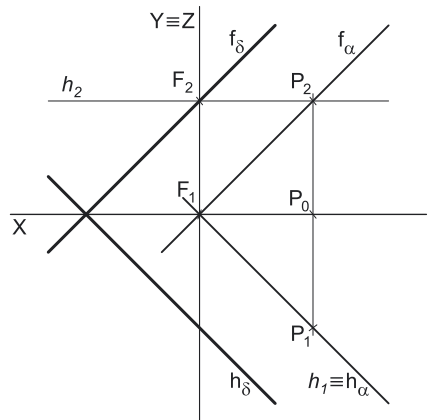
O plano  $\delta$  está definido por duas retas concorrentes – o seu traço frontal ( $f_\delta$ ) e a reta **h**, que são concorrentes no ponto **F**. Já garantimos que o plano  $\delta$  é paralelo ao plano  $\alpha$ , pois as retas **h** e  $f_\delta$  (duas retas concorrentes do plano  $\delta$ ) são paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (os traços do plano  $\alpha$ ) – os dois planos já têm, em comum, duas «famílias» de retas (a «família» das retas horizontais e a «família» das retas frontais).

Por fim desenhou-se o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$  –  $h_\delta$  é paralelo à reta **h** e a  $h_\alpha$ ).

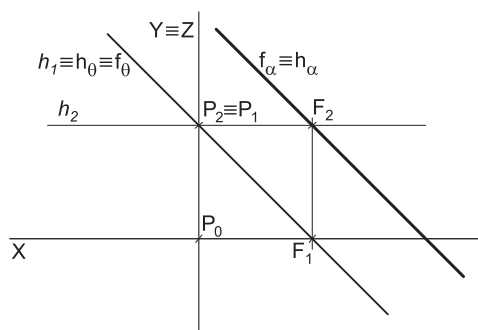
O plano  $\delta$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **P** e é paralelo ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\delta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **h** ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 54.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, e o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O ponto **P** tem as suas projeções coincidentes, pois é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes). Sublinha-se que os traços do plano  $\theta$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção, o plano  $\theta$  não pode ter os seus traços coincidentes, a menos que se trate de um plano passante (o que não é o caso). Nesta situação particular, as projeções do ponto **P** ficam sobre os traços homónimos do plano  $\theta$ , mas ainda assim, o ponto **P não pertence** ao plano  $\theta$  (pois não pertence a qualquer reta que pertença ao plano  $\theta$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Resolução:

Pretende-se um plano  $\alpha$ , paralelo ao plano  $\theta$  e passando pelo ponto  $P$  – o plano  $\alpha$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\theta$ , ou seja, o plano  $\alpha$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\theta$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Os traços de um plano oblíquo são **duas retas concorrentes** desse plano. Assim, para que o plano  $\alpha$  seja paralelo ao plano  $\theta$ , basta que os seus traços (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ) sejam paralelos aos traços homónimos do plano  $\theta$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\theta$ ).

Por outro lado, para que o plano  $\alpha$  passe pelo ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\alpha$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta que pertença ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) ou uma reta horizontal (de nível), pois são essas as «famílias» de retas já conhecidas do plano  $\alpha$ . Tenha em conta que  $f_\alpha$  é uma reta frontal do plano  $\alpha$ , paralela às retas frontais do plano  $\theta$  (e a  $f_\theta$ ), tal como  $h_\alpha$  é uma reta horizontal do plano  $\alpha$ , paralela às retas horizontais (de nível) do plano  $\theta$  (e a  $h_\theta$ ).

Nesse sentido, pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  – a reta  $h$ , paralela às retas horizontais (de nível) do plano  $\theta$  (que é a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). Note que, nesta situação particular, a projeção horizontal da reta  $h$  ( $h_1$ ) fica coincidente com os traços do plano  $\theta$ , mas a reta  $h$  **não pertence** ao plano  $\theta$ .

A reta  $h$  garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\alpha$  já tem uma «família» de retas em comum com o plano  $\theta$  (a «família» das retas horizontais);
2. que o ponto  $P$  pertence ao plano  $\alpha$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $h$ ).

Para a reta  $h$  pertencer ao plano  $\alpha$ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $h$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção de  $f_\alpha$  também já é conhecida – é paralela a  $f_\theta$ . Assim, pelo ponto  $F$  conduziu-se  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ), paralela a  $f_\theta$ . O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ).

O plano  $\alpha$  está definido por duas retas concorrentes – o seu traço frontal ( $f_\alpha$ ) e a reta  $h$ , que são concorrentes no ponto  $F$ . Já garantimos que o plano  $\alpha$  é paralelo ao plano  $\theta$ , pois as retas  $h$  e  $f_\alpha$  (duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ) são paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\theta$  (os traços do plano  $\theta$ ) – os dois planos já têm, em comum, duas «famílias» de retas (a «família» das retas horizontais e a «família» das retas frontais).

Por fim desenhou-se o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$  –  $h_\alpha$  é paralelo a  $h$  e a  $h_\theta$ ).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $P$  e é paralelo ao plano  $\theta$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $h$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 55.

### Dados:

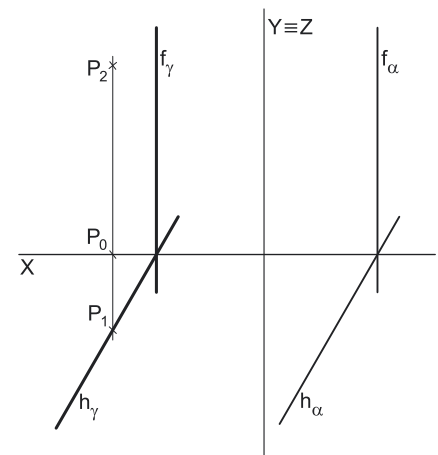
Em primeiro lugar, representaram-se o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se um plano  $\gamma$ , paralelo ao plano  $\alpha$  e contendo o ponto  $P$ . Para o plano  $\gamma$  ser paralelo ao plano  $\alpha$ , o plano  $\gamma$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, o plano  $\gamma$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (o plano  $\gamma$  tem de ter duas «famílias» de retas em comum com o plano  $\alpha$ ). Os traços de um plano vertical são **duas retas concorrentes** desse plano. Assim, para que o plano  $\gamma$  seja paralelo ao plano  $\alpha$ , basta que os seus traços (que são duas retas concorrentes do plano  $\gamma$ ) sejam paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ). Nesse sentido, o plano  $\gamma$  é necessariamente outro **plano vertical** (que é um plano projetante horizontal).

Por outro lado, para que o plano  $\gamma$  passe pelo ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano  $\gamma$  (que é um plano projetante horizontal). Uma vez que o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, o plano  $\gamma$  projeta todos os seus pontos e todas as suas retas no Plano Horizontal de Projeção, sobre o seu traço horizontal, pelo que a projeção horizontal do ponto  $P$  ( $P_1$ ) tem de se situar sobre  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ), para que o ponto  $P$  pertença ao plano  $\gamma$ .

Assim, conduziu-se  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ) por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) e paralelo a  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) –  $h_\gamma$  está definido por um ponto ( $P_1$  – a projeção horizontal do ponto  $P$ ) e por uma direção (é paralelo a  $h_\alpha$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim desenhou-se o traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha - f_\gamma$  é paralelo a  $f_\alpha$ ). Tendo em conta que as retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$  são retas verticais (um caso particular das retas horizontais), o traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ) é uma reta vertical.

O plano  $\gamma$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **P** e é paralelo ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\gamma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 56.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **M**, pelas respetivas projeções, bem como o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se um plano  $\tau$ , paralelo ao plano  $\theta$  e contendo o ponto **M**. Para o plano  $\tau$  ser paralelo ao plano  $\theta$ , o plano  $\tau$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\theta$ , ou seja, o plano  $\tau$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\theta$  (o plano  $\tau$  tem de ter duas «famílias» de retas em comum com o plano  $\theta$ ). Os traços de um plano de topo são **duas retas concorrentes** desse plano. Assim, para que o plano  $\tau$  seja paralelo ao plano  $\theta$ , basta que os seus traços (que são duas retas concorrentes do plano  $\tau$ ) sejam paralelos aos traços homónimos do plano  $\theta$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\theta$ ). Nesse sentido, o plano  $\tau$  é necessariamente outro **plano de topo** (que é um plano projetante frontal).

Por outro lado, para que o plano  $\tau$  passe pelo ponto **M**, o ponto **M** tem de pertencer ao plano  $\tau$  (que é um plano projetante frontal). Uma vez que o plano  $\tau$  é um plano projetante frontal, o plano  $\tau$  projeta todos os seus pontos e todas as suas retas no Plano Frontal de Projeção, sobre o seu traço frontal, pelo que a projeção frontal do ponto **M** ( $M_2$ ) tem de se situar sobre  $f_\tau$  (o traço frontal do plano  $\tau$ ), para que o ponto **M** pertença ao plano  $\tau$ .

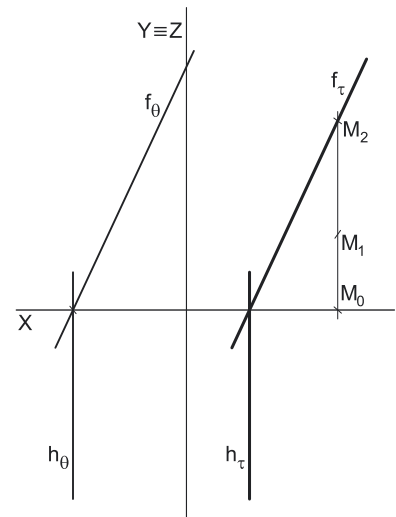
Assim, conduziu-se  $f_\tau$  (o traço frontal do plano  $\tau$ ) por  $M_2$  (a projeção frontal do ponto **M**) e paralelo a  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ) –  $f_\tau$  está definido por um ponto ( $M_2$  – a projeção frontal do ponto **M**) e por uma direção (é paralelo a  $f_\theta$ ).

Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\tau$  ( $h_\tau$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\theta - h_\tau$  é paralelo a  $h_\theta$ ). Tendo em conta que as retas horizontais (de nível) do plano  $\theta$  são retas de topo (um caso particular das retas horizontais), o traço horizontal do plano  $\tau$  ( $h_\tau$ ) é uma reta de topo.

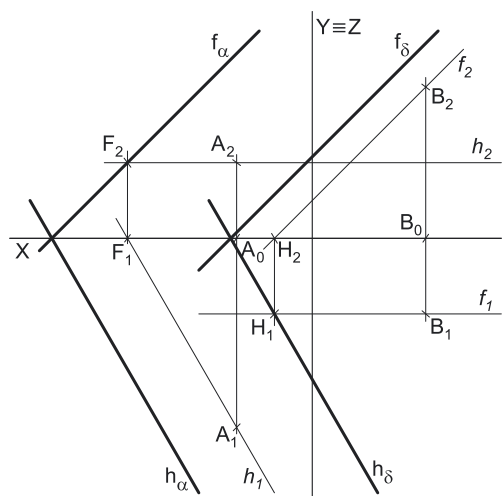
O plano  $\tau$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **M** e é paralelo ao plano  $\theta$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\tau$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 57.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se dois planos,  $\alpha$  e  $\delta$ , paralelos sendo que o plano  $\alpha$  passa pelo ponto **A** e o plano  $\delta$  passa pelo ponto **B** – os dois planos têm de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao outro, ou seja, cada um dos planos tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do outro plano (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum).

Por outro lado, essa condição refere-se ao mínimo necessário para garantir o paralelismo entre dois planos, porque, na realidade, dois **planos paralelos** têm **todas as «famílias» de retas em comum** (por oposição aos **planos secantes**, que têm **uma única «família» de retas em comum**).

Começou-se por conduzir, pelo ponto **A**, uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  – a reta **h**, com a direção das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ . A reta **h** está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ , que é dada no enunciado).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $h$  garante-nos que o ponto  $A$  pertence ao plano  $\alpha$ , porque pertence a uma reta do plano – a reta  $h$ .

Em seguida, conduziu-se, pelo ponto  $B$ , uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$  – a reta  $f$ , com a direção das retas frontais (de frente) do plano  $\delta$ . A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $B$ ) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$ , que é dada no enunciado).

A reta  $f$  garante-nos que o ponto  $B$  pertence ao plano  $\delta$ , porque pertence a uma reta do plano – a reta  $f$ .

#### Determinação dos traços do plano $\alpha$ :

Para que o plano  $\alpha$  seja paralelo ao plano  $\delta$ , o plano  $\alpha$  tem de ter duas «famílias» de retas em comum com o plano  $\delta$ . Tendo em conta que já é conhecida a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\delta$ , o plano  $\alpha$  tem de conter essa «família» de retas. Uma vez que o traço frontal do plano  $\alpha$  é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo, o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) tem de pertencer à «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$ , que tem de ser a mesma «família» de retas frontais (de frente) do plano  $\delta$ .

Por outro lado, para que a reta  $h$  pertença ao plano  $\alpha$ , a reta  $h$  tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $h$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção de  $f_\alpha$  também já é conhecida – é a direção das retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$ . Assim, pelo ponto  $F$  conduziu-se  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ), paralelo à reta  $f$ . O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ).

O plano  $\alpha$  está definido por duas retas concorrentes – o seu traço frontal ( $f_\alpha$ ) e a reta  $h$ , que são concorrentes no ponto  $F$ . Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$  –  $h_\alpha$  é paralelo à reta  $h$ ).

#### Determinação dos traços do plano $\delta$ :

Em seguida, para que o plano  $\delta$  seja paralelo ao plano  $\alpha$ , o plano  $\delta$  tem de ter duas «famílias» de retas em comum com o plano  $\alpha$ . Os dois planos já têm, em comum, a «família» das retas frontais (de frente). No entanto, os dois planos têm de ter, em comum, uma outra «família» de retas.

Tendo em conta que já é conhecida a «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ , o plano  $\delta$  tem de conter essa «família» de retas. Uma vez que o traço horizontal do plano  $\delta$  é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula, o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ) tem de pertencer à «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\delta$ , que tem de ser a mesma «família» de retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ .

Por outro lado, para que a reta  $f$  pertença ao plano  $\delta$ , a reta  $f$  tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\delta$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H$ , o traço horizontal da reta  $f$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção de  $h_\delta$  também já é conhecida – é a direção das retas horizontais (de nível) do plano  $\delta$ . Assim, pelo ponto  $H$  conduziu-se  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ), paralelo à reta  $h$  (e a  $h_\alpha$ ). O traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ).

O plano  $\delta$  está definido por duas retas concorrentes – o seu traço horizontal ( $h_\delta$ ) e a reta  $f$ , que são concorrentes no ponto  $H$ . Por fim, desenhou-se o traço frontal do plano ( $f_\delta$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$  –  $f_\delta$  é paralelo à reta  $f$  e a  $f_\alpha$ ).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $A$  e é paralelo ao plano  $\delta$ , tal como plano  $\delta$  contém o ponto  $B$  e é paralelo ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os traços dos dois planos representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $h$  e  $f$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 58.

A afirmação é **verdadeira**. No entanto, os traços homónimos de um plano de rampa são sempre paralelos entre si, mesmo que os dois planos não sejam paralelos entre si, pois são retas da mesma «família» de retas. De facto, tanto o traço frontal como o traço horizontal de um qualquer plano de rampa são, ambos, retas fronto-horizontais, e retas fronto-horizontais são sempre paralelas entre si. Assim, quaisquer dois planos de rampa têm, **sempre**, os traços homónimos paralelos entre si, mesmo que não sejam paralelos. Assim, e ao contrário das restantes situações (todos os planos que não sejam paralelos ao eixo  $X$ ), o facto de os traços homónimos de dois planos de rampa serem paralelos entre si (o que se verifica sempre) não nos garante o paralelismo entre os dois planos.

## 59.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\rho$  e  $\sigma$ , pelos respetivos traços, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se averiguar o eventual paralelismo entre os dois planos. Caso os dois planos sejam paralelos, os planos têm de verificar o **Critério de paralelismo entre planos**, ou seja, um dos planos tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do outro plano (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Os planos  $\rho$  e  $\sigma$  são, ambos, planos de rampa, pelo que ambos os planos contêm retas fronto-horizontais – assim, é possível garantir, de imediato, que os dois planos já têm, em comum, uma «família» de retas (a «família» das retas fronto-horizontais). Para que os dois planos sejam paralelos, basta averiguar se existe uma outra «família» de retas que os dois planos tenham em comum.

Assim, recorreu-se a uma reta  $r$ , oblíqua, qualquer pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $r$  é uma reta oblíqua do plano  $\rho$  e está definida por dois pontos (os seus traços, os pontos **F** e **H**). A reta  $r$  é uma reta de uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ , «família» de retas essa que os dois planos também têm em comum, no caso de serem paralelos.

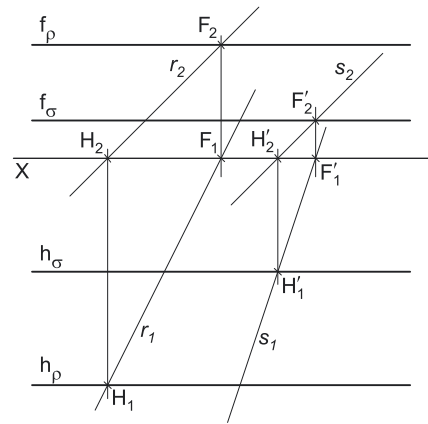
Nesse sentido, recorreu-se a uma reta  $s$ , oblíqua, pertencente ao plano  $\sigma$  e tentando que a reta  $s$  seja paralela à reta  $r$ . Para tal, desenhou-se a projeção horizontal da reta  $s$  ( $s_1$ ), paralela à projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ) e determinaram-se os traços da reta  $s$ , garantindo que a reta  $s$  pertence ao plano  $\sigma$  – a reta  $s$  está definida por dois pontos (os seus traços, os pontos **F'** e **H'**).

Em seguida, analisou-se a posição das duas retas e constata-se que as duas retas **não são paralelas**, pois as suas projeções frontais não são paralelas entre si (apesar de as suas projeções horizontais serem paralelas entre si). Assim, os dois planos **não são paralelos**.

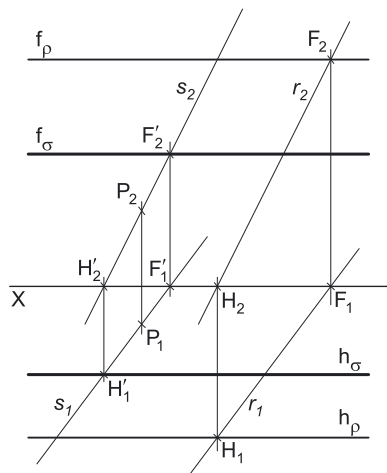
Tenha em conta que quaisquer dois planos paralelos têm **todas** as «famílias» de retas em comum. De facto, sempre que dois planos têm, em comum, duas «famílias» de retas, esses planos têm, em comum, **toda e qualquer** outra «família» de retas – os dois planos têm, em comum, **todas** as «famílias» de retas. A partir do momento em que os dois planos (os planos  $\rho$  e  $\sigma$ ) não têm, em comum, uma qualquer «família» de retas (seja a «família» de retas da reta  $r$  ou a «família» de retas da reta  $s$ ), conclui-se que os dois planos têm, em comum, uma única «família» de retas (a «família» das retas fronto-horizontais), pelo que, nesse caso, os dois planos são **secantes**.

### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\rho$  e  $\sigma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O que é pedido é uma conclusão, pelo que, neste exercício, não há nenhum elemento gráfico que se represente a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ ).



## 60.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, e o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se um plano  $\sigma$ , paralelo ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto **P** – o plano  $\sigma$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, o plano  $\sigma$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). O plano  $\rho$  é um plano de rampa e um plano paralelo a um plano de rampa é necessariamente outro plano de rampa, pelo que o plano  $\sigma$  é necessariamente outro plano de rampa.

Qualquer plano de rampa contém retas fronto-horizontais, pelo que tanto o plano  $\rho$  como o plano  $\sigma$  contêm retas fronto-horizontais. Assim, os dois planos já têm, em comum, uma «família» de retas – a «família» das retas fronto-horizontais. Para que os dois planos sejam paralelos, os dois planos têm de ter, em comum, outra «família» de retas.

Por outro lado, para que o plano  $\sigma$  passe pelo ponto **P**, o ponto **P** tem de pertencer ao plano  $\sigma$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\sigma$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto **P**, uma reta que pertença ao plano  $\sigma$  – essa reta terá de ser uma reta paralela a uma reta do plano  $\rho$  (uma reta de outra «família» de retas que seja comum aos dois planos).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções de uma reta  $r$ , qualquer pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $r$  é uma reta oblíqua do plano  $\rho$  e está definida por dois pontos (os seus traços, os pontos **F** e **H**). A reta  $r$  é uma reta de uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ , «família» de retas essa que os dois planos também têm de ter em comum (dois planos paralelos têm todas as «famílias» de retas em comum).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, pelo ponto **P** conduziu-se uma reta **s**, paralela à reta **r** – a reta **s** está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (a direção da reta **r**). A reta **s** garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\sigma$  já tem outra «família» de retas em comum com o plano  $\rho$ , para além da «família» das retas fronto-horizontais (a «família» de retas a que as retas **r** e **s** pertencem);
2. que o ponto **P** pertence ao plano  $\sigma$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta **s**).

Para a reta **s** pertencer ao plano  $\sigma$ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\sigma$ . Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **s** nos planos de projeção (os pontos **F'** e **H'**) e desenharam-se os traços do plano  $\sigma$ , que são retas fronto-horizontais. O traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto **F'**) e uma direção (é uma reta fronto-horizantal). O traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_\sigma$ ) está igualmente definido por um ponto (o ponto **H'**) e uma direção (é também uma reta fronto-horizantal).

O plano  $\sigma$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **P** e é paralelo ao plano  $\rho$ , conforme era pedido.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\sigma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **s**).

## 61.

#### Dados:

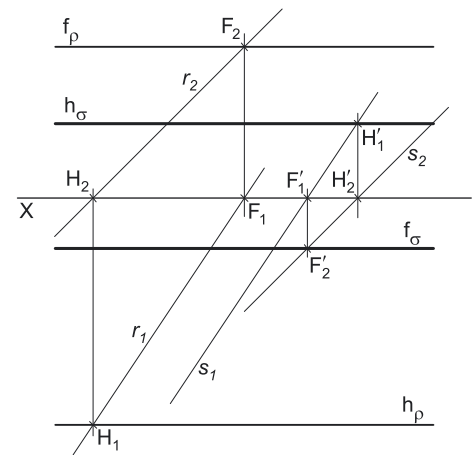
Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, bem como o traço frontal do plano  $\sigma$ , em função dos dados.

#### Resolução:

Pretende-se um plano  $\sigma$ , paralelo ao plano  $\rho$  – o plano  $\sigma$  tem, assim, de verificar o **CrITÉrio de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, o plano  $\sigma$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). O plano  $\rho$  é um plano de rampa e um plano paralelo a um plano de rampa é necessariamente outro plano de rampa, pelo que o plano  $\sigma$  é necessariamente outro plano de rampa.

Qualquer plano de rampa contém retas fronto-horizontais, pelo que tanto o plano  $\rho$  como o plano  $\sigma$  contêm retas fronto-horizontais. Assim, os dois planos já têm, em comum, uma «família» de retas – a «família» das retas fronto-horizontais. Para que os dois planos sejam paralelos, os dois planos têm de ter, em comum, outra «família» de retas.

Assim, determinaram-se as projeções de uma reta **r**, qualquer pertencente ao plano  $\rho$  – a reta **r** é uma reta oblíqua do plano  $\rho$  e está definida por dois pontos (os seus traços, os pontos **F** e **H**). A reta **r** é uma reta de uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ , «família» de retas essa que os dois planos também têm de ter em comum (dois planos paralelos têm todas as «famílias» de retas em comum).



Em seguida, determinou-se uma reta **s**, paralela à reta **r** e pertencente ao plano  $\sigma$ . A reta **s**, porque pertence ao plano  $\sigma$ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano**, em relação ao plano  $\sigma$ . Assim, o traço frontal da reta **s** (o ponto **F'**) está sobre o traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ). A reta **s** está definida por um ponto (o ponto **F'**) e por uma direção (a direção da reta **r**). A reta **s** garante-nos, assim, que o plano  $\sigma$  já tem outra «família» de retas em comum com o plano  $\rho$ , para além da «família» das retas fronto-horizontais (a «família» de retas a que as retas **r** e **s** pertencem).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta **s** – o ponto **H'**. Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\sigma$ , que é uma reta fronto-horizantal. O traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto **H'**) e uma direção (é uma reta fronto-horizantal).

O plano  $\sigma$ , definido pelos seus traços, é paralelo ao plano  $\rho$ , conforme era pedido.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\sigma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **s**).



## 62.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $r$  e  $g$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  é paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem as suas projeções paralelas entre si (retas paralelas a  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

### Resolução:

Pretende-se dois planos,  $\rho$  e  $\sigma$ , paralelos sendo que o plano  $\rho$  contém a reta  $g$  e o plano  $\sigma$  contém a reta  $r$  – os dois planos têm de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao outro, ou seja, cada um dos planos tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do outro plano (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum).

Por outro lado, essa condição refere-se ao mínimo necessário para garantir o paralelismo entre dois planos, porque, na realidade, dois **planos paralelos têm todas as «famílias» de retas em comum** (por oposição aos **planos secantes**, que têm **uma única «família» de retas em comum**).

#### Determinação dos traços do plano $\sigma$ :

Para que o plano  $\sigma$  seja paralelo ao plano  $\rho$ , o plano  $\sigma$  tem de ter duas «famílias» de retas em comum com o plano  $\rho$ . Tendo em conta que o plano  $\rho$  contém a «família» das retas fronto-horizontais, o plano  $\sigma$  tem de conter igualmente essa «família» de retas. Qualquer plano que contenha uma reta oblíqua (a reta  $r$  é uma reta oblíqua) e retas fronto-horizontais, é necessariamente um plano de rampa. Assim, o plano  $\sigma$  é necessariamente um plano de rampa.

Por outro lado, para que a reta  $r$  pertença ao plano  $\sigma$ , a reta  $r$  tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\sigma$ . Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta  $r$  nos planos de projeção (os pontos  $F$  e  $H$ ) e desenharam-se os traços do plano  $\sigma$ , que são retas fronto-horizontais. O traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e uma direção (é uma reta fronto-horizantal). O traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_\sigma$ ) está igualmente definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e uma direção (é também uma reta fronto-horizantal).

#### Determinação dos traços do plano $\rho$ :

Em seguida, para que o plano  $\rho$  seja paralelo ao plano  $\sigma$ , o plano  $\rho$  tem de ter duas «famílias» de retas em comum com o plano  $\sigma$ . Os planos já têm, em comum, a «família» das retas fronto-horizontais. Assim, os dois planos têm que ter em comum uma outra «família» de retas – a «família» de retas a que a reta  $r$  pertence.

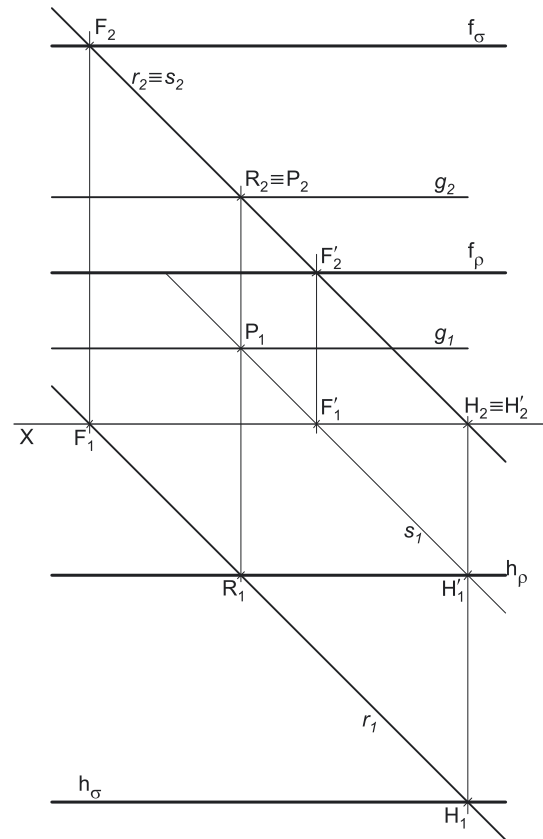
Assim, recorreu-se a uma reta  $s$ , paralela à reta  $r$  e pertencente ao plano  $\rho$ . Por uma questão de economia de traçados, optou-se por fazer com que a projeção frontal da reta  $s$  ( $s_2$ ) coincidente com a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) – tem-se imediatamente  $s_2 \equiv r_2$ . Para definir a reta  $s$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $s$  é paralela à reta  $r$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta  $s$  – a direção da reta  $r$ . Falta-nos um ponto para definir a reta  $s$ . As retas  $s$  e  $g$  são complanares (pertencem, ambas, ao plano  $\rho$ ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois as suas projeções frontais não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $P$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $s$ . A reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção da reta  $r$ ).

Por fim, para que a reta  $s$  pertença ao plano  $\rho$ , a reta  $s$  tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta  $s$  nos planos de projeção (os pontos  $F'$  e  $H'$ ) e desenharam-se os traços do plano  $\rho$ , que são retas fronto-horizontais. O traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F'$ ) e uma direção (é uma reta fronto-horizantal). O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ) está igualmente definido por um ponto (o ponto  $H'$ ) e uma direção (é também uma reta fronto-horizantal).

O plano  $\rho$ , definido pelos seus traços, contém a reta  $g$  e é paralelo ao plano  $\sigma$ , tal como plano  $\sigma$  contém a reta  $r$  e é paralelo ao plano  $\rho$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $r$  e  $g$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços dos dois planos representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $s$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 63.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **P**, pelas suas projeções, bem como o traço frontal do plano  $\rho$ , em função dos dados.

**Resolução:**

Pretende-se um plano  $\sigma$ , paralelo ao plano  $\rho$  – o plano  $\sigma$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, o plano  $\sigma$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). O plano  $\rho$  é um plano de rampa e um plano paralelo a um plano de rampa é necessariamente outro plano de rampa, pelo que o plano  $\sigma$  é necessariamente outro plano de rampa.

Qualquer plano de rampa contém retas fronto-horizontais, pelo que tanto o plano  $\rho$  como o plano  $\sigma$  contém retas fronto-horizontais. Assim, os dois planos já têm, em comum, uma «família» de retas – a «família» das retas fronto-horizontais. Para que os dois planos sejam paralelos, os dois planos têm de ter, em comum, outra «família» de retas.

Assim, determinaram-se as projeções de uma reta  $r$ , qualquer pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $r$  é uma reta oblíqua do plano  $\rho$  e está definida por dois pontos – o ponto **P** (o ponto dado no enunciado e que define o plano  $\rho$ ) e o ponto **F** (o traço frontal da reta  $r$ ). A reta  $r$  é uma reta de uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ , «família» de retas essa que os dois planos também têm de ter em comum (dois planos paralelos têm todas as «famílias» de retas em comum).

Em seguida, conduziu-se, pelo ponto **A**, uma reta  $s$ , paralela à reta  $r$  – a reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção da reta  $r$ ). A reta  $s$  garante-nos, assim, que o plano  $\sigma$  já tem outra «família» de retas em comum com o plano  $\rho$ , para além da «família» das retas fronto-horizontais (a «família» de retas a que as retas  $r$  e  $s$  pertencem).

A reta  $s$ , porque pertence ao plano  $\sigma$ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano**, em relação ao plano  $\sigma$ . Assim, determinaram-se os traços da reta  $s$  – **F'** (o seu traço frontal) e **H** (o seu traço horizontal). Por fim desenharam-se os traços do plano  $\sigma$ .

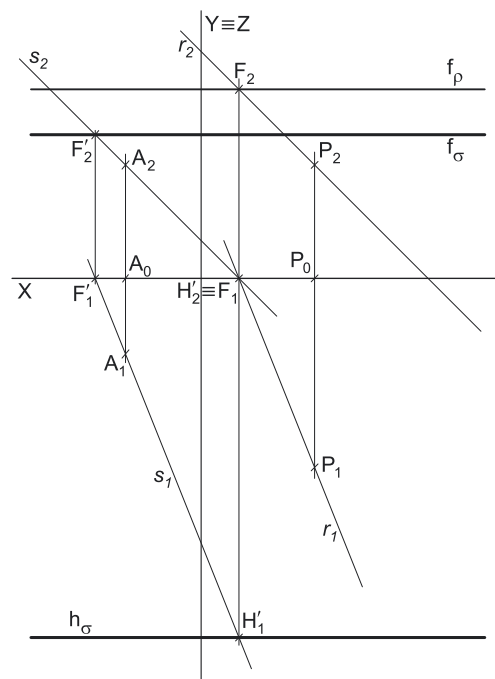
O traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_\sigma$ ) é uma reta fronto-horizantal, que está definido por um ponto (o ponto **H**) e uma direção (é uma reta fronto-horizantal). O traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ) é outra reta fronto-horizantal, que está definido por um ponto (o ponto **F'**) e uma direção (é uma reta fronto-horizantal).

O plano  $\sigma$ , definido pelos seus traços, é paralelo ao plano  $\rho$  e contém o ponto **A**, conforme era pedido.

Note que não se determinou o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), por não ser pedido nem ser necessário para a conclusão do exercício (que consistia na determinação dos traços do plano  $\sigma$ ).

**Traçado:**

Os dados (o traço frontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\sigma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 64.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções, em função da sua cota.

a) É dado o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção – o plano  $\rho$ , nesta situação, está definido por um ponto (o ponto **P**) e pela sua orientação. O ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção corresponde ao ângulo que as retas de perfil do plano  $\rho$  fazem com o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, desenharam-se as projeções de uma reta  $p$ , uma reta de perfil do plano  $\rho$ , passando pelo ponto **P**. A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (o ângulo que a reta faz com o Plano Horizontal de Projeção).

O ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção corresponde ao ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano de perfil que contém a reta  $p$ , que não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar a reta  $p$  numa reta paralela a um dos planos de projeção e, dessa forma, fazer com que o ângulo que a reta faz com o Plano Horizontal de Projeção se projete em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, substituiu-se o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo à reta  $p$ , de forma a transformar a reta de perfil numa reta frontal (de frente). Dessa forma, será criado um novo diedro de projeção, no qual as projeções da reta já verificarão o **Critério de Reversibilidade** e no qual o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção se projeta em verdadeira grandeza (no **plano 4**).

Dessa forma, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção, que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo **X'** é paralelo à projeção horizontal da reta ( $p_1$ ). A linha de chamada do ponto **P**, no novo diedro de projeção, é perpendicular ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Assim, determinou-se **P<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **P** no **plano 4**), em função da sua cota que se manteve.

No **novo diedro de projeção**, o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**, no ângulo entre a reta  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) e o eixo **X'**. Assim, por **P<sub>4</sub>** conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) fazendo, com o eixo **X'**, um ângulo de  $30^\circ$  e garantindo-se, ainda, que o traço horizontal da reta  $p$  tem afastamento positivo (para que o traço horizontal do plano  $\rho$  se situe no **SPHA**). Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de **P<sub>4</sub>**, aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

Em seguida, determinaram-se os traços da reta  $p$  (a partir do novo diedro de projeção), em função das projeções e das coordenadas conhecidas.

O traço horizontal da reta  $p$  tem cota nula, pelo que **H<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **H** no **plano 4**) se situa no eixo **X'**. Por outro lado, o ponto **F** tem afastamento nulo, pelo que **F<sub>1</sub>** se situa no eixo **X** – a partir da sua projeção horizontal (que se mantém), foi possível determinar **F<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **F** no **plano 4**). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, determinaram-se as projeções dos traços da reta  $p$ .

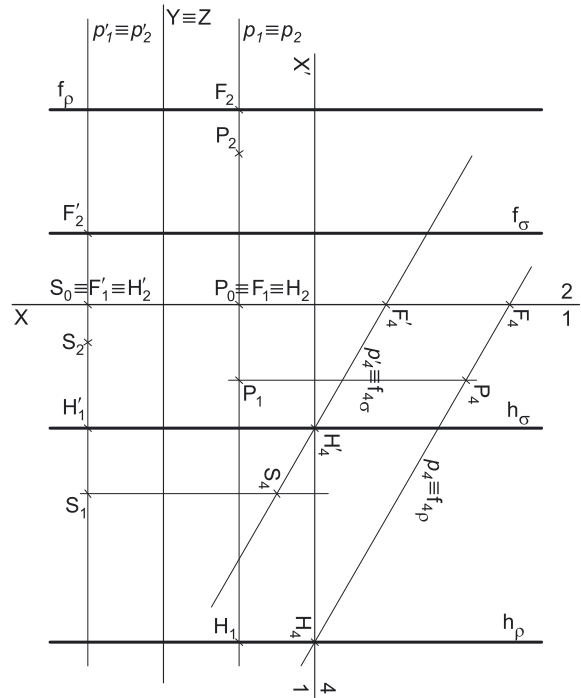
**F<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **F**) determinou-se em função da sua cota (que se manteve). **H<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **H**) determinou-se diretamente, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4** – **H<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **H**) situa-se no eixo **X**, pois o ponto **H** tem cota nula.

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano de topo, ou seja, um plano projetante frontal. Assim, foi possível determinar os traços do plano  $\rho$  no novo diedro de projeção – **f<sub>4p</sub>** está coincidente com **p<sub>4</sub>** pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é projetante frontal. Pelo ponto de concorrência de **f<sub>4p</sub>**, com o eixo **X'**, conduziu-se **h<sub>p</sub>** (o traço horizontal do plano  $\rho$ ), paralelo ao eixo **X**. Note que **h<sub>p</sub>** passa necessariamente por **H<sub>1</sub>**. Por fim, desenhou-se o traço frontal do plano  $\rho$  (**f<sub>p</sub>**), passando por **F<sub>2</sub>** e paralelo ao eixo **X**.

b) Em primeiro lugar, representou-se o ponto **S**, pelas suas projeções, em função dos dados.

Pretende-se um plano  $\sigma$ , paralelo ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto **S** – o plano  $\sigma$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, o plano  $\sigma$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). O plano  $\rho$  é um plano de rampa e um plano paralelo a um plano de rampa é necessariamente outro plano de rampa, pelo que o plano  $\sigma$  é necessariamente outro plano de rampa.

Qualquer plano de rampa contém retas fronto-horizontais, pelo que tanto o plano  $\rho$  como o plano  $\sigma$  contêm retas fronto-horizontais. Assim, os dois planos já têm, em comum, uma «família» de retas – a «família» das retas fronto-horizontais. Para que os dois planos sejam paralelos, os dois planos têm de ter, em comum, outra «família» de retas.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, para que o plano  $\sigma$  passe pelo ponto  $S$ , o ponto  $S$  tem de pertencer ao plano  $\sigma$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\sigma$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $S$ , uma reta que pertença ao plano  $\sigma$  – essa reta terá de ser uma reta paralela a uma reta do plano  $\rho$  (uma reta de outra «família» de retas que seja comum aos dois planos).

Uma vez que já temos uma outra reta do plano  $\rho$  (a reta  $p$ , que é uma reta de perfil), recorreu-se a uma reta do plano  $\sigma$  paralela a essa reta – a reta  $p'$  (que é uma reta de perfil do plano  $\sigma$ ). Assim, pelo ponto  $S$  conduziu-se uma reta  $p'$ , paralela à reta  $p$  – a reta  $p'$  está definida por um ponto (o ponto  $S$ ) e por uma direção (a direção da reta  $p$ ). A reta  $p'$  garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\sigma$  já tem outra «família» de retas em comum com o plano  $\rho$ , para além da «família» das retas fronto-horizontais (a «família» das retas de perfil);
2. que o ponto  $S$  pertence ao plano  $\sigma$  (porque pertence a uma reta do plano  $\sigma$  – a reta  $p'$ ).

Tendo em conta que existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto  $S$  (e que têm as projeções desenhadas), há a referir que, dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela à reta  $p$ . Assim, para garantir o paralelismo da reta  $p'$  em relação à reta  $p$  é necessário o recurso a raciocínios e procedimentos auxiliares ou, então, o recurso a um processo geométrico auxiliar. Tendo em conta que já se recorreu a uma mudança do diedro de projeção neste exercício, optou-se por resolver a situação recorrendo a essa mesma mudança do diedro de projeção. Assim, determinou-se  $S_4$  (a projeção do ponto  $S$  no plano 4), em função da sua cota que se manteve.

No novo diedro de projeção (formado pelo plano 1 e pelo plano 4), as projeções das duas retas já verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que o paralelismo entre as duas retas é direto, a partir das respetivas projeções. Assim, por  $S_4$  (a projeção do ponto  $S$  no plano 4) conduziu-se  $p'_4$  (a projeção da reta  $p'$  no plano 4), paralela a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no plano 4).

Em seguida, determinaram-se os traços da reta  $p'$  (a partir do novo diedro de projeção), em função das projeções e das coordenadas conhecidas.

O traço horizontal da reta  $p'$  tem cota nula, pelo que  $H'_4$  (a projeção do ponto  $H'$  no plano 4) se situa no eixo  $X'$ . Por outro lado, o ponto  $F'$  tem afastamento nulo, pelo que  $F'_1$  se situa no eixo  $X$  – a partir da sua projeção horizontal (que se mantém), foi possível determinar  $F'_4$  (a projeção do ponto  $F'$  no plano 4). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, determinaram-se as projeções dos traços da reta  $p'$ .

$F'_2$  (a projeção frontal do ponto  $F'$ ) determinou-se em função da sua cota (que se manteve).  $H'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H'$ ) determinou-se diretamente, no diedro de projeção formado pelo plano 1 e pelo plano 4 –  $H'_2$  (a projeção frontal do ponto  $H'$ ) situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $H'$  tem cota nula.

No novo diedro de projeção (formado pelo plano 1 e pelo plano 4), o plano  $\sigma$  é um plano de topo, ou seja, um plano projetante frontal. Assim, foi possível determinar os traços do plano  $\sigma$  no novo diedro de projeção –  $f_{4\sigma}$  está coincidente com  $p'_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  é projetante frontal. Pelo ponto de concorrência de  $f_{4\sigma}$  com o eixo  $X'$ , conduziu-se  $h_{\sigma}$  (o traço horizontal do plano  $\sigma$ ), paralelo ao eixo  $X$ . Note que  $h_{\sigma}$  passa necessariamente por  $H'_1$ . Por fim, desenhou-se o traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_{\sigma}$ ), passando por  $F'_2$  e paralelo ao eixo  $X$ .

O plano  $\sigma$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $S$  e é paralelo ao plano  $\rho$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados iniciais são um único ponto, que se representa através da sua linha de chamada, que se executa sempre a **leve**. O eixo  $X$  representa-se igualmente a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\rho$ , que é parte do pedido (é parte do objetivo do exercício) representaram-se a **forte**. Os traços do plano  $\sigma$ , que são outra parte do pedido (a outra parte do objetivo do exercício) representaram-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$ , bem como de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 65.

### Dados:

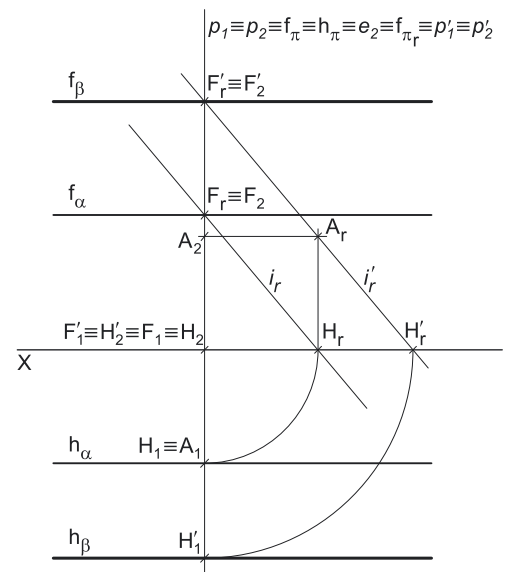
Em primeiro lugar, representaram-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, bem como o traço horizontal do plano  $\alpha$ , em função dos dados. O ponto  $A$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

### Resolução:

Pretende-se um plano  $\beta$ , paralelo ao plano  $\alpha$  – o plano  $\beta$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, o plano  $\beta$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). O plano  $\alpha$  é um plano de rampa e um plano paralelo a um plano de rampa é necessariamente outro plano de rampa, pelo que o plano  $\beta$  é necessariamente outro plano de rampa.

Qualquer plano de rampa contém retas fronto-horizontais, pelo que tanto o plano  $\alpha$  como o plano  $\beta$  contêm retas fronto-horizontais. Assim, os dois planos já têm, em comum, uma «família» de retas – a «família» das retas fronto-horizontais. Para que os dois planos sejam paralelos, os dois planos têm de ter, em comum, outra «família» de retas.

Por outro lado, o plano  $\alpha$  está definido por uma reta (o seu traço horizontal) e pela sua orientação (é dado o ângulo que o plano faz com o Plano Frontal de Projeção). O ângulo que o plano  $\alpha$  faz com o Plano Frontal de Projeção corresponde ao ângulo que as retas de perfil do plano  $\alpha$  fazem com o Plano Frontal de Projeção. Assim, a outra «família» de retas a que é necessário recorrer para garantir o paralelismo entre os dois planos é a «família» das retas de perfil dos dois planos.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de uma reta  $p$ , uma reta de perfil do plano  $\alpha$ . A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $H$ , o seu traço horizontal) e por uma direção (o ângulo que a reta faz com o Plano Frontal de Projeção). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar a reta  $p$  no plano de perfil que contém o ponto  $A$ .

O ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Frontal de Projeção corresponde ao ângulo que o plano  $\alpha$  faz com o Plano Frontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano de perfil que contém a reta  $p$ , que não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil que contém a reta  $p$ , cujos traços se identificaram de imediato – os seus traços estão coincidentes com as projeções da reta  $p$ . Efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção, identificando-se imediatamente a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano ( $f_{\pi}$ ).

A charneira do rebatimento (o eixo de rotação) é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, procedeu-se ao rebatimento da reta  $p$ , rebatendo o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta). **Em rebatimento**, o ângulo que a reta  $p$  faz com o traço frontal do plano ( $f_{\pi}$ ) já está em verdadeira grandeza, no ângulo entre a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) e  $f_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  em rebatimento). Assim, por  $H_r$  (o ponto  $H$  rebatido) conduziu-se  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) fazendo, com  $f_{\pi_r}$ , um ângulo de  $50^\circ$  e garantindo-se, ainda, que o traço frontal da reta  $p$  tem cota positiva (para que o traço frontal do plano  $\alpha$  se situe no **SPFS**). Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de  $H_r$ , aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta  $p$  em rebatimento –  $F_r$ .  $F_r$  (o traço frontal da reta  $p$  em rebatimento) está necessariamente sobre  $f_{\pi_r}$  –  $F_r$  é o ponto de interseção de  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) com  $f_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  rebatido). As projeções do ponto  $F$  determinam-se diretamente, pois o ponto  $F$  é um ponto da charneira (roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $F_2 \equiv F_r$ . Isto permitiu-nos determinar o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha}$ ), que passa por  $F_2$  e é paralelo ao eixo  $X$ . Note que não era necessária a determinação do traço frontal do plano  $\alpha$ , pois não é perdido – a sua determinação teve, como único propósito, verificar que se situa no **SPFS**.

Em seguida, há que prosseguir com a questão do paralelismo do plano  $\beta$  em relação ao plano  $\alpha$ . Por outro lado, para que o plano  $\beta$  passe pelo ponto  $A$ , o ponto  $A$  tem de pertencer ao plano  $\beta$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\beta$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $A$ , uma reta que pertença ao plano  $\beta$  – essa reta terá de ser uma reta paralela a uma reta do plano  $\alpha$  (uma reta de outra «família» de retas que seja comum aos dois planos).

Uma vez que já temos uma outra reta do plano  $\alpha$  (a reta  $p$ , que é uma reta de perfil), recorreu-se a uma reta do plano  $\beta$  paralela a essa reta – a reta  $p'$  (que é uma reta de perfil do plano  $\beta$ ). Assim, pelo ponto  $A$  conduziu-se uma reta  $p'$ , paralela à reta  $p$  – a reta  $p'$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (a direção da reta  $p$ ). A reta  $p'$  garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\beta$  já tem outra «família» de retas em comum com o plano  $\alpha$ , para além da «família» das retas fronto-horizontais (a «família» das retas de perfil);
2. que o ponto  $A$  pertence ao plano  $\beta$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $p'$ ).

Sublinha-se que existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto  $A$  (e que têm as projeções desenhadas) mas, dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela à reta  $p$ . Assim, para garantir o paralelismo da reta  $p'$  em relação à reta  $p$ , e porque se tratam de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta o rebatimento previamente efetuado, recorreu-se a esse mesmo rebatimento para garantir o paralelismo entre as duas retas. Assim, rebateu-se o ponto  $A$ , o que nos permitiu determinar  $A_r$ . Em seguida, desenhou-se  $p'_r$  (a reta  $p'$  em rebatimento), passando por  $A_r$  e paralela à reta  $p_r$  – a reta  $p'_r$  está definida por um ponto (o ponto  $A_r$ ) e por uma direção (a direção da reta  $p_r$ ).

Foi possível, em seguida, determinar os traços da reta  $p'$  em rebatimento –  $F'_r$  (o traço frontal da reta  $p'$  em rebatimento) está sobre  $f_{\pi_r}$  e  $H'_r$  (o traço horizontal da reta  $p'$  em rebatimento) está sobre  $h_{\pi_r}$  (a **Condição para que uma reta pertença a um plano** verifica-se tanto no espaço como em projeções e em rebatimento). Por fim, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$  e determinaram-se as projeções dos traços da reta. O ponto  $F'$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (e um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F'_r \equiv F'_2$ .

Por fim, desenharam-se os traços do plano  $\beta$ . O traço horizontal do plano  $\beta$  ( $h_{\beta}$ ), passa por  $H_1$  e é fronto-horizonta –  $h_{\beta}$  está definido por um ponto (o ponto  $H'$ ) e por uma direção (é fronto-horizonta). O traço frontal do plano  $\beta$  ( $f_{\beta}$ ), passa por  $F_2$  e é fronto-horizonta –  $f_{\beta}$  está definido por um ponto (o ponto  $F'$ ) e por uma direção (é fronto-horizonta).

O plano  $\beta$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $A$  e é paralelo ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\beta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$ , bem como de todos os traçados necessários ao rebatimento efetuado).

66.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se um plano  $\sigma$ , passante – os traços do plano  $\sigma$  determinam-se imediatamente, pois estão ambos coincidentes no eixo  $X$ . No entanto, os traços do plano  $\sigma$  são uma única reta, pelo que o plano  $\sigma$  não está completamente definido, nem sequer está garantido o paralelismo do plano  $\sigma$  em relação ao plano  $\rho$ .

Pretende-se que o plano  $\sigma$  seja paralelo ao plano  $\rho$  – o plano  $\sigma$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, o plano  $\sigma$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum).

Qualquer plano passante (o plano  $\sigma$  é um plano passante) contém retas fronto-horizontais, pelo que tanto o plano  $\rho$  como o plano  $\sigma$  contém retas fronto-horizontais. Assim, os dois planos já têm, em comum, uma «família» de retas – a «família» das retas fronto-horizontais. Para que os dois planos sejam paralelos, os dois planos têm de ter, em comum, outra «família» de retas.

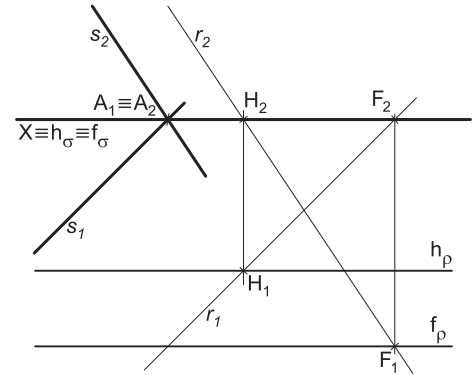
Assim, determinaram-se as projeções de uma reta  $r$ , qualquer pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $r$  é uma reta oblíqua do plano  $\rho$  e está definida por dois pontos (os seus traços, os pontos  $F$  e  $H$ ). A reta  $r$  é uma reta de uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ , «família» de retas essa que os dois planos também têm de ter em comum (dois planos paralelos têm todas as «famílias» de retas em comum).

Em seguida, determinou-se uma reta  $s$ , paralela à reta  $r$  e pertencente ao plano  $\sigma$ . A reta  $s$ , porque pertence ao plano  $\sigma$ , é necessariamente uma reta passante, ou seja, uma reta que é concorrente com o eixo  $X$  – o ponto  $A$  é o ponto de concorrência da reta  $s$  com o eixo  $X$ . A reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (a direção da reta  $r$ ). A reta  $s$  garante-nos, assim, que o plano  $\sigma$  já tem outra «família» de retas em comum com o plano  $\rho$ , para além da «família» das retas fronto-horizontais (a «família» de retas a que as retas  $r$  e  $s$  pertencem).

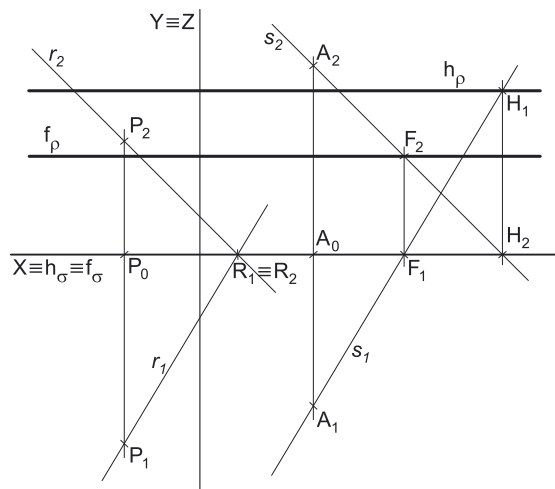
O plano  $\sigma$ , definido por duas retas concorrentes (o eixo  $X$  e a reta  $s$ ), é um plano passante e é paralelo ao plano  $\rho$ , conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\sigma$  e as projeções da reta  $s$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício – são os elementos que definem o plano  $\sigma$ , pedido). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $r$ ).



67.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $P$  e  $A$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. O plano passante (o plano  $\rho$ ) está representado pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto  $P$ .

Resolução:

Pretende-se um plano  $\sigma$ , paralelo ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto  $A$  – o plano  $\sigma$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, o plano  $\sigma$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Um plano paralelo a um plano passante (que é um plano de rampa) é necessariamente um plano de rampa, pelo que o plano  $\sigma$  é necessariamente um plano de rampa.

Qualquer plano de rampa contém retas fronto-horizontais, pelo que tanto o plano  $\rho$  como o plano  $\sigma$  contém retas fronto-horizontais. Assim, os dois planos já têm, em comum, uma «família» de retas – a «família» das retas fronto-horizontais. Para que os dois planos sejam paralelos, os dois planos têm de ter, em comum, outra «família» de retas.

Por outro lado, para que o plano  $\sigma$  passe pelo ponto  $A$ , o ponto  $A$  tem de pertencer ao plano  $\sigma$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\sigma$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $A$ , uma reta que pertença ao plano  $\sigma$  – essa reta terá de ser uma reta paralela a uma reta do plano  $\rho$  (uma reta de outra «família» de retas que seja comum aos dois planos).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções de uma reta  $r$ , qualquer pertencente ao plano  $\rho$ . A reta  $r$  é uma reta oblíqua passante do plano  $\rho$  e está definida por dois pontos – o ponto  $P$  (o ponto que define o plano e que é dado no enunciado) e o ponto  $R$  (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ). A reta  $r$  é uma reta de uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ , «família» de retas essa que os dois planos também têm de ter em comum (dois planos paralelos têm todas as «famílias» de retas em comum).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, pelo ponto **A** conduziu-se uma reta **s**, paralela à reta **r** – a reta **s** está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção da reta **r**). A reta **s** garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\sigma$  já tem outra «família» de retas em comum com o plano  $\rho$ , para além da «família» das retas fronto-horizontais (a «família» de retas a que as retas **r** e **s** pertencem);
2. que o ponto **A** pertence ao plano  $\sigma$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta **s**).

Para a reta **s** pertencer ao plano  $\sigma$ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\sigma$ . Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **s** nos planos de projeção (os pontos **F** e **H**) e desenharam-se os traços do plano  $\sigma$ , que são retas fronto-horizontais. O traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto **F**) e uma direção (é uma reta fronto-horizonta). O traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_\sigma$ ) está igualmente definido por um ponto (o ponto **H**) e uma direção (é também uma reta fronto-horizonta).

O plano  $\sigma$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **A** e é paralelo ao plano  $\rho$ , conforme era pedido.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ , que é dado). Os traços do plano  $\sigma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **s**).

## 68.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **P** e **A**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O plano passante (o plano  $\rho$ ) está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **P**.

### Resolução:

Pretende-se um plano  $\sigma$ , paralelo ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto **A** – o plano  $\sigma$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, o plano  $\sigma$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Um plano paralelo a um plano passante (que é um plano de rampa) é necessariamente um plano de rampa, pelo que o plano  $\sigma$  é necessariamente um plano de rampa.

Qualquer plano de rampa contém retas fronto-horizontais, pelo que tanto o plano  $\rho$  como o plano  $\sigma$  contêm retas fronto-horizontais. Assim, os dois planos já têm, em comum, uma «família» de retas – a «família» das retas fronto-horizontais. Para que os dois planos sejam paralelos, os dois planos têm de ter, em comum, outra «família» de retas.

Por outro lado, para que o plano  $\sigma$  passe pelo ponto **A**, o ponto **A** tem de pertencer ao plano  $\sigma$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\sigma$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto **A**, uma reta que pertença ao plano  $\sigma$  – essa reta terá de ser uma reta paralela a uma reta do plano  $\rho$  (uma reta de outra «família» de retas que seja comum aos dois planos).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções de uma reta **r**, qualquer pertencente ao plano  $\rho$ . A reta **r** é uma reta oblíqua passante do plano  $\rho$  e está definida por dois pontos – o ponto **P** (o ponto que define o plano e que é dado no enunciado) e o ponto **R** (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**). A reta **r** é uma reta de uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ , «família» de retas essa que os dois planos também têm de ter em comum (dois planos paralelos têm todas as «famílias» de retas em comum).

Em seguida, pelo ponto **A** conduziu-se uma reta **s**, paralela à reta **r** – a reta **s** está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção da reta **r**). A reta **s** garante-nos dois factos:

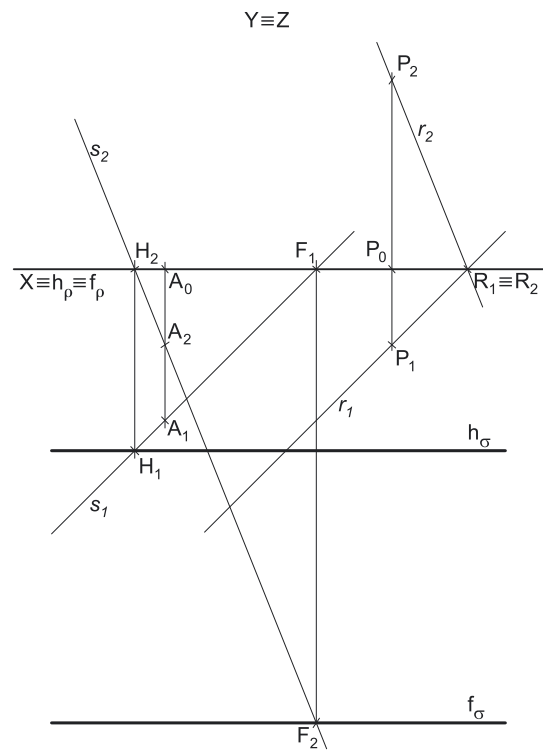
1. que o plano  $\sigma$  já tem outra «família» de retas em comum com o plano  $\rho$ , para além da «família» das retas fronto-horizontais (a «família» de retas a que as retas **r** e **s** pertencem);
2. que o ponto **A** pertence ao plano  $\sigma$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta **s**).

Para a reta **s** pertencer ao plano  $\sigma$ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\sigma$ . Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **s** nos planos de projeção (os pontos **F** e **H**) e desenharam-se os traços do plano  $\sigma$ , que são retas fronto-horizontais. O traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto **F**) e uma direção (é uma reta fronto-horizonta). O traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_\sigma$ ) está igualmente definido por um ponto (o ponto **H**) e uma direção (é também uma reta fronto-horizonta).

O plano  $\sigma$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **A** e é paralelo ao plano  $\rho$ , conforme era pedido.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ , que é dado). Os traços do plano  $\sigma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **s**).





## 69.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. Salienta-se que os traços do plano  $\gamma$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\gamma$  nunca poderiam estar coincidentes.

**Resolução:**

Pretende-se uma reta **p**, de perfil, passando pelo ponto **P** e paralela ao plano  $\gamma$ . Assim, foi possível desenhar, de forma imediata, as projeções da reta **p**, passando pelas projeções do ponto **P**. No entanto, as projeções das retas de perfil não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta **p**, **por si só**, não nos garantem que a reta **p** seja paralela ao plano  $\gamma$ .

Analisemos a situação. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta **p** ser paralela ao plano  $\gamma$ , a reta **p** tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\gamma$ , ou seja, a reta **p** tem de ser paralela a uma reta do plano  $\gamma$  (a reta **p** tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\gamma$  contenha). Nesse sentido, a reta **p** tem de ser paralela a uma reta de perfil que pertença ao plano  $\gamma$  (tem de pertencer à «família» das retas de perfil do plano  $\gamma$ ).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta de perfil **p'**, auxiliar, pertencente ao plano  $\gamma$ . A reta **p'** está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H** – os seus traços) e pertence ao plano  $\gamma$ , pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\gamma$ . Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar a reta **p'** no plano **YZ**.

Para a reta **p** ser paralela ao plano  $\gamma$ , a reta **p** tem de ser paralela à reta **p'** – trata-se da situação de paralelismo entre retas de perfil. Assim, pretende-se garantir que a reta **p** é paralela à reta **p'**.

Assim, pretende-se uma reta de perfil **p**, passando pelo ponto **P** e paralela à reta **p'**. Tendo em conta que existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto **P** (e que têm as projeções desenhadas), dessa infinidade de retas, **apenas uma delas** é paralela à reta **p'**. Nesse sentido, para garantir o paralelismo da reta **p** em relação à reta **p'** é necessário determinar um outro ponto da reta **p**, o que nos garantirá que as duas retas são, efetivamente, paralelas. A determinação desse outro ponto poder-se-ia processar com o recurso a um processo geométrico auxiliar (à semelhança do efetuado nos exercícios 10. e 11.) mas optou-se pela situação do exercício 9..

Assim, partindo do pressuposto que as duas retas são paralelas (porque é o que se pretende), sabe-se que as duas retas são necessariamente **complanares** (quaisquer duas retas paralelas são retas complanares), ou seja, definem um plano (que **não é** o plano  $\gamma$ ). Os dados desse plano são insuficientes para garantir o paralelismo entre as duas retas, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar desse plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta **r**, como reta auxiliar do plano. A reta **r** é concorrente com a reta **p** no ponto **P** e concorrente com a reta **p'** no ponto **H** (o seu traços horizontal) – a reta **r** está definida por dois pontos (os pontos **P** e **H**).

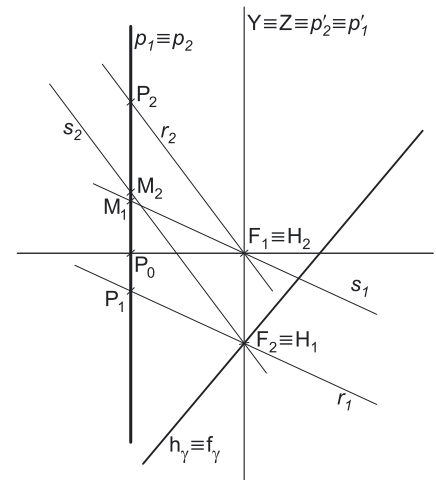
Os dados do plano são ainda insuficientes para averiguar o pretendido, pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta **s**, como reta auxiliar do plano. A reta **s** é concorrente com a reta **p'** no ponto **F** (o seu traço frontal) e é paralela à reta **r** – a reta **s** está definida por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (a direção da reta **r**).

Note que já temos quatro retas do mesmo plano (que **não é** o plano  $\gamma$ ) – as retas **p** e **p'** (as retas que definem esse plano) e, para além destas, as retas **r** e **s** (as retas auxiliares do plano). Assim, as retas **s** e **p** são retas **complanares** (estão ambas contidas no plano definido pelas retas **p** e **p'**), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois não têm as projeções homónimas paralelas entre si, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **M**.

Está garantido o paralelismo entre as retas **p** e **p'**. A reta **p**, definida pelos pontos **P** e **M**, é a reta de perfil que passa pelo ponto **P** e é paralela à reta **p'**. Assim, a reta **p** é paralela ao plano  $\gamma$ , porque é paralela a uma reta do plano  $\gamma$  – a reta **p'**.

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\gamma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **p** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **p'**, **r** e **s**).



## 70.

### Dados:

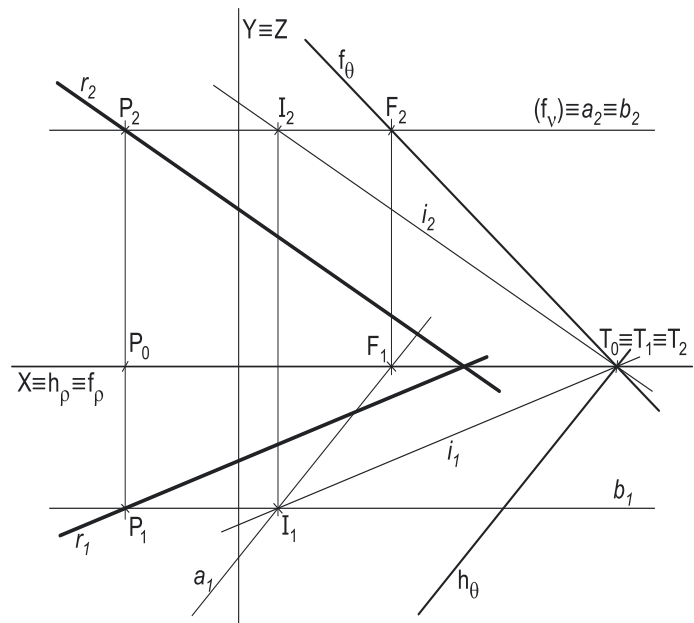
Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

Preteñde-se uma reta **r**, passando pelo ponto **P** e paralela ao plano  $\alpha$  e que seja, ainda, uma **reta passante**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **r** passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta **r** ser paralela ao plano  $\theta$ , a reta **r** tem de verificar o **Crítério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\theta$ , ou seja, a reta **r** tem de ser paralela a uma reta do plano  $\theta$  (a reta **r** tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\theta$  contenha).

Por outro lado, para a reta **r** ser uma **reta passante**, a reta **r** tem de ser concorrente com o eixo **X**. A dificuldade deste exercício reside, precisamente, em determinar uma reta que concilie todos os dados acima referidos – passar pelo ponto **P**, ser uma **reta passante** e ser, ainda, paralela ao plano  $\theta$ . De facto, não é possível recorrer a uma reta passante do plano  $\theta$ , pois o plano  $\theta$  contém **infinitas retas passantes** e a reta **r** será paralela a **uma única dessas infinitas retas passantes**. O problema reside na determinação da **única reta passante** do plano  $\theta$  à qual a reta **r** terá de ser paralela, para que ela própria (a reta **r**) seja também uma **reta passante**.



Debrucemo-nos sobre esta situação – existe uma **reta passante**, do plano  $\theta$ , à qual a reta **r**, também uma **reta passante**, é paralela. Essas **duas retas passantes** paralelas estão necessariamente contidas num **plano passante**, plano esse que é o plano definido pelo eixo **X** e pelo ponto **P** (pois a reta **r**, que é uma reta desse plano passante, contém o ponto **P**).

A reta **r** tem, assim, de ser paralela à reta de interseção desse plano passante com o plano  $\theta$  – a reta **i**.

Começemos por identificar os traços do plano passante (o plano  $\rho$ ), que estão contidos no eixo **X**. Em seguida, determinemos a reta **i**, a reta de interseção entre os dois planos. Para definir essa reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **T** (o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\theta$ ) é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos (plano  $\rho$  e o plano  $\theta$ ), pelo que já é um ponto da reta **i** – já temos um ponto para definir a reta **i**. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Os dados do exercício (os elementos dos dois planos) são insuficientes para determinar o elemento em falta da reta **i** (o ponto ou a direção), pelo que é necessário o recurso a um plano auxiliar. Nesse sentido, recorreu-se ao plano  $\nu$ , como plano auxiliar – o plano  $\nu$  é um plano horizontal (um plano projetante frontal). Sublinha-se que, por uma questão de conveniência e de economia de traçados, se optou por conduzir o plano auxiliar (o plano  $\nu$ ) pelo ponto **P** (o ponto que define o plano  $\rho$ ).

Em seguida, determinou-se a reta **a**, a reta de interseção do plano  $\nu$  com o plano  $\theta$  – a reta **a** está definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$  – é paralela a **h** $\theta$ ). Determinou-se também a reta **b**, a reta de interseção do plano  $\nu$  com o plano  $\rho$  – a reta **b** está definida por um ponto (o ponto **P**, que é um ponto que pertence simultaneamente ao plano  $\nu$  e ao plano  $\rho$ ) e por uma direção (a direção das retas fronto-horizontais). As retas **a** e **b** são complanares, pois estão ambas contidas no plano  $\nu$  (o plano auxiliar), pelo que as retas **a** e **b** ou são paralelas ou são concorrentes.

As retas **a** e **b** não são paralelas (pois têm direções diferentes), pelo que são necessariamente concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **I**. O ponto **I** pertence aos três planos, pelo que o ponto **I** pertence simultaneamente aos planos  $\theta$  e  $\rho$  – o ponto **I** é, **necessariamente**, um ponto da reta de interseção dos planos  $\theta$  e  $\rho$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i**. A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **T** e o ponto **I**.

Já temos a direção que nos faltava para definir a reta **r**. A reta **r** está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (a direção da reta **i**). Note que, desenhando-se as projeções da reta **r**, paralelas às projeções homónimas da reta **i** e passando pelas projeções homónimas do ponto **P**, a reta **r** é necessariamente uma **reta passante**.

A reta **r** contém o ponto **P**, é paralela ao plano  $\theta$  e é, ainda, uma **reta passante**, conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **r** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\nu$ , das retas **a**, **b** e **i** e do eixo **Y=Z**, que é uma linha de referência).

## 71.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P** e a reta **p**, pelas respectivas projeções, bem como o plano  $\psi$ , pelos seus traços, em função dos dados. A reta **p** está definida por um ponto (o ponto **P**) e pela sua direção (é paralela ao  $\beta_{2/4}$ ).

**Resolução:**

É pedido o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\psi$  (o ponto **I**), que é o ponto que pertence simultaneamente à reta **p** e ao plano  $\alpha$ . **Nem o plano nem a reta são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executou em três etapas, como em seguida se expõe.

**1. Conduz-se, pela reta, um plano que a contenha.** Pela reta **p** conduziu-se um plano auxiliar – o plano  $\pi$  (que é um plano de perfil). Os traços do plano  $\pi$  estão coincidentes com as projeções da reta **p**.

**2. Determina-se a reta de interseção dos dois planos – reta *i*.** Determinou-se a reta **i**, a reta de interseção do plano  $\pi$  com o plano  $\psi$ . A reta **i** é outra reta de perfil (uma reta de perfil do plano  $\psi$ ) e está definida por dois pontos – os seus traços nos planos de projeção (os pontos **F** e **H**). A determinação das projeções da reta **i** processou-se através do **caso geral** da interseção entre planos. As projeções da reta **i** (que é outra reta de perfil) estão coincidentes com os traços do plano  $\pi$  e com as projeções da reta **p**.

**3. O ponto de interseção (ou de concorrência) das duas retas é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\psi$ .** O ponto de interseção da reta **i** com a reta **p** (que são coplanares, pois estão ambas contidas no plano  $\pi$ ) é o ponto **I**, que é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\psi$ . Uma vez que as duas retas são retas de perfil e que as projeções das retas de perfil não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, o ponto **I** não tem determinação direta – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$ .

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – **identificou-se a charneira do rebatimento** (que é o traço frontal do plano  $\pi$  –  $f_\pi$ ). A charneira do rebatimento é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (de nível), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, efetuou-se o rebatimento de cada uma das duas retas – as retas **p** e **i**.

Em primeiro lugar, efetuou-se o rebatimento da reta **i**, rebatendo os dois pontos que a definem – os pontos **F** e **H**. O ponto **F** (o traço frontal da reta **i**) é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio) – tem-se imediatamente  $F_2 \equiv F_r$ . Em seguida, rebateu-se o ponto **H** (desenhando o arco do seu rebatimento), o que nos permitiu determinar  $H_r$  no eixo **X**. Por fim, desenhou-se a reta **i** em rebatimento – a reta **i** rebatida ( $i_r$ ) está definida por dois pontos (os pontos  $F_r$  e  $H_r$ ).

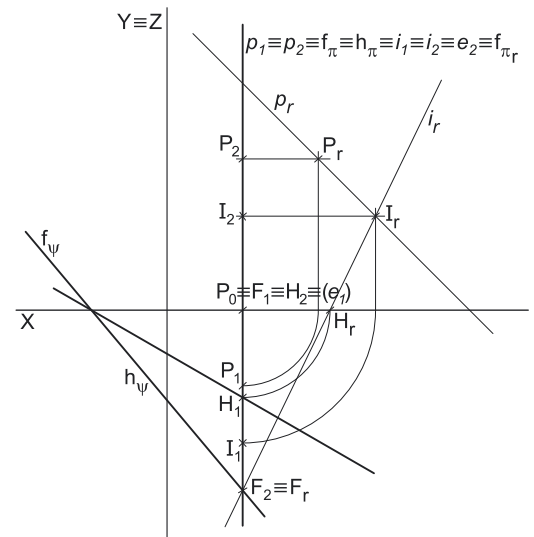
Em seguida, rebateu-se a reta **p**, rebatendo o ponto **P**. A reta **p** é paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que se sabe que a reta faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção (e com os traços do plano  $\pi$ ). Assim, em rebatimento, a reta **p** (a reta  $p_r$ ) fará ângulos de  $45^\circ$  com os traços do plano  $\pi$  em rebatimento ( $f_{\pi_r}$  e  $h_{\pi_r}$ ). Nesse sentido, desenhou-se a reta  $p_r$  (a reta **p** rebatida), passando por  $P_r$  (o ponto **P** rebatido) e fazendo ângulos de  $45^\circ$  com os traços do plano em rebatimento. Note que, das duas possibilidades existentes, a que a solução apresenta é a que garante o paralelismo da reta **p** ao  $\beta_{2/4}$  (a outra situação faria com que a reta **p** fosse paralela ao  $\beta_{1/3}$ ). Exatamente por isso, e atendendo a que o ponto **P** se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro, é possível constatar que a reta **p** atravessa os  $2^\circ, 1^\circ$  e  $4^\circ$  Diedros, o que faz com que seja paralela ao  $\beta_{2/4}$ .

Em rebatimento, já é possível determinar o ponto de concorrência das duas retas –  $I_r$  é o ponto de concorrência de  $p_r$  (a reta **p** rebatida) com  $i_r$  (a reta **i** rebatida). Em seguida, inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções do ponto **I**.

O ponto **I**, representado pelas suas projeções, é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\psi$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta **p** e os traços do plano  $\psi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (é a linha estruturante do exercício). Tendo em conta que, neste exercício, o pedido é um ponto, não há lugar a qualquer representação a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **p** e **i** rebatidas e de todos os traçados necessários ao rebatimento efetuado).



(continua na página seguinte)

## 72.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como os planos  $\alpha$  e  $\rho$ , pelos respetivos traços, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se uma reta  $r$ , passando pelo ponto **P** e paralela ao plano  $\alpha$  e ao plano  $\tau$ , simultaneamente. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $r$  passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta  $r$  ser paralela ao plano  $\alpha$ , a reta  $r$  tem de verificar o **CrITÉrio de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta  $r$  tem de ser paralela a uma reta do plano  $\alpha$  (a reta  $r$  tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\alpha$  contenha).

Por outro lado, para a reta  $r$  ser paralela ao plano  $\rho$ , a reta  $r$  tem também de verificar o **CrITÉrio de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta  $r$  tem de ser paralela a uma reta do plano  $\rho$  (a reta  $r$  tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano  $\rho$  contenha).

Conclui-se, assim, que a reta  $r$  tem de pertencer a uma «família» de retas que pertençam simultaneamente ao plano  $\alpha$  e ao plano  $\rho$ . Acontece que os dois planos (o plano  $\alpha$  e o plano  $\rho$ ) são planos secantes, que são planos com orientações diferentes e **uma única «família» de retas em comum**, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. Assim, a reta  $r$  tem de pertencer à «família» de retas que os dois planos têm em comum.

Para tal, determinaram-se as projeções da reta de interseção entre os dois planos – a reta  $i$ . A reta  $i$  determinou-se de forma direta, a partir dos seus traços, pois trata-se do **caso geral da interseção entre dois planos**. A reta  $i$  está definida por dois pontos – (os pontos **F** e **H** – os seus traços).

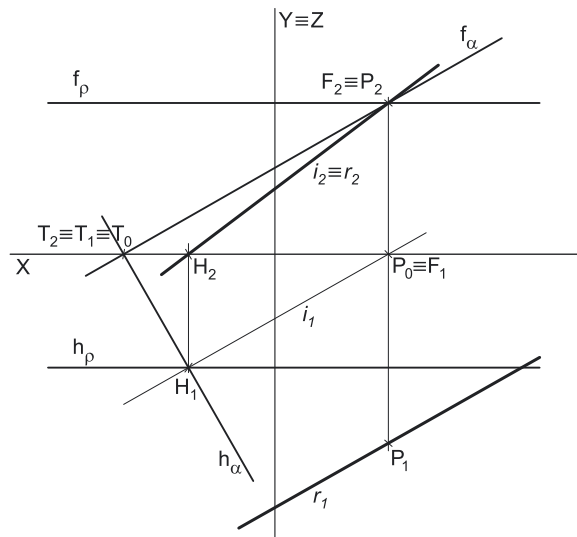
Para a reta  $r$  ser paralela ao plano  $\alpha$  e ao plano  $\rho$  simultaneamente, a reta  $r$  tem de ser paralela à reta  $i$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$ . A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (a direção da reta  $i$ ). Assim, pelas projeções do ponto **P** conduziram-se as projeções homónimas da reta  $r$ , paralelas às projeções homónimas da reta  $i$ .

A reta  $r$  contém o ponto **P** e é paralela aos dois planos, conforme era pedido.

Sublinha-se que, caso o desenho esteja **completamente rigoroso**, as projeções frontais das duas retas não ficam necessariamente coincidentes, por uma fração de milímetro. No entanto, tendo em conta que a perceção dessa diferença, num exercício executado a lápis, em que a espessura do elemento riscador (a lapiseira) acaba por não ser totalmente desprezível, é muito provável que na solução do aluno, à semelhança da solução aqui apresentada, as projeções frontais das retas  $r$  e  $i$  fiquem coincidentes.

### Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $r$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $i$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 73.

### Dados:

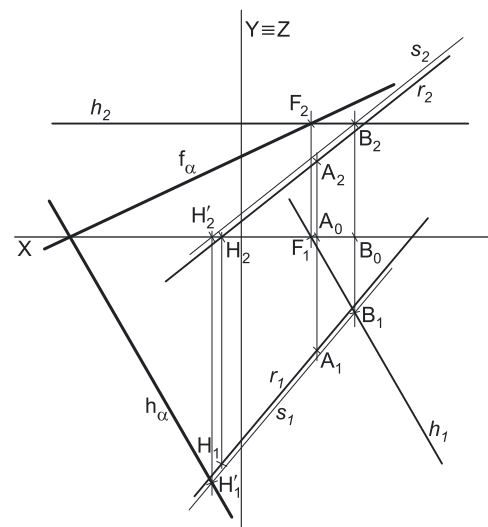
Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $r$  e  $h$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por dois pontos – o ponto **A** e o seu traço horizontal (o ponto **H**). A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto **B**) e pela sua direção (dada no enunciado).

### Resolução:

Pretende-se um plano  $\alpha$ , paralelo à reta  $r$  e contendo a reta  $h$ . Já temos uma reta do plano  $\alpha$  – a reta  $h$ . Uma reta é insuficiente para definir um plano (um plano pode ser definido por três pontos não colineares, uma reta e um ponto exterior à reta ou duas retas paralelas ou concorrentes, entre outras situações), pelo que necessitamos de uma outra reta do plano  $\alpha$ .

Para o plano  $\alpha$  ser paralelo à reta  $r$ , o plano  $\alpha$  tem de verificar o **CrITÉrio de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta  $r$ , ou seja, o plano  $\alpha$  tem de conter uma reta paralela à reta  $r$  (o plano  $\alpha$  tem de conter a «família» de retas a que a reta  $r$  pertence).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\alpha$  (a reta  $s$ ), paralela à reta  $r$  e concorrente com a reta  $h$  (no ponto **B**). A reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto **B**) e uma direção (a direção da reta  $r$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta  $s$  (o ponto  $H'$ ) e conduziu-se o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) pelo ponto  $H$  e paralelo à reta  $h$ . Sublinha-se que as retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Assim, o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H'$ ) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ).

Por fim, determinou-se o traço frontal da reta  $h$  (o ponto  $F$ ) e desenhou-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) –  $f_\alpha$  passa pelo ponto  $F$  e é concorrente com  $h_\alpha$  no eixo  $X$ . O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $F$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

O plano  $\alpha$  contém a reta  $h$  e é paralelo à reta  $r$ , conforme era pedido.

Sublinha-se que as projeções da reta  $s$  ficam muito próximas das projeções homónimas da reta  $r$ , em função das coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  e da direção da reta  $r$ . No entanto, essa situação poderia ser evitada caso se tivesse determinado um outro ponto da reta  $h$  de forma que as retas  $s$  e  $h$  fossem concorrentes nesse outro ponto. Isso teria, como consequência, um ligeiro aumento do traçado – seira necessária uma linha de chamada a mais do que na solução apresentada (a linha de chamada desse ponto de concorrência das retas  $h$  e  $s$ ).

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $h$  e  $s$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $s$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 74.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$  e  $B$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

#### Resolução:

Pretende-se dois planos,  $\alpha$  e  $\delta$ , paralelos sendo que o plano  $\alpha$  passa pelo ponto  $A$  e o plano  $\delta$  passa pelo ponto  $B$  – os dois planos têm de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** um em relação ao outro, ou seja, cada um dos planos tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do outro plano (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum).

Por outro lado, essa condição refere-se ao mínimo necessário para garantir o paralelismo entre dois planos, porque, na realidade, dois **planos paralelos** têm **todas as «famílias» de retas em comum** (por oposição aos **planos secantes**, que têm **uma única «família» de retas em comum**).

Começou-se por conduzir, pelo ponto  $A$ , a reta  $r$ , a reta dada do plano  $\alpha$  – considerou-se que a reta  $r$  passa pelo ponto  $A$ , apesar de não haver qualquer informação nesse sentido nem sequer em sentido contrário. A reta  $r$  é paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem as suas projeções paralelas entre si (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (a direção das suas projeções, que é dada no enunciado).

A reta  $r$  garante-nos que o ponto  $A$  pertence ao plano  $\alpha$ , porque pertence a uma reta do plano – a reta  $r$ .

Em seguida, conduziu-se, pelo ponto  $B$ , a reta  $s$ , a reta dada do plano  $\delta$  – considerou-se que a reta  $s$  passa pelo ponto  $B$ , apesar de não haver qualquer informação nesse sentido nem sequer em sentido contrário. A reta  $s$  é paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que as suas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

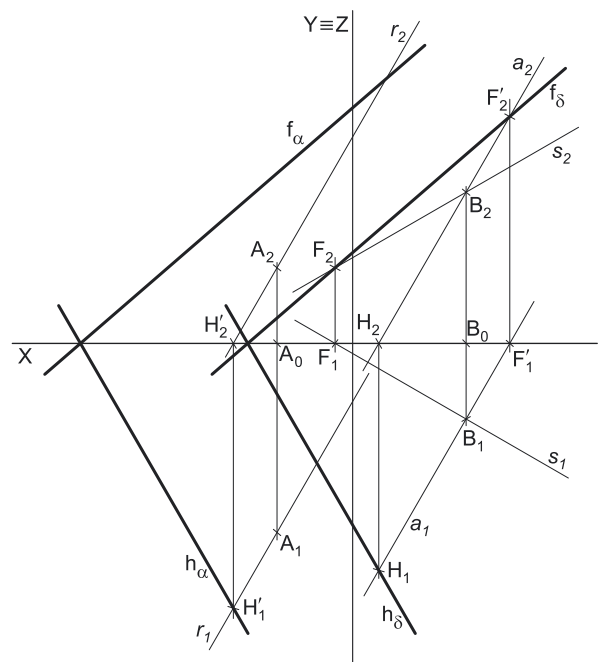
A reta  $s$  garante-nos que o ponto  $B$  pertence ao plano  $\delta$ , porque pertence a uma reta do plano – a reta  $s$ .

#### Determinação dos traços do plano $\delta$ :

Para que o plano  $\delta$  seja paralelo ao plano  $\alpha$ , o plano  $\delta$  tem de ter duas «famílias» de retas em comum com o plano  $\alpha$ . Tendo em conta que já é conhecida a «família» das retas a que a reta  $r$  pertence (que pertence ao plano  $\alpha$ ), o plano  $\delta$  tem de conter essa «família» de retas. Assim, conduziu-se, pelo ponto  $B$ , uma reta  $a$ , paralela à reta  $r$ . A reta  $a$  está definida por um ponto (o ponto  $B$ ) e por uma direção (a direção da reta  $r$ ). O plano  $\delta$  está, assim, definido por duas retas concorrentes – as retas  $s$  e  $a$ .

O **traço frontal do plano  $\delta$**  é a **reta de interseção** do plano  $\delta$  com o Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Determinou-se o traço frontal da reta  $s$ , o ponto  $F$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_\delta$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta  $a$ , o ponto  $F'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ). O traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ) está definido por dois pontos – os pontos  $F$  e  $F'$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O **traço horizontal do plano**  $\delta$  é a **reta de interseção** do plano  $\delta$  com o Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal do plano, com cota nula). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Determinou-se o traço horizontal da reta  $a$ , o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dois traços de um plano são duas retas do plano que são necessariamente concorrentes num ponto do eixo  $X$  (à exceção dos planos de rampa). Assim,  $f_\delta$  e  $h_\delta$  têm de ser concorrentes entre si num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ). O traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $H$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

### Determinação dos traços do plano $\alpha$ :

Em seguida, para que o plano  $\alpha$  seja paralelo ao plano  $\delta$ , o plano  $\alpha$  tem de ter duas «famílias» de retas em comum com o plano  $\delta$ . Os traços de um plano oblíquo são **duas retas concorrentes** desse plano (duas retas de duas «famílias» de retas diferentes). Assim, para que o plano  $\alpha$  seja paralelo ao plano  $\delta$ , basta que os seus traços (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ) sejam paralelos aos traços homónimos do plano  $\delta$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\delta$ ).

Para a reta  $r$  pertencer ao plano  $\alpha$ , a reta  $r$  tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H'$ , o traço horizontal da reta  $r$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção de  $h_\alpha$  também já é conhecida – é paralelo a  $h_\delta$ . Assim, pelo ponto  $H$  conduziu-se  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ), paralelo a  $h_\delta$ . O traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ).

O plano  $\alpha$  está definido por duas retas concorrentes – o seu traço horizontal ( $h_\alpha$ ) e a reta  $r$ , que são concorrentes no ponto  $H$ . Já garantimos que o plano  $\alpha$  é paralelo ao plano  $\delta$ , pois as retas  $r$  e  $h_\alpha$  (duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ) são paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (a reta  $a$  e  $h_\delta$ ) – os dois planos já têm, em comum, duas «famílias» de retas.

Por fim, desenhou-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é paralelo ao traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ). Assim,  $f_\alpha$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$  –  $f_\alpha$  é paralelo a  $f_\delta$ ).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $A$  e é paralelo ao plano  $\delta$ , tal como plano  $\delta$  contém o ponto  $B$  e é paralelo ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os traços dos dois planos representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência). Note que, apesar de o enunciado referir as retas  $r$  e  $s$ , não nos dá qualquer informação sobre as mesmas para além das respetivas direções (não se sabe por que ponto passa cada uma delas). Assim, as retas  $r$  e  $s$  desenhadas podem não ser as retas dadas, mas sim umas retas quaisquer – por isso mesmo se representaram a **leve**, por se considerar integramos os traçados auxiliares e não os dados.

## 75.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $a$  e  $b$ , bem como o ponto  $A$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se dois planos,  $\rho$  e  $\sigma$ , paralelos sendo que o plano  $\rho$  contém a reta  $a$  e o plano  $\sigma$  contém a reta  $b$  – os dois planos têm de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** um em relação ao outro, ou seja, cada um dos planos tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do outro plano (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum).

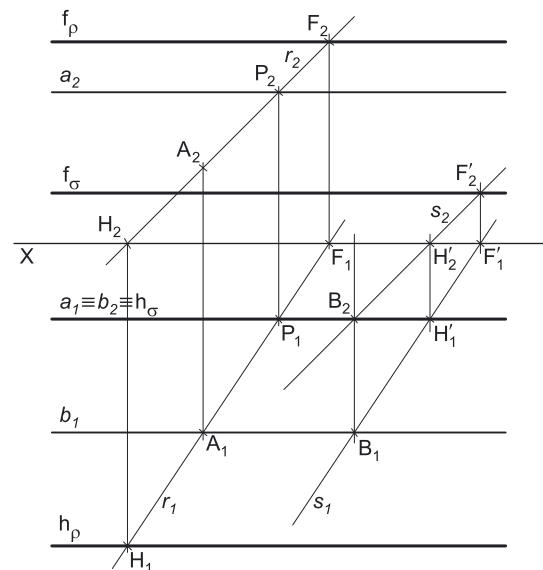
Por outro lado, essa condição refere-se ao mínimo necessário para garantir o paralelismo entre dois planos, porque, na realidade, dois **planos paralelos** têm **todas as «famílias» de retas em comum** (por oposição aos **planos secantes**, que têm **uma única «família» de retas em comum**).

### Determinação dos traços do plano $\rho$ :

O plano  $\rho$  está completamente definido, pois está definido por uma reta (a reta  $a$ ) e um ponto exterior à reta (o ponto  $A$ ). Assim, a determinação dos traços do plano  $\rho$  é imediata e não depende de qualquer situação de paralelismo em relação ao plano  $\sigma$ .

Para determinar o traço frontal do plano (por exemplo), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dados do plano são insuficientes para definir  $f_\rho$  (o traço frontal do plano), pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também, ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se à reta  $r$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $r$  está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o ponto que define o plano e que é dado no enunciado) e o ponto  $P$  (o seu ponto de concorrência com a reta  $a$ ). Em seguida, determinou-se o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $r$ . Já temos um ponto para definir  $f_\rho$  – o ponto  $F$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $f_\rho$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). A reta  $a$  é uma reta fronto-horizontal (que é um caso particular das retas frontais) e as retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (que é uma reta frontal do plano com afastamento nulo). Assim, o traço frontal do plano ( $f_\rho$ ) é paralelo a reta  $a$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço frontal do plano ( $f_\rho$ ) – a direção das retas fronto-horizontais. O traço frontal do plano ( $f_\rho$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (a direção das retas fronto-horizontais).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para determinar o traço horizontal do plano, que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **r**. Já temos um ponto para definir  $h_p$  – o ponto **H**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). A reta **a** é uma reta fronto-horizontal (que é também um caso particular das retas horizontais) e as retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (que é uma reta horizontal do plano com cota nula). Assim, o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) é paralelo à reta **a**, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) – a direção das retas fronto-horizontais. O traço horizontal do plano ( $h_p$ ) está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (a direção das retas fronto-horizontais).

#### Determinação dos traços do plano $\sigma$ :

Para que o plano  $\sigma$  seja paralelo ao plano  $\rho$ , o plano  $\sigma$  tem de ter duas «famílias» de retas em comum com o plano  $\rho$ . Os planos já têm, em comum, a «família» das retas fronto-horizontais (ambos os planos contêm uma reta fronto-horizontal, pelo menos). Assim, os dois planos têm que ter em comum uma outra «família» de retas – a «família» de retas a que a reta **r** pertence, por exemplo.

Assim, recorreu-se a uma reta **s**, paralela à reta **r** e pertencente ao plano  $\rho$ . Começamos por desenhar a projeção frontal da reta **s** ( $s_2$ ), paralela à projeção frontal da reta **r** ( $r_2$ ). Para definir a reta **s** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **s** é paralela à reta **r**, pelo que já temos uma direção para definir a reta **s** – a direção da reta **r**. Falta-nos um ponto para definir a reta **s**. As retas **s** e **b** são coplanares (pertencem, ambas, ao plano  $\sigma$ ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois as suas projeções frontais não são paralelas, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **B**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **s**. A reta **s** está definida por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (a direção da reta **r**).

Por fim, para que a reta **s** pertença ao plano  $\sigma$ , a reta **s** tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\sigma$ . Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **s** nos planos de projeção (os pontos **F'** e **H'**) e desenharam-se os traços do plano  $\sigma$ , que são retas fronto-horizontais. O traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto **F'**) e uma direção (é uma reta fronto-horizontal). O traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_\sigma$ ) está igualmente definido por um ponto (o ponto **H'**) e uma direção (é também uma reta fronto-horizontal).

O plano  $\sigma$ , definido pelos seus traços, contém a reta **b** e é paralelo ao plano  $\rho$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas **a** e **b**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços dos dois planos representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **s** ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 76.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\theta$ , pelos seus traços, bem como a reta **g**, pelas suas projeções, em função dos dados.

#### Resolução:

Pretende-se um plano  $\rho$ , paralelo ao plano  $\theta$  e contendo a reta **g** – o plano  $\rho$  tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano  $\theta$ , ou seja, o plano  $\rho$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\theta$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Um plano paralelo a um plano de rampa é necessariamente outro plano de rampa, pelo que o plano  $\rho$  é necessariamente outro plano de rampa.

Qualquer plano de rampa contém retas fronto-horizontais, pelo que tanto o plano  $\rho$  como o plano  $\theta$  contêm retas fronto-horizontais. Assim, os dois planos já têm, em comum, uma «família» de retas – a «família» das retas fronto-horizontais. Para que os dois planos sejam paralelos, os dois planos têm de ter, em comum, outra «família» de retas.

Assim, determinaram-se as projeções de uma reta **r**, qualquer, pertencente ao plano  $\theta$  – a reta **r** é uma reta oblíqua do plano  $\theta$  e está definida por dois pontos (os seus traços, os pontos **F** e **H**). A reta **r** é uma reta de uma outra «família» de retas do plano  $\theta$ , «família» de retas essa que os dois planos também têm de ter em comum (dois planos paralelos têm todas as «famílias» de retas em comum).

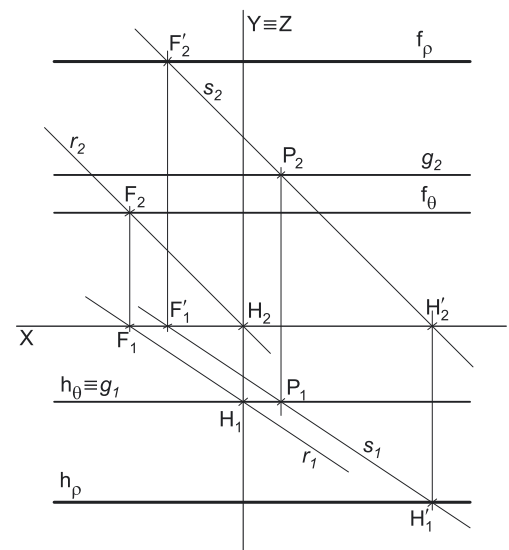
Em seguida, determinou-se uma reta **s**, paralela à reta **r** e concorrente com a reta **g**. A reta **s** está definida por um ponto (o ponto **P**, o seu ponto de concorrência com a reta **g**) e por uma direção (a direção da reta **r**). O plano  $\rho$  está definido por duas retas concorrentes – as retas **g** e **s**.

A reta **s**, porque pertence ao plano  $\rho$ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano**, em relação ao plano  $\rho$ . Assim, determinaram-se os traços da reta **s** nos planos de projeção (os pontos **F'** e **H'**) e desenharam-se os traços do plano  $\rho$ , que são retas fronto-horizontais. O traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ) está definido por um ponto (o ponto **F'**) e uma direção (é uma reta fronto-horizontal). O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ) está igualmente definido por um ponto (o ponto **H'**) e uma direção (é também uma reta fronto-horizontal).

O plano  $\rho$ , definido pelos seus traços, contém a reta **g** e é paralelo ao plano  $\theta$ , conforme era pedido.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta **g** e os traços do plano  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\rho$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **s**).





## 14 PERPENDICULARIDADE E ORTOGONALIDADE

77.

Duas retas **perpendiculares** são duas retas **ortogonais** (que formam, entre si, quatro ângulos retos – ângulos de  $90^\circ$ ) que são coplanares (são **concorrentes**). Retas **ortogonais** são retas **não coplanares** paralelas a duas retas **perpendiculares**.

78.

A afirmação é **falsa**. Duas retas ortogonais podem ou não ser perpendiculares – se forem coplanares, então são **perpendiculares** (são concorrentes), mas se não forem coplanares, as retas serão apenas **ortogonais**.

Já a afirmação contrária é **verdade** – duas retas **perpendiculares** são necessariamente ortogonais. A ortogonalidade é condição necessária para que se verifique a perpendicularidade, mas não o contrário.

79.

A afirmação é **falsa**. As projeções homónimas de duas retas perpendiculares entre si **não são** perpendiculares entre si, a menos que uma das retas **seja paralela a um dos planos de projeção** – nesse caso (e apenas nesse caso), as projeções das duas retas **nesse plano de projeção** serão sempre perpendiculares entre si.

80.

A afirmação é **verdadeira**. De facto, se duas retas são perpendiculares ou ortogonais e **uma delas é paralela a um dos planos de projeção**, as projeções das duas retas **nesse plano de projeção** são necessariamente perpendiculares entre si. Assim, atendendo a que as retas horizontais (de nível) são paralelas ao Plano Horizontal de Projeção, qualquer reta perpendicular ou ortogonal a uma reta horizontal (de nível) terá a sua projeção horizontal perpendicular à projeção horizontal da reta horizontal (de nível).

81.

Se as retas **a** e **b** têm as suas projeções horizontais perpendiculares entre si e as suas projeções frontais perpendiculares entre si **em simultâneo**, sabe-se imediatamente que, **no espaço**, as retas **a** e **b** **não são perpendiculares** (a menos que se trate de **uma única** situação particular que adiante se referirá)

82.

Duas retas perpendiculares no espaço, porque são concorrentes, definem **um plano**. Os ângulos que essas duas retas fazem entre si (quatro ângulos de  $90^\circ$ ) **estão contidos no plano** que as duas retas definem. No caso de o plano que essas duas retas definem (**o plano que contém o ângulo**) não ser paralelo a nenhum dos planos de projeção, os ângulos que as duas retas formam entre si não se projetam em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que sofrem deformação em ambas as projeções. Assim, esses quatro ângulos retos, porque se deformam em projeção, **não se projetam como ângulos retos** em nenhum dos planos de projeção, pelo que nem as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares entre si, nem as projeções frontais das duas retas são perpendiculares entre si.

83.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta **h** e o ponto **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

É pedida uma reta **p**, **perpendicular** à reta **h**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta **p**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta **p**.

A reta **h** é paralela ao Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal) e, por isso, a perpendicularidade entre a reta **h** e a reta **p** é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por **P<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **P**), a projeção horizontal da reta **p** (**p<sub>1</sub>**), perpendicular a **h<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **h**). A perpendicularidade entre as duas retas já está garantida.

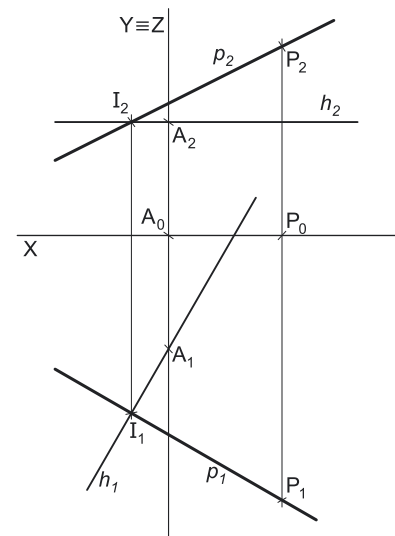
Uma vez que as duas retas são perpendiculares, as duas retas são necessariamente **concorrentes**. Assim, determinou-se o ponto de concorrência entre as duas retas (o ponto **I**), a partir da sua projeção horizontal – **I<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **I**) é o ponto de concorrência das projeções horizontais das duas retas e **I<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **I**) situa-se sobre **h<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **h**). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **p**.

A reta **p** está, assim, definida por dois pontos – os pontos **P** e **I**. Nesse sentido, desenhou-se a projeção frontal da reta **p** (**p<sub>2</sub>**), passando por **P<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **P**) e por **I<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **I**).

A reta **p**, definida pelos pontos **P** e **I**, é a reta que passa pelo ponto **P** e é **perpendicular** à reta **h** (no ponto **I**).

Traçado:

Os dados (as projeções da reta **h**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **p** representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo **Y = Z**, que é uma linha de referência).



## 84.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $h$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ), passando por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), com a direção dada no enunciado.

**Resolução:**

É pedida uma reta  $p$ , **ortogonal** à reta  $h$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $P$  (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ .

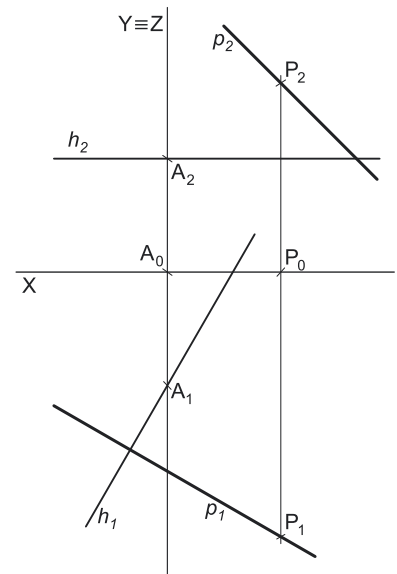
A reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal) e, por isso, a ortogonalidade entre a reta  $h$  e a reta  $p$  é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). A ortogonalidade entre as duas retas já está garantida.

Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $p$  – a direção que é dada, no seu conjunto, pela direção das suas duas projeções. A reta  $p$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção do conjunto das suas duas projeções).

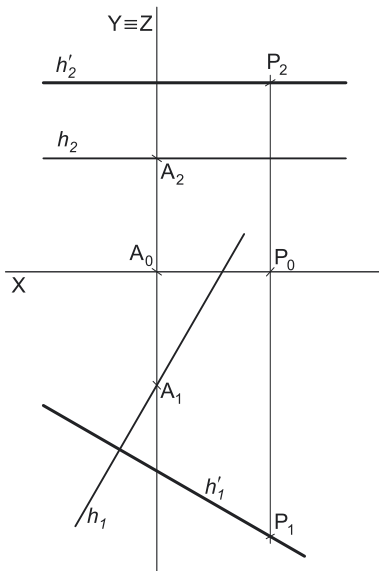
A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, é a reta que passa pelo ponto  $P$  e é **ortogonal** à reta  $h$ . As retas  $h$  e  $p$  são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 85.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $h$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção frontal da reta  $h'$  ( $h'_2$ ), passando por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), pois a reta  $h'$  é uma reta horizontal (de nível).

**Resolução:**

É pedida uma reta  $h'$ , horizontal (de nível) e **ortogonal** à reta  $h$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h'$  passa pelo ponto  $P$  (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $h'$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $h'$ .

A reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal) e, por isso, a ortogonalidade entre a reta  $h$  e a reta  $h'$  é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), a projeção horizontal da reta  $h'$  ( $h'_1$ ), perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). A ortogonalidade entre as duas retas já está garantida.

Tendo em conta que a reta  $h'$  é uma reta horizontal (de nível) e que a sua direção é dada pela sua projeção horizontal, a reta  $h'$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção do conjunto das suas duas projeções).

A reta  $h'$ , representada pelas suas projeções, é a reta horizontal (de nível) que passa pelo ponto  $P$  e é **ortogonal** à reta  $h$ . As retas  $h$  e  $h'$  são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $h'$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 86.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $f$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

É pedida uma reta  $p$ , **perpendicular** à reta  $f$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $P$  (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ .

A reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal) e, por isso, a perpendicularidade entre a reta  $f$  e a reta  $p$  é direta em projeção frontal – as projeções frontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). A perpendicularidade entre as duas retas já está garantida.

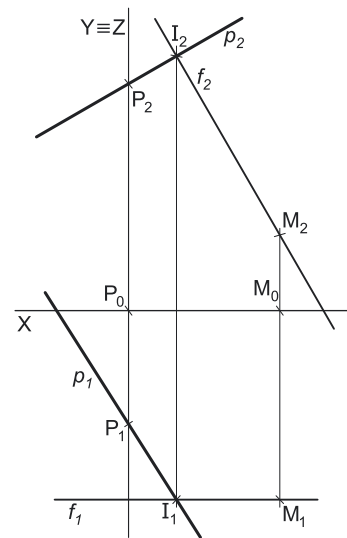
Uma vez que as duas retas são perpendiculares, as duas retas são necessariamente **concorrentes**. Assim, determinou-se o ponto de concorrência entre as duas retas (o ponto  $I$ ), a partir da sua projeção frontal –  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) é o ponto de concorrência das projeções frontais das duas retas e  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ .

A reta  $p$  está, assim, definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ . Nesse sentido, desenhou-se a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), passando por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) e por  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ).

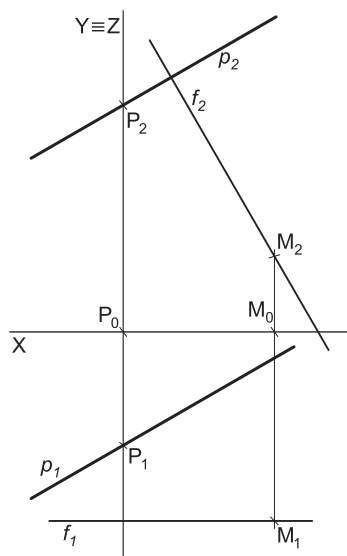
A reta  $p$ , definida pelos pontos  $P$  e  $I$ , é a reta que passa pelo ponto  $P$  e é **perpendicular** à reta  $f$  (no ponto  $I$ ).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 87.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $f$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

É pedida uma reta  $p$ , **ortogonal** à reta  $f$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $P$  (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ .

A reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal) e, por isso, a ortogonalidade entre a reta  $f$  e a reta  $p$  é direta em projeção frontal – as projeções frontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). A ortogonalidade entre as duas retas já está garantida.

Uma vez que a reta  $p$  é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$ , sabe-se que a reta  $p$  tem as suas projeções paralelas entre si (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). Nesse sentido, desenhou-se a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), passando por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) e paralela a  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ).

Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $p$  – a direção que é dada, no seu conjunto, pela direção das suas duas projeções. A reta  $p$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção do conjunto das suas duas projeções).

A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, é a reta que passa pelo ponto  $P$  e é **ortogonal** à reta  $f$ . As retas  $f$  e  $p$  são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 88.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $f$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção horizontal da reta  $f'$  ( $f'_1$ ), passando por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), pois a reta  $f'$  é uma reta frontal (de frente).

### Resolução:

É pedida uma reta  $f'$ , frontal (de frente) e **ortogonal** à reta  $f$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $f'$  passa pelo ponto  $P$  (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $f'$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $f'$ .

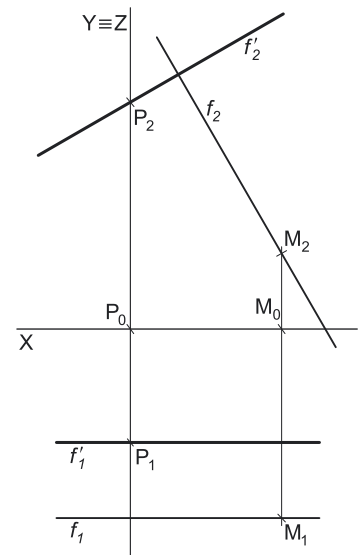
A reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal) e, por isso, a ortogonalidade entre a reta  $f$  e a reta  $f'$  é direta em projeção frontal – as projeções frontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), a projeção frontal da reta  $f'$  ( $f'_2$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). A ortogonalidade entre as duas retas já está garantida.

Tendo em conta que a reta  $f'$  é uma reta frontal (de frente) e que a sua direção é dada pela sua projeção frontal, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $f'$  – a reta  $f'$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção do conjunto das suas duas projeções).

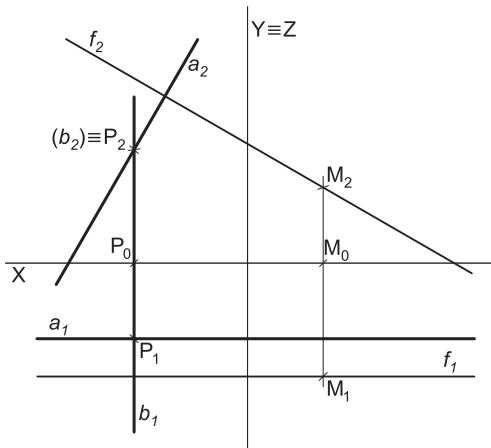
A reta  $f'$ , representada pelas suas projeções, é a reta frontal (de frente) que passa pelo ponto  $P$  e é **ortogonal** à reta  $f$ . As retas  $f$  e  $f'$  são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $f'$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 89.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $f$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

#### Reta $a$ :

É pedida uma reta  $a$ , frontal (de frente) e **ortogonal** à reta  $f$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $a$  passa pelo ponto  $P$  (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $a$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $a$ .

Foi possível desenhar, de forma imediata, a projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_1$ ), passando pela projeção horizontal do ponto  $P$  ( $P_1$ ) e paralela ao eixo  $X$ , pois trata-se de uma reta frontal (de frente).

A reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal) e, por isso, a ortogonalidade entre a reta  $f$  e a reta  $a$  é direta em projeção frontal – as projeções frontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), a projeção frontal da reta  $a$  ( $a_2$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). A ortogonalidade entre as duas retas já está garantida.

Tendo em conta que a reta  $a$  é uma reta frontal (de frente) e que a sua direção é dada pela sua projeção frontal, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $a$  – a reta  $a$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção do conjunto das suas duas projeções).

A reta  $a$ , representada pelas suas projeções, é a reta frontal (de frente) que passa pelo ponto  $P$  e é **ortogonal** à reta  $f$ . As retas  $f$  e  $a$  são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

#### Reta $b$ :

A reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal) e, por isso, a ortogonalidade entre a reta  $f$  e a reta  $b$  é direta em projeção frontal – as projeções frontais das duas retas são perpendiculares. No entanto, tal não se pode verificar em relação à reta  $b$  – sendo a reta  $b$  uma reta horizontal (de nível), a sua projeção frontal é paralela ao eixo  $X$ , pelo que não seria nunca perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ).

Assim, a ortogonalidade entre a reta  $b$  e a reta  $f$  processou-se atendendo ao facto de a reta  $b$  ser uma reta horizontal (de nível) – uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção. A reta  $b$  é uma reta horizontal (é dado no enunciado), que é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $b$  e a reta  $f$  é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas têm de ser perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) a projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_1$ ), perpendicular a  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em função do efetuado, conclui-se que a reta **b** tem de ser uma reta de topo (a sua projeção horizontal é perpendicular ao eixo **X**) – a reta **b** é, pois, um **caso particular** das retas horizontais (de nível).

A projeção frontal de uma reta de topo é um ponto – assim, **b<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **b**) reduz-se a um ponto, que está coincidente com **P<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **P**). Note que o facto de a projeção frontal da reta **b** ser um ponto se assinalou convenientemente com o recurso a parêntesis.

A reta **b**, representada pelas suas projeções, é a reta horizontal (de nível) que passa pelo ponto **P** e é **ortogonal** à reta **f**. As retas **b** e **f** são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta **f**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções das retas **a** e **b** representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo **Y ≡ Z**, que é uma linha de referência).

## 90.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta **h** e o ponto **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção frontal da reta **r** (**r<sub>2</sub>**), passando por **P<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **P**), com a direção dada no enunciado.

**Resolução:**

É pedida uma reta **r**, **ortogonal** à reta **h**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **r** passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta **r**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta **r**.

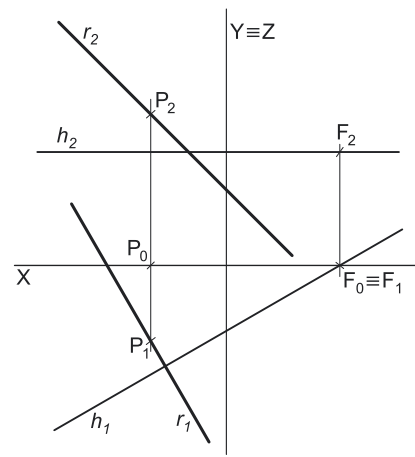
A reta **h** é paralela ao Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal) e, por isso, a ortogonalidade entre a reta **h** e a reta **r** é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por **P<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **P**), a projeção horizontal da reta **r** (**r<sub>1</sub>**), perpendicular a **h<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **h**). A ortogonalidade entre as duas retas já está garantida.

Já temos a direção que nos faltava para definir a reta **r** – a direção que é dada, no seu conjunto, pela direção das suas duas projeções. A reta **r** está, assim, definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (a direção do conjunto das suas duas projeções).

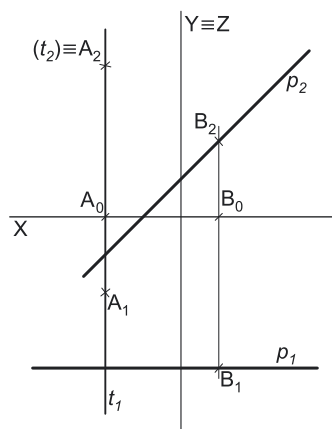
A reta **r**, representada pelas suas projeções, é a reta que passa pelo ponto **P** e é **ortogonal** à reta **h**. As retas **h** e **r** são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta **h**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **r** representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo **Y ≡ Z**, que é uma linha de referência).



## 91.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta **t** e o ponto **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção frontal da reta **p** (**p<sub>2</sub>**), passando por **P<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **P**), com a direção dada no enunciado.

**Resolução:**

É pedida uma reta **p**, **ortogonal** à reta **t**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta **p**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta **p**.

A reta **t** é uma reta de topo, que é um caso particular das retas horizontais (de nível) – é uma reta horizontal (de nível) que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção.

Tendo em conta que a reta **t** é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta **t** e a reta **p** é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por **P<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **P**), a projeção horizontal da reta **p** (**p<sub>1</sub>**), perpendicular a **t<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **t**). A ortogonalidade entre as duas retas já está garantida.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $p$  – a direção que é dada, no seu conjunto, pela direção das suas duas projeções. A reta  $p$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção do conjunto das suas duas projeções).

A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, é a reta que passa pelo ponto  $P$  e é **ortogonal** à reta  $t$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $t$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 92.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $g$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

#### Resolução:

É pedida uma reta  $p$ , **ortogonal** à reta  $g$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $P$  (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ .

A reta  $g$  é uma reta fronto-horizontal, que é simultaneamente um caso particular das retas frontais (de frente) e um caso particular das retas horizontais (de nível). Assim, a resolução do problema pode processar-se considerando-se que a reta  $g$  é uma reta frontal (de frente) ou considerando-se que a reta  $g$  é uma reta horizontal (de nível).

Consideremos que a reta  $g$  é um caso particular das retas horizontais (de nível) – trata-se de uma reta horizontal (de nível) que é paralela ao Plano Frontal de Projeção.

Tendo em conta que a reta  $g$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta  $g$  e a reta  $p$  é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), perpendicular a  $g_1$  (a projeção horizontal da reta  $g$ ). A ortogonalidade entre as duas retas já está garantida.

Em função da projeção horizontal desenhada, é possível concluir que a reta  $p$  terá de ser necessariamente uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Optemos por fazer com que a reta  $p$  seja uma **reta de topo**. Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $p$  – a direção das retas projetantes frontais (retas de topo). A reta  $p$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção das retas projetantes frontais). A projeção frontal de uma reta de topo é um ponto – assim,  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ) reduz-se a um ponto, que está coincidente com  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ). Note que o facto de a projeção frontal da reta  $p$  ser um ponto se assinalou convenientemente com o recurso a parêntesis.

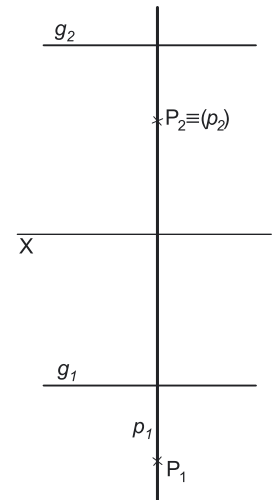
A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, é uma reta que passa pelo ponto  $P$  e é **ortogonal** à reta  $g$ .

Note que, caso se tivesse considerado que a reta  $g$  era um caso particular das retas frontais (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas seria garantida a partir das respetivas projeções frontais, pelo que a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) seria perpendicular à projeção frontal da reta  $g$  ( $g_2$ ), ou seja,  $p_2$  seria perpendicular ao eixo  $X$ . Em função dessa projeção frontal, a reta  $p$  teria de ser necessariamente uma **reta vertical** ou uma **reta de perfil**.

Assim sendo, as hipóteses de resolução que existem de conduzir, pelo ponto  $P$ , ma reta ortogonal à reta  $g$  são **infinitas** – pode ser **uma reta vertical** (a reta vertical que passa pelo ponto  $P$ ), pode ser **uma reta de topo** (a reta de topo que passa pelo ponto  $P$ ) ou **infinitas retas de perfil**.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $g$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício).



## 93.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $g$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

É pedida uma reta  $p$ , perpendicular à reta  $g$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $P$  (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ .

A reta  $g$  é uma reta fronto-horizontal, que é simultaneamente um caso particular das retas frontais (de frente) e um caso particular das retas horizontais (de nível). Assim, a resolução do problema pode processar-se considerando-se que a reta  $g$  é uma reta frontal (de frente) ou considerando-se que a reta  $g$  é uma reta horizontal (de nível).

Consideremos que a reta  $g$  é um caso particular das retas horizontais (de nível) – trata-se de uma reta horizontal (de nível) que é paralela ao Plano Frontal de Projeção.

Tendo em conta que a reta  $g$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a perpendicularidade entre a reta  $g$  e a reta  $p$  é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), perpendicular a  $g_1$  (a projeção horizontal da reta  $g$ ). A perpendicularidade entre as duas retas já está garantida.

Em função da projeção horizontal desenhada, é possível concluir que a reta  $p$  terá de ser necessariamente uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**.

Uma vez que as duas retas são perpendiculares, as duas retas são necessariamente **concorrentes**. Assim, determinou-se o ponto de concorrência entre as duas retas (o ponto  $I$ ), a partir da sua projeção horizontal –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) é o ponto de concorrência das projeções horizontais das duas retas e  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $g_2$  (a projeção frontal da reta  $g$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ .

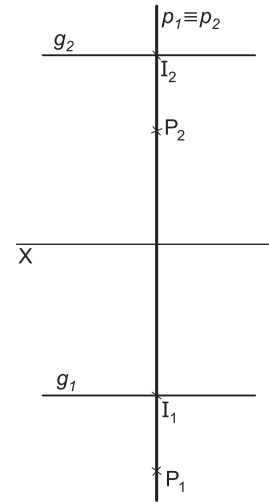
A reta  $p$  está, assim, definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ . Nesse sentido, identificou-se a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ), passando por  $P_2$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) e por  $I_2$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ).

A reta  $p$ , definida pelos pontos  $P$  e  $I$ , é a reta que passa pelo ponto  $P$  e é **perpendicular** à reta  $f$  (no ponto  $I$ ) – é uma **reta de perfil**.

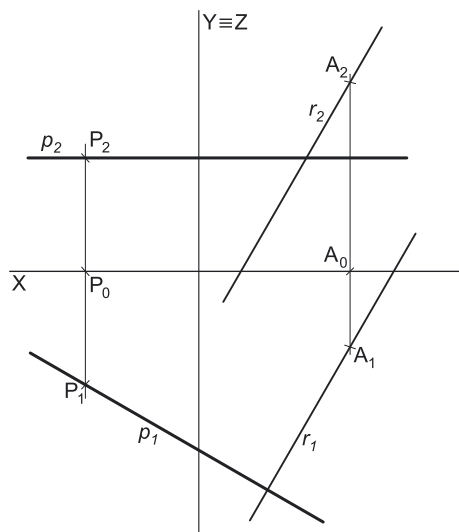
Note que, caso se tivesse considerado que a reta  $g$  era um caso particular das retas frontais (de frente), a perpendicularidade entre as duas retas seria garantida a partir das respetivas projeções frontais, pelo que a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) seria perpendicular à projeção frontal da reta  $g$  ( $g_2$ ), ou seja,  $p_2$  seria perpendicular ao eixo  $X$ . Em função dessa projeção frontal, a reta  $p$  teria de ser necessariamente uma **reta vertical** ou uma **reta de perfil**. Nessa situação, o ponto de concorrência das duas retas teria sido determinado a partir da sua projeção frontal, pelo que a resolução seria exatamente a mesma.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $g$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício).



## 94.



### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

a) Pretende-se uma reta  $p$ , qualquer, **ortogonal** à reta  $r$  e passando pelo ponto  $P$ . É pedida uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta pedida tem de passar pelo ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta – falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta pedida tem de ser **ortogonal** à reta  $r$ , que é uma **reta oblíqua**. Acontece que a ortogonalidade entre retas só é direta em projeções, **no caso de uma das retas ser paralela a um dos planos de projeção**. Uma vez que a reta  $r$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, para que seja possível, de forma direta, desenhar as projeções de uma reta ortogonal à reta  $r$ , essa reta ortogonal terá de ser paralela a um dos planos de projeção. Assim, a reta pedida terá de ser uma reta frontal (de frente) ou uma reta horizontal (de nível).

No caso de se tratar de uma **reta frontal (de frente)**, porque é paralela ao Plano Frontal de Projeção, **a ortogonalidade é direta em projeção frontal**, ou seja, as duas retas têm as suas projeções frontais efetivamente perpendiculares entre si. No caso de se tratar de uma **reta horizontal (de nível)**, porque é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, **a ortogonalidade é direta em projeção horizontal**, ou seja, as duas retas têm as suas projeções horizontais efetivamente perpendiculares entre si.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Optou-se pela segunda hipótese – considerou-se que a reta pedida é uma reta horizontal (de nível). Assim, pela projeção frontal do ponto  $P$  ( $P_2$ ), conduziu-se a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ), paralela ao eixo  $X$ . Em seguida, pela projeção horizontal do ponto  $P$  ( $P_1$ ), conduziu-se a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), perpendicular à projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ) – a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção horizontal, pois a reta  $p$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção.

b) Face ao exposto na alínea anterior, a reta  $p$  é uma **reta frontal (de frente)**. Com os conhecimentos adquiridos até ao momento, só seria possível desenhar duas retas que satisfizessem o pedido – uma **reta frontal** (que foi o caso) ou uma **reta horizontal (de nível)**.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 95.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $g$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

a) É pedida uma reta  $r$ , horizontal (de nível) e **ortogonal** à reta  $g$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $r$  passa pelo ponto  $P$  (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $r$ .

Tendo em conta que a reta  $r$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta  $r$  e a reta  $g$  é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), perpendicular a  $g_1$  (a projeção horizontal da reta  $g$ ). A ortogonalidade entre as duas retas já está garantida.

Em função da projeção horizontal desenhada, é possível concluir que a reta  $r$  terá de ser necessariamente uma **reta de topo**, que é um caso particular das retas horizontais (a **reta de topo** é a única reta horizontal cuja projeção horizontal é perpendicular ao eixo  $X$ ).

Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$  – a direção das retas projetantes frontais (retas de topo). A reta  $r$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção das retas projetantes frontais). A projeção frontal de uma reta de topo é um ponto – assim,  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ) reduz-se a um ponto, que está coincidente com  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ). Note que o facto de a projeção frontal da reta  $r$  ser um ponto se assinalou convenientemente com o recurso a parêntesis.

A reta  $r$ , representada pelas suas projeções, é uma reta horizontal (de nível) que passa pelo ponto  $P$  e é **ortogonal** à reta  $g$ .

b) É pedida uma reta  $s$ , frontal (de frente) e **ortogonal** à reta  $g$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $s$  passa pelo ponto  $P$  (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $s$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $s$ .

Tendo em conta que a reta  $s$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta  $s$  e a reta  $g$  é direta em projeção frontal – as projeções frontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), a projeção frontal da reta  $s$  ( $s_2$ ), perpendicular a  $g_2$  (a projeção frontal da reta  $g$ ). A ortogonalidade entre as duas retas já está garantida.

Salienta-se que a projeção frontal da reta  $s$  ( $s_2$ ) fica sobre a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), que já tinha sido desenhada anteriormente, pelo que se tem imediatamente  $s_2 \equiv r_1$ .

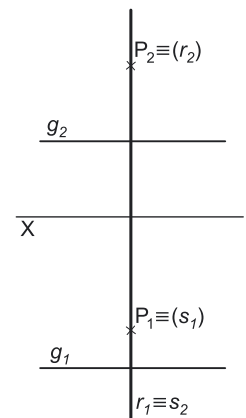
Em função da projeção frontal desenhada, é possível concluir que a reta  $s$  terá de ser necessariamente uma **reta vertical**, que é um caso particular das retas frontais (a **reta vertical** é a única reta frontal cuja projeção frontal é perpendicular ao eixo  $X$ ).

Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s$  – a direção das retas projetantes horizontais (retas verticais). A reta  $s$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção das retas projetantes horizontais). A projeção horizontal de uma reta vertical é um ponto – assim,  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) reduz-se a um ponto, que está coincidente com  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ). Note que o facto de a projeção horizontal da reta  $s$  ser um ponto se assinalou convenientemente com o recurso a parêntesis.

A reta  $s$ , representada pelas suas projeções, é uma reta frontal (de frente) que passa pelo ponto  $P$  e é **ortogonal** à reta  $g$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $g$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $r$ , que é parte do pedido (é parte do objetivo do exercício) representaram-se a **forte**. As projeções da reta  $s$ , que é outra parte do pedido (a outra parte do objetivo do exercício) representaram-se igualmente a **forte**.



## 96.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $R$ ) e pela sua direção (a direção dada pelo conjunto das duas projeções da reta).

- a) Pretende-se uma reta horizontal (de nível)  $h$ , perpendicular à reta  $r$  e concorrente com esta num ponto com 2 cm de cota. Assim, em primeiro lugar determinou-se o ponto  $P$ , que é o ponto da reta  $r$  que tem 2 cm de cota.

Uma vez que a reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível), foi possível desenhar, de imediato, a sua projeção frontal ( $h_2$ ), passando pela projeção frontal do ponto  $P$  ( $P_2$ ) e paralela ao eixo  $X$ . É pedida uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta pedida tem de passar pelo ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta – falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta pedida tem de ser perpendicular à reta  $r$ , que é uma **reta oblíqua**. Uma vez que a reta  $h$  é uma **reta horizontal (de nível)**, e porque é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a **perpendicularidade entre as duas retas é direta em projeção horizontal**, ou seja, as duas retas têm as suas projeções horizontais efetivamente perpendiculares entre si.

Assim, pela projeção horizontal do ponto  $P$  ( $P_1$ ), conduziu-se a projeção horizontal da reta  $h$  ( $h_1$ ), perpendicular à projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ) – a perpendicularidade entre as duas retas é direta em projeção horizontal, pois a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção.

A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) que passa pelo ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $r$  – a reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (é perpendicular à reta  $r$ ).

- b) O **traço horizontal do plano  $\alpha$**  é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal do plano, com cota nula). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Determinou-se o traço horizontal da reta  $r$ , o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (que é uma reta horizontal do plano com cota nula). Nesse sentido, o traço horizontal do plano é paralelo à reta  $h$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço horizontal do plano – a direção das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ . O traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$  – é paralelo à reta  $h$ ).

- O **traço frontal do plano  $\alpha$**  é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

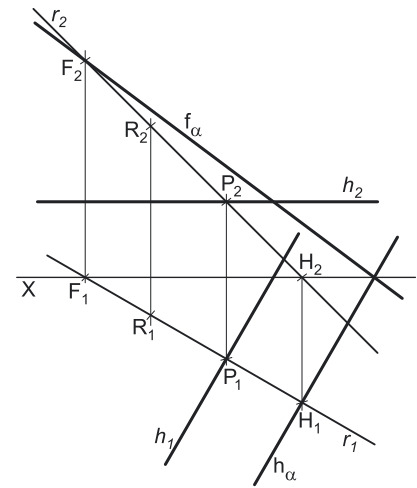
Determinou-se o traço frontal da reta  $r$ , o ponto  $F$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dois traços de um plano são duas retas do plano que são necessariamente concorrentes num ponto do eixo  $X$  (à exceção dos planos de rampa). Assim,  $f_\alpha$  e  $h_\alpha$  têm de ser concorrentes entre si num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). O traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $F$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

Note que se poderia ter determinado o traço frontal da reta  $h$ . Nesse caso, teríamos **três pontos** para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) – os traços frontais das duas retas (dois pontos) e, ainda, o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

Tendo em conta que a reta  $r$  e a reta  $h$  são perpendiculares e pertencem ao mesmo plano (o plano  $\alpha$ ), sabe-se imediatamente que a reta  $r$  é uma **reta de maior declive** do plano  $\alpha$  (pois é perpendicular às retas horizontais do plano  $\alpha$ ).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $h$ , que é parte do pedido (é parte do objetivo do exercício) representaram-se a **forte**. Os traços do plano  $\alpha$ , que são outra parte do pedido (a outra parte do objetivo do exercício) representaram-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.



## 97.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $R$ ) e pela sua direção (a direção dada pelo conjunto das duas projeções da reta).

- a) Pretende-se uma reta frontal (de frente)  $f$ , perpendicular à reta  $r$  e concorrente com esta num ponto com 2 cm de afastamento. Assim, em primeiro lugar determinou-se o ponto  $P$ , que é o ponto da reta  $r$  que tem 2 cm de afastamento.

Uma vez que a reta  $f$  é uma reta frontal (de frente), foi possível desenhar, de imediato, a sua projeção horizontal ( $f_1$ ), passando pela projeção horizontal do ponto  $P$  ( $P_1$ ) e paralela ao eixo  $X$ . É pedida uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta pedida tem de passar pelo ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta – falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta pedida tem de ser perpendicular à reta  $r$ , que é uma **reta oblíqua**. Uma vez que a reta  $f$  é uma **reta frontal (de frente)**, e porque é paralela ao Plano Frontal de Projeção, a **perpendicularidade entre as duas retas é direta em projeção frontal**, ou seja, as duas retas têm as suas projeções frontais efetivamente perpendiculares entre si.

Assim, pela projeção frontal do ponto  $P$  ( $P_2$ ), conduziu-se a projeção frontal da reta  $f$  ( $f_2$ ), perpendicular à projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) – a perpendicularidade entre as duas retas é direta em projeção frontal, pois a reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção.

A reta  $f$  é a reta frontal (de frente) que passa pelo ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $r$  – a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (é perpendicular à reta  $r$ ).

- b) O **traço frontal do plano**  $\delta$  é a **reta de interseção** do plano  $\delta$  com o Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Determinou-se o traço frontal da reta  $r$ , o ponto  $F$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_\delta$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$  e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (que é uma reta frontal do plano com afastamento nulo). Nesse sentido, o traço frontal do plano  $\delta$  é paralelo à reta  $f$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço frontal do plano – a direção das retas frontais (de frente) do plano  $\delta$ . O traço frontal do plano ( $f_\delta$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$  – é paralelo à reta  $f$ ).

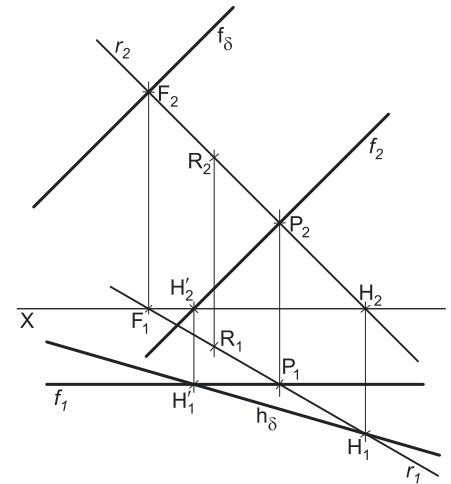
O **traço horizontal do plano**  $\delta$  é a **reta de interseção** do plano  $\delta$  com o Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal do plano, com cota nula). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Determinou-se o traço horizontal da reta  $r$ , o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta  $f$ , o ponto  $H'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ). O traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $H$  e o ponto  $H'$ .

Tendo em conta que a reta  $r$  e a reta  $f$  são perpendiculares e pertencem ao mesmo plano (o plano  $\delta$ ), sabe-se imediatamente que a reta  $r$  é uma **reta de maior inclinação** do plano  $\delta$  (pois é perpendicular às retas frontais do plano  $\delta$ ).

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $f$ , que é parte do pedido (é parte do objetivo do exercício) representaram-se a **forte**. Os traços do plano  $\delta$ , que são outra parte do pedido (a outra parte do objetivo do exercício) representaram-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.



## 98.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $h$  e  $f$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto  $P$  (o ponto de concorrência das duas retas) é um ponto com 3 cm de afastamento (porque pertence à reta  $f$ , que tem 3 cm de afastamento) e com 4 cm de cota (porque pertence à reta  $h$ , que tem 4 cm de cota).

### Resolução:

É pedida uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Pretende-se uma reta qualquer, **perpendicular** às retas  $h$  e  $f$  – a reta pedida tem de ser concorrente com as retas  $h$  e  $f$ . Para a reta  $r$  ser simultaneamente concorrente com as duas retas, e ainda perpendicular a ambas, a reta  $r$  tem necessariamente de passar pelo ponto  $P$  (o ponto de concorrência das retas  $h$  e  $f$ ), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal) e, por isso, a perpendicularidade entre a reta  $h$  e a reta  $r$  é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). Já está garantida a perpendicularidade da reta  $r$  em relação à reta  $h$ .

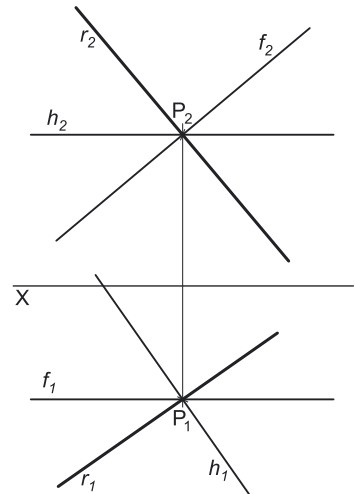
Falta-nos garantir a perpendicularidade da reta  $r$  em relação à reta  $f$ .

A reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal) e, por isso, a perpendicularidade entre a reta  $f$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal – as projeções frontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Já está garantida a perpendicularidade da reta  $r$  em relação à reta  $f$ .

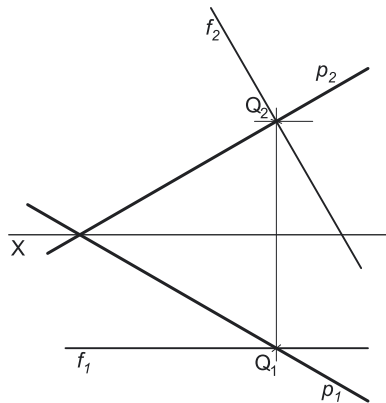
A reta  $r$  é a reta que é simultaneamente perpendicular à reta  $h$  e a reta  $f$  – a reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (a direção dada pelo conjunto das suas projeções).

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $h$  e  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $r$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). A linha restante representou-se a **leve**, pois é uma linha de chamada.



## 99.



### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $f$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

É pedida uma reta  $p$ , **perpendicular** à reta  $f$ . Para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Tendo em conta que as duas retas são **perpendiculares**, as duas retas são necessariamente **concorrentes**, pelo que, em primeiro lugar, há que determinar as projeções do ponto de concorrência. A reta  $p$  é uma reta do  $\beta_{1/3}$ , pelo que todos os seus pontos pertencem a  $\beta_{1/3}$ . Assim, o ponto de concorrência das duas retas e necessariamente um ponto do  $\beta_{1/3}$ .

Nesse sentido determinou-se o ponto  $Q$ , o traço da reta  $f$  no  $\beta_{1/3}$ . O ponto  $Q$  é o ponto da reta  $f$  que tem coordenadas iguais (todos os pontos da reta  $f$  têm 3 cm de afastamento, pelo que o ponto  $Q$  é o ponto da reta  $f$  que tem 3 cm de cota). A reta  $p$  passa pelo ponto  $Q$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ .

A reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal) e, por isso, a perpendicularidade entre a reta  $f$  e a reta  $p$  é direta em projeção frontal – as projeções frontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). A ortogonalidade entre as duas retas já está garantida.

Uma vez que a reta  $p$  é uma reta do  $\beta_{1/3}$ , sabe-se que a reta  $p$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$  (é necessariamente uma reta passante). Nesse sentido, desenhou-se a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), passando por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) e concorrente com  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ) num ponto do eixo  $X$ .

Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $p$  – a direção que é dada, no seu conjunto, pela direção das suas duas projeções. A reta  $p$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $Q$ ) e por uma direção (a direção do conjunto das suas duas projeções).

A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, é a reta do  $\beta_{1/3}$  que é **perpendicular** à reta  $f$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da paralela ao eixo  $X$  que nos permitiu determinar a cota do ponto  $Q$ ).

100.

Dados:

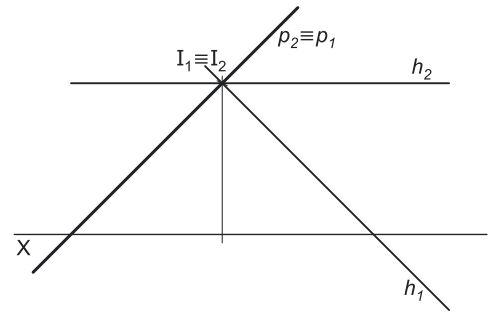
Em primeiro lugar, representou-se a reta  $h$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

É pedida uma reta  $p$ , perpendicular à reta  $h$ . Para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Tendo em conta que as duas retas são perpendiculares, as duas retas são necessariamente concorrentes, pelo que, em primeiro lugar, há que determinar as projeções do ponto de concorrência. A reta  $p$  é uma reta do  $\beta_{2/4}$ , pelo que todos os seus pontos pertencem ao  $\beta_{2/4}$ . Assim, o ponto de concorrência das duas retas e necessariamente um ponto do  $\beta_{2/4}$ .

Nesse sentido determinou-se o ponto  $I$ , o traço da reta  $h$  no  $\beta_{2/4}$ . O ponto  $I$  é o ponto da reta  $h$  que tem projeções coincidentes. A reta  $p$  passa pelo ponto  $I$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ .



A reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal) e, por isso, a perpendicularidade entre a reta  $h$  e a reta  $p$  é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). A perpendicularidade entre as duas retas já está garantida.

Uma vez que a reta  $p$  é uma reta do  $\beta_{2/4}$ , sabe-se que a reta  $p$  tem as suas projeções coincidentes. Nesse sentido, identificou-se a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ), coincidente com a projeção horizontal da reta  $p$  – tem-se imediatamente  $p_2 \equiv p_1$ .

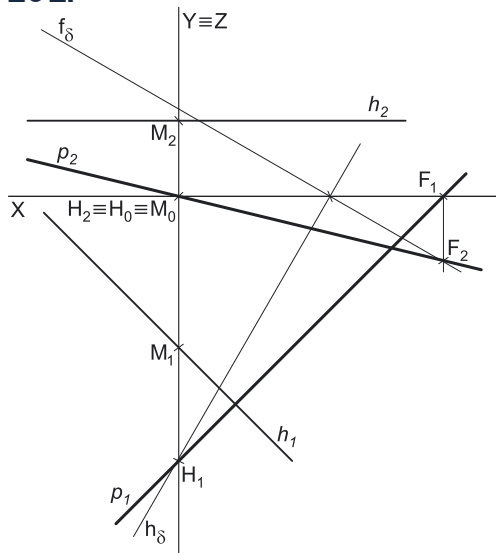
Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $p$  – a direção que é dada, no seu conjunto, pela direção das suas duas projeções. A reta  $p$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $I$ ) e por uma direção (a direção do conjunto das suas duas projeções).

A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, é a reta do  $\beta_{2/4}$  que é perpendicular à reta  $h$ .

Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $h$ ) representaram-se a médio, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a forte, pois são o pedido (o objetivo do exercício). A linha restante representou-se a leve, pois ou é uma linha de chamada.

101.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $h$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados.

Resolução:

É pedida uma reta  $p$ , ortogonal à reta  $h$  e pertencente ao plano  $\delta$ . Os dados permitiram-nos, de forma imediata, determinar o traço horizontal da reta  $p$ , pois a reta pertence ao plano (tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\delta$ ) – assim, o traço horizontal da reta  $p$  (o ponto  $H$ ) é o ponto de  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ) que tem abcissa nula.

Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $p$  – o seu traço horizontal (o ponto  $H$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ .

A reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal) e, por isso, a ortogonalidade entre a reta  $h$  e a reta  $p$  é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H$ ), a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). A ortogonalidade entre as duas retas já está garantida.

Por outro lado, e porque a reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\delta$  (é pedido no enunciado), o seu traço frontal (o ponto  $F$ ) tem de estar sobre o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ). Assim, determinou-se o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $p$ , sobre o traço frontal do plano  $\delta$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ .

A reta  $p$  está definida por dois pontos – os seus traços (os pontos  $F$  e  $H$ ). Este raciocínio permitiu-nos desenhar  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), passando por  $F_2$  e  $H_2$  (as projeções frontais dos seus traços).

A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, é a reta do plano  $\delta$  que é ortogonal à reta  $h$  e cujo traço horizontal tem abcissa nula. As retas  $h$  e  $p$  são retas ortogonais mas não perpendiculares, pois não são retas concorrentes.

Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\delta$  e as projeções da reta  $h$ ) representaram-se a médio, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a forte, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a leve, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 102.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $h$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

É pedida uma reta  $p$ , perpendicular à reta  $h$  e pertencente ao plano  $\delta$ . Para que a reta  $p$  seja perpendicular à reta  $h$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, há que determinar uma reta do plano  $\delta$  que seja ortogonal à reta  $h$  e concorrente com a reta  $h$  (retas perpendiculares são retas ortogonais que são concorrentes).

O ponto de concorrência da reta  $h$  com a reta  $p$  é um ponto que pertence às duas retas, pelo que é necessariamente um ponto que pertence à reta  $h$  e pertencerá também ao plano  $\delta$  (pois pertencerá a uma reta do plano -- a reta  $p$ ). Conclui-se, assim, que o ponto de concorrência entre as duas retas é indubitavelmente o ponto de interseção da reta  $h$  com o plano  $\delta$  -- o ponto  $I$ .

Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

#### Determinação do ponto de interseção da reta $h$ com o plano $\delta$ :

E pedido um ponto -- o ponto de interseção entre a reta  $h$  e o plano  $\delta$ . O ponto de interseção entre uma reta e um plano é um ponto que pertence simultaneamente à reta e ao plano. **Nem a reta nem o plano são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao método geral da interseção de retas com planos, que se executa em três etapas.

- 1. Conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha.** Pela reta  $h$  conduziu-se um plano auxiliar (o plano  $v$  que é um plano projetante frontal), que a contém -- o plano  $v$  é um plano horizontal (de nível) e é o plano projetante frontal da reta  $h$ .
- 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos.** Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano  $v$  (o plano auxiliar) com o plano  $\delta$  -- a reta  $i$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$  e está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$  -- a reta  $i$  é paralela a  $h_\delta$ ).
- 3. O ponto de concorrência das retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.** O ponto de concorrência (ou de interseção) da reta  $i$  com a reta  $h$  é o ponto  $I$  e é o ponto de interseção da reta  $h$  com o plano  $\delta$ .

#### Determinação das projeções da reta $p$

Já temos um ponto para definir a reta  $p$  -- o ponto  $I$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ .

A reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal) e, por isso, a perpendicularidade entre a reta  $h$  e a reta  $p$  é direta em projeção horizontal -- as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). A perpendicularidade entre as duas retas já está garantida.

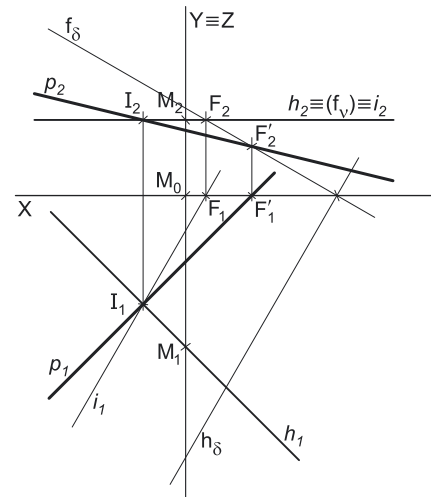
Por outro lado, e porque a reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\delta$  (é pedido no enunciado), o seu traço frontal (o ponto  $F$ ) tem de estar sobre o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ). Assim, determinou-se o ponto  $F'$ , o traço frontal da reta  $p$ , sobre o traço frontal do plano  $\delta$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ .

A reta  $p$  está definida por dois pontos -- o ponto  $I$  e o seu traço frontal (o ponto  $F'$ ). Este raciocínio permitiu-nos desenhar  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), passando por  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) e por  $F'_2$  (a projeção frontal do ponto  $F'$ ).

A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, é a reta do plano  $\delta$  que é perpendicular à reta  $h$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\delta$  e as projeções da reta  $h$ ) representaram-se a médio, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a forte, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a leve, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $i$  ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



**103.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $f$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados.

**Resolução:**

É pedida uma reta  $p$ , perpendicular à reta  $f$  e pertencente ao plano  $\rho$ . Para que a reta  $p$  seja perpendicular à reta  $f$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, há que determinar uma reta do plano  $\rho$  que seja ortogonal à reta  $f$  e concorrente com a reta  $f$  (retas perpendiculares são retas ortogonais que são concorrentes).

O ponto de concorrência da reta  $f$  com a reta  $p$  é um ponto que pertence às duas retas, pelo que é necessariamente um ponto que pertence à reta  $f$  e pertencerá também ao plano  $\rho$  (pois pertencerá a uma reta do plano – a reta  $p$ ). Conclui-se, assim, que o ponto de concorrência entre as duas retas é indubitavelmente o ponto de interseção da reta  $h$  com o plano  $\delta$ . Nesse sentido, há que determinar previamente o ponto de interseção da reta  $h$  com o plano  $\delta$  – o ponto  $I$ .

Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

**Determinação do ponto de interseção da reta  $f$  com o plano  $\rho$ :**

É pedido um ponto – o ponto de interseção entre a reta  $f$  e o plano  $\rho$ . O ponto de interseção entre uma reta e um plano é um ponto que pertence simultaneamente à reta e ao plano. **Nem a reta nem o plano são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao método geral da interseção de retas com planos, que se executa em três etapas.

- 1. Conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha.** Pela reta  $f$  conduziu-se um plano auxiliar (o plano  $\theta$  que é um plano projetante frontal), que a contém – o plano  $\theta$  é um plano de topo e é o plano projetante frontal da reta  $f$ .
- 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos.** Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano auxiliar) com o plano  $\rho$  – a reta  $i$  é uma reta oblíqua do plano  $\rho$  e está definida por dois pontos (os pontos  $F$  e  $H$ , os seus traços).
- 3. O ponto de concorrência das retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.** O ponto de concorrência (ou de interseção) da reta  $i$  com a reta  $f$  é o ponto  $I$  e é o ponto de interseção da reta  $f$  como plano  $\rho$ .

**Determinação das projeções da reta  $p$** 

Já temos um ponto para definir a reta  $p$  – o ponto  $I$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ .

A reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal) e, por isso, a perpendicularidade entre a reta  $f$  e a reta  $p$  é direta em projeção frontal – as projeções frontais das duas retas são perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). A perpendicularidade entre as duas retas já está garantida.

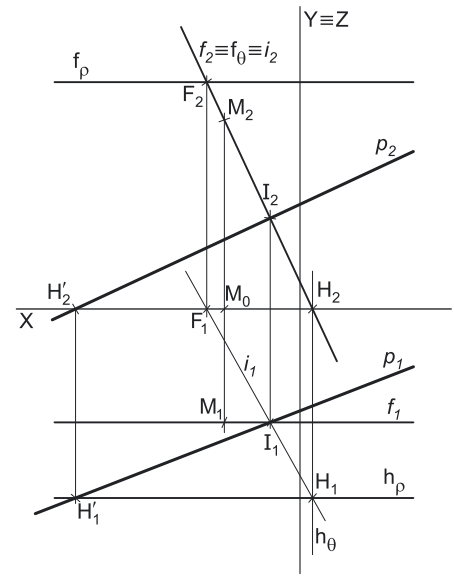
Por outro lado, e porque a reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\rho$  (é pedido no enunciado), o seu traço horizontal (o ponto  $H'$ ) tem de estar sobre o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). Assim, determinou-se o ponto  $H'$ , o traço horizontal da reta  $p$ , sobre o traço horizontal do plano  $\rho$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ .

A reta  $p$  está definida por dois pontos – o ponto  $I$  e o seu traço horizontal (o ponto  $H'$ ). Este raciocínio permitiu-nos desenhar  $p_2$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ), passando por  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) e por  $H'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H'$ ).

A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, é a reta do plano  $\rho$  que é perpendicular à reta  $f$ .

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\rho$  e as projeções da reta  $f$ ) representaram-se a médio, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a forte, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a leve, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\theta$  e da reta  $i$ ).

**104.**

A afirmação é falsa. Uma reta é ortogonal a um plano se e só se for ortogonal a duas retas concorrentes do plano. Um exemplo da falsidade da afirmação pode ser a situação do exercício 96., por exemplo – a reta  $r$  é ortogonal (e perpendicular) a duas retas do plano  $\alpha$  (a reta  $h$  e  $h_\alpha$ , o traço horizontal do plano) mas, no entanto, a reta  $r$  não é ortogonal ao plano mas, sim, pertence ao plano. Tal deve-se ao facto de as retas  $h$  e  $h_\alpha$  serem duas retas paralelas do plano  $\alpha$  e não duas retas concorrentes e, dessa forma, apesar de a reta  $r$  ser ortogonal (perpendicular) a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ , a reta  $r$  não é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

**105.**

**Crítério de ortogonalidade entre retas e planos:** uma reta é ortogonal a um plano se e só se for ortogonal a duas retas concorrentes desse plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha. De forma inversa, um plano é ortogonal a uma reta se e só se o plano contiver duas retas concorrentes ortogonais à reta dada, ou seja, se o plano contiver duas «famílias» de retas ortogonais à reta dada.



## 106.

A afirmação é **verdadeira**. Segundo o **teorema da ortogonalidade entre retas e planos**, uma reta ortogonal a um plano é ortogonal a **todas** as retas desse plano. Assim, uma vez que os traços de um plano são duas retas desse plano, qualquer reta ortogonal a esse plano é necessariamente ortogonal aos traços do plano.

Sublinha-se, no entanto, que a situação inversa é **falsa** – uma reta ortogonal aos traços de um plano **não é necessariamente** ortogonal a esse plano.

## 107.

**Teorema da ortogonalidade entre retas e planos:** uma reta ortogonal a um plano é necessariamente ortogonal ou perpendicular a toda e reta pertence a esse plano. De forma inversa, se um plano é ortogonal a uma reta, toda e qualquer reta desse plano é ortogonal ou perpendicular à reta dada.

## 108.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $v$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

Pretende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $v$  e passando pelo ponto **P**. Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

O plano  $v$  é um plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a reta  $p$ , sendo ortogonal ao plano  $v$ , é igualmente ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que é necessariamente uma **reta vertical** (uma **reta projetante horizontal**) – já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $p$ .

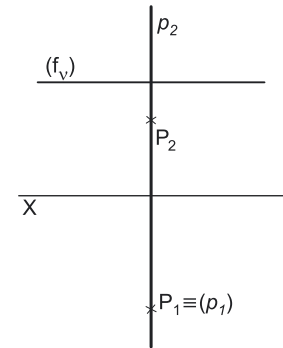
A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto **P**) e pela sua direção (é uma reta vertical).

Nesse sentido, representou-se a reta  $p$  pelas suas projeções, passando pelo ponto **P**. A projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) reduz-se a um ponto, coincidente com a projeção horizontal do ponto **P** ( $P_1$ ), o que se identificou devidamente, com o recurso a parêntesis.

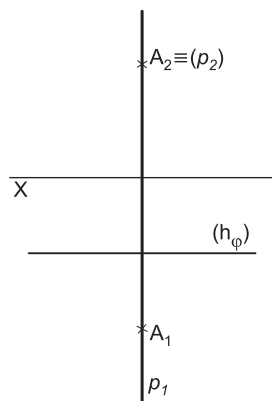
Tenha em conta que se poderia ter determinado a reta  $p$  a partir do **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos** – nesse sentido, a reta  $p$  teria ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $v$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $v$ ). O plano  $v$  é um plano horizontal (de nível), pelo que contém **todas as direções** das retas horizontais (de nível). Dessa forma, a reta  $p$  seria uma reta qualquer, ortogonal a duas retas horizontais (de nível) quaisquer, concorrentes – por isso mesmo, concluir-se-ia igualmente que a reta  $p$  é **necessariamente** uma **reta vertical**.

### Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano  $v$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício).



## 109.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

Pretende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\varphi$  e passando pelo ponto **P**. Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

O plano  $\varphi$  é um plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a reta  $p$ , sendo ortogonal ao plano  $\varphi$ , é igualmente ortogonal ao Plano Frontal de Projeção, pelo que é necessariamente uma **reta de topo** (uma **reta projetante frontal**) – já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $p$ .

A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto **P**) e pela sua direção (é uma reta de topo).

Nesse sentido, representou-se a reta  $p$  pelas suas projeções, passando pelo ponto **P**. A projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) reduz-se a um ponto, coincidente com a projeção frontal do ponto **P** ( $P_2$ ), o que se identificou devidamente, com o recurso a parêntesis.

Tenha em conta que se poderia ter determinado a reta  $p$  a partir do **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos** – nesse sentido, a reta  $p$  teria ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\varphi$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\varphi$ ). O plano  $\varphi$  é um plano frontal (de frente), pelo que contém **todas as direções** das retas frontais (de frente). Dessa forma, a reta  $p$  seria uma reta qualquer, ortogonal a duas retas frontais (de frente) quaisquer, concorrentes – por isso mesmo, concluir-se-ia igualmente que a reta  $p$  é **necessariamente** uma **reta de topo**.

### Traçado:

Os dados (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício).

**110.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados.

**Resolução:**

Pretende-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\gamma$  e passando pelo ponto **P**. Para definirmos a reta **p** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** tem de conter o ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **p** – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta **p** tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\gamma$ , ou seja, a reta **p** tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\gamma$  (a reta **p** tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\gamma$ ).

O traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ) é uma reta vertical do plano  $\gamma$  (um caso particular das retas frontais), ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção (neste caso,  $f_\gamma$  é uma reta contida no próprio Plano Frontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta **p** e o traço frontal do plano ( $f_\gamma$ ) é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto **P**) conduziu-se  $p_2$  (a projeção frontal da reta **p**), perpendicular a  $f_\gamma$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta **p** já é ortogonal a uma «família» de retas do plano  $\gamma$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\gamma$  (as retas verticais do plano  $\gamma$ ).

Para garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\gamma$  é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta **p** a outra «família» de retas do plano  $\gamma$ .

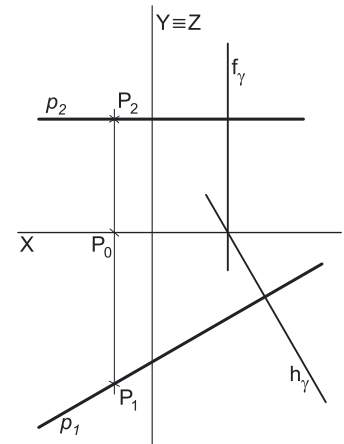
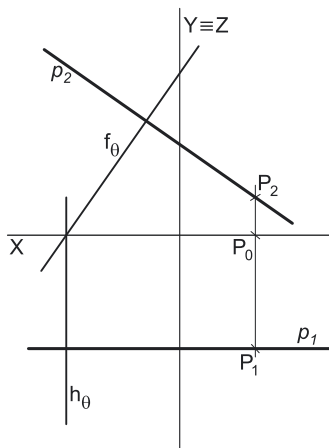
O traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ) é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\gamma$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (neste caso,  $h_\gamma$  é uma reta contida no próprio Plano Horizontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta **p** e o traço horizontal do plano ( $h_\gamma$ ) é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto **P**) conduziu-se  $p_1$  (a projeção horizontal da reta **p**), perpendicular a  $h_\gamma$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta **p** já é ortogonal a outra «família» de retas do plano  $\gamma$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\gamma$ .

A reta **p** é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\gamma$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta **p**, representada pelas suas projeções, contém o ponto **P** e é ortogonal ao plano  $\gamma$ , conforme era pedido.

A reta **p** é uma **reta horizontal (de nível)**, pois é paralela ao Plano Horizontal de Projeção (todos os seus pontos têm a mesma cota).

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\gamma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **p** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

**111.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados.

**Resolução:**

Pretende-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\theta$  e passando pelo ponto **P**. Para definirmos a reta **p** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** tem de conter o ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **p** – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta **p** tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\theta$ , ou seja, a reta **p** tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\theta$  (a reta **p** tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\theta$ ).

O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) é uma reta de topo do plano  $\theta$  (um caso particular das retas horizontais), ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (neste caso,  $h_\theta$  é uma reta contida no próprio Plano Horizontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta **p** e o traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ) é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto **P**) conduziu-se  $p_1$  (a projeção horizontal da reta **p**), perpendicular a  $h_\theta$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta **p** já é ortogonal a uma «família» de retas do plano  $\theta$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\theta$  (as retas de topo do plano  $\theta$ ).

Para garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\theta$  é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta **p** a outra «família» de retas do plano  $\theta$ .

O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção (neste caso,  $f_\theta$  é uma reta contida no próprio Plano Frontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta **p** e o traço frontal do plano ( $f_\theta$ ) é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto **P**) conduziu-se  $p_2$  (a projeção frontal da reta **p**), perpendicular a  $f_\theta$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta **p** já é ortogonal a outra «família» de retas do plano  $\theta$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\theta$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $p$  é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\theta$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, contém o ponto  $P$  e é ortogonal ao plano  $\theta$ , conforme era pedido.

A reta  $p$  é uma **reta frontal (de frente)**, pois é paralela ao Plano Frontal de Projeção (todos os seus pontos têm o mesmo afastamento).

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 112.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\pi$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\pi$  e passando pelo ponto  $A$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto  $a$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\pi$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\pi$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\pi$ ).

O traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$  (um caso particular das retas frontais), ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção (neste caso,  $f_\pi$  é uma reta contida no próprio Plano Frontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ) é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ) conduziu-se  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $f_\pi$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta  $p$  já é ortogonal a uma «família» de retas do plano  $\pi$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\pi$  (as retas verticais do plano  $\pi$ ).

Para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\pi$  é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta  $p$  a outra «família» de retas do plano  $\pi$ .

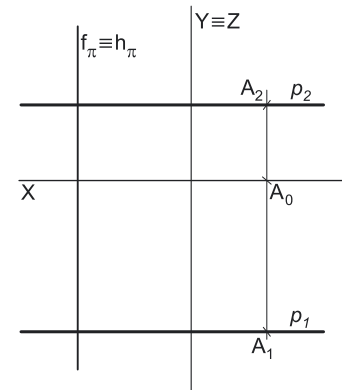
O traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  (um caso particular das retas horizontais), ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (neste caso,  $h_\pi$  é uma reta contida no próprio Plano Horizontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o traço horizontal do plano ( $h_\pi$ ) é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) conduziu-se  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $h_\pi$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta  $p$  já é ortogonal a outra «família» de retas do plano  $\pi$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\pi$  (as retas de topo do plano  $\pi$ ).

A reta  $p$  é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\pi$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, contém o ponto  $P$  e é ortogonal ao plano  $\pi$ , conforme era pedido.

A reta  $p$  é uma **reta fronto-horizontal**, pois é paralela aos dois planos de projeção (todos os seus pontos têm o mesmo afastamento e a mesma cota).

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\pi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 113.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\alpha$  e passando pelo ponto **P**. Para definirmos a reta **p** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** tem de conter o ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **p** – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta **p** tem de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta **p** tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (a reta **p** tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\alpha$ ).

O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção (neste caso, é uma reta que está contida no próprio Plano Frontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta **p** e o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por **P**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **P**) conduziu-se **p**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **p**), perpendicular a  $f_\alpha$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta **p** já é ortogonal a uma «família» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$ .

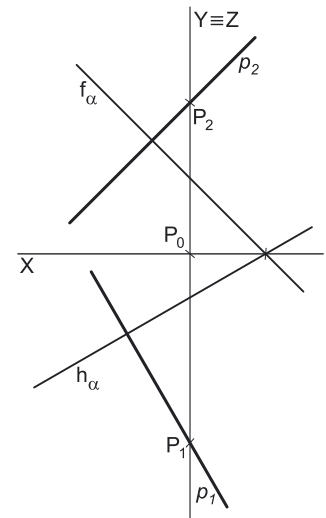
Para garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\alpha$  é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta **p** a outra «família» de retas do plano  $\alpha$ .

O traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (neste caso, é uma reta que está contida no próprio Plano Horizontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta **p** e o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por **P**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **P**) conduziu-se **p**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **p**), perpendicular a  $h_\alpha$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta **p** já é ortogonal a outra «família» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ .

A reta **p** é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta **p**, representada pelas suas projeções, contém o ponto **P** e é ortogonal ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **p** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).



## 114.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados.

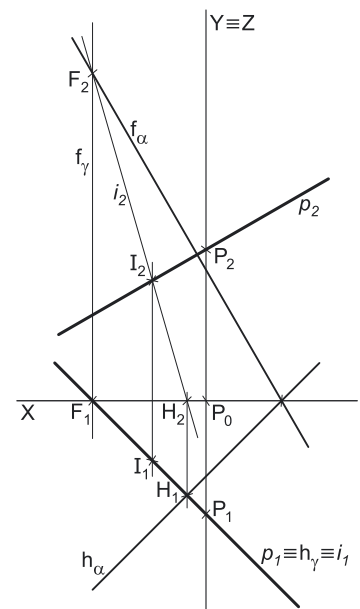
a) Pretende-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\alpha$  e passando pelo ponto **P**. Para definirmos a reta **p** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** tem de conter o ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **p** – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta **p** tem de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta **p** tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (a reta **p** tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\alpha$ ).

O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção (que, neste caso, está contida no próprio Plano Frontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta **p** e o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por **P**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **P**) conduziu-se **p**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **p**), perpendicular a  $f_\alpha$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta **p** já é ortogonal a uma «família» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$ .

Para garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\alpha$  é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta **p** a outra «família» de retas do plano  $\alpha$ .

O traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (que, neste caso, está contida no próprio Plano Horizontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta **p** e o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por **P**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **P**) conduziu-se **p**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **p**), perpendicular a  $h_\alpha$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta **p** já é ortogonal a outra «família» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $p$  é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, contém o ponto  $P$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

b) E pedido um ponto – o ponto de interseção entre a reta  $p$  e o plano  $\alpha$ . O ponto de interseção entre uma reta e um plano é um ponto que pertence simultaneamente à reta e ao plano. **Nem a reta nem o plano são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executa em três etapas.

1. **Conduz-se, pela reta dada, um plano auxiliar que a contenha.** Pela reta  $p$  conduziu-se um plano auxiliar (o plano  $\gamma$  que é um plano projetante horizontal), que a contém – o plano  $\gamma$  é um plano vertical e é o plano projetante horizontal da reta  $p$ .

2. **Determina-se a reta de interseção entre os dois planos.** Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  – a reta  $i$  é uma reta oblíqua do plano  $\alpha$  e está definida por dois pontos (os pontos  $F$  e  $H$ , os seus traços).

3. **O ponto de concorrência das retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.** O ponto de concorrência (ou de interseção) da reta  $i$  com a reta  $p$  é o ponto  $I$  e é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é parte do pedido (é um dos objetivos do exercício). A outra parte do pedido é um ponto, pelo que esta parte do pedido não tem qualquer representação a **forte** (as linhas de chamada são sempre a **leve**). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\gamma$ , da reta  $i$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 115.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O ponto  $A$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

### Resolução:

#### Determinação das projeções da reta $r$ :

Pretende-se uma reta  $r$ , ortogonal ao plano  $\theta$  e passando pelo ponto  $A$ . Para definirmos a reta  $r$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $r$  tem de conter o ponto  $A$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $r$  tem de verificar o **critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\theta$ , ou seja, a reta  $r$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\theta$  (a reta  $r$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\theta$ ).

O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção (neste caso, é uma reta que está contida no próprio Plano Frontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta  $r$  e o traço frontal do plano ( $f_\theta$ ) é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ) conduziu-se  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), perpendicular a  $f_\theta$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta  $r$  já é ortogonal a uma «família» de retas do plano  $\theta$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\theta$ .

Para garantir a ortogonalidade da reta  $r$  em relação ao plano  $\theta$  é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta  $r$  a outra «família» de retas do plano  $\alpha$ .

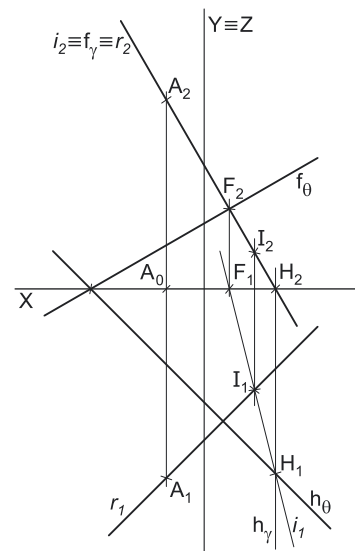
O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (neste caso, e uma reta que está contida no próprio Plano Horizontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta  $r$  e o traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ) é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) conduziu-se  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ), perpendicular a  $h_\theta$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta  $r$  já é ortogonal a outra «família» de retas do plano  $\theta$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\theta$ .

A reta  $r$  é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\theta$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta  $r$ , representada pelas suas projeções, contém o ponto  $A$  e é ortogonal ao plano  $\theta$ .

#### Determinação das projeções do ponto $I$ :

E pedido um ponto – o ponto de interseção entre a reta  $r$  e o plano  $\theta$ . O ponto de interseção entre uma reta e um plano é um ponto que pertence simultaneamente à reta e ao plano. **Nem a reta nem o plano são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executa em três etapas.

1. **Conduz-se, pela reta dada, um plano auxiliar que a contenha.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano auxiliar (o plano  $\gamma$  que é um plano projetante frontal), que a contém – o plano  $\gamma$  é um plano de topo e é o plano projetante frontal da reta  $r$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos.** Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\theta$  – a reta  $i$  é uma reta oblíqua do plano  $\theta$  e está definida por dois pontos (os pontos  $F$  e  $H$ , os seus traços).

**3. O ponto de concorrência das retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.** O ponto de concorrência (ou de interseção) da reta  $i$  com a reta  $r$  é o ponto  $I$  e é o ponto de interseção da reta  $r$  como plano  $\theta$ .

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $r$ , apesar de terem sido determinadas na **resolução** integram os dados ver enunciado), pelo que se representaram igualmente a **médio**. O pedido é um ponto, pelo que, neste exercício, não existe qualquer representação a **forte** (as linhas de chamada são sempre a **leve**). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\gamma$ , da reta  $i$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 116.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto  $P$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. Sublinha-se que os traços do plano  $\delta$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção, pois, **no espaço**, os dois traços de um plano nunca estão coincidentes (a menos que se trate de um plano passante).

**Resolução:**

Pretende-se uma reta  $r$ , ortogonal ao plano  $\delta$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definirmos a reta  $r$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $r$  tem de conter o ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $r$  tem de verificar o **CrITÉRIO de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\delta$ , ou seja, a reta  $r$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (a reta  $r$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\delta$ ).

O traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ) é uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção (neste caso, é uma reta que está contida no próprio Plano Frontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta  $r$  e o traço frontal do plano ( $f_\delta$ ) é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ) conduziu-se  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), perpendicular a  $f_\delta$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta  $r$  já é ortogonal a uma «família» de retas do plano  $\delta$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\delta$ .

Para garantir a ortogonalidade da reta  $r$  em relação ao plano  $\delta$  é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta  $r$  a outra «família» de retas do plano  $\delta$ .

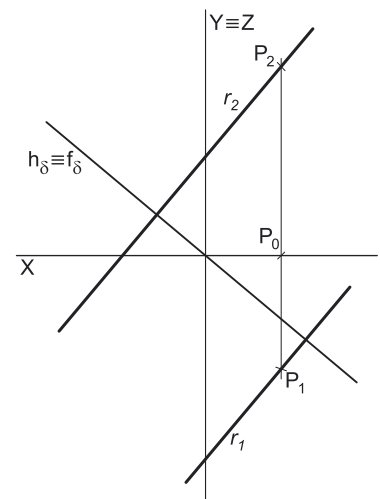
O traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ) é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (neste caso, é uma reta que está contida no próprio Plano Horizontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta  $r$  e o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ) é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) conduziu-se  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ), perpendicular a  $h_\delta$ . Este procedimento garantiu-nos que a reta  $r$  já é ortogonal a outra «família» de retas do plano  $\delta$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\delta$ .

A reta  $r$  é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\delta$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta  $r$ , representada pelas suas projeções, contém o ponto  $P$  e é ortogonal ao plano  $\delta$ , conforme era pedido.

Note que a reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pelo que a reta  $r$  é uma reta **paralela ao  $\beta_{2/4}$** .

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $r$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 117.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P** e a reta **f**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção frontal da reta **h** (**h**<sub>2</sub>), paralela ao eixo **X** e em função da sua cota. Atendendo a que as retas **h** e **f** são concorrentes, determinou-se o ponto de concorrência das duas retas (o ponto **N**), a partir da sua projeção frontal. Por fim, determinou-se o ponto **F** (o traço frontal da reta **h**), a partir da sua abcissa, o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta **h** (**h**<sub>1</sub>). A reta **h** está definida por dois pontos – os pontos **N** e **F**. O plano  $\alpha$  está representado pelas projeções das retas **h** e **f**.

### Resolução:

Pretende-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\alpha$  e passando pelo ponto **P**. Para definirmos a reta **p** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** tem de conter o ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **p** – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta **p** tem de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta **p** tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (a reta **p** tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\alpha$ ).

A reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção – assim, a ortogonalidade entre a reta **p** e a reta **f** é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por **P**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **P**) conduziu-se **p**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **p**), perpendicular a **f**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **f**). Este procedimento garantiu-nos que a reta **p** já é ortogonal a uma «família» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$ .

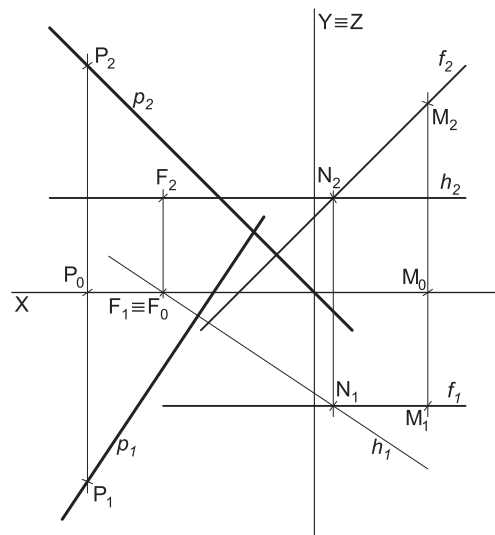
Para garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\alpha$  é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta **p** a outra «família» de retas do plano  $\alpha$ .

A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção – assim, a ortogonalidade entre a reta **p** e a reta **h** é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por **P**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **P**) conduziu-se **p**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **p**), perpendicular a **h**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **h**). Este procedimento garantiu-nos que a reta **p** já é ortogonal a outra «família» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ .

A reta **p** é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta **p**, representada pelas suas projeções, contém o ponto **P** e é ortogonal ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas **h** e **f**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **p** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).



## 118.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B**, **C** e **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O plano  $\gamma$  está representado pelas projeções dos pontos **A**, **B** e **C**.

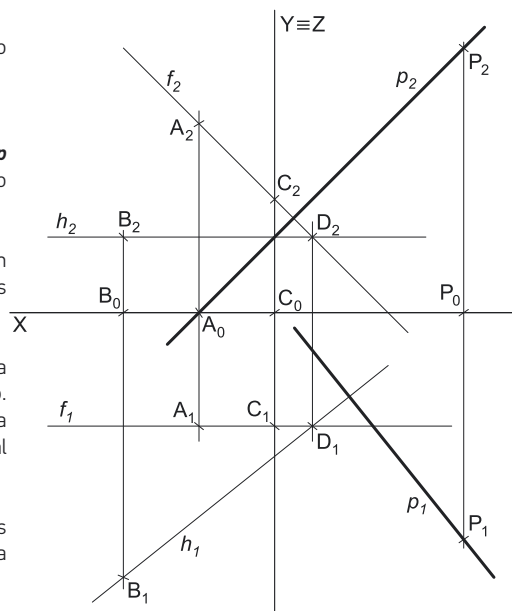
### Resolução:

Pretende-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\gamma$  e passando pelo ponto **P**. Para definirmos a reta **p** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** tem de conter o ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **p** – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta **p** tem de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\gamma$ , ou seja, a reta **p** tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\gamma$  (a reta **p** tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\gamma$ ).

Os dados do plano são insuficientes para definir a reta **p**, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou uma direção. Por outro lado, para que a ortogonalidade entre a reta **p** e essa reta auxiliar do plano  $\gamma$  seja direta numa das projeções, essa reta auxiliar deverá ser uma reta horizontal (paralela ao Plano Horizontal de Projeção) ou uma reta frontal (paralela ao Plano Frontal de Projeção).

Recorreu-se à reta **f** como reta auxiliar do plano. A reta **f** está definida por dois pontos (os pontos **A** e **C**, dados no enunciado) e é uma reta frontal (de frente) do plano  $\gamma$ , pois os dois pontos que a definem (os pontos **A** e **C**) têm o mesmo afastamento.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\gamma$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção – assim, a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $f$  é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ) conduziu-se  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Este procedimento garantiu-nos que a reta  $p$  já é ortogonal a uma «família» de retas do plano  $\gamma$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\gamma$ .

Para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\gamma$  é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta  $p$  a outra «família» de retas do plano  $\gamma$ .

Os dados do plano são ainda insuficientes para definir a reta  $p$ , pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou uma direção. Essa outra reta auxiliar tem de garantir que se verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** e tem ainda de permitir que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e essa reta auxiliar do plano  $\gamma$  seja direta numa das projeções. Essa reta terá de ser uma reta horizontal (de nível) do plano  $\gamma$ , pois é a única situação em é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $p$  e uma reta que seja **concorrente** com a reta  $f$ .

Recorreu-se à reta  $h$  como reta auxiliar do plano. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) e está definida por dois pontos – o ponto  $B$  (dado no enunciado) e o ponto  $D$  (o seu ponto de concorrência co a reta  $f$ ).

A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\gamma$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção – assim, a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $h$  é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) conduziu-se  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). Este procedimento garantiu-nos que a reta  $p$  já é ortogonal a outra «família» de retas do plano  $\gamma$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\gamma$ .

A reta  $p$  é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\gamma$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, contém o ponto  $P$  e é ortogonal ao plano  $\gamma$ , conforme era pedido.

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os dados são pontos, pelo que os dados foram representados a **leve**. As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $h$  e  $f$  e, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 119.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$  e  $P$ , bem como a reta  $h$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. O plano  $\alpha$  está representado pelas projeções da reta  $h$  e do ponto  $A$ . A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $M$ ) e por uma direção (a direção dada no enunciado).

#### Resolução:

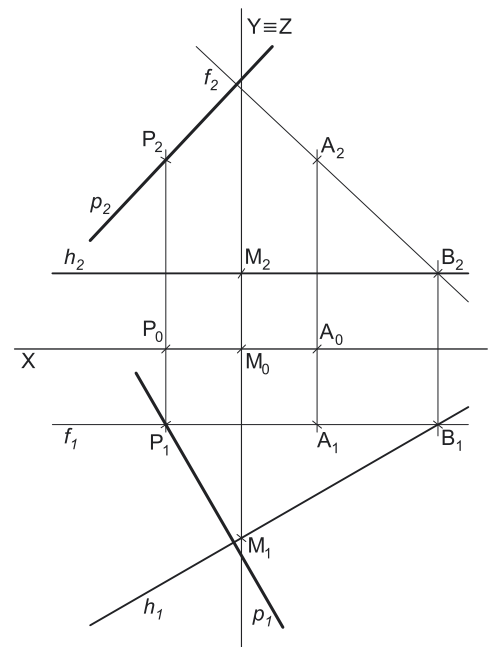
Pretende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\alpha$ ).

A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção – assim, a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $h$  é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) conduziu-se  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). Este procedimento garantiu-nos que a reta  $p$  já é ortogonal a uma «família» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ .

Para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$  é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta  $p$  a outra «família» de retas do plano  $\alpha$ .

Os dados do plano são insuficientes para definir a reta  $p$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou uma direção. Essa reta auxiliar tem de garantir que se verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** e tem ainda de permitir que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e essa reta auxiliar do plano  $\alpha$  seja direta numa das projeções. Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , pois é a única situação em é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $p$  e uma reta que seja **concorrente** com a reta  $h$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Recorreu-se à reta  $f$  como reta auxiliar do plano. A reta  $f$  está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (dado no enunciado) e o ponto  $B$  (o ponto de concorrência da reta  $f$  com a reta  $h$ ). A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção – assim, a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $f$  é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ) conduziu-se  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Este procedimento garantiu-nos que a reta  $p$  é ortogonal a outra «família» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$ .

A reta  $p$  é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, contém o ponto  $P$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $f$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 120.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $R$  e  $P$ , bem como a reta  $f$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. O plano  $\alpha$  está representado pelas projeções da reta  $f$  e do ponto  $R$ . A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (a direção dada no enunciado).

### Resolução:

Pretende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\theta$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **CrITÉRIO de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\theta$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\theta$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\theta$ ).

A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção – assim, a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $f$  é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ) conduziu-se  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Este procedimento garantiu-nos que a reta  $p$  já é ortogonal a uma «família» de retas do plano  $\theta$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\theta$ .

Para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\theta$  é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta  $p$  a outra «família» de retas do plano  $\alpha$ .

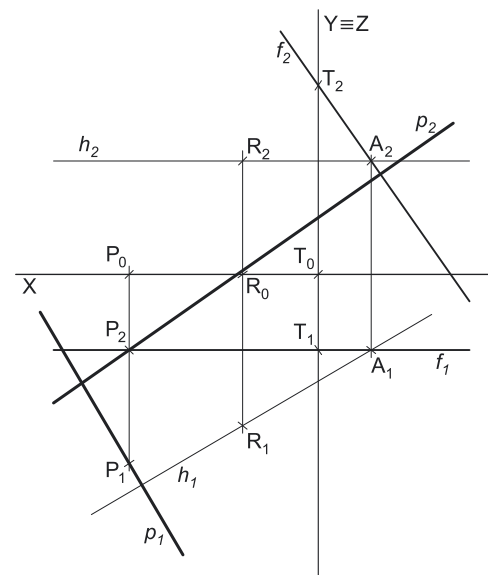
Os dados do plano são insuficientes para definir a reta  $p$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, esta que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou uma direção. Essa reta auxiliar tem de garantir que se verifica o **CrITÉRIO de ortogonalidade entre retas e planos** e tem ainda de permitir que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e essa reta auxiliar do plano  $\theta$  seja direta numa das projeções. Essa reta terá de ser uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$ , pois é a única situação em que é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $p$  e uma reta que seja **concorrente** com a reta  $f$ .

Recorreu-se à reta  $h$  como reta auxiliar do plano. A reta  $h$  está definida por dois pontos – o ponto  $R$  (dado no enunciado) e o ponto  $A$  (o ponto de concorrência da reta  $h$  com a reta  $f$ ). A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção – assim, a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $h$  é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) conduziu-se  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). Este procedimento garantiu-nos que a reta  $p$  é ortogonal a outra «família» de retas do plano  $\theta$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\theta$ .

A reta  $p$  é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\theta$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, contém o ponto  $P$  e é ortogonal ao plano  $\theta$ , conforme era pedido.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $h$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 121.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $a$  e  $b$ , bem como o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto  $P$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm as coordenadas iguais e as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). O plano  $\delta$  está representado pelas projeções das retas  $a$  e  $b$  – as retas que definem o plano.

**Resolução:**

Pretende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\delta$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **CrITÉRIO de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\delta$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\delta$ ).

Tendo em conta que a ortogonalidade entre retas só é direta se uma das retas for paralela a um dos planos de projeção (o que não é o caso, pois tanto a reta  $a$  como a reta  $b$  são retas oblíquas), conclui-se que os dados do plano são insuficientes para definir a reta  $p$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou uma direção. Para que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e essa reta auxiliar do plano  $\delta$  seja direta numa das projeções, essa reta auxiliar deverá ser uma reta horizontal (paralela ao Plano Horizontal de Projeção) ou uma reta frontal (paralela ao Plano Frontal de Projeção).

Recorreu-se à reta  $f$  como reta auxiliar do plano. A reta  $f$  está definida por dois pontos – o ponto  $B$  (o seu ponto de concorrência com a reta  $b$ ) e o ponto  $C$  (o seu ponto de concorrência com a reta  $a$ ).

A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção – assim, a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $f$  é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ) conduziu-se  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Este procedimento garantiu-nos que a reta  $p$  já é ortogonal a uma «família» de retas do plano  $\delta$  – a «família» das retas frontais (de frente) do plano  $\delta$ .

Para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\delta$  é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta  $p$  a outra «família» de retas do plano  $\delta$ .

Os dados do plano são ainda insuficientes para definir a reta  $p$ , pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou uma direção. Essa outra reta auxiliar tem de garantir que se verifica o **CrITÉRIO de ortogonalidade entre retas e planos** e tem ainda de permitir que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e essa reta auxiliar do plano  $\delta$  seja direta numa das projeções. Assim, essa reta terá de ser uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , pois é a única situação em que é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $p$  e uma reta que seja **concorrente** com a reta  $f$ .

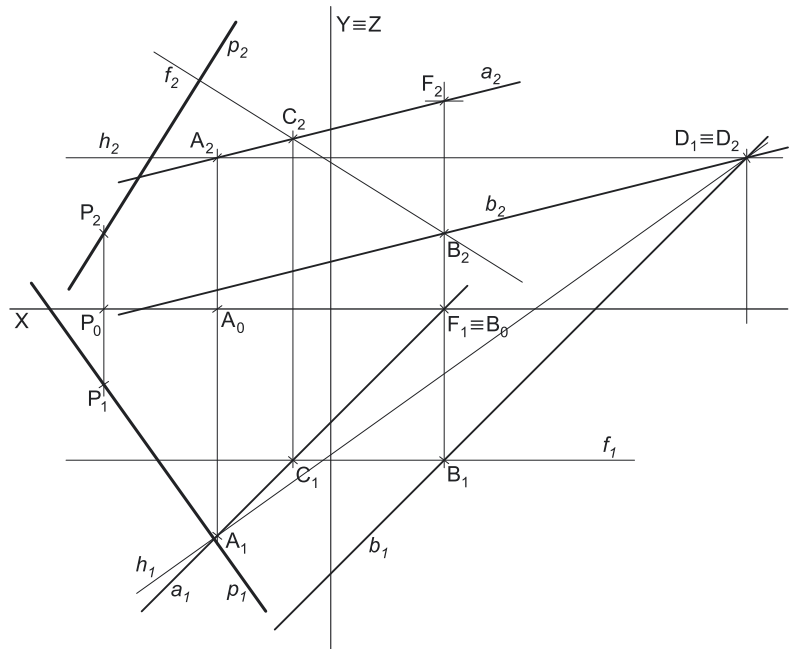
Recorreu-se à reta  $h$  como reta auxiliar do plano. A reta  $h$  está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o seu ponto de concorrência com a reta  $a$ ) e o ponto  $D$  (o seu ponto de concorrência com a reta  $b$ ).

A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção – assim, a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $h$  é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) conduziu-se  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). Este procedimento garantiu-nos que a reta  $p$  já é ortogonal a outra «família» de retas do plano  $\delta$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano  $\delta$ .

A reta  $p$  é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\delta$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, contém o ponto  $P$  e é ortogonal ao plano  $\delta$ , conforme era pedido.

**Traçado:**

Os dados (as projeções das retas  $a$  e  $b$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $f$  e  $h$  e, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 122.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, e o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ ).

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizontal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $P$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $P$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

Assim, recorreu-se a uma reta  $p'$ , de perfil, pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $p'$  está definida pelos seus traços (os pontos  $F$  e  $H$ ). A reta  $p'$  pertence ao plano  $\rho$ , porque verifica a **Condição para que uma reta pertença a um plano**, em relação ao plano  $\rho$ . Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta  $p'$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $p$ .

A reta  $p'$  é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas  $p$  e  $p'$ . Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas do plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_{\pi}$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se os pontos  $F$ ,  $H$  e  $P$ . Em seguida, desenhou-se  $p'_r$ , que passa por  $F_r$  e por  $H_r$  (a reta  $p'_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $F_r$  e  $H_r$ ). Tenha em conta que o ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r \equiv F_2$ .

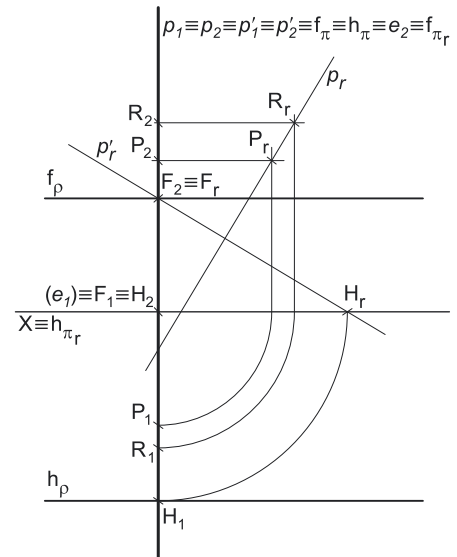
Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , perpendicular a  $p'_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $p'$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta  $p$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$ .

Sobre a reta  $p_r$ , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $R_r$ . O ponto  $R_r$  é, em rebatimento, um ponto  $R$  pertencente à reta  $p$ . Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $R$ . A reta  $p$  (definida pelos pontos  $P$  e  $R$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Tenha em conta que o exercício se poderia ter resolvido com o recurso a uma mudança do diedro de projeção, por exemplo.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$  em rebatimento, bem como de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).



## 123.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, e o ponto  $M$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

**Resolução:**

Pretende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto  $M$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto  $M$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ ).

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $M$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $M$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $M$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

Assim, recorreu-se a uma reta  $p'$ , de perfil, pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $p'$  está definida pelos seus traços (os pontos  $F$  e  $H$ ). A reta  $p'$  pertence ao plano  $\rho$ , porque verifica a **Condição para que uma reta pertença a um plano**, em relação ao plano  $\rho$ . Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta  $p'$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $p$ .

A reta  $p'$  é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas  $p$  e  $p'$ . Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas, o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se os pontos  $F$ ,  $H$  e  $M$ . Em seguida, desenhou-se  $p'_r$ , que passa por  $F_r$  e por  $H_r$  (a reta  $p'_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $F_r$  e  $H_r$ ). Tenha em conta que o ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r \equiv F_2$ .

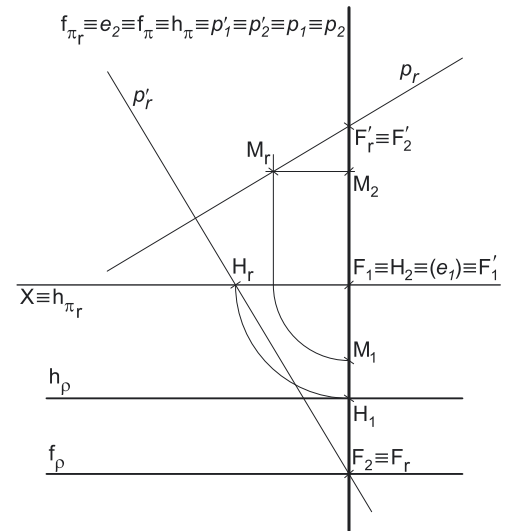
Pelo ponto  $M_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , perpendicular a  $p'_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $p'$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta  $p$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$ .

Sobre a reta  $p_r$  representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $F'_r$ . O ponto  $F'_r$  é, em rebatimento, o traço frontal da reta  $p$ . Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $F'$ , que é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F'_2 \equiv F'_r$ . A reta  $p$  (definida pelos pontos  $M$  e  $F'$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Tenha em conta que o exercício se poderia ter resolvido com o recurso a uma mudança do diedro de projeção, por exemplo.

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$  em rebatimento, bem como de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).



## 124.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, e o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ ).

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $P$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $P$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

Assim, recorreu-se a uma reta  $p'$ , de perfil, pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $p'$  está definida **por um ponto e uma direção**. O ponto que define a reta  $p'$  é o seu traço frontal (o ponto  $F$ ), que se situa sobre o traço frontal do plano ( $f_\rho$ ), para que a reta  $p'$  pertença ao plano  $\rho$ . A direção da reta  $p'$  é dada pelo ângulo que a reta faz com o Plano Horizontal de Projeção, que é igual ao ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção.

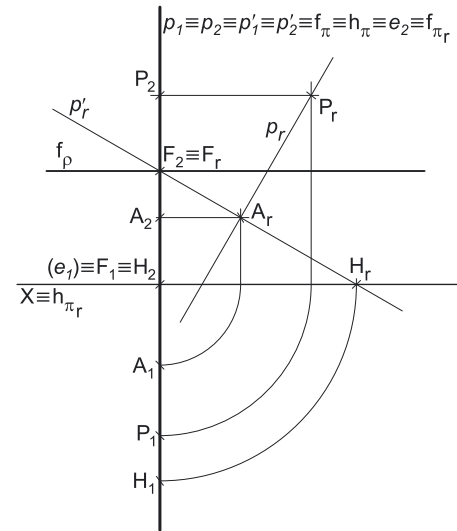
Note que é dado o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção – o plano  $\rho$ , nesta situação, está definido por uma reta (o seu traço frontal) e pela sua orientação. O ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção corresponde ao ângulo que as retas de perfil do plano  $\rho$  fazem com o Plano Horizontal de Projeção. Assim, o ângulo que a reta  $p'$  faz com o Plano Horizontal de Projeção corresponde ao ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano de perfil que contém a reta  $p'$ , que não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas, o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas. Assim, o ângulo que a reta  $p'$  faz com o Plano Horizontal de Projeção é o ângulo que a reta  $p'$  faz com o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ).

Optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). A charneira do rebatimento (o eixo de rotação) é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, procedeu-se ao rebatimento da reta  $p'$ , rebatendo o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $p'$ ). O ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_r \equiv F_2$ . **Em rebatimento**, o ângulo que a reta  $p'$  faz com o traço horizontal do plano ( $h_\pi$ ) já está em verdadeira grandeza, no ângulo entre a reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) e  $h_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$  em rebatimento). Assim, por  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido) conduziu-se  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) fazendo, com  $h_\pi$ , um ângulo de  $30^\circ$  e garantindo-se, ainda, que o traço horizontal da reta  $p'$  tem afastamento positivo (para que o traço horizontal do plano  $\rho$  se situe no **SPHA**). Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de  $F_r$ , aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta  $p'$  em rebatimento –  $H_r$ .  $H_r$  (o traço horizontal da reta  $p$  em rebatimento) está necessariamente sobre  $h_\pi$  –  $H_r$  é o ponto de interseção de  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) com  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  rebatido). As projeções do ponto  $H$  determinam-se invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ . Note que não era necessária a determinação do traço horizontal da reta  $p'$ , pois nada no enunciado nos pede esse ponto – a sua determinação pretendeu, apenas, assegurar que a reta  $p'$  satisfaz pedido no enunciado (o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção). Exatamente por isso mesmo, não se determinou o traço horizontal do plano  $\rho$  – porque não é pedido e também não é necessário.

Em seguida, rebateu-se o ponto  $P$ , o que nos permitiu determinar  $P_r$ . Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , perpendicular a  $p'_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $p'$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta  $p$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Sobre a reta  $p_r$  representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $A_r$ . O ponto  $A$  é o ponto que nos permitirá definir a reta  $p$ . Nesta situação, optou-se por escolher o ponto de interseção das duas retas (as retas  $p$  e  $p'$ ) – o ponto  $A$  é o ponto de concorrência das duas retas ( $p$  e  $p'$ ) e é, assim, o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ , mas poderia ser outro ponto qualquer. Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $A$ . A reta  $p$  (definida pelos pontos  $P$  e  $A$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Tenha em conta que o exercício se poderia ter resolvido com o recurso a uma mudança do diedro de projeção, por exemplo.

#### Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$  em rebatimento, bem como de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).

## 125.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, e o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

#### Resolução:

Pretende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ ).

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizontal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $P$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $P$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

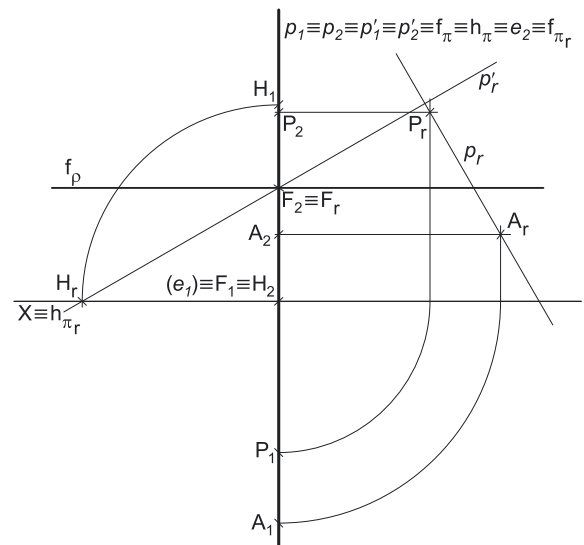
Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

Assim, recorreu-se a uma reta  $p'$ , de perfil, pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $p'$  está definida **por um ponto e uma direção**. O ponto que define a reta  $p'$  é o seu traço frontal (o ponto  $F$ ), que se situa sobre o traço frontal do plano ( $f_p$ ), para que a reta  $p'$  pertença ao plano  $\rho$ . A direção da reta  $p'$  é dada pelo ângulo que a reta faz com o Plano Horizontal de Projeção, que é igual ao ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção.

Note que é dado o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção – o plano  $\rho$ , nesta situação, está definido por uma reta (o seu traço frontal) e pela sua orientação. O ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção corresponde ao ângulo que as retas de perfil do plano  $\rho$  fazem com o Plano Horizontal de Projeção. Assim, o ângulo que a reta  $p'$  faz com o Plano Horizontal de Projeção corresponde ao ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano de perfil que contém a reta  $p'$ , que não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas, o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas. Assim, o ângulo que a reta  $p'$  faz com o Plano Horizontal de Projeção é o ângulo que a reta  $p'$  faz com o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_{\pi}$ ).



(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

Assim, recorreu-se a uma reta  $p'$ , de perfil, pertencente ao plano  $\rho$ . Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta  $p'$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $p$ . Para definirmos a reta  $p'$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p'$  e a reta  $a$  são coplanares (pertencem, ambas, ao plano  $\rho$ ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois as suas projeções (frontais e horizontais) não são paralelas entre si, pelo que as duas retas são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $B$ . Já temos um ponto para definir a reta  $p'$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Os dados do plano  $\rho$  são insuficientes para definir a reta  $p'$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $b$  (uma reta fronto-horizontal), como reta auxiliar do plano  $\rho$ . A reta  $b$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ , dado no enunciado – o ponto que define o plano  $\rho$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). A reta  $p'$  e a reta  $b$  são coplanares (pertencem, ambas, ao plano  $\rho$ ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois as suas projeções (frontais e horizontais) não são paralelas entre si, pelo que as duas retas são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $C$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p'$ .

A reta  $p'$ , definida pelos pontos  $B$  e  $C$ , pertence ao plano  $\rho$ . A reta  $p'$  é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas  $p$  e  $p'$ . Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se os pontos  $B$ ,  $C$  e  $P$ . Em seguida, desenhou-se  $p'_r$ , que passa por  $B_r$  e por  $C_r$  (a reta  $p'_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $B_r$  e  $C_r$ ).

Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , perpendicular a  $p'_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $p'$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta  $p$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$ . Tenha em atenção que, nesta situação particular, a reta  $p$  é uma reta passante.

Sobre a reta  $p_r$  representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $K_r$ . O ponto  $K_r$  é, em rebatimento, um ponto  $K$  pertencente à reta  $p$ . Atendendo a que a reta  $p$  é uma reta passante, o ponto  $K$  é o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ . O ponto  $K$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $K_2 \equiv K_r$ . Por outro lado, porque se trata de um ponto do eixo  $X$ , tem-se imediatamente  $K_1 \equiv K_2 \equiv K_r$ . A reta  $p$  (definida pelos pontos  $P$  e  $K$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Tenha em conta que o exercício se poderia ter resolvido com o recurso a uma mudança do diedro de projeção, por exemplo.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $a$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $b$ , das retas  $p$  e  $p'$  em rebatimento e, ainda, de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).

## 127.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por dois pontos – os seus traços (os pontos  $F$  e  $H$ ). Tenha em conta que o traço horizontal da reta  $r$  (o ponto  $H$ ) é dado, o mesmo não acontecendo com o traço frontal da reta (de uma forma direta). Nesse sentido, o traço frontal da reta  $r$  (o ponto  $F$ ) se determinou a partir da projeção horizontal da reta  $r$  (dada no enunciado) e atendendo à sua cota (igualmente dada no enunciado). Em seguida, desenharam-se os traços do plano  $\rho$ , que são retas fronto-horizontais. O traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e uma direção (é fronto-horizantal). O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ) está igualmente definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e uma direção (é fronto-horizantal).

### Resolução:

Preende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ ).

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $P$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $P$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

Assim, recorreu-se a uma reta  $p'$ , de perfil, pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $p'$  está definida pelos seus traços (os pontos  $F'$  e  $H'$ ). A reta  $p'$  pertence ao plano  $\rho$ , porque verifica a **Condição para que uma reta pertença a um plano**, em relação ao plano  $\rho$ . Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta  $p'$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $p$ .

A reta  $p'$  é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas  $p$  e  $p'$ . Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas do plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se os pontos  $F'$ ,  $H'$  e  $P$ . Em seguida, desenhou-se  $p'_r$ , que passa por  $F'_r$  e por  $H'_r$  (a reta  $p'_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $F'_r$  e  $H'_r$ ). Tenha em conta que o ponto  $F'$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F'_r \equiv F'_2$ .

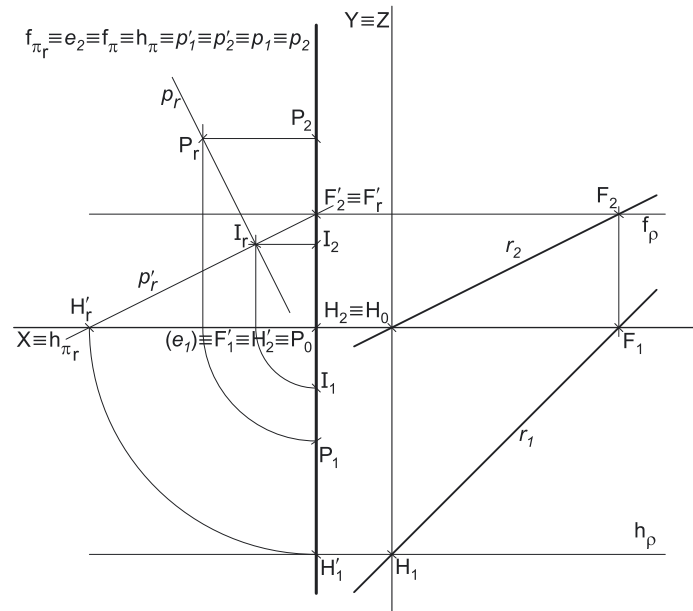
Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , perpendicular a  $p'_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $p'$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta  $p$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$ .

Sobre a reta  $p_r$ , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $I_r$ . O ponto  $I$  é o ponto que nos permitirá definir a reta  $p$ . Nesta situação, optou-se por escolher o ponto de interseção das duas retas (as retas  $p$  e  $p'$ ) – o ponto  $I$  é o ponto de concorrência das duas retas ( $p$  e  $p'$ ) e é, assim, o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ , mas poderia ser outro ponto qualquer. Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $I$ . A reta  $p$  (definida pelos pontos  $P$  e  $I$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Tenha em conta que o exercício se poderia ter resolvido com o recurso a uma mudança do diedro de projeção, por exemplo.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos traços do plano  $\rho$ , das retas  $p$  e  $p'$  em rebatimento e, ainda, de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).





## 129.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O plano passante (o plano  $\rho$ ) está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**.

### Resolução:

Pretende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto **P**. Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ ).

Um plano passante é um plano de rampa, pelo que o plano  $\rho$  contém a «família» das **retas fronto-horizontais**. Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizontal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto **P**. No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto **P** e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto **P**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ .

Salienta-se que as duas situações pendentes acima referidas têm a ver com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  são uma única reta, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo).

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as duas situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade** e, por outro, nesse diedro de projeção teremos dois traços do plano  $\rho$  (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes). Foi este raciocínio que nos justificou o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

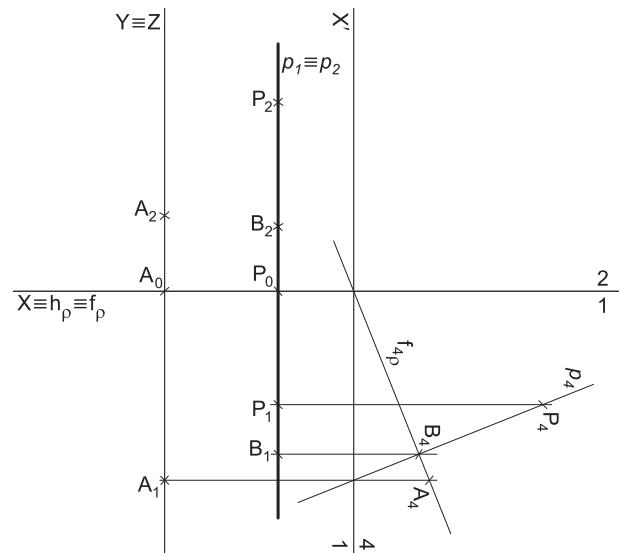
Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo à reta  $p$ , o que nos permite transformar a reta de perfil numa reta frontal (de frente). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo **X'** é paralelo à projeção horizontal da reta ( $p_1$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), pelo que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto **P** no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ . **P<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **P** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve.

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se **A<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **A** no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$  passa por **A<sub>4</sub>** pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta **p** é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $P_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$ .

Para definirmos totalmente a reta **p** em projeções (no diedro de projeção inicial), é necessário um outro ponto da reta. Nesse sentido, determinou-se um ponto **B**, qualquer, da reta **p**, no novo diedro de projeção. A projeção horizontal do ponto **B** ( $B_1$ ) determinou-se de forma direta, no novo diedro de projeção. Tendo em conta que se mantêm as cotas, a projeção frontal do ponto **B** no diedro de projeção inicial ( $B_2$ ) determinou-se em função da sua cota (que se manteve).

A reta **p** (definida pelos pontos **P** e **B**) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ . Tenha em conta que o exercício se poderia ter igualmente resolvido com o recurso ao rebatimento do plano de perfil.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ , que são dados). Os restantes dados são pontos, cujas linhas de chamada se representaram a **leve**. As projeções da reta **p** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 130.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções, em função dos dados, e identificaram-se os traços do plano  $\rho$ , que se situam no eixo **X**.

#### Resolução:

Pretende-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto **P**. Para definirmos a reta **p** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** tem de conter o ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **p** – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta **p** tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta **p** tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (a reta **p** tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ ).

Um plano passante é um plano de rampa, pelo que o plano  $\rho$  contém a «família» das **retas fronto-horizontais**. Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta **p** é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta **p**, de perfil, passando pelo ponto **P**. No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta **p** não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto **P** e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

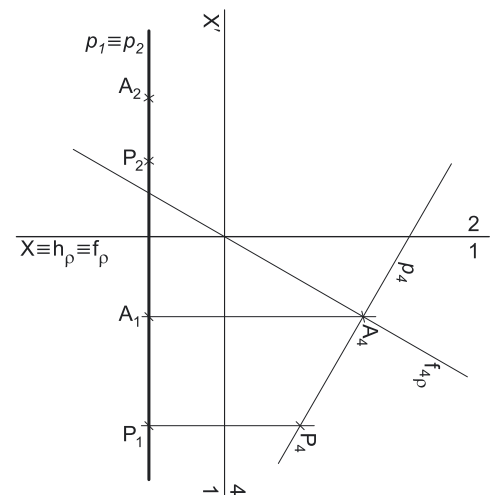
Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **p** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **p**, para além do ponto **P**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  – a reta **p** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ .

Salienta-se que as duas situações pendentes acima referidas têm a ver com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta **p** não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  são uma única reta, o que não nos permite garantir da ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo).

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as duas situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta **p** verificarão o **Critério de Reversibilidade** e, por outro, nesse diedro de projeção teremos dois traços do plano  $\rho$  (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes). Foi este raciocínio que nos justificou o recurso à **mudança do diedro de projeção**.



(continua na página seguinte)







(continuação da página anterior)

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $P$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao  $\beta_{2/4}$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $P$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao  $\beta_{2/4}$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do  $\beta_{2/4}$ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do  $\beta_{2/4}$ .

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta  $p'$ , de perfil, pertencente ao  $\beta_{2/4}$ . Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta  $p'$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $p$ . Para definirmos a reta  $p'$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p'$  é necessariamente uma reta passante (porque é uma reta de perfil de um plano passante), pelo que é concorrente com o eixo  $X$ . Nesse sentido, já temos um ponto para definir a reta  $p'$  – o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  (o ponto  $A$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p'$ . Por outro lado, uma vez que a reta  $p'$  é uma reta do  $\beta_{2/4}$ , sabe-se que a reta faz, com os planos de projeção, ângulos de  $45^\circ$  e que atravessa os  $2^\circ$  e  $4^\circ$  Diedros.

A reta  $p'$ , definida pelo ponto  $A$  e pela sua direção, pertence ao  $\beta_{2/4}$ . A reta  $p'$  é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas  $p$  e  $p'$ . Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo recurso à mudança do diedro de projeção.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo às retas  $p$  e  $p'$ , o que nos permite transformar as duas retas de perfil em retas frontais (de frente). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte: – no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**); – no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo às retas  $p$  e  $p'$ , o eixo  $X'$  é paralelo às projeções horizontais das duas retas ( $p_1$  e  $p'_1$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $P$  e  $A$  no novo plano de projeção (o **plano 4**).  $P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve.  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve (e é nula) –  $A_4$  situa-se necessariamente no eixo  $X'$ .

Em seguida, desenhou-se  $p'_4$ , a projeção da reta  $p'$  no **plano 4** –  $p'_4$  passa por  $A_4$  e faz, com o eixo  $X'$ , ângulos de  $45^\circ$ . Por outro lado, como o  $\beta_{2/4}$  atravessa os  $2^\circ$  e  $4^\circ$  Diedros, e como o ponto  $P$  é um ponto do  $1^\circ$  Diedro, sabe-se que  $p'_4$  não pode passar pelo quadrante em que se situa  $P_4$ . Assim, desenhou-se  $p'_4$ , respeitando todas as premissas apresentadas.

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), as retas  $p$  e  $p'$  são duas retas frontais (paralelas ao **plano 4**), pelo que a ortogonalidade entre as duas retas é direta (no **plano 4**). Assim, por  $P_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $p'_4$  (a projeção da reta  $p'$  no **plano 4**). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do  $\beta_{2/4}$  – a «família» das retas de perfil do  $\beta_{2/4}$ . Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao  $\beta_{2/4}$ .

Para definirmos totalmente a reta  $p$  em projeções (no diedro de projeção inicial), é necessário um outro ponto da reta. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H$ , o traço horizontal da reta  $p$  (o ponto da reta  $p$  que tem cota nula). Note que poderia ser outro ponto qualquer da reta  $p$ . A projeção horizontal do ponto  $H$  ( $H_1$ ) determinou-se de forma direta, no novo diedro de projeção. Tendo em conta que se mantém as cotas, a projeção frontal do ponto  $H$  no diedro de projeção inicial ( $H_2$ ) determinou-se em função da sua cota (que se manteve e é nula) –  $H_2$  situa-se no eixo  $X$ .

A reta  $p$  (definida pelos pontos  $P$  e  $H$ ) é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $p$ . Tenha em conta que o exercício se poderia ter igualmente resolvido com o recurso ao rebatimento do plano de perfil.

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os dados, na prática, são um único ponto, cuja linha de chamada se representou a **leve**. As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 132.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se uma reta  $p$ , passante, ortogonal ao plano  $\rho$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$ , porque é uma reta passante, tem de ser concorrente com o eixo  $X$ . Nesse sentido, marcou-se um ponto do eixo  $X$  – o ponto  $A$ . Já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ ).

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $A$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $P$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $A$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

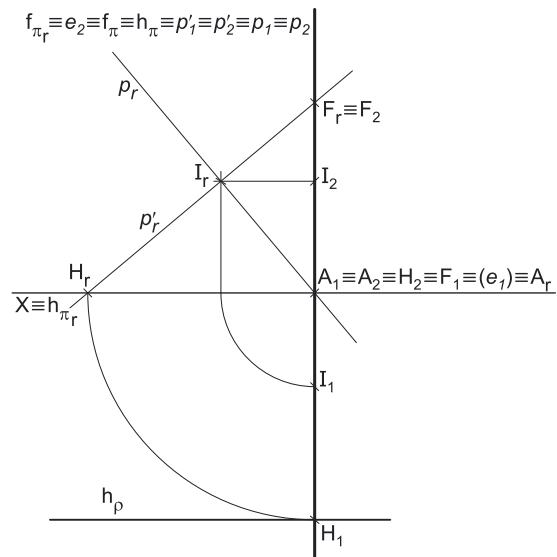
Assim, recorreu-se a uma reta  $p'$ , pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $p'$  está definida **por um ponto e uma direção**. O ponto que define a reta  $p'$  é o seu traço horizontal (o ponto  $H$ ), que se situa sobre o traço horizontal do plano ( $h_\rho$ ), para que a reta  $p'$  pertença ao plano  $\rho$ . A direção da reta  $p'$  é dada pelo ângulo que a reta faz com o Plano Horizontal de Projeção, que é igual ao ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção.

Note que é dado o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção – o plano  $\rho$ , nesta situação, está definido por uma reta (o seu traço horizontal) e pela sua orientação. O ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção corresponde ao ângulo que as retas de perfil do plano  $\rho$  fazem com o Plano Horizontal de Projeção. Assim, o ângulo que a reta  $p'$  faz com o Plano Horizontal de Projeção corresponde ao ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano de perfil que contém a reta  $p'$ , que não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas, o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas. Assim, o ângulo que a reta  $p'$  faz com o Plano Horizontal de Projeção é o ângulo que a reta  $p'$  faz com o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ).

Optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). A charneira do rebatimento (o eixo de rotação) é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira que contém os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, procedeu-se ao rebatimento da reta  $p'$ , rebatendo o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $p'$ ), o que nos permitiu determinar  $H_r$  (o ponto  $H$  rebatido). **Em rebatimento**, o ângulo que a reta  $p'$  faz com o traço horizontal do plano ( $h_\pi$ ) já está em verdadeira grandeza, no ângulo entre a reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) e  $h_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  em rebatimento). Assim, por  $H_r$  (o ponto  $H$  rebatido) conduziu-se  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) fazendo, com  $h_{\pi_r}$ , um ângulo de  $40^\circ$  e garantindo-se, ainda, que o traço frontal da reta  $p'$  tem cota positiva (para que o traço frontal do plano  $\rho$  tenha cota positiva). Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de  $H_r$ , aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta  $p'$  em rebatimento –  $F_r$ ,  $F_r$  (o traço frontal da reta  $p$  em rebatimento) está necessariamente sobre  $f_{\pi_r}$  –  $F_r$  é o ponto de interseção de  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) com  $f_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  rebatido). As projeções do ponto  $F$  determinam-se imediatamente, pois o ponto  $F$  é um ponto da charneira (roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $F_2 \equiv F_r$ . Note que não era necessária a determinação do traço frontal da reta  $p'$ , pois nada no enunciado nos pede esse ponto – a sua determinação pretendeu, apenas, assegurar que a reta  $p'$  satisfaz pedido no enunciado (o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção). Exatamente por isso mesmo, não se determinou o traço frontal do plano  $\rho$  – porque não é pedido e também não é necessário.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, rebateu-se o ponto **A**, o que nos permitiu determinar  $A_r$ . O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente,  $A_r \equiv A_2$ . Pelo ponto  $A_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , perpendicular a  $p'_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $p'$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta  $p$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$ .

Sobre a reta  $p_r$  representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto que nos permitirá definir a reta  $p$ . Nesta situação, optou-se por escolher o ponto de interseção das duas retas (as retas  $p$  e  $p'$ ) – o ponto **I** é o ponto de concorrência das duas retas ( $p$  e  $p'$ ) e é, assim, o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ , mas poderia ser outro ponto qualquer. Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto **I**. A reta  $p$  (definida pelos pontos **A** e **I**) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Tenha em conta que o exercício se poderia ter resolvido com o recurso a uma mudança do diedro de projeção, por exemplo.

#### Traçado:

Os dados (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$  em rebatimento, bem como de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).

### 133.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. Note que os traços do plano  $\rho$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, o plano  $\rho$  só poderia ter os seus traços coincidentes no caso de se tratar de um plano passante, o que não é o caso.

#### Resolução:

Pretende-se uma reta  $p$ , **passante**, ortogonal ao plano  $\rho$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Tendo em conta que se trata de uma reta passante (concorrente com o eixo **X**), representou-se um ponto **A**, sobre o eixo **X** – o ponto **A** é o ponto de concorrência da reta  $p$  com o eixo **X**. Já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ ).

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto **P**. No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **CrITÉrio de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto **P** e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

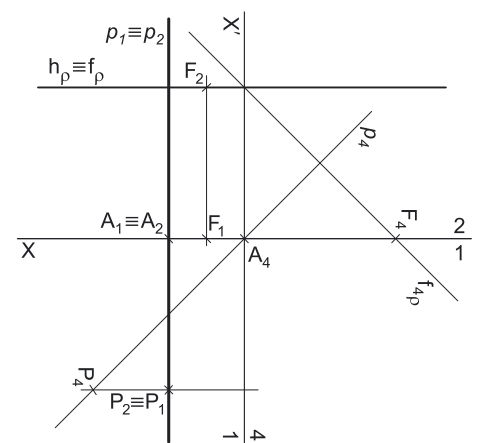
Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto **A**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ .

Salienta-se que as duas situações pendentes acima referidas têm a ver com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **CrITÉrio de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  são retas da mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir da ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo).

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as duas situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **CrITÉrio de Reversibilidade** e, por outro, os traços do plano  $\rho$  (nesse diedro de projeção) serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes. Foi este raciocínio que nos justificou o recurso à **mudança do diedro de projeção**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo à reta  $p$ , o que nos permite transformar a reta de perfil numa reta frontal (de frente). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta ( $p_1$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), pelo que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto **A** (o ponto que temos para definir a reta  $p$ ) no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ .  $A_4$  é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve –  $A_4$  situa-se necessariamente sobre o eixo  $X'$ , pois **A** tem cota nula.

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4p}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto qualquer (o ponto **F**), do traço frontal do plano ( $f_p$ ), e determinou-se a sua projeção no novo plano de projeção (o **plano 4**) –  $F_4$  é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4p}$ , passa por  $F_4$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal.

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas de «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4p}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Assim, por  $A_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4p}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ .

Para definirmos totalmente a reta  $p$  em projeções (no diedro de projeção inicial), é necessário um outro ponto da reta. Nesse sentido, determinou-se um ponto **P**, qualquer, da reta  $p$ , no novo diedro de projeção. A projeção horizontal do ponto **P** ( $P_1$ ) determinou-se de forma direta, no novo diedro de projeção. Tendo em conta que se mantém as cotas, a projeção frontal do ponto **P** no diedro de projeção inicial ( $P_2$ ) determinou-se em função da sua cota (que se manteve e é negativa). Esta situação, as projeções do ponto **P** ficam coincidentes.

A reta  $p$  (definida pelos pontos **A** e **P**) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ . Tenha em conta que, nesta situação particular, a reta  $p$  é uma reta do  $\beta_{2/4}$ , pois os dois pontos que a definem (os pontos **A** e **P**) são dois pontos do  $\beta_{2/4}$ .

Tenha em conta que o exercício se poderia ter igualmente resolvido com o recurso ao rebatimento do plano de perfil.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 134.

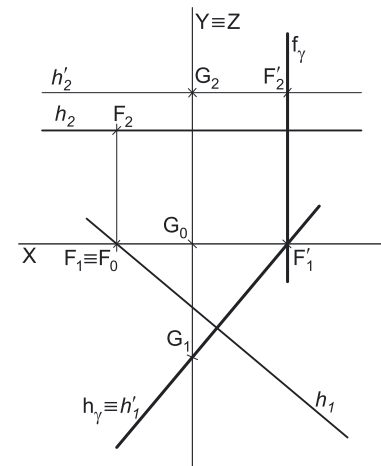
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $h$  e o ponto **G**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $h$  está definida por um ponto (o seu traço frontal, dado no enunciado) e uma direção (a direção dada no enunciado).

### Resolução:

Pretende-se um plano (o plano  $\gamma$ , por exemplo), ortogonal à reta  $h$  e passando pelo ponto **G** – o plano  $\gamma$  tem, assim, de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $h$ , ou seja, o plano  $\gamma$  tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares à reta  $h$  (o plano  $\gamma$  tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta  $h$ ).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto **G**, o ponto **G** tem de pertencer ao plano  $\gamma$ , ou seja, o ponto **G** tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\gamma$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto **G**, uma reta que pertença ao plano  $\gamma$  – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $h$ . Uma vez que a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção (trata-se de uma reta horizontal), a ortogonalidade entre qualquer outra reta e a reta  $h$  é direta em projeção horizontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, há que conduzir, pelo ponto  $G$ , uma reta qualquer, ortogonal à reta  $h$ . Optou-se por conduzir, pelo ponto  $G$ , uma reta horizontal (de nível)  $h'$ , ortogonal à reta  $h$  – a ortogonalidade entre a reta  $h'$  e a reta  $h$  é direta em projeção horizontal, pelo que  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta  $h'$ ) passa por  $G_1$  (a projeção horizontal do ponto  $G$ ) e é perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ).

A reta  $h'$  garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\gamma$  já contém uma reta ortogonal à reta  $h$  – a reta  $h'$ ;
2. que o ponto  $G$  pertence ao plano  $\gamma$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $h'$ ).

Para definir o plano  $\gamma$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\gamma$  – uma reta que seja **concorrente** com a reta  $h'$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $h$ . Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano  $\gamma$ , pois é a única situação em é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $h$  e uma reta **concorrente** com a reta  $h'$ . Essa reta frontal (de frente) do plano  $\gamma$  pode ser, por exemplo, o próprio traço frontal do plano –  $f_\gamma$ .

Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $h'$  (o ponto  $F'$ ) e desenhou-se  $f_\gamma$ , ortogonal à reta  $h$ . O traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ) é uma reta frontal (paralela ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a ortogonalidade entre  $f_\gamma$  e a reta  $h$  é direta em projeção frontal. Assim, por  $F'_2$  (a projeção frontal do ponto  $F'$ ), conduziu-se  $f_\gamma$ , perpendicular a  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ). Note que  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano  $\gamma$ ) é uma reta vertical, pelo que o plano  $\gamma$  é necessariamente um plano vertical (um plano projetante horizontal).

O plano  $\gamma$  está definido por duas retas concorrentes ortogonais à reta  $h$  – a reta  $h'$  e  $f_\gamma$  (o seu traço frontal), concorrentes no ponto  $F'$ . Já se garantiu a ortogonalidade do plano  $\gamma$  em relação à reta  $h$ .

Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo à reta  $h'$ , pois retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal do plano com cota nula). Sublinha-se que o traço horizontal do plano ( $h_\gamma$ ) fica coincidente com a projeção horizontal da reta  $h'$  ( $h'_1$ ), pois o plano  $\gamma$  é um **plano projetante horizontal**.

O plano  $\gamma$ , definido pelos seus traços, é o plano que é ortogonal à reta  $h$  e que contém o ponto  $G$  – trata-se de um **plano vertical** (um **plano projetante horizontal**). Por isso mesmo, a projeção horizontal do ponto  $G$  ( $G_1$ ) está sobre o traço horizontal do plano ( $h_\gamma$ ).

Salienta-se que o exercício poderia ter sido resolvido de uma forma mais empírica, pois é possível perceber, imediatamente, que o plano ortogonal a uma reta horizontal (de nível) é um **plano vertical** (um plano projetante horizontal). Por outro lado, exatamente porque se trata de um plano projetante horizontal, para assegurar que o plano conteria o ponto  $G$ , bastaria conduzir  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ), por  $G_1$  (a projeção horizontal do ponto  $G$ ), ortogonal a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). No entanto, essa resolução mais empírica faria com que a universalidade dos conceitos expostos não se aplicasse a esta situação (de um **plano projetante horizontal**), criando grande disparidade entre esta situação e a situação geral (a situação dos **planos não projetantes**).

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\gamma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $h'$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 135.

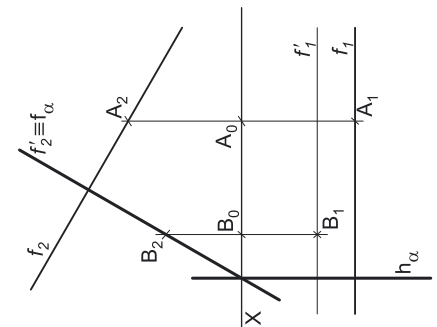
#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $f$  e o ponto  $B$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ , dado no enunciado) e uma direção (a direção dada no enunciado).

#### Resolução:

Pretende-se um plano  $\alpha$ , ortogonal à reta  $f$  e passando pelo ponto  $B$  – o plano  $\alpha$  tem, assim, de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $f$ , ou seja, o plano  $\alpha$  tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares à reta  $f$  (o plano  $\alpha$  tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta  $f$ ).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $B$ , o ponto  $B$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , ou seja, o ponto  $B$  tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\alpha$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $B$ , uma reta que pertença ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $f$ . Uma vez que a reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção (trata-se de uma reta frontal), a ortogonalidade entre qualquer outra reta e a reta  $f$  é direta em projeção frontal.



Assim, há que conduzir, pelo ponto  $B$ , uma reta qualquer, ortogonal à reta  $f$ . Optou-se por conduzir, pelo ponto  $B$ , uma reta frontal (de frente)  $f'$ , ortogonal à reta  $f$  – a ortogonalidade entre a reta  $f'$  e a reta  $f$  é direta em projeção frontal, pelo que  $f'_2$  (a projeção frontal da reta  $f'$ ) passa por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto  $B$ ) e é perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ).

A reta  $f'$  garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\alpha$  já contém uma reta ortogonal à reta  $f$  – a reta  $f'$ ;
2. que o ponto  $B$  pertence ao plano  $\alpha$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $f'$ ).

Para definir o plano  $\alpha$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\alpha$  – uma reta que seja **concorrente** com a reta  $f'$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $f$ . Essa reta terá de ser uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , pois é a única situação em é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $f$  e uma reta **concorrente** com a reta  $f'$ . Essa reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  pode ser, por exemplo, o próprio traço horizontal do plano –  $f_\alpha$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, determinou-se o traço horizontal da reta  $f'$  (o ponto  $H$ ) e desenhou-se  $h_\alpha$ , ortogonal à reta  $f$ . O traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) é uma reta horizontal (paralela ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que a ortogonalidade entre  $h_\alpha$  e a reta  $f$  é direta em projeção horizontal. Assim, por  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H$ ), conduziu-se  $h_\alpha$ , perpendicular a  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ). Note que  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) é uma reta de topo, pelo que o plano  $\alpha$  é necessariamente um plano de topo (um plano projetante frontal).

O plano  $\gamma$  está definido por duas retas concorrentes ortogonais à reta  $h$  – a reta  $h'$  e  $f_\gamma$  (o seu traço frontal), concorrentes no ponto  $F'$ . Já se garantiu a ortogonalidade do plano  $\gamma$  em relação à reta  $h$ .

Por fim, desenhou-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo à reta  $f'$ , pois retas frontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal do plano com afastamento nulo). Sublinha-se que o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) fica coincidente com a projeção frontal da reta  $f'$  ( $f'_2$ ), pois o plano  $\alpha$  é um **plano projetante frontal**.

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, é o plano que é ortogonal à reta  $f$  e que contém o ponto  $B$  – trata-se de um **plano de topo** (um **plano projetante frontal**). Por isso mesmo, a projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ) está sobre o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ).

Salienta-se que o exercício poderia ter sido resolvido de uma forma mais empírica, pois é possível perceber, imediatamente, que o plano ortogonal a uma reta frontal (de frente) é um **plano de topo** (um plano projetante frontal). Por outro lado, exatamente porque se trata de um plano projetante frontal, para assegurar que o plano conteria o ponto  $B$ , bastaria conduzir  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ), por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto  $B$ ), ortogonal a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). No entanto, essa resolução mais empírica faria com que a universalidade dos conceitos expostos não se aplicasse a esta situação (de um **plano projetante frontal**), criando grande disparidade entre esta situação e a situação geral (a situação dos **planos não projetantes**).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $f'$ ).

## 136.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $g$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se um plano ortogonal à reta  $g$  – o plano tem, assim, de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $g$ , ou seja, o plano tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares à reta  $g$  (o plano tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta  $g$ ). Considerou-se que o plano pedido é o plano  $\pi$ .

Tendo em conta que não é dado nenhum ponto que o plano tenha de conter, é possível passar, de imediato, à determinação dos seus traços.

A reta  $g$  – a ortogonalidade entre a reta  $f'$  e a reta  $f$  é direta em projeção frontal, pelo que  $f'_2$  (a projeção frontal da reta  $f'$ ) passa por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto  $B$ ) e é perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ).

Assim, começou-se por desenhar o traço frontal do plano (por exemplo). Tendo em conta que a reta  $g$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção, a ortogonalidade entre o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ) e a reta  $g$  é direta em projeção frontal. Assim, desenhou-se o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ), perpendicular a  $g_2$  (a projeção frontal da reta  $g$ ). O traço frontal do plano ( $f_\pi$ ) garante-nos imediatamente que o plano  $\pi$  já contém uma reta ortogonal à reta  $g$  – o seu traço frontal, que é uma reta vertical com afastamento nulo.

Em seguida, desenhou-se o traço horizontal do plano. Tendo em conta que a reta  $g$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre o traço horizontal do plano ( $h_\pi$ ) e a reta  $g$  é direta em projeção horizontal. Assim, desenhou-se o traço horizontal do plano ( $h_\pi$ ), perpendicular a  $g_1$  (a projeção horizontal da reta  $g$ ) e concorrente com  $f_\pi$  (o traço frontal do plano) no eixo  $X$ . O traço horizontal do plano ( $h_\pi$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é ortogonal à reta  $g$ ). O traço horizontal do plano ( $h_\pi$ ) garante-nos imediatamente que o plano  $\pi$  já contém uma outra reta ortogonal à reta  $g$  e concorrente com  $f_\pi$  (o traço frontal do plano) – o seu traço horizontal, que é uma reta de topo com cota nula.

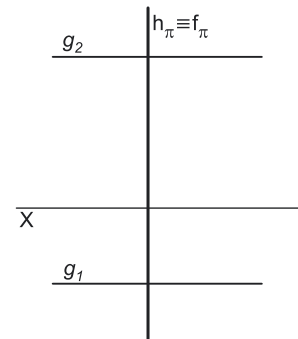
Está garantida a ortgdd do plano  $\pi$  em relação à reta  $g$ , pois o plano  $\pi$  já contém duas retas concorrentes ortogonais à reta  $g$  – os seus traços.

O plano  $\pi$ , definido pelos seus traços, é o plano que é ortogonal à reta  $g$  – trata-se de um **plano de perfil** (um **plano duplamente projetante**).

Salienta-se que o exercício poderia ter sido resolvido de uma forma mais empírica, pois é possível perceber, imediatamente, que o plano ortogonal a uma reta fronto-horizontal é um **plano de perfil** (um plano duplamente projetante). No entanto, essa resolução mais empírica faria com que a universalidade dos conceitos expostos não se aplicasse a esta situação (de um **plano projetante**), criando grande disparidade entre esta situação e a situação geral (a situação dos **planos não projetantes**).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $f'$ ).





**137.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (dados no enunciado) e o ponto  $B$  (o ponto de concorrência da reta  $r$  com o eixo  $X$ , pois a reta  $r$  é uma **reta passante**).

**Resolução:**

Pretende-se um plano  $\alpha$ , ortogonal à reta  $r$  e passando pelo ponto  $P$  – o plano  $\alpha$  tem, assim, de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $r$ , ou seja, o plano  $\alpha$  tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares à reta  $r$  (o plano  $\alpha$  tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta  $r$ ).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , ou seja, o ponto  $P$  tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\alpha$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta que pertença ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $r$ . Ora, as únicas situações em que a ortogonalidade entre retas é direta em projeções, são as situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção.

Assim, há que conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta frontal (de frente) ortogonal à reta  $r$ , ou uma reta horizontal (de nível) ortogonal à reta  $r$ . Optou-se por conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta horizontal (de nível)  $h$ , ortogonal à reta  $r$ . Uma vez que a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta  $h$  e a reta  $r$  é direta em projeção horizontal –  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) passa por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) e é perpendicular a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

A reta  $h$  garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\alpha$  já contém uma reta ortogonal à reta  $r$  – a reta  $h$ ;
2. que o ponto  $P$  pertence ao plano  $\alpha$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $h$ ).

Para definir o plano  $\alpha$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\alpha$  – uma reta que seja **concorrente** com a reta  $h$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $r$ . Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , pois é a única situação em que é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $r$  e uma reta **concorrente** com a reta  $h$ . Essa reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  pode ser, por exemplo, o próprio traço frontal do plano –  $f_\alpha$ .

Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $h$  (o ponto  $F$ ) e desenhou-se  $f_\alpha$ , ortogonal à reta  $r$ . O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é uma reta frontal (paralela ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a ortogonalidade entre  $f_\alpha$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal. Assim, por  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ), conduziu-se  $f_\alpha$ , perpendicular a  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

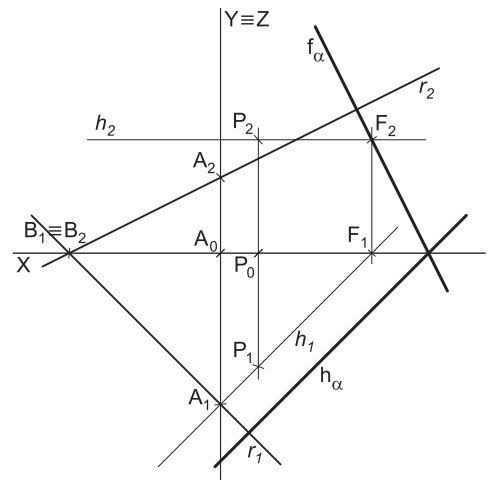
O plano  $\alpha$  está definido por duas retas concorrentes ortogonais à reta  $r$  – a reta  $h$  e  $f_\alpha$  (o seu traço frontal), concorrentes no ponto  $F$ . Já se garantiu a ortogonalidade do plano  $\alpha$  em relação à reta  $r$ .

Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo à reta  $h$ , pois retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal do plano com cota nula).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, é o plano que é ortogonal à reta  $r$  e que contém o ponto  $P$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $h$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).







## 139.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $m$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $m$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas a  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

**Resolução:**

Pretende-se um plano  $\alpha$ , ortogonal à reta  $m$  e passando pelo ponto  $P$  – o plano  $\alpha$  tem, assim, de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $m$ , ou seja, o plano  $\alpha$  tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares à reta  $m$  (o plano  $\alpha$  tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta  $m$ ).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , ou seja, o ponto  $P$  tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\alpha$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta que pertença ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $m$ . Ora, as únicas situações em que a ortogonalidade entre retas é direta em projeções, são as situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção.

Assim, há que conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta frontal (de frente) ortogonal à reta  $m$ , ou uma reta horizontal (de nível) ortogonal à reta  $m$ . Optou-se por conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta horizontal (de nível)  $h$ , ortogonal à reta  $m$ . Uma vez que a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta  $h$  e a reta  $m$  é direta em projeção horizontal –  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) passa por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) e é perpendicular a  $m_1$  (a projeção horizontal da reta  $m$ ).

A reta  $h$  garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\alpha$  já contém uma reta ortogonal à reta  $m$  – a reta  $h$ ;
2. que o ponto  $P$  pertence ao plano  $\alpha$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $h$ ).

Para definir o plano  $\alpha$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\alpha$  – uma reta que seja **concorrente** com a reta  $h$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $m$ . Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , pois é a única situação em é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $m$  e uma reta **concorrente** com a reta  $h$ . Essa reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  pode ser, por exemplo, o próprio traço frontal do plano –  $f_\alpha$ .

Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $h$  (o ponto  $F$ ) e desenhou-se  $f_\alpha$ , ortogonal à reta  $m$ . O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é uma reta frontal (paralela ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a ortogonalidade entre  $f_\alpha$  e a reta  $m$  é direta em projeção frontal. Assim, por  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ), conduziu-se  $f_\alpha$ , perpendicular a  $m_2$  (a projeção frontal da reta  $m$ ).

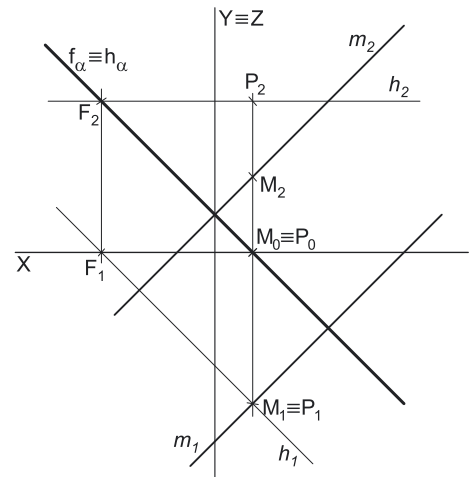
O plano  $\alpha$  está definido por duas retas concorrentes ortogonais à reta  $m$  – a reta  $h$  e  $f_\alpha$  (o seu traço frontal), concorrentes no ponto  $F$ . Já se garantiu a ortogonalidade do plano  $\alpha$  em relação à reta  $m$ .

Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo à reta  $h$ , pois retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal do plano com cota nula). Nesta situação particular, observa-se que o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) ficou sobre o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) – o plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes.

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, é o plano que é ortogonal à reta  $m$  e que contém o ponto  $P$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $m$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $h$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).





## 141.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $B$ .

**Resolução:**

Pretende-se um plano que seja ortogonal à reta  $p$  e que passe pelo ponto  $P$  – esse plano tem de verificar o **Crítério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $p$ , ou seja, o plano tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares a uma reta  $p$  (o plano tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta  $p$ ).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano, ou seja, o ponto  $P$  tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, em primeiro lugar, há que conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta que pertença ao plano – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $p$ . Por outro lado, essa reta deverá ser uma reta paralela a um dos planos de projeção, para que a ortogonalidade entre as duas retas seja direta em projeções. Ora, a única «família» de retas que é paralela a um dos planos de projeção e é simultaneamente ortogonal a uma **reta de perfil** é a «família» das **retas fronto-horizontais**.

Assim, pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $g$ , fronto-horizontal. A reta  $g$ , porque é uma reta fronto-horizontal, é necessariamente uma reta ortogonal à reta  $p$ .

A reta  $g$  garante-nos dois factos:

1. que o plano já contém uma reta ortogonal à reta  $p$  – a reta  $g$ ;
2. que o ponto  $P$  pertence ao plano (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $g$ ).

Atendendo a que o plano contém a «família» das retas fronto-horizontais, o plano pretendido é necessariamente um **plano de rampa**. No entanto, para definir o plano é necessário recorrer a outra reta do plano – uma reta que seja **concorrente** com a reta  $g$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $p$ .

Necessitamos de uma outra «família» de retas que seja ortogonal à reta  $p$ . Essa outra «família» de retas deverá ser a «família» de retas de perfil que o plano contém. Assim, recorreu-se a uma reta  $p'$ , de perfil, que é concorrente com a reta  $g$  no ponto  $P$ .

A reta  $p'$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (é ortogonal à reta  $p$ ). O plano definido pelas retas  $g$  e  $p'$  é o plano ortogonal à reta  $p$  que contém o ponto  $P$ .

No entanto, as projeções das retas de perfil não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, pelo que as projeções das duas retas não nos garantem a efetiva ortogonalidade entre ambas. Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, para que possamos garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo recurso à mudança do diedro de projeção.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo às retas  $p$  e  $p'$ , o que nos permite transformar as duas retas de perfil em retas frontais (de frente). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte: – no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**); – no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

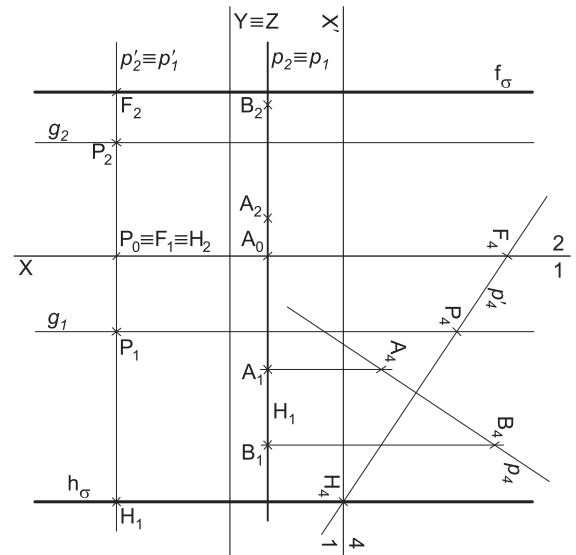
Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo às retas  $p$  e  $p'$ , o eixo  $X'$  é paralelo às projeções horizontais das duas retas ( $p_1$  e  $p'_1$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida determinaram-se as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $P$  no novo plano de projeção (o **plano 4**).  $A_4$ ,  $B_4$  e  $P_4$  são as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $P$  no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se em função das respetivas cotas, que se mantiveram.

Em seguida desenhou-se  $p_4$ , a projeção da reta  $p$  no **plano 4** –  $p_4$  passa por  $A_4$  e por  $B_4$  ( $p_4$  está definida por dois pontos). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), as retas  $p$  e  $p'$  são duas retas frontais (paralelas ao **plano 4**), pelo que a ortogonalidade entre as duas retas é direta (no **plano 4**). Assim, por  $P_4$  conduziu-se  $p'_4$  (a projeção da reta  $p'$  no **plano 4**), perpendicular a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p'$  em relação à reta  $p$ , pelo que já se garantiu que o plano  $\rho$  contém uma outra «família» de retas ortogonais à reta  $p$ , para além da «família» das retas fronto-horizontais. Assim, está garantida a ortogonalidade do plano  $\rho$  em relação à reta  $p$ .

Em seguida, determinaram-se os traços da reta  $p'$  (a partir do novo diedro de projeção), em função das projeções e das coordenadas conhecidas. O traço horizontal da reta  $p'$  tem cota nula, pelo que  $H_4$  (a projeção do ponto  $H$  no **plano 4**) se situa no eixo  $X'$ . Por outro lado, o ponto  $F$  tem afastamento nulo, pelo que  $F_1$  se situa no eixo  $X$  – a partir da sua projeção horizontal (que se mantém), foi possível determinar  $F_4$  (a projeção do ponto  $F$  no **plano 4**). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, determinaram-se as projeções dos traços da reta  $p'$ .

$F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ) determinou-se em função da sua cota (que se manteve).  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H$ ) determinou-se diretamente, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4** –  $H_2$  (a projeção frontal do ponto  $H$ ) situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $H$  tem cota nula.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, pelos traços da reta  $p'$  conduziram-se os traços homónimos do plano  $p$ , de rampa (que são retas fronto-horizontais – paralelas à reta  $g$ ). O traço frontal do plano  $p$  ( $f_p$ ) é uma reta que está definida por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (a direção da reta  $g$ ). O traço horizontal do plano  $p$  ( $h_p$ ) é uma reta que está definida por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (a direção da reta  $g$ ).

O plano  $p$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $P$  e é ortogonal à reta  $p$ . Salienta-se que este exercício poderia ser igualmente resolvido com o recurso ao rebatimento (do plano de perfil).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das projeções das retas  $p$  e  $p'$  no **plano 4**, bem como de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuado e, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 142.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. As projeções do ponto  $P$  são simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). A reta  $p$  é uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo  $X$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $B$ , o ponto de concorrência da reta  $p$  com o eixo  $X$  – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $A$  e  $B$ ).

### Resolução:

Pretende-se um plano que seja ortogonal à reta  $p$  e que passe pelo ponto  $P$  – esse plano tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $p$ , ou seja, o plano tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares a reta  $p$  (o plano tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta  $p$ ).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano, ou seja, o ponto  $P$  tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta que pertença ao plano – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $p$ . Por outro lado, essa reta deverá ser uma reta pa-ralela a um dos planos de projeção, para que a ortogonalidade entre as duas retas seja direta em projeções. Ora, a única «família» de retas que é paralela a um dos planos de projeção e é simultaneamente ortogonal a uma **reta de perfil** é a «família» das retas fronto-horizontais.

Assim, pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $g$ , fronto-horizantal. A reta  $g$ , porque é uma reta fronto-horizantal, é necessariamente uma reta ortogonal à reta  $p$ .

A reta  $g$  garante-nos dois factos:

1. que o plano já contém uma reta ortogonal à reta  $p$  – a reta  $g$ ;
2. que o ponto  $P$  pertence ao plano (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $g$ ).

Atendendo a que o plano contém a «família» das retas fronto-horizontais, o plano pretendido é necessariamente um **plano de rampa**. No entanto, para definir o plano é necessário recorrer a outra reta do plano – uma reta que seja **concorrente** com a reta  $g$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $p$ .

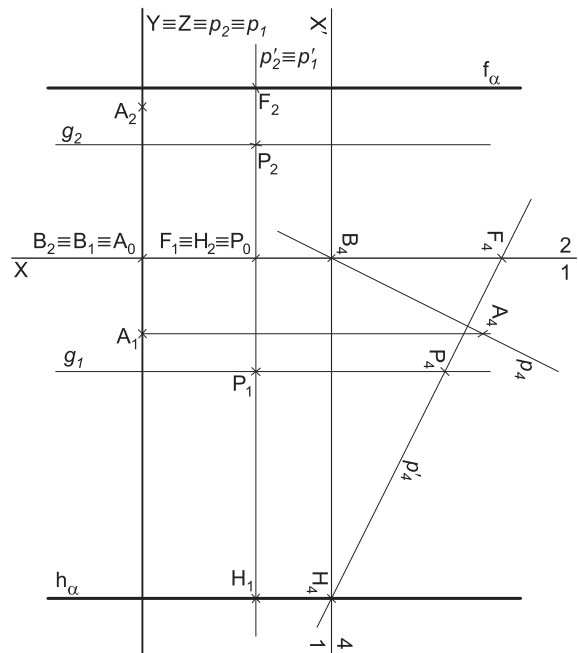
Necessitamos de uma outra «família» de retas que seja ortogonal à reta  $p$ . Essa outra «família» de retas deverá ser a «família» de retas de perfil que o plano contém. Assim, recorreu-se a uma reta  $p'$ , de perfil, que é concorrente com a reta  $g$  no ponto  $P$ .

A reta  $p'$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (é ortogonal à reta  $p$ ). O plano definido pelas retas  $g$  e  $p'$  é o plano ortogonal à reta  $p$  que contém o ponto  $P$ .

No entanto, as projeções das retas de perfil não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções das duas retas não nos garantem a efetiva ortogonalidade entre ambas. Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, para que possamos garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo recurso à mudança do diedro de projeção.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo às retas  $p$  e  $p'$ , o que nos permite transformar as duas retas de perfil em retas frontais (de frente). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, mantêm-se as **projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas**, mantêm-se as **cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo às retas  $p$  e  $p'$ , o eixo  $X'$  é paralelo às projeções horizontais das duas retas ( $p_1$  e  $p'_1$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida determinaram-se as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $P$  no novo plano de projeção (o **plano 4**).  $A_4$ ,  $B_4$  e  $P_4$  são as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $P$  no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se em função das respetivas cotas, que se mantiveram. Note que o ponto  $B$  tem cota nula, pelo que  $B_4$  (a projeção do ponto  $B$  no **plano 4**) se situa no eixo  $X'$ .

Em seguida desenhou-se  $p_4$ , a projeção da reta  $p$  no **plano 4** –  $p_4$  passa por  $A_4$  e por  $B_4$  ( $p_4$  está definida por dois pontos). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), as retas  $p$  e  $p'$  são duas retas frontais (paralelas ao **plano 4**), pelo que a ortogonalidade entre as duas retas é direta (no **plano 4**). Assim, por  $P_4$  conduziu-se  $p'_4$  (a projeção da reta  $p'$  no **plano 4**), perpendicular a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p'$  em relação à reta  $p$ , pelo que já se garantiu que o plano  $\rho$  contém uma outra «família» de retas ortogonal à reta  $p$ , para além da «família» das retas fronto-horizontais. Assim, está garantida a ortogonalidade do plano  $\rho$  em relação à reta  $p$ .

Em seguida, determinaram-se os traços da reta  $p'$  (a partir do novo diedro de projeção), em função das projeções e das coordenadas conhecidas. O traço horizontal da reta  $p'$  tem cota nula, pelo que  $H_4$  (a projeção do ponto  $H$  no **plano 4**) se situa no eixo  $X'$ . Por outro lado, o ponto  $F$  tem afastamento nulo, pelo que  $F_1$  se situa no eixo  $X$  – a partir da sua projeção horizontal (que se mantém), foi possível determinar  $F_4$  (a projeção do ponto  $F$  no **plano 4**). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, determinaram-se as projeções dos traços da reta  $p'$ .

$F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ) determinou-se em função da sua cota (que se manteve).  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H$ ) determinou-se diretamente, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4** –  $H_2$  (a projeção frontal do ponto  $H$ ) situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $H$  tem cota nula.

Por fim, pelos traços da reta  $p'$  conduziram-se os traços homónimos do plano  $\rho$ , de rampa (que são retas fronto-horizontais – paralelas à reta  $g$ ). O traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ) é uma reta que está definida por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (a direção da reta  $g$ ). O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ) é uma reta que está definida por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (a direção da reta  $g$ ).

O plano  $\rho$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $P$  e é ortogonal à reta  $p$ . Salienta-se que este exercício poderia ser igualmente resolvido com o recurso ao rebatimento (do plano de perfil).

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\rho$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das projeções das retas  $p$  e  $p'$  no **plano 4**, bem como de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuado e, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 143.

#### Dados:

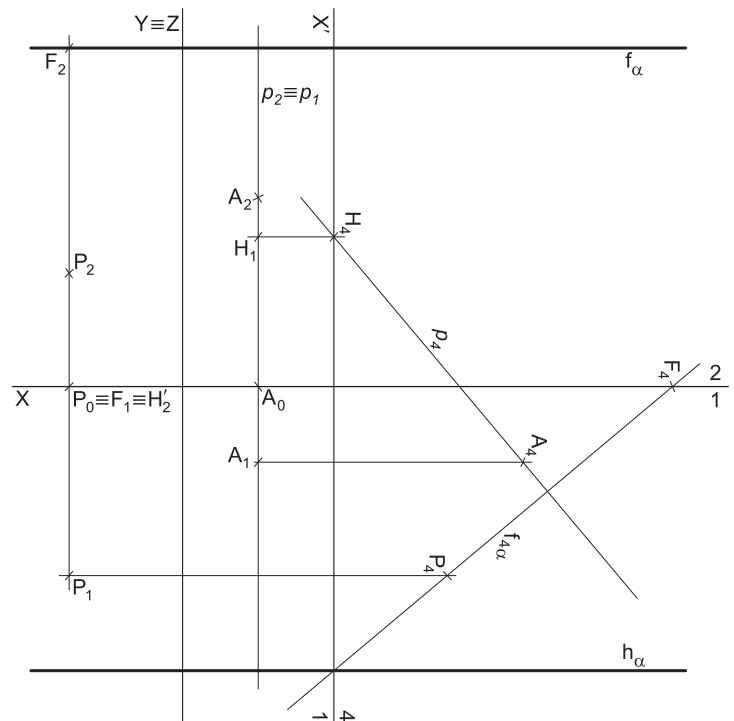
Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e uma direção (a direção dada pelo ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção).

#### Resolução:

Pretende-se um plano que seja ortogonal à reta  $p$  e que passe pelo ponto  $P$  – esse plano tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $p$ , ou seja, o plano tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares a reta  $p$  (o plano tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta  $p$ ).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano, ou seja, o ponto  $P$  tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta que pertença ao plano – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $p$ . Por outro lado, essa reta deverá ser uma reta paralela a um dos planos de projeção, para que a ortogonalidade entre as duas retas seja direta em projeções. Ora, a única «família» de retas que é paralela a um dos planos de projeção e é simultaneamente ortogonal a uma **reta de perfil** é a «família» das retas fronto-horizontais.

Dessa forma, a resolução deste exercício poder-se-ia processar de forma semelhante à dos dois exercícios anteriores. No entanto, optou-se por um raciocínio ligeiramente diferente, que simplifica substancialmente os raciocínios expostos nos relatórios dos dois exercícios anteriores.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Atendendo a que o plano contém a «família» das retas fronto-horizontais, o plano pretendido é necessariamente um **plano de rampa**. Face a esta conclusão, há a referir que a dificuldade deste exercício se baseia em dois aspetos interrelacionados:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**, pelo que a ortogonalidade de um plano em relação à reta  $p$  não se pode processar de forma direta (à semelhança do que acontece com um plano oblíquo, por exemplo);
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços de um plano de rampa são duas retas da mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade do plano em relação à reta  $p$  de uma forma direta (ao contrário do que acontece, por exemplo, com um plano oblíquo).

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as duas situações referidas de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade** e, por outro, nesse diedro de projeção os traços do plano  $\alpha$  serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes. Foi este raciocínio que nos justificou o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo à reta  $p$ , o que nos permite transformar a reta de perfil numa reta frontal (de frente). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida determinaram-se as projeções dos pontos  $A$  e  $P$  no novo plano de projeção (o **plano 4**).  $A_4$  e  $P_4$  são as projeções dos pontos  $A$  e  $P$  no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se em função das respetivas cotas, que se mantiveram.

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (paralela ao **plano 4**), pelo que o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4** (no ângulo entre a  $p_4$  o eixo  $X'$ ). Assim, por  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) fazendo, com o eixo  $X'$ , um ângulo de  $40^\circ$  e garantindo-se, ainda, que o traço horizontal da reta  $p$  tem afastamento negativo (para que o traço horizontal se situe no **SPHP**, como o enunciado pede expressamente). Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de  $A_4$ , aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

Tendo em conta que o eixo  $X'$  é perpendicular ao eixo  $X$ , conclui-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), qualquer plano de rampa é necessariamente um plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse caso, o plano  $\alpha$  (o plano pedido) é necessariamente um plano de topo (um plano projetante frontal), que contém o ponto  $P$  e é ortogonal à reta  $p$ .

Assim, exatamente porque se trata de um plano projetante frontal, para assegurar que o plano contém o ponto  $P$ , basta que  $f_{4\alpha}$  (o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4**) contenha  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**). Por outro lado, uma vez que a reta  $p$  é uma reta frontal (no novo diedro de projeção), a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_{4\alpha}$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Assim, conduziu-se  $f_{4\alpha}$  (o novo traço frontal do plano  $\alpha$ ) por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**), perpendicular a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) –  $f_{4\alpha}$  está definido por um ponto (o ponto  $P_4$ ) e por uma direção (é perpendicular a  $p_4$ ).

Em seguida, e atendendo a que os traços do plano  $\alpha$  são duas retas do plano que são concorrentes no eixo  $X'$ , desenhou-se  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ), paralelo ao eixo  $X$  e concorrente com  $f_{4\alpha}$  no eixo  $X'$  –  $h_\alpha$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo ao eixo  $X$  inicial).

Uma vez que o Plano Horizontal de Projeção foi o plano que se manteve (na mudança do diedro de projeção efetuada), o traço horizontal do plano (no diedro de projeção inicial) já está determinado – é  $h_\alpha$ . Há, agora, que determinar o traço frontal do plano, que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal do plano  $\alpha$  (no diedro de projeção inicial) é uma reta fronto-horizonta, pelo que já temos uma direção para definir  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ). Falta-nos um ponto para definir  $f_\alpha$ .

Assim, recorreu-se a um ponto qualquer do plano, com afastamento nulo (no diedro de projeção inicial) – o ponto  $F$ . Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto  $F$  no plano de perfil que contém o ponto  $P$ . Assim, determinou-se  $F_1$ , a projeção horizontal do ponto  $F$ . A partir da sua projeção horizontal ( $F_1$ ), determinou-se  $F_4$ , sobre  $f_{4\alpha}$  (o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4**). Por fim, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada e determinou-se a projeção frontal do ponto  $F$  ( $F_2$ ), a partir da sua cota (que se manteve). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ). O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (é fronto-horizonta).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $P$  e é ortogonal à reta  $p$ , como era pretendido. Saliencia-se que este exercício poderia ser igualmente resolvido com o recurso ao rebatimento (do plano de perfil).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das projeções das retas  $p$  e  $p'$  no **plano 4**, bem como de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada e, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 144.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $T$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  é uma reta de perfil passante, pelo que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto com 2 cm de abscissa – o ponto  $K$ . Nesse sentido, a reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $K$ ) e uma direção (a direção dada pelo ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção).

**Resolução:**

Pretende-se um plano que seja ortogonal à reta  $p$  e que passe pelo ponto  $T$  – esse plano tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $p$ , ou seja, o plano tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares a reta  $p$  (o plano tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta  $p$ ).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $T$ , o ponto  $T$  tem de pertencer ao plano, ou seja, o ponto  $T$  tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $T$ , uma reta que pertença ao plano – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $p$ . Por outro lado, essa reta deverá ser uma reta paralela a um dos planos de projeção, para que a ortogonalidade entre as duas retas seja direta em projeções. Ora, a única «família» de retas que é paralela a um dos planos de projeção e é simultaneamente ortogonal a uma **reta de perfil** é a «família» das retas fronto-horizontais.

Atendendo a que o plano contém a «família» das retas fronto-horizontais, o plano pretendido (o plano  $\theta$ ) é necessariamente um **plano de rampa**. Face a esta conclusão, há a referir que a dificuldade deste exercício se baseia em dois aspetos interrelacionados:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**, pelo que a ortogonalidade de um plano em relação à reta  $p$  não se pode processar de forma direta (à semelhança do que acontece com um plano oblíquo, por exemplo);
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços de um plano de rampa são duas retas da mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade do plano em relação à reta  $p$  de uma forma direta (ao contrário do que acontece, por exemplo, com um plano oblíquo).

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as duas situações referidas de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade** e, por outro, nesse diedro de projeção os traços do plano  $\theta$  serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes. Foi este raciocínio que nos justificou o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo à reta  $p$ , o que nos permite transformar a reta de perfil numa reta frontal (de frente). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

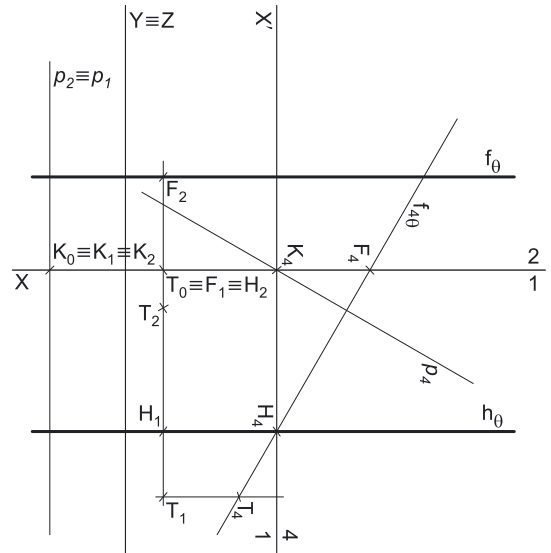
Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida determinaram-se as projeções dos pontos  $K$  e  $T$  no novo plano de projeção (o **plano 4**).  $K_4$  e  $T_4$  são as projeções dos pontos  $K$  e  $T$  no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se em função das respetivas cotas, que se mantiveram. Note que o ponto  $K$  é um ponto com cota nula, pelo que  $K_4$  (a projeção do ponto  $K$  no **plano 4**) se situa no eixo  $X'$ .

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (paralela ao **plano 4**), pelo que o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4** (no ângulo entre a  $p_4$  e o eixo  $X'$ ). Assim, por  $K_4$  (a projeção do ponto  $K$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) fazendo, com o eixo  $X'$ , um ângulo de  $30^\circ$  e garantindo-se, ainda, que a reta  $p$  atravessa os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros ( $p_4$  não pode passar pelo quadrante em que se situa  $T_4$ , pois o ponto  $T$  situa-se no  $4^\circ$  Diedro). Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de  $K_4$ , aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

Tendo em conta que o eixo  $X'$  é perpendicular ao eixo  $X$ , conclui-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), qualquer plano de rampa é necessariamente um plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse caso, o plano  $\theta$  (o plano pedido) é necessariamente um plano de topo (um plano projetante frontal), que contém o ponto  $T$  e é ortogonal à reta  $p$ .

Assim, exatamente porque se trata de um plano projetante frontal, para assegurar que o plano contém o ponto  $T$ , basta que  $f_{4\theta}$  (o traço do plano  $\theta$  no **plano 4**) contenha  $T_4$  (a projeção do ponto  $T$  no **plano 4**). Por outro lado, uma vez que a reta  $p$  é uma reta frontal (no novo diedro de projeção), a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_{4\theta}$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Assim, conduziu-se  $f_{4\theta}$  (o novo traço frontal do plano  $\theta$ ) por  $T_4$  (a projeção do ponto  $T$  no **plano 4**), perpendicular a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) –  $f_{4\theta}$  está definido por um ponto (o ponto  $T_4$ ) e por uma direção (é perpendicular a  $p_4$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, e atendendo a que os traços do plano  $\theta$  são duas retas do plano que são concorrentes no eixo  $X'$ , desenhou-se  $h_0$  (o traço horizontal do plano  $\theta$ ), paralelo ao eixo  $X$  e concorrente com  $f_{40}$  no eixo  $X'$  –  $h_0$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo ao eixo  $X$  inicial).

Uma vez que o Plano Horizontal de Projeção foi o plano que se manteve (na mudança do diedro de projeção efetuada), o traço horizontal do plano (no diedro de projeção inicial) já está determinado – é  $h_0$ . Há, agora, que determinar o traço frontal do plano, que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal do plano  $\theta$  (no diedro de projeção inicial) é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos uma direção para definir  $f_0$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Falta-nos um ponto para definir  $f_0$ .

Assim, recorreu-se a um ponto qualquer do plano, com afastamento nulo (no diedro de projeção inicial) – o ponto  $F$ . Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto  $F$  no plano de perfil que contém o ponto  $T$ . Assim, determinou-se  $F_1$ , a projeção horizontal do ponto  $F$ . A partir da sua projeção horizontal ( $F_1$ ), determinou-se  $F_4$ , sobre  $f_{40}$  (o traço do plano  $\theta$  no plano 4). Por fim, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada e determinou-se a projeção frontal do ponto  $F$  ( $F_2$ ), a partir da sua cota (que se manteve). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_0$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_0$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

O plano  $\theta$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $T$  e é ortogonal à reta  $p$ , como era pretendido. Salienta-se que este exercício poderia ser igualmente resolvido com o recurso ao rebatimento (do plano de perfil).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\theta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das projeções da reta  $p$  no plano 4, bem como de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada e, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 145.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $K$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. As projeções da reta  $r$  fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, pois a reta  $r$  é paralela ao  $\beta_{1/3}$  (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes, cujas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado). Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), passando pela projeção horizontal do ponto  $K$  ( $K_1$ ) e com a direção dada no enunciado.

### Resolução:

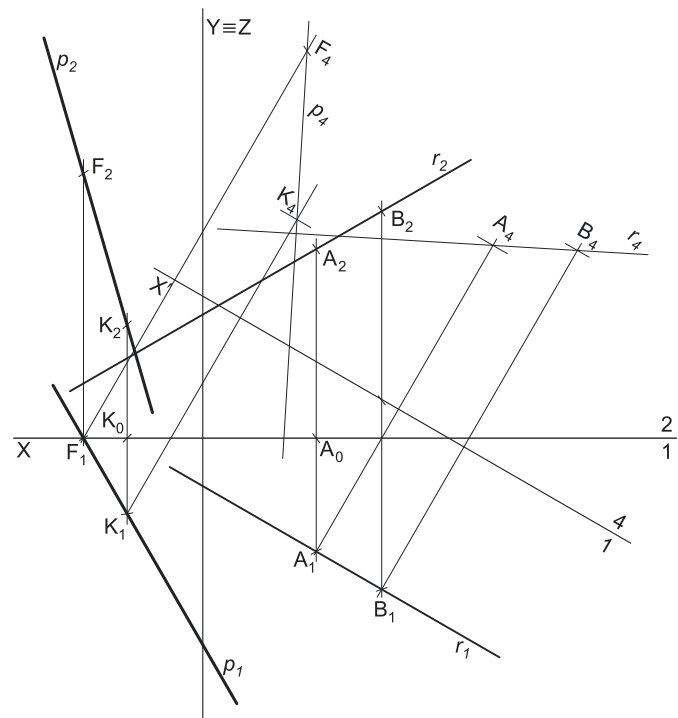
Pretende-se determinar as projeções de uma reta  $p$ , ortogonal à reta  $r$ , e passando pelo ponto  $K$ , sendo dada a sua projeção horizontal. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $K$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nem a reta  $r$  nem a reta  $p$  são paralelas a qualquer dos planos de projeção, pelo que a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhum dos planos de projeção. Note que a reta  $p$  não é uma reta frontal (de frente), o que se constata a partir da sua projeção horizontal, que é dada. Por outro lado, caso a reta  $p$  fosse uma reta horizontal (de nível), e sendo ortogonal à reta  $r$ , as projeções horizontais das duas retas seriam perpendiculares, o que também não se verifica. Assim, a reta  $p$  é necessariamente uma reta oblíqua.

Uma vez que a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das projeções (porque nenhuma das retas é paralela a qualquer dos planos de projeção), é necessário transformar a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção (com o recurso a uma **mudança do diedro de projeção**) e, assim, fazer com que a ortogonalidade entre as duas retas se processe de forma direta numa das suas projeções.

Optou-se por se transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente). Para tal substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um novo plano de projeção (o plano 4), paralelo à reta  $r$ . Nesse sentido, criou-se um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o plano 1), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o plano 4);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao plano 4).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção) e é paralelo a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $A$  e  $K$  no **plano 4** ( $A_4$  e  $K_4$ ), em função das respetivas cotas.

Há que desenhar  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**) – o ponto  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um outro ponto da reta  $r$  (o ponto  $B$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4** ( $B_4$ ), em função da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava. A projeção da reta  $r$  no **plano 4** ( $r_4$ ) está definida por dois pontos – os pontos  $A_4$  e  $B_4$ .

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**) – as projeções das duas retas no **plano 4** são efetivamente perpendiculares entre si.

Dessa forma, por  $K_4$  (a projeção do ponto  $K$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$ .

Para determinar a projeção frontal da reta  $p$  (no diedro de projeção inicial), é necessário recorrer a um outro ponto da reta  $p$  (para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção). Assim, determinou-se o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $p$  no diedro de projeção inicial), no novo diedro de projeção, a partir da sua projeção horizontal ( $F_1$ ), que se situa no eixo  $X$  (e que se mantém). Tendo em conta que se mantém as projeções horizontais na mudança do diedro de projeção efetuada, a projeção do ponto  $F$  no **plano 4** ( $F_4$ ) determinou-se diretamente (a partir da sua projeção horizontal).

Por fim, atendendo a que se mantiveram as cotas na mudança do diedro de projeção efetuada, determinou-se  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ), em função da sua cota, que se manteve. Por fim, desenhou-se  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), passando por  $F_2$  e por  $K_2$ . A reta  $p$  está, assim, definida por dois pontos – o ponto  $K$  e o ponto  $F$ .

As retas  $p$  e  $r$  são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 146.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $M$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $G$ ) e por uma direção (a direção dada pelo conjunto das suas projeções, dada no enunciado).

#### Resolução:

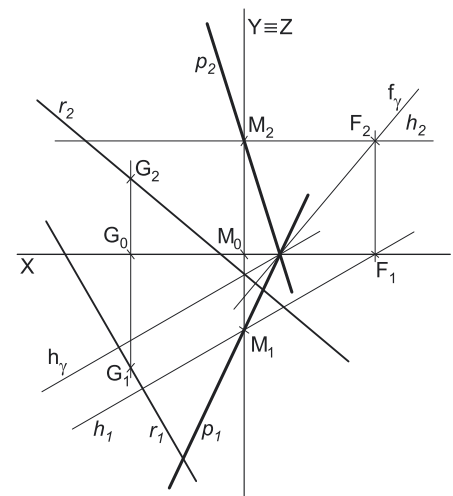
Pretende-se determinar as projeções de uma reta  $p$ , passante, ortogonal à reta  $r$ , e que contenha o ponto  $M$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $M$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta  $r$  é uma reta oblíqua, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $r$  e outra reta qualquer só se pode processar de forma direta, caso a outra reta seja uma reta horizontal (a ortogonalidade seria direta em projeção horizontal) ou uma reta frontal (a ortogonalidade seria direta em projeção frontal), o que não é o caso, pois a reta pedida é uma **reta passante** (nem a reta  $r$  nem a reta  $p$  são paralelas a qualquer dos planos de projeção).

O problema desta situação (à semelhança da situação anterior) reside, precisamente, no facto de a reta  $r$  não ser paralela a nenhum dos planos de projeção, pelo que a resolução do exercício não é direta (a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das suas projeções). Poder-se-ia resolver o exercício de forma semelhante à exposta no relatório do exercício anterior, transformando a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção, com o recurso a uma mudança do diedro de projeção.

No entanto, optou-se por outra situação – pelo recurso a um plano (o plano  $\gamma$ ) que contenha o ponto  $M$  e seja ortogonal à reta  $r$ , de forma a verificar-se o **Teorema da ortogonalidade entre retas e planos** (se um dado plano é ortogonal a uma reta dada, então toda e qualquer reta desse plano é ortogonal ou perpendicular à reta dada).

Começemos por determinar os traços do plano que passa pelo ponto  $M$  e é ortogonal à reta  $r$ . Para que o plano contenha o ponto  $M$ , o ponto  $M$  tem de pertencer ao plano, pelo que tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** em relação a esse plano (o ponto tem de pertencer a uma reta do plano). Por outro lado, para que o plano seja ortogonal à reta  $r$ , o plano tem de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $r$  (o plano tem de conter duas retas concorrentes que sejam perpendiculares ou ortogonais à reta  $r$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em primeiro lugar, conduziu-se, pelo ponto **M**, uma reta **h**, horizontal (de nível), ortogonal à reta **r** (a reta **h** é uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção horizontal). A reta **h** garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\gamma$  já contém uma reta ortogonal à reta **r** – a reta **h**;
2. que o ponto **M** pertence ao plano  $\gamma$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta **h**).

Para definir o plano  $\gamma$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\gamma$  – uma reta que seja **concorrente** com a reta **h** e que seja igualmente ortogonal à reta **r**. Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano  $\gamma$ , pois é a única situação em é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta **r** e uma reta **concorrente** com a reta **h**. Essa reta frontal (de frente) do plano  $\gamma$  pode ser, por exemplo, o próprio traço frontal do plano ( $f_\gamma$ ), que é concorrente com a reta **h** no seu traço frontal (o ponto **F**).

Assim, determinou-se o traço frontal da reta **h** (o ponto **F**) e pelo ponto **F** conduziu-se  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano  $\gamma$ ). A reta  $f_\gamma$  é uma reta frontal (de frente), pelo que a ortogonalidade entre a reta **r** e a reta  $f_\gamma$  é direta em projeção frontal –  $f_\gamma$  passa por **F<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **F**) e é perpendicular a **r<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **r**).

Em seguida determinou-se o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), que é concorrente com  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano) no eixo **X**, e é paralelo à reta **h**. O traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ) é uma reta que está definida por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\gamma$ , que é a direção da reta **h**).

O plano  $\gamma$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **M** e é ortogonal à reta **r** (pois contém duas retas concorrentes ortogonais à reta **r**).

Qualquer reta do plano  $\gamma$  é necessariamente ortogonal (ou perpendicular) à reta **r** (**Teorema da ortogonalidade entre planos e retas**). A reta **p**, pedida, é uma reta do plano  $\gamma$  que passe pelo ponto **M**, pelo que já tínhamos um ponto para definir a reta **p** – o ponto **M**. A reta **p** é uma **reta passante**, pelo que é concorrente com os traços do plano num ponto do eixo **X** – já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **p**. A reta **p** está definida por dois pontos – o ponto **M** e o ponto de concorrência dos traços do plano  $\gamma$  (que não se identificou).

As retas **p** e **r** são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta **r**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **p** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos traços do plano  $\gamma$  e de todos os traçados necessários à sua determinação ou, mesmo, do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

## 147.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta **r** e o ponto **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta **r** está definida por um ponto (o ponto **M**) e por uma direção (a direção dada pelo conjunto das suas duas projeções, dadas no enunciado). Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção horizontal da reta **p** ( $p_1$ ), passando pela projeção horizontal do ponto **P** (**P<sub>1</sub>**) e paralela a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta **r**).

### Resolução:

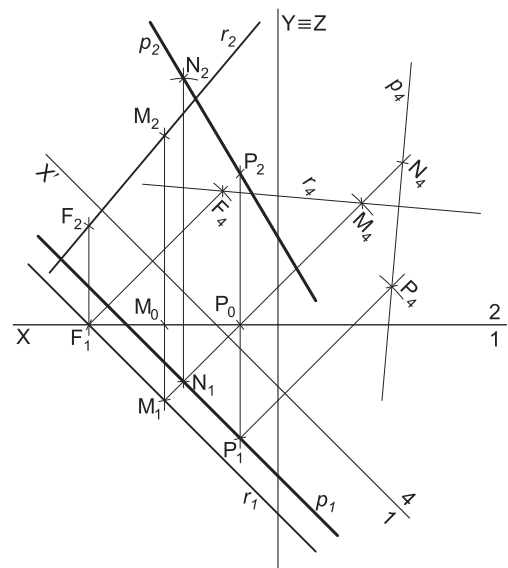
Pretende-se determinar as projeções de uma reta **p**, ortogonal à reta **r**, e passando pelo ponto **P**, sendo dada a sua projeção horizontal. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** passa pelo ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **p**. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nem a reta **r** nem a reta **p** são paralelas a qualquer dos planos de projeção, pelo que a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhum dos planos de projeção. Note que a reta **p** não é uma reta frontal (de frente), o que se constata a partir da sua projeção horizontal, que é dada. Por outro lado, caso a reta **p** fosse uma reta horizontal (de nível), e sendo ortogonal à reta **r**, as projeções horizontais das duas retas seriam perpendiculares, o que também não se verifica. Assim, a reta **p** é necessariamente uma reta oblíqua.

Uma vez que a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das projeções (porque nenhuma das retas é paralela a qualquer dos planos de projeção), é necessário transformar a reta **r** numa reta paralela a um dos planos de projeção (com o recurso a uma **mudança do diedro de projeção**) e, assim, fazer com que a ortogonalidade entre as duas retas se processe de forma direta numa das suas projeções.

Optou-se por se transformar a reta **r** numa reta frontal (de frente). Para tal substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo à reta **r**. Nesse sentido, criou-se um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção) e é paralelo a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ). Note que o eixo  $X'$  é também paralelo a  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ), pelo que a reta  $p$ , no novo diedro de projeção, é também uma reta frontal (de frente). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $M$  e  $P$  no **plano 4** ( $M_4$  e  $P_4$ ), em função das respetivas cotas.

Há que desenhar  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**) – o ponto  $M_4$  (a projeção do ponto  $M$  no **plano 4**). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um outro ponto da reta  $r$  (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e determinou-se a sua projeção no **plano 4** ( $F_4$ ), em função da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava. A projeção da reta  $r$  no **plano 4** ( $r_4$ ) está definida por dois pontos – os pontos  $M_4$  e  $F_4$ .

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**) – as projeções das duas retas no **plano 4** são efetivamente perpendiculares entre si.

Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$ .

Para determinar a projeção frontal da reta  $p$  (no diedro de projeção inicial), é necessário recorrer a um outro ponto da reta  $p$  (para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção). Assim, determinou-se o ponto  $N$ , um ponto qualquer da reta  $p$  – por uma questão de economia de traçados, optou-se por se localizar o ponto  $N$  na mesma linha de chamada do ponto  $M$  (no novo diedro de projeção). Nesse sentido, determinaram-se as projeções do ponto  $N$  no novo diedro de projeção ( $N_1$  e  $N_4$ ).

Por fim, atendendo a que se mantiveram as cotas na mudança do diedro de projeção efetuada, determinou-se  $N_2$  (a projeção frontal do ponto  $N$ ), em função da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ . Por fim, desenhou-se  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), passando por  $N_2$  e por  $P_2$ . A reta  $p$  está, assim, definida por dois pontos – o ponto  $P$  e o ponto  $N$ .

As retas  $p$  e  $r$  são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 148.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $M$ ) e por uma direção (a direção dada pelo conjunto das suas duas projeções, dadas no enunciado).

#### Resolução:

Pretende-se determinar as projeções de uma reta  $p$ , de perfil, ortogonal à reta  $r$ , e passando pelo ponto  $P$ . Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $P$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $r$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $P$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal à reta  $r$ ).

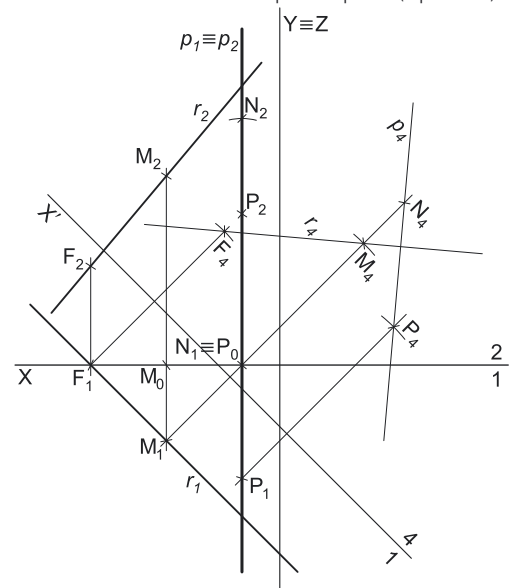
Por outro lado, para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nem a reta  $r$  nem a reta  $p$  são paralelas a qualquer dos planos de projeção, pelo que a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhum dos planos de projeção – a reta  $r$  é uma reta oblíqua e a reta  $p$  é uma reta de perfil.

Uma vez que a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das projeções (porque nenhuma das retas é paralela a qualquer dos planos de projeção), é necessário transformar a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção (com o recurso a uma **mudança do diedro de projeção**) e, assim, fazer com que a ortogonalidade entre as duas retas se processe de forma direta numa das suas projeções. O recurso à mudança do diedro de projeção permitir-nos-á ainda obter projeções da reta  $p$  que verifiquem o **Crítério de Reversibilidade**.

Optou-se por se transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente). Para tal substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo à reta  $r$ . Nesse sentido, criou-se um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção) e é paralelo a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $M$  e  $P$  no **plano 4** ( $M_4$  e  $P_4$ ), em função das respetivas cotas.

Há que desenhar  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**) – o ponto  $M_4$  (a projeção do ponto  $M$  no **plano 4**). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um outro ponto da reta  $r$  (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e determinou-se a sua projeção no **plano 4** ( $F_4$ ), em função da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava. A projeção da reta  $r$  no **plano 4** ( $r_4$ ) está definida por dois pontos – os pontos  $M_4$  e  $F_4$ .

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**) – as projeções das duas retas no **plano 4** são efetivamente perpendiculares entre si.

Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$ .

Para determinar a projeção frontal da reta  $p$  (no diedro de projeção inicial), é necessário recorrer a um outro ponto da reta  $p$  (para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção). Assim, determinou-se o ponto  $N$ , um ponto qualquer da reta  $p$  – por uma questão de economia de traçados, optou-se por se localizar o ponto  $N$  na mesma linha de chamada do ponto  $M$  (no novo diedro de projeção). Nesse sentido, determinaram-se as projeções do ponto  $N$  no novo diedro de projeção ( $N_1$  e  $N_4$ ).

Por fim, atendendo a que se mantiveram as cotas na mudança do diedro de projeção efetuada, determinou-se  $N_2$  (a projeção frontal do ponto  $N$ ), em função da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ , que está, assim, definida por dois pontos – o ponto  $P$  e o ponto  $N$ .

As retas  $p$  e  $r$  são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 149.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela a  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas a  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

### Resolução:

Pretende-se determinar as projeções de uma reta  $p$ , ortogonal à reta  $r$ , passando pelo ponto  $P$  e pertencente a  $\beta_{1/3}$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $P$  (que é um ponto do  $\beta_{1/3}$ ), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

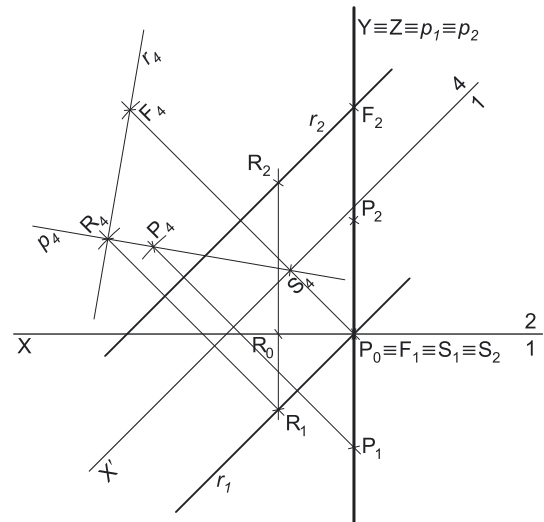
Nem a reta  $r$  nem a reta  $p$  são paralelas a qualquer dos planos de projeção, pelo que a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhum dos planos de projeção. Note que a reta  $p$ , porque é uma reta do  $\beta_{1/3}$ , não pode ser nem uma reta frontal (de frente) nem uma reta horizontal (de nível).

Uma vez que a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das projeções (porque nenhuma das retas é paralela a qualquer dos planos de projeção), é necessário transformar a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção (com o recurso a uma **mudança do diedro de projeção**) e, assim, fazer com que a ortogonalidade entre as duas retas se processe de forma direta numa das suas projeções.

Optou-se por se transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente). Para tal substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo à reta  $r$ . Nesse sentido, criou-se um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção) e é paralelo a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ). Note que o eixo  $X'$  é também paralelo a  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ), pelo que a reta  $p$ , no novo diedro de projeção, é também uma reta frontal (de frente). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $R$  e  $P$  no **plano 4** ( $R_4$  e  $P_4$ ), em função das respetivas cotas.



(continua na página seguinte)







(continuação da página anterior)

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), pelo que a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**) – as projeções das duas retas no **plano 4** são efetivamente perpendiculares entre si. Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), o que nos garante a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$ .

Por outro lado, as retas  $p$  e  $r$  são **perpendiculares**, pelo que as duas retas são necessariamente concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas.  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**) com  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

Em seguida determinou-se a projeção frontal do ponto  $I$  ( $I_2$ ), sobre a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) na mesma linha de chamada de  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ . A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ . Assim, desenharam-se as projeções da reta  $p$ , passando pelas projeções homónimas dos pontos  $P$  e  $I$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 151.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $F$  (o seu traço frontal).

### Resolução:

Pretende-se determinar as projeções de uma reta  $p$ , **perpendicular** à reta  $r$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nem a reta  $r$  nem a reta  $p$  são paralelas a qualquer dos planos de projeção, pelo que a perpendicularidade entre as duas retas não é direta em nenhum dos planos de projeção.

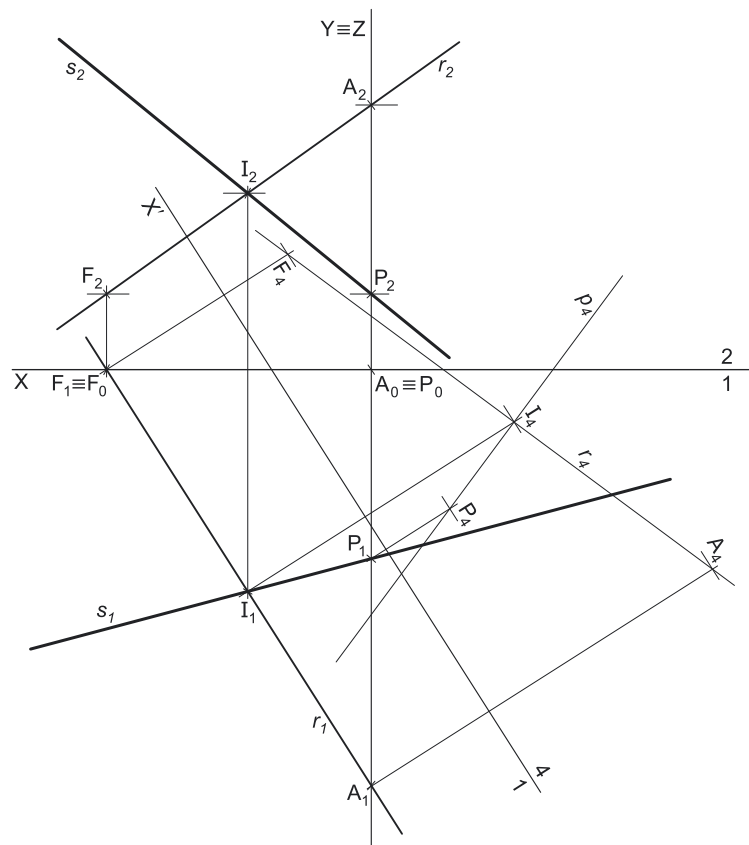
Uma vez que a perpendicularidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das projeções (porque nenhuma das retas é paralela a qualquer dos planos de projeção), é necessário transformar a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção (com o recurso a uma **mudança do diedro de projeção**) e, assim, fazer com que a ortogonalidade entre as duas retas se processe de forma direta numa das suas projeções.

Optou-se por se transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente). Para tal substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo à reta  $r$ . Nesse sentido, criou-se um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção) e é paralelo a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $A$ ,  $F$  e  $P$  no **plano 4** ( $A_4$ ,  $F_4$  e  $P_4$ ), em função das respetivas cotas.

Em seguida desenhou-se  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), que passa por  $A_4$  e por  $F_4$ . A projeção da reta  $r$  no **plano 4** ( $r_4$ ) está definida por dois pontos – os pontos  $A_4$  e  $F_4$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), pelo que a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**) – as projeções das duas retas no **plano 4** são efetivamente perpendiculares entre si. Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), o que nos garante a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$ .

Por outro lado, as retas  $p$  e  $r$  são **perpendiculares**, pelo que as duas retas são necessariamente concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas.  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**) com  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

Em seguida determinou-se a projeção frontal do ponto  $I$  ( $I_2$ ), sobre a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) na mesma linha de chamada de  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ . A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ . Assim, desenharam-se as projeções da reta  $p$ , passando pelas projeções homónimas dos pontos  $P$  e  $I$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 152.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $A$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  é uma reta de perfil, que está definida por dois pontos – os pontos  $M$  e  $N$ .

#### Resolução:

Pretende-se determinar as projeções de uma reta  $m$ , **perpendicular** à reta  $p$  e passando pelo ponto  $A$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $m$  passa pelo ponto  $A$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $m$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nem a reta  $p$  nem a reta  $m$  são paralelas a qualquer dos planos de projeção, pelo que a perpendicularidade entre as duas retas não é direta em nenhum dos planos de projeção.

Uma vez que a perpendicularidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das projeções (porque nenhuma das retas é paralela a qualquer dos planos de projeção), é necessário transformar a reta  $p$  numa reta paralela a um dos planos de projeção (com o recurso a uma **mudança do diedro de projeção**) e, assim, fazer com que a ortogonalidade entre as duas retas se processe de forma direta numa das suas projeções.

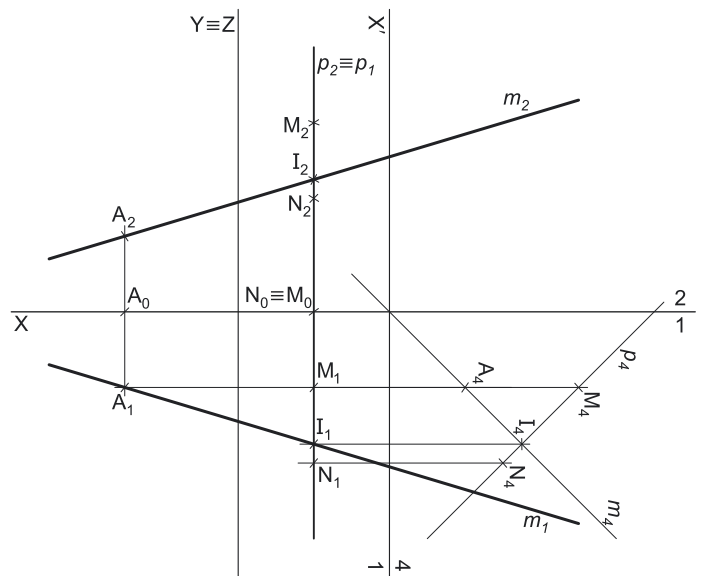
Optou-se por se transformar a reta  $p$  numa reta frontal (de frente). Para tal substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo à reta  $p$ . Nesse sentido, criou-se um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção) e é paralelo a  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $M$ ,  $N$  e  $A$  no **plano 4** ( $M_4$ ,  $N_4$  e  $A_4$ ), em função das respetivas cotas.

Em seguida desenhou-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), que passa por  $M_4$  e por  $N_4$ . A projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ) está definida por dois pontos – os pontos  $M_4$  e  $N_4$ .

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente), pelo que a perpendicularidade entre a reta  $m$  e a reta  $p$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**) – as projeções das duas retas no **plano 4** são efetivamente perpendiculares entre si. Dessa forma, por  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**) conduziu-se  $m_4$  (a projeção da reta  $m$  no **plano 4**), perpendicular a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), o que nos garante a perpendicularidade entre a reta  $m$  e a reta  $p$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, as retas  $m$  e  $p$  são **perpendiculares**, pelo que as duas retas são necessariamente concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas.  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $m_4$  (a projeção da reta  $m$  no **plano 4**) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ).

Em seguida determinou-se a projeção frontal do ponto  $I$  ( $I_2$ ), sobre a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) e a partir da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $m$ . A reta  $m$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $I$ . Assim, desenharam-se as projeções da reta  $m$ , passando pelas projeções homónimas dos pontos  $A$  e  $I$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $m$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 153.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  é uma reta de perfil passante, pelo que é concorrente com o eixo  $X$ . Assim, a reta  $p$  está definida por dois pontos – o ponto  $A$  e o ponto  $B$  (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ).

### Resolução:

Pretende-se determinar as projeções de uma reta  $r$ , **perpendicular** à reta  $p$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $r$  passa pelo ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nem a reta  $p$  nem a reta  $r$  são paralelas a qualquer dos planos de projeção, pelo que a perpendicularidade entre as duas retas não é direta em nenhum dos planos de projeção.

Uma vez que a perpendicularidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das projeções (porque nenhuma das retas é paralela a qualquer dos planos de projeção), é necessário transformar a reta  $p$  numa reta paralela a um dos planos de projeção (com o recurso a uma **mudança do diedro de projeção**) e, assim, fazer com que a ortogonalidade entre as duas retas se processe de forma direta numa das suas projeções.

Optou-se por se transformar a reta  $p$  numa reta frontal (de frente). Para tal substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo à reta  $p$ . Nesse sentido, criou-se um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção) e é paralelo a  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $P$  no **plano 4** ( $A_4$ ,  $B_4$  e  $P_4$ ), em função das respetivas cotas.

Em seguida desenhou-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), que passa por  $A_4$  e por  $B_4$ . A projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ) está definida por dois pontos – os pontos  $A_4$  e  $B_4$ .

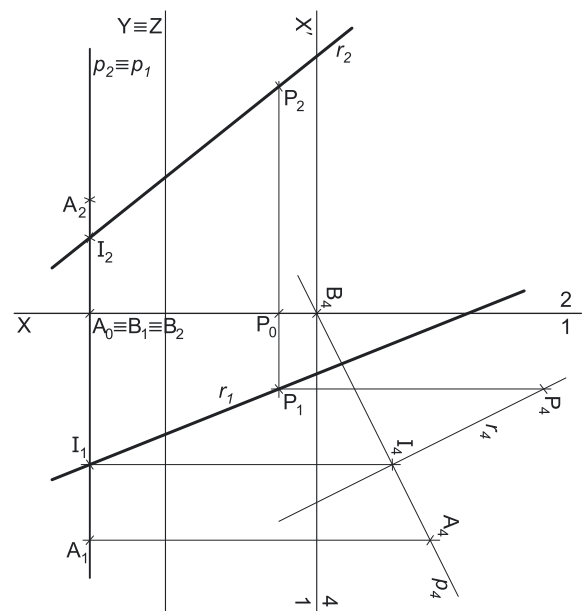
No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente), pelo que a perpendicularidade entre a reta  $r$  e a reta  $p$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**) – as projeções das duas retas no **plano 4** são efetivamente perpendicular<sub>es</sub> entre si. Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), perpendicular a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), o que nos garante a perpendicularidade entre a reta  $r$  e a reta  $p$ .

Por outro lado, as retas  $r$  e  $p$  são **perpendiculares**, pelo que as duas retas são necessariamente concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas.  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ).

Em seguida determinou-se a projeção frontal do ponto  $I$  ( $I_2$ ), sobre a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) e a partir da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$ . A reta  $r$  está definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ . Assim, desenharam-se as projeções da reta  $r$ , passando pelas projeções homónimas dos pontos  $P$  e  $I$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $r$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 154.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto  $P$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). A reta  $r$  é uma reta de perfil, que está definida por um ponto (o ponto  $R$ ) e pela sua direção (dada pelo ângulo que a reta  $r$  faz com o Plano Horizontal de Projeção).

**Resolução:**

Pretende-se determinar as projeções de uma reta  $p$ , perpendicular à reta  $r$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nem a reta  $p$  nem a reta  $r$  são paralelas a qualquer dos planos de projeção, pelo que a perpendicularidade entre as duas retas não é direta em nenhum dos planos de projeção.

Uma vez que a perpendicularidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das projeções (porque nenhuma das retas é paralela a qualquer dos planos de projeção), é necessário transformar a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção (com o recurso a uma **mudança do diedro de projeção**) e, assim, fazer com que a ortogonalidade entre as duas retas se processe de forma direta numa das suas projeções.

Optou-se por se transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente). Para tal substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo à reta  $r$ . Nesse sentido, criou-se um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção) e é paralelo a  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $R$  e  $P$  no **plano 4** ( $R_4$  e  $P_4$ ), em função das respectivas cotas.

Em seguida há que desenhar  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), que passa por  $R_4$  (a projeção do ponto  $R$  no **plano 4**). No entanto, temos apenas um ponto para definir  $r_4$  (que é uma reta). Por outro lado, é dado o ângulo que a reta  $r$  faz com o Plano Horizontal de Projeção – atendendo que no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), o ângulo que a reta  $r$  faz com o Plano Horizontal de Projeção está em verdadeira grandeza no ângulo entre a reta  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**) e o eixo  $X'$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir  $r_4$ . Nesse sentido, por  $R_4$  (a projeção do ponto  $R$  no **plano 4**) conduziu-se  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**) fazendo, com o eixo  $X'$ , um ângulo de  $30^\circ$  e garantindo-se, ainda, que o traço horizontal da reta  $r$  tem afastamento positivo (para que o traço horizontal da reta  $r$  se situe no **SPHA**) – tenha em conta que não se determinou o traço horizontal da reta  $r$ . Salienta-se que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de  $R_4$ , aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

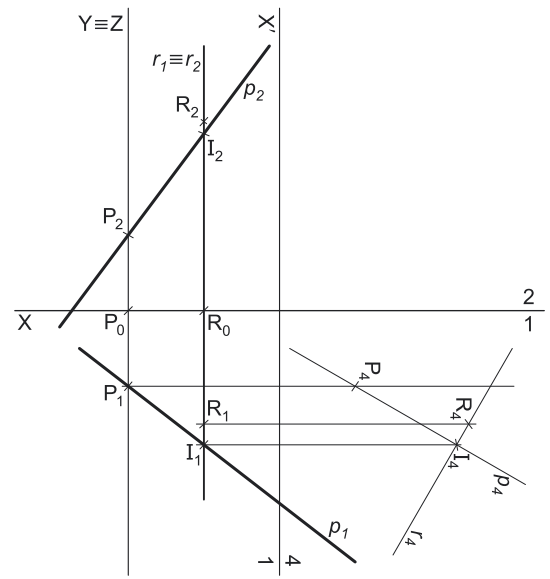
No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), pelo que a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**) – as projeções das duas retas no **plano 4** são efetivamente perpendiculares entre si. Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), o que nos garante a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$ .

Por outro lado, as retas  $p$  e  $r$  são **perpendiculares**, pelo que as duas retas são necessariamente concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas.  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

Em seguida determinou-se a projeção frontal do ponto  $I$  ( $I_2$ ), sobre a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) e a partir da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$ . A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ . Assim, desenharam-se as projeções da reta  $p$ , passando pelas projeções homónimas dos pontos  $P$  e  $I$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).





(continuação da página anterior)

*Estabelecimento da relação de pertença da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ :*

A reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , pelo que tem de verificar a **condição para que uma reta pertença a um plano**, em relação ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da reta  $p$  (o ponto  $H'$ ), no novo diedro de projeção. Tendo em conta que se mantêm as cotas (na mudança do diedro de projeção efetuada), ponto  $H'$ , no novo diedro de projeção, continua a ter cota nula.

Assim, determinou-se  $H'_4$  (a projeção do ponto  $H'$  no **plano 4**), que se situa no eixo  $X' - H'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H'$ ) situa-se necessariamente sobre  $h_\alpha$ , pois mantêm-se as projeções horizontais e a reta pertence ao plano  $\alpha$  (o seu traço horizontal tem de se situar sobre o traço horizontal do plano  $\alpha$ ). Este procedimento permite-nos, em seguida, determinar  $H'_2$  (a projeção frontal do ponto  $H'$ ), que se situa no eixo  $X$  (pois é o ponto da reta que tem cota nula). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ .

A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $I$  e  $H'$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $p$ , passando pelas projeções homónimas dos pontos  $I$  e  $H'$ . Note que o ponto  $I$  já era um ponto do plano  $\alpha$  e foi o primeiro ponto da reta  $p$  que foi determinado.

A reta  $p$ , definida pelos pontos  $I$  e  $H'$ , é a reta que pertence ao plano  $\alpha$  e é **perpendicular** à reta  $r$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$  e as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\theta$ , da reta  $i$ , de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 156.

**Critério de ortogonalidade entre planos:** um plano é ortogonal a outro plano dado se e só se contiver uma reta ortogonal ao plano dado, ou seja, se o plano contiver a «família» de retas ortogonal ao outro plano.

## 157.

O problema admite **infinitas soluções**. Segundo o **critério da ortogonalidade entre planos**, para que o plano  $\delta$  seja ortogonal ao plano  $\alpha$ , o plano  $\delta$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$ . Por outro lado, para que o plano pedido contenha o ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\delta$ . Assim, há que recorrer a uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  que contenha o ponto  $P$  – qualquer plano que contenha essa reta contém o ponto  $P$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . De facto, por  $P$  é possível, apenas, conduzir **uma única** reta ortogonal ao plano  $\alpha$  mas, no entanto, **todos os planos** que contenham essa reta (que são **infinitos planos**) serão necessariamente ortogonais ao plano  $\alpha$  e contêm o ponto  $P$ .

## 158.

Para que um plano seja ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção, esse plano tem de conter a «família» de retas ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção. Essa «família» de retas é a **«família» das retas verticais** (a «família» das retas projetantes horizontais). Um plano vertical (um plano projetante horizontal) contém necessariamente a «família» das retas verticais (projetantes horizontais), pelo que, nesse sentido, qualquer plano vertical é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção – porque verifica o **Critério de ortogonalidade entre planos** e relação ao Plano Horizontal de Projeção.

## 159.

Para que um plano seja ortogonal ao Plano Frontal de Projeção, esse plano tem de conter a «família» de retas ortogonal ao Plano Frontal de Projeção. Essa «família» de retas é a **«família» das retas de topo** (a «família» das retas projetantes frontais). Um plano de topo (um plano projetante frontal) contém necessariamente a «família» das retas de topo (projetantes frontais), pelo que, nesse sentido, qualquer plano de topo é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção – porque verifica o **Critério de ortogonalidade entre planos** e relação ao Plano Frontal de Projeção.

## 160.

Considerando um plano de rampa qualquer, a «família» de retas ortogonal a esse plano de rampa é necessariamente **uma determinada «família» de retas de perfil**. Um plano de perfil contém **todas as direções de retas de perfil**, ou seja, todas as «famílias» de retas de perfil. Nesse sentido, qualquer plano de perfil conterà, com toda a certeza, a «família» de retas de perfil que é ortogonal a esse plano de rampa (exatamente porque contém **todas** as «famílias» de retas de perfil). Assim, qualquer que seja o plano de rampa considerado, qualquer plano de perfil conterà, com toda a certeza, a «família» de retas ortogonal a esse plano de rampa, pelo que qualquer plano de perfil verificará o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação a esse plano de rampa.



## 161.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $v$ , pelo seu traço frontal. O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano qualquer, que contenha o ponto **P** e que seja ortogonal ao plano  $v$  – esse plano tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $v$  (o plano tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $v$ , ou seja, o plano tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $v$ ).

Assim, o plano pedido tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $v$  – uma reta ortogonal a um plano horizontal (de nível), é necessariamente uma **reta vertical** (uma reta projetante horizontal). Por outro lado, para que o plano pedido contenha o ponto **P**, o ponto **P** tem de pertencer ao plano pedido, ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

Assim, pelo ponto **P** conduziu-se uma reta  $p$ , vertical (que é ortogonal ao plano  $v$ ). A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto **P**) e pela sua direção (uma reta vertical). Já se garantiu que o plano pedido contém o ponto **P** (porque o ponto **P** pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ). Já se garantiu, também, que o plano pedido é ortogonal ao plano  $v$  (porque contém uma reta ortogonal ao plano  $v$  – a reta  $p$ ).

Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $v$  e contém o ponto **P**. Os planos que contêm a reta  $p$  são **planos verticais** (infinitas hipóteses), um **plano frontal (de frente)** e um **plano de perfil**. Optou-se por definir pelos seus traços um plano  $\gamma$ , vertical, qualquer, contendo a reta  $p$ .

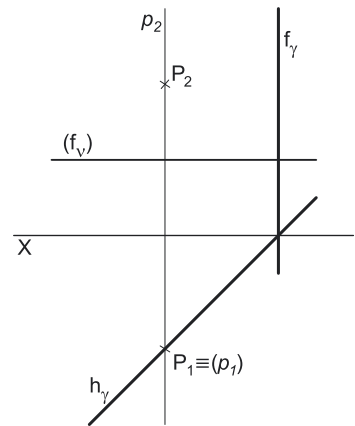
O plano  $\gamma$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **P** (o ponto **P** pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $v$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $v$  – a reta  $p$ ).

**Tipo de soluções:** como acima se referiu, o problema admite três diferentes tipos de soluções, que são todos os tipos de **planos projetantes horizontais** (a reta  $p$  é uma reta projetante horizontal) – planos verticais, planos frontais (de frente) e planos de perfil.

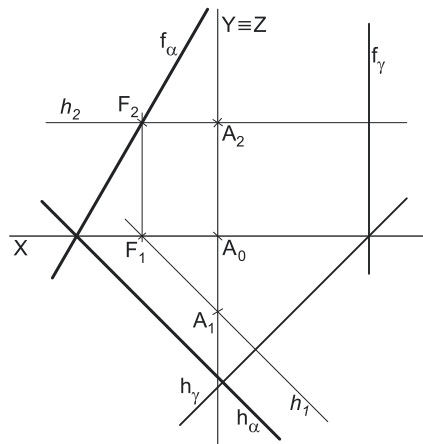
**Número de soluções:** como acima se referiu, o problema admite uma infinidade de hipóteses de soluções, das quais são **uma infinidade** de planos verticais, **um único** plano frontal (existe um único plano frontal que contém a reta  $p$ ) e **um único** plano de perfil (existe um único plano de perfil que contém a reta  $p$ ).

### Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano  $v$ ) representou-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\gamma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ ).



## 162.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, bem como o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\alpha$ , oblíquo, que contenha o ponto **A** e que seja ortogonal ao plano  $\gamma$  – o plano  $\alpha$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\gamma$ , ou seja, o plano  $\alpha$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\gamma$ .

Assim, o plano  $\alpha$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\gamma$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\gamma$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Por outro lado, para que o plano contenha o ponto **A**, o ponto **A** tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

Assim, pelo ponto **A** conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\gamma$ . A projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) passa por **A**<sub>2</sub> e é perpendicular a  $f_\gamma$  ( $f_\gamma$  é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_\gamma$  é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) passa por **A**<sub>1</sub> e é perpendicular a  $h_\gamma$  ( $h_\gamma$  é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_\gamma$  é direta em projeção horizontal). A reta  $p$  é, assim, ortogonal ao plano  $\gamma$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\gamma$  – os seus traços ( $f_\gamma$  e  $h_\gamma$ ).

A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto **A**) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\gamma$ ). Note que a reta  $p$  é uma reta horizontal (de nível). Já se garantiu que o plano  $\alpha$  contém o ponto **A** (porque o ponto **A** pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ). Já se garantiu, também, que o plano  $\alpha$  é ortogonal ao plano  $\gamma$  (porque contém uma reta ortogonal ao plano  $\gamma$  – a reta  $p$ ).

Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\gamma$  e contém o ponto **A**. Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $p$  – o ponto **F**. A reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** (o traço frontal da reta tem de estar sobre o traço frontal do plano).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, pelo ponto **F** conduziu-se  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ), com a direção dada no enunciado –  $f_\alpha$  é uma reta que está definida por um ponto (o ponto **F**) e uma direção (a direção dada no enunciado).

Em seguida determinou-se o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano são concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos um ponto para definir  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – esse ponto é o ponto de concorrência de  $f_\alpha$  com o eixo **X**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir  $h_\alpha$  – a direção das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ . Assim, desenhou-se  $h_\alpha$ , que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e uma direção (é paralelo à reta  $h$ ).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **A** (o ponto **A** pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $\gamma$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\gamma$  – a reta  $p$ ).

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\gamma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 163.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, bem como o ponto **P**, pelas suas projeções, em função dos dados.

#### Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\delta$ , oblíquo, que contenha o ponto **P** e que seja ortogonal ao plano  $\alpha$  – o plano  $\delta$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\alpha$  (o plano  $\delta$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$ , ou seja, o plano  $\delta$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\alpha$ ).

Assim, o plano  $\delta$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Por outro lado, para que o plano  $\delta$  contenha o ponto **P**, o ponto **P** tem de pertencer ao plano  $\delta$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

Assim, pelo ponto **P** conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . A projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) passa por  $P_2$  e é perpendicular a  $f_\alpha$  ( $f_\alpha$  é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_\alpha$  é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) passa por  $P_1$  e é perpendicular a  $h_\alpha$  ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_\alpha$  é direta em projeção horizontal). A reta  $p$  é, assim, ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  – os seus traços ( $f_\alpha$  e  $h_\alpha$ ).

A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto **P**) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\alpha$ ) – a reta  $p$  é uma reta oblíqua. Já se garantiu que o plano  $\delta$  contém o ponto **P** (porque o ponto **P** pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ). Já se garantiu, também, que o plano  $\delta$  é ortogonal ao plano  $\alpha$  (porque contém uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – a reta  $p$ ).

Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\alpha$  e contém o ponto **P**. Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $p$  – o ponto **F**. A reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\delta$ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** (o traço frontal da reta tem de estar sobre o traço frontal do plano).

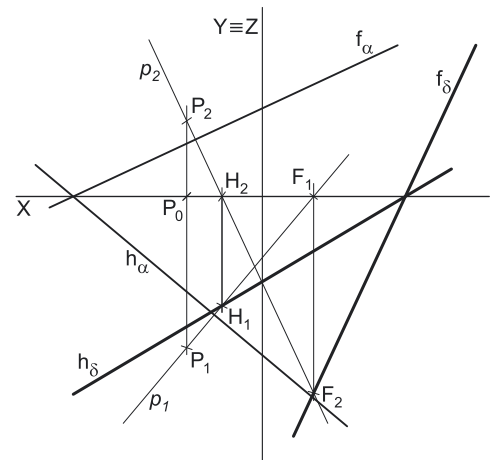
Assim, pelo ponto **F** conduziu-se  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ), com a direção dada no enunciado –  $f_\delta$  é uma reta que está definida por um ponto (o ponto **F**) e uma direção (a direção dada no enunciado).

Em seguida determinou-se o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano são concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos um ponto para definir  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ) – esse ponto é o ponto de concorrência de  $f_\delta$  com o eixo **X**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta  $p$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ). Assim, desenhou-se  $h_\delta$ , que está definido por dois pontos – o ponto **H** (o traço horizontal da reta  $p$ ) e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

O plano  $\delta$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **P** (o ponto **P** pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $\alpha$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – a reta  $p$ ).

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\delta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 164.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\theta$ , oblíquo, que contenha o ponto  $P$  e que seja ortogonal ao plano  $\alpha$  – o plano  $\theta$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\alpha$  (o plano  $\theta$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$ , ou seja, o plano  $\theta$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\alpha$ ).

Assim, o plano  $\theta$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Por outro lado, para que o plano  $\theta$  contenha o ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano  $\theta$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

Assim, pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . A projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) passa por  $P_2$  e é perpendicular a  $f_\alpha$  ( $f_\alpha$  é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_\alpha$  é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) passa por  $P_1$  e é perpendicular a  $h_\alpha$  ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_\alpha$  é direta em projeção horizontal). A reta  $p$  é, assim, ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  – os seus traços ( $f_\alpha$  e  $h_\alpha$ ).

A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\alpha$ ) – a reta  $p$  é uma reta oblíqua. Já se garantiu que o plano  $\theta$  contém o ponto  $P$  (porque o ponto  $P$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ). Já se garantiu, também, que o plano  $\theta$  é ortogonal ao plano  $\alpha$  (porque contém uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – a reta  $p$ ).

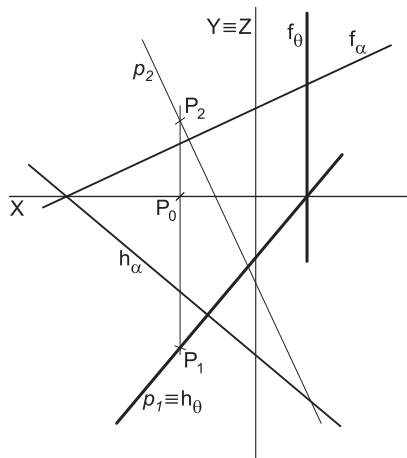
Assim, qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\alpha$  e contém o ponto  $P$ . Tendo em conta que o plano pedido é um plano vertical, que é um plano projetante horizontal, os traços do plano  $\theta$  determinam-se de forma direta. Nesse sentido, identificou-se o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), que está coincidente com a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), exatamente porque se trata de um plano projetante horizontal – o plano  $\theta$  é o plano projetante horizontal da reta  $p$  (tem-se, imediatamente,  $h_\theta \equiv p_1$ ).

Em seguida determinou-se o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ) – esse ponto é o ponto de concorrência de  $h_\theta$  com o eixo  $X$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Acontece que o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é uma reta frontal (de frente) do plano, com afastamento nulo, e, **no caso dos planos verticais**, as retas frontais (de frente) do plano são **retas verticais**. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Assim, desenhou-se  $f_\theta$ , que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas verticais).

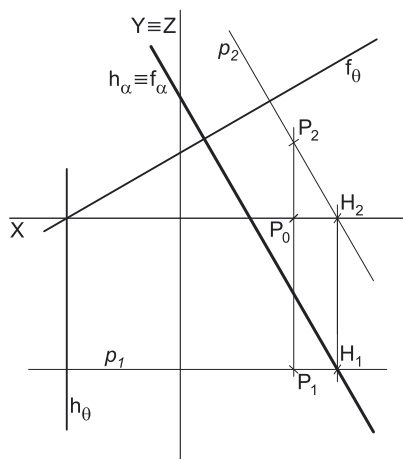
O plano  $\theta$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $P$  (o ponto  $P$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $\alpha$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – a reta  $p$ ).

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\theta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 165.



### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\theta$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\alpha$ , oblíquo, que contenha o ponto  $P$  e que seja ortogonal ao plano  $\theta$  – o plano  $\alpha$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\theta$  (o plano  $\alpha$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\theta$ , ou seja, o plano  $\alpha$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\theta$ ).

Assim, o plano  $\alpha$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\theta$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\theta$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Por outro lado, para que o plano  $\alpha$  contenha o ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\theta$ . A projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) passa por  $P_2$  e é perpendicular a  $f_0$  ( $f_0$  é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_0$  é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) passa por  $P_1$  e é perpendicular a  $h_0$  ( $h_0$  é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_0$  é direta em projeção horizontal). A reta  $p$  é, assim, ortogonal ao plano  $\theta$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\theta$  – os seus traços ( $f_0$  e  $h_0$ ).

A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\theta$ ). Note que a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente). Já se garantiu que o plano  $\alpha$  contém o ponto  $P$  (porque o ponto  $P$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ). Já se garantiu, também, que o plano  $\alpha$  é ortogonal ao plano  $\theta$  (porque contém uma reta ortogonal ao plano  $\theta$  – a reta  $p$ ).

Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\theta$  e contém o ponto  $P$ . Assim, determinou-se o traço horizontal da reta  $p$  – o ponto  $H$ . A reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** (o traço horizontal da reta tem de estar sobre o traço horizontal do plano). Já temos um ponto para definir  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $h_\alpha$ .

A reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (que é uma reta frontal do plano com afastamento nulo). Nesse sentido, sabe-se imediatamente que o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é paralelo à reta  $f$ , ou seja, paralelo a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Assim, porque o plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes (é dado no enunciado), já temos a direção que nos faltava para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) – a direção de  $f_2$ .

Nesse sentido,  $h_\alpha$  passa por  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H$ ) e é paralelo a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Salienta-se que direção determinada é uma direção que existe **apenas no papel** (após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção), pois, **no espaço**,  $h_\alpha$  não é paralelo a  $f_2$ .

Tendo em conta que o plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, a determinação do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é imediata – tem-se, imediatamente,  $f_\alpha \equiv h_\alpha$ . Na prática, o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ).

Sublinha-se que os traços do plano  $\alpha$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\alpha$  só poderiam estar coincidentes, caso se tratasse de um plano passante (o que não é o caso).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $P$  (o ponto  $P$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $\theta$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\theta$  – a reta  $p$ ).

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 166.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\lambda$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $G$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

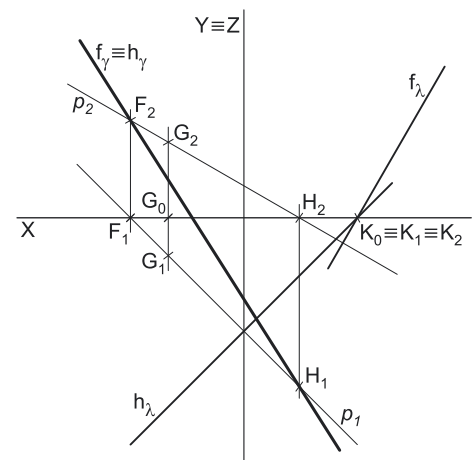
#### Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\gamma$ , ortogonal ao plano  $\lambda$ , que contenha o ponto  $P$  e que tenha os seus traços coincidentes. O plano  $\gamma$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\lambda$  (o plano  $\gamma$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\lambda$ , ou seja, o plano  $\gamma$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\lambda$ ).

Assim, o plano  $\gamma$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\lambda$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\lambda$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Por outro lado, para que o plano contenha o ponto  $G$ , o ponto  $G$  tem de pertencer ao plano  $\gamma$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

Assim, pelo ponto  $G$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\lambda$ . A projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) passa por  $G_2$  e é perpendicular a  $f_\lambda$  ( $f_\lambda$  é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_\lambda$  é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) passa por  $G_1$  e é perpendicular a  $h_\lambda$  ( $h_\lambda$  é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_\lambda$  é direta em projeção horizontal). A reta  $p$  é, assim, ortogonal ao plano  $\lambda$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\lambda$  – os seus traços ( $f_\lambda$  e  $h_\lambda$ ).

A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $G$ ) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\lambda$ ). Já se garantiu que o plano  $\gamma$  contém o ponto  $G$  (porque o ponto  $G$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ). Já se garantiu, também, que o plano  $\gamma$  é ortogonal ao plano  $\lambda$  (porque contém uma reta ortogonal ao plano  $\lambda$  – a reta  $p$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\lambda$  e contém o ponto  $G$ . Assim, determinaram-se os traços da reta  $p$  nos planos de projeção – os pontos  $F$  e  $H$ . A reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\gamma$ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** (o traço horizontal da reta tem de estar sobre o traço horizontal do plano e o traço frontal da reta tem de estar sobre o traço frontal do plano).

Assim,  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano) em de passar pelo ponto  $F$  e  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano) tem de passar pelo ponto  $H$ . Atendendo a que o plano  $\gamma$  tem os seus traços coincidentes (como o enunciado pede expressamente), os dois traços do plano situam-se numa única reta que está definida por dois pontos –  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H$ ) e  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ).

Assim, desenharam-se os traços do plano  $\gamma$ . Sublinha-se que os traços do plano  $\gamma$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\gamma$  só poderiam estar coincidentes, caso se tratasse de um plano passante (o que não é o caso).

O plano  $\gamma$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $G$  (o ponto  $G$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $\lambda$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\lambda$  – a reta  $p$ ).

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\lambda$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\gamma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 167.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $M$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Salienta-se que os traços do plano  $\alpha$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\alpha$  só poderiam estar coincidentes, caso se tratasse de um plano passante (o que não é o caso).

### Resolução:

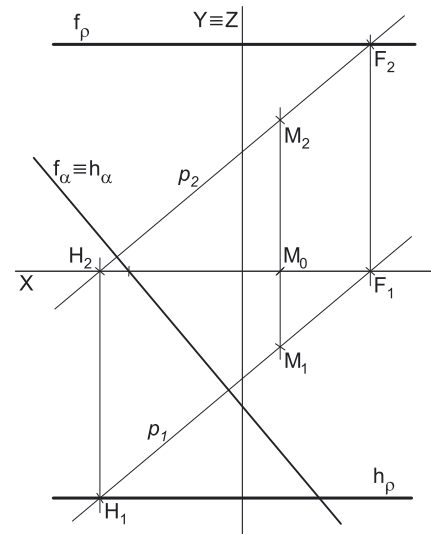
Pretende-se determinar os traços de um plano  $\rho$ , de rampa, que contenha o ponto  $M$  e que seja ortogonal ao plano  $\alpha$  – o plano  $\rho$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\alpha$  (o plano  $\rho$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$ , ou seja, o plano  $\rho$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\alpha$ ).

Assim, o plano  $\rho$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Por outro lado, para que o plano contenha o ponto  $M$ , o ponto  $M$  tem de pertencer ao plano  $\rho$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

Assim, pelo ponto  $M$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . A projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) passa por  $M_2$  e é perpendicular a  $f_\alpha$  ( $f_\alpha$  é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_\alpha$  é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) passa por  $M_1$  e é perpendicular a  $h_\alpha$  ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_\alpha$  é direta em projeção horizontal). A reta  $p$  é, assim, ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  – os seus traços ( $f_\alpha$  e  $h_\alpha$ ).

A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $M$ ) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\alpha$ ). Note que, nesta situação, a reta  $p$  tem as suas projeções paralelas entre si, pelo que é necessariamente uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). Já se garantiu que o plano  $\rho$  contém o ponto  $M$  (porque o ponto  $M$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ). Já se garantiu, também, que o plano  $\rho$  é ortogonal ao plano  $\alpha$  (porque contém uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – a reta  $p$ ).

Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\alpha$  e contém o ponto  $M$ . Assim, determinou-se o traço horizontal da reta  $p$  (por exemplo) – o ponto  $H$ . A reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\rho$ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** (o traço horizontal da reta tem de estar sobre o traço horizontal do plano). Já temos um ponto para definir  $h_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $h_\rho$ . O traço horizontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano, com cota nula, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) –  $h_\rho$  passa pelo ponto  $H$  e é paralelo ao eixo  $X$ . Assim, o traço horizontal do plano ( $h_\rho$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Sobre a reta  $p_r$  representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $F'_r$  (o ponto  $F'_r$  é, em rebatimento, o traço frontal da reta  $p$ ). O ponto  $F'$  é o ponto que nos permitirá definir a reta  $p$ . Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $F'$ . Note que o ponto  $F'_r$  é o ponto de interseção de  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) com  $f_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  em rebatimento). O ponto  $F'$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F'_2 \equiv F'_r$ . A reta  $p$  (definida pelos pontos  $A$  e  $F'$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$  e contém o ponto  $A$ .

### Determinação dos traços do plano $\sigma$ :

Já temos o traço frontal da reta  $p$  – o ponto  $F'$ . A reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\sigma$ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** (o traço frontal da reta tem de estar sobre o traço frontal do plano). Já temos um ponto para definir  $f_\sigma$  (o traço frontal do plano  $\sigma$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $f_\sigma$ . O traço frontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizantal do plano, com afastamento nulo, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $f_\sigma$  (o traço frontal do plano  $\sigma$ ) –  $f_\sigma$  passa pelo ponto  $F'$  e é paralelo ao eixo  $X$ . Assim, o traço frontal do plano ( $f_\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F'$ ) e por uma direção (é fronto-horizantal).

Para determinar o traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_\sigma$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço horizontal do plano ( $h_\sigma$ ) é uma reta fronto-horizantal, pelo que já temos uma direção para definir  $h_\sigma$ . Falta-nos um ponto. Esse ponto tem de ser o traço horizontal da reta  $p$ . Assim, em rebatimento, determinou-se o ponto  $H'_r - H'_r$  é, em rebatimento, o traço horizontal da reta  $p$ . Note que o ponto  $H'_r$  é o ponto de interseção de  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) com  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  em rebatimento). Em seguida inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $H'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\sigma$  –  $h_\sigma$  (o traço horizontal do plano  $\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H'$ ) e uma direção (é fronto-horizantal).

O plano  $\sigma$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $A$  (o ponto  $A$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $\rho$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\rho$  – a reta  $p$ ).

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\sigma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$  em rebatimento e, ainda, de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).

## 169.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $D$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\alpha$ , oblíquo, que contenha o ponto  $D$  e que seja ortogonal ao plano  $\rho$  – o plano  $\alpha$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\rho$  (o plano  $\alpha$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\rho$ , ou seja, o plano  $\alpha$  tem de conter a «família» de retas ortogonais ao plano  $\rho$ ).

Assim, o plano  $\alpha$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\rho$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$ , ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano  $\rho$  contenha). Por outro lado, para que o plano  $\alpha$  contenha o ponto  $D$ , o ponto  $D$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** em relação ao plano  $\alpha$  (tem de pertencer a uma reta do plano  $\alpha$ ).

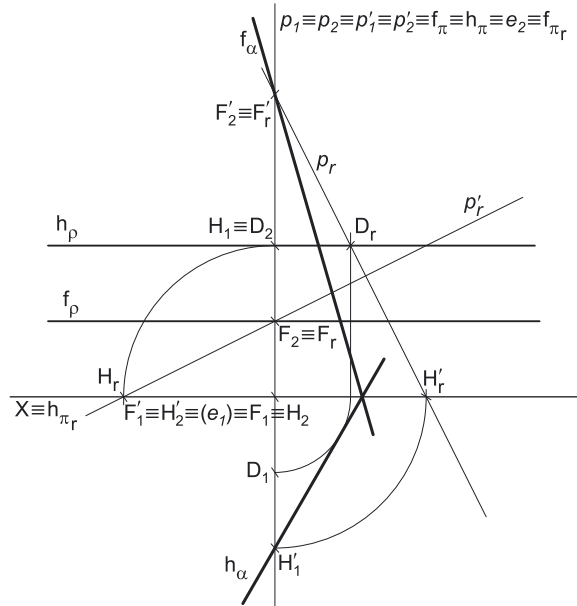
### Determinação das projeções da reta $p$ :

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $D$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $D$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $D$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, recorreu-se a uma reta  $p'$ , de perfil, pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $p'$  está definida pelos seus traços (os pontos  $F$  e  $H$ ). A reta  $p'$  pertence ao plano  $\rho$ , porque verifica a **Condição para que uma reta pertença a um plano**, em relação ao plano  $\rho$ . Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta  $p'$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $p$ .

A reta  $p'$  é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas  $p$  e  $p'$ . Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se os pontos  $F$ ,  $H$  e  $D$ . Tenha em conta que o ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r \equiv F_2$ . Sublinha-se que o rebatimento do plano  $\pi$  se processou no **sentido contrário dos ponteiros do relógio**. Assim, porque o ponto  $D$  tem **afastamento positivo**, rodando no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, o ponto  $D$  rebatido ( $D_r$ ) fica do lado direito da charneira. Já o ponto  $H$ , que tem **afastamento negativo**, rodando no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (o sentido do rebatimento), rebatido ( $H_r$ ), fica à esquerda da charneira. Em seguida desenhou-se  $p'_r$ , que passa por  $F_r$  e por  $H_r$  (a reta  $p'_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $F_r$  e  $H_r$ ).

Pelo ponto  $D_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , perpendicular a  $p'_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $p'$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta  $p$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$ .

Sobre a reta  $p_r$  representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $F'_r$  (o ponto  $F'_r$  é, em rebatimento, o traço frontal da reta  $p$ ). O ponto  $F'$  é o ponto que nos permitirá definir a reta  $p$ . Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $F'$ . Note que o ponto  $F'_r$  é o ponto de interseção de  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) com  $f_{\pi r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  em rebatimento). O ponto  $F'$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F'_2 \equiv F'_r$ . A reta  $p$  (definida pelos pontos  $D$  e  $F'$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$  e contém o ponto  $D$ .

#### Determinação dos traços do plano $\alpha$ :

Para determinar o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A direção do traço horizontal do plano é dada no enunciado, pelo que já temos uma direção para definir  $h_\alpha$ . Falta-nos um ponto. Esse ponto tem de ser o traço horizontal da reta  $p$ . Assim, em rebatimento, determinou-se o ponto  $H'_r$  –  $H'_r$  é, em rebatimento, o traço horizontal da reta  $p$ . Note que o ponto  $H'_r$  é o ponto de interseção de  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) com  $h_{\pi r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  em rebatimento). Em seguida inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $H'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\alpha$  –  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H'$ ) e uma direção (faz, com o eixo  $X$ , um ângulo de  $60^\circ$  de abertura para a esquerda com o enunciado refere expressamente).

Para determinar o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos o traço frontal da reta  $p$  – o ponto  $F'$ . A reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** (o traço frontal da reta tem de estar sobre o traço frontal do plano). Assim, já temos um ponto para definir  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $f_\alpha$ . Tendo em conta que os traços do plano são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\alpha$  –  $f_\alpha$  passa pelo ponto  $F'$  e é concorrente com  $h_\alpha$  no eixo  $X$  (está definido por dois pontos).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $D$  (o ponto  $D$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $\rho$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\rho$  – a reta  $p$ ).

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$  em rebatimento e, ainda, de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).





(continuação da página anterior)

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no plano 4), em função da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $P_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal.

No novo diedro de projeção (formado pelo plano 1 e pelo plano 4), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no plano 4). Nesse sentido, por  $A_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no plano 4), perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ .

Para definirmos totalmente a reta  $p$  em projeções (no diedro de projeção inicial), é necessário um outro ponto da reta. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H$ , que é o traço horizontal da reta  $p$ , no novo diedro de projeção. A projeção horizontal do ponto  $H$  ( $H_1$ ) determinou-se de forma direta, no novo diedro de projeção. Tendo em conta que se mantêm as cotas, e que o ponto  $H$  é o ponto da reta  $p$  que tem cota nula, a projeção frontal do ponto  $H$  no diedro de projeção inicial ( $H_2$ ) determinou-se em função da sua cota (que é nula e se manteve) –  $H_2$  situa-se no eixo  $X$  inicial.

A reta  $p$  (definida pelos pontos  $A$  e  $H$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ . Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$  e contém o ponto  $A$ .

#### Determinação dos traços do plano $\alpha$ :

Para determinar o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos o traço horizontal da reta  $p$  – o ponto  $H$ . A reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** (o traço horizontal da reta tem de estar sobre o traço horizontal do plano). Assim, já temos um ponto para definir  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $h_\alpha$ . O enunciado refere expressamente que o plano  $\alpha$  corta o eixo  $X$  num ponto com -5 de abcissa – o ponto  $B$  (cujas projeções se representaram imediatamente). Assim, já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano  $\alpha$  –  $h_\alpha$  está definido por dois pontos (os pontos  $H$  e  $B$ ).

Para determinar o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto  $B$  (que é o ponto de concorrência dos traços do plano), Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, há que determinar o traço frontal da reta  $p$  (o ponto  $F$ ), o que se processa a partir da sua projeção horizontal ( $F_1$ ), que se mantém. Determinou-se o ponto  $F$  no novo diedro de projeção no qual as projeções da reta  $p$  verificam o **Critério de reversibilidade** –  $F_4$  (a projeção do ponto  $F$  no plano 4) situa-se sobre  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no plano 4) na linha de chamada de  $F_1$ . Tendo em conta que se mantêm as cotas na mudança do diedro de projeção efetuada, a projeção frontal do ponto  $F$  ( $F_2$ ) determinou-se em função da sua cota (que se mantém). Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) –  $f_\alpha$  está definido por dois pontos (os pontos  $F$  e  $B$ ).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $A$  (o ponto  $A$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $\rho$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\rho$  – a reta  $p$ ).

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ , que são dados). Os restantes dados são pontos, cujas linhas de chamada se representaram a **leve**. Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 171.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O plano passante (o plano  $\rho$ ) está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **P**.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\alpha$ , oblíquo, que contenha o ponto **A** e que seja ortogonal ao plano  $\rho$  – o plano  $\alpha$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\rho$  (o plano  $\alpha$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\rho$ , ou seja, o plano  $\alpha$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, o plano  $\alpha$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\rho$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$ , ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano  $\rho$  contenha). Por outro lado, para que o plano  $\alpha$  contenha o ponto **A**, o ponto **A** tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** em relação ao plano  $\alpha$  (tem de pertencer a uma reta do plano  $\alpha$ ).

### Determinação das projeções da reta $p$ :

Um plano passante é um plano de rampa, pelo que o plano  $\rho$  contém a «família» das **retas fronto-horizontais**. Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizonta é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto **A**. No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto **A** e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto **A**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ .

Salienta-se que as duas situações pendentes acima referidas têm a ver com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  são uma única reta, o que não nos permite garantir da ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano oblíquo).

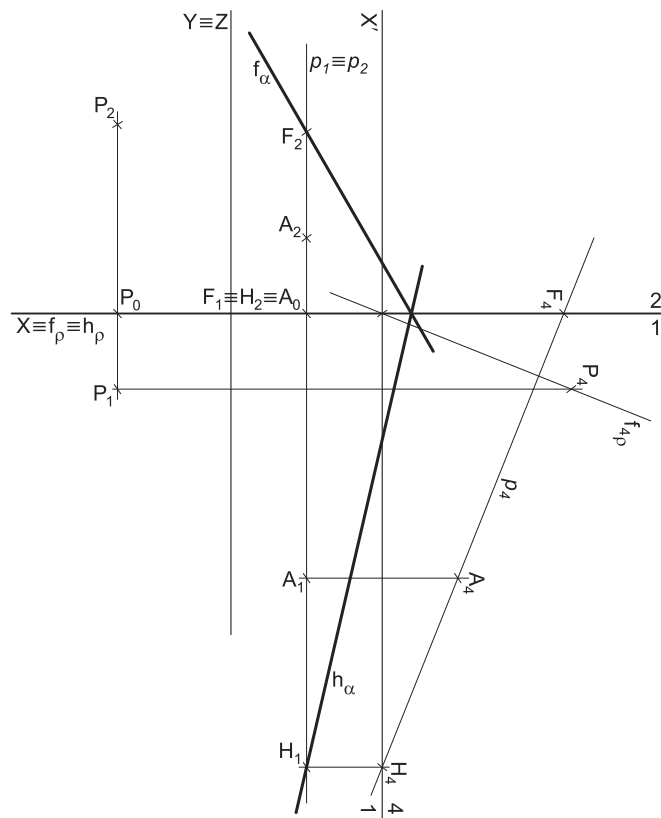
Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as duas situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade** e, por outro, nesse diedro de projeção teremos dois traços do plano  $\rho$  (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes). Foi este raciocínio que nos justificou o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo à reta  $p$ , o que nos permite transformar a reta de perfil numa reta frontal (de frente). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo **X'** é paralelo à projeção horizontal da reta ( $p_1$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), pelo que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida foi necessário determinar a projeção do ponto **A** no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ . **A<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $P_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal.

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $A_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ .

Para definirmos totalmente a reta  $p$  em projeções (no diedro de projeção inicial), é necessário um outro ponto da reta. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H$ , que é o traço horizontal da reta  $p$ , no novo diedro de projeção. A projeção horizontal do ponto  $H$  ( $H_1$ ) determinou-se de forma direta, no novo diedro de projeção. Tendo em conta que se mantêm as cotas, e que o ponto  $H$  é o ponto da reta  $p$  que tem cota nula, a projeção frontal do ponto  $H$  no diedro de projeção inicial ( $H_2$ ) determinou-se em função da sua cota (que é nula e se manteve) –  $H_2$  situa-se no eixo  $X$  inicial.

A reta  $p$  (definida pelos pontos  $A$  e  $H$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ . Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$  e contém o ponto  $A$ .

#### Determinação dos traços do plano $\alpha$ :

Para determinar o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A direção do traço frontal do plano é dada no enunciado, pelo que já temos uma direção para definir  $f_\alpha$ . Falta-nos um ponto. Esse ponto tem de ser o traço frontal da reta  $p$ . Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $p$  (o ponto  $F$ ), o que se processou a partir da sua projeção horizontal ( $F_1$ ), que se mantém. Determinou-se o ponto  $F$  no novo diedro de projeção no qual as projeções da reta  $p$  verificam o **Critério de reversibilidade** –  $F_4$  (a projeção do ponto  $F$  no **plano 4**) situa-se sobre  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) na linha de chamada de  $F_1$ . Tendo em conta que se mantêm as cotas na mudança do diedro de projeção efetuada, a projeção frontal do ponto  $F$  ( $F_2$ ) determinou-se em função da sua cota (que se mantém). Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) –  $f_\alpha$  está definido um ponto (o ponto  $F$ ) e uma direção (faz, com o eixo  $X$ , um ângulo de  $60^\circ$  de abertura para a esquerda, como o enunciado refere expressamente).

Para determinar o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos o traço horizontal da reta  $p$  – o ponto  $H$ . A reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** (o traço horizontal da reta tem de estar sobre o traço horizontal do plano). Assim, já temos um ponto para definir  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $h_\alpha$ . Tendo em conta que os traços do plano são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\alpha$  –  $h_\alpha$  passa pelo ponto  $H$  e é concorrente com  $f_\alpha$  no eixo  $X$  (está definido por dois pontos).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $A$  (o ponto  $A$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $\rho$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\rho$  – a reta  $p$ ).

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ , que são dados). Os restantes dados são pontos, cujas linhas de chamada se representaram a **leve**. Os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada ou do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 172.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\beta$ , de rampa, que contenha o ponto **P** e que seja ortogonal ao plano  $\alpha$  – o plano  $\beta$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\alpha$  (o plano  $\beta$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$ , ou seja, o plano  $\beta$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\alpha$ ).

Assim, o plano  $\beta$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Por outro lado, para que o plano contenha o ponto **P**, o ponto **P** tem de pertencer ao plano  $\beta$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

Assim, há que conduzir, pelo ponto **P**, uma reta **r**, ortogonal ao plano  $\alpha$ . Tendo em conta que os dados do plano  $\alpha$  se resumem a dois pontos (os pontos **A** e **B**) e à direção das suas retas horizontais (de nível), conclui-se que os dados do plano  $\alpha$ , por si só, não nos permitem determinar qualquer reta ortogonal ao plano. Assim, é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Tendo em conta, ainda, que a ortogonalidade entre retas só é direta (numa das projeções) nas situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção, a reta auxiliar a que é necessário recorrer tem de ser uma reta paralela a um dos planos de projeção – uma reta horizontal (de nível) ou uma reta frontal (de frente).

Nesse sentido, recorreu-se à reta **h**, como reta auxiliar do plano. A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e está definida por um ponto (o ponto **A**, dado no enunciado) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano, dada no enunciado). A reta **h** é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que já é possível garantir a ortogonalidade da reta **r** a uma reta do plano  $\alpha$  (a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção horizontal). Assim, por **P**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **P**), conduziu-se **r**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **r**), perpendicular a **h**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **h**).

Já se garantiu a ortogonalidade da reta **r** em relação a uma reta do plano  $\alpha$  – a reta **h**. Falta garantir a ortogonalidade da reta **r** a outra reta do plano  $\alpha$  (concorrente com a reta **h**), de forma a se garantir a ortogonalidade da reta **r** em relação ao plano  $\alpha$ .

Mais uma vez se constata que os dados do plano  $\alpha$ , por si só, não nos permitem garantir a ortogonalidade da reta **r** em relação a outra reta do plano, pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Tendo em conta, de novo, que a ortogonalidade entre retas só é direta (numa das projeções) nas situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção, a reta auxiliar a que é necessário recorrer tem de ser uma reta paralela a um dos planos de projeção – uma reta frontal (de frente), que é a única situação de se recorrer a uma reta paralela a um dos planos de projeção e **concorrente** com a reta **h**.

Assim, recorreu-se à reta **f**, como reta auxiliar do plano. A reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano que passa pelo ponto **B** (o outro ponto do plano dado no enunciado). O ponto **B** é um ponto com afastamento nulo, pelo que a reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  com afastamento nulo. Assim, a reta **f** está definida por dois pontos – o ponto **B** (dado no enunciado) e o ponto **F** (o ponto de concorrência com a reta **h**, que é o traço frontal da reta **h**). Note que, na prática, a reta **f** é o próprio traço frontal do plano  $\alpha$ .

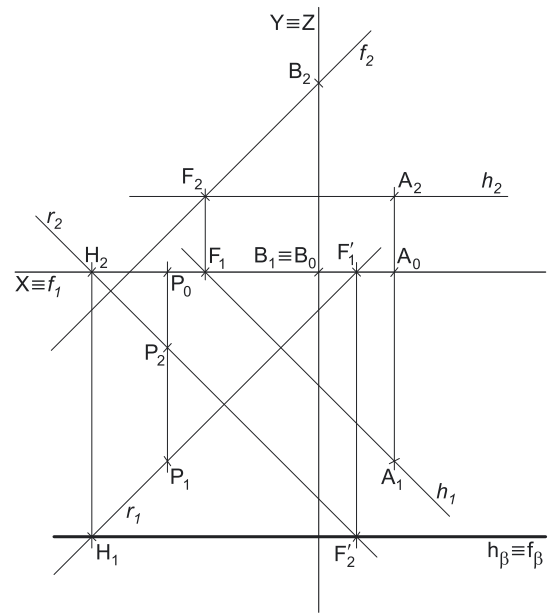
A reta **f** é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que já é possível garantir a ortogonalidade da reta **r** a outra reta do plano  $\alpha$  (a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal). Assim, por **P**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **P**), conduziu-se **r**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **r**), perpendicular a **f**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **f**). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **r** em relação ao plano  $\alpha$ , pois a reta **r** é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  – as retas **h** e **f**.

A reta **r** está definida por um ponto (o ponto **P**) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\alpha$ ). Qualquer plano que contenha a reta **r** é ortogonal ao plano  $\alpha$  e contém o ponto **P**. Assim, determinaram-se os traços da reta **r** nos planos de projeção – os pontos **F** e **H**. A reta **r** tem de pertencer ao plano  $\beta$ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano**. Assim, desenhou-se **h** <sub>$\beta$</sub>  (o traço horizontal do plano  $\beta$ ), que passa pelo ponto **H** e é paralelo ao eixo **X** – o traço horizontal do plano (**h** <sub>$\beta$</sub> ) está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal). Em seguida desenhou-se **f** <sub>$\beta$</sub>  (o traço frontal do plano  $\beta$ ), que passa pelo ponto **F** e é paralelo ao eixo **X** – o traço frontal do plano (**f** <sub>$\beta$</sub> ) está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

O plano  $\beta$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **P** (o ponto **P** pertence a uma reta do plano – a reta **r**) e é ortogonal ao plano  $\alpha$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – a reta **r**). Note que, nesta situação particular (e em função dos dados apresentados), os traços do plano  $\beta$  ficam coincidentes. Sublinha-se que os traços do plano  $\beta$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\alpha$  só poderiam estar coincidentes, caso se tratasse de um plano passante (o que não é o caso).

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os dados são pontos, cujas linhas de chamada de representaram a **leve**. Os traços do plano  $\beta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **h**, **f** e **r** ou, mesmo, do eixo **Y = Z**, que é uma linha de referência).



## 173.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B**, **C** e **P**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto **A** é um ponto do eixo **X**, pelo que tem as suas projeções coincidentes sobre o eixo **X**. O ponto **B** é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que as suas projeções são simétricas em relação ao eixo **X** (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). Os pontos **C** e **P** são pontos do  $\beta_{2/4}$ , pelo que as respectivas projeções são coincidentes (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes).

**Resolução:**

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\theta$ , de rampa, que contenha o ponto **P** e que seja ortogonal ao plano  $\delta$  – o plano  $\theta$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\delta$  (o plano  $\theta$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\delta$ , ou seja, o plano  $\theta$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\delta$ ).

Assim, o plano  $\theta$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\delta$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\delta$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Por outro lado, para que o plano contenha o ponto **P**, o ponto **P** tem de pertencer ao plano  $\theta$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

Assim, há que conduzir, pelo ponto **P**, uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\delta$ . Tendo em conta que os dados do plano  $\delta$  se resumem a três pontos (os pontos **A**, **B** e **C**), conclui-se que os dados do plano  $\delta$ , por si só, não nos permitem determinar qualquer reta ortogonal ao plano. Assim, é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Tendo em conta, ainda, que a ortogonalidade entre retas só é direta (numa das projeções) nas situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção, a reta auxiliar a que é necessário recorrer tem de ser uma reta paralela a um dos planos de projeção – uma reta horizontal (de nível) ou uma reta frontal (de frente).

Nesse sentido, recorreu-se à reta **h**, como reta auxiliar do plano. A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$  que passa pelo ponto **C**. No entanto, não é possível definir a reta **h** de forma direta, porque os três pontos dados têm cotas diferentes – só temos um ponto para definir a reta **h** (o ponto **C**). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta **h**. Assim, é necessário o recurso a uma outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou por uma direção.

Assim, recorreu-se a uma reta **r**, como reta auxiliar do plano  $\delta$ . A reta **r** está definida por dois pontos – os pontos **A** e **B** (dois dos pontos dados que definem o plano  $\delta$ ). As retas **r** e **h**, porque são coplanares (estão, ambas, contidas no plano  $\delta$ ) e não são paralelas (a reta **r** é oblíqua e a reta **h** é horizontal), são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **D**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **h** – o ponto **D**. A reta **h** está definida por dois pontos – os pontos **C** e **D**.

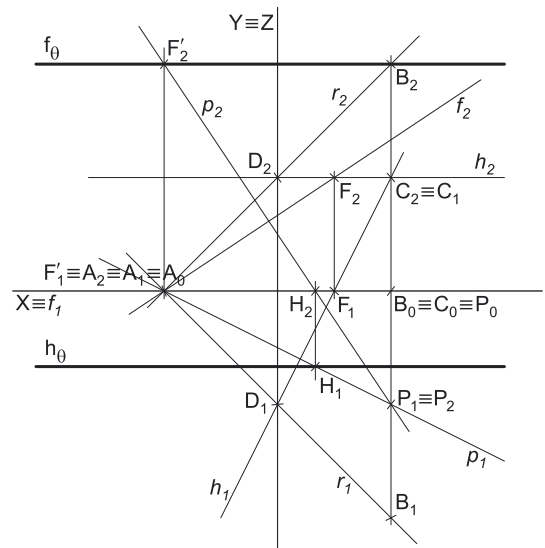
A reta **h** é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que já é possível garantir a ortogonalidade da reta **p** a uma reta do plano  $\alpha$  (a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção horizontal). Assim, por **P**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **P**), conduziu-se **p**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **p**), perpendicular a **h**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **h**). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a uma reta do plano  $\delta$  – a reta **h**. Falta garantir a ortogonalidade da reta **p** a outra reta do plano  $\delta$  (concorrente com a reta **h**), de forma a se garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\delta$ .

Mais uma vez se constata que os dados do plano  $\delta$ , por si só, não nos permitem garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra reta do plano, pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Tendo em conta, de novo, que a ortogonalidade entre retas só é direta (numa das projeções) nas situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção, a reta auxiliar a que é necessário recorrer tem de ser uma reta paralela a um dos planos de projeção – uma reta frontal (de frente), que é a única situação de se recorrer a uma reta paralela a um dos planos de projeção e **concorrente** com a reta **h**.

Assim, recorreu-se à reta **f**, como reta auxiliar do plano. A reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano que passa pelo ponto **A** (um dos pontos do plano dados no enunciado). O ponto **A** é um ponto com afastamento nulo, pelo que a reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$  com afastamento nulo. Assim, a reta **f** está definida por dois pontos – o ponto **A** (dado no enunciado) e o ponto **F** (o ponto de concorrência com a reta **h**, que é o traço frontal da reta **h**). Note que, na prática, a reta **f** é o próprio traço frontal do plano  $\delta$ .

A reta **f** é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que já é possível garantir a ortogonalidade da reta **p** a outra reta do plano  $\delta$  (a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal). Assim, por **P**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **P**), conduziu-se **p**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **p**), perpendicular a **f**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **f**). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\delta$ , pois a reta **p** é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  – as retas **h** e **f**.

A reta **p** está definida por um ponto (o ponto **P**) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\delta$ ). Qualquer plano que contenha a reta **p** é ortogonal ao plano  $\delta$  e contém o ponto **P**. Assim, determinaram-se os traços da reta **p** nos planos de projeção – os pontos **F** e **H**. A reta **p** tem de pertencer ao plano  $\theta$ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano**. Assim, desenhou-se **h**<sub>0</sub> (o traço horizontal do plano  $\theta$ ), que passa pelo ponto **H** e é paralelo ao eixo **X** – o traço horizontal do plano (**h**<sub>0</sub>) está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal). Em seguida desenhou-se **f**<sub>0</sub> (o traço frontal do plano  $\theta$ ), que passa pelo ponto **F** e é paralelo ao eixo **X** – o traço frontal do plano (**f**<sub>0</sub>) está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal).



(continua na página seguinte)







(continuação da página anterior)

A reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que já é possível garantir a ortogonalidade da reta  $p$  a outra reta do plano  $\alpha$  (a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal). Assim, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), conduziu-se  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ , pois a reta  $p$  é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  – as retas  $h$  e  $f$ .

A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\alpha$ ). Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\alpha$  e contém o ponto  $P$ . Assim, determinaram-se os traços da reta  $p$  nos planos de projeção – os pontos  $F$  e  $H$ . A reta  $p$  tem de pertencer ao plano  $\delta$ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano**. Assim, desenhou-se  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ), que passa pelo ponto  $H$  e é concorrente com o eixo  $X$  num ponto com  $-9$  de abcissa (conforme o enunciado pede expressamente) – o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ) está definido por dois pontos (o ponto  $H$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ). Em seguida desenhou-se  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ), que passa pelo ponto  $F$  e é concorrente com  $h_\delta$  no eixo  $X$  – o traço frontal do plano ( $f_\delta$ ) está igualmente definido por dois pontos (o ponto  $F$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano).

O plano  $\delta$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $P$  (o ponto  $P$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $\alpha$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – a reta  $p$ ).

Note que o exercício também poderia ter sido resolvido com o recurso à determinação dos traços do plano  $\alpha$ . Tal justifica-se pelo facto de o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) ser uma reta horizontal (de nível) do plano e o seu traço frontal ( $f_\alpha$ ) ser uma reta frontal (de frente) do plano, sendo os dois duas retas concorrentes do plano. Assim, essas duas retas permitir-nos-iam garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ , à semelhança do que se efetuou com o recurso às retas  $h$  e  $f$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\delta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $h$ ,  $f$  e  $p$  ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 175.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\delta$ , pelos respetivos traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Salienta-se que os traços do plano  $\alpha$  são perpendiculares **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\alpha$  só poderiam ser perpendiculares, caso se tratasse de um plano projetante (o que não é o caso).

#### Resolução:

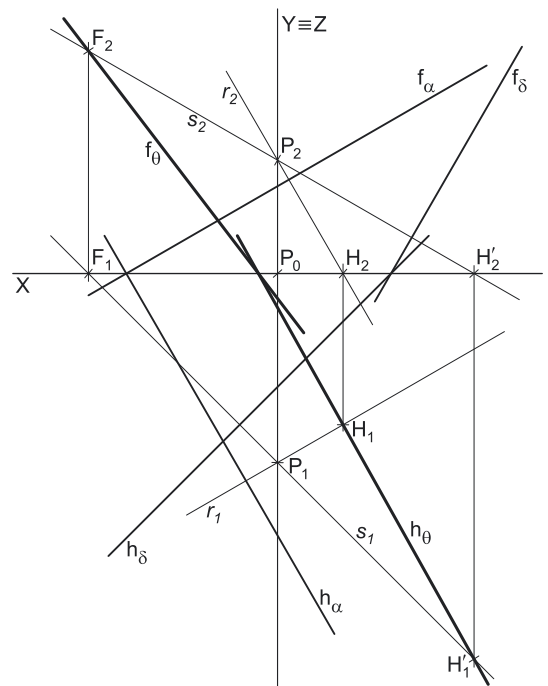
Pretende-se determinar os traços de um plano  $\theta$ , que contenha o ponto  $P$  e que seja ortogonal aos planos  $\alpha$  e  $\delta$ , simultaneamente – o plano  $\theta$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação aos dois planos. Assim, o plano  $\theta$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  (o plano  $\theta$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\alpha$ ) mas tem, também, de conter uma reta ortogonal ao plano  $\delta$  (o plano  $\theta$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\delta$ ).

Assim, o plano  $\theta$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Como o plano  $\theta$  (o plano pedido) tem também de ser ortogonal ao plano  $\delta$ , o plano  $\theta$  tem também de conter uma reta ortogonal ao plano  $\delta$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\delta$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha).

Por outro lado, para que o plano  $\theta$  contenha o ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano  $\theta$ , ou seja, o ponto  $P$  tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** em relação ao plano  $\theta$  (tem de pertencer a uma reta do plano  $\theta$ ).

Assim, pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $r$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . A projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) passa por  $P_2$  e é perpendicular a  $f_\alpha$  ( $f_\alpha$  é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $r$  e  $f_\alpha$  é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ) passa por  $P_1$  e é perpendicular a  $h_\alpha$  ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $r$  e  $h_\alpha$  é direta em projeção horizontal). A reta  $r$  é, assim, ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  – os seus traços ( $f_\alpha$  e  $h_\alpha$ ).

A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\alpha$ ). Já se garantiu que o plano  $\theta$  contém o ponto  $P$  (porque o ponto  $P$  pertence a uma reta do plano – a reta  $r$ ). Já se garantiu, também, que o plano  $\theta$  é ortogonal ao plano  $\alpha$  (porque contém uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – a reta  $r$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No entanto, falta ainda garantir a ortogonalidade do plano  $\theta$  ao plano  $\delta$ . Nesse sentido conduziu-se, pelo ponto **P**, uma reta **s**, ortogonal ao plano  $\delta$ . A projeção frontal da reta **s** ( $s_2$ ) passa por **P**<sub>2</sub> e é perpendicular a  $f_\delta$  ( $f_\delta$  é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta **s** e  $f_\delta$  é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta **s** ( $s_1$ ) passa por **P**<sub>1</sub> e é perpendicular a  $h_\delta$  ( $h_\delta$  é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta **s** e  $h_\delta$  é direta em projeção horizontal). A reta **s** é, assim, ortogonal ao plano  $\delta$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  – os seus traços ( $f_\delta$  e  $h_\delta$ ).

A reta **s** está definida por um ponto (o ponto **P**) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\delta$ ). Já se garantiu que o plano  $\theta$  é ortogonal ao plano  $\delta$  (porque contém uma reta ortogonal ao plano  $\delta$  – a reta **s**). Assim, já se garantiu que o plano  $\theta$ , definido pelas retas **r** e **s**, é um plano ortogonal aos dois planos (os planos  $\alpha$  e  $\delta$ ), como era pretendido. Note que as retas **r** e **s** são concorrentes no ponto **P**.

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Assim, determinaram-se o traço horizontal da reta **r** (o ponto **H**) e o traço horizontal da reta **s** (o ponto **H'**) e desenhou-se o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), que está definido por dois pontos – os pontos **H** e **H'**.

Tendo em conta que os traços do plano  $\theta$  são concorrentes num ponto do eixo **X**, já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Assim, determinou-se o ponto **F**, o traço frontal da reta **s**. Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\theta$ . O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está definido por dois pontos – o ponto **F** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou).

O plano  $\theta$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **P** e é ortogonal ao plano  $\alpha$  e ao plano  $\delta$ , simultaneamente (pois verifica o **CrITÉRIO de ortogonalidade entre planos** em relação ao dois planos).

Sublinha-se que este exercício poderia ter sido resolvido de uma forma ligeiramente diferente. O plano  $\theta$ , sendo ortogonal simultaneamente ao plano  $\alpha$  e ao plano  $\delta$ , é necessariamente ortogonal à reta de interseção entre os dois planos (reta **i**). Assim, poder-se-ia ter determinado a reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\alpha$  e o plano  $\delta$ ) – nessa situação, o exercício passaria pela determinação de um plano (o plano  $\theta$ ) contendo o ponto **P** e ortogonal à reta **i**.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$  e do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\theta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **s** ou, mesmo, do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

## 176.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta **f**, pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

São pedidos os traços de um plano oblíquo que contenha a reta **f** e que seja ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ .

O traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) é uma reta, e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **f**. Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano  $\alpha$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ).

O plano  $\alpha$  é um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem os seus traços coincidentes (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes). Por outro lado, a reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (que é uma reta frontal do plano com afastamento nulo). Nesse sentido, sabe-se imediatamente que o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é paralelo à reta **f**, ou seja, paralelo a  $f_2$  (a projeção frontal da reta **f**). Assim, porque os traços do plano  $\alpha$  são necessariamente coincidentes, já temos a direção que nos faltava para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) – a direção de  $f_2$ .

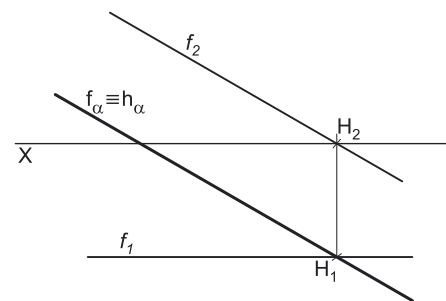
Nesse sentido,  $h_\alpha$  passa por **H**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **H**) e é paralelo a  $f_2$  (a projeção frontal da reta **f**). Salienta-se que direção determinada é uma direção que existe **apenas no papel** (após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção), pois, **no espaço**,  $h_\alpha$  não é paralelo a  $f_2$ .

Tendo em conta que o plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, a determinação do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é imediata – tem-se, imediatamente,  $f_\alpha \equiv h_\alpha$ . Na prática, o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ).

Sublinha-se que os traços do plano  $\alpha$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\alpha$  só poderiam estar coincidentes, caso se tratasse de um plano passante (o que não é o caso).

### Traçado:

A reta **f** representou-se a **médio**, pois é um dado. Os traços do plano, que são pedidos (é o objetivo do exercício), representaram-se a **forte**. O eixo **X** representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). A linha restante representou-se a **leve**, pois é uma linha de chamada.



## 177.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $f$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

**Resolução:**

São pedidos os traços de um plano oblíquo que contenha a reta  $f$  e que seja ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ .

O traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) é uma reta, e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Determinou-se o ponto  $H$ , o traço horizontal da reta  $f$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano  $\alpha$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ).

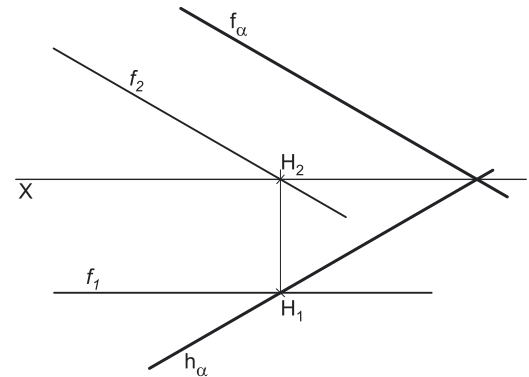
O plano  $\alpha$  é um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). Por outro lado, a reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (que é uma reta frontal do plano com afastamento nulo). Nesse sentido, sabe-se imediatamente que o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é paralelo à reta  $f$ , ou seja, faz um ângulo de  $30^\circ$  (de abertura para a esquerda) com o eixo  $X$  (que é o ângulo que a reta  $f$  faz com o Plano Horizontal de Projeção).

Assim, porque os traços do plano  $\alpha$  são simétricos em relação ao eixo  $X$ , já temos a direção que nos faltava para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) –  $h_\alpha$  faz, com o eixo  $X$ , um ângulo igual ao ângulo que  $f_\alpha$  faz com o eixo  $X$ . Nesse sentido,  $h_\alpha$  passa por  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H$ ) e faz, com o eixo  $X$ , um ângulo de  $30^\circ$  (de abertura para a esquerda).

Em seguida determinou-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ). Assim,  $f_\alpha$  é concorrente com  $h_\alpha$  num ponto do eixo  $X$  e é paralelo a reta  $f$ .

**Traçado:**

A reta  $f$  representou-se a **médio**, pois é um dado. Os traços do plano, que são pedidos (é o objetivo do exercício), representaram-se a **forte**. O eixo  $X$  representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). A linha restante representou-se a **leve**, pois é uma linha de chamada.



## 178.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\rho$ , pelos respectivos traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem os seus traços coincidentes (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes). O plano  $\rho$  é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

**Resolução:**

É pedida uma reta – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos, que é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos, ou seja, é a reta que pertence simultaneamente aos dois planos. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

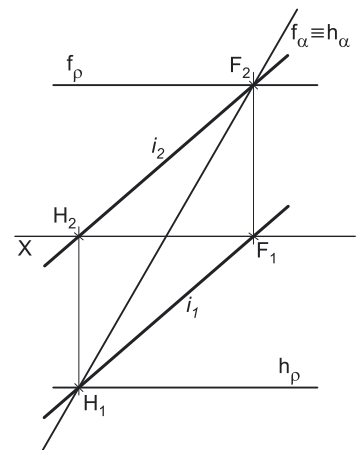
A reta  $i$  é uma reta que pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que a reta  $i$  tem de verificar a **condição para que uma reta pertença a um plano** em relação aos dois planos (os traços da reta têm de estar sobre os traços homónimos dos dois planos). Dessa forma, o traço frontal da reta  $i$  (o ponto  $F$ ) tem de pertencer ao traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) e tem também de pertencer ao traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $i$ ), que é o ponto de concorrência de  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) com  $f_\rho$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $i$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $i$ .

De forma idêntica, e na sequência da **condição para que uma reta pertença a um plano**, o traço horizontal da reta  $i$  (o ponto  $H$ ) tem de pertencer ao traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) e tem também de pertencer ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $i$ ), que é o ponto de concorrência de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) com  $h_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ .

A reta  $i$  está definida por dois pontos – os seus traços nos planos de projeção (os pontos  $F$  e  $H$ ).

**Traçado:**

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (a linha estruturante do exercício). A reta  $i$ , porque é pedida (é o objetivo do exercício), representou-se a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são traçados auxiliares (caso do plano  $\phi'$  e das retas  $a$  e  $b$  ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência) ou são linhas de chamada.



## 179.

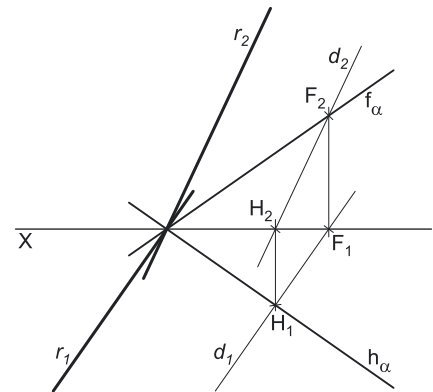
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

### Resolução:

É pedida uma reta  $r$ , que é uma reta de maior declive do plano e é, ainda, uma reta passante. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Uma vez que se trata de uma **reta passante**, há que ter em conta que as retas passantes têm os seus traços (frontal e horizontal) coincidentes num único ponto (o ponto em que são concorrentes com o eixo  $X$ ) – esse ponto é, necessariamente, o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Já temos um ponto para definir a reta  $r$  – o ponto de concorrência dos traços do plano (que não se identificou). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $r$ .

De qualquer forma, foi possível, em seguida, desenhar a projeção horizontal da reta  $r - r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) passa pelo ponto de concorrência dos traços do plano e é perpendicular a  $h_\alpha$  (retas de maior declive de um plano têm a sua projeção horizontal perpendicular ao traço horizontal do plano). No entanto, continuamos a ter apenas um ponto para definir a reta  $r$ .



Uma vez que os dados do plano (os seus traços) por si só não nos permitem determinar o elemento em falta da reta  $r$ , conclui-se que os dados do plano são insuficientes para definir a reta  $r$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $d$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $d$  é uma outra reta de maior declive do plano  $\alpha$  e está definida por dois pontos – os seus traços (o ponto  $F$  e o ponto  $H$ ). Note que  $d_1$  (a projeção horizontal da reta  $d$ ) é perpendicular a  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ), pois a reta  $d$  é, também ela, uma reta de maior declive do plano  $\alpha$ .

As retas  $r$  e  $d$  são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são concorrentes, pois as suas projeções horizontais não são concorrentes, pelo que são paralelas, pelo que têm a mesma direção. Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$ .

A reta  $r$  está, assim, definida por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralela a reta  $d$ ). Assim, a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) é concorrente com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) no eixo  $X$  e é paralela a  $d_2$  (a projeção frontal da reta  $d$ ).

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $r$  (que é o pedido) representaram-se a **forte**, pois é o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são traçados auxiliares (caso da reta  $d$ ), ou são linhas de chamada.

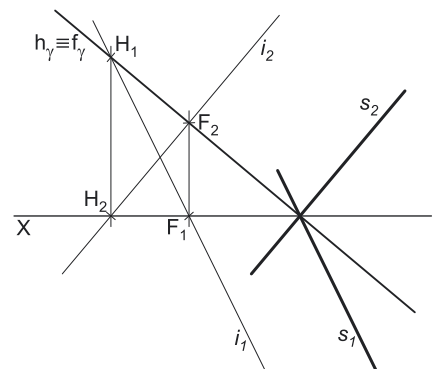
## 180.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\gamma$  tem os seus traços coincidentes, pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes). Sublinha-se que os traços do plano  $\gamma$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\gamma$  só poderiam estar coincidentes, caso se tratasse de um plano passante (o que não é o caso).

### Resolução:

É pedida uma reta  $s$ , que é uma reta de maior inclinação do plano e é, ainda, uma reta passante. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Uma vez que se trata de uma **reta passante**, há que ter em conta que as retas passantes têm os seus traços (frontal e horizontal) coincidentes num único ponto (o ponto em que são concorrentes com o eixo  $X$ ) – esse ponto é, necessariamente, o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Já temos um ponto para definir a reta  $s$  – o ponto de concorrência dos traços do plano (que não se identificou). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $s$ .



De qualquer forma, foi possível, em seguida, desenhar a projeção frontal da reta  $s - s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ) passa pelo ponto de concorrência dos traços do plano e é perpendicular a  $f_\gamma$  (retas de maior inclinação de um plano têm a sua projeção frontal perpendicular ao traço frontal do plano). No entanto, continuamos a ter apenas um ponto para definir a reta  $s$ .

Uma vez que os dados do plano (os seus traços) por si só não nos permitem determinar o elemento em falta da reta  $s$ , conclui-se que os dados do plano são insuficientes para definir a reta  $s$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $i$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $i$  é uma outra reta de maior inclinação do plano  $\gamma$  e está definida por dois pontos – os seus traços (o ponto  $F$  e o ponto  $H$ ). Note que  $i_2$  (a projeção frontal da reta  $i$ ) é perpendicular a  $f_\gamma$  (traço frontal do plano  $\gamma$ ), pois a reta  $i$  é, também ela, uma reta de maior inclinação do plano  $\gamma$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As retas  $s$  e  $i$  são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são concorrentes, pois as suas projeções frontais não são concorrentes, pelo que são paralelas, pelo que têm a mesma direção. Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s$ .

A reta  $s$  está, assim, definida por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralela à reta  $i$ ). Assim, a projeção horizontal da reta  $s$  ( $s_1$ ) é concorrente com  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ) no eixo  $X$  e é paralela a  $i_1$  (a projeção horizontal da reta  $i$ ).

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\gamma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $s$  (que é o pedido) representaram-se a **forte**, pois é o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são traçados auxiliares (caso da reta  $i$ ), ou são linhas de chamada.

## 181.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto  $P$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes). Sublinha-se que os traços do plano  $\alpha$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\alpha$  só poderiam estar coincidentes, caso se tratasse de um plano passante (o que não é o caso).

#### Resolução:

##### Determinação das projeções da reta $p$ :

Em primeiro lugar, há que determinar as projeções da reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\alpha$ ).

Assim, pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . A projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) passa por  $P_2$  e é perpendicular a  $f_\alpha$  ( $f_\alpha$  é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_\alpha$  é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) passa por  $P_1$  e é perpendicular a  $h_\alpha$  ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_\alpha$  é direta em projeção horizontal). A reta  $p$  é, assim, ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  – os seus traços ( $f_\alpha$  e  $h_\alpha$ ).

Sublinha-se que, atendendo a que o plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, a reta  $p$  tem necessariamente as suas projeções paralelas entre si – é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$ .

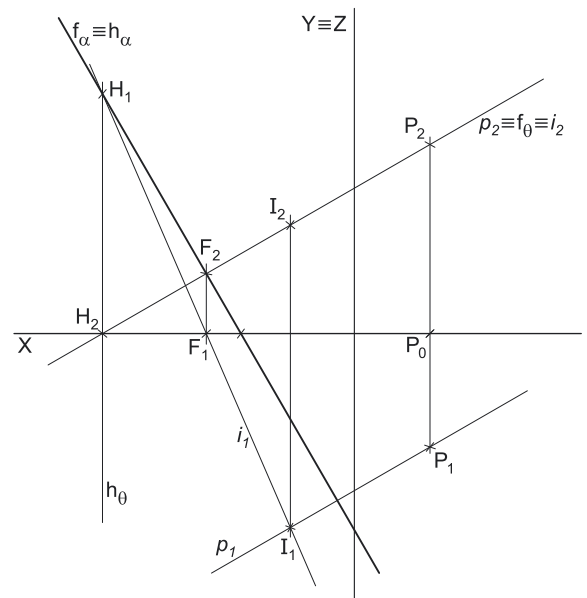
##### Determinação do ponto de interseção da reta $p$ com o plano $\alpha$ :

É pedido um ponto – o ponto de interseção entre a reta  $p$  e o plano  $\alpha$ . O ponto de interseção entre uma reta e um plano é um ponto que pertence simultaneamente à reta e ao plano. **Nem a reta nem o plano são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executa em três etapas.

- 1. Conduz-se, pela reta dada, um plano auxiliar que a contenha.** Pela reta  $p$  conduziu-se um plano auxiliar (o plano  $\theta$  que é um plano projetante frontal), que a contém – o plano  $\theta$  é um plano de topo e é o plano projetante frontal da reta  $p$ .
- 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos.** Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  – a reta  $i$  é uma reta oblíqua do plano  $\alpha$  e está definida por dois pontos (os pontos  $F$  e  $H$ , os seus traços).
- 3. O ponto de concorrência das retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.** O ponto de concorrência (ou de interseção) da reta  $i$  com a reta  $p$  é o ponto  $I$  e é o ponto de interseção da reta  $p$  como plano  $\alpha$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido (o objetivo do exercício) é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte** (as linhas de chamada são sempre a **leve**). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\theta$ , da reta  $i$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 182.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\delta$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

### Resolução:

#### Determinação das projeções da reta **p**:

Em primeiro lugar, há que determinar as projeções da reta **p**, ortogonal ao plano  $\delta$  e passando pelo ponto **P**. Para definirmos a reta **p** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p** tem de conter o ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **p** – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta **p** tem de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\delta$ , ou seja, a reta **p** tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (a reta **p** tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\delta$ ).

Assim, pelo ponto **P** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\delta$ . A projeção frontal da reta **p** ( $p_2$ ) passa por  $P_2$  e é perpendicular a  $f_\delta$  ( $f_\delta$  é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e  $f_\delta$  é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta **p** ( $p_1$ ) passa por  $P_1$  e é perpendicular a  $h_\delta$  ( $h_\delta$  é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e  $h_\delta$  é direta em projeção horizontal). A reta **p** é, assim, ortogonal ao plano  $\delta$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  – os seus traços ( $f_\delta$  e  $h_\delta$ ).

Sublinha-se que, atendendo a que o plano  $\delta$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, as projeções da reta **p** fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado – é uma reta paralela ao  $\beta_{1/3}$ .

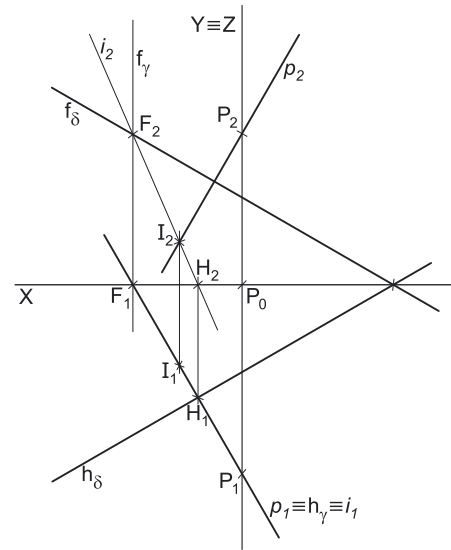
#### Determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano $\delta$ :

É pedido um ponto – o ponto de interseção entre a reta **p** e o plano  $\delta$ . O ponto de interseção entre uma reta e um plano é um ponto que pertence simultaneamente à reta e ao plano. **Nem a reta nem o plano são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executa em três etapas.

- 1. Conduz-se, pela reta dada, um plano auxiliar que a contenha.** Pela reta **p** conduziu-se um plano auxiliar (o plano  $\gamma$  que é um plano projetante horizontal), que a contém – o plano  $\gamma$  é um plano vertical e é o plano projetante horizontal da reta **p**.
- 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos.** Determinou-se a reta **i**, a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\delta$  – a reta **i** é uma reta oblíqua do plano  $\alpha$  e está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H**, os seus traços).
- 3. O ponto de concorrência das retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.** O ponto de concorrência (ou de interseção) da reta **i** com a reta **p** é o ponto **I** e é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\delta$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Note que a reta **p**, apesar de ter sido determinada durante a **resolução**, é referida no enunciado como um dado, pelo que a reta **p** (as suas projeções) se representaram igualmente a **médio**. O pedido (o objetivo do exercício) é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte** (as linhas de chamada são sempre a **leve**). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\gamma$ , da reta **i** ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 183.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\rho$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

**Resolução:**

Pretende-se determinar o ponto de interseção de uma reta **p** com o plano  $\rho$ , sabendo que a reta **p** é ortogonal ao plano  $\rho$ . Assim, a reta **p** terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$ , ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano  $\rho$  contenha). Por outro lado, a reta **p** contém o ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **p**. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta **p** é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta **p**, de perfil, passando pelo ponto **P**. No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta **p** não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto **P** e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **p** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **p**, para além do ponto **P**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  – a reta **p** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ .

Salienta-se que as duas situações pendentes acima referidas têm a ver com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta **p** não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  são duas retas da mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano oblíquo).

Por outro lado, é pedido o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  e, nesta situação, **nem a reta nem o plano são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Consta-se, assim, que existe um conjunto alargado de situações pendentes, que envolvem uma multiplicidade de raciocínios.

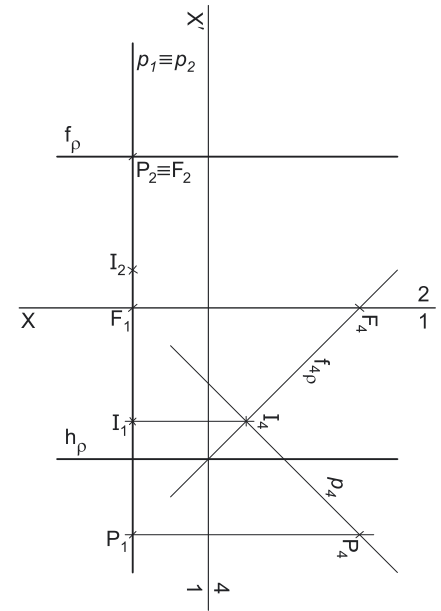
No entanto, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver todas as situações pendentes de uma só vez, bem como facilitar, em muito, os raciocínios necessários à resolução do exercício. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta **p** verificarão o **Critério de Reversibilidade** e, por outro, nesse diedro de projeção teremos dois traços do plano  $\rho$  (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes). Foi este raciocínio que nos justificou o recurso à **mudança do diedro de projeção**. Por outro lado, se o diedro de projeção criado nos permitir transformar o plano  $\rho$  num **plano projetante**, a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  será direta, sem o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Assim, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo à reta **p** (e ortogonal ao plano  $\rho$ ), o que nos permite transformar a reta de perfil numa reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  num plano de topo (um **plano projetante frontal**). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à reta **p**, o eixo **X'** é paralelo à projeção horizontal da reta (**p<sub>1</sub>**). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  (**h<sub>p</sub>**), pelo que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida foi necessário determinar a projeção do ponto **P** no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ . **P<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **P** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4p}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto de  $f_p$  (o traço frontal do plano) – o ponto  $F$ . Em seguida determinou-se  $F_4$  (a projeção do ponto  $F$  no plano 4), em função da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4p}$ , passa por  $F_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar o ponto  $F$  no plano de perfil que contém o ponto  $P$  (e a reta  $p$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo plano 1 e pelo plano 4), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4p}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no plano 4). Nesse sentido, por  $P_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no plano 4), perpendicular a  $f_{4p}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ .

Por outro lado, atendendo a que, no novo diedro de projeção (formado pelo plano 1 e pelo plano 4), o plano  $\rho$  é um plano de topo (um plano projetante frontal), a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ) é direta, a partir da sua projeção no plano 4. Assim, determinou-se  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no plano 4), que é o ponto de interseção da reta  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no plano 4) com  $f_{4p}$  (o traço do plano  $\rho$  no plano 4).

A projeção horizontal do ponto  $I$  ( $I_1$ ) situa-se sobre a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), pelo que  $I_1$  teve determinação direta. Na mudança do diedro de projeção efetuada, mantiveram-se as cotas, o que nos permitiu determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), em função da sua cota (que se manteve).

Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$  (o ponto  $I$ ). Por outro lado, já foi garantida a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  (no diedro de projeção formado pelo plano 1 e pelo plano 4). Assim, a reta  $p$  (definida pelos pontos  $P$  e  $I$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ . O ponto  $I$ , representado pelas suas projeções (no diedro de projeção inicial) é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Note que a reta  $p$ , apesar de ter sido determinada durante a **resolução**, é referida no enunciado como um dado, pelo que a reta  $p$  (as suas projeções) se representaram igualmente a **médio**. O pedido (o objetivo do exercício) é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte** (as linhas de chamada são sempre a **leve**). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 184.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto  $P$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\rho$  tem os seus traços coincidentes, pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

### Resolução:

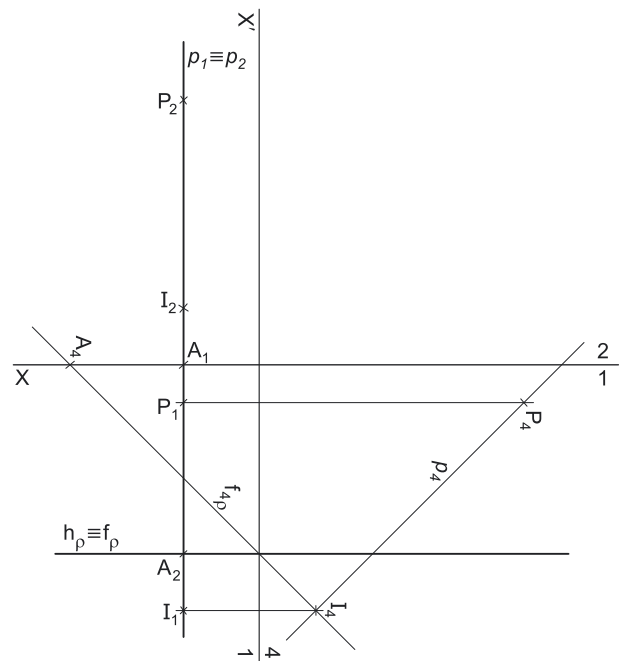
Pretende-se determinar o ponto de interseção de uma reta  $p$  com o plano  $\rho$ , sabendo que a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$ . Assim, a reta  $p$  terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$ , ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano  $\rho$  contenha). Por outro lado, a reta  $p$  contém o ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $P$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $P$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se que as duas situações pendentes acima referidas têm a ver com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  são duas retas da mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano oblíquo).

Por outro lado, é pedido o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  e, nesta situação, **nem a reta nem o plano são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Consta-se, assim, que existe um conjunto alargado de situações pendentes, que envolvem uma multiplicidade de raciocínios.

No entanto, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver todas as situações pendentes de uma só vez, bem como facilitar, em muito, os raciocínios necessários à resolução do exercício. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade** e, por outro, nesse diedro de projeção teremos dois traços do plano  $\rho$  (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes). Foi este raciocínio que nos justificou o recurso à **mudança do diedro de projeção**. Por outro lado, se o diedro de projeção criado nos permitir transformar o plano  $\rho$  num **plano projetante**, a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  será direta, sem o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Assim, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo à reta  $p$  (e ortogonal ao plano  $\rho$ ), o que nos permite transformar a reta de perfil numa reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  num plano de topo (um **plano projetante frontal**). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta ( $p_1$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), pelo que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida foi necessário determinar a projeção do ponto  $P$  no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ .  $P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve.

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto de  $f_\rho$  (o traço frontal do plano) – o ponto  $A$ . Em seguida determinou-se  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve (e que é negativa). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $A_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar o ponto  $A$  no plano de perfil que contém o ponto  $P$  (e a reta  $p$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $P_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ .

Por outro lado, atendendo a que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano de topo (um plano projetante frontal), a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ) é direta, a partir da sua projeção no **plano 4**. Assim, determinou-se  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**), que é o ponto de interseção da reta  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\rho}$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**).

A projeção horizontal do ponto  $I$  ( $I_1$ ) situa-se sobre a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), pelo que  $I_1$  teve determinação direta. Na mudança do diedro de projeção efetuada, mantiveram-se as cotas, o que nos permitiu determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), em função da sua cota (que se manteve).

Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$  (o ponto  $I$ ). Por outro lado, já foi garantida a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  (no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Assim, a reta  $p$  (definida pelos pontos  $P$  e  $I$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ . O ponto  $I$ , representado pelas suas projeções (no diedro de projeção inicial) é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Note que a reta  $p$ , apesar de ter sido determinada durante a **resolução**, é referida no enunciado como um dado, pelo que a reta  $p$  (as suas projeções) se representaram igualmente a **médio**. O pedido (o objetivo do exercício) é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte** (as linhas de chamada são sempre a **leve**). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 185.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\theta$ , pelos respectivos traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). O plano  $\theta$  tem os seus traços coincidentes, pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes). Sublinha-se que os traços do plano  $\theta$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\theta$  só poderiam estar coincidentes, caso se tratasse de um plano passante (o que não é o caso).

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\gamma$ , que contenha o ponto  $P$  e que seja ortogonal aos planos  $\alpha$  e  $\theta$ , simultaneamente – o plano  $\gamma$  tem de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre planos** em relação aos dois planos. Assim, o plano  $\gamma$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  (o plano  $\gamma$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\alpha$ ) mas tem, também, de conter uma reta ortogonal ao plano  $\theta$  (o plano  $\gamma$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\theta$ ).

Assim, o plano  $\gamma$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Como o plano  $\gamma$  (o plano pedido) tem também de ser ortogonal ao plano  $\theta$ , o plano  $\gamma$  tem também de conter uma reta ortogonal ao plano  $\theta$  – essa reta terá de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\theta$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha).

Por outro lado, para que o plano  $\gamma$  contenha o ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano  $\gamma$ , ou seja, o ponto  $P$  tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** em relação ao plano  $\gamma$  (tem de pertencer a uma reta do plano  $\gamma$ ).

Assim, pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . A projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) passa por  $P_2$  e é perpendicular a  $f_\alpha$  ( $f_\alpha$  é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_\alpha$  é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) passa por  $P_1$  e é perpendicular a  $h_\alpha$  ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_\alpha$  é direta em projeção horizontal). A reta  $p$  é, assim, ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  – os seus traços ( $f_\alpha$  e  $h_\alpha$ ). Note que, nesta situação particular, a reta  $p$  é uma reta do  $\beta_{1/3}$  (as suas projeções são simétricas em relação ao eixo  $X$ ) – é uma **reta passante**.

A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\alpha$ ). Já se garantiu que o plano  $\gamma$  contém o ponto  $P$  (porque o ponto  $P$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ). Já se garantiu, também, que o plano  $\gamma$  é ortogonal ao plano  $\alpha$  (porque contém uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – a reta  $p$ ).

No entanto, falta ainda garantir a ortogonalidade do plano  $\gamma$  ao plano  $\theta$ . Nesse sentido conduziu-se, pelo ponto  $P$ , uma reta  $p'$ , ortogonal ao plano  $\theta$ . A projeção frontal da reta  $p'$  ( $p'_2$ ) passa por  $P_2$  e é perpendicular a  $f_\theta$  ( $f_\theta$  é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p'$  e  $f_\theta$  é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta  $p'$  ( $p'_1$ ) passa por  $P_1$  e é perpendicular a  $h_\theta$  ( $h_\theta$  é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p'$  e  $h_\theta$  é direta em projeção horizontal). A reta  $p'$  é, assim, ortogonal ao plano  $\theta$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\theta$  – os seus traços ( $f_\theta$  e  $h_\theta$ ).

A reta  $p'$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\theta$ ). Já se garantiu que o plano  $\gamma$  é ortogonal ao plano  $\theta$  (porque contém uma reta ortogonal ao plano  $\theta$  – a reta  $p'$ ). Assim, já se garantiu que o plano  $\gamma$ , definido pelas retas  $p$  e  $p'$ , é um plano ortogonal aos dois planos (os planos  $\alpha$  e  $\theta$ ), como era pretendido. Note que as retas  $p$  e  $p'$  são concorrentes no ponto  $P$ .

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\gamma$ . O ponto  $A$  (o ponto de concorrência da reta  $p$  com o eixo  $X$ ) é um ponto do eixo  $X$ , pelo que o ponto  $A$  é, necessariamente, o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Determinou-se o traço horizontal da reta  $p'$  – o ponto  $H$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\gamma$ . Assim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), que está definido por dois pontos – os pontos  $A$  e  $H$ .

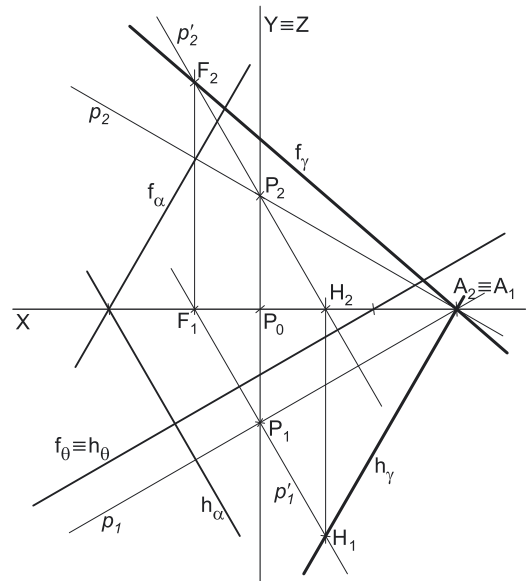
O ponto  $A$  é, necessariamente, o ponto de concorrência dos dois traços do plano, pelo que já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Determinou-se o traço frontal da reta  $p'$  – o ponto  $F$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\gamma$ . Assim, desenhou-se o traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ), que está definido por dois pontos – os pontos  $A$  e  $F$ .

O plano  $\gamma$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $P$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$  e ao plano  $\theta$ , simultaneamente (pois verifica o **CrITÉrio de ortogonalidade entre planos** em relação aos dois planos).

Sublinha-se que este exercício poderia ter sido resolvido de uma forma ligeiramente diferente. O plano  $\gamma$ , sendo ortogonal simultaneamente ao plano  $\alpha$  e ao plano  $\theta$ , é necessariamente ortogonal à reta de interseção entre os dois planos (reta  $i$ ). Assim, poder-se-ia ter determinado a reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\alpha$  e o plano  $\theta$ ) – nessa situação, o exercício passaria pela determinação de um plano (o plano  $\gamma$ ) contendo o ponto  $P$  e ortogonal à reta  $i$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$  e do plano  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\gamma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$  ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



**186.****Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $h$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar as projeções do ponto  $P$ , o ponto de concorrência das duas retas. O ponto  $P$  é o ponto da reta  $h$  que tem 2 cm de afastamento.

**Resolução:***Determinação das projeções da reta  $r$ :*

Em seguida há que determinar as projeções da reta  $r$ , a reta dada (oblíqua) que é perpendicular à reta  $h$  no ponto  $P$ . Uma vez que a reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível), a perpendicularidade entre a reta  $r$  e a reta  $h$  é direta em projeção horizontal. Assim, pela projeção horizontal do ponto  $P$  ( $P_1$ ), conduziu-se a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), perpendicular à projeção horizontal da reta  $h$  ( $h_1$ ).

A reta  $r$  é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem as suas projeções paralelas (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si) – isto permitiu-nos desenhar  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), que passa por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ) e é paralela a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

A reta  $r$  é a reta que é perpendicular à reta  $h$  no ponto  $P$  e é paralela ao  $\beta_{2/4}$ .

*Determinação dos traços do plano  $\alpha$ :*

O **traço horizontal do plano  $\alpha$**  é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal do plano, com cota nula). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Determinou-se o traço horizontal da reta  $r$ , o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (que é uma reta horizontal do plano com cota nula). Nesse sentido, o traço horizontal do plano é paralelo à reta  $h$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço horizontal do plano – a direção das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ . O traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$  – é paralelo à reta  $h$ ).

O **traço frontal do plano  $\alpha$**  é a **reta de interseção** do plano  $\alpha$  com o Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

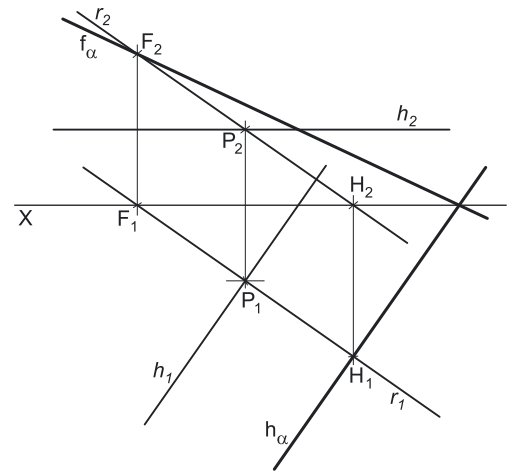
Determinou-se o traço frontal da reta  $r$ , o ponto  $F$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dois traços de um plano são duas retas do plano que são necessariamente concorrentes num ponto do eixo  $X$  (à exceção dos planos de rampa). Assim,  $f_\alpha$  e  $h_\alpha$  têm de ser concorrentes entre si num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). O traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $F$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

Note que se poderia ter determinado o traço frontal da reta  $h$ . Nesse caso, teríamos **três pontos** para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) – os traços frontais das duas retas (dois pontos) e, ainda, o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

Tendo em conta que a reta  $r$  e a reta  $h$  são perpendiculares e pertencem ao mesmo plano (o plano  $\alpha$ ), sabe-se imediatamente que a reta  $r$  é uma **reta de maior declive** do plano  $\alpha$  (pois é perpendicular às retas horizontais do plano  $\alpha$ ).

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Note que a reta  $r$ , apesar de ter sido determinada durante a **resolução**, é referida no enunciado como um dado, pelo que a reta  $r$  (as suas projeções) se representaram igualmente a **médio**. Os traços do plano  $\alpha$ , que são o pedido (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.



## 187.

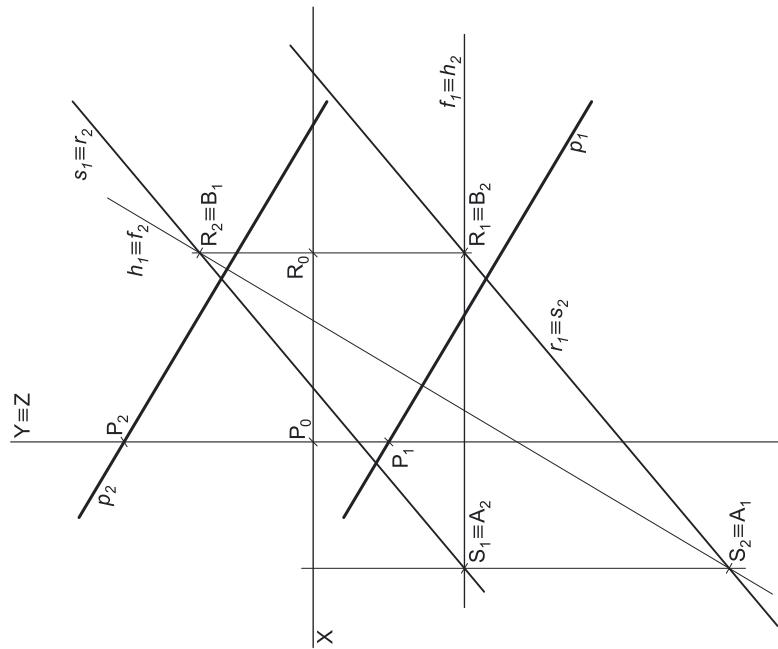
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $r$  e  $s$ , bem como o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é paralela a  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas a  $\beta_{2/4}$  tem as suas projeções paralelas entre si). As projeções da reta  $s$  estão coincidentes com as projeções de nome contrário da reta  $r$ , ou seja, a **projeção frontal** da reta  $s$  ( $s_2$ ) está coincidente com a **projeção horizontal** da reta  $r$  ( $r_1$ ), tal como a **projeção horizontal** da reta  $s$  ( $s_1$ ) está coincidente com a **projeção frontal** da reta  $r$  ( $r_2$ ).

### Resolução:

Pretende-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definirmos a reta  $p$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  tem de conter o ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (a reta  $p$  tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\alpha$ ).



Tendo em conta que os dados do plano  $\alpha$  são duas retas oblíquas (que não são paralelas a qualquer dos planos de projeção), conclui-se que os dados do plano  $\alpha$ , por si só, não nos permitem determinar qualquer reta ortogonal ao plano. Assim, é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Tendo em conta, ainda, que a ortogonalidade entre retas só é direta (numa das projeções) nas situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção, a reta auxiliar a que é necessário recorrer tem de ser, precisamente, uma reta paralela a um dos planos de projeção – uma reta horizontal (de nível) ou uma reta frontal (de frente).

Nesse sentido, recorreu-se à reta  $f$ , como reta auxiliar do plano, passando pelo ponto  $R$  (o ponto dado no enunciado). A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e está definida por dois pontos – o ponto  $R$  (o seu ponto de concorrência com a reta  $r$ ) e o ponto  $S$  (o seu ponto de concorrência com a reta  $s$ ). A reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que já é possível garantir a ortogonalidade da reta  $p$  a uma reta do plano  $\alpha$  (a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal). Assim, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), conduziu-se  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ).

Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a uma reta do plano  $\alpha$  – a reta  $f$ . Falta garantir a ortogonalidade da reta  $p$  a outra reta do plano  $\alpha$  (concorrente com a reta  $f$ ), de forma a se garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ .

Mais uma vez se constata que os dados do plano  $\alpha$ , por si só, não nos permitem garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra reta do plano, pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Tendo em conta, de novo, que a ortogonalidade entre retas só é direta (numa das projeções) nas situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção, a reta auxiliar a que é necessário recorrer tem de ser uma reta paralela a um dos planos de projeção – uma reta horizontal (de nível), que é a única situação de se recorrer a uma reta paralela a um dos planos de projeção e **concorrente** com a reta  $f$ .

Assim, recorreu-se à reta  $h$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano e, por uma questão de economia de traçados, optou-se por fazer a sua projeção frontal ( $h_2$ ) coincidente com a projeção horizontal da reta  $f$  ( $f_1$ ) – tem-se, imediatamente  $h_2 \equiv f_1$ . A reta  $h$  está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o seu ponto de concorrência com a reta  $r$ ) e o ponto  $B$  (o seu ponto de concorrência com a reta  $s$ ). Note que, tal como se verificou para as retas  $r$  e  $s$ , as projeções do ponto  $A$  estão coincidentes com as projeções de nome contrário do ponto  $S$ . Também as projeções do ponto  $B$  estão coincidentes com as projeções de nome contrário da reta  $f$ , mas trata-se de duas retas distintas.

A reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que já é possível garantir a ortogonalidade da reta  $p$  a outra reta do plano  $\alpha$  (a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção horizontal). Assim, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), conduziu-se  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ , pois a reta  $p$  é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  – as retas  $h$  e  $f$ .

A reta  $p$  é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\alpha$  – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta  $p$ , representada pelas suas projeções, contém o ponto  $P$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ , conforme era pedido.

Note que o exercício também poderia ter sido resolvido com o recurso à determinação dos traços do plano  $\alpha$ . Tal justifica-se pelo facto de o traço horizontal do plano ( $h_x$ ) ser uma reta horizontal (de nível) do plano e o seu traço frontal ( $f_x$ ) ser uma reta frontal (de frente) do plano, sendo os dois duas retas concorrentes do plano. Assim, essas duas retas permitir-nos-iam garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ , à semelhança do que se efetuou com o recurso às retas  $h$  e  $f$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $r$  e  $s$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $h$  e  $f$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 188.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ , dado no enunciado) e uma direção (a direção dada pelo conjunto das suas duas projeções). Salienta-se que as projeções da reta  $r$  são perpendicular **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, não existe nenhuma situação em que as projeções de uma qualquer reta sejam efetivamente perpendiculares entre si.

**Resolução:**

Pretende-se um plano  $\theta$ , ortogonal à reta  $r$  e passando pelo ponto  $P$  – o plano  $\theta$  tem, assim, de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $r$ , ou seja, o plano  $\theta$  tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares à reta  $r$  (o plano  $\theta$  tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta  $r$ ).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano  $\theta$ , ou seja, o ponto  $P$  tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\theta$ ). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta que pertença ao plano  $\theta$  – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $r$ . Ora, as únicas situações em que a ortogonalidade entre retas é direta em projeções, são as situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção.

Assim, há que conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta frontal (de frente) ortogonal à reta  $r$ , ou uma reta horizontal (de nível) ortogonal à reta  $r$ . Optou-se por conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta frontal (de frente)  $f$ , ortogonal à reta  $r$ . Uma vez que a reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta  $f$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal –  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ) passa por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ) e é perpendicular a  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

A reta  $f$  garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\theta$  já contém uma reta ortogonal à reta  $r$  – a reta  $f$ ;
2. que o ponto  $P$  pertence ao plano  $\theta$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $f$ ).

Para definir o plano  $\theta$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\theta$  – uma reta que seja **concorrente** com a reta  $f$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $r$ . Essa reta terá de ser uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$ , pois é a única situação em que é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $r$  e uma reta **concorrente** com a reta  $f$ . Essa reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$  pode ser, por exemplo, o próprio traço horizontal do plano –  $h_\theta$ .

Assim, determinou-se o traço horizontal da reta  $f$  (o ponto  $H$ ) e desenhou-se  $h_\theta$ , ortogonal à reta  $r$ . O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) é uma reta horizontal (paralela ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que a ortogonalidade entre  $h_\theta$  e a reta  $r$  é direta em projeção horizontal. Assim, por  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H$ ), conduziu-se  $h_\theta$ , perpendicular a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

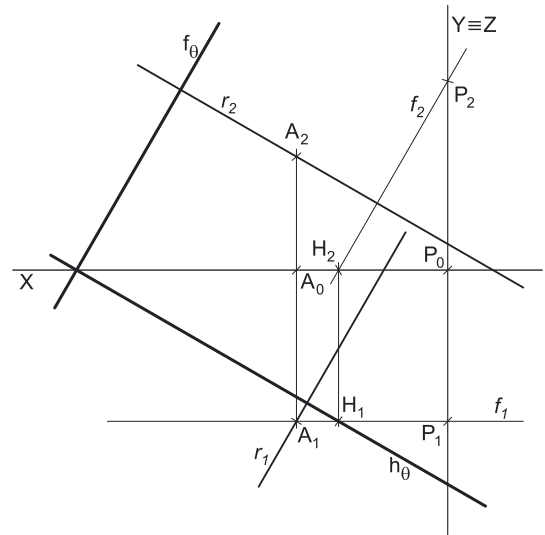
O plano  $\theta$  está definido por duas retas concorrentes ortogonais à reta  $r$  – a reta  $f$  e  $h_\theta$  (o seu traço horizontal), concorrentes no ponto  $H$ . Já se garantiu a ortogonalidade do plano  $\theta$  em relação à reta  $r$ .

Por fim, desenhou-se o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo à reta  $f$ , pois retas frontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal do plano com cota nula).

O plano  $\theta$ , definido pelos seus traços, é o plano que é ortogonal à reta  $r$  e que contém o ponto  $P$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\theta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $f$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).





## 189.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $M$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). Sublinha-se que as projeções da reta  $r$  são paralelas **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, as projeções da reta  $r$  só poderiam ser paralelas entre si, caso se tratasse de uma reta fronto-horizontal (o que não é o caso).

### Resolução:

Pretende-se determinar as projeções de uma reta  $p$ , qualquer, **ortogonal** à reta  $r$  e contida no  $\beta_{2/4}$ . É necessário ter em conta que existem infinitas retas contidas no  $\beta_{2/4}$  que são ortogonais à reta  $r$  – a reta  $p$  é uma qualquer dessas infinitas retas. Por outro lado, por se tratar de uma reta contida no  $\beta_{2/4}$  (e que não é uma reta fronto-horizontal, com certeza), a reta  $p$  é necessariamente uma **reta passante**.

A reta  $r$  é uma reta oblíqua, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $r$  e outra reta qualquer só se pode processar de forma direta, caso a outra reta seja uma reta horizontal (a ortogonalidade seria direta em projeção horizontal) ou uma reta frontal (a ortogonalidade seria direta em projeção frontal), o que não é o caso, pois a reta pedida é uma **reta passante** (nem a reta  $r$  nem a reta  $p$  são paralelas a qualquer dos planos de projeção).

O problema desta situação reside, precisamente, no facto de a reta  $r$  não ser paralela a nenhum dos planos de projeção, pelo que a resolução do exercício não é direta (a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das suas projeções). Poder-se-ia resolver o exercício recorrendo a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção.

No entanto, optou-se por outra situação – pelo recurso a um plano (o plano  $\alpha$ ) ortogonal à reta  $r$ , de forma a verificar-se o **Teorema da ortogonalidade entre retas e planos** (se um dado plano é ortogonal a uma reta dada, então toda e qualquer reta desse plano é ortogonal ou perpendicular à reta dada).

Começamos por determinar os traços de um plano qualquer, ortogonal à reta  $r$ . Para que esse plano seja ortogonal à reta  $r$ , o plano tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $r$  (o plano tem de conter duas retas concorrentes que sejam perpendiculares ou ortogonais à reta  $r$ ).

Assim, em primeiro lugar recorreu-se a uma reta  $f$ , frontal (de frente), ortogonal à reta  $r$  (a reta  $f$  é uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal). A reta  $f$  garante-nos imediatamente que o plano  $\alpha$  já contém uma reta ortogonal à reta  $r$  – a reta  $f$ .

Para definir o plano  $\alpha$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\alpha$  – uma reta que seja **concorrente** com a reta  $f$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $r$ . Essa reta terá de ser uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , pois é a única situação em que é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $r$  e uma reta **concorrente** com a reta  $f$ . Essa reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  pode ser, por exemplo, o próprio traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ), que é concorrente com a reta  $f$  no seu traço horizontal (o ponto  $H$ ).

Assim, determinou-se o traço horizontal da reta  $f$  (o ponto  $H$ ) e pelo ponto  $H$  conduziu-se  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ). A reta  $h_\alpha$  é uma reta horizontal (de nível), pelo que a ortogonalidade entre a reta  $r$  e a reta  $h_\alpha$  é direta em projeção horizontal –  $h_\alpha$  passa por  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H$ ) e é perpendicular a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

Em seguida determinou-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é concorrente com  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano) no eixo  $X$ , e é paralelo à reta  $f$ . O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é uma reta que está definida por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano – o ponto  $A$ ) e uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ , que é a direção da reta  $f$ ).

Nesta situação particular, o plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes. Sublinha-se que os traços do plano  $\alpha$  estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – **no espaço**, os traços do plano  $\alpha$  só poderiam estar coincidentes, caso se tratasse de um plano passante (o que não é o caso).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, é um plano ortogonal à reta  $r$  (pois contém duas retas concorrentes ortogonais à reta  $r$ ).

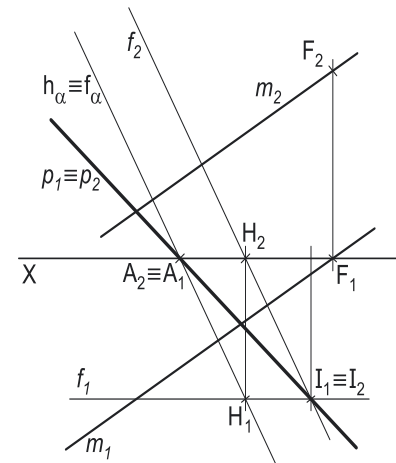
Qualquer reta do plano  $\alpha$  é necessariamente ortogonal (ou perpendicular) à reta  $r$  (**Teorema da ortogonalidade entre planos e retas**). A reta  $p$ , pedida, é uma reta do plano  $\alpha$ . Por outro lado, tendo em conta que a reta  $p$  é uma reta do  $\beta_{2/4}$ , a reta  $p$  é necessariamente a reta de interseção do plano  $\alpha$  com o  $\beta_{2/4}$ , pelo que a reta  $p$  passa necessariamente pelo ponto  $A$  – o ponto  $A$  é um ponto que pertence simultaneamente ao plano  $\alpha$  e ao  $\beta_{2/4}$  (pois situa-se no eixo  $X$  e o  $\beta_{2/4}$  contém o eixo  $X$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ .

Nesse sentido, determinou-se o ponto  $I$ , o traço da reta  $f$  no  $\beta_{2/4}$ . O ponto  $I$  pertence ao plano  $\alpha$ , porque pertence a uma reta do plano (a reta  $f$ ). O ponto  $I$  pertence ao  $\beta_{2/4}$ , pois tem as suas projeções coincidentes. Assim, o ponto  $I$  é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que é necessariamente um ponto da reta de interseção entre os dois planos. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ . A reta  $p$  é uma reta do  $\beta_{2/4}$  que é ortogonal à reta  $r$  e está definida por dois pontos – o ponto  $A$  e o ponto  $I$ .

As retas  $p$  e  $r$  são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos traços do plano  $\alpha$  e de todos os traçados necessários à sua determinação).





## 190.

**Dados:**

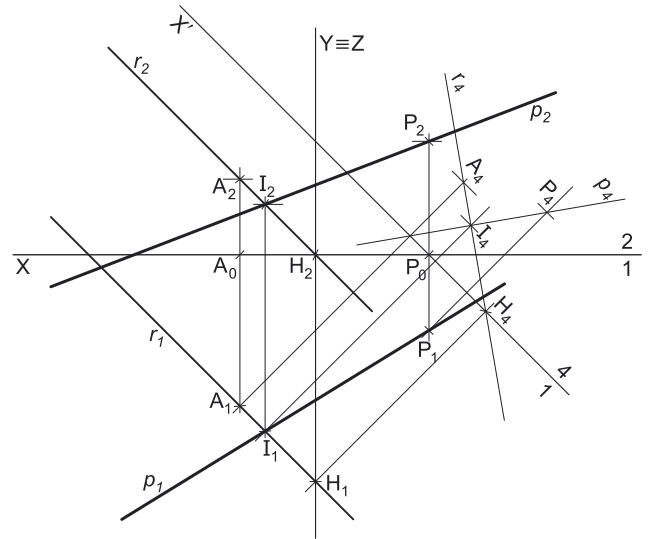
Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

**Resolução:**

Pretende-se determinar as projeções de uma reta  $p$ , perpendicular à reta  $r$  e passando pelo ponto  $P$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $P$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nem a reta  $r$  nem a reta  $p$  são paralelas a qualquer dos planos de projeção, pelo que a perpendicularidade entre as duas retas não é direta em nenhum dos planos de projeção.

Uma vez que a perpendicularidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das projeções (porque nenhuma das retas é paralela a qualquer dos planos de projeção), é necessário transformar a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção (com o recurso a uma **mudança do diedro de projeção**) e, assim, fazer com que a ortogonalidade entre as duas retas se processe de forma direta numa das suas projeções.



Optou-se por se transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente). Para tal substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo à reta  $r$ . Nesse sentido, criou-se um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção) e é paralelo a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $A$  e  $P$  no **plano 4** ( $A_4$  e  $P_4$ ), em função das respetivas cotas.

Há que desenhar  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**) – o ponto  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um outro ponto da reta  $r$  (o ponto  $H$ , o seu traço horizontal) e determinou-se a sua projeção no **plano 4** ( $H_4$ ), em função da sua cota, que se manteve (e é nula). Assim,  $H_4$  (a projeção do ponto  $H$  no **plano 4**) situa-se no eixo  $X'$ . Já temos o ponto que nos faltava. A projeção da reta  $r$  no **plano 4** ( $r_4$ ) está definida por dois pontos – os pontos  $A_4$  e  $H_4$ .

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), pelo que a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**) – as projeções das duas retas no **plano 4** são efetivamente perpendiculares entre si. Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), o que nos garante a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$ .

Por outro lado, as retas  $p$  e  $r$  são **perpendiculares**, pelo que as duas retas são necessariamente concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas.  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**) com  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

Em seguida determinou-se a projeção frontal do ponto  $I$  ( $I_2$ ), sobre a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) na mesma linha de chamada de  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ . A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ . Assim, desenharam-se as projeções da reta  $p$ , passando pelas projeções homónimas dos pontos  $P$  e  $I$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 191.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções coincidentes, porque é uma reta do  $\beta_{2/4}$  / retas do  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções coincidentes).

### Resolução:

Pretende-se determinar as projeções de uma reta  $p$ , perpendicular à reta  $r$  e contida no  $\beta_{1/3}$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  pertence ao  $\beta_{1/3}$  e a reta  $r$  pertence ao  $\beta_{2/4}$ . Uma vez que as duas retas são concorrentes (porque são perpendiculares), existe um ponto de concorrência. Esse ponto (o ponto  $A$ ) é um ponto que pertence simultaneamente ao  $\beta_{1/3}$  (porque pertence à reta  $p$  e ao  $\beta_{2/4}$  (porque pertence à reta  $r$ ), pelo que é necessariamente um ponto do eixo  $X$  – o ponto  $A$  é o ponto de concorrência da reta  $r$  com o eixo  $X$ . Assim, a reta  $p$  passa pelo ponto  $A$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta  $r$  é uma reta oblíqua, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $r$  e outra reta qualquer só se pode processar de forma direta, caso a outra reta seja uma reta horizontal (a ortogonalidade seria direta em projeção horizontal) ou uma reta frontal (a ortogonalidade seria direta em projeção frontal), o que não é o caso (nem a reta  $r$  nem a reta  $p$  são paralelas a qualquer dos planos de projeção).

O problema desta situação reside, precisamente, no facto de a reta  $r$  não ser paralela a nenhum dos planos de projeção, pelo que a resolução do exercício não é direta (a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das suas projeções). Poder-se-ia resolver o exercício transformando a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção, com o recurso a uma mudança do diedro de projeção.

No entanto, optou-se por outra situação – pelo recurso a um plano (o plano  $\alpha$ ) que contenha o ponto  $A$  e seja ortogonal à reta  $r$ , de forma a verificar-se o **Teorema da ortogonalidade entre retas e planos** (se um dado plano é ortogonal a uma reta dada, então toda e qualquer reta desse plano é ortogonal ou perpendicular à reta dada).

Começamos por determinar os traços do plano que passa pelo ponto  $A$  e é ortogonal à reta  $r$ . Para que o plano contenha o ponto  $A$ , o ponto  $A$  tem de pertencer ao plano, pelo que tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** em relação a esse plano (o ponto tem de pertencer a uma reta do plano). Uma vez que o ponto  $A$  é um ponto do eixo  $X$  e pertence a esse plano  $\alpha$ , o ponto  $A$  é necessariamente o nó de concorrência dos dois traços do plano (pertence simultaneamente aos dois traços do plano). Por outro lado, para que o plano seja ortogonal à reta  $r$ , o plano tem de verificar o **Crítério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $r$  (o plano tem de conter duas retas concorrentes que sejam perpendiculares ou ortogonais à reta  $r$ ).

Em primeiro lugar, conduziu-se, pelo ponto  $A$ , o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ), ortogonal à reta  $r$  ( $h_\alpha$  é uma reta do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção horizontal). Assim,  $h_\alpha$  garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\alpha$  já contém uma reta ortogonal à reta  $r$  – o seu traço horizontal ( $h_\alpha$ );
2. que o ponto  $A$  pertence ao plano  $\alpha$  (porque pertence a uma reta do plano – o seu traço fronto-horizontal).

Para definir o plano  $\alpha$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\alpha$  – uma reta que seja **concorrente** com  $h_\alpha$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $r$ . Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , pois é a única situação em é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $r$  e uma reta **concorrente** com  $h_\alpha$ . Essa reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  pode ser, por exemplo, o próprio traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), que é concorrente com  $h_\alpha$  no ponto  $A$ .

Assim, desenhou-se  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) –  $f_\alpha$  é uma reta frontal (de frente), pelo que a ortogonalidade entre a reta  $r$  e  $f_\alpha$  é direta em projeção frontal. Assim,  $f_\alpha$  passa pelo ponto  $A$  e é perpendicular a  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ). O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $A$  e é ortogonal à reta  $r$  (pois contém duas retas concorrentes ortogonais à reta  $r$ ).

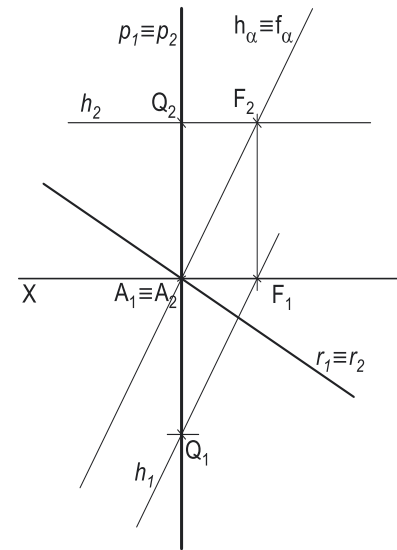
Qualquer reta do plano  $\alpha$  é necessariamente ortogonal (ou perpendicular) à reta  $r$  (**Teorema da ortogonalidade entre planos e retas**). A reta  $p$ , pedida, é uma reta do plano  $\alpha$  que passe pelo ponto  $A$ , pelo que já tínhamos um ponto para definir a reta  $p$  – o ponto  $A$ . A reta  $p$  é uma reta do  $\beta_{1/3}$ , pelo que a reta  $p$  é necessariamente a reta de interseção do plano  $\alpha$  com o  $\beta_{1/3}$ . Assim, continua a faltar-nos um ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ . Nesse sentido, é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\alpha$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se à reta  $h$ , com reta auxiliar do plano. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). Em seguida determinou-se o ponto  $Q$ , o traço da reta  $h$  no  $\beta_{1/3}$ . O ponto  $Q$  pertence ao plano  $\alpha$ , porque pertence a uma reta do plano (a reta  $h$ ). O ponto  $Q$  pertence ao  $\beta_{1/3}$ , pois tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ . Assim, o ponto  $Q$  é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que é necessariamente um ponto da reta de interseção entre os dois planos.

Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$ . A reta  $p$  é a reta do  $\beta_{1/3}$  que é perpendicular à reta  $r$  e está definida por dois pontos – o ponto  $P$  e o ponto  $Q$ . Nesta situação particular, a reta  $p$  é ma **reta de perfil**.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos traços do plano  $\alpha$ , da reta  $h$  ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 192.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

**Resolução:**

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\sigma$ , de rampa, que contenha o ponto  $P$  e que seja ortogonal ao plano  $\rho$  – o plano  $\sigma$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\rho$  (o plano  $\sigma$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\rho$ , ou seja, o plano  $\sigma$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, o plano  $\sigma$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\rho$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano  $\rho$ , ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano  $\rho$  contenha). Por outro lado, para que o plano contenha o ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano  $\sigma$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** em relação ao plano  $\sigma$  (tem de pertencer a uma reta do plano  $\sigma$ ).

**Determinação das projeções da reta  $p$ :**

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $P$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $P$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ .

Salienta-se que as duas situações pendentes acima referidas têm a ver com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  são duas retas da mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano oblíquo).

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as duas situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade** e, por outro, nesse diedro de projeção teremos dois traços do plano  $\rho$  (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes). Foi este raciocínio que nos justificou o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

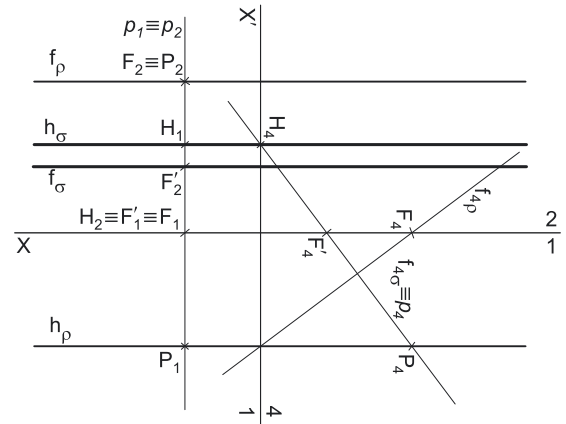
Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo à reta  $p$ , o que nos permite transformar a reta de perfil numa reta frontal (de frente). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta ( $p_1$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), pelo que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto  $P$  no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ .  $P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve.

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto de  $f_\rho$  (o traço frontal do plano) – o ponto  $F$ . Em seguida determinou-se  $F_4$  (a projeção do ponto  $F$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve. Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $F_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar o ponto  $F$  no plano de perfil que contém o ponto  $P$  (e a reta  $p$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $P_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ .

Para definirmos totalmente a reta  $p$  em projeções (no diedro de projeção inicial), é necessário um outro ponto da reta. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H$ , que é o traço horizontal da reta  $p$ , no novo diedro de projeção. A projeção horizontal do ponto  $H$  ( $H_1$ ) determinou-se de forma direta, no novo diedro de projeção. Tendo em conta que se mantêm as cotas, e que o ponto  $H$  é o ponto da reta  $p$  que tem cota nula, a projeção frontal do ponto  $H$  no diedro de projeção inicial ( $H_2$ ) determinou-se em função da sua cota (que é nula e se manteve) –  $H_2$  situa-se no eixo  $X$  inicial.

A reta  $p$  (definida pelos pontos  $P$  e  $H$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ . Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\rho$  e contém o ponto  $P$ .

### Determinação dos traços do plano $\sigma$ :

No novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  é igualmente um plano projetante frontal (um plano de topo) – é o plano projetante frontal da reta  $\zeta$ . Assim, representaram-se os traços do plano  $\sigma$  no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**. Assim,  $f_{4\sigma}$  está coincidente com  $p_4$  (pois o plano  $\sigma$  é projetante em relação ao **plano 4**) e  $h_\sigma$  é concorrente com  $f_{4\sigma}$  no eixo  $X'$  e perpendicular ao eixo  $X'$  (é um plano de topo). Na prática,  $h_\sigma$  fica paralelo ao eixo  $X$  inicial (pois o plano  $\sigma$  é um plano de rampa, no diedro de projeção inicial).

Para determinar o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção, pois trata-se de uma reta fronto-horizontal. Falta-nos um ponto para definir  $f_\alpha$ . Nesse sentido, há que determinar o traço frontal da reta  $p$  (o ponto  $F'$ ), o que se processa a partir da sua projeção horizontal ( $F'_1$ ), que se mantém. Determinou-se o ponto  $F'$  no novo diedro de projeção no qual as projeções da reta  $p$  verificam o **Critério de reversibilidade** –  $F'_4$  (a projeção do ponto  $F'$  no **plano 4**) situa-se sobre  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) na linha de chamada de  $F'_1$ . Tendo em conta que se mantêm as cotas na mudança do diedro de projeção efetuada, a projeção frontal do ponto  $F'$  ( $F'_2$ ) determinou-se em função da sua cota (que se mantém). Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) –  $f_\alpha$  está definido por um ponto (o ponto  $F'$ ) e uma direção (é fronto-horizontal).

O plano  $\sigma$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $P$  (o ponto  $P$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $\rho$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\rho$  – a reta  $p$ ).

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\sigma$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 193.

### Dados:

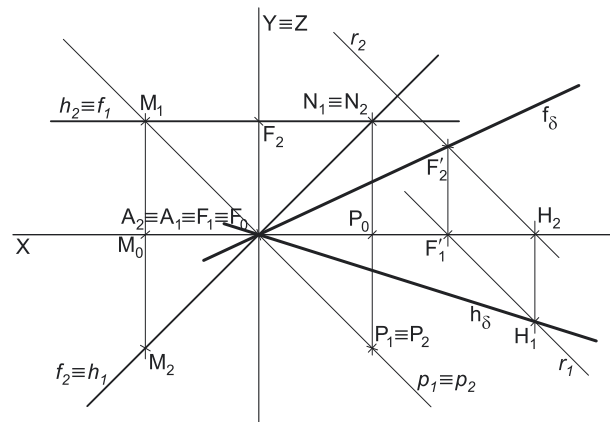
Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $h$  e os pontos  $M$  e  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto  $M$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). Note que o ponto  $M$  não pertence à reta  $h$ , pois não verifica a **condição para que um ponto pertença a uma reta** em relação à reta  $h$ . O ponto  $P$  tem as suas projeções coincidentes, pois é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes). O plano  $\alpha$  está representado pelas projeções da reta  $h$  e do ponto  $M$ .

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\delta$ , que contenha o ponto  $P$  e que seja ortogonal ao plano  $\alpha$  – o plano  $\delta$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\alpha$  (o plano  $\delta$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$ , ou seja, o plano  $\delta$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\alpha$ ).

Assim, o plano  $\delta$  (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$  (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Por outro lado, para que o plano  $\delta$  contenha o ponto  $P$ , o ponto  $P$  tem de pertencer ao plano  $\delta$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

Assim, há que conduzir, pelo ponto  $P$ , uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . A reta  $h$  (a reta que define o plano  $\alpha$ ) é uma reta do plano  $\alpha$  e é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que já é possível garantir a ortogonalidade da reta  $p$  a uma reta do plano  $\alpha$  (a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção horizontal). Assim, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), conduziu-se  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a uma reta do plano  $\alpha$  – a reta  $h$ . Falta garantir a ortogonalidade da reta  $p$  a outra reta do plano  $\alpha$  (concorrente com a reta  $h$ ), de forma a se garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ .

Os dados do plano  $\alpha$ , por si só, não nos permitem garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra reta do plano, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Tendo em conta que a ortogonalidade entre retas só é direta (numa das projeções) nas situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção, a reta auxiliar a que é necessário recorrer tem de ser uma reta paralela a um dos planos de projeção – uma reta frontal (de frente), que é a única situação de se recorrer a uma reta paralela a um dos planos de projeção e **concorrente** com a reta  $h$ .

Assim, recorreu-se à reta  $f$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano que passa pelo ponto  $M$  (o ponto que define o plano) e é concorrente com a reta  $h$ . Assim, a reta  $f$  está definida por dois pontos – o ponto  $M$  (dado no enunciado) e o ponto  $N$  (o ponto de concorrência com a reta  $h$ ). Note que, nesta situação particular, as projeções da reta  $f$  ficam coincidentes com as projeções de nome contrário da reta  $h$ .

A reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que já é possível garantir a ortogonalidade da reta  $p$  a outra reta do plano  $\alpha$  (a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal). Assim, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), conduziu-se  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ , pois a reta  $p$  é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  – as retas  $h$  e  $f$ . Note que, nesta situação, a reta  $p$  é ma reta do  $\beta_{2/4}$  (é uma reta passante com as suas projeções coincidentes).

A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (é ortogonal ao plano  $\alpha$ ). Qualquer plano que contenha a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\alpha$  e contém o ponto  $P$ . A reta  $p$ , sendo uma reta passante, é concorrente com o eixo  $X$  num ponto – o ponto  $A$ . O ponto  $A$  é, assim, o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\delta$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção do traço frontal do plano ( $f_\delta$ ) é dada no enunciado, pelo que já temos a direção que nos faltava. Assim, desenhou-se o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que está definido pro um ponto (o ponto  $A$ ) e uma direção (a direção dada no enunciado).

Analisemos, em seguida, a determinação do traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ). O ponto  $A$  é o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\delta$ , pelo que já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Os dados que temos do plano  $\delta$  (a reta  $p$  e  $f_\delta$ ) não nos permitem determinar o elemento em falta para definir o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ), pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $r$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $r$  é uma reta oblíqua do plano  $\delta$ , que está definida por um ponto (o ponto  $F'$ , o seu traço frontal) e uma direção (é paralela à reta  $p$ ). Note que o traço frontal da reta  $r$  (o ponto  $F'$ ) se situa sobre  $f_\delta$ . Em seguida determinou-se o ponto  $H$ , o traço horizontal da reta  $r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\delta$  –  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ) está definido por dois pontos (o ponto  $A$  e o ponto  $H$ ).

O plano  $\delta$ , definido pelos seus traços, contém o ponto  $P$  (o ponto  $P$  pertence a uma reta do plano – a reta  $p$ ) e é ortogonal ao plano  $\alpha$  (pois contém uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  – a reta  $p$ ).

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\delta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $r$  ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 194.

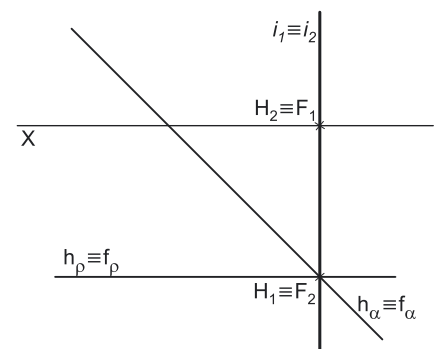
#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\rho$ , pelos respetivos traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem os seus traços coincidentes (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes). Exatamente pelo mesmo motivo, o plano  $\rho$  tem também os seus traços coincidentes, pois é igualmente ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ .

#### Resolução:

É pedida uma reta – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos, que é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos, ou seja, é a reta que pertence simultaneamente aos dois planos. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $i$  é uma reta que pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que a reta  $i$  tem de verificar a **condição para que uma reta pertença a um plano** em relação aos dois planos (os traços da reta têm de estar sobre os traços homónimos dos dois planos). Dessa forma, o traço frontal da reta  $i$  (o ponto  $F$ ) tem de pertencer ao traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) e tem também de pertencer ao traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $i$ ), que é o ponto de concorrência de  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) com  $f_\rho$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $i$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $i$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

De forma idêntica, e na sequência da **condição para que uma reta pertença a um plano**, o traço horizontal da reta  $i$  (o ponto  $H$ ) tem de pertencer ao traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) e tem também de pertencer ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $i$ ), que é o ponto de concorrência de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) com  $h_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ .

A reta  $i$ , nesta situação, é uma **reta de perfil** e está definida por dois pontos – os seus traços nos planos de projeção (os pontos  $F$  e  $H$ ).

Salienta-se que se trata de uma situação que pode induzir em erro – o ponto  $H$  e o ponto  $F$  são efetivamente dois pontos distintos, pois, apesar de terem projeções coincidentes, as projeções que estão coincidentes **não são as projeções homónimas**. Dessa forma, a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ) passa pelas projeções frontais dos pontos  $H$  e  $F$  ( $H_2$  e  $F_2$ , respetivamente), tal como a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ) passa pelas projeções horizontais dos pontos  $H$  e  $F$  ( $H_1$  e  $F_1$ , respetivamente).

### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (a linha estruturante do exercício). A reta  $i$ , porque é pedida (é o objetivo do exercício), representou-se a **forte**.

## 195.

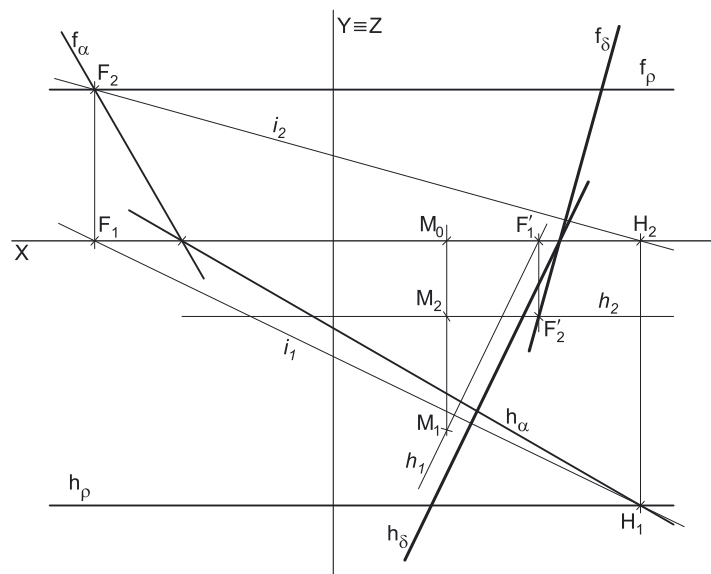
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\rho$ , pelos respetivos traços, bem como o ponto  $M$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano  $\delta$ , que contenha o ponto  $M$  e que seja ortogonal simultaneamente ao plano  $\alpha$  e ao plano  $\rho$  – o plano  $\delta$  tem de verificar o **critério de ortogonalidade entre planos** em relação aos dois planos (o plano  $\alpha$  e o plano  $\rho$ ). Assim, o plano  $\delta$  tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  (o plano  $\delta$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\alpha$ ), tal como tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\rho$  (o plano  $\delta$  tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Se bem que a determinação de uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  se processe de forma direta (os seus traços são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  – uma reta frontal e uma reta horizontal), o mesmo já não acontece com o plano  $\rho$ . De facto, uma reta ortogonal ao plano  $\rho$  (um plano de rampa) é uma **reta de perfil**, com todos os condicionamentos que daí advêm (nomeadamente o facto de as suas projeções não verificarem o **critério de reversibilidade** e, de uma forma geral, ser necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar).



Analisemos a situação segundo um outro ponto de vista. O plano  $\delta$  é ortogonal ao plano  $\alpha$ , pelo que o plano  $\delta$  contém a «família» de retas ortogonal ao plano  $\alpha$ . Esta situação é recíproca, ou seja, se o plano  $\delta$  é ortogonal ao plano  $\alpha$ , então o plano  $\alpha$  também é ortogonal ao plano  $\delta$ . Assim, **o plano  $\alpha$  contém necessariamente a «família» de retas ortogonal ao plano  $\delta$** .

De forma idêntica, o plano  $\delta$  é ortogonal ao plano  $\rho$ , pelo que o plano  $\delta$  contém a «família» de retas ortogonal ao plano  $\rho$ . Esta situação é igualmente recíproca, ou seja, se o plano  $\delta$  é ortogonal ao plano  $\rho$ , então o plano  $\rho$  também é ortogonal ao plano  $\delta$ . Assim, **o plano  $\rho$  contém necessariamente a «família» de retas ortogonal ao plano  $\delta$** .

Os planos  $\alpha$  e  $\rho$  são planos secantes, ou seja, são planos com orientações diferentes e **uma única «família» de retas em comum**, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. Assim, a **única «família» de retas** que os planos  $\alpha$  e  $\rho$  têm em comum (porque se tivessem mais do que uma «família» de retas em comum os dois planos seriam paralelos), é a **«família» de retas ortogonal ao plano  $\delta$** .

O plano  $\delta$  tem, assim, de ser ortogonal a essa «família» de retas. Nesse sentido, determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção entre os planos  $\alpha$  e  $\rho$ . A reta  $i$  é uma reta oblíqua e está definida por dois pontos – os seus traços (os pontos  $F$  e  $H$ ). O exercício consiste agora, em determinar um plano  $\delta$ , ortogonal à reta  $i$  e passando pelo ponto  $M$ .

Nesse sentido, o plano  $\delta$  tem de verificar o **critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $i$ , ou seja, o plano  $\delta$  tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares à reta  $i$  (o plano  $\delta$  tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta  $i$ ). Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $M$ , o ponto  $M$  tem de pertencer ao plano  $\delta$ , ou seja, o ponto  $M$  tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença a plano  $\alpha$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, conduziu-se, pelo ponto **M**, uma reta que do plano  $\delta$  e ortogonal à reta  $i$ . Ora, as únicas situações em que a ortogonalidade entre retas é direta em projeções, são as situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção. Nesse sentido, há que conduzir, pelo ponto **M**, uma reta frontal (de frente) ortogonal à reta  $i$ , ou uma reta horizontal (de nível) ortogonal à reta  $i$ . Optou-se por conduzir, pelo ponto **M**, uma reta horizontal (de nível)  $h$ , ortogonal à reta  $i$ . Uma vez que a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta  $h$  e a reta  $i$  é direta em projeção horizontal –  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) passa por  $M_1$  (a projeção horizontal do ponto **M**) e é perpendicular a  $i_1$  (a projeção horizontal da reta  $i$ ).

A reta  $h$  garante-nos dois factos:

1. que o plano  $\delta$  já contém uma reta ortogonal à reta  $i$  – a reta  $h$ ;
2. que o ponto **M** pertence ao plano  $\delta$  (porque pertence a uma reta do plano – a reta  $h$ ).

Para definir o plano  $\delta$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\delta$  – uma reta que seja **concorrente** com a reta  $h$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $i$ . Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$ , pois é a única situação em é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $i$  e uma reta **concorrente** com a reta  $h$ . Essa reta frontal (de frente) do plano  $\delta$  pode ser, por exemplo, o próprio traço frontal do plano –  $f_\delta$ .

Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $h$  (o ponto  $F'$ ) e desenhou-se  $f_\delta$ , ortogonal à reta  $i$ . O traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ) é uma reta frontal (paralela ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a ortogonalidade entre  $f_\delta$  e a reta  $i$  é direta em projeção frontal. Assim, por  $F'_2$  (a projeção frontal do ponto  $F'$ ), conduziu-se  $f_\delta$ , perpendicular a  $i_2$  (a projeção frontal da reta  $i$ ).

O plano  $\delta$  está definido por duas retas concorrentes ortogonais à reta  $i$  – a reta  $h$  e  $f_\delta$  (o seu traço frontal), concorrentes no ponto  $F'$ . Já se garantiu a ortogonalidade do plano  $\delta$  em relação à reta  $i$ .

Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo à reta  $h$ , pois retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal do plano com cota nula).

O plano  $\delta$ , definido pelos seus traços, é o plano que é ortogonal à reta  $i$  e que contém o ponto **M**. Assim, o plano  $\delta$  é o plano que contém o ponto **M** e é ortogonal simultaneamente ao plano  $\alpha$  e ao plano  $\rho$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\delta$  representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $i$  e  $h$  ou, mesmo, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 15 PROCESSOS GEOMÉTRICOS AUXILIARES II

### 196.

A finalidade dos processos geométricos auxiliares é a determinação de projeções mais favoráveis de um dado objeto (em relação às projeções iniciais) com vista à concretização de um determinado estudo sobre esse mesmo objeto. De facto, é através dos processos geométricos auxiliares que é possível resolver situações que as projeções iniciais não permitem, como, por exemplo, a determinação de verdadeiras grandezas onde estas não existem de forma direta.

### 197.

Os processos geométricos auxiliares são **três**: o processo da **mudança do diedro de projeção**, o processo da **rotação** e o processo do **rebatimento** (que consiste no caso particular de uma **rotação**).

### 198.

O processo da **mudança do diedro de projeção** consiste em, mantendo fixo o objeto, substituir os planos de projeção iniciais por novos planos de projeção, criando novos diedros de projeção nos quais o objeto se projete de forma mais favorável para a concretização do estudo em curso.

O processo da **rotação** consiste em rodar o objeto em torno de um eixo (uma reta), mantendo o diedro de projeção inicial, de forma que, no diedro de projeção inicial, o objeto se projete de forma mais favorável para a concretização do estudo em curso.

Por fim, o processo do **rebatimento** consiste numa **rotação** do objeto em torno de um eixo (uma reta), mantendo o diedro de projeção inicial – a diferença entre estes dois processos (o da **rotação** e o do **rebatimento**) reside no facto de, no segundo (no **rebatimento**), o eixo de rotação ser **complanar** com o objeto a rodar, o que não se verifica no primeiro (na **rotação**). Resulta, dessa diferença, o facto de, nos **rebatimentos**, o objeto a rodar ter de estar **necessariamente** contido num plano (para que o eixo de rotação seja complanar com o objeto) – o eixo é, assim, uma reta do plano que contém o objeto (que tem de estar contido num plano). Já nas **rotações**, o eixo é uma reta exterior ao plano e podem rodar-se objetos tridimensionais (num **rebatimento** só se podem rodar objetos uni ou bidimensionais – só se rebatem planos).

### 199.

O processo da **mudança do diedro de projeção** consiste em, mantendo fixo o objeto a projetar, substituir os planos de projeção iniciais por **novos** planos de projeção (em posições mais favoráveis em relação ao objeto dado), o que implica que o objeto passe a existir num novo diedro de projeção (de onde vem o nome deste processo) e no qual aquele se projeta de forma mais favorável para a concretização do estudo em curso.

### 200.

Para transformar o segmento de reta oblíquo num segmento frontal (paralelo ao Plano Frontal de Projeção), há que substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de Projeção (o **plano 4**), paralelo ao segmento – uma vez que se mantém o Plano Horizontal de Projeção, mantêm-se todas as referências a este plano de Projeção (mantêm-se as projeções horizontais e mantêm-se as cotas). O novo eixo **X** (eixo **X'**) é a reta de interseção do Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) com o novo plano de Projeção (o **plano 4**) e fica paralelo à Projeção horizontal do segmento. A Projeção do segmento no **plano 4** determina-se a partir das projeções dos seus extremos no **plano 4**, sendo que estas se obtêm a partir das suas cotas, que se mantêm. No diedro de Projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta dado é, já, um segmento de reta frontal (de frente).

### 201.

Um **segmento de reta vertical** é um **caso particular** dos **segmentos de reta frontais (de frente)** – é um segmento de reta frontal (de frente) que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção. Não é possível, com uma única mudança do diedro de Projeção, transformar um segmento de reta oblíquo num segmento de reta vertical. Assim, em primeiro lugar há que transformar o segmento de reta oblíquo num segmento de reta frontal (de frente).

Para transformar o segmento de reta oblíquo num segmento frontal (paralelo ao Plano Frontal de Projeção), há que substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de Projeção (o **plano 4**), paralelo ao segmento – uma vez que se mantém o Plano Horizontal de Projeção, mantêm-se todas as referências a este plano de Projeção (mantêm-se as projeções horizontais e mantêm-se as cotas). O novo eixo **X** (eixo **X'**) é a reta de interseção do Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) com o novo plano de Projeção (o **plano 4**) e fica paralelo à Projeção horizontal do segmento. A Projeção do segmento no **plano 4** determina-se a partir das projeções dos seus extremos no **plano 4**, sendo que estas se obtêm a partir das respetivas cotas, que se mantêm.

No diedro de Projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta dado é, já, um segmento de reta frontal (de frente). Em seguida, há que transformar o segmento de reta frontal (de frente), num segmento de reta vertical (ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção).

Para transformar o segmento de reta frontal (de frente) num segmento de reta vertical (ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção), há que substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um novo plano de Projeção (o **plano 5**), ortogonal ao segmento – uma vez que se mantém o **plano 4**, mantêm-se todas as referências a este plano de Projeção (mantêm-se as novas projeções frontais e mantêm-se, também, os novos afastamento, que estão referenciados ao **plano 4**). O novo eixo **X** (eixo **X''**) é a reta de interseção do **plano 4** com o novo plano de Projeção (o **plano 5**) e fica ortogonal à Projeção frontal do segmento. A Projeção do segmento no **plano 5** determina-se a partir das projeções dos seus extremos no **plano 5**, sendo que estas se obtêm a partir dos respetivos afastamentos, que se mantêm.

No diedro de Projeção, formado pelo **plano 5** e pelo **plano 4**, o segmento de reta dado é, agora, um segmento de **reta vertical**.

## 202.

Uma **reta de topo** é um **caso particular** das **retas horizontais (de nível)** – é uma reta horizontal de nível) que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção. Não é possível, com uma única mudança do diedro de Projeção, transformar uma reta oblíqua numa reta de topo. Assim, em primeiro lugar há que transformar a reta oblíqua numa reta horizontal (de nível).

Para transformar a reta oblíqua numa reta horizontal (paralela ao Plano Horizontal de Projeção), há que substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um novo plano de Projeção (o **plano 4**), paralelo à reta – uma vez que se mantém o Plano Frontal de Projeção, mantêm-se todas as referências a este plano de Projeção (mantêm-se as projeções frontais e mantêm-se os afastamentos). O novo eixo **X** (eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 4** com o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) e fica paralelo à Projeção frontal da reta. A Projeção da reta no **plano 4** determina-se a partir das projeções de dois dos seus pontos no **plano 4**, sendo que estas se obtêm a partir dos respetivos afastamentos, que se mantêm.

No diedro de Projeção, formado pelo **plano 4** e pelo **plano 2**, a reta dada é, já, uma reta horizontal (de nível). Em seguida, há que transformar a reta horizontal (de nível), numa reta de topo (ortogonal ao Plano Frontal de Projeção).

Para transformar a reta horizontal (de nível) numa reta de topo (ortogonal ao Plano Frontal de Projeção), há que substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de Projeção (o **plano 5**), ortogonal ao segmento – uma vez que se mantém o **plano 4**, mantêm-se todas as referências a este plano de Projeção (mantêm-se as novas projeções horizontais e mantêm-se, também, as novas cotas, que estão referenciados ao **plano 4**). O novo eixo **X** (eixo **X''**) é a reta de interseção do **plano 4** com o novo plano de Projeção (o **plano 5**) e fica ortogonal à Projeção horizontal da reta. A Projeção da reta no **plano 5** determina-se a partir das projeções de dois dos seus pontos no **plano 5**, sendo que estas se obtêm a partir das respetivas cotas, que se mantêm.

No diedro de Projeção, formado pelo **plano 5** e pelo **plano 4**, a reta dada é, agora, uma **reta de topo**.

## 203.

## Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o segmento de reta **[AB]**, pelas suas projeções, em função dos dados.

## Resolução:

Pretende-se determinar a verdadeira grandeza do segmento **[AB]**, transformando-o num segmento de reta de topo, com 4 cm de cota. Uma reta de topo é um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o segmento de reta **[AB]** num segmento de reta horizontal (de nível) com 4 cm de cota (a cota pretendida).

*Transformação do segmento de reta **[AB]** num segmento de reta horizontal (de nível):*

Para transformar o segmento de reta **[AB]** num segmento de reta horizontal (de nível) com 4 cm de cota, é necessário, substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** dos seus pontos (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que passam a ser 4 cm, pois as cotas anteriores estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta **[AB]**, o eixo **X'** é paralelo a **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>]** e está a 4 cm deste (a nova cota do segmento – a cota pretendida). As linhas de chamada dos pontos **A** e **B**, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

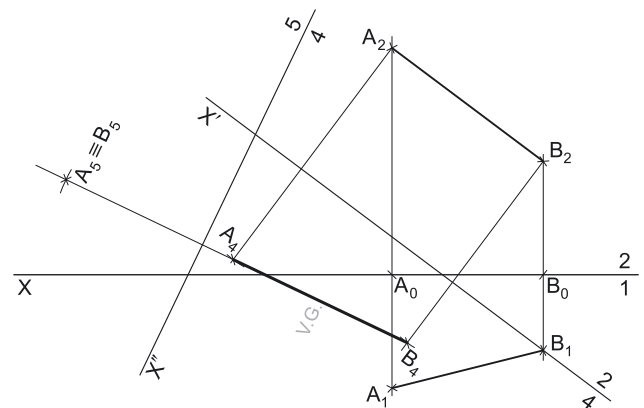
**A<sub>4</sub>** é a Projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **A<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 3 cm – o afastamento do ponto **A**). **B<sub>4</sub>** é a Projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **B<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **B<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 2 cm – o afastamento de **B**). No novo diedro de Projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta horizontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua Projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de **AB** é **A<sub>4</sub>B<sub>4</sub>**.

*Transformação do segmento de reta **[AB]** num segmento de reta de topo:*

Em seguida, há que transformar o segmento de reta **[AB]** (que já é um segmento de reta horizontal no diedro formado pelo **plano 4** e pelo **plano 2**) num segmento de reta de topo, que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção. Assim, para tal, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 5**), ortogonal ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que são 4 cm e estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 5**).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com  $4/5$ . Como o **plano 5** é ortogonal ao segmento de reta  $[AB]$ , o eixo  $X''$  é perpendicular a  $[A_4B_4]$ . As linhas de chamada dos pontos  $A$  e  $B$ , no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ) – ficam coincidentes uma com a outra.

$A_5$  é a Projeção do ponto  $A$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X'$  (que é 4 cm – a nova cota de  $A$ ).  $B_5$  é a Projeção do ponto  $B$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X'$  (que é 4 cm – a nova cota de  $B$ ). As projeções dos pontos  $A$  e  $B$  no **plano 5** ficam coincidentes (no novo diedro de Projeção, formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**, o segmento é projetante frontal) No novo diedro de Projeção, o segmento está ortogonal ao **plano 5** e paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta de topo) e a sua verdadeira grandeza mantém-se na sua Projeção no **plano 4**, pois o segmento é paralelo ao **plano 4** – a verdadeira grandeza de  $\overline{AB}$  é  $\overline{A_4B_4}$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções do segmento de reta) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). A Projeção do segmento de reta  $[AB]$  no **plano 4** representou-se a **forte**, pois é o pedido – é em  $\overline{A_4B_4}$  que se pode medir a verdadeira grandeza do segmento de reta. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X'$  e do eixo  $X''$ ) ou são linhas de chamada.

## 204.

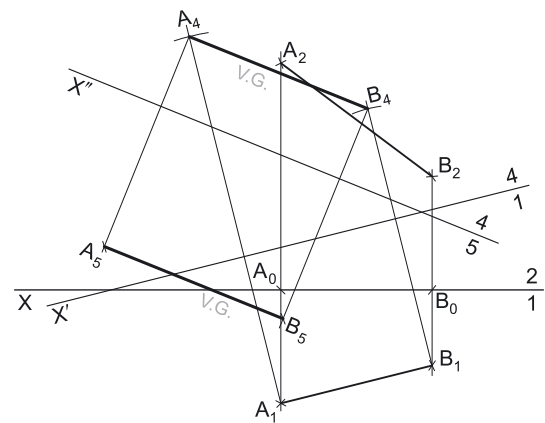
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o segmento de reta  $[AB]$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se determinar a verdadeira grandeza do segmento  $[AB]$ , transformando-o num segmento de reta fronto-horizontal, com 4 cm de afastamento e 2 cm de cota. Uma reta fronto-horizontal é, simultaneamente, um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é paralela ao Plano Horizontal de Projeção) e um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é paralela ao Plano Frontal de Projeção). Assim, antes de mais, há que transformar o segmento de reta  $[AB]$  num segmento de reta frontal (de frente) com 4 cm de afastamento (o afastamento pretendido) ou num segmento de reta horizontal (de nível) com 2 cm de cota (a cota pretendida).

Optemos pela primeira hipótese – comecemos por transformar o segmento de reta  $[AB]$  num segmento de reta frontal (de frente) com 4 cm de afastamento.



### Transformação do segmento de reta $[AB]$ num segmento de reta frontal (de frente):

Para transformar o segmento de reta  $[AB]$  num segmento de reta frontal (de frente) com 4 cm de cota, é necessário, substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** dos seus pontos (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que passam a ser 4 cm, pois os afastamentos anteriores estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta  $[AB]$ , o eixo  $X'$  é paralelo a  $[A_1B_1]$  e está a 4 cm deste (o novo afastamento do segmento – o afastamento pretendido). As linhas de chamada dos pontos  $A$  e  $B$ , no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_4$  é a Projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 6 cm – a cota do ponto  $A$ ).  $B_4$  é a Projeção do ponto  $B$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $B$ ). No novo diedro de Projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta frontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua Projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de  $\overline{AB}$  é  $\overline{A_4B_4}$ .

### Transformação do segmento de reta $[AB]$ num segmento de reta fronto-horizontal:

Em seguida, há que transformar o segmento de reta  $[AB]$  (que já é um segmento de reta frontal, no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) num segmento de reta fronto-horizontal, que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, para tal, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos e do segmento de reta (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que são 4 cm e estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com  $5/4$ . Como o **plano 5** é paralelo ao segmento de reta  $[AB]$ , o eixo  $X''$  é paralelo a  $[A_4B_4]$  e situa-se a 3 cm deste (a cota pretendida). As linhas de chamada dos pontos  $A$  e  $B$ , no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_5$  é a Projeção do ponto  $A$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento – a distância de  $A_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $A_1$  ao eixo  $X'$  (que é 4 cm – o novo afastamento de  $A$ ).  $B_5$  é a Projeção do ponto  $B$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $B_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $B_1$  ao eixo  $X'$  (que é 2 cm – o novo afastamento de  $B$ ). No novo diedro de Projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** e ao **plano 5** (está transformado num segmento de reta fronto-horizontal) e a sua verdadeira grandeza está tanto na sua Projeção no **plano 4** (pois o segmento é paralelo ao **plano 4**) como na sua Projeção no **plano 5** (o segmento também é paralelo ao **plano 5**) – a verdadeira grandeza de  $\overline{AB}$  é  $\overline{A_4B_4} = \overline{A_5B_5}$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções do segmento de reta) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções do segmento de reta  $[AB]$  no **plano 4** e no **plano 5** representaram-se a **forte**, pois são o pedido – é em  $\overline{A_4B_4}$  e em  $\overline{A_5B_5}$  que se pode medir a verdadeira grandeza do segmento de reta. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X'$  e do eixo  $X''$ ) ou são linhas de chamada.

## 205.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o segmento de reta  $[RS]$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto  $R$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). O ponto  $S$  tem as projeções coincidentes, pois é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes).

#### Resolução:

Pretende-se determinar a verdadeira grandeza do segmento  $[RS]$ , transformando-o num segmento de reta vertical. Uma reta vertical é um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o segmento de reta  $[RS]$  num segmento de reta frontal (de frente).

*Transformação do segmento de reta  $[RS]$  num segmento de reta frontal (de frente):*

Para transformar o segmento de reta  $[RS]$  num segmento de reta frontal (de frente), é necessário, substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** dos seus pontos (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

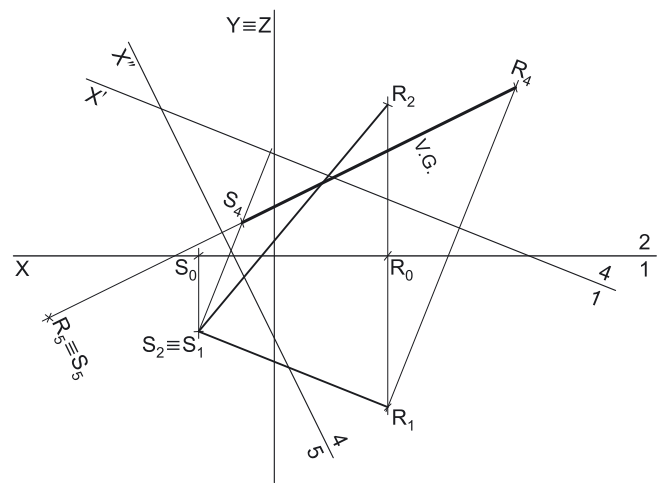
Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta  $[RS]$ , o eixo  $X'$  é paralelo a  $[R_1S_1]$  e situa-se a uma distância qualquer deste, pois não é indicado nenhum afastamento pretendido. As linhas de chamada dos pontos  $R$  e  $S$ , no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$R_4$  é a Projeção do ponto  $R$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $R_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $R_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota do ponto  $R$ ).  $S_4$  é a Projeção do ponto  $S$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $S_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $S_2$  ao eixo  $X$  (que é  $-2$  cm – a cota de  $S$ , que é **negativa**). No novo diedro de Projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta frontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua Projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de  $\overline{RS}$  é  $\overline{R_4S_4}$ .

*Transformação do segmento de reta  $[RS]$  num segmento de reta vertical:*

Em seguida, há que transformar o segmento de reta  $[RS]$  (que já é um segmento de reta vertical no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) num segmento de reta vertical, que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, para tal, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), ortogonal ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos e do segmento de reta (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com  $5/4$ . Como o **plano 5** é ortogonal ao segmento de reta  $[RS]$ , o eixo  $X''$  é perpendicular a  $[R_4S_4]$ . As linhas de chamada dos pontos  $R$  e  $S$ , no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ) – ficam coincidentes uma com a outra.

$R_5$  é a Projeção do ponto  $R$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $R_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $R_1$  ao eixo  $X'$ .  $S_5$  é a Projeção do ponto  $S$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $S_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $S_1$  ao eixo  $X'$ . As projeções dos pontos  $R$  e  $S$  no **plano 5** ficam coincidentes (no novo diedro de Projeção, formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**, o segmento é projetante horizontal) No novo diedro de Projeção, o segmento está ortogonal ao **plano 5** e paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta vertical) e a sua verdadeira grandeza mantém-se na sua Projeção no **plano 4**, pois o segmento é paralelo ao **plano 4** – a verdadeira grandeza de  $\overline{RS}$  é  $\overline{R_4S_4}$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções do segmento de reta) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). A Projeção do segmento de reta  $[RS]$  no **plano 4** representou-se a **forte**, pois é o pedido – é em  $\overline{R_4S_4}$  que se pode medir a verdadeira grandeza do segmento de reta. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X'$  e do eixo  $X''$ ) ou são linhas de chamada.

## 206.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $a$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (a direção dada pelo conjunto das suas duas projeções).

### Resolução:

Pretende-se transformar a reta  $a$  numa reta de topo com 4 cm de cota. Uma reta de topo é um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar a reta  $r$  numa reta horizontal (de nível) com 2 cm de cota (a cota pretendida).

#### Transformação da reta $a$ numa reta horizontal (de nível):

Para transformar a reta  $a$  numa reta horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta dada. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantém-se as projeções frontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);

- no que respeita às **coordenadas**, **mantém-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com  $4/2$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $a$ , o eixo  $X'$  é paralelo à Projeção frontal da reta  $a$  ( $a_2$ ) e situa-se a 4 cm desta (a cota pretendida). Para se determinar a nova Projeção da reta  $a$  (a Projeção da reta  $a$  no **plano 4**) recorreu-se ao ponto  $A$ , que define a reta  $a$ . A linha de chamada do ponto  $A$ , no novo diedro de Projeção, é perpendicular ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

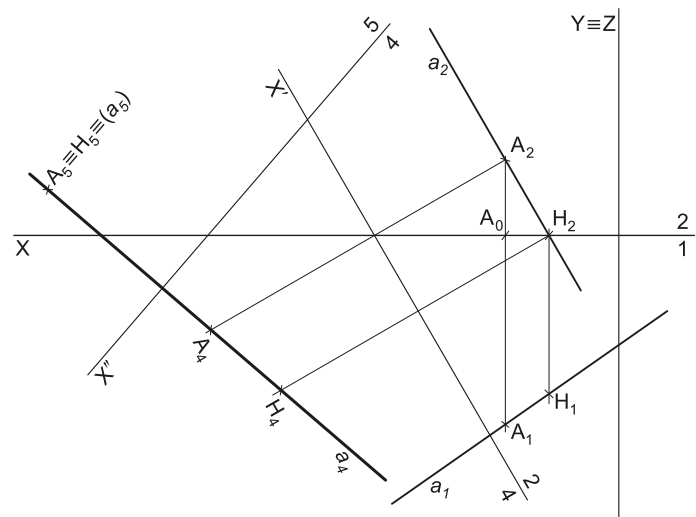
$A_4$  é a Projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_1$  ao eixo  $X$  (que é 5 cm – o afastamento de  $A$ ). Para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $a$  no novo diedro de Projeção. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um outro ponto da reta (o ponto  $H$  – o traço horizontal da reta  $a$ ) e determinou-se a Projeção do ponto  $H$  no **plano 4**.  $H_4$  é a Projeção do ponto  $H$  no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $H_1$  ao eixo  $X$ . A Projeção da reta  $a$  no **plano 4** ( $a_4$ ) está definida por dois pontos –  $A_4$  e  $H_4$ . No novo diedro de Projeção, a reta é paralela ao **plano 4** (está transformada numa reta horizontal com 4 cm de cota).

#### Transformação da reta $a$ numa reta de topo:

Em seguida, há que transformar a reta  $a$  numa reta de topo. Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 5**), ortogonal à reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantém-se as novas projeções horizontais** dos pontos e da reta (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e da reta no novo plano de Projeção – o **plano 5**);

- no que respeita às **coordenadas**, **mantém-se as cotas** (que são 4 cm e estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 5**).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção n(o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é ortogonal à reta  $\alpha$ , o eixo  $X''$  é perpendicular à nova Projeção horizontal da reta  $\alpha$  ( $\alpha_4$ ). Para se determinar a nova Projeção da reta  $\alpha$  (a Projeção da reta  $\alpha$  no **plano 5**), determinaram-se as projeções dos dois pontos (os pontos **A** e **H**), no **plano 5**. As linhas de chamada dos pontos **A** e **H**, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ), pelo que estão coincidentes com a própria Projeção da reta  $\alpha$  no **plano 4** ( $\alpha_4$ ).

$A_5$  é a Projeção do ponto **A** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X'$  (que é 4 cm – a cota de **A**, que é a cota da reta  $\alpha$  no diedro de Projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**).  $H_5$  é a Projeção do ponto **H** no **plano 5** e determinou-se igualmente em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $H_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $H_2$  ao eixo  $X'$  (que é 4 cm – a cota de **H**, que é a cota da reta  $\alpha$  no diedro de Projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**). No novo diedro de Projeção, a reta é ortogonal ao **plano 5** (está transformada numa reta de topo), pelo que as projeções dos pontos **A** e **H** no **plano 5** estão coincidentes (tem-se imediatamente  $A_5 \equiv H_5$ ). Da mesma forma, a nova Projeção frontal da reta (a Projeção da reta no **plano 5**) reduz-se a um ponto, que está coincidente com  $A_5 \equiv H_5$ . Uma vez que a nova Projeção da reta  $\alpha$  é um ponto, assinalou-se esse facto com o recurso a parêntesis. Assim sendo, tem-se imediatamente  $(\alpha_5) \equiv A_5 \equiv H_5$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $\alpha$  no novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os novos eixos  $X$  (o eixo  $X'$  e o eixo  $X''$ ) representaram-se a **leve**, pois trata-se de traçados auxiliares.

## 207.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. As projeções da reta  $r$  fazem, com o eixo  $X$  ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes, cujas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

#### Resolução:

Pretende-se transformar a reta  $r$  numa reta vertical com 4 cm de afastamento. Uma reta vertical é um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente) com 4 cm de afastamento (o afastamento pretendido).

#### Transformação da reta $r$ numa reta frontal (de frente):

Para transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente), é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta dada. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantém-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à reta  $r$ , o eixo  $X'$  é paralelo à Projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ) e situa-se a 4 cm desta (o afastamento pretendido). Para se determinar a nova Projeção da reta  $r$  (a Projeção da reta  $r$  no **plano 4**) recorre-se ao ponto **A**, que define a reta  $r$ . A linha de chamada do ponto **A**, no novo diedro de Projeção, é perpendicular ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

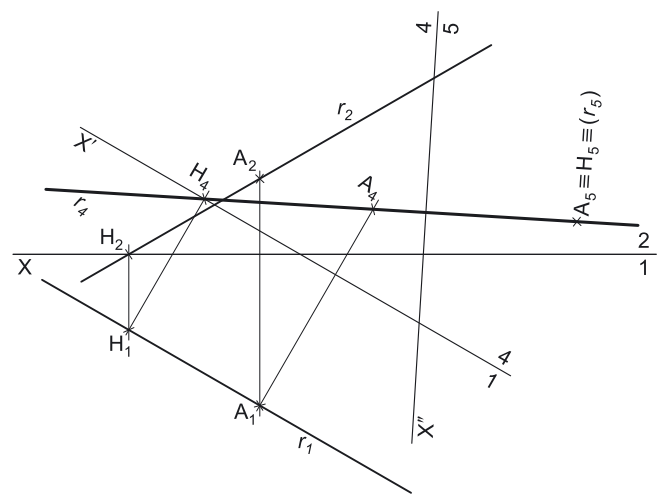
$A_4$  é a Projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de **A**). Para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $r$  no novo diedro de Projeção. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorre-se a um outro ponto da reta (o ponto **H** – o traço horizontal da reta  $r$ ) e determinou-se a Projeção do ponto **H** no **plano 4**.  $H_4$  é a Projeção do ponto **H** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) –  $H_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois o ponto **H** tem cota nula ( $H_2$  situa-se no eixo  $X$ ). A Projeção da reta  $r$  no **plano 4** ( $r_4$ ) está definida por dois pontos –  $A_4$  e  $H_4$ . No novo diedro de Projeção, a reta é paralela ao **plano 4** (está transformada numa reta frontal com 4 cm de afastamento).

#### Transformação da reta $r$ numa reta vertical:

Em seguida, há que transformar a reta  $r$  numa reta vertical. Para tal é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), ortogonal à reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos e do segmento de reta (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e da reta no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que são 4 cm e estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com  $4/5$ . Como o **plano 5** é ortogonal à reta  $r$ , o eixo  $X''$  é perpendicular à nova Projeção frontal da reta  $r$  ( $r_4$ ). Para se determinar a nova Projeção da reta  $r$  (a Projeção da reta  $r$  no **plano 5**), determinaram-se as projeções dos dois pontos (os pontos  $A$  e  $H$ ), no **plano 5**. As linhas de chamada dos pontos  $A$  e  $H$ , no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ), pelo que estão coincidentes com a própria Projeção da reta  $r$  no **plano 4** ( $r_4$ ).

$A_5$  é a Projeção do ponto  $A$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $A_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $A_1$  ao eixo  $X'$  (que é 4 cm – o afastamento de  $A$ , que é o afastamento da reta  $r$  no diedro de Projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**).  $H_5$  é a Projeção do ponto  $H$  no **plano 5** e determinou-se igualmente em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $H_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $H_1$  ao eixo  $X'$  (que é 4 cm – o afastamento de  $H$ , que é o afastamento da reta  $r$  no diedro de Projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). No novo diedro de Projeção, a reta é ortogonal ao **plano 5** (está transformada numa reta vertical), pelo que as projeções dos pontos  $A$  e  $H$  no **plano 5** estão coincidentes (tem-se imediatamente  $A_5 \equiv H_5$ ). Da mesma forma, a nova Projeção horizontal da reta (a Projeção da reta no **plano 5**) reduz-se a um ponto, que está coincidente com  $A_5 \equiv H_5$ . Uma vez que a nova Projeção da reta  $r$  é um ponto, assinalou-se esse facto com o recurso a parêntesis. Assim sendo, tem-se imediatamente  $(r_5) \equiv A_5 \equiv H_5$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $r$  no novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os novos eixos  $X$  (o eixo  $X'$  e o eixo  $X''$ ) representaram-se a **leve**, pois trata-se de traçados auxiliares.

## 208.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $m$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $m$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

### Resolução:

Pretende-se transformar a reta  $m$  numa reta fronto-horizontal com 3 cm de cota e 2 cm de afastamento. Uma reta fronto-horizontal é um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é paralela ao Plano Frontal de Projeção) e é, também, um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é paralela ao Plano Horizontal de Projeção). Assim, antes de mais, há que transformar a reta  $m$  numa reta horizontal (de nível) com 3 cm de cota (a cota pretendida) ou numa reta frontal (de frente) com 2 cm de afastamento (o afastamento pretendido).

Optemos pela primeira hipótese – comecemos por transformar a reta  $m$  numa reta horizontal (de nível) com 3 cm de cota.

#### Transformação da reta $m$ numa reta horizontal (de nível):

Para transformar a reta  $m$  numa reta horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta dada. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantém-se as projeções frontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantém-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

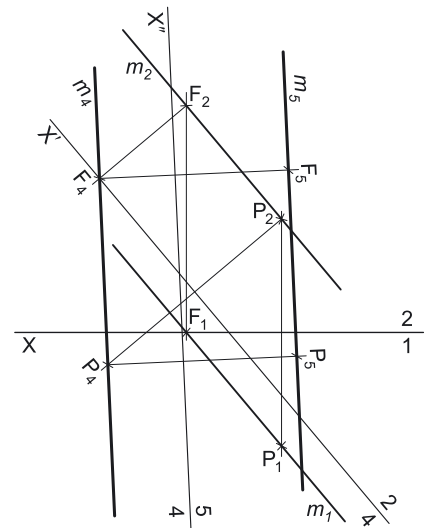
Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com  $4/2$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $m$ , o eixo  $X'$  é paralelo à Projeção frontal da reta  $m$  ( $m_2$ ) e situa-se a 3 cm desta (a cota pretendida). Para se determinar a nova Projeção da reta  $m$  (a Projeção da reta  $m$  no **plano 4**) recorreu-se ao ponto  $P$ , que define a reta  $m$ . A linha de chamada do ponto  $P$ , no novo diedro de Projeção, é perpendicular ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$P_4$  é a Projeção do ponto  $P$  no **plano 4 e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_1$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – o afastamento de  $P$ ). Para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $m$  no novo diedro de Projeção. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um outro ponto da reta (o ponto  $F$  – o traço frontal da reta  $m$ ) e determinou-se a Projeção do ponto  $F$  no **plano 4**.  $F_4$  é a Projeção do ponto  $F$  no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) –  $F_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois o ponto  $F$  tem afastamento nulo ( $F_1$  situa-se no eixo  $X$ ). A Projeção da reta  $m$  no **plano 4** ( $m_4$ ) está definida por dois pontos –  $P_4$  e  $F_4$ . No novo diedro de Projeção, a reta é paralela ao **plano 4** (está transformada numa reta horizontal com 3 cm de cota).**

#### Transformação da reta $m$ numa reta fronto-horizontal:

Em seguida, há que transformar a reta  $m$  numa reta fronto-horizontal com 2 cm de afastamento. Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo à reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantém-se as novas projeções horizontais** dos pontos e da reta (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e da reta no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantém-se as cotas** (que são 3 cm e estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 5**).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/5**. Como o **plano 5** é paralelo à reta  $m$ , o eixo  $X''$  é paralelo à nova Projeção horizontal da reta  $m$  ( $m_4$ ) e situa-se a 2 cm desta (o afastamento pretendido). Para se determinar a nova Projeção da reta  $m$  (a Projeção da reta  $m$  no **plano 5**), determinaram-se as projeções dos dois pontos (os pontos  $P$  e  $F$ ) no **plano 5**. As linhas de chamada dos pontos  $P$  e  $F$ , no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ).

$P_5$  é a Projeção do ponto  $P$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X'$  (que é 3 cm – a cota de  $P$ , que é a cota da reta  $m$  no diedro de Projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**).  $F_5$  é a Projeção do ponto  $F$  no **plano 5** e determinou-se igualmente em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X'$  (que é 3 cm – a cota de  $F$ , que é a cota da reta  $m$  no diedro de Projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**). A Projeção da reta  $m$  no **plano 5** ( $m_5$ ) está definida por dois pontos –  $P_5$  e  $F_5$ . No novo diedro de Projeção, a reta é paralela ao **plano 5** (está transformada numa reta fronto-horizontal).

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $m$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $m$  no novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os novos eixos  $X$  (o eixo  $X'$  e o eixo  $X''$ ) representaram-se a **leve**, pois trata-se de traçados auxiliares.

## 209.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $t$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $t$  é uma reta projetante frontal, pelo que a sua Projeção frontal se reduz a um único ponto (facto que se assinalou devidamente, com o recurso a parêntesis).

#### Resolução:

Pretende-se transformar a reta  $t$  numa reta oblíqua, cuja Projeção frontal faça um ângulo de  $45^\circ$  (a.e.) com o eixo  $X$ . com 3 cm de cota e 2 cm de afastamento. Assim, na prática, a resolução deste exercício passa pelos procedimentos expostos na resolução do exercício **206.**, mas efetuados por ordem inversa.

Uma reta de topo é um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção). Assim, antes de mais, há que transformar a reta  $t$  numa reta horizontal (de nível) e só depois será possível transformar a reta  $t$  numa reta oblíqua.

#### Transformação da reta $t$ numa reta horizontal (de nível):

A reta  $t$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção e uma reta horizontal (de nível) é igualmente paralela ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, para transformar a reta  $t$  numa reta horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), oblíquo à reta dada. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

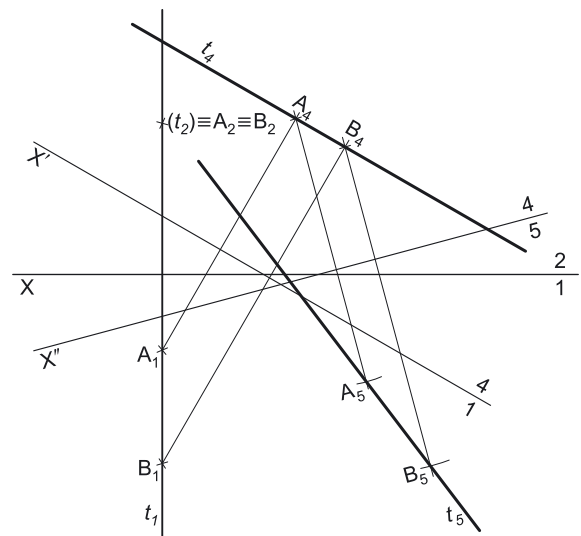
Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é oblíquo à reta  $t$ , o eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ) é oblíquo à Projeção horizontal da reta  $t$  ( $t_1$ ), numa posição qualquer. Para se determinar a nova Projeção frontal da reta  $t$  (a Projeção da reta  $t$  no **plano 4**) recorreu-se a dois pontos quaisquer da reta – os pontos  $A$  e  $B$ , por exemplo. As linhas de chamada dos dois pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_4$  é a Projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota da reta  $t$ ).  $B_4$  é a Projeção do ponto  $B$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota da reta  $t$ ). A Projeção da reta  $t$  no **plano 4** ( $t_4$ ) está definida por dois pontos –  $A_4$  e  $B_4$  (e fica paralela ao eixo  $X'$ , pois os pontos  $A$  e  $B$  têm a mesma cota). No novo diedro de Projeção, a reta  $t$  é paralela ao **plano 4** (está transformada numa reta horizontal com 4 cm de cota).

#### Transformação da reta $t$ numa reta oblíqua:

Em seguida, há que transformar a reta  $t$  numa reta oblíqua, sendo dado o ângulo que a sua Projeção frontal faz com o eixo  $X$ . Para tal é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), oblíquo à reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos e da reta (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e da reta no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é oblíquo à reta  $t$ , o eixo  $X''$  é oblíquo à nova Projeção frontal da reta  $t$  ( $t_4$ ) e faz, com esta, um ângulo de  $45^\circ$  (de abertura para a esquerda), que era o ângulo pedido. Para se determinar a nova Projeção da reta  $t$  (a Projeção da reta  $t$  no **plano 5**), determinaram-se as projeções dos dois pontos (os pontos **A** e **B**) no **plano 5**. As linhas de chamada dos pontos **A** e **B**, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_5$  é a Projeção do ponto **A** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $A_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $A_1$  ao eixo  $X'$ .  $B_5$  é a Projeção do ponto **B** no **plano 5** e determinou-se igualmente em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $B_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $B_1$  ao eixo  $X'$ . Em seguida, foi possível desenhar a nova Projeção horizontal da reta  $t$  ( $t_5$  – a Projeção da reta  $t$  no **plano 5**), que está definida por dois pontos (os pontos  $A_5$  e  $B_5$ ).

No diedro de Projeção formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**, a reta  $t$  é uma reta oblíqua, cuja Projeção frontal faz, com o eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) um ângulo de  $45^\circ$  (a.e.).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $t$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $t$  no novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os novos eixos  $X$  (o eixo  $X'$  e o eixo  $X''$ ) representaram-se a **leve**, pois trata-se de traçados auxiliares.

## 210.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos **A** e **B**. Sublinha-se que as projeções da reta  $p$  não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, pois trata-se de uma **reta de perfil**, mas esse facto é irrelevante para o problema.

### Resolução:

Pretende-se transformar a reta  $p$  numa reta de topo com 3 cm de cota. Uma reta de topo é um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar a reta  $r$  numa reta horizontal (de nível) com 3 cm de cota (a cota pretendida).

#### Transformação da reta $p$ numa reta horizontal (de nível):

Para transformar a reta  $p$  numa reta horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta dada. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

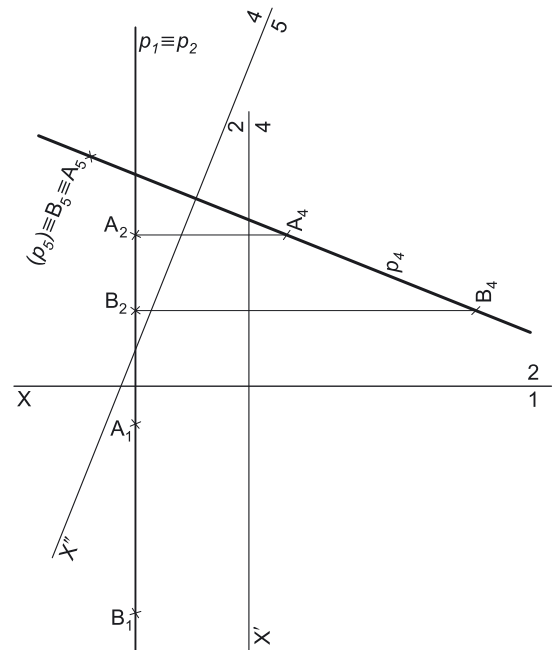
Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à Projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) e situa-se a 3 cm desta (a cota pretendida). Para se determinar a nova Projeção da reta  $p$  (a Projeção da reta  $p$  no **plano 4**) recorreu-se aos dois pontos que definem a reta – os pontos **A** e **B**. As linhas de chamada dos dois pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_4$  é a Projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_1$  ao eixo  $X$  (que é 1 cm – o afastamento de **A**).  $B_4$  é a Projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_1$  ao eixo  $X$  (que é 6 cm – o afastamento de **B**). A Projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ) está definida por dois pontos –  $A_4$  e  $B_4$ . No novo diedro de Projeção, a reta  $p$  é paralela ao **plano 4** (está transformada numa reta horizontal com 3 cm de cota).

#### Transformação da reta $p$ numa reta de topo:

Em seguida, há que transformar a reta  $p$  numa reta de topo. Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 5**), ortogonal à reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as novas projeções horizontais** dos pontos e da reta (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e da reta no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** (que são 3 cm e estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 5**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é ortogonal à reta  $p$ , o eixo  $X''$  é perpendicular à nova Projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_4$ ). Para se determinar a nova Projeção da reta  $p$  (a Projeção da reta  $p$  no **plano 5**), determinaram-se as projeções dos dois pontos – os pontos **A** e **B**. As linhas de chamada dos pontos **A** e **B**, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ), pelo que estão coincidentes com a própria Projeção da reta  $a$  no **plano 4** ( $p_4$ ).

$A_5$  é a Projeção do ponto **A** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X'$  (que é 3 cm – a cota de **A**, que é a cota da reta  $p$  no diedro de Projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**).  $B_5$  é a Projeção do ponto **B** no **plano 5** e determinou-se igualmente em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X'$  (que é 3 cm – a cota de **B**, que é a cota da reta  $p$  no diedro de Projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**). No novo diedro de Projeção, a reta é ortogonal ao **plano 5** (está transformada numa reta de topo), pelo que as projeções dos pontos **A** e **B** no **plano 5** estão coincidentes (tem-se imediatamente  $A_5 \equiv B_5$ ). Da mesma forma, a nova Projeção frontal da reta (a Projeção da reta no **plano 5**) reduz-se a um ponto, que está coincidente com  $A_5 \equiv B_5$ . Uma vez que a nova Projeção da reta  $p$  é um ponto, assinalou-se esse facto com o recurso a parêntesis. Assim sendo, tem-se imediatamente  $(p_5) \equiv A_5 \equiv B_5$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $a$  no novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os novos eixos  $X$  (o eixo  $X'$  e o eixo  $X''$ ) representaram-se a **leve**, pois trata-se de traçados auxiliares.

## 211.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos **A** e **B**. Sublinha-se que as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pois trata-se de uma **reta de perfil**, mas esse facto é irrelevante para o problema.

#### Resolução:

Pretende-se transformar a reta  $p$  numa reta fronto-horizontal com 2 cm de cota e 4 cm de afastamento. Uma reta fronto-horizontal é um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é paralela ao Plano Frontal de Projeção) e é, também, um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é paralela ao Plano Horizontal de Projeção). Assim, antes de mais, há que transformar a reta  $p$  numa reta horizontal (de nível) com 2 cm de cota (a cota pretendida) ou numa reta frontal (de frente) com 4 cm de afastamento (o afastamento pretendido).

Optemos pela segunda hipótese – comecemos por transformar a reta  $p$  numa reta frontal (de frente) com 4 cm de afastamento.

#### Transformação da reta $p$ numa reta frontal (de frente):

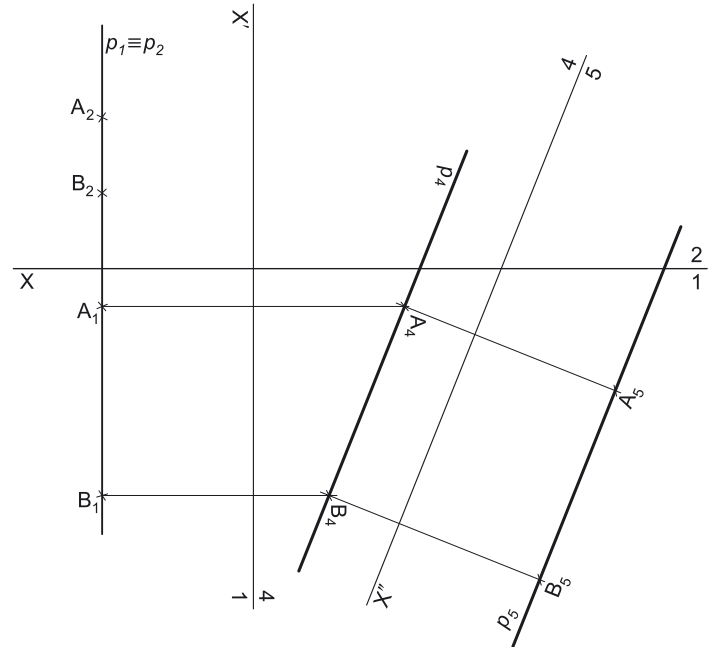
Para transformar a reta  $p$  numa reta frontal (de frente), é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta dada. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantém-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à Projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) e situa-se a 4 cm desta (o afastamento pretendido). Para se determinar a nova Projeção da reta  $p$  (a Projeção da reta  $p$  no **plano 4**) recorreu-se aos pontos **A** e **B**, os pontos que definem a reta  $p$ . As linhas de chamada dos pontos **A** e **B**, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

**A** ( 1; 4) e **B** ( 6; 2).

$A_4$  é a Projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X'$  (que é 4 cm – a cota de **A**).  $B_4$  é a Projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de **B**). A Projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ) está definida por dois pontos –  $A_4$  e  $B_4$ . No novo diedro de Projeção, a reta é paralela ao **plano 4** (está transformada numa reta frontal com 4 cm de afastamento).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Transformação da reta $p$ numa reta fronto-horizontal:

Em seguida, há que transformar a reta  $p$  numa reta fronto-horizontal com 3 cm de cota. Para tal é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo à reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos e da reta (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e da reta no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se os afastamentos** (que são 4 cm e estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X''$  é paralelo à nova Projeção frontal da reta  $p$  ( $p_4$ ) e situa-se a 3 cm desta (a cota pretendida). Para se determinar a nova Projeção da reta  $p$  (a Projeção da reta  $p$  no **plano 5**), determinaram-se as projeções dos dois pontos – os pontos **A** e **B**. As linhas de chamada dos pontos **A** e **B**, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_5$  é a Projeção do ponto **A** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $A_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X'$  (que é 4 cm – o afastamento de **P**, que é o afastamento da reta  $p$  no diedro de Projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**).  $B_5$  é a Projeção do ponto **B** no **plano 5** e determinou-se igualmente em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $B_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $B_1$  ao eixo  $X'$  (que é 4 cm – o afastamento de **B**, que é o afastamento da reta  $p$  no diedro de Projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 2**). A Projeção da reta  $p$  no **plano 5** ( $p_5$ ) está definida por dois pontos –  $A_5$  e  $B_5$ . No novo diedro de Projeção, a reta é paralela ao **plano 5** (está transformada numa reta fronto-horizontal).

## Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  no novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os novos eixos  $X$  (o eixo  $X'$  e o eixo  $X''$ ) representaram-se a **leve**, pois trata-se de traçados auxiliares.

## 212.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  é uma reta passante, pelo que é necessariamente concorrente com o eixo  $X$  num ponto – o ponto **M**. Assim, a reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos **P** e **M**. Sublinha-se que as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pois trata-se de uma **reta de perfil**, mas esse facto é irrelevante para o problema.

### Resolução:

Pretende-se transformar a reta  $p$  numa reta vertical com 3 cm de afastamento. Uma reta vertical é um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente) com 3 cm de afastamento (o afastamento pretendido).

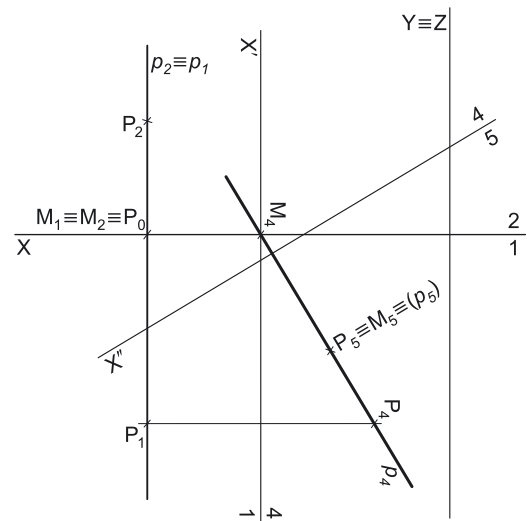
## Transformação da reta $p$ numa reta frontal (de frente):

Para transformar a reta  $p$  numa reta frontal (de frente), é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta dada. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à Projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) e situa-se a 3 cm desta (o afastamento pretendido). Para se determinar a nova Projeção da reta  $p$  (a Projeção da reta  $p$  no **plano 4**) recorreu-se aos pontos **P** e **M**, os pontos que definem a reta  $p$ . As linhas de chamada dos pontos **P** e **M**, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$P_4$  é a Projeção do ponto **P** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de **P**).  $M_4$  é a Projeção do ponto **M** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) –  $M_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois o ponto **M** tem cota nula (**M** é um ponto do eixo  $X$ ). A Projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ) está definida por dois pontos –  $P_4$  e  $M_4$ . No novo diedro de Projeção, a reta é paralela ao **plano 4** (está transformada numa reta frontal com 3 cm de afastamento).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Transformação da reta $p$ numa reta vertical:

Em seguida, há que transformar a reta  $p$  numa reta vertical. Para tal é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), ortogonal à reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém o plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos e do segmento de reta (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e da reta no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que são 3 cm e estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/5**. Como o **plano 5** é ortogonal à reta  $p$ , o eixo  $X''$  é perpendicular à nova Projeção frontal da reta  $p$  ( $p_4$ ). Para se determinar a nova Projeção da reta  $p$  (a Projeção da reta  $p$  no **plano 5**), determinaram-se as projeções dos dois pontos – os pontos  $P$  e  $M$ . As linhas de chamada dos pontos  $P$  e  $M$ , no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ), pelo que estão coincidentes com a própria Projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ).

$P_5$  é a Projeção do ponto  $P$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $P_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $P_1$  ao eixo  $X'$  (que é 3 cm – o afastamento de  $P$ , que é o afastamento da reta  $p$  no diedro de Projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**).  $M_5$  é a Projeção do ponto  $M$  no **plano 5** e determinou-se igualmente em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $M_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $M_1$  ao eixo  $X'$  (que é 3 cm – o afastamento de  $M$ , que é o afastamento da reta  $p$  no diedro de Projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). No novo diedro de Projeção, a reta é ortogonal ao **plano 5** (está transformada numa reta vertical), pelo que as projeções dos pontos  $P$  e  $M$  no **plano 5** estão coincidentes (tem-se imediatamente  $P_5 \equiv M_5$ ). Da mesma forma, a nova Projeção horizontal da reta (a Projeção da reta no **plano 5**) reduz-se a um ponto, que está coincidente com  $P_5 \equiv M_5$ . Uma vez que a nova Projeção da reta  $p$  é um ponto, assinalou-se esse facto com o recurso a parêntesis. Assim sendo, tem-se imediatamente  $(p_5) \equiv P_5 \equiv M_5$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $p$  no novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os novos eixos  $X$  (o eixo  $X'$  e o eixo  $X''$ ) representaram-se a **leve**, pois trata-se de traçados auxiliares.

## 213.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados.

#### Determinação das projeções do triângulo [ABC]:

Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo [ABC], em função dos dados. Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto  $A$  tem afastamento nulo, pelo que e necessariamente um ponto do traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Este raciocínio permitiu-nos determinar, de forma imediata, as projeções do ponto  $A$  – o ponto  $A$  é o ponto de  $f_\alpha$  que tem 4 cm de cota.

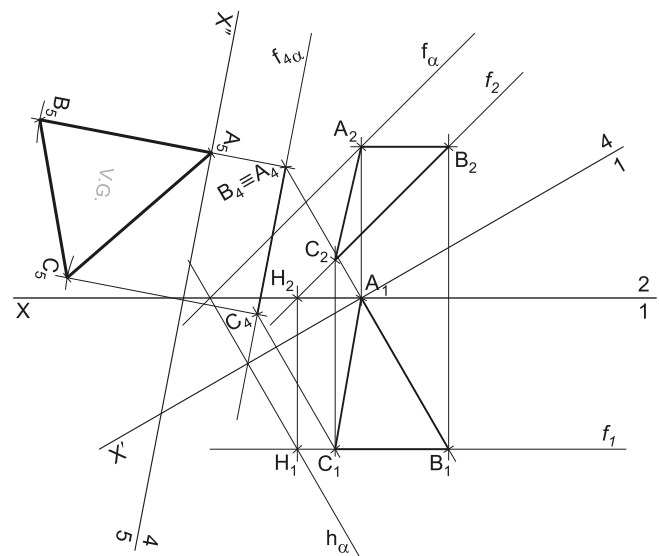
Os pontos  $B$  e  $C$  têm o mesmo afastamento (que é 4 cm). Assim, a reta  $f$  é a reta frontal (de frente) do plano, com 4 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções dos pontos  $B$  e  $C$  (note que, nesta situação, o recurso a uma única reta nos permite determinar as projeções dos dois pontos). Assim, a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $H$ , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ). O ponto  $B$  é o ponto da reta  $f$  que tem 4 cm de cota. O ponto  $C$  é o ponto da reta  $f$  que tem 1 cm de cota.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [ABC].

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o triângulo [ABC] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível) com 2 cm de cota. Um plano horizontal (de nível) é um caso particular dos planos projetantes frontais (é um plano projetante frontal que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante frontal.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Transformação do plano $\alpha$ num plano projetante frontal:

Para transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante frontal (um plano de topo) é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção ( **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

**A<sub>4</sub>** é a Projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **A<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 4 cm – a cota de **A**). Em seguida, desenhou-se o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** – **f<sub>4 $\alpha$</sub>**  (o novo traço frontal do plano  $\alpha$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de Projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** (**f<sub>4 $\alpha$</sub>** ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_\alpha$  (que se situa no eixo **X'**) e **A<sub>4</sub>** (a nova Projeção frontal do ponto **A**). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **B** e **C** no **plano 4** (**B<sub>4</sub>** e **C<sub>4</sub>**), que se situam necessariamente sobre **f<sub>4 $\alpha$</sub>**  (pois, no novo diedro de Projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal). Note que **B<sub>4</sub>** e **C<sub>4</sub>** se poderiam ter determinado em função das respetivas cotas, que se situariam igualmente sobre **f<sub>4 $\alpha$</sub>** . A Projeção do triângulo **[ABC]** no **plano 4** reduz-se a um segmento de reta sobre **f<sub>4 $\alpha$</sub>** , pois o plano  $\alpha$ , no novo diedro de Projeção, é um plano projetante frontal (um plano de topo).

## Transformação do plano $\alpha$ num plano horizontal (de nível):

Agora, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível) com 2 cm de cota. Para tal, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X''**) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\alpha$ , o eixo **X''** é paralelo ao novo traço frontal do plano  $\alpha$  (**f<sub>4 $\alpha$</sub>** ) e situa-se a 2 cm deste (a cota pretendida para o plano  $\alpha$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo **X''** (o novo eixo **X**).

**A<sub>5</sub>** é a Projeção do ponto **A** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **A<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **A<sub>1</sub>** ao eixo **X'**. **B<sub>5</sub>** é a Projeção do ponto **B** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **B<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **B<sub>1</sub>** ao eixo **X'**. **C<sub>5</sub>** é a Projeção do ponto **C** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **C<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **C<sub>1</sub>** ao eixo **X'**.

No novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 5** e pelo **plano 4**), o plano  $\alpha$  é um plano horizontal (de nível) com 2 cm de cota – no novo diedro de Projeção, o plano  $\alpha$  é paralelo ao **plano 5** (não tem traço horizontal). Assim, o triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 5**, pois o plano que o contém (o plano  $\alpha$ ) é paralelo ao **plano 5**.

A partir das projeções dos três pontos no **plano 5**, desenhou-se a nova Projeção horizontal do triângulo – o triângulo **[A<sub>5</sub>B<sub>5</sub>C<sub>5</sub>]** é a verdadeira grandeza do triângulo **[ABC]**.

## Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo **[ABC]**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$ , apesar de integrarem os dados, representaram-se a **médio-leve**, pois, neste exercício, são auxiliares. A Projeção do triângulo no **plano 5** representou-se a **forte**, pois é o pedido – é nessa Projeção que se pode medir a verdadeira grandeza do triângulo. A Projeção do triângulo no **plano 4** representou-se a **médio-forte**, pois integra o pedido apenas parcialmente (integra a representação do triângulo no diedro de Projeção final, no qual o plano  $\alpha$  é um plano horizontal). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo **X** e do eixo **X''**) ou são linhas de chamada.

## 214.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados.

**Determinação das projeções do triângulo [ABC]:**

Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo [ABC], em função dos dados. Os pontos **A**, **B** e **C**, para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que é necessariamente um ponto do traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Este raciocínio permitiu-nos determinar, de forma imediata, as projeções do ponto **A** – o ponto **A** é o ponto de  $f_\alpha$  que tem 4 cm de cota.

Os pontos **B** e **C** têm o mesmo afastamento (que é 4 cm). Assim, a reta  $f$  é a reta frontal (de frente) do plano, com 4 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções dos pontos **B** e **C** (note que, nesta situação, o recurso a uma única reta nos permite determinar as projeções dos dois pontos). Assim, a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ). O ponto **B** é o ponto da reta  $f$  que tem 4 cm de cota. O ponto **C** é o ponto da reta  $f$  que tem 1 cm de cota.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [ABC].

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o triângulo [ABC] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano frontal (de frente). Um plano frontal (de frente) é um caso particular dos planos projetantes horizontais (é um plano projetante horizontal que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante horizontal.

**Transformação do plano  $\alpha$  num plano projetante horizontal:**

Para transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante horizontal (um plano vertical) é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o plano 1) por um outro plano (o plano 4), ortogonal ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o plano 2), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se mantém o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o plano 4);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao plano 4).

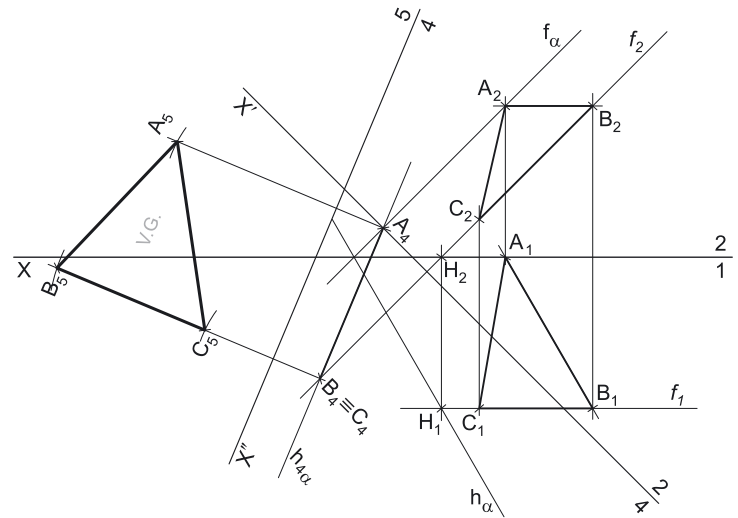
Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do plano 2 (o plano de Projeção que se manteve) com o plano 4 (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com 4/2. Como o plano 4 é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

**B**<sub>4</sub> é a Projeção do ponto **B** no plano 4 e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **B**<sub>4</sub> ao eixo **X'** é igual à distância de **B**<sub>1</sub> ao eixo **X** (que é 4 cm – o afastamento de **B**). Em seguida, desenhou-se o traço do plano  $\alpha$  no plano 4 –  $h_{4\alpha}$  (o novo traço horizontal do plano  $\alpha$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de Projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\alpha$  no plano 4 ( $h_{4\alpha}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $f_\alpha$  (que se situa no eixo **X'**) e **B**<sub>4</sub> (a nova Projeção horizontal do ponto **B**). Tendo em conta que os pontos **B** e **C** têm o mesmo afastamento e que as suas linhas de chamada estão coincidentes, tem-se imediatamente **C**<sub>4</sub>  $\equiv$  **B**<sub>4</sub>. De facto, os dois pontos situam-se na reta  $f$  que, no novo diedro de Projeção, é uma reta projetante horizontal (no novo diedro de Projeção, as retas frontais do plano  $\alpha$  foram transformadas em retas projetantes horizontais). Por fim, determinou-se **A**<sub>4</sub> (a Projeção do ponto **A** no plano 4), em função do seu afastamento (que se manteve) – o ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que **A**<sub>4</sub> se situa necessariamente no eixo **X'**. A Projeção do triângulo [ABC] no plano 4 reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_{4\alpha}$ , pois o plano  $\alpha$ , no novo diedro de Projeção, é um plano projetante horizontal (um plano vertical).

**Transformação do plano  $\alpha$  num plano frontal (de frente):**

Agora, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano frontal (de frente). Para tal, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o plano 2) por um outro plano (o plano 5), paralelo ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o plano 4, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se mantém o plano 4, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções horizontais** dos pontos (as projeções no plano 4 – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos no novo plano de Projeção – o plano 5);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve – o plano 4) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao plano 5).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/5**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\alpha$ , o eixo  $X''$  é paralelo ao novo traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_{\alpha}$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_5$  é a Projeção do ponto **A** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X'$ .  $B_5$  é a Projeção do ponto **B** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X'$ .  $C_5$  é a Projeção do ponto **C** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $C_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $C_2$  ao eixo  $X'$ .

No novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 5** e pelo **plano 4**), o plano  $\alpha$  é um plano frontal (de frente) – no novo diedro de Projeção, o plano  $\alpha$  é paralelo ao **plano 5** (não tem traço frontal). Assim, o triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 5**, pois o plano que o contém (o plano  $\alpha$ ) é paralelo ao **plano 5**.

A partir das projeções dos três pontos no **plano 5**, desenhou-se a nova Projeção frontal do triângulo – o triângulo  $[A_5B_5C_5]$  é a verdadeira grandeza do triângulo  $[ABC]$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$ , apesar de integrarem os dados, representaram-se a **médio-leve**, pois, neste exercício, são auxiliares. A Projeção do triângulo no **plano 5** representou-se a **forte**, pois é o pedido – é nessa Projeção que se pode medir a verdadeira grandeza do triângulo. A Projeção do triângulo no **plano 4** representou-se a **médio-forte**, pois integra o pedido apenas parcialmente (integra a representação do triângulo no diedro de Projeção final, no qual o plano  $\alpha$  é um plano frontal). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X$  e do eixo  $X''$ ) ou são linhas de chamada.

## 215.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\gamma$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais a  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

### Determinação das projeções do triângulo $[ABC]$ :

Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ , em função dos dados. Os pontos **A**, **B** e **C**, para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **A** tem cota nula, pelo que é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano ( $h_\gamma$ ), que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Este raciocínio permitiu-nos determinar, de forma imediata, as projeções do ponto **A** – o ponto  $A$  é o ponto de  $h_\gamma$ , que tem 3 cm de afastamento.

O ponto **B** tem afastamento nulo, pelo que é necessariamente um ponto do traço frontal do plano ( $f_\gamma$ ), que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Este raciocínio permitiu-nos determinar, de forma imediata, as projeções do ponto **B** – o ponto **B** é o ponto de  $f_\gamma$ , que tem 3 cm de cota.

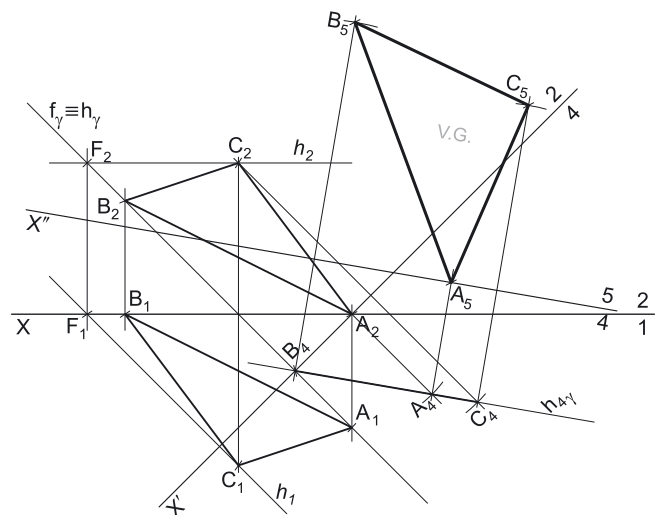
A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano, com 4 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **C**. Assim, a reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\gamma$ ). O ponto **C** é o ponto da reta  $h$  que tem 4 cm de afastamento.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .

### Resolução:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\gamma$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\gamma$  num plano frontal (de frente) com 3 cm de afastamento. Um plano frontal (de frente) é um caso particular dos planos projetantes horizontais (é um plano projetante horizontal que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante horizontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Transformação do plano  $\gamma$  num plano projetante horizontal:*

Para transformar o plano  $\gamma$  num plano projetante horizontal (um plano vertical) é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\gamma$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\gamma$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do plano ( $f_\gamma$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

**C<sub>4</sub>** é a Projeção do ponto **C** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **C<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **C<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 4 cm – o afastamento de **C**). Em seguida, desenhou-se o traço do plano  $\gamma$  no **plano 4** – **h<sub>4 $\gamma$</sub>**  (o novo traço horizontal do plano  $\gamma$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de Projeção, o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\gamma$  no **plano 4** (**h<sub>4 $\gamma$</sub>** ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com **f <sub>$\gamma$</sub>**  (que se situa no eixo **X'**) e **C<sub>4</sub>** (a nova Projeção horizontal do ponto **C**). Em seguida, determinou-se a Projeção do ponto **A** no **plano 4** (**A<sub>4</sub>**), que se situa necessariamente sobre **h<sub>4 $\gamma$</sub>**  (pois, no novo diedro de Projeção, o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal). Note que **A<sub>4</sub>** se poderia ter determinado em função do seu afastamento, que se situaria igualmente sobre **h<sub>4 $\gamma$</sub>** . Por fim, determinou-se **B<sub>4</sub>** (a Projeção do ponto **B** no **plano 4**), em função do seu afastamento (que se manteve) – o ponto **B** tem afastamento nulo, pelo que **B<sub>4</sub>** se situa necessariamente no eixo **X'**. A Projeção do triângulo [**ABC**] no **plano 4** reduz-se a um segmento de reta sobre **h<sub>4 $\gamma$</sub>** , pois o plano  $\gamma$ , no novo diedro de Projeção, é um plano projetante horizontal (um plano vertical).

Salienta-se o facto de, na resolução apresentada, se ter conduzido o novo eixo **X** (o eixo **X'**) por **A<sub>2</sub>** (a Projeção frontal do ponto **A**). Isso significa que, no novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 1**), o ponto **A** continua a ter cota nula. De qualquer forma, esta situação foi casual e não é obrigatória.

*Transformação do plano  $\gamma$  num plano frontal (de frente):*

Agora, há que transformar o plano  $\gamma$  num plano frontal (de frente). Para tal, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\gamma$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções horizontais** dos pontos (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X''**) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/5**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\gamma$ , o eixo **X''** é paralelo ao novo traço horizontal do plano  $\gamma$  (**h<sub>4 $\gamma$</sub>** ) e situa-se a 3 cm deste (o afastamento pretendido). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo **X''** (o novo eixo **X**).

**B<sub>5</sub>** é a Projeção do ponto **B** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **B<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **B<sub>2</sub>** ao eixo **X'**. **C<sub>5</sub>** é a Projeção do ponto **C** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **C<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **C<sub>2</sub>** ao eixo **X'**. Por fim, determinou-se **A<sub>5</sub>** (a Projeção do ponto **A** no **plano 5**), em função da sua cota (que se manteve) – o ponto **A** tem cota nula no novo diedro de Projeção (como atrás se referiu), pelo que **A<sub>5</sub>** se situa necessariamente no eixo **X''**.

No novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 5** e pelo **plano 4**), o plano  $\gamma$  é um plano frontal (de frente) com 3 cm de afastamento – no novo diedro de Projeção, o plano  $\gamma$  é paralelo ao **plano 5** (não tem traço frontal). Assim, o triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 5**, pois o plano que o contém (o plano  $\gamma$ ) é paralelo ao **plano 5**.

A partir das projeções dos três pontos no **plano 5**, desenhou-se a nova Projeção frontal do triângulo – o triângulo [**A<sub>5</sub>B<sub>5</sub>C<sub>5</sub>**] é a verdadeira grandeza do triângulo [**ABC**].

**Traçado:**

Os dados (as projeções do triângulo [**ABC**]) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\gamma$ , apesar de integrarem os dados, representaram-se a **médio-leve**, pois, neste exercício, são auxiliares. A Projeção do triângulo no **plano 5** representou-se a **forte**, pois é o pedido – é nessa Projeção que se pode medir a verdadeira grandeza do triângulo. A Projeção do triângulo no **plano 4** representou-se a **médio-forte**, pois integra o pedido apenas parcialmente (integra a representação do triângulo no diedro de Projeção final, no qual o plano  $\alpha$  é um plano frontal). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo **X** e do eixo **X''**) ou são linhas de chamada.

## 216.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **P** e **Q**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a Projeção frontal do ponto **R**. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ . O ponto **P** tem afastamento nulo, pelo que o ponto **P** é, imediatamente, um ponto do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ). Assim, por **P** conduziu-se  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , paralelo ao eixo **X** –  $f_p$  está definido por um ponto (o ponto **P**) e uma direção (é fronto-horizontal).

Em seguida, recorreu-se à reta  $r$ , que passa pelos pontos **Q** e **R**. A Projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) passa pelas projeções frontais dos pontos **Q** e **R** ( $Q_2$  e  $R_2$ , respetivamente). Uma vez que a reta  $r$  é uma reta do plano  $\rho$ , tem de ter o seu traço frontal sobre o traço frontal do plano  $\rho$  (**condição para que uma reta pertença a um plano**). Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $r$  (o ponto **F**), que se situa sobre  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). A reta  $r$  está, assim, definida por dois pontos – os pontos **Q** e **F**.

Para determinar o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), determinou-se o traço horizontal da reta  $r$  (o ponto **H**), pelo qual se conduziu o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) –  $h_p$  está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal). Por fim, determinou-se a Projeção horizontal do ponto **R** ( $R_1$ ), sobre a Projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ).

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[PQR]**.

### Resolução:

O plano que contém o triângulo **[PQR]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o triângulo **[PQR]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\rho$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\rho$  num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento. Um plano frontal (de frente) é um caso particular dos planos projetantes horizontais (é um plano projetante horizontal que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano  $\rho$  num plano projetante horizontal.

#### Transformação do plano $\rho$ num plano projetante horizontal:

Para transformar o plano  $\rho$  num plano projetante horizontal (um plano vertical) é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

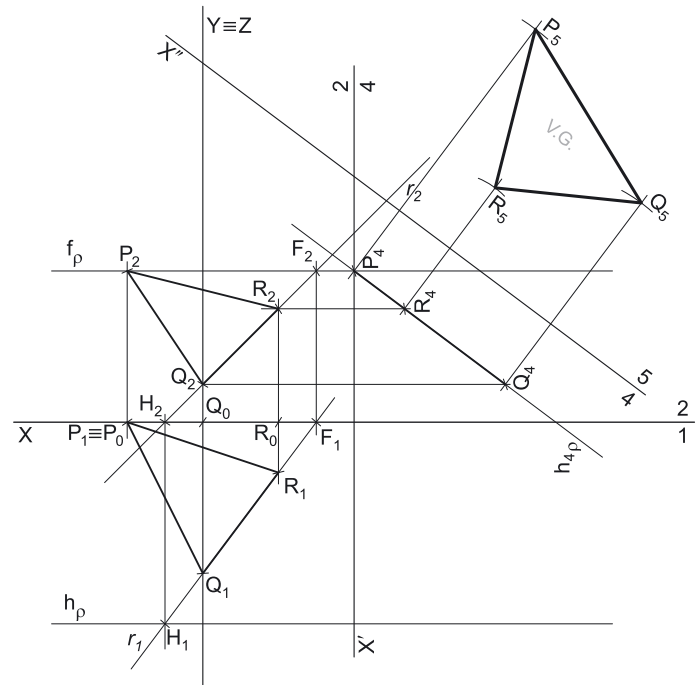
Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do plano ( $f_p$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

$Q_4$  é a Projeção do ponto **Q** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $Q_4$  ao eixo **X'** é igual à distância de  $Q_1$  ao eixo **X** (que é 4 cm – o afastamento de **Q**). Em seguida, desenhou-se o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** –  $h_{4p}$  (o novo traço horizontal do plano  $\rho$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de Projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $h_{4p}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $f_p$  (que se situa no eixo **X'**) e  $Q_4$  (a nova Projeção horizontal do ponto **Q**). Em seguida, determinou-se a Projeção do ponto **R** no **plano 4** ( $R_4$ ), que se situa necessariamente sobre  $h_{4p}$  (pois, no novo diedro de Projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal). Note que  $R_4$  se poderia ter determinado em função do seu afastamento, que se situaria igualmente sobre  $h_{4p}$ . Por fim, determinou-se  $P_4$  (a Projeção do ponto **P** no **plano 4**), em função do seu afastamento (que se manteve) – o ponto **P** tem afastamento nulo, pelo que  $P_4$  se situa necessariamente no eixo **X'**. A Projeção do triângulo **[PQR]** no **plano 4** reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_{4p}$ , pois o plano  $\rho$ , no novo diedro de Projeção, é um plano projetante horizontal (um plano vertical).

#### Transformação do plano $\rho$ num plano frontal (de frente):

Agora, há que transformar o plano  $\rho$  num plano frontal (de frente). Para tal, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções horizontais** dos pontos (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 5**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/5**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\rho$ , o eixo  $X''$  é paralelo ao novo traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{4\rho}$ ) e situa-se a 2 cm deste (o afastamento pretendido). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ).

$P_5$  é a Projeção do ponto  $P$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X'$ .  $Q_5$  é a Projeção do ponto  $Q$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $Q_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $Q_2$  ao eixo  $X'$ .  $R_5$  é a Projeção do ponto  $R$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $R_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $R_2$  ao eixo  $X'$ .

No novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 5** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento – no novo diedro de Projeção, o plano  $\rho$  é paralelo ao **plano 5** (não tem traço frontal). Assim, o triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 5**, pois o plano que o contém (o plano  $\rho$ ) é paralelo ao **plano 5**.

A partir das projeções dos três pontos no **plano 5**, desenhou-se a nova Projeção frontal do triângulo – o triângulo  $[P_5Q_5R_5]$  é a verdadeira grandeza do triângulo  $[PQR]$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[PQR]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\rho$  representaram-se a **médio-leve**, pois, neste exercício, são auxiliares. A Projeção do triângulo no **plano 5** representou-se a **forte**, pois é o pedido – é nessa Projeção que se pode medir a verdadeira grandeza do triângulo. A Projeção do triângulo no **plano 4** representou-se a **médio-forte**, pois integra o pedido apenas parcialmente (integra a representação do triângulo no diedro de Projeção final, no qual o plano  $\rho$  é um plano frontal). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X$  e do eixo  $X''$ ) ou são linhas de chamada.

## 217.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $P$  e  $Q$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a Projeção frontal do ponto  $R$  ( $R_2$ ). Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ . O ponto  $P$  tem afastamento nulo, pelo que o ponto  $P$  é, imediatamente, um ponto do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ). Assim, por  $P_2$  conduziu-se  $f_\rho$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , paralelo ao eixo  $X$  –  $f_\rho$  está definido por um ponto (o ponto  $P$ ) e uma direção (é fronto-horizontal).

Em seguida, recorreu-se à reta  $r$ , que passa pelos pontos  $Q$  e  $R$ . A Projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) passa pelas projeções frontais dos pontos  $Q$  e  $R$  ( $Q_2$  e  $R_2$ , respetivamente). Uma vez que a reta  $r$  é uma reta do plano  $\rho$ , tem de ter o seu traço frontal sobre o traço frontal do plano  $\rho$  (**condição para que uma reta pertença a um plano**). Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $r$  (o ponto  $F$ ), que se situa sobre  $f_\rho$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). A reta  $r$  está, assim, definida por dois pontos – os pontos  $Q$  e  $F$ .

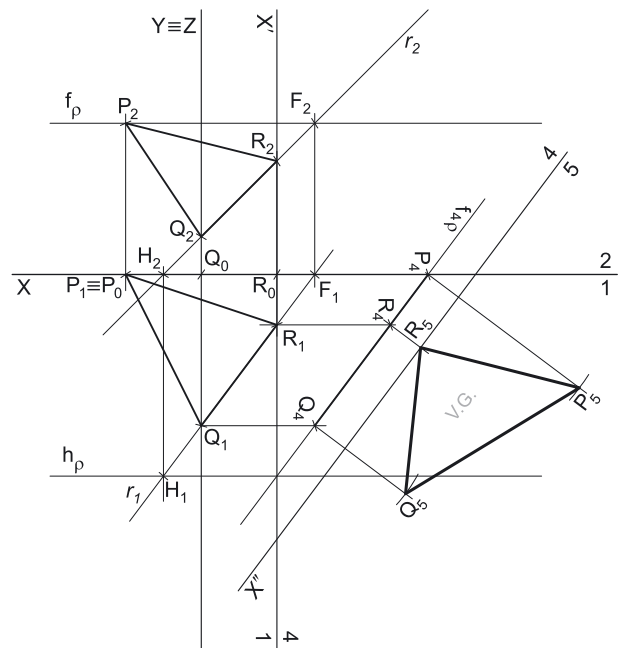
Para determinar o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), determinou-se o traço horizontal da reta  $r$  (o ponto  $H$ ), pelo qual se conduziu o traço horizontal do plano ( $h_\rho$ ) –  $h_\rho$  está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). Por fim, determinou-se a Projeção horizontal do ponto  $R$  ( $R_1$ ), sobre a Projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ).

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo  $[PQR]$ .

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo  $[PQR]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o triângulo  $[PQR]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\rho$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível) com 1 cm de cota. Um plano horizontal (de nível) é um caso particular dos planos projetantes frontais (é um plano projetante frontal que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano  $\rho$  num plano projetante frontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Transformação do plano $\rho$ num plano projetante frontal:

Para transformar o plano  $\rho$  num plano projetante frontal (um plano de topo) é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano ( $h_\rho$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Por uma questão de economia de traçados, optou-se por fazer o novo eixo **X** (o eixo **X**) passar pela linha de chamada do ponto **R**, mas tal não era absolutamente necessário. A situação apresentada significa que, no novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o ponto **R** tem afastamento nulo.

**P<sub>4</sub>** é a Projeção do ponto **P** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **P<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **P<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 4 cm – a cota de **P**). Em seguida, desenhou-se o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** – **f<sub>4, $\rho$</sub>**  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de Projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** (**f<sub>4, $\rho$</sub>** ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_\rho$  (que se situa no eixo **X'**) e **P<sub>4</sub>** (a nova Projeção frontal do ponto **P**). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **Q** e **R** no **plano 4** (**Q<sub>4</sub>** e **R<sub>4</sub>**, respetivamente), que se situam necessariamente sobre **f<sub>4, $\rho$</sub>**  (pois, no novo diedro de Projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal). Note que **Q<sub>4</sub>** e **R<sub>4</sub>** se poderiam ter determinado em função das respetivas cotas, que se situariam igualmente sobre **f<sub>4, $\rho$</sub>** . A Projeção do triângulo [**PQR**] no **plano 4** reduz-se a um segmento de reta sobre **h<sub>4, $\rho$</sub>** , pois o plano  $\rho$ , no novo diedro de Projeção, é um plano projetante horizontal (um plano vertical).

## Transformação do plano $\rho$ num plano horizontal (de nível):

Agora, há que transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível). Para tal, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X''**) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\rho$ , o eixo **X''** é paralelo ao novo traço frontal do plano  $\rho$  (**f<sub>4, $\rho$</sub>** ) e situa-se a 1 cm deste (a cota pretendida). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo **X''** (o novo eixo **X**).

**P<sub>5</sub>** é a Projeção do ponto **P** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **P<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **P<sub>1</sub>** ao eixo **X'**. **Q<sub>5</sub>** é a Projeção do ponto **Q** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **Q<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **Q<sub>1</sub>** ao eixo **X'**. Por fim, determinou-se **R<sub>5</sub>** (a Projeção do ponto **R** no **plano 5**), em função do seu afastamento (que se manteve) – o ponto **R** tem afastamento nulo no novo diedro de Projeção (como atrás se referiu), pelo que **R<sub>5</sub>** se situa necessariamente no eixo **X''**.

No novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 5** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano horizontal (de nível) com 1 cm de cota – no novo diedro de Projeção, o plano  $\rho$  é paralelo ao **plano 5**, (não tem traço horizontal). Assim, o triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 5**, pois o plano que o contém (o plano  $\rho$ ) é paralelo ao **plano 5**.

A partir das projeções dos três pontos no **plano 5**, desenhou-se a nova Projeção frontal do triângulo – o triângulo [**P<sub>5</sub>Q<sub>5</sub>R<sub>5</sub>**] é a verdadeira grandeza do triângulo [**PQR**].

## Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo [**PQR**]) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\rho$  representaram-se a **médio-leve**, pois, neste exercício, são auxiliares. A Projeção do triângulo no **plano 5** representou-se a **forte**, pois é o pedido – é nessa Projeção que se pode medir a verdadeira grandeza do triângulo. A Projeção do triângulo no **plano 4** representou-se a **médio-forte**, pois integra o pedido apenas parcialmente (integra a representação do triângulo no diedro de Projeção final, no qual o plano  $\rho$  é um plano horizontal). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo **X** e do eixo **X''**) ou são linhas de chamada.

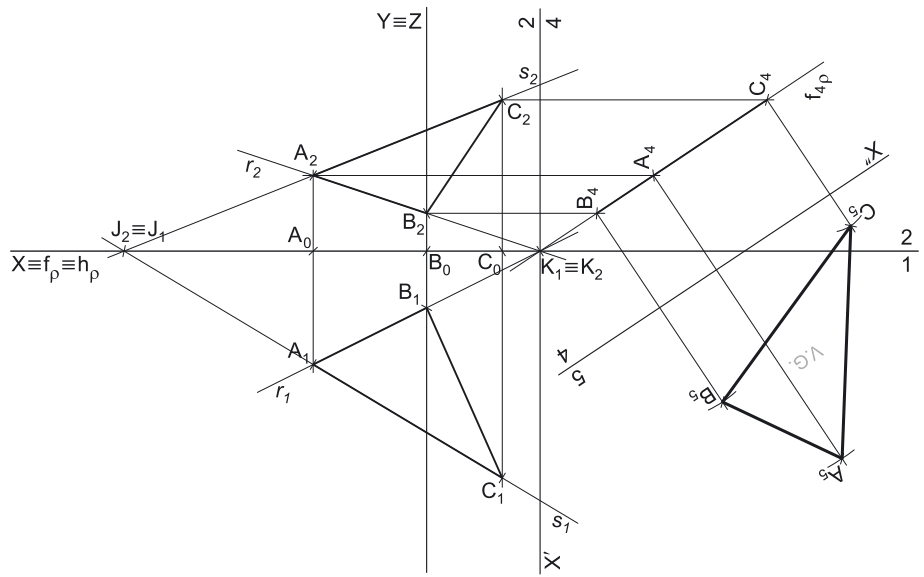
## 218.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a Projeção frontal do ponto **B** (**B**<sub>2</sub>), bem como a Projeção horizontal do ponto **C** (**C**<sub>1</sub>).

Em seguida, recorreu-se à reta **r**, que passa pelos pontos **A** e **B**. A Projeção frontal da reta **r** (**r**<sub>2</sub>) passa pelas projeções frontais dos pontos **A** e **B** (**A**<sub>2</sub> e **B**<sub>2</sub>, respetivamente). Uma vez que a reta **r** é uma reta do plano  $\rho$ , a reta **r** é necessariamente uma reta passante, que é concorrente com o eixo **X** num ponto – o ponto **K**. Assim, a reta **r** está definida por dois pontos – os pontos **A** e **K**. Foi possível, em seguida, determinar a Projeção horizontal do ponto **B** (**B**<sub>1</sub>), que se situa sobre a Projeção horizontal da reta **r** (**r**<sub>1</sub>).

Em seguida, recorreu-se à reta **s**, que passa pelos pontos **A** e **C**. A Projeção horizontal da reta **s** (**s**<sub>1</sub>) passa pelas projeções horizontais dos pontos **A** e **C** (**A**<sub>1</sub> e **C**<sub>1</sub>, respetivamente). Uma vez que a reta **s** é outra reta do plano  $\rho$ , a reta **s** é necessariamente outra reta passante, que é concorrente com o eixo **X** num ponto – o ponto **J**. Assim, a reta **s** está definida por dois pontos – os pontos **A** e **J**. Foi possível, em seguida, determinar a Projeção frontal do ponto **C** (**C**<sub>2</sub>), que se situa sobre a Projeção frontal da reta **s** (**s**<sub>2</sub>).



A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\rho$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\rho$  num plano frontal (de frente) com 3 cm de afastamento. Um plano frontal (de frente) é um caso particular dos planos projetantes horizontais (é um plano projetante horizontal que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano  $\rho$  num plano projetante horizontal.

**Transformação do plano  $\rho$  num plano projetante horizontal:**

Para transformar o plano  $\rho$  num plano projetante horizontal (um plano vertical) é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o plano 1) por um outro plano (o plano 4), ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o plano 2), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se mantém o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o plano 4);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao plano 4).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do plano 2 (o plano de Projeção que se manteve) com o plano 4 (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com 4/2. Como o plano 4 é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do plano (**f** <sub>$\rho$</sub> ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

**C**<sub>4</sub> é a Projeção do ponto **C** no plano 4 e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **C**<sub>4</sub> ao eixo **X'** é igual à distância de **C**<sub>1</sub> ao eixo **X** (que é 6 cm – o afastamento de **C**). Em seguida, desenhou-se o traço do plano  $\rho$  no plano 4 – **h** <sub>$\rho$</sub>  (o novo traço horizontal do plano  $\rho$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de Projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\rho$  no plano 4 (**h** <sub>$\rho$</sub> ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com **f** <sub>$\rho$</sub>  (que se situa no eixo **X'**) e **C**<sub>4</sub> (a nova Projeção horizontal do ponto **C**). Note que **f** <sub>$\rho$</sub>  se situa no eixo **X** e, tendo em conta que se mantém o Plano Frontal de Projeção (o plano 2), **f** <sub>$\rho$</sub>  mantém-se. Assim, o ponto de concorrência dos dois traços do plano (no novo diedro de Projeção), que se situa necessariamente no eixo **X'**, é, no desenho, o ponto de concorrência do eixo **X** com o eixo **X'**. Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **B** no plano 4 (**A**<sub>4</sub> e **B**<sub>4</sub>, respetivamente), que se situam necessariamente sobre **h** <sub>$\rho$</sub>  (pois, no novo diedro de Projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal). Note que **A**<sub>4</sub> e **B**<sub>4</sub> se poderiam ter determinado em função dos respetivos afastamentos, que se situariam igualmente sobre **h** <sub>$\rho$</sub> . A Projeção do triângulo **[ABC]** no plano 4 reduz-se a um segmento de reta sobre **h** <sub>$\rho$</sub> , pois o plano  $\rho$ , no novo diedro de Projeção, é um plano projetante horizontal (um plano vertical).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Transformação do plano $\rho$ num plano frontal (de frente):

Agora, há que transformar o plano  $\rho$  num plano frontal (de frente). Para tal, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém o plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções horizontais** dos pontos (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/5**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\rho$ , o eixo  $X''$  é paralelo ao novo traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{4\rho}$ ) e situa-se a 3 cm deste (o afastamento pretendido). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_5$  é a Projeção do ponto **A** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X'$ .  $B_5$  é a Projeção do ponto **B** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X'$ .  $C_5$  é a Projeção do ponto **C** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $C_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $C_2$  ao eixo  $X'$ .

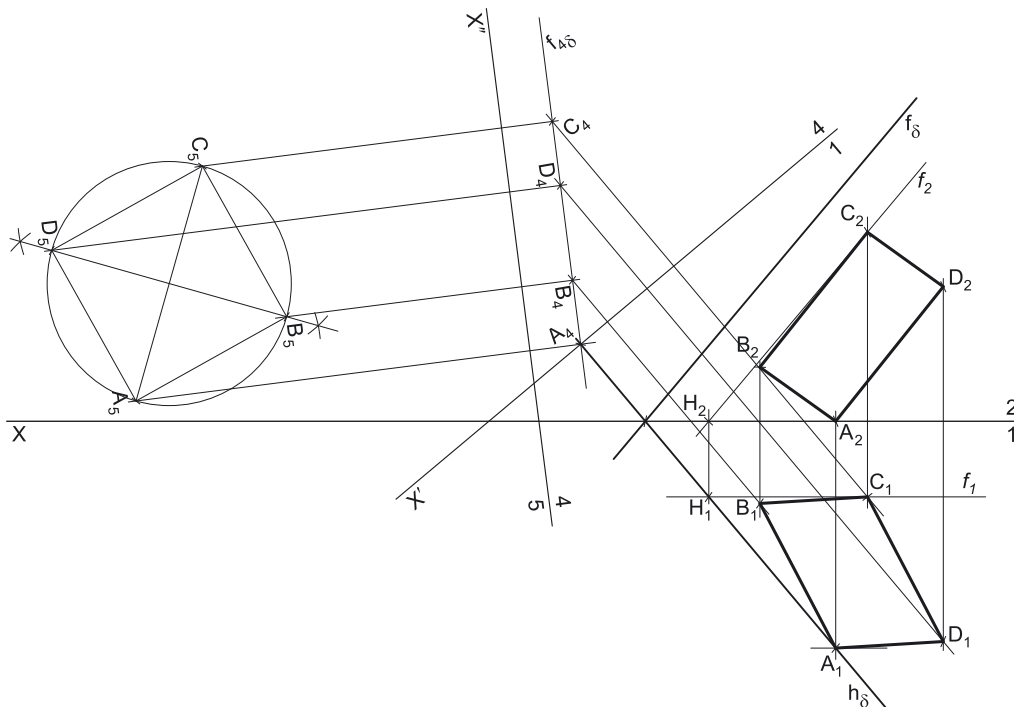
No novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 5** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano frontal (de frente) com 3 cm de afastamento – no novo diedro de Projeção, o plano  $\rho$  é paralelo ao **plano 5** (não tem traço frontal). Assim, o triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 5**, pois o plano que o contém (o plano  $\rho$ ) é paralelo ao **plano 5**.

A partir das projeções dos três pontos no **plano 5**, desenhou-se a nova Projeção frontal do triângulo – o triângulo  $[A_5B_5C_5]$  é a verdadeira grandeza do triângulo  $[ABC]$ .

## Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ ). A Projeção do triângulo no **plano 5** representou-se a **forte**, pois é o pedido – é nessa Projeção que se pode medir a verdadeira grandeza do triângulo. A Projeção do triângulo no **plano 4** representou-se a **médio-forte**, pois integra o pedido apenas parcialmente (integra a representação do triângulo no diedro de Projeção final, no qual o plano  $\rho$  é um plano frontal). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X$  e do eixo  $X''$ ) ou são linhas de chamada.

## 219.



## Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\delta$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **C** (dados no enunciado), verificando, ambos, a **condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O ponto **A** tem cota nula, pelo que é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano ( $h_1$ ), que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Este raciocínio permitiu-nos determinar, de forma imediata, as projeções do ponto **A** – **A** é o ponto de  $h_8$  que tem 6 cm de afastamento.

A reta **f** é a reta frontal (de frente) do plano, com 2 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **C**. Assim, a reta **f** está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$ ). O ponto **C** é o ponto da reta **f** que tem 5 cm de cota.

#### Resolução:

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o quadrado [ABCD] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do quadrado estão deformadas, pelo que não é possível construir, de forma direta, o quadrado em verdadeira grandeza, em qualquer das suas projeções, pelo que **é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar**. Para se construir qualquer das projeções do quadrado em verdadeira grandeza, há que transformar o plano  $\delta$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.

Temos duas hipóteses: ou se transforma previamente o plano  $\delta$  num plano horizontal (de nível) ou se transforma previamente o plano  $\delta$  num plano frontal (de frente). No caso de se transformar o plano  $\delta$  num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, o quadrado projetar-se-á em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (ou no plano que corresponda ao Plano Horizontal de Projeção). Já no caso de se transformar o plano  $\delta$  num plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, o quadrado projetar-se-á em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (ou no plano que corresponda ao Plano Frontal de Projeção).

Optou-se pela primeira hipótese – por transformar o plano  $\delta$  num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Um plano horizontal (de nível) é um caso particular dos planos projetantes frontais (é um plano projetante frontal que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano  $\delta$  num plano projetante frontal.

#### Transformação do plano $\delta$ num plano projetante frontal:

Para transformar o plano  $\delta$  num plano projetante frontal (um plano de topo) é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\delta$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\delta$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano ( $h_8$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

**C<sub>4</sub>** é a Projeção do ponto **C** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **C<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **C<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 5 cm – a cota de **C**). Em seguida, desenhou-se o traço do plano  $\delta$  no **plano 4** –  $f_{4,8}$  (o novo traço frontal do plano  $\delta$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de Projeção, o plano  $\delta$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\delta$  no **plano 4** ( $f_{4,8}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_8$  (que se situa no eixo **X'**) e **C<sub>4</sub>** (a nova Projeção frontal do ponto **C**). Por fim, determinou-se **A<sub>4</sub>** (a Projeção do ponto **A** no **plano 4**), em função da sua cota (que se manteve) – o ponto **A** tem cota nula, pelo que **A<sub>4</sub>** se situa necessariamente no eixo **X'**. Note que, de qualquer forma, **A<sub>4</sub>** se situa necessariamente sobre  $f_{4,8}$ , pois, no novo diedro de Projeção, o plano  $\delta$  é um plano projetante frontal.

No novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano que contém o quadrado (o plano  $\delta$ ) ainda não é paralelo a qualquer dos planos de Projeção, pelo que o quadrado ainda não se projeta em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de Projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Como atrás se referiu, esse processo geométrico auxiliar consiste no recurso a uma mudança do diedro de Projeção, de forma a transformar o plano  $\delta$  num plano horizontal (de nível).

#### Transformação do plano $\delta$ num plano horizontal (de nível):

Agora, há que transformar o plano  $\delta$  num plano horizontal (de nível). Para tal, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\delta$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X''**) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\delta$ , o eixo **X''** é paralelo ao novo traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_{4,8}$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo **X''** (o novo eixo **X**).

**C<sub>5</sub>** é a Projeção do ponto **C** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **C<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **C<sub>1</sub>** ao eixo **X'**. **A<sub>5</sub>** é a Projeção do ponto **A** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **A<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **A<sub>1</sub>** ao eixo **X'**.

No novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 5** e pelo **plano 4**), o plano  $\delta$  é um plano horizontal (de nível) – no novo diedro de Projeção, o plano  $\delta$  é paralelo ao **plano 5** (não tem traço horizontal). Assim, o quadrado projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 5**, pois o plano que o contém (o plano  $\delta$ ) é paralelo ao **plano 5**. Dessa forma, já é possível construir o quadrado em Projeção horizontal (no **plano 5**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Construção do quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza e determinação das suas projeções (no diedro de Projeção inicial):**

Assim, a partir dos pontos  $A_5$  e de  $B_5$ , construiu-se o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (o quadrado  $[A_5B_5C_5D_5]$ ), e determinaram-se os pontos  $B_5$  e  $D_5$  (as projeções dos pontos **B** e **D** no plano 5). A partir destas, determinaram-se, de forma direta, as projeções dos pontos **B** e **D** no plano 4 ( $B_4$  e  $D_4$ , respetivamente), que se situam sobre  $f_{4\delta}$  (pois, no diedro de Projeção formado pelo plano 4 e pelo plano 5, o plano  $\delta$  é um plano projetante frontal).

Para determinar as projeções do quadrado (no diedro de Projeção inicial), é necessário inverter as sucessivas mudanças do diedro de Projeção efetuadas.

Assim, pelas projeções dos pontos **B** e **D** no plano 4 ( $B_4$  e  $D_4$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (no diedro de Projeção formado pelo plano 1 e pelo plano 4), que são perpendiculares ao eixo  $X'$ . Em seguida, tendo em conta que, na segunda mudança do diedro de Projeção, se mantiveram os afastamentos, foi possível determinar as projeções horizontais dos pontos **B** e **D**, a partir dos respetivos afastamentos (que se mantiveram).

$B_1$  é a Projeção horizontal do ponto **B** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $B_1$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_5$  ao eixo  $X''$ .  $D_1$  é a Projeção horizontal do ponto **D** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $D_1$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $D_5$  ao eixo  $X''$ .

Em seguida, pelas projeções horizontais dos pontos **B** e **D** ( $B_1$  e  $D_1$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (no diedro de Projeção inicial), que são perpendiculares ao eixo  $X$ . Em seguida, tendo em conta que, na primeira mudança do diedro de Projeção, se mantiveram as cotas, foi possível determinar as projeções frontais dos pontos **B** e **D**, a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

$B_2$  é a Projeção frontal do ponto **B** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$ .  $D_2$  é a Projeção frontal do ponto **D** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $D_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D_4$  ao eixo  $X'$ .

Note que, no diedro de Projeção inicial e a partir das projeções horizontais dos pontos **B** e **D** ( $B_1$  e  $D_1$ , respetivamente), se poderiam ter determinado as projeções frontais daqueles pontos recorrendo a retas do plano  $\delta$  (pois os pontos têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\delta$ ).

A partir das projeções dos quatro vértices do polígono (no diedro de Projeção inicial), desenharam-se as duas projeções do quadrado (no diedro de Projeção inicial, formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção).

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado (no diedro de Projeção inicial) representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As projeções do quadrado no plano 4 e no plano 5 representaram-se a **leve**, pois são meramente auxiliares (para atingir o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados referentes às mudanças do diedro de Projeção efetuadas, nomeadamente o eixo  $X'$  e o eixo  $X''$ ).

## 220.

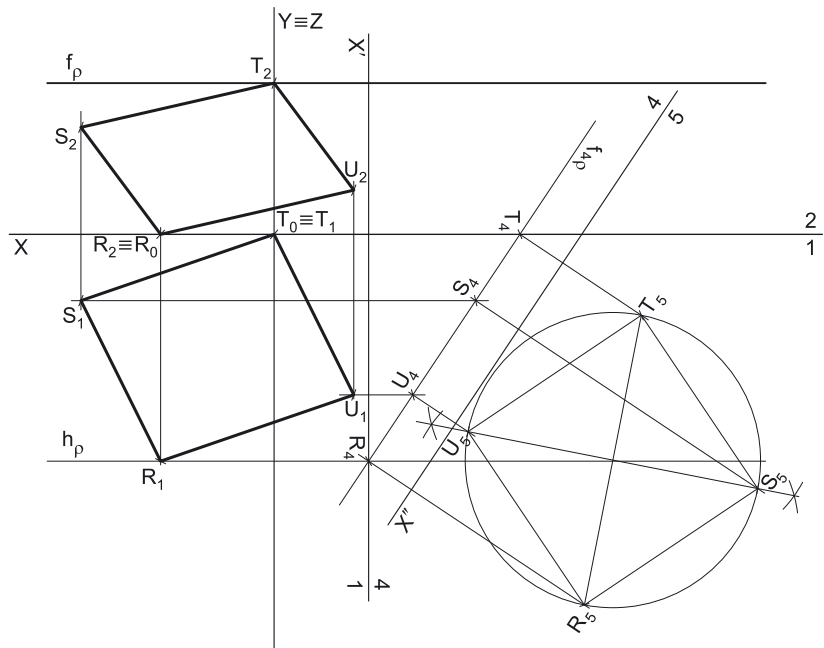
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **R**, pelas suas projeções, bem como o traço frontal do plano, em função dos dados. Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano  $\rho$ , o que se processa de forma direta (nesta situação), bem como as projeções do ponto **T**.

O ponto **R** tem cota nula, pelo que é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano ( $h_\rho$ ) – nesse sentido, desenhou-se  $h_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ), que está definido por um ponto (o ponto **R**) e por uma direção (é fronto-horizontal). O ponto **T** tem afastamento nulo, pelo que é necessariamente um ponto do traço frontal do plano ( $f_\rho$ ) – nesse sentido, o ponto **T** é o ponto de  $f_\rho$  que tem abcissa nula. O ponto **T** pertence ao plano  $\rho$ , pois pertence a uma reta do plano (o ponto **T** verifica a **condição para que um ponto pertença a um plano** em relação ao plano  $\rho$ ) – essa reta é o traço frontal do plano ( $f_\rho$ ).

### Resolução:

O plano que contém o quadrado [RSTU] (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o quadrado [RSTU] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do quadrado estão deformadas, pelo que não é possível construir, de forma direta, o quadrado em verdadeira grandeza, em qualquer das suas projeções, pelo que é **necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar**. Para se construir qualquer das projeções do quadrado em verdadeira grandeza, há que transformar o plano  $\rho$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Temos duas hipóteses: ou se transforma previamente o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível) ou se transforma previamente o plano  $\rho$  num plano frontal (de frente). No caso de se transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, o quadrado projetar-se-á em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (ou no plano que corresponda ao Plano Horizontal de Projeção). Já no caso de se transformar o plano  $\rho$  num plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, o quadrado projetar-se-á em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (ou no plano que corresponda ao Plano Frontal de Projeção).

Optou-se pela primeira hipótese – por transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Um plano horizontal (de nível) é um caso particular dos planos projetantes frontais (é um plano projetante frontal que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano  $\rho$  num plano projetante frontal.

#### Transformação do plano $\rho$ num plano projetante frontal:

Para transformar o plano  $\rho$  num plano projetante frontal (um plano de topo) é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de Projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano ( $h_\rho$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$T_4$  é a Projeção do ponto  $T$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $T_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $T_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $T$ ). Em seguida, desenhou-se o traço do plano  $\delta$  no **plano 4** –  $f_{4\delta}$  (o novo traço frontal do plano  $\delta$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de Projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_\rho$  (que se situa no eixo  $X'$ ) e  $T_4$  (a nova Projeção frontal do ponto  $T$ ). Por fim, determinou-se  $R_4$  (a Projeção do ponto  $R$  no **plano 4**), em função da sua cota (que se manteve) – o ponto  $R$  tem cota nula, pelo que  $R_4$  se situa necessariamente no eixo  $X'$ . Note que, de qualquer forma,  $R_4$  se situa necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de Projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal.

No novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano que contém o quadrado (o plano  $\rho$ ) ainda não é paralelo a qualquer dos planos de Projeção, pelo que o quadrado ainda não se projeta em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de Projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Como atrás se referiu, esse processo geométrico auxiliar consiste no recurso a uma mudança do diedro de Projeção, de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível).

#### Transformação do plano $\rho$ num plano horizontal (de nível):

Agora, há que transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível). Para tal, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de Projeção que tem, em comum com o diedro de Projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos (as projeções no **plano 4** – o plano de Projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos no novo plano de Projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de Projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de Projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de Projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\rho$ , o eixo  $X''$  é paralelo ao novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de Projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ).

$R_5$  é a Projeção do ponto  $R$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $R_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $R_1$  ao eixo  $X'$ .  $T_5$  é a Projeção do ponto  $T$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $T_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $T_1$  ao eixo  $X'$ .

No novo diedro de Projeção (formado pelo **plano 5** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano horizontal (de nível) – no novo diedro de Projeção, o plano  $\rho$  é paralelo ao **plano 5** (não tem traço horizontal). Assim, o quadrado projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 5**, pois o plano que o contém (o plano  $\rho$ ) é paralelo ao **plano 5**. Dessa forma, já é possível construir o quadrado em Projeção horizontal (no **plano 5**).

#### Construção do quadrado [RSTU] em verdadeira grandeza e determinação das suas projeções (no diedro de Projeção inicial):

Assim, a partir dos pontos  $R_5$  e de  $T_5$ , construiu-se o quadrado [RSTU] em verdadeira grandeza (o quadrado [ $R_5S_5T_5U_5$ ]), e determinaram-se os pontos  $S_5$  e  $U_5$  (as projeções dos pontos  $S$  e  $U$  no **plano 5**). A partir destas, determinaram-se, de forma direta, as projeções dos pontos  $S$  e  $U$  no **plano 4** ( $S_4$  e  $U_4$ , respetivamente), que se situam sobre  $f_{4\rho}$  (pois, no diedro de Projeção formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal).

Para determinar as projeções do quadrado (no diedro de Projeção inicial), é necessário inverter as sucessivas mudanças do diedro de Projeção efetuadas.

Assim, pelas projeções dos pontos  $R$  e  $S$  no **plano 4** ( $R_4$  e  $S_4$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (no diedro de Projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), que são perpendiculares ao eixo  $X'$ . Em seguida, tendo em conta que, na segunda mudança do diedro de Projeção, se mantiveram os afastamentos, foi possível determinar as projeções horizontais dos pontos  $S$  e  $U$ , a partir dos respetivos afastamentos (que se mantiveram).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

$S_1$  é a Projeção horizontal do ponto  $S$  e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $S_1$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $S_5$  ao eixo  $X''$ .  $U_1$  é a Projeção horizontal do ponto  $U$  e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $U_1$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $U_5$  ao eixo  $X''$ .

Em seguida, pelas projeções horizontais dos pontos  $S$  e  $U$  ( $S_1$  e  $U_1$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (no diedro de Projeção inicial), que são perpendiculares ao eixo  $X$ . Em seguida, tendo em conta que, na primeira mudança do diedro de Projeção, se mantiveram as cotas, foi possível determinar as projeções frontais dos pontos  $S$  e  $U$ , a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

$S_2$  é a Projeção frontal do ponto  $S$  e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $S_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $S_4$  ao eixo  $X'$ .  $U_2$  é a Projeção frontal do ponto  $U$  e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $U_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $U_4$  ao eixo  $X'$ .

Note que, no diedro de Projeção inicial e a partir das projeções horizontais dos pontos  $S$  e  $U$  ( $S_1$  e  $U_1$ , respetivamente), se poderiam ter determinado as projeções frontais daqueles pontos recorrendo a retas do plano  $\delta$  (pois os pontos têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\rho$ ).

A partir das projeções dos quatro vértices do polígono (no diedro de Projeção inicial), desenharam-se as duas projeções do quadrado (no diedro de Projeção inicial, formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção).

### Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado (no diedro de Projeção inicial) representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As projeções do quadrado no **plano 4** e no **plano 5** representaram-se a **leve**, pois são meramente auxiliares (para atingir o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do traço horizontal do plano  $\rho$  e de todos os traçados referentes às mudanças do diedro de Projeção efetuadas, nomeadamente o eixo  $X'$  e o eixo  $X''$ ).

## 221.

O processo da **rotação** consiste em, mantendo o diedro de Projeção inicial, **mudar a posição do objeto** projetado, **rodando-o em torno de uma reta** (eixo de rotação), de forma que, no diedro de Projeção em que se situa (o diedro de Projeção inicial), o objeto fique numa posição mais favorável para a concretização do estudo em curso. Nesse sentido, ao longo da sua rotação (até atingir a posição pretendida), o objeto mantém fixa a sua posição em relação ao eixo.

Há ainda a referir que o eixo de rotação (a reta em torno da qual o objeto roda) é necessariamente **ortogonal a um dos planos de Projeção** (o eixo da rotação tem de ser uma reta projetante).

## 222.

Pela definição deste processo geométrico auxiliar (a rotação), os arcos da rotação estão necessariamente contidos em **planos ortogonais ao eixo da rotação**. Nesse sentido, é comum dizer-se que **a rotação se processa ortogonalmente ao eixo da rotação** – porque a rotação dos diferentes pontos do objeto se processa, precisamente, ao longo de planos ortogonais ao eixo da rotação (os planos ortogonais à charneira que contém aqueles pontos).

## 223.

Em primeiro lugar, há a referir que, para se efetuar uma rotação, é necessário desenhar efetivamente os arcos da rotação que os pontos descrevem. Uma vez que, em Dupla Projeção Ortogonal, os diferentes elementos do espaço são representados pelas suas projeções, a representação dos arcos de rotação processa-se através do desenho das suas projeções. Assim, **a efetiva representação dos arcos de rotação** (através das respetivas projeções) apenas se pode efetuar se aqueles se projetarem em verdadeira grandeza.

Por outro lado, há que ter em conta que os arcos de qualquer rotação estão necessariamente contidos em **planos ortogonais** ao eixo dessa rotação. Ora, para que os arcos de rotação se projetem em verdadeira grandeza (num dos planos de Projeção), esses arcos têm de estar contidos em plano paralelos a um dos planos de Projeção – planos horizontais (de nível) ou planos frontais (de frente).

Se os arcos da rotação estiverem contidos em planos frontais (de frente), e uma vez que os planos que contêm os arcos de rotação são **ortogonais ao eixo de rotação**, o eixo da rotação tem de ser uma reta de topo (uma reta projetante frontal). Se, por outro lado, os arcos estiverem contidos em planos horizontais (de nível), e atendendo mais uma vez que os planos que contêm os arcos de rotação são **ortogonais ao eixo de rotação**, o eixo da rotação tem de ser uma reta vertical (uma reta projetante horizontal).

Em ambas as situações, o eixo de rotação é uma reta projetante (projetante horizontal ou projetante frontal). Dessa forma, só se estudam as rotações em que os respetivos eixos de rotação são retas projetantes.

## 224.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **M** e **N**, pelas respectivas projeções, em função dos dados.

- a) Em primeiro lugar, representou-se a reta vertical (a reta **e**) que passa pelo ponto **M** – a reta **e** é o eixo vertical em torno do qual o ponto **A** tem de rodar. A rotação do ponto **A** processa-se, assim, ao longo de um plano ortogonal ao eixo de rotação, que é necessariamente um plano horizontal (de nível). Nesse sentido, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém o ponto **A**) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis. Por outro lado, uma vez que o plano  $v$  é um plano projetante frontal, o seu traço frontal ( $(f_v)$ ) passa necessariamente por **A**<sub>2</sub> (a Projeção frontal do ponto **A**).

Em seguida, determinou-se o centro do arco da rotação do ponto **A** (o ponto **O**), que é o ponto de interseção do eixo da rotação (a reta **e**) com o plano  $v$  (o plano que contém o arco da rotação do ponto **A**). O raio do arco da rotação do ponto **A** é  $\overline{OA}$  (a distância do ponto **O** ao ponto **A**). O arco da rotação do ponto **A** está contido no plano  $v$ , que é um plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção – assim, o arco da rotação do ponto **A** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Dessa forma, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>1</sub> (a Projeção horizontal do ponto **O**) e com raio  $\overline{O_1A_1}$ , desenhou-se um arco com 80° de amplitude (no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio), que é o arco  $\overline{A_1A'_1}$  – este arco é a Projeção horizontal do arco da rotação do ponto **A**. Note que **A**<sub>1</sub> (a Projeção horizontal do ponto **A**) é um extremo do arco e **A'**<sub>1</sub> é o outro extremo desse mesmo arco (sendo **A'**<sub>1</sub> a Projeção horizontal do ponto **A**, após a rotação).

Uma vez que o arco da rotação do ponto **A** está contido no plano  $v$ , o ponto **A** mantém a sua cota ao longo da sua rotação, pelo que o ponto **A'** tem a mesma cota do ponto **A**. Assim, **A'**<sub>2</sub> (a Projeção frontal do ponto **A'**) situa-se sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $(f_v)$ ), na linha de chamada de **A'**<sub>1</sub>. O ponto **A'**, definido pelas suas projeções, é o ponto **A** após a rotação pretendida (o ponto **A** rodado).

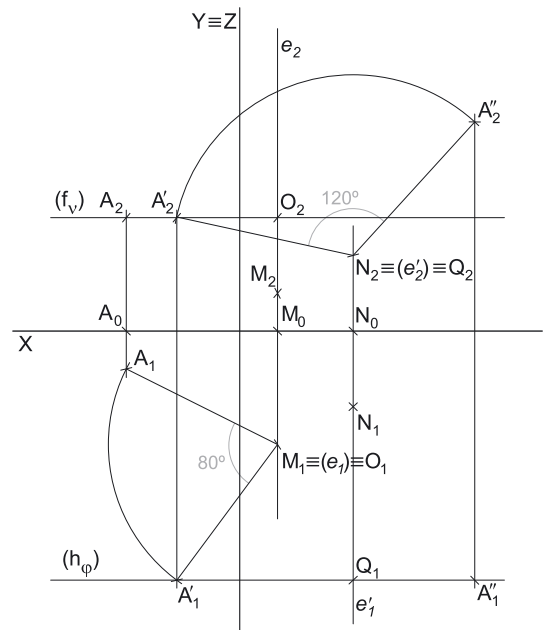
- b) Em primeiro lugar, representou-se a reta de topo (a reta **e'**) que passa pelo ponto **N** – a reta **e'** é o eixo de topo em torno do qual o ponto **A'** tem de rodar. A rotação do ponto **A'** processa-se, assim, ao longo de um plano ortogonal ao eixo de rotação, que é necessariamente um plano frontal (de frente). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém o ponto **A'**) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis. Por outro lado, uma vez que o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, o seu traço horizontal ( $(h_\varphi)$ ) passa necessariamente por **A'**<sub>1</sub> (a Projeção horizontal do ponto **A'**).

Em seguida, determinou-se o centro do arco da rotação do ponto **A'** (o ponto **Q**), que é o ponto de interseção do eixo da rotação (a reta **e'**) com o plano  $\varphi$  (o plano que contém o arco da rotação do ponto **A'**). O raio do arco da rotação do ponto **A'** é  $\overline{QA'}$  (a distância do ponto **Q** ao ponto **A'**). O arco da rotação do ponto **A'** está contido no plano  $\varphi$ , que é um plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção – assim, o arco da rotação do ponto **A'** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Dessa forma, com o compasso, fazendo centro em **Q**<sub>2</sub> (a Projeção frontal do ponto **Q**) e com raio  $\overline{Q_2A'_2}$ , desenhou-se um arco com 120° de amplitude (no sentido dos ponteiros do relógio), que é o arco  $\overline{A'_2A''_2}$  – este arco é a Projeção frontal do arco da rotação do ponto **A'**. Note que **A'**<sub>2</sub> (a Projeção frontal do ponto **A'**) é um extremo do arco e **A''**<sub>2</sub> é o outro extremo desse mesmo arco (sendo **A''**<sub>2</sub> a Projeção frontal do ponto **A'**, após a rotação).

Uma vez que o arco da rotação do ponto **A'** está contido no plano  $\varphi$ , o ponto **A'** mantém o seu afastamento ao longo da sua rotação, pelo que o ponto **A''** tem o mesmo afastamento do ponto **A'**. Assim, **A''**<sub>1</sub> (a Projeção horizontal do ponto **A''**) situa-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $(h_\varphi)$ ), na linha de chamada de **A''**<sub>2</sub>. O ponto **A''**, definido pelas suas projeções, é o ponto **A'** após a rotação pretendida (o ponto **A'** rodado).

**Traçado:**

Os dados são pontos, cujas linhas de chamada se representam sempre a **leve**. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O objetivo do exercício são pontos (os pontos rodados) pelo que não existe nenhuma representação a **forte**. Assim, todas as restantes linhas se representaram a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos eixos de rotação **e** e **e'**, dos traços dos planos que contêm os arcos das rotações efetuadas ou, ainda, das projeções dos arcos de rotação).



## 225.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o segmento de reta  $[AB]$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

O segmento de reta  $[AB]$  é um segmento de reta oblíquo, pelo que não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção – o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas). Nesse sentido, para determinar a verdadeira grandeza do segmento, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

De acordo com o enunciado, pretende-se determinar a verdadeira grandeza do segmento de reta  $[AB]$ , transformando-o num segmento de reta vertical. Uma reta vertical é um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o segmento de reta  $[AB]$  num segmento de reta frontal (de frente).

### Transformação do segmento de reta $[AB]$ num segmento de reta frontal (de frente):

Para transformar o segmento de reta  $[AB]$  num segmento de reta frontal (de frente) é necessário efetuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se alteram, mantendo-se as suas cotas. Assim, os arcos de rotação dos pontos do segmento estão contidos em planos horizontais (de nível), pelo que o eixo da rotação é uma **reta vertical**. Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical – a reta  $e$ . Tenha em conta que, por uma questão de economia de traçados, se posicionou a reta  $e$  (o eixo de rotação) de forma que o ponto  $B$  é o ponto que nos permite rodar o segmento. De facto, o ponto  $B$  é o ponto do segmento de reta  $[AB]$ , tal que  $[OB]$  é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e$ ) e perpendicular ao segmento de reta  $[AB]$ , sendo que  $O$  é o centro da rotação do ponto  $B$ . O ponto  $O$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e$ ) com o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto  $B$  (e cuja identificação se omitiu). Nesse sentido, o ponto  $O$  é o ponto da reta  $e$  que tem a cota do ponto  $B$ .

Para transformar o segmento de reta  $[AB]$  num segmento de reta frontal (de frente),  $[A_1B_1]$  (a Projeção horizontal do segmento  $[AB]$ ), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento  $[OB]$  é perpendicular a  $[AB]$ , o segmento  $[OB]$  tem de rodar até ficar de topo – a Projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ), após a rotação, tem de ficar coincidente com  $O_2$  (a Projeção frontal do ponto  $O$ ). O arco da rotação do ponto  $B$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois está contido num plano horizontal (de nível). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com raio até  $B_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $B$ ), desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $B$  até à vertical que passa por  $O_1$  e na qual se situa  $B'_1 - B'$  é o ponto  $B$  rodado e  $B'_2$  fica imediatamente coincidente com  $O_2$  (tem-se imediatamente,  $B'_2 \equiv O_2$ ).

Efetuada a rotação de  $[OB]$ , sabe-se que a Projeção horizontal da reta suporte do segmento, após a rotação, passa por  $B'_1$  e é perpendicular a  $[O_1B'_1]$ , pelo que fica paralela ao eixo  $X$  (que era precisamente o pretendido). Em seguida, rodou-se o ponto  $A$  ao longo do plano horizontal (de nível) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $A'_1$  se situe sobre a Projeção horizontal da reta suporte do segmento, ou seja, até que  $A'_1$  fique sobre a paralela ao eixo  $X$  que passa por  $B'_1$ . Não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $A$  nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $A$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois também está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_1 \equiv (e_1)$ .

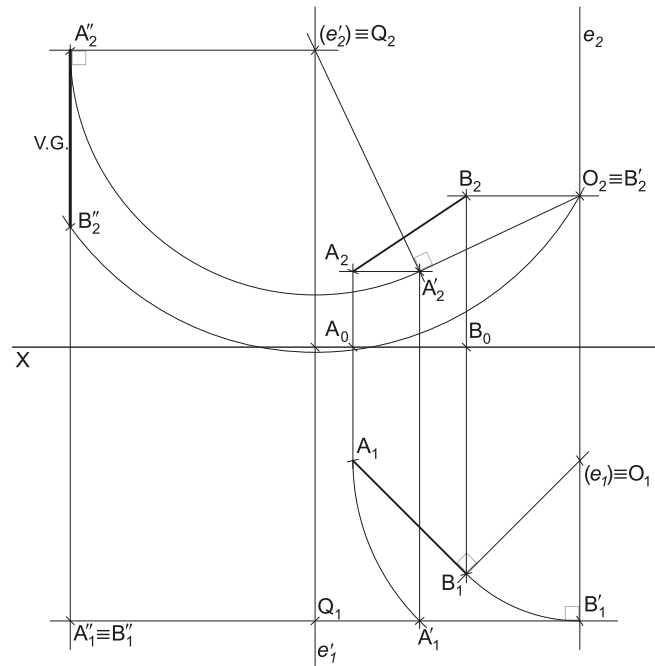
Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e_1$  e raio até  $A_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação do ponto  $A$  até à paralela ao eixo  $X$  que passa por  $B'_1$ , sobre a qual se situa  $A'_1$  ( $A'$  é o ponto  $A$  rodado). A rotação do ponto  $A$  processa-se ao longo do plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação, pelo que  $A'_2$  (a Projeção frontal do ponto  $A$  rodado) se situa na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $A_2$  (o ponto  $A$  mantém a sua cota, na rotação efetuada).

Em seguida, desenharam-se as projeções do segmento  $[A'B']$ , que é um segmento de reta frontal (de frente) – o segmento  $[A'B']$  é o segmento  $[AB]$ , após a rotação.

### Transformação do segmento de reta $[A'B']$ num segmento de reta vertical:

O segmento de reta  $[A'B']$  (o segmento de reta  $[AB]$  após a rotação) está paralelo ao Plano Frontal de Projeção (é um segmento de reta frontal) e é o segmento de reta  $[AB]$  rodado. Agora há que rodar o segmento, até o transformar num segmento de reta vertical, o que se processa com o recurso a uma segunda rotação. Tenha em conta que uma reta vertical é um caso particular das retas frontais (de frente) e que o segmento  $[A'B']$  já é um segmento de reta frontal (de frente).

Assim, para transformar o segmento de reta  $[A'B']$  num segmento de reta vertical é necessário efetuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se alteram, mantendo-se os seus afastamentos. Assim, os arcos de rotação dos pontos do segmento estão contidos em planos frontais (de frente), pelo que o eixo da rotação é uma **reta de topo**. Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta  $e'$ . Note que se localizou a reta  $e'$  de forma que, nesta segunda rotação, o ponto  $A'$  seja o ponto que nos permite rodar o segmento de reta. Assim, posicionou-se a reta  $e'$  (o segundo eixo de rotação) de forma que  $[QA']$  seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e'$ ) e ao segmento de reta  $[A'B']$ , sendo que  $Q$  é o centro da rotação do ponto  $A'$ . O ponto  $Q$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e'$ ) com o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $A'$  (e cuja identificação se omitiu). Nesse sentido, o ponto  $Q$  é o ponto da reta  $e'$  que tem o afastamento do ponto  $A'$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para transformar o segmento de reta  $[A'B']$  num segmento de reta vertical,  $[A'_2B'_2]$  (a Projeção frontal do segmento  $[A'B']$ ), após a rotação, tem de ficar perpendicular ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento  $[QA']$  é perpendicular a  $[A'B']$ , o segmento  $[QA']$  tem de rodar até ficar paralelo ao eixo  $X$  – o ponto  $A'$ , após a rotação, tem de ficar com a cota do ponto  $Q$ . O arco da rotação do ponto  $A'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois está contido num plano frontal (de frente). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a Projeção frontal do ponto  $Q$ ) e com raio até  $A'_2$  (a Projeção frontal do ponto  $A'$ ), desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação do ponto  $A'$  até à paralela ao eixo  $X$  que passa por  $Q_2$  e na qual se situa  $A''_2$ . Uma vez que a rotação do ponto  $A'$  se processa num plano frontal (de frente), o ponto  $A'$  mantém o seu afastamento –  $A''_1$  situa-se na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $A'_1$  e que corresponde ao plano frontal de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $A'$  (e que não se identificou). O ponto  $A''$  é o ponto  $A'$  rodado.

Efetuada a rotação de  $[QA']$ , sabe-se que a Projeção frontal da reta suporte do segmento, após a rotação, passa por  $A''_2$  e é perpendicular a  $[Q_2A''_2]$ , pelo que fica perpendicular ao eixo  $X$  (que era precisamente o pretendido). Em seguida, rodou-se o ponto  $B'$  ao longo do plano frontal (de frente) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $B''_2$  se situe sobre a Projeção frontal da reta suporte do segmento, ou seja, até que  $B''_2$  fique sobre a perpendicular ao eixo  $X$  que passa por  $A''_2$ . Não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $B'$ , nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $B'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois também está contido num plano frontal) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $Q_2 \equiv (e'_2)$ .

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e'_2$  e raio até  $B'_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação do ponto  $B'$  até à perpendicular ao eixo  $X$  que passa por  $A''_2$ , sobre a qual se situa  $B''_2$  ( $B''$  é o ponto  $B'$  rodado). A rotação do ponto  $B'$  processa-se ao longo do plano frontal (de nível) que contém o arco da sua rotação, pelo que  $B''_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $B'$  rodado) se situa na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $B'_1$  (o ponto  $B'$  mantém o seu afastamento, na rotação efetuada). Note que, após a rotação efetuada, a Projeção horizontal do ponto  $B''$  ( $B''_1$ ) está coincidente com a Projeção horizontal do ponto  $A''$  ( $A''_1$ ).

Em seguida, desenharam-se as projeções do segmento  $[A''B'']$ , que é um segmento de reta vertical – o segmento  $[A''B'']$  é o segmento  $[A'B']$ , após a rotação. Note que o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $A'$  é o mesmo plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $B'$  e é, ainda, o plano frontal (de frente) que contém o segmento de reta  $[A'B']$  (bem como o segmento de reta  $[A''B'']$ ).

### Determinação da verdadeira grandeza do segmento de reta $[AB]$ :

Como o segmento, agora, já está paralelo ao Plano Frontal de Projeção, a verdadeira grandeza de  $\overline{AB}$  está na Projeção frontal do segmento  $[A''B''] - \overline{A''_2B''_2}$  é a verdadeira grandeza do segmento de reta  $[AB]$ . Note que a verdadeira grandeza do segmento já estava na Projeção frontal do segmento  $[A'B']$  (que já era um segmento de reta frontal), mas o enunciado pede especificamente para determinar a verdadeira grandeza do segmento, transformando-o previamente num segmento de reta vertical. Por essa razão se assinalou a verdadeira grandeza do segmento apenas após a conclusão do pedido no enunciado.

### Traçado:

As projeções do segmento de reta  $[AB]$  representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo  $X$  representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções dos segmentos de reta  $[A''B'']$  (um objetivo parcial do exercício) representam-se a **médio-forte**, pois é parte do pedido no exercício. No entanto, o objetivo final do exercício é a determinação da verdadeira grandeza do segmento, que está na Projeção frontal do segmento  $[A''B'']$ . Assim, a Projeção frontal do segmento  $[A''B'']$  (o segmento  $[A''_2B''_2]$ ) representou-se a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$ , das projeções dos arcos de rotação, etc.).

## 226

### Dados:

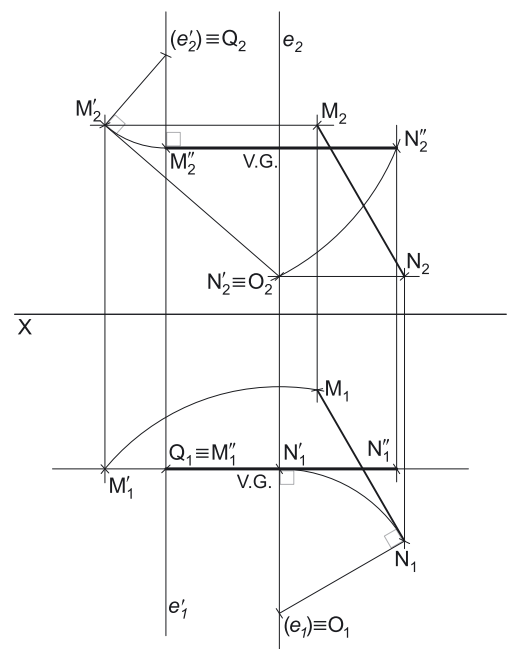
Em primeiro lugar, representou-se o segmento de reta  $[MN]$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O segmento  $[MN]$  é paralelo ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que as suas projeções são paralelas entre si (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

### Resolução:

O segmento de reta  $[MN]$  é um segmento de reta oblíquo, pelo que não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção – o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas). Nesse sentido, para determinar a verdadeira grandeza do segmento, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

De acordo com o enunciado, pretende-se determinar a verdadeira grandeza do segmento de reta  $[MN]$ , transformando-o num segmento de reta fronto-horizontal. Uma reta fronto-horizontal é tanto um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é paralela ao Plano Horizontal de Projeção) como um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é paralela ao Plano Frontal de Projeção). Assim, antes de mais, há que transformar o segmento de reta  $[MN]$  num segmento de reta horizontal (de nível) ou num segmento de reta frontal (de frente).

Optou-se por esta segunda hipótese – por transformar previamente o segmento num segmento de reta frontal (de frente).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Transformação do segmento de reta [MN] num segmento de reta frontal (de frente):

Para transformar o segmento de reta [MN] num segmento de reta frontal (de frente) é necessário efetuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se alteram, mantendo-se as suas cotas. Assim, os arcos de rotação dos pontos do segmento estão contidos em planos horizontais (de nível), pelo que o eixo da rotação é uma **reta vertical**. Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical – a reta **e**. Tenha em conta que, por uma questão de economia de traçados, se posicionou a reta **e** (o eixo de rotação) de forma que o ponto **N** é o ponto que nos permite rodar o segmento. De facto, o ponto **N** é o ponto do segmento de reta [MN], tal que [ON] é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta **e**) e perpendicular ao segmento de reta [MN], sendo que **O** é o centro da rotação do ponto **N**. O ponto **O** é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta **e**) com o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto **N** (e cuja identificação se omitiu). Nesse sentido, o ponto **O** é o ponto da reta **e** que tem a cota do ponto **N**.

Para transformar o segmento de reta [MN] num segmento de reta frontal (de frente), [M<sub>1</sub>N<sub>1</sub>] (a Projeção horizontal do segmento [MN]), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo **X**. Assim, porque o segmento [ON] é perpendicular a [MN], o segmento [ON] tem de rodar até ficar de topo – a Projeção frontal do ponto **N** (N<sub>2</sub>), após a rotação, tem de ficar coincidente com O<sub>2</sub> (a Projeção frontal do ponto **O**). O arco da rotação do ponto **N** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois está contido num plano horizontal (de nível). Assim, com o compasso, fazendo centro em O<sub>1</sub> (a Projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até N<sub>1</sub> (a Projeção horizontal do ponto **N**), desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de **N** até à vertical que passa por O<sub>1</sub> e na qual se situa N'<sub>1</sub> – N' é o ponto **N** rodado e N'<sub>2</sub> fica imediatamente coincidente com O<sub>2</sub> (tem-se imediatamente, N'<sub>2</sub> ≡ O<sub>2</sub>).

Efetuada a rotação de [ON], sabe-se que a Projeção horizontal da reta suporte do segmento, após a rotação, passa por N'<sub>1</sub> e é perpendicular a [O<sub>1</sub>N'<sub>1</sub>], pelo que fica paralela ao eixo **X** (que era precisamente o pretendido). Em seguida, rodou-se o ponto **M** ao longo do plano horizontal (de nível) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que M'<sub>1</sub> se situe sobre a Projeção horizontal da reta suporte do segmento, ou seja, até que M'<sub>1</sub> fique sobre a paralela ao eixo **X** que passa por N'<sub>1</sub>. Não se identificou o centro do arco da rotação do ponto **M** nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto **M** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois também está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com O<sub>1</sub> ≡ (e<sub>1</sub>).

Assim, com o compasso, fazendo centro em e<sub>1</sub> e raio até M<sub>1</sub>, desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação do ponto **M** até à paralela ao eixo **X** que passa por N'<sub>1</sub>, sobre a qual se situa M'<sub>1</sub> (M' é o ponto **M** rodado). A rotação do ponto **M** processa-se ao longo do plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação, pelo que M'<sub>2</sub> (a Projeção frontal do ponto **M** rodado) se situa na paralela ao eixo **X** que passa por M<sub>2</sub> (o ponto **M** mantém a sua cota, na rotação efetuada).

Em seguida, desenharam-se as projeções do segmento [M'N'], que é um segmento de reta frontal (de frente) – o segmento [M'N'] é o segmento [MN], após a rotação.

## Transformação do segmento de reta [M'N'] num segmento de reta fronto-horizontal:

O segmento de reta [M'N'] (o segmento de reta [MN] após a rotação) está paralelo ao Plano Frontal de Projeção (é um segmento de reta frontal) e é o segmento de reta [MN] rodado. Agora há que rodar o segmento, até o transformar num segmento de reta fronto-horizontal, o que se processa com o recurso a uma segunda rotação. Tenha em conta que uma reta fronto-horizontal é um caso particular das retas frontais (de frente) e que o segmento [M'N'] já é um segmento de reta frontal (de frente).

Assim, para transformar o segmento de reta [M'N'] num segmento de reta fronto-horizontal, é necessário efetuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se alteram, mantendo-se os seus afastamentos. Assim, os arcos de rotação dos pontos do segmento estão contidos em planos frontais (de frente), pelo que o eixo da rotação é uma **reta de topo**. Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta **e'**. Note que se localizou a reta **e'** de forma que, nesta segunda rotação, o ponto **M'** seja o ponto que nos permite rodar o segmento de reta. Assim, posicionou-se a reta **e'** (o segundo eixo de rotação) de forma que [QM'] seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta **e'**) e ao segmento de reta [M'N'], sendo que **Q** é o centro da rotação do ponto **M'**. O ponto **Q** é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta **e'**) com o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto **M'** (e cuja identificação se omitiu). Nesse sentido, o ponto **Q** é o ponto da reta **e'** que tem o afastamento do ponto **M'**.

Para transformar o segmento de reta [M'N'] num segmento de reta fronto-horizontal, [M'<sub>2</sub>N'<sub>2</sub>] (a Projeção frontal do segmento [M'N']), após a rotação, tem de ficar paralela ao eixo **X**. Assim, porque o segmento [QM'] é perpendicular a [M'N'], o segmento [QM'] tem de rodar até ficar vertical – o ponto **M'**, após a rotação, tem de ficar na vertical que passa pelo ponto **Q**. O arco da rotação do ponto **M'** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois está contido num plano frontal (de frente). Assim, com o compasso, fazendo centro em Q<sub>2</sub> (a Projeção frontal do ponto **Q**) e com raio até M'<sub>2</sub> (a Projeção frontal do ponto **M'**), desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de **M'** até à vertical que passa por Q<sub>2</sub> e na qual se situa M''<sub>2</sub>. Uma vez que a rotação do ponto **M'** se processa num plano frontal (de frente), o ponto **M'** mantém o seu afastamento – M''<sub>1</sub> situa-se na paralela ao eixo **X** que passa por M'<sub>1</sub> (e que corresponde ao plano frontal que contém o arco da rotação do ponto **M'**). O ponto M'' é o ponto **M'** rodado.

Efetuada a rotação de [QM'], sabe-se que a Projeção frontal da reta suporte do segmento, após a rotação, passa por M''<sub>2</sub> e é perpendicular a [Q<sub>2</sub>M''<sub>2</sub>], pelo que fica paralela ao eixo **X** (que era precisamente o pretendido). Em seguida, rodou-se o ponto **N'** ao longo do plano frontal (de frente) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que N''<sub>2</sub> fique sobre a Projeção frontal da reta suporte do segmento, ou seja, até que N''<sub>2</sub> fique sobre a paralela ao eixo **X** que passa por M''<sub>2</sub>. Não se identificou o centro do arco da rotação do ponto **N'** nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto **N'** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois também está contido num plano frontal) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com Q<sub>2</sub> ≡ (e'<sub>2</sub>).

Assim, com o compasso, fazendo centro em e'<sub>2</sub> e raio até N'<sub>2</sub>, desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de **N'** até à paralela ao eixo **X** que passa por N''<sub>2</sub>, sobre a qual se situa N''<sub>2</sub> (N'' é o ponto **N'** rodado). A rotação do ponto **N'** processa-se ao longo do plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação, pelo que N''<sub>1</sub> (a Projeção horizontal do ponto **N'** rodado) se situa na paralela ao eixo **X** que passa por N'<sub>1</sub> (o ponto **N'** mantém o seu afastamento, na rotação efetuada).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se as projeções do segmento  $[M''N'']$ , que é um segmento de reta fronto-horizontal – o segmento  $[M''N'']$  é o segmento  $[M'N']$ , após a rotação. Note que o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $M'$  é o mesmo plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $N'$  e é, ainda, o plano frontal (de frente) que contém o segmento de reta  $[M'N']$  (bem como o segmento de reta  $[M''N'']$ ).

**Determinação da verdadeira grandeza do segmento de reta  $[MN]$ :**

Como o segmento, agora, já está paralelo a ambos os planos de Projeção, a verdadeira grandeza de  $\overline{MN}$  está tanto na Projeção frontal do segmento  $[M''N'']$  como na sua Projeção horizontal –  $\overline{A''_2B''_2} = \overline{A''_1B''_1}$  é a verdadeira grandeza do segmento de reta  $[MN]$ . Note que a verdadeira grandeza do segmento já estava na Projeção frontal do segmento  $[M'N']$  (que já era um segmento de reta frontal), mas o enunciado pede especificamente para determinar a verdadeira grandeza do segmento, transformando-o previamente num segmento de reta fronto-horizontal. Por essa razão se assinalou a verdadeira grandeza do segmento apenas após a conclusão do pedido no enunciado.

**Traçado:**

As projeções do segmento de reta  $[MN]$  representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo  $X$  representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções dos segmentos de reta  $[M''N'']$  (um objetivo parcial do exercício) representam-se a **médio-forte**, pois é parte do pedido no exercício. No entanto, o objetivo final do exercício é a determinação da verdadeira grandeza do segmento, que está em ambas as projeções do segmento  $[M''N'']$ . Assim, no final, as duas projeções do segmento  $[M''N'']$  representaram-se a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$ , das projeções dos arcos de rotação, etc.).

## 227.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o segmento de reta  $[AB]$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto  $A$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). As projeções do ponto  $B$  situam-se na mesma linha de chamada das projeções do ponto  $A$ , pois o segmento  $[AB]$  é um segmento de reta de perfil.

**Resolução:**

O segmento de reta  $[AB]$  é um segmento de reta de perfil, pelo que não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção – o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas). Nesse sentido, para determinar a verdadeira grandeza do segmento, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

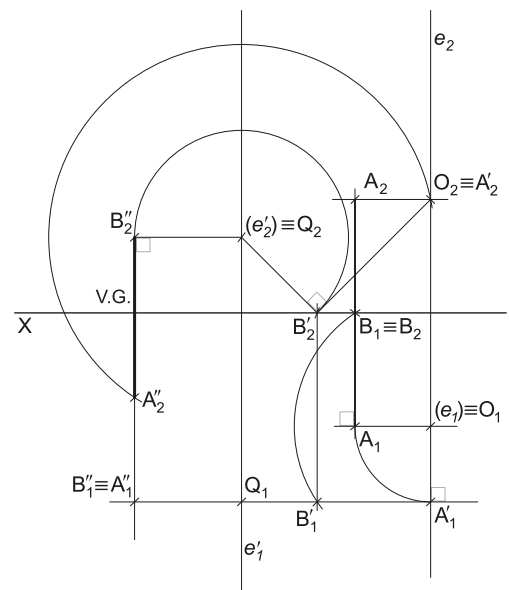
De acordo com o enunciado, pretende-se determinar a verdadeira grandeza do segmento de reta  $[AB]$ , transformando-o num segmento de reta vertical. Uma reta vertical é um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o segmento de reta  $[AB]$  num segmento de reta frontal (de frente).

**Transformação do segmento de reta  $[AB]$  num segmento de reta frontal (de frente):**

Para transformar o segmento de reta  $[AB]$  num segmento de reta frontal (de frente) é necessário efetuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se alteram, mantendo-se as suas cotas. Assim, os arcos de rotação dos pontos do segmento estão contidos em planos horizontais (de nível), pelo que o eixo da rotação é uma **reta vertical**. Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical – a reta  $e$ . Tenha em conta que, por uma questão de economia de traçados, se posicionou a reta  $e$  (o eixo de rotação) de forma que o ponto  $A$  é o ponto que nos permite rodar o segmento. De facto, o ponto  $A$  é o ponto do segmento de reta  $[AB]$ , tal que  $[OA]$  é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e$ ) e perpendicular ao segmento de reta  $[AB]$ , sendo que  $O$  é o centro da rotação do ponto  $A$ . O ponto  $O$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e$ ) com o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto  $A$  (e cuja identificação se omitiu). Nesse sentido, o ponto  $O$  é o ponto da reta  $e$  que tem a cota do ponto  $A$ .

Para transformar o segmento de reta  $[AB]$  num segmento de reta frontal (de frente),  $[A_1B_1]$  (a Projeção horizontal do segmento  $[AB]$ ), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento  $[OA]$  é perpendicular a  $[AB]$ , o segmento  $[OA]$  tem de rodar até ficar de topo – a Projeção frontal do ponto  $A$  ( $A_2$ ), após a rotação, tem de ficar coincidente com  $O_2$  (a Projeção frontal do ponto  $O$ ). O arco da rotação do ponto  $A$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois está contido num plano horizontal (de nível). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com raio até  $A_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $A$ ), desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $A$  até à vertical que passa por  $O_1$  e na qual se situa  $A'_1$  –  $A'$  é o ponto  $A$  rodado e  $A'_2$  fica imediatamente coincidente com  $O_2$  (tem-se imediatamente,  $A'_2 \equiv O_2$ ). Note que a rotação efetuada tem exatamente  $90^\circ$  de amplitude.

Efetuada a rotação de  $[OA]$ , sabe-se que a Projeção horizontal da reta suporte do segmento, após a rotação, passa por  $A'_1$  e é perpendicular a  $[O_1A'_1]$ , pelo que fica paralela ao eixo  $X$  (que era precisamente o pretendido). Em seguida, rodou-se o ponto  $B$  ao longo do plano horizontal (de nível) que o contém (que é o próprio Plano Horizontal de Projeção), em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $B'_1$  se situe sobre a Projeção horizontal da reta suporte do segmento, ou seja, até que  $B'_1$  fique sobre a paralela ao eixo  $X$  que passa por  $A'_1$ . Não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $B$  (que é, na prática, o traço horizontal da reta  $e$ ). O arco da rotação do ponto  $B$  está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_1 \equiv (e_1)$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e_1$  e raio até  $B_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação do ponto  $B$  até à paralela ao eixo  $X$  que passa por  $A'_1$ , sobre a qual se situa  $B'_1$  ( $B'$  é o ponto  $B$  rodado). A rotação do ponto  $B$  processa-se ao longo do Plano Horizontal de Projeção (pois  $B$  tem cota nula), pelo que  $B'_2$  (a Projeção frontal do ponto  $B$  rodado) se situa no eixo  $X$  (o ponto  $B$  mantém a sua cota, na rotação efetuada).

Em seguida, desenharam-se as projeções do segmento  $[A'B']$ , que é um segmento de reta frontal (de frente) – o segmento  $[A'B']$  é o segmento  $[AB]$ , após a rotação.

*Transformação do segmento de reta  $[A'B']$  num segmento de reta vertical:*

O segmento de reta  $[A'B']$  (o segmento de reta  $[AB]$  após a rotação) está paralelo ao Plano Frontal de Projeção (é um segmento de reta frontal) e é o segmento de reta  $[AB]$  rodado. Agora há que rodar o segmento, até o transformar num segmento de reta vertical, o que se processa com o recurso a uma segunda rotação. Tenha em conta que uma reta vertical é um caso particular das retas frontais (de frente) e que o segmento  $[A'B']$  já é um segmento de reta frontal (de frente).

Assim, para transformar o segmento de reta  $[A'B']$  num segmento de reta vertical é necessário efetuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se alteram, mantendo-se os seus afastamentos. Assim, os arcos de rotação dos pontos do segmento estão contidos em planos frontais (de frente), pelo que o eixo da rotação é uma **reta de topo**. Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta  $e'$ . Note que se localizou a reta  $e'$  de forma que, nesta segunda rotação, o ponto  $B'$  seja o ponto que nos permite rodar o segmento de reta. Assim, posicionou-se a reta  $e'$  (o segundo eixo de rotação) de forma que  $[QB']$  seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e'$ ) e ao segmento de reta  $[A'B']$ , sendo que  $Q$  é o centro da rotação do ponto  $B'$ . O ponto  $Q$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e'$ ) com o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $B'$  (e cuja identificação se omitiu). Nesse sentido, o ponto  $Q$  é o ponto da reta  $e'$  que tem o afastamento do ponto  $B'$ .

Para transformar o segmento de reta  $[A'B']$  num segmento de reta vertical,  $[A'_2B'_2]$  (a Projeção frontal do segmento  $[A'B']$ ), após a rotação, tem de ficar perpendicular ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento  $[QB']$  é perpendicular a  $[A'B']$ , o segmento  $[QB']$  tem de rodar até ficar paralelo ao eixo  $X$  – o ponto  $B'$ , após a rotação, tem de ficar com a cota do ponto  $Q$ . O arco da rotação do ponto  $B'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois está contido num plano frontal (de frente). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a Projeção frontal do ponto  $Q$ ) e com raio até  $B'_2$  (a Projeção frontal do ponto  $B'$ ), desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação do ponto  $B'$  até à paralela ao eixo  $X$  que passa por  $Q_2$  e na qual se situa  $B''_2$ . Tenha em conta que se optou pela maior amplitude da rotação, para evitar a sobreposição de traçados – de facto, havia uma rotação com menor amplitude que nos permitira transformar o segmento  $[A'B']$  num segmento vertical, mas essa rotação implicaria uma grande sobreposição de traçados, que se optou por evitar. Uma vez que a rotação do ponto  $B'$  se processa num plano frontal (de frente), o ponto  $B'$  mantém o seu afastamento –  $B''_1$  situa-se na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $B'_1$  e que corresponde ao plano frontal de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $B'$  (e que não se identificou). O ponto  $B''$  é o ponto  $B'$  rodado.

Efetuada a rotação de  $[QB']$ , sabe-se que a Projeção frontal da reta suporte do segmento, após a rotação, passa por  $B''_2$  e é perpendicular a  $[Q_2B''_2]$ , pelo que fica perpendicular ao eixo  $X$  (que era precisamente o pretendido). Em seguida, rodou-se o ponto  $A'$  ao longo do plano frontal (de frente) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $A''_2$  se situe sobre a Projeção frontal da reta suporte do segmento, ou seja, até que  $A''_2$  fique sobre a perpendicular ao eixo  $X$  que passa por  $B''_2$ . Não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $A'$ , nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $A'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois também está contido num plano frontal) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $Q_2 \equiv (e'_2)$ .

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e'_2$  e raio até  $A'_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação do ponto  $A'$  até à perpendicular ao eixo  $X$  que passa por  $B''_2$ , sobre a qual se situa  $A''_2$  ( $A''$  é o ponto  $A'$  rodado). A rotação do ponto  $A'$  processa-se ao longo do plano frontal (de nível) que contém o arco da sua rotação, pelo que  $A''_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $A'$  rodado) se situa na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $A'_1$  (o ponto  $A'$  mantém o seu afastamento, na rotação efetuada). Note que, após a rotação efetuada, a Projeção horizontal do ponto  $A''$  ( $A''_1$ ) está coincidente com a Projeção horizontal do ponto  $B''$  ( $B''_1$ ).

Em seguida, desenharam-se as projeções do segmento  $[A''B'']$ , que é um segmento de reta vertical – o segmento  $[A''B'']$  é o segmento  $[A'B']$ , após a rotação. Note que o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $A'$  é o mesmo plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $B'$  e é, ainda, o plano frontal (de frente) que contém o segmento de reta  $[A'B']$  (bem como o segmento de reta  $[A''B'']$ ).

*Determinação da verdadeira grandeza do segmento de reta  $[AB]$ :*

Como o segmento, agora, já está paralelo ao Plano Frontal de Projeção, a verdadeira grandeza de  $\overline{AB}$  está na Projeção frontal do segmento  $[A''B'']$  –  $\overline{A''_2B''_2}$  é a verdadeira grandeza do segmento de reta  $[AB]$ . Note que a verdadeira grandeza do segmento já estava na Projeção frontal do segmento  $[A'B']$  (que já era um segmento de reta frontal), mas o enunciado pede especificamente para determinar a verdadeira grandeza do segmento, transformando-o previamente num segmento de reta vertical. Por essa razão se assinalou a verdadeira grandeza do segmento apenas após a conclusão do pedido no enunciado.

### Traçado:

As projeções do segmento de reta  $[AB]$  representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo  $X$  representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções dos segmentos de reta  $[A''B'']$  (um objetivo parcial do exercício) representam-se a **médio-forte**, pois é parte do pedido no exercício. No entanto, o objetivo final do exercício é a determinação da verdadeira grandeza do segmento, que está na Projeção frontal do segmento  $[A''B'']$ . Assim, a Projeção frontal do segmento  $[A''B'']$  (o segmento  $[A''_2B''_2]$ ) representou-se a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$ , das projeções dos arcos de rotação, etc.).





(continuação da página anterior)

Nesse sentido, determinou-se um outro ponto da reta  $s$  (o ponto  $B$ , por exemplo) e efetuou-se a sua rotação. A rotação do ponto  $B$  processou-se ao longo do plano horizontal (de nível) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $B'_1$  fique sobre a Projeção horizontal da reta  $s'$  ( $s'_1$ ). Não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $B$  nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $B$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois também está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_1 \equiv (e_1)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e_1$  e raio até  $B_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $B$  até  $s'_1$  (a Projeção horizontal da reta  $s'$ ), sobre a qual se situa  $B'_1$  ( $B'$  é o ponto  $B$  rodado). A rotação do ponto  $B$  processa-se ao longo do plano horizontal (de nível) que o contém, pelo que  $B'_2$  (a Projeção frontal do ponto  $B$  rodado) se situa na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $B_2$  (o ponto  $B$  mantém a sua cota, na rotação efetuada).

Por fim, desenhou-se a Projeção frontal da reta  $s'$  ( $s'_2$ ), que está definida por dois pontos – os pontos  $A'_2$  e  $B'_2$ . A reta  $s'$  é a reta  $s$  rodada e é uma reta frontal (de frente), pois está paralela ao Plano Frontal de Projeção.

#### Transformação da reta $s'$ numa reta fronto-horizontal:

Para transformar a reta  $s'$  numa reta fronto-horizontal, é necessário efetuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se alteram, mantendo-se os seus afastamentos. Nesse sentido, os arcos de rotação dos pontos da reta  $s'$  têm de estar contidos em planos frontais (de frente), para que se mantenham os afastamentos, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma reta de topo (o eixo da rotação é ortogonal aos planos que contém os arcos da rotação).

Dessa forma, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta  $e'$ . Note que se localizou a reta  $e'$  de forma que o ponto  $A'$  seja o ponto que nos permite rodar a reta. Nesse sentido, posicionou-se a reta  $e'$  (o eixo da segunda rotação) de forma que  $[QA']$  seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e'$ ) e à reta  $s'$ , sendo que  $Q$  é o centro da rotação do ponto  $A'$ . O ponto  $Q$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e'$ ) com o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $A'$  (e cuja identificação se omitiu). Note, no entanto, que o ponto  $Q$  é o ponto da reta  $e'$  que tem o afastamento do ponto  $A'$ .

Para transformar a reta  $s'$  numa reta fronto-horizontal, a Projeção frontal da reta  $s'$  ( $s'_2$ ), após a rotação, tem de ficar paralela ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento  $[QA']$  é perpendicular à reta  $s'$ , o segmento  $[QA']$  tem de rodar até ficar vertical, ou seja, tem de rodar até a Projeção horizontal do ponto  $A'$  ( $A'_1$ ), após a rotação, estar coincidente com  $Q_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $Q$ ). O arco da rotação do ponto  $A'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois está contido num plano frontal (de frente). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a Projeção frontal do ponto  $Q$ ) e com raio até  $A'_2$  (a Projeção frontal do ponto  $A'$ ), desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de  $A'$  até à vertical que passa por  $Q_2$  e na qual se situa  $A''_2 - A''_1$  determina-se imediatamente, pois o ponto  $A'$  mantém o seu afastamento ( $A''_1$  fica imediatamente coincidente com  $Q_1$ ). O ponto  $A''$  é o ponto  $A'$  rodado.

Efetuada a rotação de  $[QA']$ , sabe-se que a Projeção frontal da reta  $s'$ , após a rotação ( $s''_2$ ), passa por  $A''_2$  e é perpendicular ao segmento  $[Q_2A''_2]$ , sendo  $s''$  a reta  $s'$  rodada. Note que, pelo exposto,  $s''_2$  (a Projeção frontal da reta  $s'$  rodada) fica paralela ao eixo  $X$ , que era o pretendido. Neste momento, já temos um ponto para definir a reta  $s''$  – o ponto  $A''$ . Por outro lado, temos também a direção da reta  $s''$  – é uma reta fronto-horizontal (a reta foi transformada numa reta fronto-horizontal). Assim, a reta  $s''$  está definida por um ponto (o ponto  $A''$ ) e uma direção (é fronto-horizontal), o que nos permitiu determinar imediatamente a sua Projeção horizontal ( $s''_1$ ). Nesse sentido, não foi necessário efetuar a rotação do ponto  $B'$ , para se definir a reta  $s''$ .

A reta  $s''$  é a reta  $s$  pós a segunda rotação e é uma reta fronto-horizontal, pois é simultaneamente paralela ao Plano Horizontal de Projeção e paralela ao Plano Frontal de Projeção.

#### Traçado:

As projeções da reta  $s$  representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo  $X$  representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções da reta  $s''$  (a reta  $s$  após as duas rotações) representaram-se a **forte**, pois é o objetivo do exercício (é o pedido). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$ , das projeções dos arcos de rotação, das projeções da reta  $s'$ , etc.) ou são linhas de chamada.



## 230.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $v$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se transformar a reta  $v$  numa **reta oblíqua**. Uma reta vertical (a reta dada) é um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção). Assim, antes de transformar a reta  $v$  numa reta oblíqua, é necessário transformá-la no caso geral do «grupo» de retas a que pertence, ou seja, transformá-la numa **reta frontal (de frente)**.

#### Transformação da reta $v$ numa reta frontal (de frente):

Para transformar a reta  $v$  numa **reta frontal (de frente)**, é necessário efetuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se alteram, mantendo-se os seus afastamentos (uma reta vertical e uma reta frontal são, ambas, paralelas ao Plano Frontal de Projeção). Nesse sentido, os arcos de rotação dos pontos da reta  $v$  têm de estar contidos em planos frontais (de frente), para que se mantenham os afastamentos, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma **reta de topo** (o eixo da rotação é ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação). Na prática, a rotação da reta  $v$  processa-se num mesmo plano frontal (de frente) – o plano frontal (de frente) que contém a reta  $v$ .

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta  $e$ . Em seguida, determinou-se o ponto que nos permite rodar a reta  $v$  – o ponto  $A$ . Note que  $[OA]$  é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e$ ) e à reta  $v$ , sendo que  $O$  é o centro da rotação do ponto  $A$ . O ponto  $O$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e$ ) com o plano frontal (de frente) que contém a rotação do ponto  $A$  (e da própria reta  $v$ ) – tenha em conta que se omitiu a identificação desse plano frontal (de frente). Assim, o ponto  $O$  é o ponto da reta  $e$  que tem o afastamento do ponto  $A$  (e da reta  $v$ ).

Qualquer rotação da reta  $v$  em torno do eixo de rotação  $e$  transforma a reta  $v$  numa reta frontal (de frente). Assim, efetuou-se uma rotação qualquer da reta  $v$ . Por outro lado, o arco da rotação do ponto  $A$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois está contido num plano frontal (de frente). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a Projeção frontal do ponto  $O$ ) e com raio até  $A_2$  (a Projeção frontal do ponto  $A$ ), desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de  $A$ , com ma amplitude qualquer, com vista a fazer com que  $v_2$  (a Projeção frontal da reta  $v$ ) fique oblíqua ao eixo  $X$ . Para tal, o segmento  $[O_2A_2]$  roda uma amplitude qualquer, evitando toda e qualquer situação de paralelismo ou perpendicularidade em relação ao eixo  $X$ , o que nos permitiu determinar  $A'_2 - A'_1$  mantém o afastamento e situa-se na linha de chamada de  $A'_2$ . O ponto  $A'$  é o ponto  $A$  rodado.

Assim, o ponto  $A$  rodou até  $[O_2A'_2]$  (a Projeção frontal do segmento  $[OA']$ ) ficar oblíquo ao eixo  $X$ . Efetuada a rotação do segmento  $[OA]$ , sabe-se que a Projeção frontal da reta  $v$ , após a rotação ( $v'_2$ ), passa por  $A'_2$  e é perpendicular ao segmento  $[O_2A'_2]$ , sendo  $v'$  a reta  $v$  rodada. Note que a obliquidade da reta  $v'_2$  em relação ao eixo  $X$  pode ser qualquer, desde que se mantenha a perpendicularidade em relação ao segmento  $[O_2A'_2]$  – daí o facto de a rotação do ponto  $A$  poder ter uma amplitude qualquer. Neste momento, já temos um ponto para definir a reta  $v'$  – o ponto  $A'$ . Falta-nos outro ponto para definir a reta  $v'$ .

Nesse sentido determinou-se um outro ponto da reta  $v$  (o ponto  $B$ , por exemplo) e efetuou-se a sua rotação. A rotação do ponto  $B$  processou-se ao longo do plano frontal (de frente) que o contém (e que contém a reta  $v$ ), em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $B'_2$  fique sobre a Projeção frontal da reta  $v'$  ( $v'_2$ ) – note que não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $B$ . O arco da rotação do ponto  $B$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (o arco está contido num plano frontal) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_2 \equiv (e_2)$ .

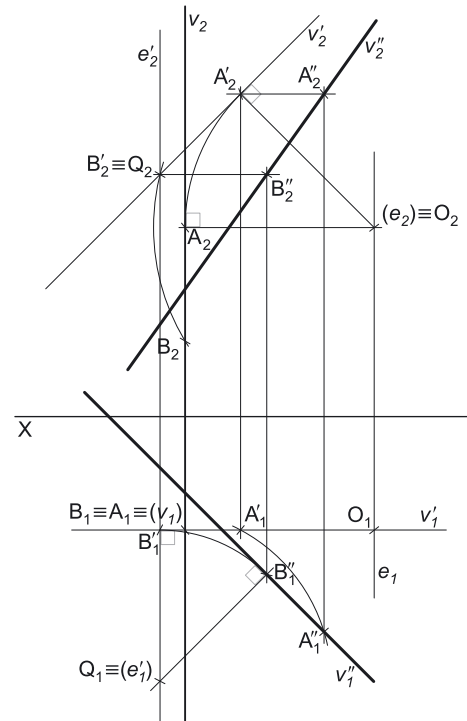
Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e_2$  e raio até  $B_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação do ponto  $B$  até  $v'_2$  (a Projeção frontal da reta  $v'$ ), sobre a qual se situa  $B'_2$  ( $B'$  é o ponto  $B$  rodado). A rotação do ponto  $B$  processa-se ao longo do plano frontal (de frente) que contém a reta  $v$ , pelo que  $B'_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $B$  rodado) se situa na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $B'_1$  (o ponto  $B$  mantém o seu afastamento, na rotação efetuada).

Por fim, desenhou-se a Projeção horizontal da reta  $v'$  ( $v'_1$ ), que está definida por dois pontos – os pontos  $A'_1$  e  $B'_1$ . A reta  $v'$  é a reta  $v$  rodada e é uma reta frontal (de frente), pois está paralela ao Plano Frontal de Projeção e oblíqua ao Plano Horizontal de Projeção.

#### Transformação da reta $v'$ numa reta oblíqua cuja Projeção horizontal faz, com o eixo $X$ , um ângulo de $45^\circ$ (a.e.):

Para transformar a reta  $v'$  numa **reta oblíqua** (a reta  $v'$  é uma reta frontal), é necessário efetuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se alteram, mantendo-se as suas cotas. Nesse sentido, os arcos de rotação dos pontos da reta  $v'$  têm de estar contidos em planos horizontais (de nível), para que se mantenham as cotas, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma **reta vertical** (o eixo da rotação é ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical – a reta  $e'$ . Note que se localizou a reta  $e'$  de forma que o ponto  $B'$  seja o ponto que nos permite rodar a reta. Nesse sentido, posicionou-se a reta  $e'$  (o eixo da segunda rotação) de forma que  $[QB']$  seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e'$ ) e à reta  $v'$ , sendo que  $Q$  é o centro da rotação do ponto  $B'$ . O ponto  $Q$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e'$ ) com o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto  $B'$  (cuja identificação se omitiu). Nesse sentido, o ponto  $Q$  é o ponto da reta  $e'$  que tem a cota do ponto  $B'$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para transformar a reta  $v'$  numa reta oblíqua cuja Projeção horizontal faz, com o eixo  $X$  um ângulo de  $45^\circ$  (de abertura **para a direita**), o segmento  $[QB']$  tem de rodar até que a sua Projeção horizontal (o segmento  $[Q_1B'_1]$ ) faça, com o eixo  $X$ , um ângulo de  $45^\circ$  (de abertura **para a esquerda**), porque o segmento  $[QB']$  é perpendicular à reta  $v'$ . O arco da rotação do ponto  $B'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois está contido num plano horizontal (de nível). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $Q$ ) e com raio até  $B'_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $B'$ ), desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $B'$ , obtendo  $B''_1$  em função da rotação atrás referida –  $B''_2$  determina-se imediatamente, pois o ponto  $B'$  mantém a sua cota. O ponto  $B''$  é o ponto  $B'$  rodado.

Efetuada a rotação de  $[QB']$ , sabe-se que a Projeção horizontal da reta  $v'$ , após a rotação ( $v''_1$ ), passa por  $B''_1$  e é perpendicular ao segmento  $[Q_1B''_1]$ , sendo  $v''$  a reta  $v'$  rodada. Note que, pelo exposto,  $v''_1$  (a Projeção horizontal da reta  $v'$  rodada) faz, com o eixo  $X$ , o ângulo pretendido – um ângulo de  $45^\circ$  (de abertura **para a esquerda**). Neste momento, já temos um ponto para definir a reta  $v''$  – o ponto  $B''$ . Falta-nos outro ponto para definir a reta  $v''$ . O ponto em falta é o ponto  $A'$ , cuja rotação nos permitirá definir a reta  $v''$ .

Assim, rodou-se o ponto  $A'$  ao longo do plano horizontal (de nível) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $A''_1$  se situe sobre  $v''_1$  (a Projeção horizontal da reta  $v'$ , rodada). Não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $A'$ , nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $A'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois também está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $Q_1 \equiv (e'_1)$ .

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e'_1$  e raio até  $A'_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação do ponto  $A'$  até à Projeção horizontal da reta  $v''$  (até  $v''_1$ ), sobre a qual se situa  $A''_1$  ( $A''$  é o ponto  $A'$  rodado). A rotação do ponto  $A'$  processa-se ao longo do plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação, pelo que  $A''_2$  (a Projeção frontal do ponto  $A'$  rodado) se situa na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $A'_2$  (o ponto  $A'$  mantém a sua cota, na rotação efetuada), na linha de chamada de  $A''_1$ . Já temos o ponto que nos faltava, para definir a reta  $v''$  (a reta  $v'$  rodada).

Assim, desenhou-se a Projeção frontal da reta  $v''$  ( $v''_2$ ), passando por  $A''_2$  e por  $B''_2$ . A reta  $v''$  é a reta  $v$  após a segunda rotação e é uma reta oblíqua que faz, em Projeção horizontal, um ângulo de  $45^\circ$  (a.d.) com o eixo  $X$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $v$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (pois é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta  $v''$  (a reta  $v$  após as duas rotações) representaram-se a **forte**, pois é o objetivo do exercício (é o pedido). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$ , das projeções dos arcos de rotação, das projeções da reta  $r'$ , etc.).

## 231.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $p$ , de perfil, está definida por dois pontos (os pontos  $A$  e  $B$ ), apesar de as suas projeções não verificarem o **Critério de Reversibilidade**.

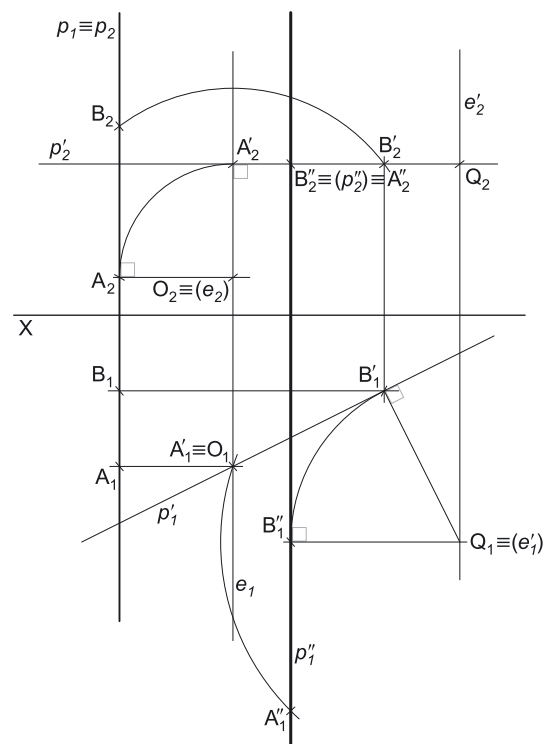
#### Resolução:

Pretende-se transformar a reta  $p$  numa **reta de topo**. Uma reta de topo é um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar a reta  $p$  numa **reta horizontal (de nível)**.

#### Transformação da reta $p$ numa reta horizontal (de nível):

Para transformar a reta  $p$  numa **reta horizontal (de nível)**, é necessário efetuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se alteram, mantendo-se os seus afastamentos. Nesse sentido, os arcos de rotação dos pontos da reta  $p$  têm de estar contidos em planos frontais (de frente), para que se mantenham os afastamentos, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma **reta de topo** (o eixo da rotação é ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta  $e$ . Note que se localizou a reta  $e$  de forma que o ponto  $A$  seja o ponto que nos permite rodar a reta. Nesse sentido, posicionou-se a reta  $e$  (o eixo de rotação) de forma que  $[OA]$  seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e$ ) e à reta  $p$ , sendo que  $O$  é o centro da rotação do ponto  $A$ . O ponto  $O$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e$ ) com o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $A$  (e cuja identificação se omitiu). Note, nesse sentido, que o ponto  $O$  é o ponto da reta  $e$  que tem o afastamento do ponto  $A$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para transformar a reta  $p$  numa reta horizontal (de nível), a Projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ), após a rotação, tem de ficar paralela ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento  $[OA]$  é perpendicular à reta  $p$ , o segmento  $[OA]$  tem de rodar até ficar vertical, ou seja, tem de rodar até a Projeção horizontal do ponto  $A$  ( $A_1$ ), após a rotação, ficar coincidente com  $O_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $O$ ). O arco da rotação do ponto  $A$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois está contido num plano frontal (de frente). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a Projeção frontal do ponto  $O$ ) e com raio até  $A_2$  (a Projeção frontal do ponto  $A$ ), desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de  $A$  até à linha de chamada do ponto  $O$  e na qual se situa  $A'_2 - A'_1$  fica imediatamente coincidente com  $O_1$ . Note que a rotação efetuada tem exatamente  $90^\circ$  de amplitude. O ponto  $A'$  é o ponto  $A$  rodado.

Efetuada a rotação de  $[OA]$ , sabe-se que a Projeção frontal da reta  $p$ , após a rotação ( $p'_2$ ), passa por  $A'_2$  e é perpendicular ao segmento  $[O_2A'_2]$ , sendo  $p'$  a reta  $p$  rodada. Note que, pelo exposto,  $p'_2$  (a Projeção frontal da reta  $p$  rodada) fica paralela ao eixo  $X$ , que era o pretendido. Neste momento, já temos um ponto para definir a reta  $p'$  – o ponto  $A'$ . Falta-nos outro ponto para definir a reta  $p'$ .

Nesse sentido, foi necessário rodar o ponto  $B$  (o outro ponto que define a reta  $p$ ). A rotação do ponto  $B$  processou-se ao longo do plano frontal (de frente) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $B'_2$  fique sobre a Projeção frontal da reta  $p'$  ( $p'_2$ ) – note que não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $B$ , nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $B$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (o arco está contido num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_2 \equiv (e_2)$ .

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e_2$  e raio até  $B_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação do ponto  $B$  até  $p'_2$  (a Projeção frontal da reta  $p'$ ), sobre a qual se situa  $B'_2$  ( $B'$  é o ponto  $B$  rodado). A rotação do ponto  $B$  processa-se ao longo de um plano frontal (de frente), pelo que  $B'_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $B$  rodado) se situa na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $B_1$  (o ponto  $B$  mantém o seu afastamento, na rotação efetuada).

Por fim, desenhou-se a Projeção horizontal da reta  $p'$  ( $p'_1$ ), que está definida por dois pontos – os pontos  $A'_1$  e  $B'_1$ . A reta  $p'$  é a reta  $p$  rodada e é uma reta horizontal (de nível), pois está paralela ao Plano Horizontal de Projeção.

### Transformação da reta $p'$ numa reta de topo:

Para transformar a reta  $p'$  numa reta de topo, é necessário efetuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se alteram, mantendo-se as suas cotas. Nesse sentido, os arcos de rotação dos pontos da reta  $p'$  têm de estar contidos em planos horizontais (de nível), para que se mantenham as cotas, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma reta vertical (o eixo da rotação é ortogonal aos planos que contém os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical – a reta  $e'$ . Note que se localizou a reta  $e'$  de forma que o ponto  $B'$  seja o ponto que nos permite rodar a reta. Nesse sentido, posicionou-se a reta  $e'$  (o eixo da segunda rotação) de forma que  $[QB']$  seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e'$ ) e à reta  $p'$ , sendo que  $Q$  é o centro da rotação do ponto  $B'$ . O ponto  $Q$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e'$ ) com o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto  $B'$  (cuja identificação se omitiu). Nesse sentido, o ponto  $Q$  é o ponto da reta  $e'$  que tem a cota do ponto  $B'$ .

Para transformar a reta  $p'$  numa reta de topo, a Projeção horizontal da reta  $p'$  ( $p'_1$ ), após a rotação, tem de ficar perpendicular ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento  $[QB']$  é perpendicular à reta  $p'$ , o segmento  $[QB']$  tem de rodar até ficar fronto-horizontal, ou seja, tem de rodar até a Projeção horizontal do ponto  $B'$  ( $B'_1$ ), após a rotação, ter o mesmo afastamento de  $Q_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $Q$ ). O arco da rotação do ponto  $B'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois está contido num plano horizontal (de nível). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $Q$ ) e com raio até  $B'_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $B'$ ), desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $B'$  até à linha horizontal que passa por  $Q_1$  e na qual se situa  $B''_1 - B''_2$  determina-se imediatamente, pois o ponto  $B'$  mantém a sua cota. O ponto  $B''$  é o ponto  $B'$  rodado.

Efetuada a rotação de  $[QB']$ , sabe-se que a Projeção horizontal da reta  $p'$ , após a rotação ( $p''_1$ ), passa por  $B''_1$  e é perpendicular ao segmento  $[Q_1B''_1]$ , sendo  $p''$  a reta  $p'$  rodada. Note que, pelo exposto,  $p''_1$  (a Projeção horizontal da reta  $p'$  rodada) fica perpendicular ao eixo  $X$ , que era o pretendido. Neste momento, já temos um ponto para definir a reta  $p''$  – o ponto  $B''$ . Por outro lado, temos também a direção da reta  $p''$  – é uma reta de topo (a reta foi transformada numa reta de topo). Assim, a reta  $p''$  está definida por um ponto (o ponto  $B''$ ) e uma direção (é de topo), o que nos permitiu determinar imediatamente a sua Projeção frontal ( $p''_2$ ), que se reduz a um ponto coincidente com  $B''_2$ . Nesse sentido, não foi necessário efetuar a rotação do ponto  $A'$ , para se definir a reta  $p''$ .

Ainda assim, optou-se por se rodar o ponto  $A'$ . Assim, rodou-se o ponto  $A'$  ao longo do plano horizontal (de nível) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $A''_1$  se situe sobre  $p''_1$  (a Projeção horizontal da reta  $p''$ , rodada). Não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $A'$ , nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $A'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois também está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $Q_1 \equiv (e'_1)$ .

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e'_1$  e raio até  $A'_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação do ponto  $A'$  até à perpendicular ao eixo  $X$  que passa por  $B''_1$ , sobre a qual se situa  $A''_1$  ( $A''$  é o ponto  $A'$  rodado). A rotação do ponto  $A'$  processa-se ao longo do plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação, pelo que  $A''_2$  (a Projeção frontal do ponto  $A'$  rodado) se situa na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $A'_2$  (o ponto  $A'$  mantém a sua cota, na rotação efetuada). Note que, após a rotação efetuada, a Projeção frontal do ponto  $A''$  ( $A''_2$ ) está coincidente com as projeções frontais do ponto  $B''$  e da reta  $p''$  pois a reta  $p''$ , após a segunda rotação, é uma reta de topo (uma reta projetante frontal) – tem-se, imediatamente,  $A''_2 \equiv (p''_2) \equiv B''_2$ .

A reta  $p''$  é a reta  $p$  após a segunda rotação e é uma reta de topo, pois é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção.

### Traçado:

As projeções da reta  $p$  representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo  $X$  representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções da reta  $p''$  (a reta  $p$  após as duas rotações) representaram-se a **forte**, pois é o objetivo do exercício (é o pedido). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$ , das projeções dos arcos de rotação, das projeções da reta  $p'$ , etc.).

## 232.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $p$ , de perfil, está definida por dois pontos (os pontos  $A$  e  $B$ ), apesar de as suas projeções não verificarem o **Critério de Reversibilidade**.

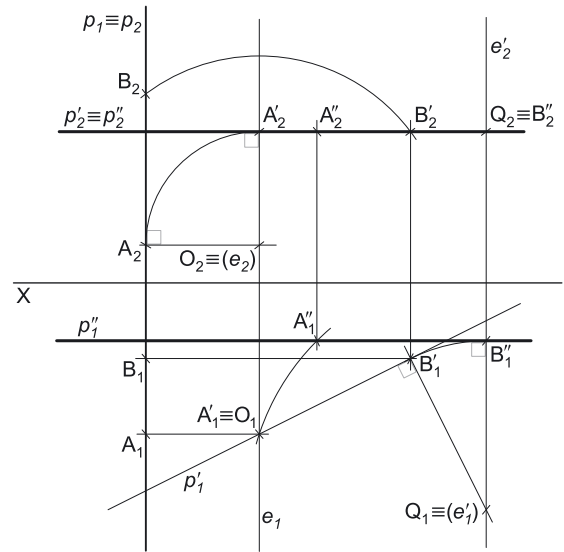
**Resolução:**

Pretende-se transformar a reta  $p$  numa **reta fronto-horizontal**. Uma reta fronto-horizontal é tanto um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é paralela ao Plano Horizontal de Projeção) como um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é paralela ao Plano Frontal de Projeção). Assim, antes de mais, há que a reta  $p$  numa reta horizontal (de nível) ou numa reta frontal (de frente).

Optou-se pela primeira hipótese – por transformar previamente a reta  $s$  numa **reta horizontal (de nível)**.

*Transformação da reta  $p$  numa reta horizontal (de nível):*

Para transformar a reta  $p$  numa **reta horizontal (de nível)**, é necessário efetuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se alteram, mantendo-se os seus afastamentos. Nesse sentido, os arcos de rotação dos pontos da reta  $p$  têm de estar contidos em planos frontais (de frente), para que se mantenham os afastamentos, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma **reta de topo** (o eixo da rotação é ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).



Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta  $e$ . Note que se localizou a reta  $e$  de forma que o ponto  $A$  seja o ponto que nos permite rodar a reta. Nesse sentido, posicionou-se a reta  $e$  (o eixo de rotação) de forma que  $[OA]$  seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e$ ) e à reta  $p$ , sendo que  $O$  é o centro da rotação do ponto  $A$ . O ponto  $O$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e$ ) com o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $A$  (e cuja identificação se omitiu). Note, nesse sentido, que o ponto  $O$  é o ponto da reta  $e$  que tem o afastamento do ponto  $A$ .

Para transformar a reta  $p$  numa reta horizontal (de nível), a Projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ), após a rotação, tem de ficar paralela ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento  $[OA]$  é perpendicular à reta  $p$ , o segmento  $[OA]$  tem de rodar até ficar vertical, ou seja, tem de rodar até a Projeção horizontal do ponto  $A$  ( $A_1$ ), após a rotação, ficar coincidente com  $O_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $O$ ). O arco da rotação do ponto  $A$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois está contido num plano frontal (de frente). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a Projeção frontal do ponto  $O$ ) e com raio até  $A_2$  (a Projeção frontal do ponto  $A$ ), desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de  $A$  até à linha de chamada do ponto  $O$  e na qual se situa  $A'_2 - A'_1$  fica imediatamente coincidente com  $O_1$ . Note que a rotação efetuada tem exatamente  $90^\circ$  de amplitude. O ponto  $A'$  é o ponto  $A$  rodado.

Efetuada a rotação de  $[OA]$ , sabe-se que a Projeção frontal da reta  $p$ , após a rotação ( $p'_2$ ), passa por  $A'_2$  e é perpendicular ao segmento  $[O_2A'_2]$ , sendo  $p'$  a reta  $p$  rodada. Note que, pelo exposto,  $p'_2$  (a Projeção frontal da reta  $p$  rodada) fica paralela ao eixo  $X$ , que era o pretendido. Neste momento, já temos um ponto para definir a reta  $p'$  – o ponto  $A'$ . Falta-nos outro ponto para definir a reta  $p'$ .

Nesse sentido, foi necessário rodar o ponto  $B$  (o outro ponto que define a reta  $p$ ). A rotação do ponto  $B$  processou-se ao longo do plano frontal (de frente) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $B'_2$  fique sobre a Projeção frontal da reta  $p'$  ( $p'_2$ ) – note que não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $B$ , nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $B$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (o arco está contido num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_2 \equiv (e_2)$ .

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e_2$  e raio até  $B_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação do ponto  $B$  até  $p'_2$  (a Projeção frontal da reta  $p'$ ), sobre a qual se situa  $B'_2$  ( $B'$  é o ponto  $B$  rodado). A rotação do ponto  $B$  processa-se ao longo de um plano frontal (de frente), pelo que  $B'_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $B$  rodado) se situa na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $B_1$  (o ponto  $B$  mantém o seu afastamento, na rotação efetuada).

Por fim, desenhou-se a Projeção horizontal da reta  $p'$  ( $p'_1$ ), que está definida por dois pontos – os pontos  $A'_1$  e  $B'_1$ . A reta  $p'$  é a reta  $p$  rodada e é uma reta horizontal (de nível), pois está paralela ao Plano Horizontal de Projeção.

*Transformação da reta  $p'$  numa reta fronto-horizontal:*

Para transformar a reta  $p'$  numa **reta fronto-horizontal**, é necessário efetuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se alteram, mantendo-se as suas cotas. Nesse sentido, os arcos de rotação dos pontos da reta  $p'$  têm de estar contidos em planos horizontais (de nível), para que se mantenham as cotas, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma **reta vertical** (o eixo da rotação é ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical – a reta  $e'$ . Note que se localizou a reta  $e'$  de forma que o ponto  $B'$  seja o ponto que nos permite rodar a reta. Nesse sentido, posicionou-se a reta  $e'$  (o eixo da segunda rotação) de forma que  $[QB']$  seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e'$ ) e à reta  $p'$ , sendo que  $Q$  é o centro da rotação do ponto  $B'$ . O ponto  $Q$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e'$ ) com o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto  $B'$  (cuja identificação se omitiu). Nesse sentido, o ponto  $Q$  é o ponto da reta  $e'$  que tem a cota do ponto  $B'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para transformar a reta  $p'$  numa reta fronto-horizantal, a Projeção horizontal da reta  $p'$  ( $p'_1$ ), após a rotação, tem de ficar paralela ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento  $[QB']$  é perpendicular à reta  $p'$ , o segmento  $[QB']$  tem de rodar até ficar de topo, ou seja, tem de rodar até a Projeção frontal do ponto  $B'$  ( $B'_2$ ), após a rotação, ficar coincidente com  $Q_2$  (a Projeção frontal do ponto  $Q$ ). O arco da rotação do ponto  $B'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois está contido num plano horizontal (de nível). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $Q$ ) e com raio até  $B'_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $B'$ ), desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $B'$  até à linha de chamada que passa por  $Q_1$  e na qual se situa  $B''_1 - B''_2$  determina-se imediatamente, pois o ponto  $B'$  mantém a sua cota ( $B''_2$  fica imediatamente coincidente com  $Q_2$ ). O ponto  $B''$  é o ponto  $B'$  rodado.

Efetuada a rotação de  $[QB']$ , sabe-se que a Projeção horizontal da reta  $p'$ , após a rotação ( $p''_1$ ), passa por  $B''_1$  e é perpendicular ao segmento  $[Q_1B''_1]$ , sendo  $p''$  a reta  $p'$  rodada. Note que, pelo exposto,  $p''_1$  (a Projeção horizontal da reta  $p'$  rodada) fica paralela ao eixo  $X$ , que era o pretendido. Neste momento, já temos um ponto para definir a reta  $p''$  – o ponto  $B''$ . Por outro lado, temos também a direção da reta  $p''$  – é uma reta fronto-horizantal (a reta foi transformada numa reta fronto-horizantal). Assim, a reta  $p''$  está definida por um ponto (o ponto  $B''$ ) e uma direção (é fronto-horizantal), o que nos permitiu determinar imediatamente a sua Projeção frontal ( $p''_2$ ), que está coincidente com  $p'_2$ . Nesse sentido, não é necessário efetuar a rotação do ponto  $A'$ , para se definir a reta  $p''$ .

Ainda assim, optou-se por se rodar o ponto  $A'$ . Assim, rodou-se o ponto  $A'$  ao longo do plano horizontal (de nível) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $A''_1$  se situe sobre  $p''_1$  (a Projeção horizontal da reta  $p'$ , rodada). Não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $A'$ , nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $A'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois também está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $Q_1 \equiv (e'_1)$ .

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e'_1$  e raio até  $A'_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação do ponto  $A'$  até à paralela ao eixo  $X$  que passa por  $B''_1$ , sobre a qual se situa  $A''_1$  ( $A''$  é o ponto  $A'$  rodado). A rotação do ponto  $A'$  processa-se ao longo do plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação, pelo que  $A''_2$  (a Projeção frontal do ponto  $A'$  rodado) se situa na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $A'_2$  (o ponto  $A'$  mantém a sua cota, na rotação efetuada).

A reta  $p''$  é a reta  $p$  pós a segunda rotação e é uma reta fronto-horizantal, pois é simultaneamente paralela ao Plano Horizontal de Projeção e paralela ao Plano Frontal de Projeção.

### Traçado:

As projeções da reta  $p$  representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo  $X$  representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções da reta  $p''$  (a reta  $p$  após as duas rotações) representaram-se a **forte**, pois é o objetivo do exercício (é o pedido). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$ , das projeções dos arcos de rotação, das projeções da reta  $p'$ , etc.).

## 233.

### Dados:

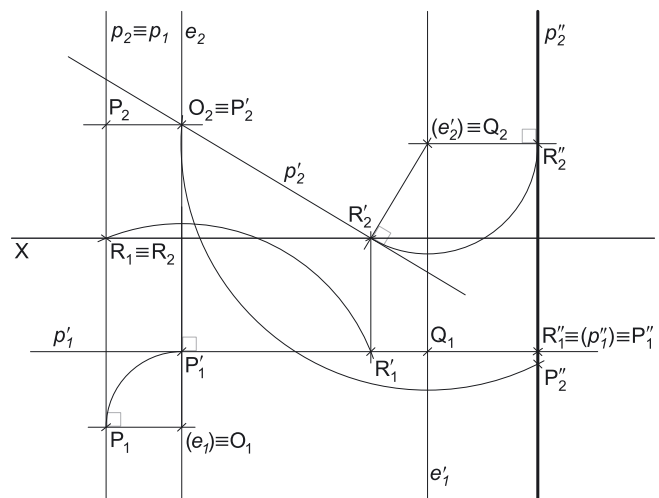
Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $p$ , de perfil, é uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto – o ponto  $R$ . Assim, a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $P$  e  $R$ ), apesar de as suas projeções não verificarem o **Critério de Reversibilidade**.

### Resolução:

Pretende-se transformar a reta  $p$  numa **reta vertical** com 3 cm de afastamento. Uma reta vertical é um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar a reta  $p$  numa **reta frontal (de frente)**. Por outro lado, uma vez que se pretende que a reta  $p''$  seja uma reta vertical com 3 cm de afastamento, é necessário rodar a reta  $p$ , de forma a transformá-la numa **reta frontal (de frente) com 3 cm de afastamento**.

### Transformação da reta $p$ numa reta frontal (de frente) com 3 cm de afastamento:

Para transformar a reta  $p$  numa **reta frontal (de frente)**, é necessário efetuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se alteram, mantendo-se as suas cotas. Nesse sentido, os arcos de rotação dos pontos da reta  $p$  têm de estar contidos em planos horizontais (de nível), para que se mantenham as cotas, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma **reta vertical** (o eixo da rotação é ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).



Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical – a reta  $e$ . Note que se localizou a reta  $e$  de forma que o ponto  $P$  seja o ponto que nos permite rodar a reta. Por outro lado, para se garantir que, após a rotação a reta  $p$  tenha 3 cm de afastamento, garantiu-se que o afastamento da reta  $e$  (o eixo da rotação) é **3 cm + x cm**, sendo os  $x$  cm a distância da reta  $e$  ao ponto  $P$  (o ponto que nos permite rodar a reta).

Nesse sentido, posicionou-se a reta  $e$  (o eixo de rotação) de forma que  $[OP]$  seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e$ ) e à reta  $p$ , sendo que  $O$  é o centro da rotação do ponto  $P$ . O ponto  $O$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e$ ) com o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto  $P$  (e cuja identificação se omitiu). Note, nesse sentido, que o ponto  $O$  é o ponto da reta  $e$  que tem a cota do ponto  $P$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para transformar a reta  $p$  numa reta frontal (de frente), a Projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), após a rotação, tem de ficar paralela ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento  $[OP]$  é perpendicular à reta  $p$ , o segmento  $[OP]$  tem de rodar até ficar de topo, ou seja, tem de rodar até a Projeção frontal do ponto  $P$  ( $P_2$ ), após a rotação, ficar coincidente com  $O_2$  (a Projeção frontal do ponto  $O$ ). O arco da rotação do ponto  $P$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois está contido num plano horizontal (de nível). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com raio até  $P_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $P$ ), desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $P$  até à linha de chamada do ponto  $O$  e na qual se situa  $P'_1 - P'_2$  fica imediatamente coincidente com  $O_2$ . O ponto  $P'$  é o ponto  $P$  rodado.

Efetuada a rotação de  $[OP]$ , sabe-se que a Projeção horizontal da reta  $p$ , após a rotação ( $p'_1$ ), passa por  $P'_1$  e é perpendicular ao segmento  $[O_1P'_1]$ , sendo  $p'$  a reta  $p$  rodada. Note que, pelo exposto,  $p'_1$  (a Projeção horizontal da reta  $p$  rodada) fica paralela ao eixo  $X$ , que era o pretendido. Mais ainda, a Projeção horizontal da reta  $p'$  ( $p'_1$ ) tem 3 cm de afastamento, como era pretendido. Neste momento, já temos um ponto para definir a reta  $p'$  – o ponto  $P'$ . Falta-nos outro ponto para definir a reta  $p'$ .

Nesse sentido, foi necessário rodar o ponto  $R$  (o outro ponto que define a reta  $p$ ). A rotação do ponto  $R$  processou-se ao longo do plano horizontal (de nível) que o contém (que é o próprio Plano Horizontal de Projeção, pois o ponto  $R$  em cota nula), em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $R'_1$  fique sobre a Projeção horizontal da reta  $p'$  ( $p'_1$ ) – note que não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $R$ . O arco da rotação do ponto  $R$  está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (o arco está contido no próprio Plano Horizontal de Projeção) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_1 \equiv (e_1)$ .

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e_1$  e raio até  $R_1$ , desenhou-se o arco da rotação do ponto  $R$  até  $P'_1$  (a Projeção horizontal da reta  $p'$ ), sobre a qual se situa  $R'_1$  ( $R'$  é o ponto  $R$  rodado). A rotação do ponto  $R$  processa-se ao longo do Plano Horizontal de Projeção, pelo que  $R'_2$  (a Projeção frontal do ponto  $R$  rodado) se situa no eixo  $X$  (o ponto  $R$  tem cota nula e mantém a sua cota, na rotação efetuada).

Por fim, desenhou-se a Projeção frontal da reta  $p'$  ( $p'_2$ ), que está definida por dois pontos – os pontos  $P'_2$  e  $R'_2$ . A reta  $p'$  é a reta rodada e é uma reta frontal (de frente), pois está paralela ao Plano Frontal de Projeção.

#### Transformação da reta $p'$ numa reta vertical:

Para transformar a reta  $p'$  numa reta vertical, é necessário efetuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se alteram, mantendo-se os seus afastamentos. Nesse sentido, os arcos de rotação dos pontos da reta  $p'$  têm de estar contidos em planos frontais (de frente), para que se mantenham os afastamentos, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma reta de topo (o eixo da rotação é ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta  $e'$ . Note que se localizou a reta  $e'$  de forma que o ponto  $R'$  seja o ponto que nos permite rodar a reta. Nesse sentido, posicionou-se a reta  $e'$  (o eixo da segunda rotação) de forma que  $[QR']$  seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e'$ ) e à reta  $p'$ , sendo que  $Q$  é o centro da rotação do ponto  $R'$ . O ponto  $Q$  é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e'$ ) com o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $R'$  (cuja identificação se omitiu). Nesse sentido, o ponto  $Q$  é o ponto da reta  $e'$  que tem o afastamento do ponto  $R'$ .

Para transformar a reta  $p'$  numa reta vertical, a Projeção frontal da reta  $p'$  ( $p'_2$ ), após a rotação, tem de ficar perpendicular ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento  $[QP']$  é perpendicular à reta  $p'$ , o segmento  $[QP']$  tem de rodar até ficar fronto-horizontal, ou seja, tem de rodar até a Projeção frontal do ponto  $R'$  ( $R'_2$ ), após a rotação, ter a mesma cota de  $Q_2$  (a Projeção frontal do ponto  $Q$ ). O arco da rotação do ponto  $R'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois está contido num plano frontal (de frente). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a Projeção frontal do ponto  $Q$ ) e com raio até  $R'_2$  (a Projeção frontal do ponto  $R'$ ), desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de  $R'$  até à linha horizontal que passa por  $Q_2$  e na qual se situa  $R''_2 - R''_1$  determina-se imediatamente, pois o ponto  $R'$  mantém o seu afastamento. O ponto  $R''$  é o ponto  $R'$  rodado.

Efetuada a rotação de  $[QR']$ , sabe-se que a Projeção frontal da reta  $p'$ , após a rotação ( $p''_2$ ), passa por  $R''_2$  e é perpendicular ao segmento  $[Q_2R''_2]$ , sendo  $p''$  a reta  $p'$  rodada. Note que, pelo exposto,  $p''_2$  (a Projeção frontal da reta  $p'$  rodada) fica perpendicular ao eixo  $X$ , que era o pretendido. Neste momento, já temos um ponto para definir a reta  $p''$  – o ponto  $R''$ . Por outro lado, temos também a direção da reta  $p''$  – é uma reta vertical (a reta foi transformada numa reta vertical). Assim, a reta  $p''$  está definida por um ponto (o ponto  $R''$ ) e uma direção (é vertical), o que nos permitiu determinar imediatamente a sua Projeção horizontal ( $p''_1$ ), que se reduz a um ponto coincidente com  $R''_1$ . Nesse sentido, não foi necessário efetuar a rotação do ponto  $P'$ , para se definir a reta  $p''$ .

Ainda assim, optou-se por se rodar o ponto  $P'$ . Assim, rodou-se o ponto  $P'$  ao longo do plano frontal (de frente) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que  $P''_2$  se situe sobre  $p''_2$  (a Projeção frontal da reta  $p'$  rodada). Não se identificou o centro do arco da rotação do ponto  $P'$ , nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $P'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois também está contido num plano frontal) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $Q_2 \equiv (e'_2)$ .

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e'_2$  e raio até  $P'_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação do ponto  $P'$  até à perpendicular ao eixo  $X$  que passa por  $R''_2$ , sobre a qual se situa  $P''_2$  ( $P''$  é o ponto  $P'$  rodado). A rotação do ponto  $P'$  processa-se ao longo do plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação, pelo que  $P''_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $P'$  rodado) se situa na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $P'_1$  (o ponto  $P'$  mantém o seu afastamento, na rotação efetuada). Note que, após a rotação efetuada, a Projeção horizontal do ponto  $P''$  ( $P''_1$ ) está coincidente com as projeções horizontais do ponto  $R''$  e da reta  $p''$  pois a reta  $p''$ , após a segunda rotação, é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal) – tem-se, imediatamente,  $R''_1 \equiv (p''_1) \equiv P''_1$ .

A reta  $p''$  é a reta  $p$  após a segunda rotação e é uma reta vertical, pois é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção.

#### Traçado:

As projeções da reta  $p$  representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo  $X$  representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções da reta  $p''$  (a reta  $p$  após as duas rotações) representaram-se a **forte**, pois é o objetivo do exercício (é o pedido). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$ , das projeções dos arcos de rotação, das projeções da reta  $p'$ , etc.).





(continuação da página anterior)

Assim, o ponto **O** é o próprio traço frontal da reta **e**. Para transformar  $f_{\alpha}$  numa reta vertical (que é perpendicular ao eixo **X**), o segmento **[OP]** tem de rodar até ficar fronto-horizontal (paralelo ao eixo **X**) – o ponto **P**, após a rotação, tem de ficar com a mesma cota do ponto **O**. O arco da rotação do ponto **P** está contido no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a Projeção frontal do ponto **O**) e com raio até  $P_2$  (a Projeção frontal do ponto **P**), desenhou-se o arco da rotação de **P** até à linha horizontal que passa por  $O_2$ , na qual se situa  $P'_2 - P'_1$  fica no eixo **X**, pois o ponto tem afastamento nulo e manteve o seu afastamento, ao longo da sua rotação. O ponto  $P'$  é o ponto **P** rodado.

Por  $P'_2$  conduziu-se  $f'_{\alpha}$ , perpendicular a **[OP']** e que fica, igualmente, perpendicular ao eixo **X** –  $f'_{\alpha}$  é o traço frontal do plano  $\alpha$ , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos, para definirmos o plano  $\alpha$  após a sua rotação. O ponto **A** é um ponto do eixo de rotação (reta **e**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, as projeções do ponto **A'** (o ponto **A** rodado) estão coincidentes com as projeções homónimas do ponto **A**.

O plano  $\alpha$ , após a rotação, é um plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais de todos os seus pontos (e retas) estão sobre o seu traço horizontal. Assim, é possível, de forma imediata, desenhar o novo traço horizontal do plano  $\alpha$  –  $h'_{\alpha}$  (o traço horizontal do plano após a rotação) é concorrente com  $f'_{\alpha}$  no eixo **X** e passa por  $A'_1$ , pois o plano  $\alpha$ , na sua nova posição, é projetante horizontal. Assim,  $h'_{\alpha}$  está definido por dois pontos. O plano  $\alpha$ , após a rotação, já é um plano vertical (um plano projetante horizontal).

Falta-nos rodar os pontos **B** e **C**, para ser possível desenhar as projeções do triângulo **[ABC]**, após a rotação. O plano  $\alpha$ , após a rotação, foi transformado num plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais dos pontos **B** e **C** (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $h'_{\alpha}$ . Uma vez que os arcos da rotação estão contidos em planos frontais (de frente), os pontos **B** e **C** mantêm os seus afastamentos ao longo da sua rotação – nesse sentido, transportaram-se as projeções horizontais dos pontos **B** e **C** para  $h'_{\alpha}$  (através das paralelas ao eixo **X** que passam por  $B_1$  e  $C_1$ ), obtendo-se  $B'_1$  e  $C'_1$  sobre  $h'_{\alpha}$  ( $B'$  e  $C'$  são os pontos **B** e **C** rodados, respetivamente).

Analisemos a rotação do ponto **B** – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $B'_2$  se situe na linha de chamada que passa por  $B'_1$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto **B** nem no plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto **B** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois está contido num plano frontal) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_2 \equiv (e_2)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e_2$  e raio até  $B_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação do ponto **B** até à linha de chamada de  $B'_1$ , sobre a qual se situa  $B'_2$  ( $B'$  é o ponto **B** rodado). O processo exposto para a rotação do ponto **B** repetiu-se para o ponto **C**, o que nos permitiu determinar a Projeção frontal do ponto  $C'$  (o ponto **C** rodado) –  $C'_2$  situa-se na linha de chamada que passa por  $C'_1$ .

Note que, nesta situação particular, se tem que as projeções horizontais dos pontos **A'** e  $C'$  estão coincidentes – tem-se  $A'_1 \equiv C'_1$ . Tal deve-se ao facto de os pontos **A** e **C** se situarem na mesma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , após a rotação, as retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$  se terem transformado em retas verticais (projetantes horizontais). Assim, após a rotação, os pontos **A'** e  $C'$  situam-se na mesma reta projetante horizontal.

Por fim, desenharam-se as projeções do triângulo **[A'B'C']** (o triângulo **[ABC]**, após a rotação do plano  $\alpha$  em torno do eixo **e**) – a Projeção horizontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre  $h'_{\alpha}$ , pois o plano  $\alpha$ , após a rotação, é um plano projetante horizontal.

#### Transformação do plano $\alpha$ num plano frontal (de frente):

Para transformar o plano  $\alpha$  num plano frontal (de frente) é necessário rodar o plano  $\alpha$  até que ele fique paralelo ao Plano Frontal de Projeção – as alterações processam-se ao nível dos afastamentos dos pontos, mantendo-se as suas cotas. Assim, os arcos de rotação estão contidos em planos horizontais (porque as cotas se mantêm), pelo que o eixo da rotação tem de ser uma **reta vertical** (ortogonal aos planos que contém os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical (reta  $e'$ ), de forma a ser ponto **A'** o ponto que nos permite rodar o plano. Para tal, o segmento de reta **[QA']** é simultaneamente ortogonal ao plano  $\alpha$  e ao eixo de rotação (reta  $e'$ ), sendo o ponto **Q** o centro da rotação do ponto **A'**. Não se identificou o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto **A'**, pelo que o ponto **Q** é o ponto da reta  $e'$  que tem a cota do ponto **A'**.

Para transformar o plano  $\alpha$  num plano frontal (de frente), o seu traço horizontal ( $h'_{\alpha}$ ), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo **X**. Assim, porque o segmento de reta **[QA']** é perpendicular a  $h'_{\alpha}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ , após a rotação), o segmento **[QA']** tem de rodar até ficar de topo (ortogonal ao eixo **X**). O arco da rotação do ponto **A'** está contido num plano horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em Projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a Projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio até  $A'_1$  (a Projeção horizontal do ponto **A'**), desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de **A'** até à linha de chamada que passa por  $Q_1$ , na qual se situa  $A''_1 - A''_2$  fica imediatamente coincidente com  $Q_2$ , pois o ponto manteve a sua cota, ao longo da sua rotação. O ponto  $A''$  é o ponto **A'** rodado.

Por  $A''_1$  conduziu-se  $h''_{\alpha}$ , paralelo ao eixo **X** –  $h''_{\alpha}$  é o traço horizontal do plano  $\alpha$ , após a sua rotação. Tendo em conta que, na sua nova posição, o plano  $\alpha$  não tem traço frontal (porque é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), o seu traço horizontal ( $h''_{\alpha}$ ) identificou-se entre parêntesis. Falta-nos, agora, rodar os restantes pontos (os pontos **B'** e  $C'$ ), para definir o plano  $\alpha$  após a sua rotação e para ser possível desenhar as projeções do triângulo **[A'B'C']**, após a rotação.

O plano  $\alpha$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais dos pontos **B'** e  $C'$  (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $h''_{\alpha}$ . Analisemos a rotação do ponto **B'** – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $B''_1$  se situe sobre  $h''_{\alpha}$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto **B'** nem no plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto **B'** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $Q_1 \equiv (e'_1)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e'_1$  e raio até  $B'_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de **B'** até  $h''_{\alpha}$ , sobre a qual se situa  $B''_1$  ( $B''$  é o ponto **B'** rodado). Uma vez que o arco da rotação do ponto **B'** está contido num plano horizontal (de nível), o ponto **B'** mantém a sua cota, o que nos permitiu transportar a cota de **B'** para a linha de chamada que passa por  $B''_1$ , determinando  $B''_2$  (a Projeção frontal do ponto  $B''$ ). O ponto  $B''$  é o ponto **B'** rodado. O processo exposto para a rotação do ponto **B'** repetiu-se para o ponto  $C'$ , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $C''$  (o ponto **C'** rodado).

Uma vez que os pontos **A** e **C** se situam na mesma reta projetante horizontal (após a primeira rotação), e porque, tanto após a primeira como após a segunda rotação, o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, salienta-se que as projeções horizontais dos pontos  $A''$  e  $C''$  se mantêm coincidentes, após a segunda rotação.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, a partir das projeções dos pontos **A''**, **B''** e **C''**, desenharam-se as projeções do triângulo [**A''B''C''**] (o triângulo [**ABC**], após a segunda rotação do plano  $\alpha$  em torno do eixo **e'**) – a Projeção horizontal do triângulo mantém-se reduzida a um segmento de reta sobre  $h''_{\alpha}$ , pois o plano  $\alpha$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante horizontal. O triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois o plano  $\alpha$ , após a segunda rotação, está paralelo ao Plano Frontal de Projeção – a verdadeira grandeza do triângulo [**ABC**] está no triângulo [**A''B''C''**].

### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (pois é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$ , sendo parte do pedido (um objetivo parcial do exercício), representaram-se a **médio-forte**. A Projeção frontal do triângulo [**A''B''C''**], que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo final do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **h** e **f**, dos eixos de rotação **e** e **e'** e ainda, das projeções dos arcos das rotações efetuadas).

## 235.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **C**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [**ABC**].

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\alpha$ , para o que foi necessário o recurso a duas retas auxiliares do plano  $\alpha$  (ver **relatório** do exercício anterior) – a reta **h** (uma reta horizontal do plano, definida pelos pontos **A** e **B**) e a reta **f** (uma reta frontal do plano, definida pelos pontos **A** e **C**).

### Resolução:

O plano que contém o triângulo [**ABC**] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o triângulo [**ABC**] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível), que é um caso particular dos planos projetantes frontais (é um plano projetante frontal que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção). Assim, em primeiro lugar, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante frontal e só depois será possível transformar o plano  $\alpha$  projetante frontal num plano horizontal (de nível).

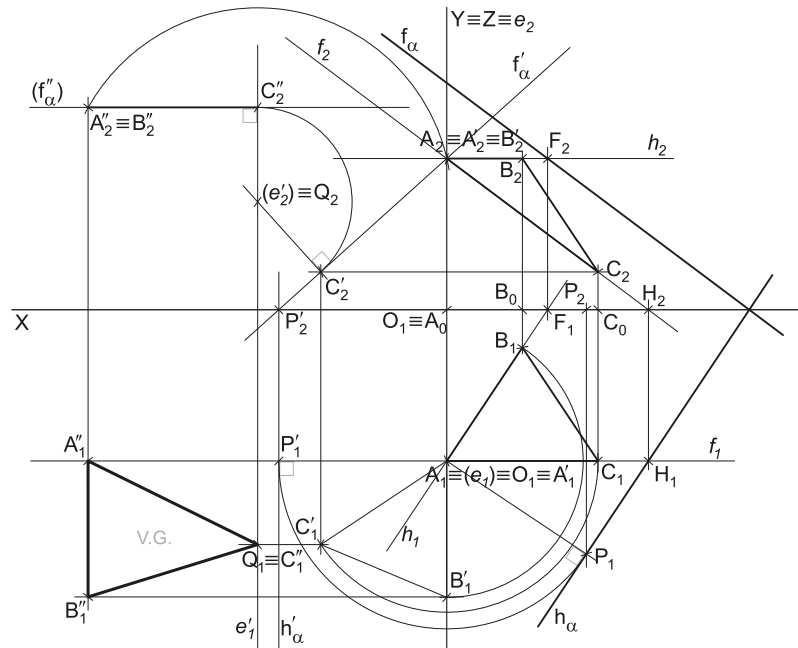
#### Transformação do plano $\alpha$ num plano projetante frontal:

Um plano projetante frontal é um plano de topo, cujo traço horizontal é perpendicular ao eixo **X**. Nesse sentido, a rotação a efetuar tem, como objetivo, rodar o plano  $\alpha$  até o seu traço horizontal ( $h_{\alpha}$ ) ficar de topo (perpendicular ao eixo **X**). Sublinha-se que as retas horizontais (de nível) de um plano de topo são retas de topo (retas projetantes frontais).

A rotação de  $h_{\alpha}$  processa-se necessariamente no Plano Horizontal de Projeção (que é o plano horizontal que contém a reta  $h_{\alpha}$ ), pelo que se conclui que os arcos da rotação estão contidos em planos horizontais (de nível) e pelo que o eixo da rotação é necessariamente uma **reta vertical** (ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta **e**. Note que se optou por localizar o eixo **e** de forma a conter um dos vértices do triângulo – o vértice **A**, neste caso. Essa opção tem a ver com economia de traçados – o ponto **A** é um ponto do eixo de rotação, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Isto evitará a rotação de um ponto – bastará rodar dois pontos (os pontos **B** e **C**). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto que nos permite rodar  $h_{\alpha}$  (e o plano) – o ponto **P**. O ponto **P** é o ponto de  $h_{\alpha}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) tal que [**OP**] é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta **e**) e a  $h_{\alpha}$ , sendo que **O** é o centro da rotação do ponto **P**. O ponto **O** é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta **e**) com o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto **P** (que é o próprio Plano Horizontal de Projeção, pois o ponto **P** tem cota nula). Assim, o ponto **O** é o próprio traço horizontal da reta **e**. Para transformar  $h_{\alpha}$  numa reta de topo (que é perpendicular ao eixo **X**), o segmento [**OP**] tem de rodar até ficar fronto-horizantal (paralelo ao eixo **X**) – o ponto **P**, após a rotação, tem de ficar com o mesmo afastamento do ponto **O**. O arco da rotação do ponto **P** está contido no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>1</sub> (a Projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até **P**<sub>1</sub> (a Projeção horizontal do ponto **P**), desenhou-se o arco da rotação de **P** até à linha horizontal que passa por **O**<sub>1</sub>, na qual se situa **P**<sub>1</sub> – **P**<sub>2</sub> fica no eixo **X**, pois o ponto tem cota nula e manteve a sua cota, ao longo da sua rotação. O ponto **P**<sub>1</sub> é o ponto **P** rodado.

Por **P**<sub>1</sub> conduziu-se  $h'_{\alpha}$ , perpendicular a [**OP**<sub>1</sub>] e que fica, igualmente, perpendicular ao eixo **X** –  $h'_{\alpha}$  é o traço horizontal do plano  $\alpha$ , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos, para definirmos o plano  $\alpha$  após a sua rotação. O ponto **A** é um ponto do eixo de rotação (reta **e**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, as projeções do ponto **A'** (o ponto **A** rodado) estão coincidentes com as projeções homónimas do ponto **A**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano  $\alpha$ , após a rotação, é um plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais de todos os seus pontos (e retas) estão sobre o seu traço frontal. Assim, é possível, de forma imediata, desenhar o novo traço frontal do plano  $\alpha - f'_{\alpha}$  (o traço frontal do plano após a rotação) é concorrente com  $h'_{\alpha}$  no eixo  $X$  e passa por  $A'_2$ , pois o plano  $\alpha$ , na sua nova posição, é projetante frontal. Assim,  $f'_{\alpha}$  está definido por dois pontos. O plano  $\alpha$ , após a rotação, já é um plano de topo (um plano projetante frontal).

Falta-nos rodar os pontos  $B$  e  $C$ , para ser possível desenhar as projeções do triângulo  $[ABC]$ , após a rotação. O plano  $\alpha$ , após a rotação, foi transformado num plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais dos pontos  $B$  e  $C$  (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $f'_{\alpha}$ . Uma vez que os arcos da rotação estão contidos em planos horizontais (de nível), os pontos  $B$  e  $C$  mantêm as suas cotas ao longo da sua rotação – nesse sentido, transportaram-se as projeções frontais dos pontos  $B$  e  $C$  para  $f'_{\alpha}$  (através das paralelas ao eixo  $X$  que passam por  $B_2$  e  $C_2$ ), obtendo-se  $B'_2$  e  $C'_2$  sobre  $f'_{\alpha}$  ( $B'$  e  $C'$  são os pontos  $B$  e  $C$  rodados, respetivamente).

Analisemos a rotação do ponto  $B$  – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $B'_1$  se situe na linha de chamada que passa por  $B'_2$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto  $B$  nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $B$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_1 \equiv (e_1)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e_1$  e raio até  $B_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação do ponto  $B$  até à linha de chamada de  $B'$ , sobre a qual se situa  $B'_1$  ( $B'$  é o ponto  $B$  rodado). O processo exposto para a rotação do ponto  $B$  repetiu-se para o ponto  $C$ , o que nos permitiu determinar a Projeção frontal do ponto  $C'$  (o ponto  $C$  rodado) –  $C'_1$  situa-se na linha de chamada que passa por  $C'_2$ .

Note que, nesta situação particular, se tem que as projeções frontais dos pontos  $A'$  e  $B'$  estão coincidentes – tem-se  $A'_2 \equiv B'_2$ . Tal deve-se ao facto de os pontos  $A$  e  $B$  se situarem na mesma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e, após a rotação, as retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$  se terem transformado em retas de topo (projetantes frontais). Assim, após a rotação, os pontos  $A'$  e  $B'$  situam-se na mesma reta projetante frontal.

Por fim, desenharam-se as projeções do triângulo  $[A'B'C']$  (o triângulo  $[ABC]$ , após a rotação do plano  $\alpha$  em torno do eixo  $e$ ) – a Projeção frontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre  $f'_{\alpha}$ , pois o plano  $\alpha$ , após a rotação, é um plano projetante frontal.

#### Transformação do plano $\alpha$ num plano horizontal (de nível):

Para transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível) é necessário rodar o plano  $\alpha$  até que ele fique paralelo ao Plano Horizontal de Projeção – as alterações processam-se ao nível das cotas dos pontos, mantendo-se os seus afastamentos. Assim, os arcos de rotação estão contidos em planos frontais (porque os afastamentos se mantêm), pelo que o eixo da rotação tem de ser uma **reta de topo** (ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo (reta  $e'$ ), de forma a ser ponto  $C'$  o ponto que nos permite rodar o plano. Para tal, o segmento de reta  $[QC']$  é simultaneamente ortogonal ao plano  $\alpha$  e ao eixo de rotação (reta  $e'$ ), sendo o ponto  $Q$  o centro da rotação do ponto  $C'$ . Não se identificou o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto  $C'$ , pelo que o ponto  $Q$  é o ponto da reta  $e'$  que tem o afastamento do ponto  $C'$ .

Para transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível), o seu traço frontal ( $f'_{\alpha}$ ), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento de reta  $[QC']$  é perpendicular a  $f'_{\alpha}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ , após a rotação), o segmento  $[QC']$  tem de rodar até ficar vertical (ortogonal ao eixo  $X$ ). O arco da rotação do ponto  $C'$  está contido num plano frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em Projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a Projeção frontal do ponto  $Q$ ) e com raio até  $C'_2$  (a Projeção frontal do ponto  $C'$ ), desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de  $C'$  até à linha de chamada que passa por  $Q_2$ , na qual se situa  $C''_2 - C''_1$  fica imediatamente coincidente com  $Q_1$ , pois o ponto manteve o seu afastamento, ao longo da sua rotação. O ponto  $C''$  é o ponto  $C'$  rodado.

Por  $C''_2$  conduziu-se  $f''_{\alpha}$ , paralelo ao eixo  $X - f''_{\alpha}$  é o traço frontal do plano  $\alpha$ , após a sua rotação. Tendo em conta que, na sua nova posição, o plano  $\alpha$  não tem traço horizontal (porque é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), o seu traço frontal ( $f''_{\alpha}$ ) identificou-se entre parêntesis. Falta-nos, agora, rodar os restantes pontos (os pontos  $B'$  e  $C'$ ), para definir o plano  $\alpha$  após a sua rotação e para ser possível desenhar as projeções do triângulo  $[A'B'C']$ , após a rotação.

O plano  $\alpha$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais dos pontos  $B'$  e  $C'$  (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $f''_{\alpha}$ . Analisemos a rotação do ponto  $B'$  – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $B''_2$  se situe sobre  $f''_{\alpha}$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto  $B'$  nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $B'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois está contido num plano frontal) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $Q_2 \equiv (e'_2)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e'_2$  e raio até  $B'_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de  $B'$  até  $f''_{\alpha}$ , sobre a qual se situa  $B''_2$  ( $B''$  é o ponto  $B'$  rodado). Uma vez que o arco da rotação do ponto  $B'$  está contido num plano frontal (de frente), o ponto  $B'$  mantém o seu afastamento, o que nos permitiu transportar o afastamento de  $B'$  para a linha de chamada que passa por  $B''_2$ , determinando  $B''_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $B''$ ). O ponto  $B''$  é o ponto  $B'$  rodado. O processo exposto para a rotação do ponto  $B'$  repetiu-se para o ponto  $A'$ , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $A''$  (o ponto  $A'$  rodado).

Uma vez que os pontos  $A$  e  $B$  se situam na mesma reta projetante frontal (após a primeira rotação), e porque, tanto após a primeira como após a segunda rotação, o plano  $\delta$  é um plano projetante frontal, salienta-se que as projeções frontais dos pontos  $A''$  e  $B''$  se mantêm coincidentes, após a segunda rotação.

Por fim, a partir das projeções dos pontos  $A''$ ,  $B''$  e  $C''$ , desenharam-se as projeções do triângulo  $[A''B''C'']$  (o triângulo  $[ABC]$ , após a segunda rotação do plano  $\alpha$  em torno do eixo  $e'$ ) – a Projeção frontal do triângulo mantém-se reduzida a um segmento de reta sobre  $f''_{\alpha}$ , pois o plano  $\alpha$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante frontal. O triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois o plano  $\alpha$ , após a segunda rotação, está paralelo ao Plano Horizontal de Projeção – a verdadeira grandeza do triângulo  $[ABC]$  está no triângulo  $[A''_1B''_1C''_1]$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (pois é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$ , no contexto deste exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **médio-leve**. A Projeção horizontal do triângulo  $[A''B''C'']$ , que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $h$  e  $f$ , dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$  e ainda, das projeções dos arcos das rotações efetuadas).

## 236.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo [RST], em função dos dados.

### Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos R, S e T, para pertencerem ao plano  $\delta$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto R tem afastamento nulo, pelo que é necessariamente um ponto de  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ). Assim, o ponto R é o ponto de  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ) que tem 4 cm de cota. O ponto S tem cota nula, pelo que é necessariamente um ponto de  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ). Assim, o ponto S é o ponto de  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ) que tem 6 cm de afastamento.

A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , com 3,5 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto T – a reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto F, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ). O ponto T é o ponto da reta  $h$  que tem 3,5 cm de afastamento (o ponto T é um ponto do  $\beta_{1/3}$  e pontos do  $\beta_{1/3}$  tem coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo X).

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [RST].

### Resolução:

O plano que contém o triângulo [RST] (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o triângulo [RST] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\delta$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\delta$  num plano horizontal (de nível), que é um caso particular dos planos projetantes frontais (é um plano projetante frontal que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção). Assim, em primeiro lugar, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante frontal e só depois será possível transformar o plano projetante frontal num plano horizontal (de nível).

### Transformação do plano $\delta$ num plano projetante frontal:

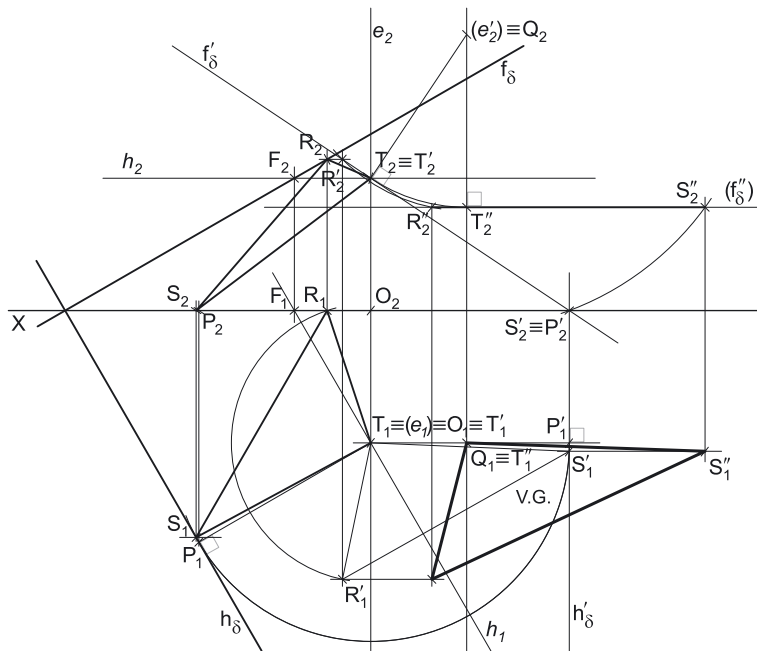
Um plano projetante frontal é um plano de topo, cujo traço horizontal é perpendicular ao eixo X. Nesse sentido, a rotação a efetuar tem, como objetivo, rodar o plano  $\delta$  até o seu traço horizontal ( $h_\delta$ ) ficar de topo (perpendicular ao eixo X). Sublinha-se que as retas horizontais (de nível) de um plano de topo são retas de topo (retas projetantes frontais).

A rotação de  $h_\delta$  processa-se necessariamente no Plano Horizontal de Projeção (que é o plano horizontal que contém a reta  $h_\delta$ ), pelo que se conclui que os arcos da rotação estão contidos em planos horizontais (de nível) e pelo que o eixo da rotação é necessariamente uma **reta vertical** (ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta  $e$ . Note que se optou por localizar o eixo  $e$  de forma a conter um dos vértices do triângulo – o vértice T, neste caso. Essa opção tem a ver com economia de traçados – o ponto T é um ponto do eixo de rotação, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Isto evitará a rotação de um ponto – bastará rodar dois pontos (os pontos R e S). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto que nos permite rodar  $h_\delta$  (e o plano) – o ponto P. O ponto P é o ponto de  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ) tal que [OP] é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e$ ) e a  $h_\delta$ , sendo que O é o centro da rotação do ponto P. O ponto O é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e$ ) com o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto P (que é o próprio Plano Horizontal de Projeção, pois o ponto P tem cota nula). Assim, o ponto O é o próprio traço horizontal da reta  $e$ . Para transformar  $h_\delta$  numa reta de topo (que é perpendicular ao eixo X), o segmento [OP] tem de rodar até ficar fronto-horizontal (paralelo ao eixo X) – o ponto P, após a rotação, tem de ficar com o mesmo afastamento do ponto O. O arco da rotação do ponto P está contido no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a Projeção horizontal do ponto O) e com raio até  $P_1$  (a Projeção horizontal do ponto P), desenhou-se o arco da rotação de P até à linha horizontal que passa por  $O_1$ , na qual se situa  $P'_1 - P'_2$  fica no eixo X, pois o ponto tem cota nula e manteve a sua cota, ao longo da sua rotação. O ponto  $P'$  é o ponto P rodado.

Por  $P'_1$  conduziu-se  $h'_\delta$ , perpendicular a [OP'] e que fica, igualmente, perpendicular ao eixo X –  $h'_\delta$  é o traço horizontal do plano  $\delta$ , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos, para definirmos o plano  $\delta$  após a sua rotação. O ponto T é um ponto do eixo de rotação (reta  $e$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, as projeções do ponto T' (o ponto T rodado) estão coincidentes com as projeções homónimas do ponto T.

O plano  $\delta$ , após a rotação, é um plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais de todos os seus pontos (e retas) estão sobre o seu traço frontal. Assim, é possível, de forma imediata, desenhar o novo traço frontal do plano  $\delta$  –  $f'_\delta$  (o traço frontal do plano após a rotação) é concorrente com  $h'_\delta$  no eixo X e passa por  $T'_2$ , pois o plano  $\delta$ , na sua nova posição, é projetante frontal. Assim,  $f'_\delta$  está definido por dois pontos. O plano  $\delta$ , após a rotação, já é um plano de topo (um plano projetante frontal).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Falta-nos rodar os pontos **R** e **S**, para ser possível desenhar as projeções do triângulo **[RST]**, após a rotação. O plano  $\delta$ , após a rotação, foi transformado num plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais dos pontos **R** e **S** (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $f''_{\delta}$ . Uma vez que os arcos da rotação estão contidos em planos horizontais (de nível), os pontos **R** e **S** mantêm as suas cotas ao longo da sua rotação – nesse sentido, transportaram-se as projeções frontais dos pontos **R** e **S** para  $f'_{\delta}$  (através das paralelas ao eixo **X** que passam por  $R_2$  e  $S_2$ ), obtendo-se  $R'_2$  e  $S'_2$  sobre  $f'_{\delta}$  ( $R'$  e  $S'$  são os pontos **R** e **S** rodados, respetivamente).

Analisemos a rotação do ponto **R** – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $R'_1$  se situe na linha de chamada que passa por  $R'_2$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto **R** nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto **R** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_1 \equiv (e_1)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e_1$  e raio até  $R_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação do ponto **R** até à linha de chamada de  $R'$ , sobre a qual se situa  $R'_1$  ( $R'$  é o ponto **R** rodado). O processo exposto para a rotação do ponto **R** repetiu-se para o ponto **S**, o que nos permitiu determinar a Projeção frontal do ponto **S'** (o ponto **S** rodado) –  $S'_1$  situa-se na linha de chamada que passa por  $S'_2$ .

Por fim, desenharam-se as projeções do triângulo **[R'S'T']** (o triângulo **[RST]**, após a rotação do plano  $\delta$  em torno do eixo **e**) – a Projeção frontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre  $f'_{\delta}$ , pois o plano  $\delta$ , após a rotação, é um plano projetante frontal.

#### Transformação do plano $\delta$ num plano horizontal (de nível):

Para transformar o plano  $\delta$  num plano horizontal (de nível) é necessário rodar o plano  $\delta$  até que ele fique paralelo ao Plano Horizontal de Projeção – as alterações processam-se ao nível das cotas dos pontos, mantendo-se os seus afastamentos. Assim, os arcos de rotação estão contidos em planos frontais (porque os afastamentos se mantêm), pelo que o eixo da rotação tem de ser uma **reta de topo** (ortogonal aos planos que contém os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo (reta  $e'$ ), de forma a ser ponto **T'** o ponto que nos permite rodar o plano. Para tal, o segmento de reta **[QT']** é simultaneamente ortogonal ao plano  $\delta$  e ao eixo de rotação (reta  $e'$ ), sendo o ponto **Q** o centro da rotação do ponto **T'**. Não se identificou o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto **T'**, pelo que o ponto **Q** é o ponto da reta  $e'$  que tem o afastamento do ponto **T'**.

Para transformar o plano  $\delta$  num plano horizontal (de nível), o seu traço frontal ( $f'_{\delta}$ ), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo **X**. Assim, porque o segmento de reta **[QT']** é perpendicular a  $f'_{\delta}$  (o traço frontal do plano  $\delta$ , após a rotação), o segmento **[QT']** tem de rodar até ficar vertical (ortogonal ao eixo **X**). O arco da rotação do ponto **T'** está contido num plano frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em Projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a Projeção frontal do ponto **Q**) e com raio até  $T'_2$  (a Projeção frontal do ponto **T'**), desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de **T'** até à linha de chamada que passa por  $Q_2$ , na qual se situa  $T''_2 - T''_1$  fica imediatamente coincidente com  $Q_1$ , pois o ponto manteve o seu afastamento, ao longo da sua rotação. O ponto  $T''_1$  é o ponto **T'** rodado.

Por  $T''_2$  conduziu-se  $f''_{\delta}$ , paralelo ao eixo **X** –  $f''_{\delta}$  é o traço frontal do plano  $\delta$ , após a sua rotação. Tendo em conta que, na sua nova posição, o plano  $\delta$  não tem traço horizontal (porque é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), o seu traço frontal ( $f''_{\delta}$ ) identificou-se entre parêntesis. Falta-nos, agora, rodar os restantes pontos (os pontos **R'** e **S'**), para definir o plano  $\delta$  após a sua rotação e para ser possível desenhar as projeções do triângulo **[R'S'T']**, após a rotação.

O plano  $\delta$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais dos pontos **R'** e **S'** (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $f''_{\delta}$ . Analisemos a rotação do ponto **R'** – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $R''_2$  se situe sobre  $f''_{\delta}$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto **R'** nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto **R'** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois está contido num plano frontal) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $Q_2 \equiv (e'_2)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e'_2$  e raio até  $R'_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de **R'** até  $f''_{\delta}$ , sobre a qual se situa  $R''_2$  ( $R''$  é o ponto **R'** rodado). Uma vez que o arco da rotação do ponto **R'** está contido num plano frontal (de frente), o ponto **R'** mantém o seu afastamento, o que nos permitiu transportar o afastamento de **R'** para a linha de chamada que passa por  $R''_2$ , determinando  $R''_1$  (a Projeção horizontal do ponto **R''**). O ponto  $R''_1$  é o ponto **R'** rodado. O processo exposto para a rotação do ponto **R'** repetiu-se para o ponto **S'**, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **S''** (o ponto **S'** rodado).

Por fim, a partir das projeções dos pontos **R''**, **S''** e **T''**, desenharam-se as projeções do triângulo **[R''S''T'']** (o triângulo **[RST]**, após a segunda rotação do plano  $\delta$  em torno do eixo  $e'$ ) – a Projeção frontal do triângulo mantém-se reduzida a um segmento de reta sobre  $f''_{\delta}$ , pois o plano  $\delta$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante frontal. O triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois o plano  $\delta$ , após a segunda rotação, está paralelo ao Plano Horizontal de Projeção – a verdadeira grandeza do triângulo **[RST]** está no triângulo  $[R''_1S''_1T''_1]$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\delta$  e as projeções do triângulo) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (pois é a linha estruturante do exercício). A Projeção horizontal do triângulo **[R''S''T'']**, que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **h**, dos eixos de rotação **e** e  $e'$  e ainda, das projeções dos arcos das rotações efetuadas).

(continua na página seguinte)



## 237.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\psi$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\psi$  tem os seus traços coincidentes, pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$ , têm os seus traços coincidentes). Em seguida, determinaram-se as projeções triângulo [JKL], em função dos dados.

### Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos J, K e L, para pertencerem ao plano  $\psi$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano, com 2 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto J – a reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto F, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\psi$ ). O ponto J é o ponto da reta  $h$  que tem 2 cm de afastamento (o ponto J é um ponto do  $\beta_{1/3}$  e pontos do  $\beta_{1/3}$  tem coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo X).

Tendo em conta que o lado [JK] do triângulo mede 6,5 cm e é horizontal (de nível), o lado [JK] está contido na reta  $h$  e projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, sobre  $h_1$  (a Projeção horizontal da reta  $h$ ) e a partir de  $J_1$  (a Projeção horizontal do ponto J), mediram-se os 6,5 cm (o comprimento do lado), em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $K_1$  (a Projeção horizontal do ponto K), sobre  $h_1$  (a Projeção horizontal da reta  $h$ ) – tenha em conta que se garantiu, também, que o ponto K tem afastamento positivo (porque o enunciado refere expressamente que o triângulo se situa, na totalidade, no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro). Por fim,  $K_2$  (a Projeção frontal do ponto K) situa-se sobre  $h_2$  (a Projeção frontal da reta  $h$ ).

Uma vez que o lado [KL] está contido numa reta frontal (de frente), foi necessário o recurso a uma reta frontal (de frente) do plano  $\psi$ . A reta  $f$  é a reta frontal (de frente) do plano, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto L – a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto K, que é um ponto da reta) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$ ).

Por outro lado, o lado [JL] está contido numa reta de perfil  $p$ , cujas projeções se desenharam imediatamente (passando pelas projeções homónimas do ponto J). Dessa forma, o ponto L é o ponto de concorrência da reta  $p$  (a reta de perfil que contém o lado [JL]) com a reta  $f$  (a reta frontal que contém o lado [KL]). A reta  $p$ , por sua vez, está definida por dois pontos – os pontos J e L.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [JKL].

### Resolução:

O plano que contém o triângulo [JKL] (o plano  $\psi$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o triângulo [JKL] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\psi$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.

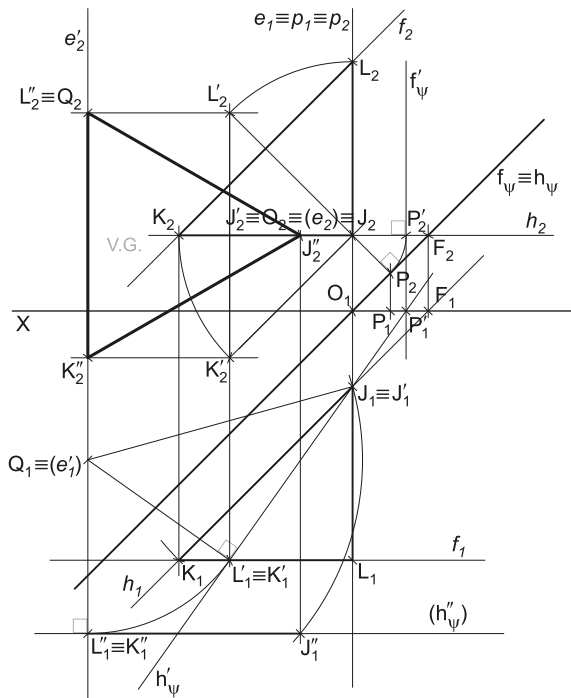
De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\psi$  num plano frontal (de frente), que é um caso particular dos planos projetantes horizontais (é um plano projetante horizontal que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção). Assim, em primeiro lugar, há que transformar o plano  $\psi$  num plano projetante horizontal e só depois será possível transformar o plano projetante horizontal num plano frontal (de frente).

### Transformação do plano $\psi$ num plano projetante horizontal:

Um plano projetante horizontal é um plano vertical, cujo traço frontal é perpendicular ao eixo X. Nesse sentido, a rotação a efetuar tem, como objetivo, rodar o plano  $\psi$  até o seu traço frontal ( $f_\psi$ ) ficar vertical (perpendicular ao eixo X). Sublinha-se que as retas frontais (de frente) de um plano vertical são retas verticais (retas projetantes horizontais).

A rotação de  $f_\psi$  processa-se necessariamente no Plano Frontal de Projeção (que é o plano frontal que contém a reta  $f_\psi$ ), pelo que se conclui que os arcos da rotação estão contidos em planos frontais (de frente) e pelo que o eixo da rotação é necessariamente uma **reta de topo** (ortogonal aos planos que contém os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta  $e$ . Note que se optou por localizar o eixo  $e$  de forma a conter um dos vértices do triângulo – o vértice J, neste caso. Essa opção tem a ver com economia de traçados – o ponto J é um ponto do eixo de rotação, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Isto evitará a rotação de um ponto – bastará rodar dois pontos (os pontos K e L). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto que nos permite rodar  $f_\psi$  (e o plano) – o ponto P. O ponto P é o ponto de  $f_\psi$  (o traço frontal do plano  $\psi$ ) tal que [OP] é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta  $e$ ) e a  $f_\psi$ , sendo que O é o centro da rotação do ponto P. O ponto O é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta  $e$ ) com o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto P (que é o próprio Plano Frontal de Projeção, pois o ponto P tem afastamento nulo). Assim, o ponto O é o próprio traço frontal da reta  $e$ . Para transformar  $f_\psi$  numa reta vertical (que é perpendicular ao eixo X), o segmento [OP] tem de rodar até ficar fronto-horizontal (paralelo ao eixo X) – o ponto P, após a rotação, tem de ficar com a mesma cota do ponto O. O arco da rotação do ponto P está contido no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a Projeção frontal do ponto O) e com raio até  $P_2$  (a Projeção frontal do ponto P), desenhou-se o arco da rotação de P até à linha horizontal que passa por  $O_2$ , na qual se situa  $P'_2 - P'_1$  fica no eixo X, pois o ponto tem afastamento nulo e manteve o seu afastamento, ao longo da sua rotação. O ponto P' é o ponto P rodado.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por  $P'_2$  conduziu-se  $f'_\psi$ , perpendicular a  $[OP']$  e que fica, igualmente, perpendicular ao eixo  $X - f'_\psi$  é o traço frontal do plano  $\psi$ , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos, para definirmos o plano  $\alpha$  após a sua rotação. O ponto  $J$  é um ponto do eixo de rotação (reta  $e$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, as projeções do ponto  $J'$  (o ponto  $J$  rodado) estão coincidentes com as projeções homónimas do ponto  $J$ .

O plano  $\psi$ , após a rotação, é um plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais de todos os seus pontos (e retas) estão sobre o seu traço horizontal. Assim, é possível, de forma imediata, desenhar o novo traço horizontal do plano  $\psi - h'_\psi$  (o traço horizontal do plano após a rotação) é concorrente com  $f'_\psi$  no eixo  $X$  e passa por  $J'_1$ , pois o plano  $\psi$ , na sua nova posição, é projetante horizontal. Assim,  $h'_\psi$  está definido por dois pontos. O plano  $\psi$ , após a rotação, já é um plano vertical (um plano projetante horizontal).

Falta-nos rodar os pontos  $K$  e  $L$ , para ser possível desenhar as projeções do triângulo  $[JKL]$ , após a rotação. O plano  $\psi$ , após a rotação, foi transformado num plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais dos pontos  $K$  e  $L$  (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $h'_\psi$ . Uma vez que os arcos da rotação estão contidos em planos frontais (de frente), os pontos  $K$  e  $L$  mantêm os seus afastamentos ao longo da sua rotação – nesse sentido, transportaram-se as projeções horizontais dos pontos  $K$  e  $L$  para  $h'_\psi$  (através das paralelas ao eixo  $X$  que passam por  $K_1$  e  $L_1$ ), obtendo-se  $K'_1$  e  $L'_1$  sobre  $h'_\psi$  ( $K'$  e  $L'$  são os pontos  $K$  e  $L$  rodados, respetivamente).

Note que, nesta situação particular, se tem que as projeções horizontais dos pontos  $K'$  e  $L'$  estão coincidentes – tem-se  $K'_1 \equiv L'_1$ . Tal deve-se ao facto de os pontos  $K$  e  $L$  se situarem na mesma reta frontal (de frente) do plano  $\psi$  e, após a rotação, as frontais (de frente) do plano  $\psi$  se terem transformado em retas verticais (projetantes horizontais). Assim, após a rotação, os pontos  $K'$  e  $L'$  situam-se na mesma reta projetante horizontal.

Analisemos a rotação do ponto  $L$  – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $L'_2$  se situe na linha de chamada que passa por  $L'_1$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto  $L$  nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $L$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois está contido num plano frontal) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_2 \equiv (e_2)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e_2$  e raio até  $L_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação do ponto  $L$  até à linha de chamada de  $L'_1$ , sobre a qual se situa  $L'_2$  ( $L'$  é o ponto  $L$  rodado). O processo exposto para a rotação do ponto  $L$  repetiu-se para o ponto  $K$ , o que nos permitiu determinar a Projeção frontal do ponto  $K'$  (o ponto  $K$  rodado) –  $K'_2$  situa-se na linha de chamada que passa por  $K'_1$ .

Por fim, desenharam-se as projeções do triângulo  $[J'K'L']$  (o triângulo  $[JKL]$ , após a rotação do plano  $\psi$  em torno do eixo  $e$ ) – a Projeção horizontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre  $h'_\psi$ , pois o plano  $\psi$ , após a rotação, é um plano projetante horizontal.

#### Transformação do plano $\psi$ num plano frontal (de frente):

Para transformar o plano  $\psi$  num plano frontal (de frente) é necessário rodar o plano  $\psi$  até que ele fique paralelo ao Plano Frontal de Projeção – as alterações processam-se ao nível dos afastamentos dos pontos, mantendo-se as suas cotas. Assim, os arcos de rotação estão contidos em planos horizontais (porque as cotas se mantêm), pelo que o eixo da rotação tem de ser uma **reta vertical** (ortogonal aos planos que contém os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical (reta  $e'$ ), de forma a ser ponto  $L'$  (ou o ponto  $K'$ , pois os dois pontos situam-se na mesma projetante horizontal) o ponto que nos permite rodar o plano. Para tal, o segmento de reta  $[QL']$  é simultaneamente ortogonal ao plano  $\psi$  e ao eixo de rotação (reta  $e'$ ), sendo o ponto  $Q$  o centro da rotação do ponto  $L'$ . Não se identificou o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto  $L'$ , pelo que o ponto  $Q$  é o ponto da reta  $e'$  que tem a cota do ponto  $L'$ .

Para transformar o plano  $\psi$  num plano frontal (de frente), o seu traço horizontal ( $h'_\psi$ ), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento de reta  $[QL']$  é perpendicular a  $h'_\psi$  (o traço horizontal do plano  $\psi$ , após a rotação), o segmento  $[QL']$  tem de rodar até ficar de topo (ortogonal ao eixo  $X$ ). O arco da rotação do ponto  $L'$  está contido num plano horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em Projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $Q$ ) e com raio até  $L'_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $L'$ ), desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $L'$  até à linha de chamada que passa por  $Q_1$ , na qual se situa  $L''_1 - L''_2$  fica imediatamente coincidente com  $Q_2$ , pois o ponto manteve a sua cota, ao longo da sua rotação. O ponto  $L''$  é o ponto  $L'$  rodado.

Por  $L''_1$  conduziu-se  $h''_\psi$ , paralelo ao eixo  $X - h''_\psi$  é o traço horizontal do plano  $\psi$ , após a sua rotação. Tendo em conta que, na sua nova posição, o plano  $\psi$  não tem traço frontal (porque é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), o seu traço horizontal ( $h''_\psi$ ) identificou-se entre parêntesis. Falta-nos, agora, rodar os restantes pontos (os pontos  $J'$  e  $K'$ ), para definir o plano  $\psi$  após a sua rotação e para ser possível desenhar as projeções do triângulo  $[J'K'L']$ , após a rotação.

Tendo em conta que os pontos  $K'$  e  $L'$  se situam na mesma reta projetante horizontal (após a primeira rotação), os dois pontos situar-se-ão na mesma projetante horizontal após a segunda rotação (porque o plano  $\psi$  continuará a ser um plano projetante horizontal). Isso permitiu-nos, de forma imediata, determinar a Projeção horizontal do ponto  $K'$  após a rotação – tem-se, imediatamente,  $K''_1 \equiv L''_1$ . Por outro lado atendendo a que os pontos mantêm as suas cotas ao longo da rotação (porque a rotação se processa em planos horizontais) foi possível transportar, com uma paralela ao eixo  $X$ , a cota de  $K'_2$  para a linha de chamada de  $K''_1$ , onde se situa  $K''_2$  (a Projeção frontal do ponto  $K'$ ). O ponto  $K''$  é o ponto  $K'$  rodado.

O plano  $\psi$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante horizontal, pelo que a Projeção horizontal do ponto  $J'$  (após a rotação) se situa necessariamente sobre  $h''_\psi$ . Assim, o ponto  $J'$  tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $J''_1$  se situe sobre  $h''_\psi$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto  $J'$  nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $J'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $Q_1 \equiv (e'_1)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e'_1$  e raio até  $J'_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $J'$  até  $h''_\psi$ , sobre a qual se situa  $J''_1$  ( $J''$  é o ponto  $J'$  rodado). Uma vez que o arco da rotação do ponto  $J'$  está contido num plano horizontal (de nível), o ponto  $J'$  mantém a sua cota, o que nos permitiu transportar a cota de  $BJ'$  para a linha de chamada que passa por  $J''_1$ , determinando  $J''_2$  (a Projeção frontal do ponto  $J''$ ). O ponto  $J''$  é o ponto  $J'$  rodado.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, a partir das projeções dos pontos **J''**, **K''** e **L''**, desenharam-se as projeções do triângulo [**J''K''L''**] (o triângulo [**JKL**], após a segunda rotação do plano  $\psi$  em torno do eixo  $e'$ ) – a Projeção horizontal do triângulo mantém-se reduzida a um segmento de reta sobre  $h''_{\psi}$ , pois o plano  $\psi$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante horizontal. O triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois o plano  $\psi$ , após a segunda rotação, está paralelo ao Plano Frontal de Projeção – a verdadeira grandeza do triângulo [**JKL**] está no triângulo [**J''<sub>2</sub>K''<sub>2</sub>L''<sub>2</sub>**].

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\psi$  e as projeções do triângulo) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (pois é a linha estruturante do exercício). A Projeção frontal do triângulo [**J''K''L''**], que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **h**, **f**, e **p**, dos eixos de rotação **e** e **e'** e ainda, das projeções dos arcos das rotações efetuadas).

## 238.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **P** e **Q**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda determinar a Projeção frontal do ponto **R**, em função das coordenadas fornecidas.

- a) O ponto **P** é um ponto com afastamento nulo, pelo que **P** e necessariamente, um ponto de  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Assim, desenhou-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), passando por **P<sub>2</sub>** (a Projeção frontal do ponto **P**) e paralelo ao eixo **X** –  $f_p$  está definido por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Em seguida, desenharam-se as projeções de uma reta **r**, a reta que passa pelos pontos **P** e **Q** e determinou-se o seu traço horizontal – o ponto **H**. Tenha em conta que o ponto **P** é, imediatamente, o traço frontal da reta **r**. Pelo traço horizontal da reta **r** conduziu-se o traço horizontal do plano  $\rho$ , paralelo ao eixo **X**. O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ) está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Para se determinarem as projeções do ponto **R**, teve-se em conta que o ponto **R** tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\rho$ . Assim, recorreu-se a uma reta **s**, pertencente ao plano  $\rho$ , cuja Projeção frontal ( $s_2$ ) passa pela Projeção frontal do ponto **R** (**R<sub>2</sub>**). A reta **s** está definida por um ponto (o seu traço frontal, o ponto **F**) e uma direção (a direção da reta **r** – é paralela à reta **r**). Em seguida, determinou-se a Projeção horizontal do ponto **R** (**R<sub>1</sub>**), sobre a Projeção horizontal da reta **s** ( $s_1$ ).

Por fim, a partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [**PQR**].

- b) O plano que contém o triângulo [**PQR**] (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o triângulo [**PQR**] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\rho$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.

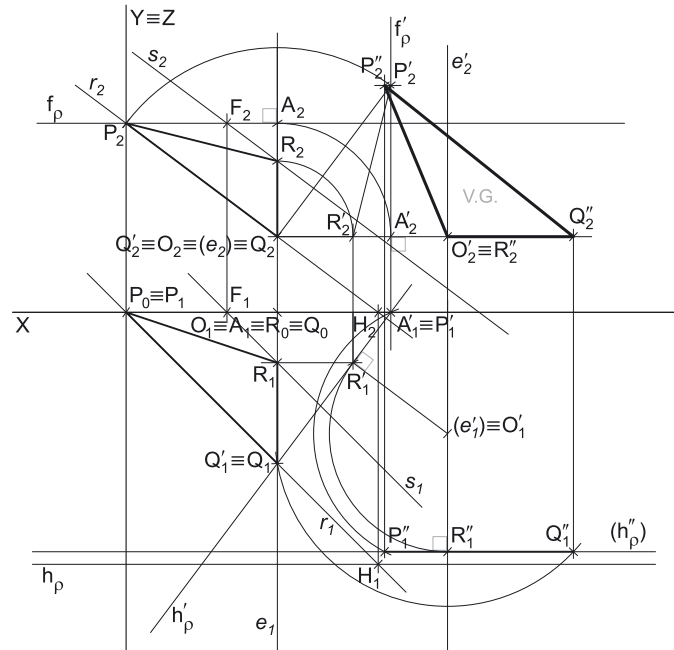
De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\rho$  num plano frontal (de frente). Um plano frontal (de frente) é um caso particular dos planos projetantes horizontais (é um plano projetante horizontal que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano  $\rho$  num plano projetante horizontal.

### Transformação do plano $\rho$ num plano projetante horizontal:

Um plano projetante horizontal é um plano vertical, cujo traço frontal é perpendicular ao eixo **X**. Nesse sentido, a rotação a efetuar tem, como objetivo, rodar o plano  $\rho$  até o seu traço frontal ( $f_p$ ) ficar vertical (perpendicular ao eixo **X**). A rotação de  $f_p$  processa-se necessariamente no Plano Frontal de Projeção (que é o plano frontal que contém a reta  $f_p$ ), pelo que se conclui que os arcos da rotação estão contidos em planos frontais (de frente) e que o eixo de rotação é uma **reta de topo** (ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta **e**. Note que se optou por localizar o eixo **e** de forma a conter um dos vértices do triângulo – o vértice **Q**, neste caso. Essa opção tem a ver com economia de traçados – o ponto **Q** é um ponto do eixo de rotação, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Isto evitará a rotação de um ponto – bastará rodar dois pontos (os pontos **P** e **R**). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto que nos permite rodar  $f_p$  (e o plano) – o ponto **A**. O ponto **A** é o ponto de  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ) tal que [**OA**] é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta **e**) e a  $f_p$ , sendo que **O** é o centro da rotação do ponto **A**. O ponto **O** é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta **e**) com o plano frontal que contém o arco da rotação do ponto **A** (que é o próprio Plano Frontal de Projeção, pois o ponto **A** tem afastamento nulo). Assim, o ponto **O** é o traço frontal da reta **e**.

Para transformar  $f_p$  numa reta vertical (que é perpendicular ao eixo **X**), o segmento [**OA**] tem de rodar até ficar fronto-horizontal (paralelo ao eixo **X**) – o ponto **A**, após a rotação, tem de ficar com a mesma cota do ponto **O**. O arco da rotação do ponto **A** está contido no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>2</sub>** (a Projeção frontal do ponto **O**) e com raio até **A<sub>2</sub>** (a Projeção frontal do ponto **A**), desenhou-se o arco da rotação de **A** até à linha horizontal que passa por **O<sub>2</sub>**, na qual se situa **A'<sub>2</sub>** (que é o próprio eixo **X**) – **A'<sub>1</sub>** fica no eixo **X**, pois o ponto manteve o seu afastamento ao longo da sua rotação. O ponto **A'** é o ponto **A** rodado. Note que a rotação efetuada tem 90° de amplitude.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por  $A'_2$  conduziu-se  $f'_\rho$ , perpendicular a  $[OA']$  (e perpendicular ao eixo  $X$ , que era pretendido) –  $f'_\rho$  é o traço frontal do plano  $\rho$ , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos, para definir o plano  $\rho$  após a sua rotação. O ponto  $Q$  é um ponto do eixo de rotação (reta  $e$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, as projeções do ponto  $Q'$  (o ponto  $Q$  rodado) estão coincidentes com as projeções homónimas do ponto  $Q$ .

O plano  $\rho$ , após a rotação, é um plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais de todos os seus pontos (e retas) estão sobre o seu traço horizontal. Assim, é possível, de forma imediata, desenhar o novo traço horizontal do plano  $\rho$  (o traço horizontal do plano após a rotação) –  $h'_\rho$  (o novo traço horizontal do plano  $\rho$ ) é concorrente com  $f'_\rho$  no eixo  $X$  e passa por  $Q'_1$  (está definido por dois pontos). O plano  $\rho$ , após a rotação, já é um plano vertical.

Falta-nos rodar os pontos  $P$  e  $R$ , para ser possível desenhar as projeções do triângulo  $[PQR]$ , após a rotação. O plano  $\rho$ , após a rotação, foi transformado num plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais dos pontos  $P$  e  $R$  (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $h'_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ , após a rotação). Uma vez que os arcos da rotação daqueles pontos estão contidos em planos frontais (de frente), os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo da sua rotação – nesse sentido, transportaram-se as projeções horizontais dos pontos  $P$  e  $R$  para  $h'_\rho$  (através das paralelas ao eixo  $X$  que passam por  $P_1$  e  $R_1$ ), obtendo-se  $P'_1$  e  $R'_1$  sobre  $h'_\rho$  ( $P'$  e  $R'$  são os pontos  $P$  e  $R$  rodados, respetivamente).

Analisemos a rotação do ponto  $R$  – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $R'_2$  se situe na linha de chamada que passa por  $R'_1$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto  $R$  nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $R$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois está contido num plano frontal) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_2 \equiv (e_2)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e_2$  e raio até  $R_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de  $R$  até à linha de chamada de  $R'_1$ , sobre a qual se situa  $R'_2$  ( $R'$  é o ponto  $R$  rodado). O processo exposto para a rotação do ponto  $R$  repetiu-se para o ponto  $P$ , o que nos permitiu determinar a Projeção frontal do ponto  $P'$  (o ponto  $P$  rodado) –  $P'_2$  situa-se na linha de chamada que passa por  $P'_1$ .

Por fim, desenharam-se as projeções do triângulo  $[P'Q'R']$  (o triângulo  $[PQR]$ , após a rotação do plano  $\rho$  em torno do eixo  $e$ ) – a Projeção horizontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre  $h'_\rho$ , pois o plano  $\rho$ , após a rotação, é um plano projetante horizontal.

#### Transformação do plano $\rho$ num plano frontal (de frente):

Para transformar o plano  $\rho$  num plano frontal (de frente) é necessário rodar o plano  $\rho$  até que ele fique paralelo ao Plano Frontal de Projeção – as alterações processam-se ao nível dos afastamentos dos pontos, mantendo-se as suas cotas. Assim, os arcos de rotação estão contidos em planos horizontais (porque as cotas se mantêm), pelo que o eixo da rotação tem de ser uma **reta vertical** (ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical (reta  $e'$ ), de forma a ser ponto  $R'$  o ponto que nos permite rodar o plano. Para tal, o segmento de reta  $[O'R']$  é simultaneamente ortogonal ao plano  $\rho$  e ao eixo de rotação (reta  $e'$ ), sendo o ponto  $O'$  o centro da rotação do ponto  $R'$ . Note que não se identificou o plano horizontal (de nível) que contém, o arco da rotação do ponto  $R'$ . Assim, o ponto  $O'$  (o centro da rotação do ponto  $R'$ ) é o ponto da reta  $e'$  que tem a cota de  $R'$ .

Para transformar o plano  $\rho$  num plano frontal (de frente), o seu traço horizontal ( $h'_\rho$ ), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento de reta  $[O'R']$  é perpendicular a  $h'_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ , após a rotação), o segmento  $[O'R']$  tem de rodar até ficar de topo (ortogonal ao eixo  $X$ ). O arco da rotação do ponto  $Q'$  está contido num plano horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em Projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $O'$ ) e com raio até  $R'_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $R'$ ), desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $R'$  até à linha de chamada que passa por  $O'_1$ , na qual se situa  $R''_1$  –  $R''_2$  fica imediatamente coincidente com  $O'_2$ , pois o ponto manteve a sua cota ao longo da sua rotação. O ponto  $R''$  é o ponto  $R'$  rodado.

Por  $R''_1$  conduziu-se  $h''_\rho$ , perpendicular a  $[O'R'']$  (e, consequentemente, paralelo ao eixo  $X$ , que era o pretendido) –  $h''_\rho$  é o traço frontal do plano  $\rho$ , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos (os pontos  $P'$  e  $Q'$ ), para definir o plano  $\rho$  após a sua rotação e para ser possível desenhar as projeções do triângulo  $[P'Q'R']$ , após a rotação.

O plano  $\rho$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais dos pontos  $P'$  e  $Q'$  (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $h''_\rho$ . Analisemos a rotação do ponto  $P'$  – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $P''_1$  se situe sobre  $h''_\rho$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto  $P'$  nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $P'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O'_1 \equiv (e'_1)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e'_1$  e raio até  $P'_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $P'$  até  $h''_\rho$ , sobre a qual se situa  $P''_1$  ( $P''$  é o ponto  $P'$  rodado). Uma vez que o arco da rotação do ponto  $P'$  está contido num plano horizontal (de nível), o ponto  $P'$  mantém a sua cota, o que nos permitiu transportar a cota de  $P'$  para a linha de chamada que passa por  $P''_1$ , determinando  $P''_2$  (a Projeção frontal do ponto  $P''$ ). O ponto  $P''$  é o ponto  $P'$  rodado. O processo exposto para a rotação do ponto  $P'$  repetiu-se para o ponto  $Q'$ , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $Q''$  (o ponto  $Q'$  rodado).

Por fim, a partir das projeções dos pontos  $P''$ ,  $Q''$  e  $R''$ , desenharam-se as projeções do triângulo  $[P''Q''R'']$  (o triângulo  $[PQR]$ , após a segunda rotação do plano  $\rho$  em torno do eixo  $e'$ ) – a Projeção horizontal do triângulo mantém-se reduzida a um segmento de reta sobre  $h''_\rho$ , pois o plano  $\rho$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante horizontal. O triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois o plano  $\rho$ , após a segunda rotação, está paralelo ao Plano Frontal de Projeção – a verdadeira grandeza do triângulo  $[PQR]$  está no triângulo  $[P''_2Q''_2R''_2]$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[PQR]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (pois é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\rho$ , apesar de integrarem os dados (de forma indireta), representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. A Projeção frontal do triângulo  $[P'Q'R']$ , que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$ , ainda, das projeções dos arcos das rotações).





(continuação da página anterior)

Analisemos a rotação do ponto  $Q$  – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $Q'_1$  se situe na linha de chamada que passa por  $Q'_2$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto  $Q$  nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $Q$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_1 \equiv (e_1)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e_1$  e raio até  $Q_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $Q$  até à linha de chamada de  $Q'_2$ , sobre a qual se situa  $Q'_1$  ( $Q'$  é o ponto  $Q$  rodado). O processo exposto para a rotação do ponto  $Q$  repetiu-se para o ponto  $R$ , o que nos permitiu determinar a Projeção horizontal do ponto  $R'$  (o ponto  $R$  rodado) –  $R'_1$  situa-se na linha de chamada que passa por  $R'_2$ .

Por fim, desenharam-se as projeções do triângulo  $[P'Q'R']$  (o triângulo  $[PQR]$ , após a rotação do plano  $\rho$  em torno do eixo  $e$ ) – a Projeção frontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre  $f'_\rho$ , pois o plano  $\rho$ , após a rotação, é um plano projetante frontal.

#### Transformação do plano $\rho$ num plano horizontal (de nível):

Para transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível) é necessário rodar o plano  $\rho$  até que ele fique paralelo ao Plano Horizontal de Projeção – as alterações processam-se ao nível das cotas dos pontos, mantendo-se os seus afastamentos. Assim, os arcos de rotação estão contidos em planos frontais (porque os afastamentos se mantêm), pelo que o eixo da rotação tem de ser uma **reta de topo** (ortogonal aos planos que contém os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo (reta  $e'$ ), de forma a ser ponto  $Q'$  o ponto que nos permite rodar o plano. Para tal, o segmento de reta  $[O'Q']$  é simultaneamente ortogonal ao plano  $\rho$  e ao eixo de rotação (reta  $e'$ ), sendo o ponto  $O'$  o centro da rotação do ponto  $Q'$ . Note que não se identificou o plano frontal (de frente) que contém, o arco da rotação do ponto  $Q'$ . Assim, o ponto  $O'$  (o centro da rotação do ponto  $Q'$ ) é o ponto da reta  $e'$  que tem o afastamento de  $Q'$ .

Para transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível), o seu traço frontal ( $f'_\rho$ ), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento de reta  $[O'Q']$  é perpendicular a  $f'_\rho$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , após a rotação), o segmento  $[O'Q']$  tem de rodar até ficar vertical (ortogonal ao eixo  $X$ ). O arco da rotação do ponto  $Q'$  está contido num plano frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em Projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_2$  (a Projeção frontal do ponto  $O'$ ) e com raio até  $Q'_2$  (a Projeção frontal do ponto  $Q'$ ), desenhou-se o arco da rotação de  $Q'$  até à vertical que passa por  $O'_2$ , na qual se situa  $Q''_2 - Q''_1$  fica imediatamente coincidente com  $O'_1$ , pois o ponto manteve o seu afastamento ao longo da sua rotação. O ponto  $Q''$  é o ponto  $Q'$  rodado.

Por  $Q''_2$  conduziu-se  $f''_\rho$ , perpendicular a  $[O'Q'']$  (e, consequentemente, paralelo ao eixo  $X$ , que era o pretendido) –  $f''_\rho$  é o traço frontal do plano  $\rho$ , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos (os pontos  $P'$  e  $R'$ ), para definir o plano  $\rho$  após a sua rotação e para ser possível desenhar as projeções do triângulo  $[P'Q'R']$ , após a rotação.

O plano  $\rho$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais dos pontos  $P'$  e  $R'$  (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $f''_\rho$ . Analisemos a rotação do ponto  $P'$  – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $P''_2$  se situe sobre  $f''_\rho$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto  $P'$  nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $P'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois está contido num plano frontal) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O'_2 \equiv (e'_2)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e'_2$  e raio até  $P'_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de  $P'$  até  $f''_\rho$ , sobre o qual se situa  $P''_2$  ( $P''$  é o ponto  $P'$  rodado). Uma vez que o arco da rotação do ponto  $P'$  está contido num plano frontal (de frente), o ponto  $P'$  mantém o seu afastamento, o que nos permitiu transportar o afastamento de  $P'$  para a linha de chamada que passa por  $P''_2$ , determinando  $P''_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $P''$ ). O ponto  $P''$  é o ponto  $P'$  rodado. O processo exposto para a rotação do ponto  $P'$  repetiu-se para o ponto  $R'$ , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $R''$  (o ponto  $R'$  rodado).

Por fim, a partir das projeções dos pontos  $P''$ ,  $Q''$  e  $R''$ , desenharam-se as projeções do triângulo  $[P''Q''R'']$  (o triângulo  $[PQR]$ , após a segunda rotação do plano  $\rho$  em torno do eixo  $e'$ ) – a Projeção frontal do triângulo mantém-se reduzida a um segmento de reta sobre  $f''_\rho$ , pois o plano  $\rho$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante frontal. O triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois o plano  $\rho$ , após a segunda rotação, está paralelo ao Plano Horizontal de Projeção – a verdadeira grandeza do triângulo  $[PQR]$  está no triângulo  $[P''_1Q''_1R''_1]$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[PQR]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (pois é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\rho$ , apesar de integrarem os dados (de forma indireta), representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. A Projeção horizontal do triângulo  $[P''Q''R'']$ , que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$  e, ainda, das projeções dos arcos das rotações).



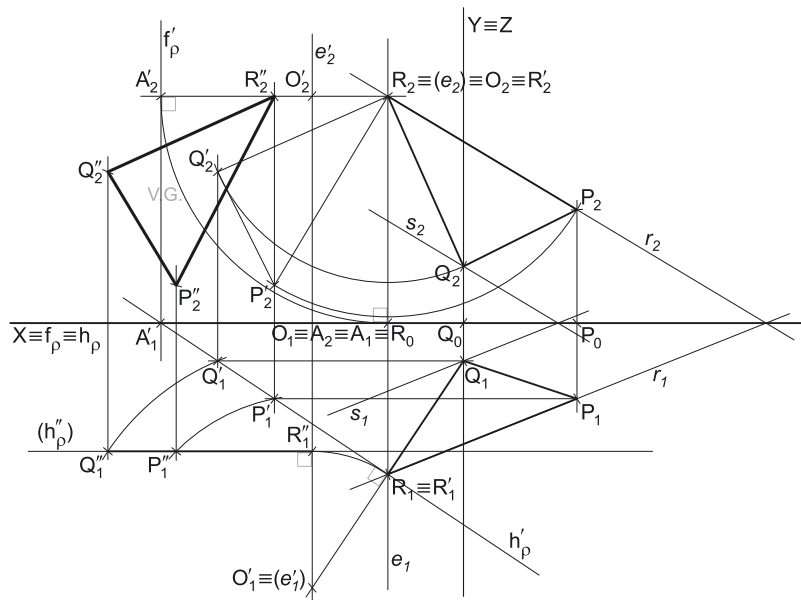
## 240.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **P**. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a Projeção horizontal do ponto **Q** ( $Q_1$ ), bem como a Projeção frontal do ponto **R** ( $R_2$ ).

Em seguida, recorreu-se à reta **r**, que passa pelos pontos **P** e **Q**. A Projeção frontal da reta **r** ( $r_2$ ) passa pelas projeções frontais dos pontos **P** e **R** ( $P_2$  e  $R_2$ , respetivamente). Uma vez que a reta **r** é uma reta do plano  $\rho$ , a reta **r** é necessariamente uma reta passante, que é concorrente com o eixo **X** num ponto (que não se identificou). Assim, a reta **r** está definida por dois pontos – o ponto **P** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que não se identificou). Foi possível, em seguida, determinar a Projeção horizontal do ponto **R** ( $R_1$ ), que se situa sobre a Projeção horizontal da reta **r** ( $r_1$ ).

Em seguida, recorreu-se à reta **s**, que passa pelo ponto **Q** e é paralela à reta **r**. A Projeção horizontal da reta **s** ( $s_1$ ) passa pela Projeção horizontal do ponto **Q** ( $Q_1$ ) e é paralela à Projeção horizontal da reta **r** ( $r_1$ ). Uma vez que a reta **s** é outra reta do plano  $\rho$ , a reta **s** é necessariamente outra reta passante, que é concorrente com o eixo **X** num ponto (que não se identificou). Assim, a reta **s** está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X** e por uma direção (a direção da reta **r**). Foi possível, em seguida, determinar a Projeção frontal do ponto **Q** ( $Q_2$ ), que se situa sobre a Projeção frontal da reta **s** ( $s_2$ ).



A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [**PQR**].

### Resolução:

O plano que contém o triângulo [**PQR**] (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de Projeção, pelo que o triângulo [**PQR**] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de Projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\rho$  num plano que seja paralelo a um dos planos de Projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\rho$  num plano frontal (de frente). Um plano frontal (de frente) é um caso particular dos planos projetantes horizontais (é um plano projetante horizontal que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano  $\rho$  num plano projetante horizontal.

#### Transformação do plano $\rho$ num plano projetante horizontal:

Um plano projetante horizontal é um plano vertical, cujo traço frontal é perpendicular ao eixo **X**. Nesse sentido, a rotação a efetuar tem, como objetivo, rodar o plano  $\rho$  até o seu traço frontal ( $f'_p$ ) ficar vertical (perpendicular ao eixo **X**). A rotação de  $f'_p$  processa-se necessariamente no Plano Frontal de Projeção (que é o plano frontal que contém a reta  $f'_p$ ), pelo que se conclui que os arcos da rotação estão contidos em planos frontais (de frente) e que o eixo de rotação é uma **reta de topo** (ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta **e**. Note que se optou por localizar o eixo **e** de forma a conter um dos vértices do triângulo – o vértice **R**, neste caso. Essa opção tem a ver com economia de traçados – o ponto **R** é um ponto do eixo de rotação, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Isto evitará a rotação de um ponto – bastará rodar dois pontos (os pontos **P** e **Q**). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto que nos permite rodar  $f'_p$  (e o plano) – o ponto **A**. O ponto **A** é o ponto de  $f'_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ) tal que [**OA**] é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta **e**) e a  $f'_p$ , sendo que **O** é o centro da rotação do ponto **A**. Note ainda que o ponto **A** é um ponto do eixo **X** (onde se situa  $f'_p$ ). O ponto **O** é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta **e**) com o plano frontal que contém o arco da rotação do ponto **A** (que é o próprio Plano Frontal de Projeção, pois o ponto **A** tem afastamento nulo). Assim, o ponto **O** é o traço frontal da reta **e**.

Para transformar  $f'_p$  numa reta vertical (que é perpendicular ao eixo **X**), o segmento [**OA**] tem de rodar até ficar fronto-horizontal (paralelo ao eixo **X**) – o ponto **A**, após a rotação, tem de ficar com a mesma cota do ponto **O**. O arco da rotação do ponto **A** está contido no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a Projeção frontal do ponto **O**) e com raio até  $A_2$  (a Projeção frontal do ponto **A**), desenhou-se o arco da rotação de **A** até à linha horizontal que passa por  $O_2$ , na qual se situa  $A'_2$  (que é o próprio eixo **X**) –  $A'_1$  fica no eixo **X**, pois o ponto manteve o seu afastamento ao longo da rotação. O ponto  $A'_1$  é o ponto **A** rodado. Note que a rotação efetuada tem 90° de amplitude.

Por  $A'_2$  conduziu-se  $f'_{p'}$ , perpendicular a [**OA'**] (e perpendicular ao eixo **X**, que era o pretendido) –  $f'_{p'}$  é o traço frontal do plano  $\rho$ , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos, para definir o plano  $\rho$  após a sua rotação. O ponto **R** é um ponto do eixo de rotação (reta **e**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, as projeções do ponto **R'** (o ponto **R** rodado) estão coincidentes com as projeções homónimas do ponto **R**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano  $\rho$ , após a rotação, é um plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais de todos os seus pontos (e retas) estão sobre o seu traço horizontal. Assim, é possível, de forma imediata, desenhar o novo traço horizontal do plano  $\rho$  (o traço horizontal do plano após a rotação) –  $h'_\rho$  (o novo traço horizontal do plano  $\rho$ ) é concorrente com  $f'_\rho$  no eixo  $X$  e passa por  $R'_1$  (está definido por dois pontos). O plano  $\rho$ , após a rotação, já é um plano vertical.

Falta-nos rodar os pontos  $P$  e  $Q$ , para ser possível desenhar as projeções do triângulo  $[PQR]$ , após a rotação. O plano  $\rho$ , após a rotação, foi transformado num plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais dos pontos  $P$  e  $Q$  (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $h'_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ , após a rotação). Uma vez que os arcos da rotação daqueles pontos estão contidos em planos frontais (de frente), os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo da sua rotação – nesse sentido, transportaram-se as projeções horizontais dos pontos  $P$  e  $Q$  para  $h'_\rho$  (através das paralelas ao eixo  $X$  que passam por  $P_1$  e  $Q_1$ ), obtendo-se  $P'_1$  e  $Q'_1$  sobre  $h'_\rho$  ( $P'$  e  $Q'$  são os pontos  $P$  e  $Q$  rodados, respetivamente).

Analisemos a rotação do ponto  $P$  – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $P'_2$  se situe na linha de chamada que passa por  $P'_1$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto  $P$  nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $P$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois está contido num plano frontal) e a Projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_2 \equiv (e_2)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e_2$  e raio até  $P_2$ , desenhou-se a Projeção frontal do arco da rotação de  $P$  até à linha de chamada de  $P'_1$ , sobre a qual se situa  $P'_2$  ( $P'$  é o ponto  $P$  rodado). O processo exposto para a rotação do ponto  $P$  repetiu-se para o ponto  $Q$ , o que nos permitiu determinar a Projeção frontal do ponto  $Q'$  (o ponto  $Q$  rodado) –  $Q'_2$  situa-se na linha de chamada que passa por  $Q'_1$ .

Por fim, desenharam-se as projeções do triângulo  $[P'Q'R']$  (o triângulo  $[PQR]$ , após a rotação do plano  $\rho$  em torno do eixo  $e$ ) – a Projeção horizontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre  $h'_\rho$ , pois o plano  $\rho$ , após a rotação, é um plano projetante horizontal.

#### Transformação do plano $\rho$ num plano frontal (de frente):

Para transformar o plano  $\rho$  num plano frontal (de frente) é necessário rodar o plano  $\rho$  até que ele fique paralelo ao Plano Frontal de Projeção – as alterações processam-se ao nível dos afastamentos dos pontos, mantendo-se as suas cotas. Assim, os arcos de rotação estão contidos em planos horizontais (porque as cotas se mantêm), pelo que o eixo da rotação tem de ser uma **reta vertical** (ortogonal aos planos que contém os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical (reta  $e'$ ), de forma a ser ponto  $R'$  o ponto que nos permite rodar o plano. Para tal, o segmento de reta  $[O'R']$  é simultaneamente ortogonal ao plano  $\rho$  e ao eixo de rotação (reta  $e'$ ), sendo o ponto  $O'$  o centro da rotação do ponto  $R'$ . Note que não se identificou o plano horizontal (de nível) que contém, o arco da rotação do ponto  $R'$ . Assim, o ponto  $O'$  (o centro da rotação do ponto  $R'$ ) é o ponto da reta  $e'$  que tem a cota de  $R'$ .

Para transformar o plano  $\rho$  num plano frontal (de frente), o seu traço horizontal ( $h'_\rho$ ), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo  $X$ . Assim, porque o segmento de reta  $[O'R']$  é perpendicular a  $h'_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ , após a rotação), o segmento  $[O'R']$  tem de rodar até ficar de topo (ortogonal ao eixo  $X$ ). O arco da rotação do ponto  $Q'$  está contido num plano horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em Projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $O'$ ) e com raio até  $R'_1$  (a Projeção horizontal do ponto  $R'$ ), desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $R'$  até à linha de chamada que passa por  $O'_1$ , na qual se situa  $R''_1$  –  $R''_2$  fica imediatamente coincidente com  $O'_2$ , pois o ponto manteve a sua cota ao longo da sua rotação. O ponto  $R''$  é o ponto  $R'$  rodado.

Por  $R''_1$  conduziu-se  $h''_\rho$ , perpendicular a  $[O'R''_1]$  (e, conseqüentemente, paralelo ao eixo  $X$ , que era o pretendido) –  $h''_\rho$  é o traço frontal do plano  $\rho$ , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos (os pontos  $P'$  e  $Q'$ ), para definir o plano  $\rho$  após a sua rotação e para ser possível desenhar as projeções do triângulo  $[P'Q'R']$ , após a rotação.

O plano  $\rho$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais dos pontos  $P'$  e  $Q'$  (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $h''_\rho$ . Analisemos a rotação do ponto  $P'$  – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $P''_1$  se situe sobre  $h''_\rho$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto  $P'$  nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $P'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois está contido num plano horizontal) e a Projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O'_1 \equiv (e'_1)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e'_1$  e raio até  $P'_1$ , desenhou-se a Projeção horizontal do arco da rotação de  $P'$  até  $h''_\rho$ , sobre a qual se situa  $P''_1$  ( $P''$  é o ponto  $P'$  rodado). Uma vez que o arco da rotação do ponto  $P'$  está contido num plano horizontal (de nível), o ponto  $P'$  mantém a sua cota, o que nos permitiu transportar a cota de  $P'$  para a linha de chamada que passa por  $P''_1$ , determinando  $P''_2$  (a Projeção frontal do ponto  $P''$ ). O ponto  $P''$  é o ponto  $P'$  rodado. O processo exposto para a rotação do ponto  $P'$  repetiu-se para o ponto  $Q'$ , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $Q''$  (o ponto  $Q'$  rodado).

Por fim, a partir das projeções dos pontos  $P''$ ,  $Q''$  e  $R''$ , desenharam-se as projeções do triângulo  $[P''Q''R'']$  (o triângulo  $[PQR]$ , após a segunda rotação do plano  $\rho$  em torno do eixo  $e'$ ) – a Projeção horizontal do triângulo mantém-se reduzida a um segmento de reta sobre  $h''_\rho$ , pois o plano  $\rho$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante horizontal. O triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois o plano  $\rho$ , após a segunda rotação, está paralelo ao Plano Frontal de Projeção – a verdadeira grandeza do triângulo  $[PQR]$  está no triângulo  $[P''_2Q''_2R''_2]$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[PQR]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (pois é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $P$ ). A projeção frontal do triângulo  $[P'Q'R']$ , que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$  e, ainda, das projeções dos arcos das rotações).

## 241.

A afirmação é **verdadeira**. De facto, um **rebatimento** consiste efetivamente numa **rotação** em que o eixo da rotação é **complanar** com o objeto a rodar, ou seja, é uma **rotação** em que o objeto a rodar e o eixo da rotação se situam **num mesmo plano**. Assim, de uma forma mais específica, um **rebatimento** consiste na **rotação de um plano** em torno de uma das suas retas – o eixo da rotação (que, nesta situação, se chama *charneira do rebatimento*).

## 242.

Por **charneira do rebatimento** entende-se a reta em torno do qual o plano roda – é a reta de interseção do plano a rebater com o plano para o qual se processa o rebatimento.

## 243.

a) Rebatendo o plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção, a charneira do rebatimento é o traço horizontal do plano  $\alpha$ . O arco do rebatimento do ponto **A** está necessariamente contido **num plano ortogonal à charneira do rebatimento**. Uma vez que o traço horizontal do plano  $\alpha$  é uma **reta horizontal (de nível) do plano** (com cota nula), o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **A** é, assim, o **plano ortogonal ao traço horizontal do plano e que contém o ponto A (e que é um plano vertical)**.

O **centro do arco do rebatimento** do ponto **A** situa-se necessariamente na charneira do rebatimento. Atendendo a que o arco do rebatimento está contido num plano (o plano que contém o ponto **A** e é ortogonal à charneira do rebatimento), o **centro do arco do rebatimento** do ponto **A** é o **ponto de interseção** da charneira do rebatimento com esse plano (o plano vertical ortogonal à charneira e que contém o ponto **A**).

b) A distância que nos permite rebater o ponto **A** é o **raio do arco do rebatimento** – é a **distância** do ponto **A** (o ponto a rebater) ao centro do arco do seu rebatimento (o ponto de interseção da charneira do rebatimento com o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento).

## 244.

a) Rebatendo o plano  $\delta$  para o Plano Frontal de Projeção, a charneira do rebatimento é o traço frontal do plano  $\delta$ . O arco do rebatimento do ponto **P** está necessariamente contido **num plano ortogonal à charneira do rebatimento**. Uma vez que o traço frontal do plano  $\delta$  é uma **reta frontal (de frente) do plano** (com afastamento nulo), o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **P** é, assim, o **plano ortogonal ao traço frontal do plano e que contém o ponto P (e que é um plano de topo)**.

O **centro do arco do rebatimento** do ponto **P** situa-se necessariamente na charneira do rebatimento. Atendendo a que o arco do rebatimento está contido num plano (o plano que contém o ponto **P** e é ortogonal à charneira do rebatimento), o **centro do arco do rebatimento** do ponto **P** é o **ponto de interseção** da charneira do rebatimento com esse plano (o plano de topo ortogonal à charneira e que contém o ponto **P**).

b) A distância que nos permite rebater o ponto **P** é o **raio do arco do rebatimento** – é a **distância** do ponto **P** (o ponto a rebater) ao centro do arco do seu rebatimento (o ponto de interseção da charneira do rebatimento com o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento).

## 245.

O problema do **rebatimento de um plano oblíquo** é o facto de o **raio do arco do rebatimento de qualquer ponto** não se projetar em verdadeira grandeza, em nenhum dos planos de Projeção.

## 246.

A grande diferença entre os dois rebatimentos referidos reside no **tipo de reta que é charneira** em cada um daqueles rebatimentos.

De facto no **rebatimento de um plano de topo para o Plano Horizontal de Projeção**, a charneira do rebatimento é o traço horizontal do plano, que é uma reta de topo (uma **reta projetante frontal**). Já no caso do rebatimento de um plano oblíquo para o Plano Horizontal de Projeção, a charneira do rebatimento é igualmente o traço horizontal do plano que, neste caso, **não é uma reta projetante** – é uma reta horizontal (uma **reta não projetante**).

## 247.

Ao contrário da situação anterior, a charneira do rebatimento, em ambos os rebatimentos agora referidos, é uma **reta não projetante**. No **rebatimento de um plano de topo para o Plano Frontal de Projeção**, a charneira do rebatimento é o **traço frontal do plano**, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – é uma **reta não projetante**. De forma semelhante, no **rebatimento de um plano oblíquo para o Plano Frontal de Projeção**, a charneira do rebatimento é também o **traço frontal do plano**, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – é uma **reta não projetante**.

Assim, a grande diferença entre estes dois rebatimentos reside no facto de o raio do arco do rebatimento de um dado ponto se projetar em verdadeira grandeza num dos planos de Projeção ou não.

Assim, **rebatimento de um plano de topo para o Plano Frontal de Projeção**, o raio do arco do rebatimento de um dado ponto projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Já no caso do **rebatimento de um plano oblíquo para o Plano Frontal de Projeção**, o raio do arco do rebatimento de qualquer ponto **não se projeta em verdadeira grandeza** em nenhum dos planos de Projeção.

248.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo **[ABC]**, em função dos dados.

Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos **A**, **B** e **C**, para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto **A** é o ponto de  $f_\alpha$  que tem 4 cm de cota ( $f_\alpha$  é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo).

Os pontos **B** e **C** têm, ambos, 4 cm de afastamento. Assim, a reta  $f$  é a reta frontal (de frente) do plano, com 4 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções dos pontos **B** e **C**. A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ). O ponto **B** é o ponto da reta  $f$  que tem 4 cm de cota. O ponto **C** é o ponto da reta  $f$  que tem 1 cm de cota.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo rebatimento dos seus traços. Começamos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $f_\alpha \equiv e_2 \equiv f_{\alpha_r}$  ( $e_1$ , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a  $f_\alpha$ ).

O ponto **A** é um ponto de  $f_\alpha$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_2$ . Nesse sentido, o rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, em oposição ao seu rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção, permite-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **A**).

Rebatimento do traço horizontal do plano  $\alpha$ :

Em seguida, é necessário rebater o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (o ponto **M**) é um ponto de  $h_\alpha$  e é, também, um ponto da charneira (que é  $f_\alpha$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $M_1 \equiv M_2 \equiv M_r$ . Já temos um ponto para definir  $h_{\alpha_r}$  (o traço horizontal do plano em rebatimento), que é  $M_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto **H**, o traço horizontal da reta  $f$  (que é um ponto de  $h_\alpha$ ). Para rebater o ponto **H** conduziu-se, pelo ponto **H**, um plano ortogonal à charneira (o plano  $\theta$ ), que se identificou, apenas, pelo seu traço frontal (que, por essa razão, se representou entre parêntesis). O plano  $\theta$  é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **H** e é um plano projetante frontal (um plano de topo), pelo que  $H_r$  tem de se situar necessariamente sobre  $f_\theta$ . A distância  $\overline{MH}$  está contida em  $h_\alpha$  e, por isso mesmo, está em verdadeira grandeza em  $\overline{M_1H_1}$ , tal como estará em verdadeira grandeza em rebatimento. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $M_r$  e com raio  $\overline{M_1H_1}$ , desenhou-se um arco (que é um **arco de transporte**) até  $f_\theta$ , determinando-se  $H_r$  (o ponto **H** rebatido), sobre  $f_\theta$ . Tenha em conta que  $\overline{M_rH_r} = \overline{M_1H_1}$ . Isto permitiu-nos desenhar  $h_{\alpha_r}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$  rebatido), que passa por  $H_r$  e  $M_r$  ( $h_{\alpha_r}$  está definido por dois pontos).

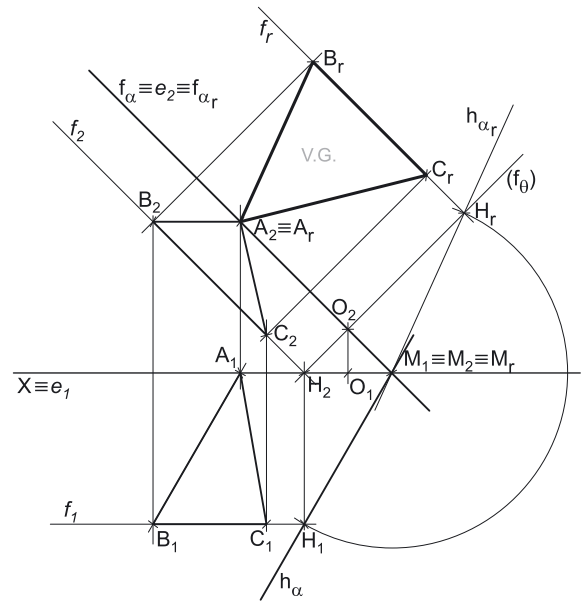
Rebatimento do ponto **B**:

Para rebater o ponto **B**, é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **B** pertença – a reta  $f$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $f$  em rebatimento (a reta  $f_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto  $H_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que a reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e que retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $f_r$ . A reta  $f_r$  (a reta  $f$  em rebatimento) passa por  $H_r$  e é paralela a  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  em rebatimento) –  $f_r$  está definida por um ponto ( $H_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $f_{\alpha_r}$ ).

O ponto **B** é um ponto da reta  $f$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $B_r$  está sobre  $f_r$ , na perpendicular a  $f_\alpha$  (a charneira) que passa por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto **B**) – essa perpendicular corresponde ao traço frontal do plano ortogonal a  $f_\alpha$  (a charneira do rebatimento) que contém o ponto **B** (bem como o arco do seu rebatimento). Assim,  $B_r$  (o ponto **B** rebatido) é o ponto de interseção de  $f_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $B_2$ .

Rebatimento do ponto **C**:

Para rebater o ponto **C** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **C** pertença. Tendo em conta que o ponto **C** é outro ponto da reta  $f$ , que já foi rebatida, o rebatimento do ponto **C** processa-se de forma direta.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **C** é outro ponto da reta  $f$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $C_r$  está sobre  $f_r$ , na perpendicular a  $f_\alpha$  (a charneira) que passa por  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**) – essa perpendicular corresponde ao traço frontal do plano ortogonal a  $f_\alpha$  (a charneira do rebatimento) que contém o ponto **C** (bem como o arco do seu rebatimento). Assim,  $C_r$  (o ponto **C** rebatido) é o ponto de interseção de  $f_r$  com a perpendicular a charneira que passa por  $C_2$ .

A partir dos três pontos rebatidos ( $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ ), desenhou-se o triângulo **[ABC]** em rebatimento (o triângulo  $[A_rB_rC_r]$ ), que é o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$  e as projeções do triângulo **[ABC]**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (pois é a linha estruturante do exercício). O triângulo  $[A_rB_rC_r]$  (o triângulo **[ABC]** rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $h$ , dos traçados relativos ao rebatimento do ponto **H**, da reta  $h_r$  e, ainda dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos **B** e **C**).

## 249.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo **[ABC]**, em função dos dados.

### Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos **A**, **B** e **C**, para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto **A** é o ponto de  $f_\alpha$  que tem 4 cm de cota ( $h_\alpha$  é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo).

Os pontos **B** e **C** têm, ambos, 4 cm de afastamento. Assim, a reta  $f$  é a reta frontal (de frente) do plano, com 4 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções dos pontos **B** e **C**. A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ). O ponto **B** é o ponto da reta  $f$  que tem 4 cm de cota. O ponto **C** é o ponto da reta  $f$  que tem 1 cm de cota.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

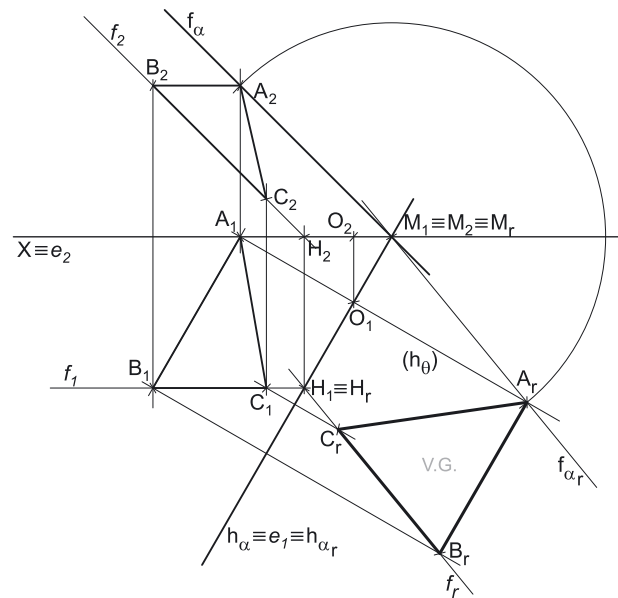
### Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção, pelo rebatimento dos seus traços. Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

### Rebatimento do traço frontal do plano $\alpha$ :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (o ponto **M**) é um ponto de  $f_\alpha$  e é um ponto da charneira (que é  $h_\alpha$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $M_1 \equiv M_2 \equiv M_r$ . Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é  $M_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto **A**, que é um outro ponto do traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). Para rebater o ponto **A** conduziu-se, pelo ponto **A**, um plano ortogonal à charneira (o plano  $\theta$ ), que se identificou, apenas, pelo seu traço horizontal (que, por essa razão, se representou entre parêntesis). O plano  $\theta$  é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **A** e é um plano projetante horizontal (um plano vertical), pelo que  $A_r$  tem de se situar necessariamente sobre  $h_\theta$ . A distância  $MA$  está contida em  $f_\alpha$  e, por isso mesmo, está em verdadeira grandeza em  $M_2A_2$ , tal como estará em verdadeira grandeza em rebatimento. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $M_r$  e com raio  $M_2A_2$ , desenhou-se um arco (que é um **arco de transporte**) até  $h_\theta$ , determinando-se  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) sobre  $h_\theta$ . Tenha em conta que  $M_rA_r = M_2A_2$ . Isto permitiu-nos desenhar  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), que passa por  $A_r$  e  $M_r$  ( $f_{\alpha_r}$  está definido por dois pontos).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Rebatimento do ponto B:

Para rebater o ponto **B** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **B** pertença – a reta **f**, neste caso. Assim, para definirmos a reta **f** em rebatimento (a reta **f<sub>r</sub>**), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço horizontal da reta **f** (o ponto **H**) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **H<sub>r</sub> ≡ H<sub>1</sub>**. Assim, já temos um ponto para definir **f<sub>r</sub>** (a reta **f** em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que a reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e que retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), já temos a direção que nos faltava para definir a reta **f<sub>r</sub>**. A reta **f<sub>r</sub>** (a reta **f** em rebatimento) passa por **H<sub>r</sub>** e é paralela a **f<sub>αr</sub>** (o traço frontal do plano  $\alpha$  em rebatimento) – **f<sub>r</sub>** está definida por um ponto (**H<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a **f<sub>αr</sub>**).

O ponto **B** é um ponto da reta **f** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **B<sub>r</sub>** está sobre **f<sub>r</sub>**, na perpendicular a **h<sub>α</sub>** (a charneira) que passa por **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**) – essa perpendicular corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal a **h<sub>α</sub>** (a charneira do rebatimento) que contém o ponto **B** (bem como o arco do seu rebatimento). Assim, **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido) é o ponto de interseção de **f<sub>r</sub>** com a perpendicular à charneira que passa por **B<sub>1</sub>**.

### Rebatimento do ponto C:

Para rebater o ponto **C** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **C** pertença. Tendo em conta que o ponto **C** é outro ponto da reta **f**, que já foi rebatida, o rebatimento do ponto **C** processa-se de forma direta.

O ponto **C** é outro ponto da reta **f** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **C<sub>r</sub>** está sobre **f<sub>r</sub>**, na perpendicular a **h<sub>α</sub>** (a charneira) que passa por **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**) – essa perpendicular corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal a **h<sub>α</sub>** (a charneira do rebatimento) que contém o ponto **C** (bem como o arco do seu rebatimento). Assim, **C<sub>r</sub>** (o ponto **C** rebatido) é o ponto de interseção de **f<sub>r</sub>** com a perpendicular à charneira que passa por **C<sub>1</sub>**.

A partir dos três pontos rebatidos (**A<sub>r</sub>**, **B<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**), desenhou-se o triângulo [**ABC**] em rebatimento (o triângulo [**A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>C<sub>r</sub>**]), que é o triângulo [**ABC**] em verdadeira grandeza.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$  e as projeções do triângulo [**ABC**]) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (pois é a linha estruturante do exercício). O triângulo [**A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>C<sub>r</sub>**] (o triângulo [**ABC**] rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **h**, dos traçados relativos ao rebatimento do ponto **H**, da reta **h<sub>r</sub>** e, ainda dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos **B** e **C**).

## 250.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo [**ABC**], em função dos dados.

### Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos **A**, **B** e **C**, para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

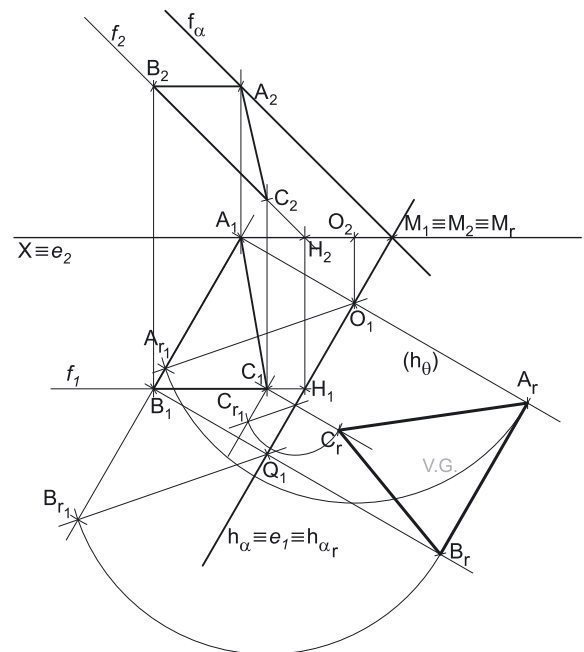
O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de **f<sub>α</sub>** (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto **A** é o ponto de **f<sub>α</sub>** que tem 4 cm de cota (**h<sub>α</sub>** é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo).

Os pontos **B** e **C** têm, ambos, 4 cm de afastamento. Assim, a reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano, com 4 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções dos pontos **B** e **C**. A reta **f** está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ). O ponto **B** é o ponto da reta **f** que tem 4 cm de cota. O ponto **C** é o ponto da reta **f** que tem 1 cm de cota.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [**ABC**].

### Resolução:

O plano que contém o triângulo [**ABC**] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo [**ABC**] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção, pelo triângulo do rebatimento. Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  (**h<sub>α</sub>**), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, **h<sub>α</sub> ≡ e<sub>1</sub> ≡ h<sub>αr</sub>** (**e<sub>2</sub>**, a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a **h<sub>α</sub>**).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Rebatimento do ponto A:

Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por **A**, um plano ortogonal à charneira (o plano  $\theta$ ), que se identificou, apenas, pelo seu traço horizontal (que, por essa razão, se representou entre parêntesis). O plano  $\theta$  é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **A** e é um plano projetante horizontal (um plano vertical), pelo que **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido) tem de se situar necessariamente sobre  $h_0$ . Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **A**, que é o ponto **O** (o ponto de interseção do plano  $\theta$  com a charneira –  $h_\alpha$ ).

O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é  $\overline{OA}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A** – o triângulo do rebatimento do ponto **A** é o triângulo retângulo  $[OAA_1]$ , que é retângulo em **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**). O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{OA}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (pois é oblíqua a ambos os planos de projeção), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano  $\theta$  neste caso. Para tal rebateu-se o plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção (em torno do seu traço horizontal –  $h_0$ ) e construiu-se o triângulo  $[OAA_1]$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**) conduziu-se uma paralela à charneira ( $h_\alpha$ ), sobre a qual se marcou a cota do ponto **A** (que é um dos catetos do triângulo  $[OAA_1]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto **A<sub>r1</sub>**. O ponto **A<sub>r1</sub>** é o ponto **A**, rebatido pelo rebatimento do plano  $\theta$ . Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[O_1A_{r1}]$ , que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento (do ponto **A**) em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** (em **O<sub>1</sub>**) e com raio  $\overline{OA_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco  $\widehat{A_r1A_r}$ ), em verdadeira grandeza, até  $h_0$ , onde se situa **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido).

## Rebatimento do ponto B:

Para rebater o ponto **B** conduziu-se, por **B**, um plano ortogonal à charneira (que não se identificou) – a perpendicular à charneira ( $h_\alpha$ ) que passa por **B<sub>1</sub>** corresponde, na realidade, ao traço horizontal desse plano. Esse plano é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **B** e é um plano projetante horizontal (um plano vertical), pelo que **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido) tem de se situar necessariamente sobre o seu traço horizontal (a perpendicular à charneira que passa por **B<sub>1</sub>**). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **B**, que é o ponto **Q** – o ponto de interseção da charneira ( $h_\alpha$ ) com a perpendicular à charneira que passa por **B<sub>1</sub>**. Salienta-se que se representou o ponto **Q** apenas pela sua projeção horizontal (**Q<sub>1</sub>**).

O raio do arco do rebatimento do ponto **B** é  $\overline{QB}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **B** – o triângulo do rebatimento do ponto **B** é o triângulo retângulo  $[QBB_1]$ , que é retângulo em **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**). O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{QB}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (pois é oblíqua a ambos os planos de projeção), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano ortogonal à charneira (o plano vertical) que contém o ponto **B**. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção (em torno do seu traço horizontal) e construiu-se o triângulo  $[QBB_1]$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**) conduziu-se uma paralela à charneira ( $h_\alpha$ ), sobre a qual se marcou a cota do ponto **B** (que é um dos catetos do triângulo  $[QBB_1]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto **B<sub>r1</sub>**. O ponto **B<sub>r1</sub>** é o ponto **B**, rebatido pelo rebatimento do plano que contém o arco do seu rebatimento. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[Q_1B_{r1}]$ , que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento (do ponto **B**) em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto **Q** (em **Q<sub>1</sub>**) e com raio  $\overline{QB_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **B** (o arco  $\widehat{B_{r1}B_r}$ ), em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por **B<sub>1</sub>**, onde se situa **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido).

## Rebatimento do ponto C:

Para rebater o ponto **C** conduziu-se, por **C**, um plano ortogonal à charneira (que não se identificou) – a perpendicular à charneira ( $h_\alpha$ ) que passa por **C<sub>1</sub>** corresponde, na realidade, ao traço horizontal desse plano. Esse plano é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **C** e é um plano projetante horizontal (um plano vertical), pelo que **C<sub>r</sub>** (o ponto **C** rebatido) tem de se situar necessariamente sobre essa perpendicular à charneira. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **C** que é o ponto de interseção da charneira ( $h_\alpha$ ) com a perpendicular à charneira que passa por **C<sub>1</sub>**. Salienta-se que não se identificou o centro do arco do rebatimento do ponto **C**, com vista a uma gradual (e desejável) simplificação da resolução gráfica, em termos de excesso de notações

O raio do arco do rebatimento do ponto **C** é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **C** – o triângulo do rebatimento do ponto **C** é o triângulo retângulo em **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**), que tem um vértice no ponto **C** e o terceiro vértice na charneira (no centro do arco do rebatimento do ponto **C**). O raio do arco do rebatimento (a hipotenusa do triângulo) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (pois é oblíqua a ambos os planos de projeção), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano vertical (o plano ortogonal à charneira) que contém o ponto **C**, bem como o arco do seu rebatimento. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção (em torno do seu traço horizontal) e construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **C** em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**) conduziu-se uma paralela à charneira ( $h_\alpha$ ), sobre a qual se marcou a cota do ponto **C** (que é um dos catetos do triângulo), o que nos permitiu determinar o ponto **C<sub>r1</sub>**. O ponto **C<sub>r1</sub>** é o ponto **C**, rebatido pelo rebatimento do plano que contém o arco do seu rebatimento. Em seguida, concluiu-se o desenho do triângulo, com o terceiro vértice na charneira ( $h_\alpha$ ). Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e raio até **C<sub>r1</sub>**, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **C** (o arco  $\widehat{C_{r1}C_r}$ ), em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por **C<sub>1</sub>**, onde se situa **C<sub>r</sub>** (o ponto **C** rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos (**A<sub>r</sub>**, **B<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**), desenhou-se o triângulo  $[ABC]$  em rebatimento (o triângulo  $[A_rB_rC_r]$ ), que é o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza.

## Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$  e as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O triângulo  $[A_rB_rC_r]$  (o triângulo  $[ABC]$  rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **f**, dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, os respetivos triângulos do rebatimento em verdadeira grandeza).

## 251.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal a  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ , em função dos dados.

*Determinação das projeções do triângulo:*

Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano, com 3 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $A$  – a reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). O ponto  $A$  é o ponto da reta  $h$  que tem 3 cm de afastamento.

A reta  $h'$  é a reta horizontal (de nível) do plano, com 6 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $B$  – a reta  $h'$  está definida por um ponto (o ponto  $F'$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). O ponto  $B$  é o ponto da reta  $h'$  que tem 2 cm de afastamento.

A reta  $h''$  é a reta horizontal (de nível) do plano, com 1 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $C$  – a reta  $h''$  está definida por um ponto (o ponto  $F''$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). O ponto  $C$  é o ponto da reta  $h''$  que tem 6 cm de afastamento.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar**. Uma vez que o enunciado é omissivo relativamente ao processo a utilizar, optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção, pelo rebatimento dos seus traços. Começamos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

*Rebatimento do traço frontal do plano  $\alpha$ :*

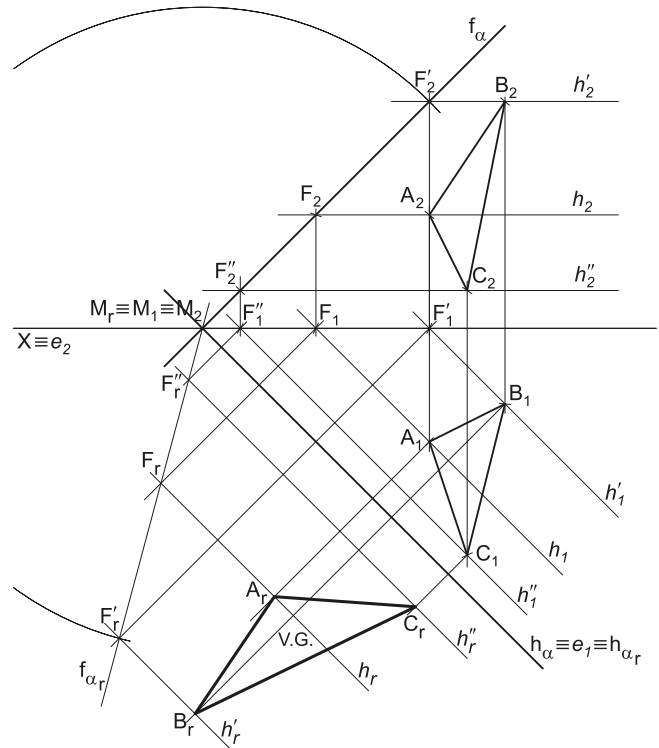
Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (o ponto  $M$ ) é um ponto de  $f_\alpha$  e é um ponto da charneira (que é  $h_\alpha$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $M_1 \equiv M_2 \equiv M_r$ . Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é  $M_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto  $F'$ , que é um outro ponto do traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). Note que a opção de rebater o ponto  $F'$  teve a ver com questões de rigor, pois  $F'$  é o ponto mais distante do ponto de concorrência dos dois traços do plano. Para rebater o ponto  $F'$  conduziu-se, por  $F'_1$ , uma perpendicular à charneira ( $h_\alpha$ ), que corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal à charneira que passa pelo ponto  $F'$  (e que contém o arco do seu rebatimento). Esse plano é um plano projetante horizontal (um plano vertical), pelo que  $F'_r$  tem de se situar necessariamente sobre o seu traço horizontal (a perpendicular à charneira que passa por  $F'_1$ ). Note que, na prática, não se identificou o plano ortogonal à charneira que passa pelo ponto  $F'$ , com vista a uma gradual (e desejável) simplificação da resolução gráfica, em termos de excesso de notações.

A distância  $\overline{MF'}$  está contida em  $f_\alpha$  e, por isso mesmo, está em verdadeira grandeza em  $\overline{M_2F'_2}$ , tal como estará em verdadeira grandeza em rebatimento. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $M_r$  e com raio  $\overline{M_2F'_2}$ , desenhou-se um arco (que é um **arco de transporte**) até à perpendicular à charneira (que passa por  $F'_1$ ), onde se situa  $F'_r$  (o ponto  $F'$  rebatido). Tenha em conta que  $\overline{M_rF'_r} = \overline{M_2F'_2}$ . Isto permitiu-nos desenhar  $f_{\alpha r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), que passa por  $F'_r$  e  $M_r$  ( $f_{\alpha r}$  está definido por dois pontos).

*Rebatimento do ponto B:*

Para rebater o ponto  $B$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $B$  pertença – a reta  $h'$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $h'$  em rebatimento (a reta  $h'_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal da reta  $h'$  (o ponto  $F'$ ) já foi rebatido, pelo que já temos um ponto para definir  $h'_r$  (o ponto  $F'_r$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que a reta  $h'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e que retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $h'_r$ . A reta  $h'_r$  (a reta  $h'$  em rebatimento) passa por  $F'_r$  e é paralela a  $h_{\alpha r}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$  em rebatimento) –  $h'_r$  está definida por um ponto ( $F'_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha r}$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **B** é um ponto da reta  $h'$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $B_r$  está sobre  $h'_r$ , na perpendicular a  $h_\alpha$  (a charneira) que passa por  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**) – essa perpendicular corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal a  $h_\alpha$  (a charneira do rebatimento) que contém o ponto **B** (bem como o arco do seu rebatimento). Assim,  $B_r$  (o ponto **B** rebatido) é o ponto de interseção de  $h'_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ .

### Rebatimento do ponto A:

Para rebater o ponto **A** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **A** pertença – a reta  $h$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $h$  em rebatimento (a reta  $h_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e que retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), pelo que já temos uma direção para definir a reta  $h_r$  (a direção de  $h_{\alpha_r}$ ). Falta-nos um ponto para definir  $h_r$ . Esse ponto pode ser o seu traço frontal (o ponto **F**) que tem de ser rebatido.

Tendo em conta que o traço frontal da reta  $h$  (o ponto **F**) é um ponto do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que já foi previamente rebatido, o rebatimento do ponto **F** processa-se transportando o ponto **F** para o rebatimento de  $f_\alpha$ . Nesse sentido, conduziu-se, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto **F**), uma perpendicular à charneira ( $h_\alpha$ ) – essa perpendicular à charneira corresponde à representação do plano ortogonal à charneira que contém o ponto **F** (bem como o arco do seu rebatimento). O ponto de interseção da perpendicular à charneira (que passa por  $F_1$ ) com  $f_{\alpha_r}$  é o ponto  $F_r$  (o ponto **F** rebatido). Assim, em rebatimento, também se verifica que o traço frontal da reta  $h$  (o ponto **F**) se situa sobre o traço frontal do plano  $\alpha$ , porque a reta  $h$  pertence ao plano  $\alpha$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_r$ .

A reta  $h_r$  (a reta  $h$  em rebatimento) passa por  $F_r$  e é paralela a  $h_{\alpha_r}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$  em rebatimento) –  $h_r$  está definida por um ponto ( $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha_r}$ ).

O ponto **A** é um ponto da reta  $h$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $A_r$  está sobre  $h_r$ , na perpendicular a  $h_\alpha$  (a charneira) que passa por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**) – essa perpendicular corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal a  $h_\alpha$  (a charneira do rebatimento) que contém o ponto **A** (bem como o arco do seu rebatimento). Assim,  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) é o ponto de interseção de  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ .

Note que não se identificaram os planos ortogonais à charneira que passam pelos pontos **F** e **A**, apesar de aqueles planos se terem efetivamente representado pelos respetivos traços horizontais (as perpendiculares à charneira que passam por  $F_1$  e por  $A_1$ , respetivamente). Esta omissão de notações tem a ver com a gradual (e desejável) simplificação da resolução gráfica, m termos de excesso de notações.

### Rebatimento do ponto C:

Para rebater o ponto **C** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **C** pertença – a reta  $h''$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $h''$  em rebatimento (a reta  $h''_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h''$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e que retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), pelo que já temos uma direção para definir a reta  $h''_r$  (a direção de  $h_{\alpha_r}$ ). Falta-nos um ponto para definir  $h''_r$ . Esse ponto pode ser o seu traço frontal (o ponto  $F''$ ) que tem de ser rebatido.

Tendo em conta que o traço frontal da reta  $h''$  (o ponto  $F''$ ) é um ponto do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que já foi previamente rebatido, o rebatimento do ponto  $F''$  processa-se transportando o ponto  $F''$  para o rebatimento de  $f_\alpha$ . Nesse sentido, conduziu-se, por  $F''_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F''$ ), uma perpendicular à charneira ( $h_\alpha$ ) – essa perpendicular à charneira corresponde à representação do plano ortogonal à charneira que contém o ponto  $F''$  (bem como o arco do seu rebatimento). O ponto de interseção da perpendicular à charneira (que passa por  $F''_1$ ) com  $f_{\alpha_r}$  é o ponto  $F''_r$  (o ponto  $F''$  rebatido). Assim, em rebatimento, também se verifica que o traço frontal da reta  $h''$  (o ponto  $F''$ ) se situa sobre o traço frontal do plano  $\alpha$ , porque a reta  $h''$  pertence ao plano  $\alpha$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h''_r$ .

A reta  $h''_r$  (a reta  $h''$  em rebatimento) passa por  $F''_r$  e é paralela a  $h_{\alpha_r}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$  em rebatimento) –  $h''_r$  está definida por um ponto ( $F''_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha_r}$ ).

O ponto **C** é um ponto da reta  $h''$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $C_r$  está sobre  $h''_r$ , na perpendicular a  $h_\alpha$  (a charneira) que passa por  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**) – essa perpendicular corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal a  $h_\alpha$  (a charneira do rebatimento) que contém o ponto **C** (bem como o arco do seu rebatimento). Assim,  $C_r$  (o ponto **C** rebatido) é o ponto de interseção de  $h''_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $C_1$ .

Note que não se identificaram os planos ortogonais à charneira que passam pelos pontos  $F''$  e **C**, apesar de aqueles planos se terem efetivamente representado pelos respetivos traços horizontais (as perpendiculares à charneira que passam por  $F''_1$  e por  $C_1$ , respetivamente). Esta omissão de notações tem a ver com a gradual (e desejável) simplificação da resolução gráfica, m termos de excesso de notações.

A partir dos três pontos rebatidos ( $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ ), desenhou-se o triângulo **[ABC]** em rebatimento (o triângulo  $[A_r B_r C_r]$ ), que é o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$  e as projeções do triângulo **[ABC]**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (pois é a linha estruturante do exercício). O triângulo  $[A_r B_r C_r]$  (o triângulo **[ABC]** rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $h$ ,  $h'$  e  $h''$ , dos traçados relativos ao rebatimento dos pontos  $F'$ , **F** e  $F''$ , das retas  $h_r$ ,  $h'_r$  e  $h''_r$ , e, ainda dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os três pontos).

## 252.

**Dados:**

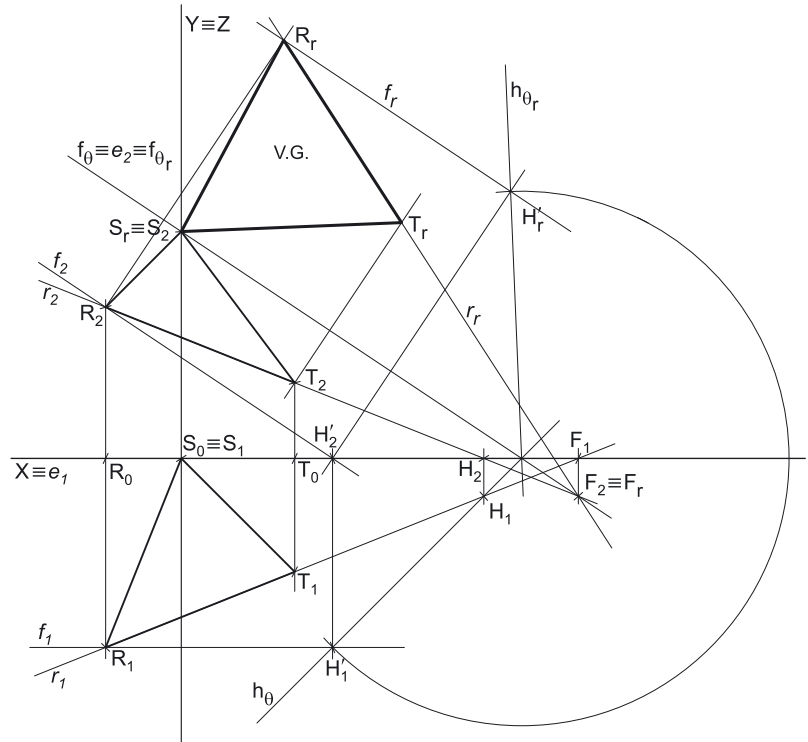
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R**, **S** e **T**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, desenharam-se as projeções triângulo **[RST]** e determinaram-se os traços do plano  $\theta$ .

**Determinação dos traços do plano  $\theta$ :**

O **traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ )** é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **S** é um ponto com afastamento nulo, pelo que o ponto **S** é necessariamente um ponto de  $f_\theta$  – já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_\theta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano (os três pontos) são insuficientes para determinar o elemento em falta, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se à reta **r**, como reta auxiliar do plano. A reta **r** é uma reta oblíqua e está definida pelos pontos **R** e **T** (dois dos pontos que definem o plano  $\theta$ ). Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta **r** (o ponto **F**) – já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ). O traço frontal do plano ( $f_\theta$ ) está, assim, definido por dois pontos – o ponto **S** e o ponto **F**.

O **traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ )** é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos um ponto para definir  $h_\theta$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $h_\theta$ . Determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **r**. Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\theta$ . Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) está definido por dois pontos – o ponto **H** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.



Salienta-se que, **por uma questão de rigor**, o ponto **H** não é o ponto mais indicado para definir o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), pois os dois pontos determinados (o ponto **H** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano) **estão demasiado próximos**. De facto, para definir uma reta por dois pontos, será aconselhável que esses dois pontos estejam afastados um do outro o mais possível.

Nesse sentido, para nos certificarmos da correta determinação do traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), recorreu-se a uma outra reta auxiliar do plano – a reta **f**. A reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$  e está definida por um ponto (o ponto **R**, um dos pontos que define o plano  $\theta$ ) e uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\theta$  – é paralela a  $f_\theta$ ). Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta **f** – o ponto **H'**. Este ponto, que é um outro ponto do traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ), está suficientemente afastado do ponto de concorrência dos traços do plano, para nos garantir um rigor apreciável. Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), ficou, no final, definido por três pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano, o ponto **H** e o ponto **H'**.

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo **[RST]** (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[RST]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\theta$  pelo rebatimento dos seus traços. Optou-se por rebater o plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção, por uma questão de economia de traçados (o ponto **S** é um ponto do Plano Frontal de Projeção). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $f_\theta \equiv e_2 \equiv f_{\theta_r}$  ( $e_1$ , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a  $f_\theta$ ).

O ponto **S** é um ponto de  $f_\theta$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S_2$ . Nesse sentido, o rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção, em oposição ao seu rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção, permite-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **S**).

**Rebatimento do traço horizontal do plano  $\theta$ :**

Em seguida, é necessário rebater o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano é um ponto de  $h_\theta$  e é, também, um ponto da charneira (que é  $f_\theta$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir  $h_{\theta_r}$  (o traço horizontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se por se rebater o ponto  $H'$ , o traço horizontal da reta  $f$  (que é um ponto de  $h_0$ ). Salienta-se que o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $r$ ) está demasiado próximo do ponto de concorrência dos dois traços do plano, pelo que o rebatimento do ponto  $H$  não confere muito rigor à resolução do exercício (como atrás se referiu). Por esse motivo (rigor da resolução), se optou por rebater o ponto  $H'$ , que está suficientemente afastado do ponto de concorrência dos dois traços do plano, para nos permitir um rigor apreciável.

Para rebater o ponto  $H'$  conduziu-se, por  $H'_2$  (a projeção frontal do ponto  $H'$ ), uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contem o arco do rebatimento do ponto  $H'$  (plano esse que não se identificou). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano e com raio até  $H'_1$ , desenhou-se um arco (que é um **arco de transporte**) até à perpendicular à charneira que passa por  $H'_2$ , onde se situa  $H'_r$  (o ponto  $H'$  rebatido). Isto permitiu-nos desenhar  $h_{0r}$  (o traço horizontal do plano  $\theta$  rebatido), que passa por  $H'_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $h_{0r}$  está definido por dois pontos).

#### Rebatimento do ponto R:

Para rebater o ponto  $R$ , é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $R$  pertença – a reta  $r$  ou a reta  $f$ , neste caso (o ponto  $R$  pertence às duas retas). Optou-se por rebater a reta  $f$ . Assim, para definirmos a reta  $f$  em rebatimento (a reta  $f_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto  $H'_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que a reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$  e que retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $f_r$ . A reta  $f_r$  (a reta  $f$  em rebatimento) passa por  $H'_r$  e é paralela a  $f_{0r}$  (o traço frontal do plano  $\theta$  em rebatimento) –  $f_r$  está definida por um ponto ( $H'_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $f_{0r}$ ).

O ponto  $R$  é um ponto da reta  $f$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $R_r$  está sobre  $f_r$ , na perpendicular a  $f_0$  (a charneira) que passa por  $R_2$  (a projeção frontal do ponto  $R$ ) – essa perpendicular corresponde ao traço frontal do plano ortogonal a  $f_0$  (a charneira do rebatimento) que contém o ponto  $R$  (bem como o arco do seu rebatimento). Assim,  $R_r$  (o ponto  $R$  rebatido) é o ponto de interseção de  $f_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $R_2$ .

#### Rebatimento do ponto T:

Para rebater o ponto  $T$ , é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $T$  pertença – a reta  $r$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $r$  em rebatimento (a reta  $r_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto  $R_r$  (a reta  $r$  passa pelo ponto  $R$  e o ponto  $R$  já foi rebatido). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal da reta  $r$  (o ponto  $F$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r \equiv F_2$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r_r$ . A reta  $r_r$  (a reta  $r$  em rebatimento) passa por  $R_r$  e por  $F_r - r_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $R_r$  e  $F_r$ ).

O ponto  $T$  é um ponto da reta  $r$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $T_r$  está sobre  $r_r$ , na perpendicular a  $f_0$  (a charneira) que passa por  $T_2$  (a projeção frontal do ponto  $T$ ) – essa perpendicular corresponde ao traço frontal do plano ortogonal a  $f_0$  (a charneira do rebatimento) que contém o ponto  $T$  (bem como o arco do seu rebatimento). Assim,  $T_r$  (o ponto  $T$  rebatido) é o ponto de interseção de  $r_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $T_2$ .

A partir dos três pontos rebatidos ( $R_r$ ,  $S_r$  e  $T_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[RST]$  em rebatimento (o triângulo  $[R_rS_rT_r]$ ), que é o triângulo  $[RST]$  em verdadeira grandeza.

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[RST]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (pois é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\theta$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. O triângulo  $[R_rS_rT_r]$  (o triângulo  $[RST]$  rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $f$ , dos traçados relativos ao rebatimento do ponto  $H'$ , das retas  $f_r$  e  $r_r$  e, ainda dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos  $R$  e  $T$ ).

## 253.

**Dados:**

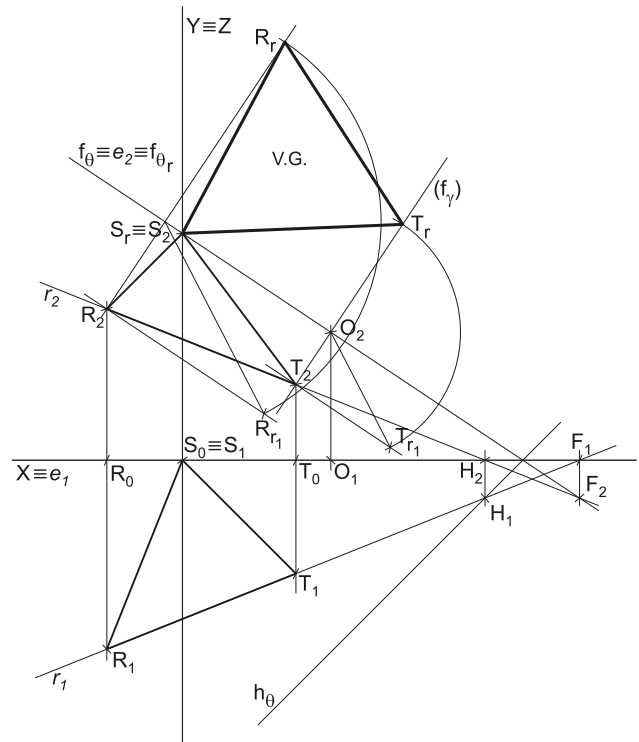
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R**, **S** e **T**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, desenharam-se as projeções triângulo **[RST]** e determinaram-se os traços do plano  $\theta$ .

**Determinação dos traços do plano  $\theta$ :**

O **traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ )** é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **S** é um ponto com afastamento nulo, pelo que o ponto **S** é necessariamente um ponto de  $f_\theta$  – já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_\theta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano (os três pontos) são insuficientes para determinar o elemento em falta, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se à reta **r**, como reta auxiliar do plano. A reta **r** é uma reta oblíqua e está definida pelos pontos **R** e **T** (dois dos pontos que definem o plano  $\theta$ ). Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta **r** (o ponto **F**) – já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ). O traço frontal do plano ( $f_\theta$ ) está, assim, definido por dois pontos – o ponto **S** e o ponto **F**.

O **traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ )** é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos um ponto para definir  $h_\theta$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $h_\theta$ . Determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **r**. Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\theta$ . Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) está definido por dois pontos – o ponto **H** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.



Salienta-se que, **por uma questão de rigor**, o ponto **H** não é o ponto mais indicado para definir o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), pois os dois pontos determinados (o ponto **H** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano) **estão demasiado próximos**. De facto, para definir uma reta por dois pontos, será aconselhável que esses dois pontos estejam afastados um do outro o mais possível.

Nesse sentido, para nos certificarmos da correta determinação do traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), recorreu-se a uma outra reta auxiliar do plano – a reta **f**. A reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$  e está definida por um ponto (o ponto **R**, um dos pontos que define o plano  $\theta$ ) e uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\theta$  – é paralela a  $f_\theta$ ). Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta **f** – o ponto **H'**. Este ponto, que é um outro ponto do traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ), está suficientemente afastado do ponto de concorrência dos traços do plano, para nos garantir um rigor apreciável. Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), ficou, no final, definido por três pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano, o ponto **H** e o ponto **H'**.

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo **[RST]** (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[RST]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\theta$  pelo triângulo do rebatimento. Optou-se por rebater o plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção, por uma questão de economia de traçados (o ponto **S** é um ponto do Plano Frontal de Projeção). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $f_\theta \equiv e_2 \equiv f_{\theta_r}$  ( $e_1$ , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a  $f_\theta$ ).

O ponto **S** é um ponto de  $f_\theta$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S_2$ . Nesse sentido, o rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção, em oposição ao seu rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção, permite-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **S**).

**Rebatimento do ponto T:**

Para rebater o ponto **T** conduziu-se, por **T**, um plano ortogonal à charneira (o plano  $\gamma$ ), que se identificou, apenas, pelo seu traço frontal (que, por essa razão, se representou entre parêntesis). O plano  $\gamma$  é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **T** e é um plano projetante frontal (um plano de topo), pelo que **T** (o ponto **T** rebatido) tem de se situar necessariamente sobre  $f_r$ . Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **T**, que é o ponto **O** (o ponto de interseção do plano  $\gamma$  com a charneira –  $f_\theta$ ).

O raio do arco do rebatimento do ponto **T** é  $\overline{OT}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **T** – o triângulo do rebatimento do ponto **T** é o triângulo retângulo **[OTT<sub>2</sub>]**, que é retângulo em **T<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **T**). O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{OT}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (pois é oblíqua a ambos os planos de projeção), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano  $\gamma$  neste caso. Para tal rebateu-se o plano  $\gamma$  para o Plano Frontal de Projeção (em torno do seu traço frontal –  $f_r$ ) e construiu-se o triângulo **[OTT<sub>2</sub>]** em verdadeira grandeza.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, por  $T_2$  (a projeção frontal do ponto  $T$ ) conduziu-se uma paralela à charneira ( $f_\theta$ ), sobre a qual se marcou o afastamento do ponto  $T$  (que é um dos catetos do triângulo  $[OTT_2]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $T_{r1}$ . O ponto  $T_{r1}$  é o ponto  $T$ , rebatido pelo rebatimento do plano  $\gamma$ . Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[O_2T_{r1}]$ , que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento (do ponto  $T$ ) em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  (em  $O_2$ ) e com raio  $\overline{OT_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $T$  (o arco  $\overline{T_{r1}T_r}$ ), em verdadeira grandeza, até  $f_\gamma$ , onde se situa  $T_r$  (o ponto  $T$  rebatido).

### Rebatimento do ponto R:

Para rebater o ponto  $R$  conduziu-se, por  $R_2$  (a projeção frontal do ponto  $R$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao traço frontal do plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $R$ ). Esse plano é um plano projetante frontal (um plano de topo), pelo que  $R_r$  (o ponto  $R$  rebatido) tem de se situar necessariamente sobre essa perpendicular à charneira. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto  $R$  que é o ponto de interseção da charneira ( $f_\theta$ ) com a perpendicular à charneira que passa por  $R_2$ . Salienta-se que não se identificou o centro do arco do rebatimento do ponto  $R$ , com vista a uma gradual (e desejável) simplificação da resolução gráfica, em termos de excesso de notações

O raio do arco do rebatimento do ponto  $R$  é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $R$  – o triângulo do rebatimento do ponto  $R$  é o triângulo retângulo em  $R_2$  (a projeção frontal do ponto  $R$ ), que tem um vértice no ponto  $R$  e o terceiro vértice na charneira (no centro do arco do rebatimento do ponto  $R$ ). O raio do arco do rebatimento (a hipotenusa do triângulo) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (pois é oblíqua a ambos os planos de projeção), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de topo (o plano ortogonal à charneira) que contém o ponto  $R$ , bem como o arco do seu rebatimento. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Frontal de Projeção (em torno do seu traço frontal) e construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto  $R$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por  $R_2$  (a projeção frontal do ponto  $R$ ) conduziu-se uma paralela à charneira ( $f_\theta$ ), sobre a qual se marcou o afastamento do ponto  $R$  (que é um dos catetos do triângulo), o que nos permitiu determinar o ponto  $R_{r1}$ . O ponto  $R_{r1}$  é o ponto  $R$ , rebatido pelo rebatimento do plano que contém o arco do seu rebatimento. Em seguida, concluiu-se o desenho do triângulo, com o terceiro vértice na charneira ( $f_\theta$ ). Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e raio até  $R_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $R$  (o arco  $\overline{R_{r1}R_r}$ ), em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $R_2$ , onde se situa  $R_r$  (o ponto  $R$  rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos ( $R_r$ ,  $S_r$  e  $T_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[RST]$  em rebatimento (o triângulo  $[R_rS_rT_r]$ ), que é o triângulo  $[RST]$  em verdadeira grandeza.

### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[RST]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\theta$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. O triângulo  $[R_rS_rT_r]$  (o triângulo  $[RST]$  rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $f$ , dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, os respetivos triângulos do rebatimento em verdadeira grandeza).

## 254.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\gamma$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes). Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ , em função dos dados.

### Determinação das projeções do triângulo:

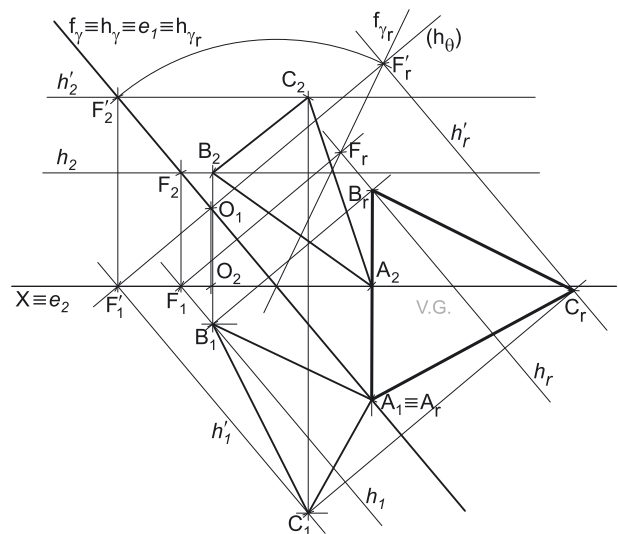
Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , para pertencerem ao plano  $\gamma$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto  $A$  tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ) – o ponto  $A$  é o ponto de  $h_\gamma$  que tem 3 cm de afastamento ( $h_\gamma$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano, com 3 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $B$  – a reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\gamma$ ). O ponto  $B$  é o ponto da reta  $h$  que tem 1 cm de afastamento.

A reta  $h'$  é a reta horizontal (de nível) do plano, com 5 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $C$  – a reta  $h'$  está definida por um ponto (o ponto  $F'$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\gamma$ ). O ponto  $C$  é o ponto da reta  $h'$  que tem 6 cm de afastamento.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

- a) O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Horizontal de Projeção. Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\gamma$ , pelo rebatimento dos seus traços. Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\gamma \equiv e_1 \equiv h_{\gamma_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\gamma$ ).

O ponto **A** é um ponto de  $h_\alpha$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ .

#### Rebatimento do traço frontal do plano $\alpha$ :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano é um ponto de  $f_\gamma$  e é, também, um ponto da charneira (que é  $h_\gamma$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir  $f_{\gamma_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto **F'**, o traço frontal da reta  $h'$  (que é um ponto de  $f_\gamma$ ), que está suficientemente afastado do ponto de concorrência dos dois traços do plano, para nos permitir um rigor apreciável.

Para rebater o ponto **F'** conduziu-se, por **F'\_1** (a projeção horizontal do ponto **F'**), uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **F'** (plano esse que não se identificou). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano e com raio até **F'\_2**, desenhou-se um arco (que é um **arco de transporte**) até à perpendicular à charneira que passa por **F'\_1**, onde se situa **F'\_r** (o ponto **F'** rebatido). Isto permitiu-nos desenhar  $f_{\gamma_r}$  (o traço frontal do plano  $\gamma$  rebatido), que passa por **F'\_r** e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $f_{\gamma_r}$  está definido por dois pontos).

#### Rebatimento do ponto **C**:

Para rebater o ponto **C** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **C** pertença – a reta  $h'$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $h'$  em rebatimento (a reta  $h'_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal da reta  $h'$  (o ponto **F'**) já foi rebatido, pelo que já temos um ponto para definir  $h'_r$  (o ponto **F'\_r**). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que a reta  $h'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\gamma$  e que retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $h'_r$ . A reta  $h'_r$  (a reta  $h'$  em rebatimento) passa por **F'\_r** e é paralela a  $h_{\gamma_r}$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$  em rebatimento) –  $h'_r$  está definida por um ponto (**F'\_r**) e por uma direção (é paralela a  $h_{\gamma_r}$ ).

O ponto **C** é um ponto da reta  $h'$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **C\_r** está sobre  $h'_r$ , na perpendicular a  $h_\gamma$  (a charneira) que passa por **C\_1** (a projeção horizontal do ponto **C**) – essa perpendicular corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal a  $h_\gamma$  (a charneira do rebatimento) que contém o ponto **C** (bem como o arco do seu rebatimento). Assim, **C\_r** (o ponto **C** rebatido) é o ponto de interseção de  $h'_r$  com a perpendicular à charneira que passa por **C\_1**.

#### Rebatimento do ponto **B**:

Para rebater o ponto **B** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **B** pertença – a reta  $h$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $h$  em rebatimento (a reta  $h_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\gamma$  e que retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), pelo que já temos uma direção para definir a reta  $h_r$  (a direção de  $h_\gamma$ ). Falta-nos um ponto para definir  $h_r$ . Esse ponto pode ser o seu traço frontal (o ponto **F**) que tem de ser rebatido.

Tendo em conta que o traço frontal da reta  $h$  (o ponto **F**) é um ponto do traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ), que já foi previamente rebatido, o rebatimento do ponto **F** processa-se transportando o ponto **F** para o rebatimento de  $f_\gamma$ . Nesse sentido, conduziu-se, por **F\_1** (a projeção horizontal do ponto **F**), uma perpendicular à charneira ( $h_\gamma$ ) – essa perpendicular à charneira corresponde à representação do plano ortogonal à charneira que contém o ponto **F** (bem como o arco do seu rebatimento). O ponto de interseção da perpendicular à charneira (que passa por **F\_1**) com  $f_{\gamma_r}$  é o ponto **F\_r** (o ponto **F** rebatido). Assim, em rebatimento, também se verifica que o traço frontal da reta  $h$  (o ponto **F**) se situa sobre o traço frontal do plano  $\gamma$ , porque a reta  $h$  pertence ao plano  $\gamma$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_r$ .

A reta  $h_r$  (a reta  $h$  em rebatimento) passa por **F\_r** e é paralela a  $h_{\gamma_r}$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$  em rebatimento) –  $h_r$  está definida por um ponto (**F\_r**) e por uma direção (é paralela a  $h_{\gamma_r}$ ).

O ponto **B** é um ponto da reta  $h$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **B\_r** está sobre  $h_r$ , na perpendicular a  $h_\gamma$  (a charneira) que passa por **B\_1** (a projeção horizontal do ponto **B**) – essa perpendicular corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal a  $h_\gamma$  (a charneira do rebatimento) que contém o ponto **B** (bem como o arco do seu rebatimento). Assim, **B\_r** (o ponto **B** rebatido) é o ponto de interseção de  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por **B\_1**.

A partir dos três pontos rebatidos (**A\_r**, **B\_r** e **C\_r**), desenhou-se o triângulo **[ABC]** em rebatimento (o triângulo **[A\_r B\_r C\_r]**), que é o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza.

- b) As vantagens do rebatimento efetuado em relação ao rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Frontal de Projeção têm a ver com **economia de traçados**, pois sendo o ponto **A** um ponto da charneira (que fica imediatamente rebatido, pois roda sobre si próprio), para determinar a verdadeira grandeza do triângulo (rebatendo o plano  $\gamma$ ) é necessário rebater, apenas, dois dos seus vértices – os vértices **B** e **C**. De facto, caso se tivesse efetuado o rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Frontal de Projeção, seria necessário rebater os três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\gamma$  e as projeções do triângulo **[ABC]**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (pois é a linha estruturante do exercício). O triângulo **[A\_r B\_r C\_r]** (o triângulo **[ABC]** rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $h$  e  $h'$ , dos traçados relativos ao rebatimento dos pontos **F'** e **F**, das retas  $h_r$  e  $h'_r$  e, ainda dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os três pontos).

## 255.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\theta$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ , em função dos dados.

### Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , para pertencerem ao plano  $\theta$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta  $f$  é a reta frontal (de frente) do plano, com 3 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $P$  – a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $H$ , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\theta$ ). O ponto  $P$  é o ponto da reta  $f$  que tem 5 cm de cota.

A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano, com 2 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $Q$  – a reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\theta$ ). O ponto  $Q$  é o ponto da reta  $h$  que tem 1 cm de afastamento.

O lado  $[QR]$  é horizontal (de nível), pelo que está necessariamente contido na reta  $h$ . Por outro lado, o segmento  $[QR]$ , porque é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, projeta-se em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, sobre  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ), a partir de  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ ), mediram-se os 5 cm (o comprimento do lado  $[QR]$ ) e determinou-se a projeção horizontal do ponto  $R$  ( $R_1$ ), sobre  $h_1$ . Note que se garantiu que o ponto  $R$  tem afastamento positivo, para que o triângulo se situe no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

Por fim, a projeção frontal do ponto  $R$  ( $R_2$ ) situa-se sobre a projeção frontal da reta  $h$  ( $h_2$ ), na linha de chamada de  $R_1$ . A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo  $[PQR]$ .

a) O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\theta$  para o plano frontal (de frente) que contém o vértice  $Q$  do triângulo. Nesse sentido, em primeiro lugar representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém o ponto  $Q$ ) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano  $\theta$  com o plano  $\varphi$ . A reta  $e$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$ , que está definida por um ponto (o ponto  $Q$ , que é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\theta$ ).

Efetuada o rebatimento do plano  $\theta$  para um plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, após o rebatimento, tudo o que estiver contido no plano  $\varphi$  (em rebatimento) projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção.

O ponto  $Q$  é um ponto da reta  $e$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $Q_r \equiv Q_2$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos outros dois pontos (os pontos  $P$  e  $R$ ), pelo triângulo do rebatimento.

### Rebatimento do ponto $P$ :

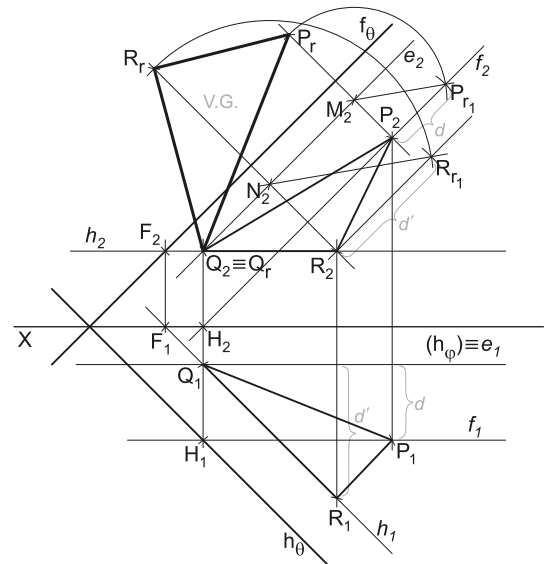
Para rebater o ponto  $P$  conduziu-se, por  $P$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $P$ , e que não se identificou). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto  $P$ , que é o ponto  $M$  (o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira – a reta  $e$ ). Note que se representou o ponto  $M$  apenas pela sua projeção frontal ( $M_2$ ), pois a sua projeção horizontal é desnecessária.

O raio do arco do rebatimento do ponto  $P$  é a distância  $\overline{MP}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $P$ . Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano que contém o arco do seu rebatimento. Para tal conduziu-se, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ) uma paralela à charneira (reta  $e$ ), sobre a qual se marcou a distância do ponto  $P$  ao plano  $\varphi$  – a distância  $d$  (que é o **afastamento** do ponto  $P$  em relação ao plano  $\varphi$ ). Isso permitiu-nos determinar o ponto  $P_{r1}$  (que é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento).

Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[M_2P_{r1}]$  (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M_2$  e raio  $M_2P_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$  (o arco  $P_{r1}P_r$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido).

### Rebatimento do ponto $R$ :

Para rebater o ponto  $R$  conduziu-se, por  $R$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $R$ , e que não se identificou). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto  $R$ , que é o ponto  $N$  (o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira – a reta  $e$ ). Note que se representou o ponto  $N$  apenas pela sua projeção frontal ( $N_2$ ), pois a sua projeção horizontal é desnecessária.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O raio do arco do rebatimento do ponto **R** é a distância  $\overline{NR}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **R**. Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **R** em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano que contém o arco do seu rebatimento. Para tal conduziu-se, por  $R_2$  (a projeção frontal do ponto **R**) uma paralela à charneira (reta **e**), sobre a qual se marcou a distância do ponto **R** ao plano  $\varphi$  – a distância  $d'$  (que é o afastamento do ponto **R** em relação ao plano  $\varphi$ ). Isso permitiu-nos determinar o ponto  $R_{r_1}$  (que é o ponto **R** rebatido pelo rebatimento do plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento).

Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[N_2R_{r_1}]$  (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $N_2$  e raio  $N_2R_{r_1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **R** (o arco  $\overline{R_rR_r}$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $R_r$  (o ponto **R** rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos ( $P_r$ ,  $Q_r$  e  $R_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[P_rQ_rR_r]$  em rebatimento (o triângulo  $[PQR]$  em verdadeira grandeza).

- b) **Vantagens do rebatimento do plano  $\theta$  para o plano  $\varphi$ , em relação ao rebatimento do plano  $\theta$  para qualquer dos planos de projeção:** o rebatimento do plano  $\theta$  para o plano  $\varphi$  (que contém o ponto **Q**) permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto – o ponto **Q**. De facto, uma vez que o ponto **Q** se situa na charneira do rebatimento (por pertencer aos dois planos – o plano a rebater e o plano para o qual se processa o rebatimento), o ponto **Q** roda sobre si próprio pelo que o seu rebatimento é imediato, sem quaisquer outros traçados auxiliares acrescidos – foi necessário, apenas, efetuar o rebatimento dos outros dois vértices do triângulo (os vértices **P** e **R**). Caso se efetuasse o rebatimento do plano  $\theta$  para qualquer dos planos de projeção, seria necessário rebater os três vértices do triângulo, com todos os traçados de que tal procedimento exige.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\theta$  e as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O plano  $\varphi$  (o plano para o qual se efetuou o rebatimento) é auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O triângulo  $[P_rQ_rR_r]$  (o triângulo  $[PQR]$  rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **f**, **h** e **e**, bem como todos os traçados referentes ao rebatimento dos pontos **P** e **R**).

## 256.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\theta$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**). Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ , em função dos dados.

#### Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos **P**, **Q** e **R**, para pertencerem ao plano  $\theta$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

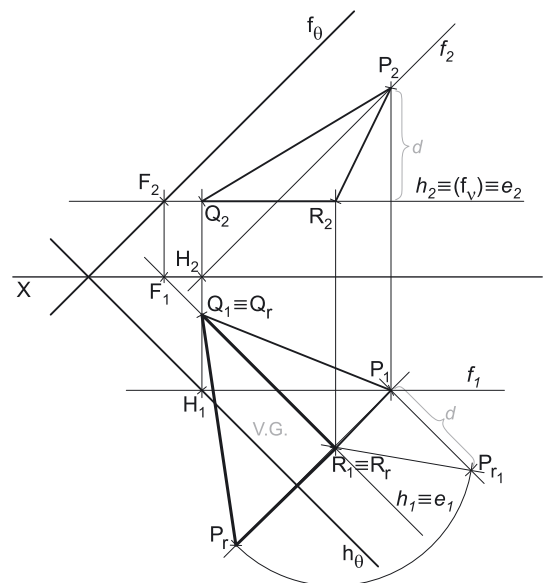
A reta **f** é a reta frontal (de frente) do plano, com 3 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **P** – a reta **f** está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\theta$ ). O ponto **P** é o ponto da reta **f** que tem 5 cm de cota.

A reta **h** é a reta horizontal (de nível) do plano, com 2 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **Q** – a reta **h** está definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\theta$ ). O ponto **Q** é o ponto da reta **h** que tem 1 cm de afastamento.

O lado  $[QR]$  é horizontal (de nível), pelo que está necessariamente contido na reta **h**. Por outro lado, o segmento  $[QR]$ , porque é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, projeta-se em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, sobre  $h_1$  (a projeção horizontal da reta **h**), a partir de  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**), mediram-se os 5 cm (o comprimento do lado  $[QR]$ ) e determinou-se a projeção horizontal do ponto **R** ( $R_1$ ), sobre  $h_1$ . Note que se garantiu que o ponto **R** tem afastamento positivo, para que o triângulo se situe no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro, como o enunciado refere expressamente.

Por fim, a projeção frontal do ponto **R** ( $R_2$ ) situa-se sobre a projeção frontal da reta **h** ( $h_2$ ), na linha de chamada de  $R_1$ . A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo  $[PQR]$ .

- a) O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\theta$  para o plano horizontal (de nível) que contém o lado  $[QR]$  do triângulo. Nesse sentido, em primeiro lugar representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém o lado  $[QR]$ ) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano  $\theta$  com o plano  $v$ . A reta **e** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$ , que é, afinal, a própria reta **h** (a reta **h** é a reta de interseção entre os dois planos, pois ambos os planos contêm a reta **h**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Efetuada o rebatimento do plano  $\theta$  para um plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, após o rebatimento, tudo o que estiver contido no plano  $v$  (em rebatimento) projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

O ponto  $Q$  é um ponto da reta  $e$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $Q_r \equiv Q_1$ . O ponto  $R$  é outro ponto da reta  $e$  (que é a charneira), pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente  $R_r \equiv R_1$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do terceiro vértice da figura (o ponto  $P$ ), pelo triângulo do rebatimento.

### Rebatimento do ponto $P$ :

Para rebater o ponto  $P$  conduziu-se, por  $P$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $P$ , e que não se identificou). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto  $P$ , que é o próprio ponto  $R$  (o ponto  $R$  é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira – a reta  $e$ ).

O raio do arco do rebatimento do ponto  $P$  é a distância  $\overline{RP}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $P$ . Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano que contém o arco do seu rebatimento. Para tal conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) uma paralela à charneira (reta  $e$ ), sobre a qual se marcou a distância do ponto  $P$  ao plano  $v$  – a distância  $d$  (que é a cota do ponto  $P$  em relação ao plano  $v$ ). Isso permitiu-nos determinar o ponto  $P_{r1}$  (que é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento).

Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[R_1P_{r1}]$  (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $R_1$  e raio  $\overline{R_1P_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$  (o arco  $P_rP_r$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos ( $P_r$ ,  $Q_r$  e  $R_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[PQR]$  em rebatimento (o triângulo  $[P_rQ_rR_r]$ ), que é o triângulo  $[PQR]$  em verdadeira grandeza.

- b) Vantagens do rebatimento do plano  $\theta$  para o plano  $v$ , em relação ao rebatimento do plano  $\theta$  para qualquer dos planos de projeção:** o rebatimento do plano  $\theta$  para o plano  $v$  (que contém os pontos  $Q$  e  $R$ ) permitiu-nos economizar o rebatimento de dois pontos – os pontos  $Q$  e  $R$ . De facto, uma vez que os pontos  $Q$  e  $R$  se situam na charneira do rebatimento (por pertencerem aos dois planos – o plano a rebater e o plano para o qual se processa o rebatimento), aqueles dois pontos rodam sobre si próprios, pelo que o seu rebatimento é imediato, sem quaisquer outros traçados auxiliares acrescidos – foi necessário, apenas, efetuar o rebatimento do terceiro vértice do triângulo (o vértice  $P$ ). Caso se efetuasse o rebatimento do plano  $\theta$  para qualquer dos planos de projeção, seria necessário rebater os três vértices do triângulo, com todos os traçados de que tal procedimento exige.

**Vantagens do rebatimento do plano  $\theta$  para o plano  $v$ , em relação ao rebatimento do plano  $\theta$  para o plano  $\varphi$ , efetuado no exercício anterior:** o rebatimento do plano  $\theta$  para o plano  $v$  (que contém os pontos  $Q$  e  $R$ ), comparado com o rebatimento do plano  $\theta$  para o plano  $\varphi$  (efetuado no exercício anterior) permitiu-nos, ainda assim, economizar o rebatimento de um ponto – o ponto  $Q$ . De facto, na situação do exercício anterior, apenas o ponto  $Q$  se situava na charneira, pelo que foi necessário rebater os outros dois vértices do triângulo – os vértices  $P$  e  $R$ . Já na situação deste exercício, uma vez que os pontos  $Q$  e  $R$  se situam na charneira do rebatimento, foi necessário, apenas, efetuar o rebatimento de um único ponto – o vértice  $P$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\theta$  e as projeções do triângulo  $[PQR]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O plano  $v$  (o plano para o qual se efetuou o rebatimento) é auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O triângulo  $[P_rQ_rR_r]$  (o triângulo  $[PQR]$  rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $f$ ,  $h$  e  $e$ , bem como todos os traçados referentes ao rebatimento do ponto  $P$ ).

## 257.

- a) Rebatendo o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, a charneira do rebatimento é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). O arco do rebatimento do ponto  $A$  está necessariamente contido **num plano ortogonal à charneira do rebatimento**. Uma vez que o traço horizontal do plano  $\rho$  é uma **reta fronto-horizontal do plano** (com cota nula), o plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$  é, assim, o **plano de perfil que contém o ponto A**.

O **centro do arco do rebatimento** do ponto  $A$  situa-se necessariamente na charneira do rebatimento. Atendendo a que o arco do rebatimento está contido num plano (o plano de perfil que contém o ponto  $A$ ), o **centro do arco do rebatimento** do ponto  $A$  é o **ponto de interseção** da charneira do rebatimento com esse plano (o plano de perfil que contém o ponto  $A$ ).

- b) A distância que nos permite rebater o ponto  $A$  é o **raio do arco do rebatimento** – é a **distância** do ponto  $A$  (o ponto a rebater) ao centro do arco do seu rebatimento (o ponto de interseção da charneira do rebatimento com o plano de perfil que contém o ponto  $A$ ).

## 258.

- a) Rebatendo o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção, a charneira do rebatimento é o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ). O arco do rebatimento do ponto  $P$  está necessariamente contido **num plano ortogonal à charneira do rebatimento**. Uma vez que o traço frontal do plano  $\rho$  é uma **reta fronto-horizontal do plano** (com afastamento nulo), o plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $P$  é, assim, o **plano de perfil que contém o ponto P**.

O **centro do arco do rebatimento** do ponto  $P$  situa-se necessariamente na charneira do rebatimento. Atendendo a que o arco do rebatimento está contido num plano (o plano de perfil que contém o ponto  $P$ ), o **centro do arco do rebatimento** do ponto  $P$  é o **ponto de interseção** da charneira do rebatimento com esse plano (o plano de perfil que contém o ponto  $P$ ).

- b) A distância que nos permite rebater o ponto  $P$  é o **raio do arco do rebatimento** – é a **distância** do ponto  $P$  (o ponto a rebater) ao centro do arco do seu rebatimento (o ponto de interseção da charneira do rebatimento com o plano de perfil que contém o ponto  $P$ ).



**259.**

O problema do **rebatimento de um plano oblíquo** é o facto de o **raio do arco do rebatimento de qualquer ponto** não se projetar em verdadeira grandeza, em nenhum dos planos de projeção.

**260.**

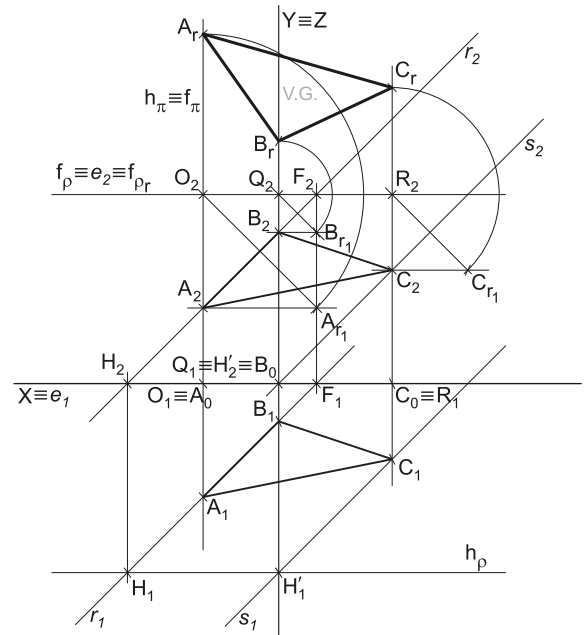
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção frontal do ponto **C** (**C<sub>2</sub>**).

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ . Para tal recorreu-se à reta  $r$ , que passa pelos pontos **A** e **B**, e determinaram-se os seus traços nos planos de projeção – o ponto **H** (o seu traço horizontal) e o ponto **F** (o seu traço frontal). O traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ) passa pelo ponto **F** e é paralelo ao eixo **X** – está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal). O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ) passa pelo ponto **H** e é paralelo ao eixo **X** – está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Por fim, determinou-se a projeção horizontal do ponto **C**. O ponto **C**, porque pertence ao plano  $\rho$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\rho$ . Assim, o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, recorreu-se à reta  $s$ , paralela à reta  $r$  e passando pelo ponto **C** –  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ) passa por **C<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **C**) e é paralela a  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ). A reta  $s$ , porque pertence ao plano  $\rho$ , tem de ter o seu traço horizontal sobre o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). Assim, determinou-se o traço horizontal da reta  $s$  (o ponto **H'**), sobre  $h_\rho$ . A reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto **H'**) e por uma direção (é paralela à reta  $r$ ). Este procedimento permitiu-nos determinar a projeção horizontal da reta  $s$  ( $s_1$ ), bem como a projeção horizontal do ponto **C** (**C<sub>1</sub>**), que se situa sobre  $s_1$ .

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.



**Resolução:**

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo triângulo do rebatimento. Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $f_\rho \equiv e_2 \equiv f_{\rho r}$  ( $e_1$ , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

**Rebatimento do ponto A:**

Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por **A**, um plano ortogonal à charneira (o plano  $\pi$ ). O plano  $\pi$  é o plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **A** e é um plano projetante frontal (é duplamente projetante), pelo que **A<sub>r</sub>** tem de se situar necessariamente sobre  $f_\pi$ . Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **A**, que é o ponto **O** (o ponto de interseção do plano  $\pi$  com a charneira –  $f_\rho$ ).

O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é  $\overline{OA}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A** – o triângulo do rebatimento do ponto **A** é o triângulo retângulo **[OAA<sub>2</sub>]**. O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{OA}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano  $\pi$  neste caso. Para tal rebateu-se o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção e construiu-se o triângulo **[OAA<sub>2</sub>]** em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por **A<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou o afastamento do ponto **A** (que é um dos catetos do triângulo **[OAA<sub>2</sub>]**), o que nos permitiu determinar o ponto **A<sub>r1</sub>**. O ponto **A<sub>r1</sub>** é o ponto **A**, rebatido pelo rebatimento do plano  $\pi$ . Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[O<sub>2</sub>A<sub>r1</sub>]**, que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>2</sub>** e raio **O<sub>2</sub>A<sub>r1</sub>**, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco  $\overline{O_2A_r}$ ) até  $f_\pi$ , onde se situa **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido).

**Rebatimento do ponto B:**

Para rebater o ponto **B** conduziu-se, por **B**, um plano ortogonal à charneira (um plano de perfil que, neste caso, é o próprio plano **YZ**). O plano **YZ** é o plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **B** e é um plano projetante frontal (é duplamente projetante), pelo que **B<sub>r</sub>** tem de se situar necessariamente sobre **Y = Z**. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **B**, que é o ponto **Q** (o ponto de interseção do plano **YZ** com a charneira –  $f_\rho$ ).

O raio do arco do rebatimento do ponto **B** é  $\overline{QB}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **B** – o triângulo do rebatimento do ponto **B** é o triângulo retângulo **[QBB<sub>2</sub>]**. O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{QB}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano **YZ**, neste caso. Para tal rebateu-se o plano **YZ** para o Plano Frontal de Projeção e construiu-se o triângulo **[QBB<sub>2</sub>]** em verdadeira grandeza.

(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

O ponto **Q** é um ponto de  $h_p$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $Q_r \equiv Q_1$ .

#### Rebatimento do ponto P:

Para rebater o ponto **P** conduziu-se, por **P**, um plano de perfil (o plano ortogonal à charneira que contém o ponto **P** e o arco do seu rebatimento e que, neste caso, é o próprio plano **YZ**). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **P**, que é o ponto **O** (o ponto de interseção do plano **YZ** com a charneira –  $h_p$ ).

O raio do arco do rebatimento do ponto **P** é  $\overline{OP}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **P** – o triângulo do rebatimento do ponto **P** é o triângulo retângulo  $[OPP_1]$ . O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{OP}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano **YZ**, neste caso. Para tal rebateu-se o plano **YZ** para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo  $[OPP_1]$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto **P**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **P** (que é um dos catetos do triângulo  $[OPP_1]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $P_{r_1}$ . O ponto  $P_{r_1}$  é o ponto **P**, rebatido pelo rebatimento do plano **YZ**. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[O_1P_{r_1}]$ , que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  e raio  $\overline{O_1P_{r_1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **P** (o arco  $\overline{P_{r_1}P_r}$ ) até à perpendicular à charneira (que passa por  $P_1$ ), onde se situa  $P_r$  (o ponto **P** rebatido).

#### Rebatimento do ponto R:

Para rebater o ponto **R** conduziu-se, por  $R_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **R** e que não se identificou) –  $R_r$  tem de se situar necessariamente sobre essa perpendicular à charneira. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **R**, que é o ponto de interseção da charneira ( $h_p$ ) com a perpendicular à charneira que passa por  $R_1$ . Note que também não se identificou o centro do arco do rebatimento do ponto **R**, com vista a uma gradual (e desejável) simplificação da resolução gráfica, em termos de excesso de notações

O raio do arco do rebatimento do ponto **R** é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **R** – o triângulo do rebatimento do ponto **R** é o triângulo retângulo em  $R_1$  (a projeção horizontal do ponto **R**), que tem um vértice no ponto **R** e o terceiro vértice na charneira (no centro do arco do rebatimento do ponto **R**). O raio do arco do rebatimento (a hipotenusa do triângulo) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (pois é oblíqua a ambos os planos de projeção), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **R** (o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **R**). Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção (em torno do seu traço horizontal) e construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **R** em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por  $R_1$  (a projeção horizontal do ponto **R**) conduziu-se uma paralela à charneira ( $h_p$ ), sobre a qual se marcou a cota do ponto **R** (que é um dos catetos do triângulo), o que nos permitiu determinar o ponto  $R_{r_1}$ . O ponto  $R_{r_1}$  é o ponto **R**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento. Em seguida, concluiu-se o desenho do triângulo, com o terceiro vértice na charneira ( $h_p$ ). Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e raio até  $R_{r_1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **R** (o arco  $\overline{R_{r_1}R_r}$ ), em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $R_1$ , onde se situa  $R_r$  (o ponto **R** rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos ( $P_r$ ,  $Q_r$  e  $R_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[PQR]$  em rebatimento (o triângulo  $[P_rQ_rR_r]$ ), que é o triângulo  $[PQR]$  em verdadeira grandeza.

- b) As vantagens do rebatimento efetuado em relação ao rebatimento do plano  $p$  para o Plano Horizontal de Projeção têm a ver com **economia de traçados**, pois sendo o ponto **Q** um ponto da charneira (que fica imediatamente rebatido, pois roda sobre si próprio), para determinar a verdadeira grandeza do triângulo (rebatendo o plano  $p$ ) é necessário rebater, apenas, dois dos seus vértices – os vértices **P** e **R**. De facto, caso se tivesse efetuado o rebatimento do plano  $p$  para o Plano Frontal de Projeção, seria necessário rebater os três vértices do triângulo – os pontos **P**, **Q** e **R**.

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[PQR]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $p$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. O triângulo  $[P_rQ_rR_r]$  (o triângulo  $[PQR]$  rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **s**, dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, os respetivos triângulos do rebatimento em verdadeira grandeza).



(continuação da página anterior)

O ponto **P** é um ponto da reta **r** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **P<sub>r</sub>** está sobre **r<sub>r</sub>**, na perpendicular a **f<sub>p</sub>** que passa por **P<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **P**) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a **f<sub>p</sub>** (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto **P**. Assim, **P<sub>r</sub>** (o ponto **P** rebatido) é o ponto de interseção de **r<sub>r</sub>** com a perpendicular à charneira que passa por **P<sub>2</sub>**.

#### Rebatimento do ponto R:

Para rebater o ponto **R** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **R** pertença – a reta **s**, neste caso. Assim, para definirmos a reta **s** em rebatimento (a reta **s<sub>r</sub>**), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal da reta **s** (o ponto **F'**) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **F'<sub>r</sub> ≡ F'<sub>2</sub>**. Já temos um ponto para definir a reta **s<sub>r</sub>**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **s** é paralela à reta **r**, o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta **s<sub>r</sub>** – a reta **s<sub>r</sub>** (a reta **s** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **F'<sub>r</sub>**) e uma direção (é paralela à reta **r<sub>r</sub>**).

O ponto **R** é um ponto da reta **s** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **R<sub>r</sub>** está sobre **s<sub>r</sub>**, na perpendicular a **f<sub>p</sub>** que passa por **R<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **R**) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a **f<sub>p</sub>** (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto **R**. Assim, **R<sub>r</sub>** (o ponto **R** rebatido) é o ponto de interseção de **s<sub>r</sub>** com a perpendicular à charneira que passa por **R<sub>2</sub>**.

A partir dos três pontos rebatidos (**P<sub>r</sub>**, **Q<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**), desenhou-se o triângulo **[PQR]** em rebatimento (o triângulo **[P<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>R<sub>r</sub>]**), que é o triângulo **[PQR]** em verdadeira grandeza.

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo **[PQR]**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\rho$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. O triângulo **[P<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>R<sub>r</sub>]** (o triângulo **[PQR]** rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **s**, dos traçados relativos ao rebatimento do ponto **F**, das retas **r<sub>r</sub>** e **s<sub>r</sub>**, e, ainda dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos).

## 263.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar as projeções frontais dos pontos **A** e **B** (**A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>**, respetivamente).

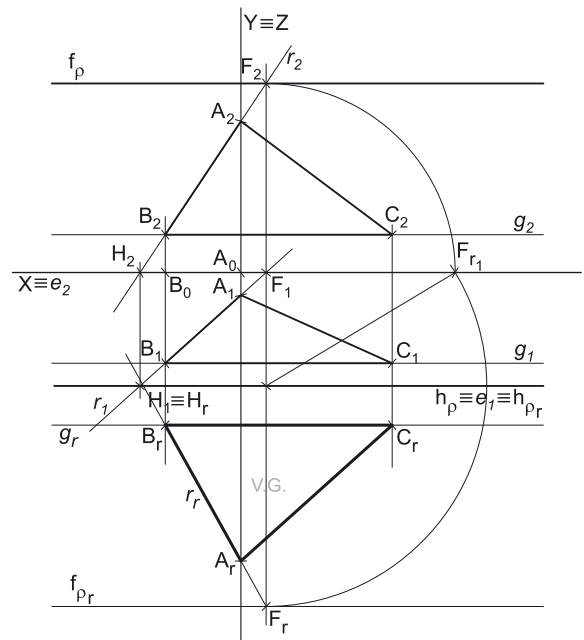
Os pontos **A** e **B**, porque pertencem ao plano  $\rho$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\rho$ . Assim, os pontos têm de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, recorreu-se à reta **r**, pertencente ao plano  $\rho$  e passando pelos pontos **A** e **B** – **r<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **r**) passa por **A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos dois pontos). A reta **r**, porque pertence ao plano  $\rho$ , tem de ter os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\rho$ . Assim, determinaram-se os traços da reta **r**, os pontos **F** e **H**. A reta **r** está, assim, definida por dois pontos – os seus traços. Este procedimento permitiu-nos determinar a projeção horizontal da reta **r** (**r<sub>1</sub>**), bem como as projeções horizontais dos pontos **A** e **B** (**A<sub>1</sub>** e **B<sub>1</sub>**), que se situam sobre **r<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **r**).

Tendo em conta que o lado **[BC]**, do triângulo, é fronto-horizontal, desenharam-se as projeções da reta **g**, a reta fronto-horizontal que é a reta suporte do lado **[BC]** do triângulo. A reta **g** está definida por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (é fronto-horizontal). Por fim, atendendo a que o lado **[BC]** mede 6 cm e se projeta em verdadeira grandeza em ambos os planos de projeção (a reta **g** é paralela aos dois planos de projeção), mediram-se os 6 cm sobre qualquer das duas projeções da reta, a partir da projeção respetiva do ponto **B**, e determinaram-se as projeções do ponto **C** (garantindo-se, ainda, que o ponto **C** se situa à direita do ponto **B**).

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, pelo rebatimento dos seus traços. Começamos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  (**h<sub>p</sub>**), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, **h<sub>p</sub> ≡ e<sub>1</sub> ≡ h<sub>pr</sub>** (**e<sub>2</sub>**, a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Rebatimento do traço frontal do plano $\rho$ :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $f_\rho$  é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo  $X$ . Falta-nos um ponto para definir  $f_\rho$  em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de  $f_\rho$  – o ponto  $F$ , por exemplo (o traço frontal da reta  $r$ ). O ponto  $F$  tem de ser rebatido pelo triângulo do rebatimento.

Para rebater o ponto  $F$  conduziu-se, por  $F$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto  $F$ , que é o ponto de interseção da charneira ( $h_\rho$ ) com a perpendicular à charneira que passa por  $F_1$  – note que também não se identificou o centro do arco do rebatimento do ponto  $F$ , com vista a uma gradual (e desejável) simplificação da resolução gráfica, em termos de excesso de notações.

O raio do arco do rebatimento do ponto  $F$  é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $F$  – o triângulo do rebatimento do ponto  $F$  é o triângulo retângulo em  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ), que tem um vértice no ponto  $F$  e o terceiro vértice na charneira (no centro do arco do rebatimento do ponto  $F$ ). O raio do arco do rebatimento (a hipotenusa do triângulo) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (pois é oblíqua a ambos os planos de projeção), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto  $F$  (o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ). Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção (em torno do seu traço horizontal) e construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto  $F$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ) conduziu-se uma paralela à charneira (que é o próprio eixo  $X$ ), para a qual se transportou a cota do ponto  $F$  – com o compasso, fazendo centro em  $F_1$  e com raio até  $F_2$ , transportou-se a cota do ponto  $F$  para o eixo  $X$ , onde se determinou o ponto  $F_{r1}$ . O ponto  $F_{r1}$  é o ponto  $F$ , rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento. Em seguida, concluiu-se o desenho do triângulo, com o terceiro vértice na charneira ( $h_\rho$ ). Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e raio até  $F_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $F$  (o arco  $F_1F_r$ ), em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , onde se situa  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido).

Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{\rho_r}$  (o traço frontal do plano  $\rho$  em rebatimento). Assim, por  $F_r$  conduziu-se uma paralela ao eixo  $X$ , que é  $f_{\rho_r} - f_\rho$ , está definido por um ponto ( $F_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

## Rebatimento dos pontos $A$ e $B$ :

Para rebater o ponto  $A$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $A$  pertença – a reta  $r$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $r$  em rebatimento (a reta  $r_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto  $F_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal da reta  $r$  (o ponto  $H$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_r \equiv H_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r_r$  – a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $F_r$  e  $H_r$ ).

O ponto  $A$  é um ponto da reta  $r$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $A_r$  está sobre  $r_r$ , na perpendicular a  $h_\rho$  que passa por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a  $h_\rho$  (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ . Assim,  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido) é o ponto de interseção de  $r_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ .

O ponto  $B$  é outro ponto da reta  $r$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $B_r$  está sobre  $r_r$ , na perpendicular a  $h_\rho$  que passa por  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a  $h_\rho$  (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $B$ . Assim,  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido) é o ponto de interseção de  $r_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ .

## Rebatimento do ponto $C$ :

Para rebater o ponto  $C$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $C$  pertença – a reta  $g$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $g$  em rebatimento (a reta  $g_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $g$  é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos a direção para definir a reta  $g_r$  (em rebatimento, a reta  $g_r$  continua a ser paralela ao eixo  $X$ ). O ponto  $B_r$  é um ponto da reta  $g$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $g_r$  – a reta  $g_r$  (a reta  $g$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $B_r$ ) e uma direção (é paralela ao eixo  $X$ ).

O ponto  $C$  é um ponto da reta  $g$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $C_r$  está sobre  $g_r$ , na perpendicular a  $h_\rho$  que passa por  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a  $h_\rho$  (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $C$ . Assim,  $C_r$  (o ponto  $C$  rebatido) é o ponto de interseção de  $g_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $C_1$ .

A partir dos três pontos rebatidos ( $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[ABC]$  em rebatimento (o triângulo  $[A_rB_rC_r]$ ), que é o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza.

## Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$  e as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O triângulo  $[A_rB_rC_r]$  (o triângulo  $[ABC]$  rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $g$ , dos traçados relativos ao rebatimento do ponto  $F$ , das retas  $r_r$  e  $g_r$ , e, ainda dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos).

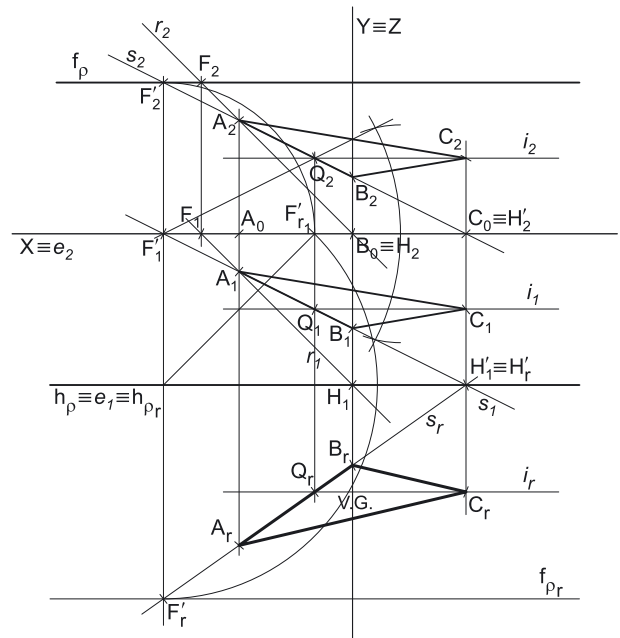
## 264.

## Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\rho$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção frontal do ponto  $A$  ( $A_2$ ), a projeção horizontal do ponto  $B$  ( $B_1$ ) e, ainda, a abcissa do ponto  $C$ .

O ponto  $A$ , porque pertence ao plano  $\rho$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\rho$ . Assim, o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, recorreu-se à reta  $r$ , pertencente ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto  $A$  –  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ) passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ). A reta  $r$ , porque pertence ao plano  $\rho$ , tem de ter os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\rho$ . Assim, determinaram-se os traços da reta  $r$ , os pontos  $F$  e  $H$ . A reta  $r$  está, assim, definida por dois pontos – os seus traços. Este procedimento permitiu-nos determinar a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), bem como a projeção horizontal do ponto  $A$  ( $A_1$ ), que se situa sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

O ponto  $B$ , porque pertence ao plano  $\rho$ , tem também de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\rho$ . Assim, recorreu-se à reta  $s$ , pertencente ao plano  $\rho$  e passando pelo ponto  $B$  –  $s_1$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ) passa por  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por fazer com que a reta  $s$  seja a reta suporte do lado  $[AB]$  do triângulo, pelo que a projeção horizontal da reta  $s$  ( $s_1$ ) passa pela projeção horizontal do ponto  $A$  ( $A_1$ ). A reta  $s$ , porque pertence ao plano  $\rho$ , tem de ter os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\rho$ . Assim, determinaram-se os traços da reta  $s$ , os pontos  $F'$  e  $H'$ . A reta  $s$  está, assim, definida por dois pontos – os seus traços. Este procedimento permitiu-nos determinar a projeção frontal da reta  $s$  ( $s_2$ ), bem como a projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ), que se situa sobre  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ).



Uma vez que o ponto  $C$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano  $\rho$  com o  $\beta_{1/3}$ . A reta de interseção entre os dois planos pertence à única «família» de retas comum aos dois planos, que é a «família» das retas fronto-horizontais. Assim já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto para definir a reta  $i$ . Nesse sentido, determinou-se o traço da reta  $s$  no  $\beta_{1/3}$  – o ponto  $Q$  ( $Q$  é o ponto da reta  $s$  que tem projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ . A reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $Q$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Por fim, determinaram-se as projeções do ponto  $C$  – o ponto  $C$  é o ponto da reta  $i$  que tem  $-3$  de abcissa. Por fim, a partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .

## Resolução:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar**. Tendo em conta que o enunciado é omissivo em relação ao processo a utilizar, optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, pelo rebatimento dos seus traços. Começamos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{\rho_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

Rebatimento do traço frontal do plano  $\rho$ :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $f_p$  é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo  $X$ . Falta-nos um ponto para definir  $f_p$  em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de  $f_p$  – o ponto  $F'$ , por exemplo (o traço frontal da reta  $s$ ). O ponto  $F'$  tem de ser rebatido pelo triângulo do rebatimento.

Para rebater o ponto  $F'$  conduziu-se, por  $F'$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $F'$ ). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto  $F'$ , que é o ponto de interseção da charneira ( $h_p$ ) com a perpendicular à charneira que passa por  $F'$  – note que também não se identificou o centro do arco do rebatimento do ponto  $F'$ , com vista a uma gradual (e desejável) simplificação da resolução gráfica, em termos de excesso de notações.

O raio do arco do rebatimento do ponto  $F'$  é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $F'$  – o triângulo do rebatimento do ponto  $F'$  é o triângulo retângulo em  $F'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F'$ ), que tem um vértice no ponto  $F'$  e o terceiro vértice na charneira (no centro do arco do rebatimento do ponto  $F'$ ). O raio do arco do rebatimento (a hipotenusa do triângulo) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (pois é oblíqua a ambos os planos de projeção), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto  $F'$  (o plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $F'$ ). Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção (em torno do seu traço horizontal) e construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto  $F'$  em verdadeira grandeza.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, por  $F'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F'$ ) conduziu-se uma paralela à charneira (que é o próprio eixo  $X$ ), para a qual se transportou a cota do ponto  $F'$  – com o compasso, fazendo centro em  $F'_1$  e com raio até  $F'_2$ , transportou-se a cota do ponto  $F'$  para o eixo  $X$ , onde se determinou o ponto  $F'_{r_1}$ . O ponto  $F'_{r_1}$  é o ponto  $F'$ , rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento. Em seguida, concluiu-se o desenho do triângulo, com o terceiro vértice na charneira ( $h_p$ ). Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e raio até  $F'_{r_1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $F'$  (o arco  $F'_{r_1}F'_1$ ), em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $F'_1$ , onde se situa  $F'_r$  (o ponto  $F'$  rebatido).

Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{p_r}$  (o traço frontal do plano  $p$  em rebatimento). Assim, por  $F'_r$  conduziu-se uma paralela ao eixo  $X$ , que é  $f_{p_r} - f_{p_r}$ , está definido por um ponto ( $F'_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

### Rebatimento dos pontos $A$ e $B$ :

Para rebater o ponto  $A$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $A$  pertença – a reta  $s$ , por exemplo. Note que o rebatimento da reta  $s$  (por oposição ao rebatimento da reta  $r$ , à qual o ponto  $A$  também pertence) tem, como objetivo, com uma única reta rebatermos dois pontos – os pontos  $A$  e  $B$ .

Assim, para definirmos a reta  $s$  em rebatimento (a reta  $s_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto  $F'_r$ . Faltamos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal da reta  $s$  (o ponto  $H'$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H'_r \equiv H'_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $s_r$  – a reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $F'_r$  e  $H'_1$ ).

O ponto  $A$  é um ponto da reta  $s$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $A_r$  está sobre  $s_r$ , na perpendicular a  $h_p$  que passa por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a  $h_p$  (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ . Assim,  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido) é o ponto de interseção de  $s_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ .

O ponto  $B$  é outro ponto da reta  $s$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $B_r$  está sobre  $s_r$ , na perpendicular a  $h_p$  que passa por  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a  $h_p$  (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $B$ . Assim,  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido) é o ponto de interseção de  $s_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ .

### Rebatimento do ponto $C$ :

Para rebater o ponto  $C$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $C$  pertença – a reta  $i$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $i$  em rebatimento (a reta  $i_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $i$  é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos a direção para definir a reta  $i_r$  (em rebatimento, a reta  $i_r$  continua a ser paralela ao eixo  $X$ ). O ponto  $Q$  é um ponto da reta  $i$  e é, também, um ponto da reta  $s$ . Assim, rebateu-se o ponto  $Q$ , com o recurso à perpendicular à charneira que passa por  $Q_1$  (à semelhança do atrás exposto para os pontos  $A$  e  $B$ ) –  $Q_r$  é o ponto de interseção da reta  $s_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $Q_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  em rebatimento – a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $Q_r$ ) e uma direção (é paralela ao eixo  $X$ ).

O ponto  $C$  é um ponto da reta  $i$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $C_r$  está sobre  $i_r$ , na perpendicular a  $h_p$  que passa por  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a  $h_p$  (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $C$ . Assim,  $C_r$  (o ponto  $C$  rebatido) é o ponto de interseção de  $i_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $C_1$ .

A partir dos três pontos rebatidos ( $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[ABC]$  em rebatimento (o triângulo  $[A_rB_rC_r]$ ), que é o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $p$  e as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O triângulo  $[A_rB_rC_r]$  (o triângulo  $[ABC]$  rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $i$ , dos traçados relativos à determinação do ponto  $Q$ , dos traçados relativos ao rebatimento do ponto  $F'$ , das retas  $r_r$  e  $i_r$  e, ainda dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos).

## 265.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **S**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto **R** é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X** (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). Os dados permitiram-nos, ainda determinar **T<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **T**).

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\sigma$ . O ponto **S** tem afastamento nulo, pelo que o ponto **S** é, imediatamente, um ponto do traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ). Assim, por **S<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **S**) conduziu-se  $f_\sigma$  (o traço frontal do plano  $\sigma$ ), paralelo ao eixo **X** –  $f_\sigma$  está definido por um ponto (o ponto **S**) e uma direção (é fronto-horizontal).

O ponto **T**, porque pertence ao plano  $\sigma$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\sigma$ . Assim, o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\sigma$ . Nesse sentido, recorreu-se à reta **r**, pertencente ao plano  $\sigma$  e passando pelo ponto **T** –  $r_2$  (a projeção frontal da reta **r**) passa por **T<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **T**). Porque a reta **r** tem de estar definida por dois pontos, foi necessário conduzir a reta **r** pelo ponto **R**, que pertence ao plano  $\sigma$ . Assim, a reta **r** é a reta suporte do lado **[RT]** do triângulo. A reta **r**, porque pertence ao plano  $\sigma$ , tem de ter o seu traço frontal sobre o traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ). Assim, determinou-se o traço frontal da reta **r** (o ponto **F**), sobre  $f_\sigma$  (o traço frontal do plano). A reta **r** está, assim, está definida por dois pontos – o ponto **F** (o seu traço frontal) e o ponto **R**. Este procedimento permitiu-nos determinar a projeção horizontal da reta **r** ( $r_1$ ), bem como a projeção horizontal do ponto **T** (**T<sub>1</sub>**), que se situa sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta **r**).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano  $\sigma$ . O ponto **T** tem cota nula (é o traço horizontal da reta **r**), pelo que o ponto **T** é, imediatamente, um ponto do traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_\sigma$ ). Assim, por **T<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **T**) conduziu-se  $h_\sigma$  (o traço horizontal do plano  $\sigma$ ), paralelo ao eixo **X** –  $h_\sigma$  está definido por um ponto (o ponto **T**) e uma direção (é fronto-horizontal).

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[RST]**.

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo **[RST]** (o plano  $\sigma$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[RST]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\sigma$ , pelo rebatimento dos seus traços. Optou-se por rebater o plano  $\sigma$  para o Plano Horizontal de Projeção. Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_\sigma$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\sigma \equiv e_l \equiv h_{\sigma_r}$  ( $e_l$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

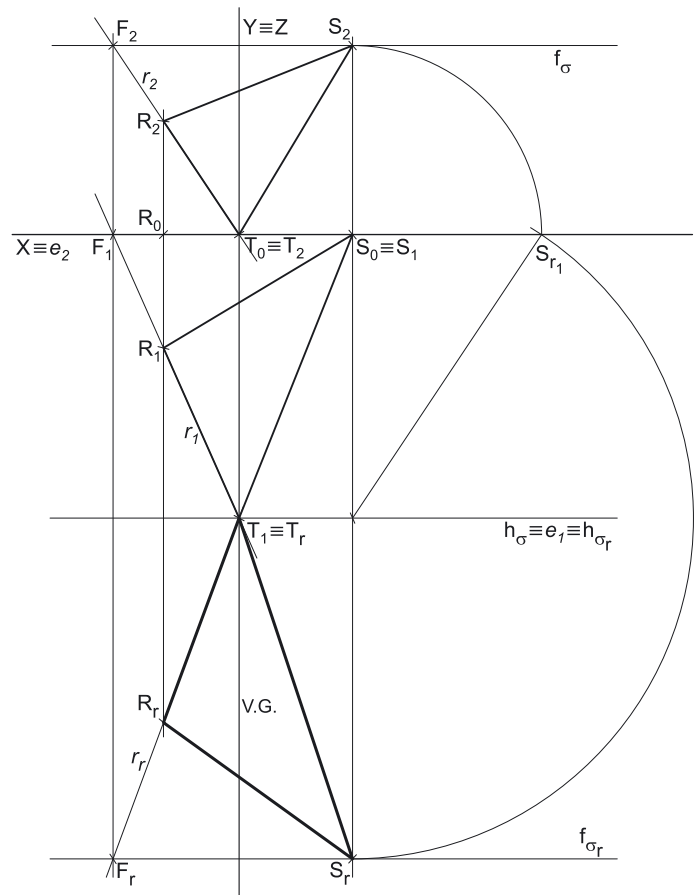
O ponto **T** é um ponto de  $h_\sigma$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **T<sub>r</sub>  $\equiv$  T<sub>1</sub>**.

**Rebatimento do traço frontal do plano  $\sigma$ :**

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $f_\sigma$  é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo **X**. Falta-nos um ponto para definir  $f_\sigma$  em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de  $f_\sigma$  – o ponto **S**, por exemplo. O ponto **S** tem de ser rebatido pelo triângulo do rebatimento.

Para rebater o ponto **S** conduziu-se, por **S**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **S**). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **S**, que é o ponto de interseção da charneira ( $h_\sigma$ ) com a perpendicular à charneira que passa por **S<sub>1</sub>** – note que também não se identificou o centro do arco do rebatimento do ponto **S**, com vista a uma gradual (e desejável) simplificação da resolução gráfica, em termos de excesso de notações.

O raio do arco do rebatimento do ponto **S** é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **S** – o triângulo do rebatimento do ponto **S** é o triângulo retângulo em **S<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **S**), que tem um vértice no ponto **S** e o terceiro vértice na charneira (no centro do arco do rebatimento do ponto **S**). O raio do arco do rebatimento (a hipotenusa do triângulo) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (pois é oblíqua a ambos os planos de projeção), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **S** (o plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **S**). Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção (em torno do seu traço horizontal) e construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **S** em verdadeira grandeza.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, por  $S_1$  (a projeção horizontal do ponto  $S$ ) conduziu-se uma paralela à charneira (que é o próprio eixo  $X$ ), para a qual se transportou a cota do ponto  $S$  – com o compasso, fazendo centro em  $S_1$  e com raio até  $S_2$ , transportou-se a cota do ponto  $S$  para o eixo  $X$ , onde se determinou o ponto  $S_{r1}$ . O ponto  $S_{r1}$  é o ponto  $S$ , rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento. Em seguida, concluiu-se o desenho do triângulo, com o terceiro vértice na charneira ( $h_p$ ). Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e raio até  $S_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $S$  (o arco  $S_{r1}S_r$ ), em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $S_1$ , onde se situa  $S_r$  (o ponto  $S$  rebatido).

Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{\sigma_r}$  (o traço frontal do plano  $\sigma$  em rebatimento). Assim, por  $S_r$  conduziu-se uma paralela ao eixo  $X$ , que é  $f_{\sigma_r} - f_{\sigma_r}$  está definido por um ponto ( $S_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

### Rebatimento do ponto R:

Para rebater o ponto  $R$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $R$  pertença – a reta  $r$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $r$  em rebatimento (a reta  $r_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto  $T_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal da reta  $r$  (o ponto  $F$ ) é um ponto de  $f_{\sigma}$  (o traço frontal do plano  $\sigma$ ) pelo que, em rebatimento, o ponto  $F$  continua a ser um ponto do traço frontal do plano ( $f_{\sigma_r}$ ). Assim, por  $F_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ) e determinou-se  $F_r$  sobre  $f_{\sigma_r}$  –  $F_r$  é o ponto de interseção de  $f_{\sigma_r}$  com a perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r_r$  – a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $F_r$  e  $T_r$ ).

O ponto  $R$  é um ponto da reta  $r$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $R_r$  está sobre  $r_r$ , na perpendicular a  $h_{\sigma_r}$  que passa por  $R_1$  (a projeção horizontal do ponto  $R$ ) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a  $h_{\sigma_r}$  (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $R$ . Assim,  $R_r$  (o ponto  $R$  rebatido) é o ponto de interseção de  $r_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $R_1$ .

A partir dos três pontos rebatidos ( $R_r$ ,  $S_r$  e  $T_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[R_rS_rT_r]$  em rebatimento (o triângulo  $[R_rS_rT_r]$ ), que é o triângulo  $[RST]$  em verdadeira grandeza.

### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[RST]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\rho$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. O triângulo  $[R_rS_rT_r]$  (o triângulo  $[RST]$  rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $r$ , dos traçados relativos ao rebatimento do ponto  $S$ , da reta  $r_r$  e, ainda dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos).

## 266.

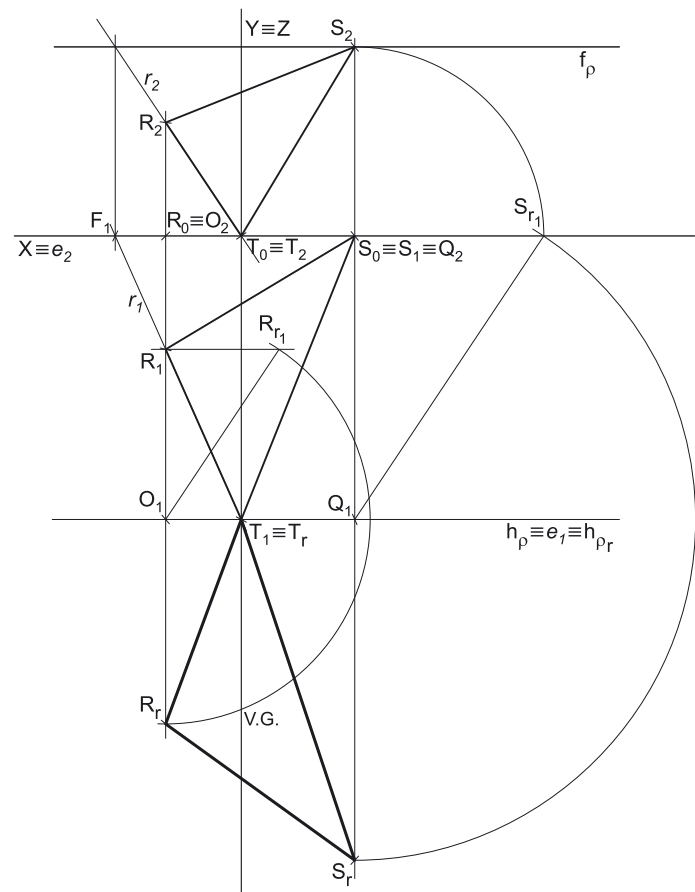
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $R$  e  $S$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto  $R$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). Os dados permitiram-nos, ainda determinar  $T_2$  (a projeção frontal do ponto  $T$ ).

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\sigma$ . O ponto  $S$  tem afastamento nulo, pelo que o ponto  $S$  é, imediatamente, um ponto do traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_{\sigma}$ ). Assim, por  $S_2$  (a projeção frontal do ponto  $S$ ) conduziu-se  $f_{\sigma}$  (o traço frontal do plano  $\sigma$ ), paralelo ao eixo  $X$  –  $f_{\sigma}$  está definido por um ponto (o ponto  $S$ ) e uma direção (é fronto-horizontal).

O ponto  $T$ , porque pertence ao plano  $\sigma$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\sigma$ . Assim, o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\sigma$ . Nesse sentido, recorreu-se à reta  $r$ , pertencente ao plano  $\sigma$  e passando pelo ponto  $T$  –  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ) passa por  $T_2$  (a projeção frontal do ponto  $T$ ). Porque a reta  $r$  tem de estar definida por dois pontos, foi necessário conduzir a reta  $r$  pelo ponto  $R$ , que pertence ao plano  $\sigma$ . Assim, a reta  $r$  é a reta suporte do lado  $[RT]$  do triângulo. A reta  $r$ , porque pertence ao plano  $\sigma$ , tem de ter o seu traço frontal sobre o traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_{\sigma}$ ). Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $r$  (o ponto  $F$ ), sobre  $f_{\sigma}$  (o traço frontal do plano). A reta  $r$  está, assim, está definida por dois pontos – o ponto  $F$  (o seu traço frontal) e o ponto  $R$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), bem como a projeção horizontal do ponto  $T$  ( $T_1$ ), que se situa sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano  $\sigma$ . O ponto  $T$  tem cota nula (é o traço horizontal da reta  $r$ ), pelo que o ponto  $T$  é, imediatamente, um ponto do traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_{\sigma}$ ). Assim, por  $T_1$  (a projeção horizontal do ponto  $T$ ) conduziu-se  $h_{\sigma}$  (o traço horizontal do plano  $\sigma$ ), paralelo ao eixo  $X$  –  $h_{\sigma}$  está definido por um ponto (o ponto  $T$ ) e uma direção (é fronto-horizontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [RST].

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo [RST] (o plano  $\sigma$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo [RST] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\rho$ , pelo triângulo do rebatimento. Optou-se por rebater o plano  $\sigma$  para o Plano Horizontal de Projeção. Começamos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\rho \equiv e_f \equiv h_{\rho_f}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo X). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

O ponto T é um ponto de  $h_\rho$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T_1$ .

#### Rebatimento do ponto R:

Para rebater o ponto R conduziu-se, por R, um plano de perfil (o plano ortogonal à charneira que contém o ponto R e o arco do seu rebatimento), que não se identificou. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto R, que é o ponto O (o ponto de interseção desse plano de perfil com a charneira –  $h_\rho$ ).

O raio do arco do rebatimento do ponto R é  $\overline{OR}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto R – o triângulo do rebatimento do ponto R é o triângulo retângulo [ORR<sub>1</sub>]. O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{OR}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto R. Para tal rebateu-se esse plano de perfil para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo [ORR<sub>1</sub>] em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por R<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto R) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto R (que é um dos catetos do triângulo [ORR<sub>1</sub>]), o que nos permitiu determinar o ponto R<sub>r1</sub>. O ponto R<sub>r1</sub> é o ponto R, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto R. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta [O<sub>1</sub>R<sub>r1</sub>], que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro em O<sub>1</sub> e raio  $\overline{O_1R_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto R (o arco  $\overline{R_{r1}R_r}$ ) até à perpendicular à charneira (que passa por R<sub>1</sub>), onde se situa R<sub>r</sub> (o ponto R rebatido).

#### Rebatimento do ponto S:

Para rebater o ponto S conduziu-se, por S, um plano de perfil (o plano ortogonal à charneira que contém o ponto S e o arco do seu rebatimento), que não se identificou. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto S, que é o ponto Q (o ponto de interseção desse plano de perfil com a charneira –  $h_\rho$ ).

O raio do arco do rebatimento do ponto S é  $\overline{QS}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto S – o triângulo do rebatimento do ponto S é o triângulo retângulo [QSS<sub>1</sub>]. O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{QS}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto S. Para tal rebateu-se esse plano de perfil para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo [QSS<sub>1</sub>] em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por S<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto S) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto S (que é um dos catetos do triângulo [QSS<sub>1</sub>]), o que nos permitiu determinar o ponto S<sub>r1</sub>. O ponto S<sub>r1</sub> é o ponto S, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto S. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta [Q<sub>1</sub>S<sub>r1</sub>], que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro em Q<sub>1</sub> e raio  $\overline{Q_1S_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto S (o arco  $\overline{S_{r1}S_r}$ ) até à perpendicular à charneira (que passa por S<sub>1</sub>), onde se situa S<sub>r</sub> (o ponto S rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos (R<sub>r</sub>, S<sub>r</sub> e T<sub>r</sub>), desenhou-se o triângulo [RST] em rebatimento (o triângulo [R<sub>r</sub>S<sub>r</sub>T<sub>r</sub>]), que é o triângulo [RST] em verdadeira grandeza.

#### Traçado:

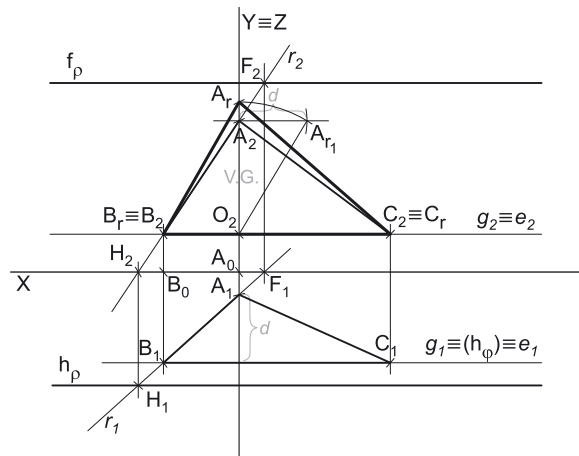
Os dados (as projeções do triângulo [RST]) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\rho$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. O triângulo [R<sub>r</sub>S<sub>r</sub>T<sub>r</sub>] (o triângulo [RST] rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $r$ , dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, os respetivos triângulos do rebatimento em verdadeira grandeza).

## 267.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar as projeções frontais dos pontos **A** e **B** ( $A_2$  e  $B_2$ , respetivamente).

Os pontos **A** e **B**, porque pertencem ao plano  $\rho$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\rho$ . Assim, os pontos têm de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, recorreu-se à reta  $r$ , pertencente ao plano  $\rho$  e passando pelos pontos **A** e **B** –  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ) passa por  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos dois pontos). A reta  $r$ , porque pertence ao plano  $\rho$ , tem de ter os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\rho$ . Assim, determinaram-se os traços da reta  $r$ , os pontos **F** e **H**. A reta  $r$  está, assim, definida por dois pontos – os seus traços. Este procedimento permitiu-nos determinar a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), bem como as projeções horizontais dos pontos **A** e **B** ( $A_1$  e  $B_1$ ), que se situam sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).



Tendo em conta que o lado **[BC]**, do triângulo, é fronto-horizontal, desenharam-se as projeções da reta  $g$ , a reta fronto-horizontal que é a reta suporte do lado **[BC]** do triângulo. A reta  $g$  está definida por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (é fronto-horizontal). Por fim, atendendo a que o lado **[BC]** mede 6 cm e se projeta em verdadeira grandeza em ambos os planos de projeção (a reta  $g$  é paralela aos dois planos de projeção), mediram-se os 6 cm sobre qualquer das duas projeções da reta, a partir da projeção respetiva do ponto **B**, e determinaram-se as projeções do ponto **C** (garantindo-se, ainda, que o ponto **C** se situa à direita do ponto **B**).

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

- a) O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\rho$  para o plano frontal (de frente) que contém o lado **[BC]** do triângulo. Nesse sentido, em primeiro lugar representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém o lado **[BC]**) pelo seu traço horizontal. O plano  $\phi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano  $\rho$  com o plano  $\phi$  – a reta  $e$  é, imediatamente, a reta  $g$  (a reta suporte do lado **[BC]**), pois os pontos **B** e **C** pertencem aos dois planos).

Efetuada o rebatimento do plano  $\rho$  para um plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, após o rebatimento, tudo o que estiver contido no plano  $\phi$  (em rebatimento) projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção.

O ponto **B** é um ponto da reta  $e$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $B_r \equiv B_2$ . Da mesma forma, o ponto **C** é outro ponto da reta  $e$  (que é a charneira), pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $C_r \equiv C_2$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do terceiro vértice do triângulo (o ponto **A**), pelo triângulo do rebatimento.

### Rebatimento do ponto A:

Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por **A**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**, e que não se identificou – o plano de perfil que contém o ponto **A**). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **A**, que é o ponto **O** (o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira – a reta  $e$ ). O ponto **O** representou-se, apenas, pela sua projeção frontal ( $O_2$ ).

O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é  $\overline{OA}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A**. Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza. Para tal conduziu-se, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a distância do ponto **A** ao plano  $\phi$  – a distância  $d$  (que é o afastamento do ponto **A** em relação ao plano  $\phi$ ). Isso permitiu-nos determinar o ponto  $A_{r1}$  (que é o ponto **A** rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento).

Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[O_2A_{r1}]$  (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O_2$  e raio  $\overline{O_2A_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco  $\overline{A_r1A_2}$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $A_r$  (o ponto **A** rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos ( $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ ), desenhou-se o triângulo **[ABC]** em rebatimento (o triângulo  $[A_rB_rC_r]$ ), que é o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza.

- b) **Vantagens do rebatimento do plano  $\rho$  para o plano  $\phi$ , em relação ao rebatimento do plano  $\rho$  para qualquer dos planos de projeção:** o rebatimento do plano  $\rho$  para o plano  $\phi$  (que contém os pontos **B** e **C**) permitiu-nos economizar o rebatimento de dois pontos – os pontos **B** e **C**, precisamente. De facto, uma vez que aqueles dois pontos se situam na charneira do rebatimento (por pertencerem aos dois planos – o plano a rebater e o plano para o qual se processa o rebatimento), os pontos **B** e **C** rodam sobre si próprios, pelo que os respetivos rebatimentos são imediatos, sem quaisquer outros traçados auxiliares acrescentados – foi necessário, apenas, efetuar o rebatimento do terceiro vértice do triângulo (o vértice **A**). Caso se efetuasse o rebatimento do plano  $\rho$  para qualquer dos planos de projeção, seria necessário rebater os três vértices do triângulo, com todos os traçados de que tal procedimento exige.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$  e as projeções do triângulo **[ABC]**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O plano  $\phi$  (o plano para o qual se efetuou o rebatimento) é igualmente auxiliar, pelo que se representou igualmente a **leve**. O triângulo  $[A_rB_rC_r]$  (o triângulo **[ABC]** rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $g$ , bem como todos os traçados necessários ao rebatimento do ponto **A**).

**268.**

A **charneira do rebatimento** no rebatimento de um plano passante (para um dos planos de projeção) é sempre o eixo **X**. De facto, tendo em conta que a charneira do rebatimento é a reta de interseção do plano a rebater com o plano para qual se processa o rebatimento, tem-se o seguinte:

- no caso de se efetuar o rebatimento de um plano passante para Plano Frontal de Projeção, a charneira do rebatimento é o eixo **X**, pois o eixo **X** é a reta de interseção desse plano passante (o plano a rebater) com o Plano Frontal de Projeção (o plano para o qual se processa o rebatimento);
- no caso de se efetuar o rebatimento de um plano passante para Plano Horizontal de Projeção, a charneira do rebatimento é o eixo **X**, pois o eixo **X** é a reta de interseção desse plano passante (o plano a rebater) com o Plano Horizontal de Projeção (o plano para o qual se processa o rebatimento);

**269.**

O problema do **rebatimento de um plano passante** é o facto de o **raio do arco do rebatimento de qualquer ponto** não se projetar em verdadeira grandeza, em nenhum dos planos de projeção.

**270.**

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**. Os dados permitiram-nos, ainda, representar a projeção frontal do ponto **B** (**B<sub>2</sub>**), bem como a projeção horizontal do ponto **C** (**C<sub>1</sub>**).

*Determinação das projeções do triângulo:*

Os pontos **B** e **C**, para pertencerem ao plano  $\rho$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta **r** é a reta do plano  $\rho$  a que se recorreu para se determinar a projeção horizontal do ponto **B** – a reta **r** é a reta suporte do lado **[AB]** do triângulo e a sua projeção frontal passa pelas projeções frontais dos dois pontos (**A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>**). A reta **r** é uma reta passante e está definida por dois pontos – o ponto **A** (o ponto que define o plano) e o ponto **M** (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**). Este procedimento permitiu-nos desenhar a projeção horizontal da reta **r** (**r<sub>1</sub>**). A projeção horizontal do ponto **B** (**B<sub>1</sub>**) situa-se sobre a projeção horizontal da reta **r** (**r<sub>1</sub>**), na linha de chamada de **B<sub>2</sub>**.

A reta **s** é a reta do plano  $\rho$  a que se recorreu para se determinar a projeção frontal do ponto **C** – a reta **s** é uma reta paralela à reta **r**, pelo que a sua projeção horizontal (**s<sub>1</sub>**) passa pela projeção horizontal do ponto **C** (**C<sub>1</sub>**) e é paralela à projeção horizontal da reta **r** (**r<sub>1</sub>**). A reta **s** é, também, uma reta passante e está definida por um ponto (o ponto **N**, o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e por uma direção (a direção da reta **r**). Este procedimento permitiu-nos desenhar a projeção frontal da reta **s** (**s<sub>2</sub>**). A projeção frontal do ponto **C** (**C<sub>2</sub>**) situa-se na projeção frontal da reta **s** (**s<sub>2</sub>**), na linha de chamada de **C<sub>1</sub>**.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

**Resolução:**

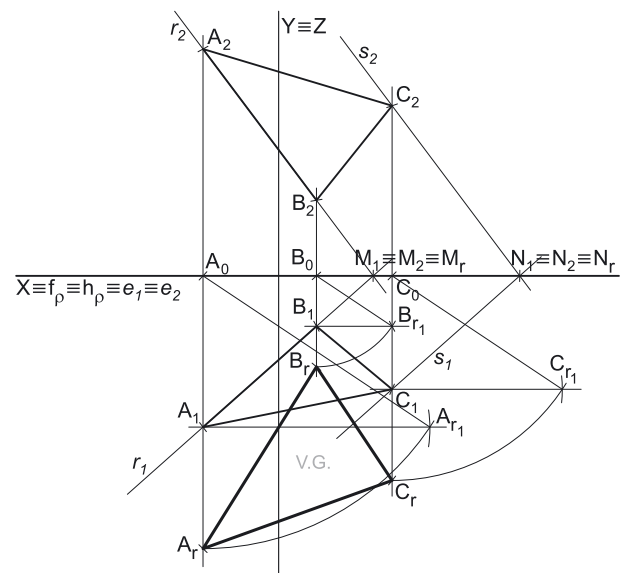
O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, pelo triângulo do rebatimento. Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  (**h<sub>p</sub>**), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente  $X \equiv f_p \equiv h_p \equiv e_1 \equiv e_2$  (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

*Rebatimento do ponto A:*

Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por **A<sub>1</sub>**, uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (que não se identificou) que contém o ponto **A** – o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **A**. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **A**, que é o ponto **A<sub>0</sub>** (o ponto de interseção do plano de perfil que contém o ponto **A** com a charneira – **h<sub>p</sub>**).

O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é  $\overline{A_0A}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A** – o triângulo do rebatimento do ponto **A** é o triângulo retângulo **[A<sub>0</sub>AA<sub>1</sub>]**. O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{A_0A}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **A**, neste caso. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo **[A<sub>0</sub>AA<sub>1</sub>]** em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **A** (que é um dos catetos do triângulo **[A<sub>0</sub>AA<sub>1</sub>]**), o que nos permitiu determinar o ponto **A<sub>r1</sub>**. O ponto **A<sub>r1</sub>** é o ponto **A**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **A**. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[A<sub>0</sub>A<sub>r1</sub>]**, que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto **A<sub>0</sub>** e raio  $\overline{A_0A_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco  $\widehat{A_{r1}A_r}$ ) até à perpendicular à charneira que passa por **A<sub>1</sub>**, onde se situa **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Rebatimento do ponto B:

Para rebater o ponto **B** conduziu-se, por **B<sub>1</sub>**, uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (que não se identificou) que contém o ponto **B** – o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **B**. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **B**, que é o ponto **B<sub>0</sub>** (o ponto de interseção do plano de perfil que contém o ponto **B** com a charneira – **h<sub>p</sub>**).

O raio do arco do rebatimento do ponto **B** é  $\overline{B_0B}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **B** – o triângulo do rebatimento do ponto **B** é o triângulo retângulo  $[B_0BB_1]$ . O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{B_0B}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **B**, neste caso. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo  $[B_0BB_1]$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **B** (que é um dos catetos do triângulo  $[B_0BB_1]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto **B<sub>r1</sub>**. O ponto **B<sub>r1</sub>** é o ponto **B**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **B**. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[B_0B_{r1}]$ , que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto **B<sub>0</sub>** e raio  $\overline{B_0B_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **B** (o arco  $\overline{B_1B_r}$ ) até à perpendicular à charneira que passa por **B<sub>1</sub>**, onde se situa **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido).

## Rebatimento do ponto C:

Para rebater o ponto **C** conduziu-se, por **C<sub>1</sub>**, uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (que não se identificou) que contém o ponto **C** – o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **C**. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **C**, que é o ponto **C<sub>0</sub>** (o ponto de interseção do plano de perfil que contém o ponto **C** com a charneira – **h<sub>p</sub>**).

O raio do arco do rebatimento do ponto **C** é  $\overline{C_0C}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **C** – o triângulo do rebatimento do ponto **C** é o triângulo retângulo  $[C_0CC_1]$ . O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{C_0C}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **C**, neste caso. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo  $[C_0CC_1]$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **C** (que é um dos catetos do triângulo  $[C_0CC_1]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto **C<sub>r1</sub>**. O ponto **C<sub>r1</sub>** é o ponto **C**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **C**. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[C_0C_{r1}]$ , que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto **C<sub>0</sub>** e raio  $\overline{C_0C_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **C** (o arco  $\overline{C_1C_r}$ ) até à perpendicular à charneira que passa por **C<sub>1</sub>**, onde se situa **C<sub>r</sub>** (o ponto **C** rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos (**A<sub>r</sub>**, **B<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**), desenhou-se o triângulo  $[ABC]$  em rebatimento (o triângulo  $[A_rB_rC_r]$ ), que é o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza.

## Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é onde se situam os traços do plano  $\rho$  e é a linha estruturante do exercício). O triângulo  $[A_rB_rC_r]$  (o triângulo  $[ABC]$  rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **s**, dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, os respetivos triângulos do rebatimento e arcos do rebatimento).

## 271.

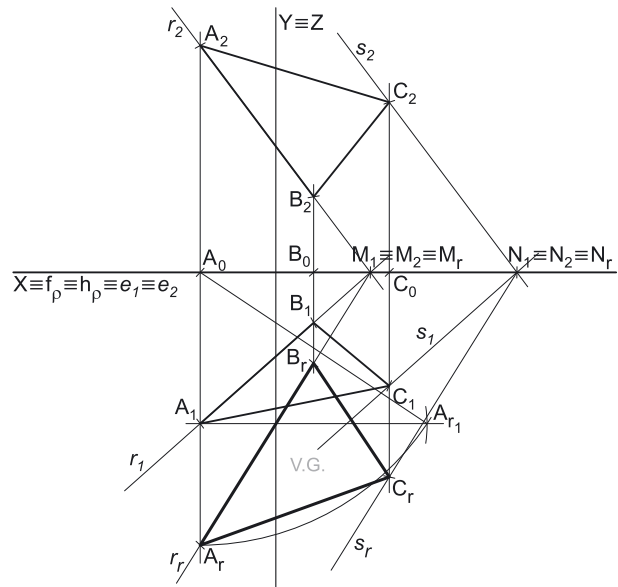
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**. Os dados permitiram-nos, ainda, representar a projeção frontal do ponto **B** (**B<sub>2</sub>**), bem como a projeção horizontal do ponto **C** (**C<sub>1</sub>**).

### Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos **B** e **C**, para pertencerem ao plano  $\rho$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta **r** é a reta do plano  $\rho$  a que se recorreu para se determinar a projeção horizontal do ponto **B** – a reta **r** é a reta suporte do lado  $[AB]$  do triângulo e a sua projeção frontal passa pelas projeções frontais dos dois pontos (**A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>**). A reta **r** é uma reta passante e está definida por dois pontos – o ponto **A** (o ponto que define o plano) e o ponto **M** (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**). Este procedimento permitiu-nos desenhar a projeção horizontal da reta **r** (**r<sub>1</sub>**). A projeção horizontal do ponto **B** (**B<sub>1</sub>**) situa-se sobre a projeção horizontal da reta **r** (**r<sub>1</sub>**), na linha de chamada de **B<sub>2</sub>**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $s$  é a reta do plano  $\rho$  a que se recorreu para se determinar a projeção frontal do ponto  $C$  – a reta  $s$  é uma reta paralela à reta  $r$ , pelo que a sua projeção horizontal ( $s_1$ ) passa pela projeção horizontal do ponto  $C$  ( $C_1$ ) e é paralela à projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ). A reta  $s$  é, também, uma reta passante e está definida por um ponto (o ponto  $N$ , o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ) e por uma direção (a direção da reta  $r$ ). Este procedimento permitiu-nos desenhar a projeção frontal da reta  $s$  ( $s_2$ ). A projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ) situa-se na projeção frontal da reta  $s$  ( $s_2$ ), na linha de chamada de  $C_1$ .

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\rho$ , pelo rebatimento das suas retas. Nesse sentido, optou-se por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção. Começamos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que se situa no eixo  $X$ , pelo que se tem imediatamente  $X \equiv f_\rho \equiv h_\rho \equiv e_1 \equiv e_2$  (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

O recurso ao rebatimento de retas do plano (para rebater os pontos do plano que pertencem a essas retas) requer, tal como no rebatimento do plano de rampa, o rebatimento de um ponto do plano pelo triângulo do rebatimento. Optou-se por rebater o ponto  $A$ .

#### Rebatimento do ponto A:

Para rebater o ponto  $A$  conduziu-se, por  $A_1$ , uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (que não se identificou) que contém o ponto  $A$  – o plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ . Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto  $A$ , que é o ponto  $A_0$  (o ponto de interseção do plano de perfil que contém o ponto  $A$  com a charneira –  $h_\rho$ ).

O raio do arco do rebatimento do ponto  $A$  é  $\overline{A_0A}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $A$  – o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  é o triângulo retângulo  $[A_0AA_1]$ . O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{A_0A}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto  $A$ , neste caso. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo  $[A_0AA_1]$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto  $A$  (que é um dos catetos do triângulo  $[A_0AA_1]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $A_{r1}$ . O ponto  $A_{r1}$  é o ponto  $A$ , rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o ponto  $A$ . Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[A_0A_{r1}]$ , que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $A_0$  e raio  $\overline{A_0A_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$  (o arco  $\overline{A_1A_r}$ ) até à perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , onde se situa  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido).

#### Rebatimento do ponto B:

Para rebater o ponto  $B$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $B$  pertença – a reta  $r$ , neste caso (a reta  $r$  é a reta suporte do lado  $[AB]$  do triângulo). Assim, para definirmos a reta  $r$  em rebatimento (a reta  $r_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência da reta  $r$  com o eixo  $X$  (o ponto  $M$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $M_r \equiv M_1$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, já temos também o ponto  $A_r$  (o ponto  $A$  é um ponto da reta  $r$ ), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r_r$  – a reta  $r_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $M_r$ ).

O ponto  $B$  é um ponto da reta  $r$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $B_r$  está sobre  $r_r$ , na perpendicular a  $h_\rho$  que passa por  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a  $h_\rho$  (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $B$ . Assim,  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido) é o ponto de interseção de  $r_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ .

#### Rebatimento do ponto C:

Para rebater o ponto  $C$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $C$  pertença – a reta  $s$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $s$  em rebatimento (a reta  $s_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência da reta  $s$  com o eixo  $X$  (o ponto  $N$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $N_r \equiv N_1$ . Já temos um ponto para definir a reta  $s_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $s$  é paralela à reta  $r$  o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s_r$  – a reta  $s_r$  está definida por um ponto (o ponto  $N_r$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $r_r$ ).

O ponto  $C$  é um ponto da reta  $s$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $C_r$  está sobre  $s_r$ , na perpendicular a  $h_\rho$  que passa por  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a  $h_\rho$  (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $C$ . Assim,  $C_r$  (o ponto  $C$  rebatido) é o ponto de interseção de  $s_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $C_1$ .

A partir dos três pontos rebatidos ( $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[ABC]$  em rebatimento (o triângulo  $[A_rB_rC_r]$ ), que é o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza.

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é onde se situam os traços do plano  $\rho$  e é a linha estruturante do exercício). O triângulo  $[A_rB_rC_r]$  (o triângulo  $[ABC]$  rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do ponto  $A$  e as retas  $r_r$  e  $s_r$ ).



(continuação da página anterior)

#### Rebatimento do ponto T:

Para rebater o ponto **T** conduziu-se, por **T<sub>2</sub>**, uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o ponto **T**, bem como o arco do seu rebatimento (plano esse que não se identificou). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **T**, que é o ponto **M** (o ponto de interseção do plano de perfil que contém o ponto **T** com a charneira – **f<sub>p</sub>**).

O raio do arco do rebatimento do ponto **T** é  $\overline{MT}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **T** – o triângulo do rebatimento do ponto **T** é o triângulo retângulo **[MTT<sub>2</sub>]**. O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{MT}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **T**, neste caso. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo **[MTT<sub>2</sub>]** em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por **T<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **T**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou o afastamento do ponto **T** (que é um dos catetos do triângulo **[MTT<sub>2</sub>]**), o que nos permitiu determinar o ponto **T<sub>r1</sub>**. O ponto **T<sub>r1</sub>** é o ponto **T**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **T**. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[M<sub>2</sub>T<sub>r1</sub>]**, que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto **M<sub>2</sub>** e raio  $\overline{M_2T_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **T** (o arco  $\overline{T_{r1}T_r}$ ) até à perpendicular à charneira que passa por **T<sub>2</sub>**, onde se situa **T<sub>r</sub>** (o ponto **T** rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos (**R<sub>r</sub>**, **S<sub>r</sub>** e **T<sub>r</sub>**), desenhou-se o triângulo **[RST]** em rebatimento (o triângulo **[R,S,T<sub>r</sub>]**), que é o triângulo **[RST]** em verdadeira grandeza.

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo **[RST]**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é onde se situam os traços do plano  $\rho$  e é a linha estruturante do exercício). O triângulo **[R<sub>r</sub>S<sub>r</sub>T<sub>r</sub>]** (o triângulo **[RST]** rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **g**, dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, os respetivos triângulos do rebatimento e arcos do rebatimento).

## 273.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **R**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **R**. É dada a direção da projeção frontal do lado **[RS]** do triângulo. Assim, considerou-se que a reta suporte daquele lado é a reta **r** e desenhou-se a sua projeção frontal (**r<sub>2</sub>**), em função desse dado.

#### Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos **S** e **T**, para pertencerem ao plano  $\rho$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta **r** é a reta suporte do lado **[RS]** do triângulo e é necessariamente uma reta passante. Nesse sentido, a reta **r** está definida por dois pontos – o ponto **R** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (o ponto **K**). Este procedimento permitiu-nos desenhar a projeção horizontal da reta **r** (**r<sub>1</sub>**). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **S**, pertencente à reta **r** e em função dos dados – o ponto **S** é o ponto da reta **r** que tem 6 cm de cota (a cota do lado **[ST]**, que é fronto-horizontal).

A reta **g**, fronto-horizontal, é a reta do plano  $\rho$  a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **T** – a reta **g** é a reta suporte do lado **[ST]** do triângulo. A reta **g** está, assim, definida por um ponto (o ponto **S**) e uma direção (é fronto-horizontal). O ponto **T** é o ponto da reta **g** com -4 de abscissa.

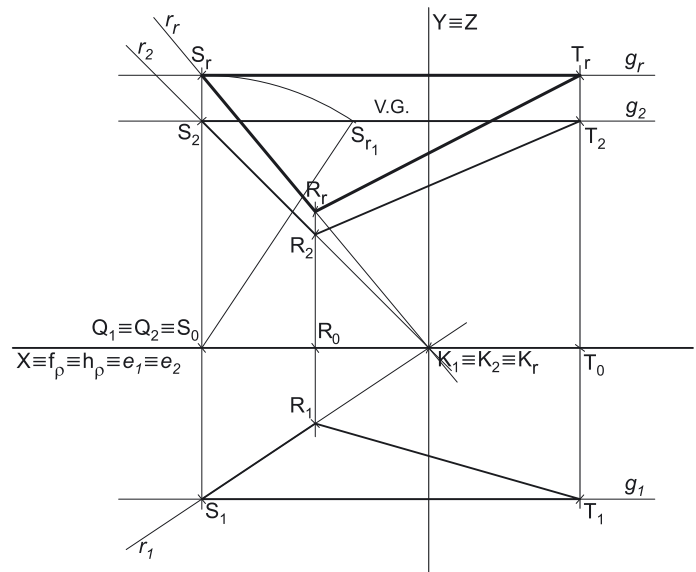
A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[RST]**.

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo **[RST]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[RST]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo rebatimento das suas retas. Começamos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\rho$  (**f<sub>p</sub>**), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente  $X \equiv f_p \equiv h_p \equiv e_1 \equiv e_2$  (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

O recurso ao rebatimento de retas do plano (para rebater os pontos do plano que pertencem a essas retas) requer, tal como no rebatimento do plano de rampa, o rebatimento de um ponto do plano pelo triângulo do rebatimento. Optou-se por rebater o ponto **S**. Esta opção tem a ver com dois fatores:

- em primeiro lugar, por uma questão de rigor – tendo em conta que é necessário rebater a reta **r**, os pontos a recorrer devem estar o mais afastados possível;
- em segundo lugar, por uma questão de economia de traçados – o ponto **S** é o ponto de concorrência das retas **r** e **g** e, por isso, com o recurso ao ponto **S**, é possível ter um ponto de cada reta de forma imediata.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Rebatimento do ponto S:

Para rebater o ponto **S** conduziu-se, por **S**<sub>2</sub>, uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o ponto **S**, bem como o arco do seu rebatimento (plano esse que não se identificou). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **S**, que é o ponto **Q** (o ponto de interseção do plano de perfil que contém o ponto **S** com a charneira – **f**<sub>p</sub>).

O raio do arco do rebatimento do ponto **S** é  $\overline{QS}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **S** – o triângulo do rebatimento do ponto **S** é o triângulo retângulo **[QSS**<sub>2</sub>**]**. O raio do arco do rebatimento (a distância **QS**) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **S**, neste caso. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo **[QSS**<sub>2</sub>**]** em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por **S**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **S**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou o afastamento do ponto **S** (que é um dos catetos do triângulo **[QSS**<sub>2</sub>**]**), o que nos permitiu determinar o ponto **S**<sub>r1</sub>. O ponto **S**<sub>r1</sub> é o ponto **S**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **S**. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[Q**<sub>2</sub>**S**<sub>r1</sub>**]**, que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto **Q**<sub>2</sub> e raio **Q**<sub>2</sub>**S**<sub>r1</sub>, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **S** (o arco **S**<sub>r1</sub>**S**<sub>r</sub>) até à perpendicular à charneira que passa por **S**<sub>2</sub>, onde se situa **S**<sub>r</sub> (o ponto **S** rebatido).

## Rebatimento do ponto R:

Para rebater o ponto **R** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **R** pertença – a reta **r**, neste caso (a reta **r** é a reta suporte do lado **[RS]** do triângulo). Assim, para definirmos a reta **r** em rebatimento (a reta **r**<sub>r</sub>), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência da reta **r** com o eixo **X** (o ponto **K**) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **K**<sub>r</sub> ≡ **K**<sub>2</sub>. Já temos um ponto para definir a reta **r**<sub>r</sub>. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, já temos também o ponto **S**<sub>r</sub> (o ponto **S** é um ponto da reta **r**), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **r**<sub>r</sub> – a reta **r**<sub>r</sub> está definida por dois pontos (os pontos **S**<sub>r</sub> e **K**<sub>r</sub>).

O ponto **R** é um ponto da reta **r** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **R**<sub>r</sub> está sobre **r**<sub>r</sub>, na perpendicular a **f**<sub>p</sub> que passa por **R**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **R**) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a **f**<sub>p</sub> (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto **R**. Assim, **R**<sub>r</sub> (o ponto **R** rebatido) é o ponto de interseção de **r**<sub>r</sub> com a perpendicular à charneira que passa por **R**<sub>2</sub>.

## Rebatimento do ponto T:

Para rebater o ponto **T** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **T** pertença – a reta **g**, neste caso. Assim, para definirmos a reta **g** em rebatimento (a reta **g**<sub>r</sub>), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto **S**<sub>r</sub>) para definir a reta – o ponto **S** é um ponto da reta **g**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, a reta **g** é uma reta fronto-horizontal, pelo que também já temos a direção que nos faltava para definir a reta **g** em rebatimento (**g**<sub>r</sub>) – a reta **g**<sub>r</sub> está definida por um ponto (o ponto **S**<sub>r</sub>) e por uma direção (é fronto-horizontal).

O ponto **T** é um ponto da reta **g** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **T**<sub>r</sub> está sobre **g**<sub>r</sub>, na perpendicular a **f**<sub>p</sub> que passa por **T**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **T**) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a **f**<sub>p</sub> (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto **T**. Assim, **T**<sub>r</sub> (o ponto **T** rebatido) é o ponto de interseção de **g**<sub>r</sub> com a perpendicular à charneira que passa por **T**<sub>2</sub>.

A partir dos três pontos rebatidos (**R**<sub>r</sub>, **S**<sub>r</sub> e **T**<sub>r</sub>), desenhou-se o triângulo **[RST]** em rebatimento (o triângulo **[R**<sub>r</sub>**S**<sub>r</sub>**T**<sub>r</sub>**]**, que é o triângulo **[RST]** em verdadeira grandeza.

## Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo **[RST]**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é onde se situam os traços do plano  $\rho$  e é a linha estruturante do exercício). O triângulo **[R**<sub>r</sub>**S**<sub>r</sub>**T**<sub>r</sub>**]** (o triângulo **[RST]** rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **g**, dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do ponto **S** e as retas **r** e **g**).

## 274.

### Dados:

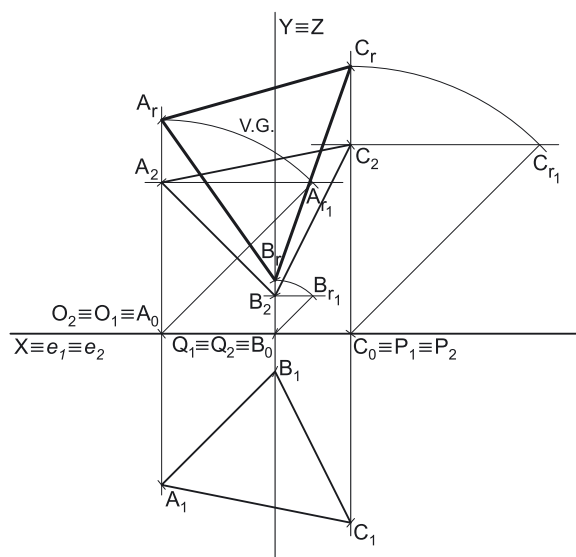
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **C**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os pontos **A**, **B** e **C** têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois pertencem ao  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**).

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

Note que o  $\beta_{1/3}$  não se representa pelos seus traços, pois é um plano passante definido pelo eixo **X** e pela sua orientação, que é conhecida. Assim, apesar de não se ter identificado qualquer outro elemento do  $\beta_{1/3}$  para além dos pontos dados, é sobejamente conhecida a posição do plano no espaço.

### Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o  $\beta_{1/3}$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do  $\beta_{1/3}$ , pelo triângulo do rebatimento. Optou-se por rebater o  $\beta_{1/3}$  para o Plano Horizontal de Projeção. Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o próprio eixo **X** – tem-se imediatamente **X** ≡ **e**<sub>1</sub> ≡ **e**<sub>2</sub>. Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Rebatimento do ponto A:

Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por  $A_2$ , uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o ponto **A**, bem como o arco do seu rebatimento (plano esse que não se identificou). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **A**, que é o ponto **O** (o ponto de interseção do plano de perfil que contém o ponto **A** com a charneira – o eixo **X**).

O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é  $\overline{OA}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A** – o triângulo do rebatimento do ponto **A** é o triângulo retângulo  $[OAA_2]$ . O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{OA}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **A**, neste caso. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Frontal de Projeção e construiu-se o triângulo  $[OAA_2]$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou o afastamento do ponto **A** (que é um dos catetos do triângulo  $[OAA_2]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $A_{r1}$ . O ponto  $A_{r1}$  é o ponto **A**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **A**. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[O_2A_{r1}]$ , que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O_2$  e raio  $\overline{O_2A_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco  $\overline{A_{r1}A_r}$ ) até à perpendicular à charneira que passa por  $A_2$ , onde se situa  $A_r$  (o ponto **A** rebatido).

#### Rebatimento do ponto B:

Para rebater o ponto **B** conduziu-se, por  $B_2$ , uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o ponto **B**, bem como o arco do seu rebatimento (plano esse que não se identificou). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **B**, que é o ponto **Q** (o ponto de interseção do plano de perfil que contém o ponto **B** com a charneira – o eixo **X**).

O raio do arco do rebatimento do ponto **B** é  $\overline{QB}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **B** – o triângulo do rebatimento do ponto **B** é o triângulo retângulo  $[QBB_2]$ . O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{QB}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **B**, neste caso. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo  $[QBB_2]$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto **B**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou o afastamento do ponto **B** (que é um dos catetos do triângulo  $[QBB_2]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $B_{r1}$ . O ponto  $B_{r1}$  é o ponto **B**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **B**. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[Q_2B_{r1}]$ , que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $Q_2$  e raio  $\overline{Q_2B_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **B** (o arco  $\overline{B_{r1}B_r}$ ) até à perpendicular à charneira que passa por  $B_2$ , onde se situa  $B_r$  (o ponto **B** rebatido).

#### Rebatimento do ponto C:

Para rebater o ponto **C** conduziu-se, por  $C_2$ , uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o ponto **C**, bem como o arco do seu rebatimento (plano esse que não se identificou). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **C**, que é o ponto **P** (o ponto de interseção do plano de perfil que contém o ponto **C** com a charneira – o eixo **X**).

O raio do arco do rebatimento do ponto **C** é  $\overline{PC}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **C** – o triângulo do rebatimento do ponto **C** é o triângulo retângulo  $[PCC_2]$ . O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{PC}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **C**, neste caso. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo  $[PCC_2]$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou o afastamento do ponto **C** (que é um dos catetos do triângulo  $[PCC_2]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $C_{r1}$ . O ponto  $C_{r1}$  é o ponto **C**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **C**. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[P_2C_{r1}]$ , que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $P_2$  e raio  $\overline{P_2C_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **C** (o arco  $\overline{C_{r1}C_r}$ ) até à perpendicular à charneira que passa por  $C_2$ , onde se situa  $C_r$  (o ponto **C** rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos ( $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[ABC]$  em rebatimento (o triângulo  $[A_rB_rC_r]$ ), que é o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza.

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O triângulo  $[A_rB_rC_r]$  (o triângulo  $[ABC]$  rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, os respetivos triângulos do rebatimento e arcos do rebatimento).





(continuação da página anterior)

Assim, para definirmos a reta  $s$  em rebatimento (a reta  $s_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência da reta  $s$  com o eixo  $X$  (que não se identificou) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir a reta  $s_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Atendendo a que a reta  $s$  é paralela à reta  $r$  (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s$  – a reta  $s_r$  está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ) e uma direção (é paralela à reta  $r_r$ ).

O ponto  $C$  é um ponto da reta  $s$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $C_r$  está sobre  $s_r$ , na perpendicular ao eixo  $X$  que passa por  $C_2$  (a projeção frontal do ponto  $C$ ) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal ao eixo  $X$  (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $C$ . Assim,  $C_r$  (o ponto  $C$  rebatido) é o ponto de interseção de  $s_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $C_2$ .

A partir dos três pontos rebatidos ( $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[ABC]$  em rebatimento (o triângulo  $[A_rB_rC_r]$ ), que é o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza.

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O triângulo  $[A_rB_rC_r]$  (o triângulo  $[ABC]$  rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do ponto  $A$  e as retas  $r_r$  e  $s_r$ ).

## 276.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto  $A$ . Os dados permitiram-nos, ainda, determinar as projeções horizontais dos pontos  $B$  e  $C$  ( $B_1$  e  $C_1$ ).

Em seguida, recorreu-se à reta  $r$ , que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ . A projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ) passa pelas projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $B$  ( $A_1$  e  $B_1$ , respetivamente). Uma vez que a reta  $r$  é uma reta do plano  $\rho$ , a reta  $r$  é necessariamente uma reta passante, que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto (que não se identificou). Assim, a reta  $r$  está definida por dois pontos – o ponto  $A$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ . Foi possível, em seguida, determinar a projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ), que se situa sobre a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ).

Em seguida, recorreu-se à reta  $s$ , paralela à reta  $r$ , que passa pelo ponto  $C$ . A projeção horizontal da reta  $s$  ( $s_1$ ) passa pela projeção horizontal do ponto  $C$  ( $C_1$ ) e é paralela à projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ). Uma vez que a reta  $s$  é outra reta do plano  $\rho$ , a reta  $s$  é necessariamente outra reta passante, que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto (que também não se identificou). Assim, a reta  $s$  está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ) e uma direção (é paralela à reta  $r$ ). Foi possível, em seguida, determinar a projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ), que se situa sobre a projeção frontal da reta  $s$  ( $s_2$ ).

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .

#### Resolução:

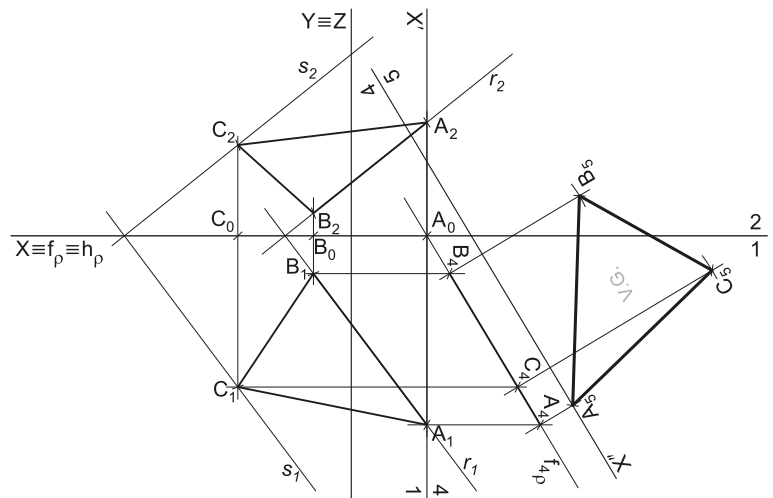
O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\rho$  num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível) com 1 cm de cota. Um plano horizontal (de nível) é um caso particular dos planos projetantes frontais (é um plano projetante frontal que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano  $\rho$  num plano projetante frontal.

#### Transformação do plano $\rho$ num plano projetante frontal:

Para transformar o plano  $\rho$  num plano projetante frontal (um plano de topo) é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano ( $h_p$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_1$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $A$ ). Em seguida, desenhou-se o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** –  $f_{4,p}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4,p}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_p$  (que se situa no eixo  $X'$ ) e  $A_4$  (a nova projeção frontal do ponto  $A$ ). Note que  $h_p$  se situa no eixo  $X$  e, tendo em conta que se mantém o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**),  $h_p$  mantém-se. Assim, o ponto de concorrência dos dois traços do plano (no novo diedro de projeção), que se situa necessariamente no eixo  $X'$ , é, no desenho, o ponto de concorrência do eixo  $X$  com o eixo  $X'$ . Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $B$  e  $C$  no **plano 4** ( $B_4$  e  $C_4$ , respetivamente), que se situam necessariamente sobre  $f_{4,p}$  (pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal). Note que  $B_4$  e  $C_4$  se poderiam ter determinado em função das respetivas cotas, que se situariam igualmente sobre  $f_{4,p}$ . A projeção do triângulo  $[ABC]$  no **plano 4** reduz-se a um segmento de reta sobre  $f_{4,p}$ , pois o plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, é um plano projetante frontal (um plano de topo).

*Transformação do plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível):*

Agora, há que transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível). Para tal, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se mantém o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos (as projeções no **plano 4** – o plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $5/4$ . Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\rho$ , o eixo  $X''$  é paralelo ao novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4,p}$ ) e situa-se a 1 cm deste (a cota pretendida). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_5$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $A_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $A_1$  ao eixo  $X'$ .  $B_5$  é a projeção do ponto  $B$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $B_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $B_1$  ao eixo  $X'$ .  $C_5$  é a projeção do ponto  $C$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $C_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $C_1$  ao eixo  $X'$ .

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 5** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano horizontal (de nível) com 1 cm de cota – no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é paralelo ao **plano 5** (não tem traço horizontal). Assim, o triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 5**, pois o plano que o contém (o plano  $\rho$ ) é paralelo ao **plano 5**.

A partir das projeções dos três pontos no **plano 5**, desenhou-se a nova projeção horizontal do triângulo – o triângulo  $[A_5B_5C_5]$  é a verdadeira grandeza do triângulo  $[ABC]$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ ). A projeção do triângulo no **plano 5** representou-se a **forte**, pois é o pedido – é nessa projeção que se pode medir a verdadeira grandeza do triângulo. A projeção do triângulo no **plano 4** representou-se a **médio-forte**, pois integra o pedido apenas parcialmente (integra a representação do triângulo no diedro de projeção final, no qual o plano  $\rho$  é um plano frontal). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X$  e do eixo  $X''$ ) ou são linhas de chamada.

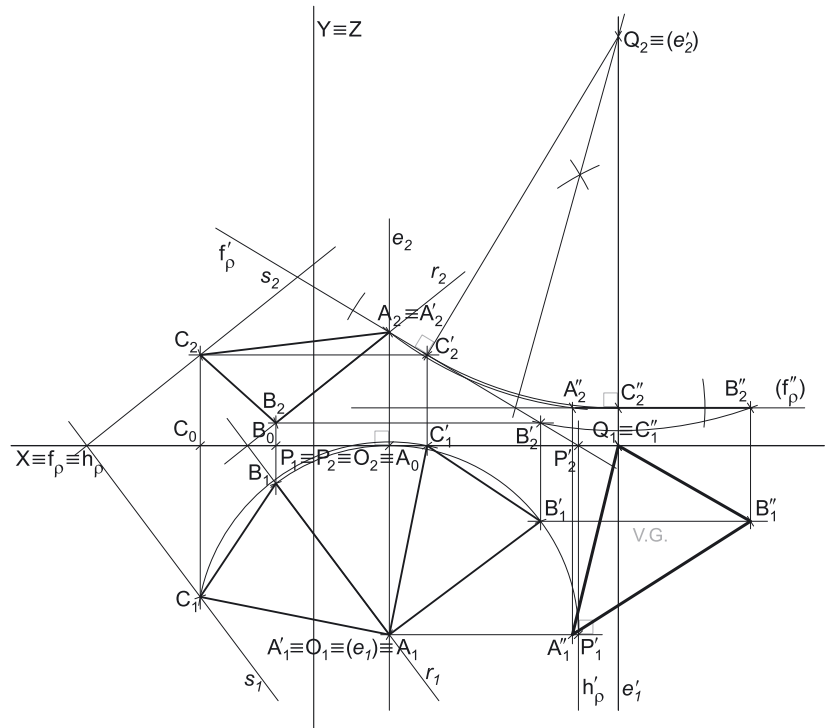
## 277.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar as projeções horizontais dos pontos **B** e **C** (**B**<sub>1</sub> e **C**<sub>1</sub>).

Em seguida, recorreu-se à reta **r**, que passa pelos pontos **A** e **B**. A projeção horizontal da reta **r** (**r**<sub>1</sub>) passa pelas projeções horizontais dos pontos **A** e **B** (**A**<sub>1</sub> e **B**<sub>1</sub>, respetivamente). Uma vez que a reta **r** é uma reta do plano  $\rho$ , a reta **r** é necessariamente uma reta passante, que é concorrente com o eixo **X** num ponto (que não se identificou). Assim, a reta **r** está definida por dois pontos – o ponto **A** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**. Foi possível, em seguida, determinar a projeção frontal do ponto **B** (**B**<sub>2</sub>), que se situa sobre a projeção frontal da reta **r** (**r**<sub>2</sub>).

Em seguida, recorreu-se à reta **s**, paralela à reta **r**, que passa pelo ponto **C**. A projeção horizontal da reta **s** (**s**<sub>1</sub>) passa pela projeção horizontal do ponto **C** (**C**<sub>1</sub>) e é paralela à projeção horizontal da reta **r** (**r**<sub>1</sub>). Uma vez que a reta **s** é outra reta do plano  $\rho$ , a reta **s** é necessariamente outra reta passante, que é concorrente com o eixo **X** num ponto (que também não se identificou). Assim, a reta **s** está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e uma direção (é paralela à reta **r**). Foi possível, em seguida, determinar a projeção frontal do ponto **C** (**C**<sub>2</sub>), que se situa sobre a projeção frontal da reta **s** (**s**<sub>2</sub>).



A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo **[PQR]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[PQR]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano  $\rho$  num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível) com 1 cm de cota. Um plano horizontal (de nível) é um caso particular dos planos projetantes frontais (é um plano projetante frontal que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano  $\rho$  num plano projetante frontal.

**Transformação do plano  $\rho$  num plano projetante frontal:**

Um plano projetante frontal é um plano de topo, cujo traço horizontal é perpendicular ao eixo **X**. Nesse sentido, a rotação a efetuar tem, como objetivo, rodar o plano  $\rho$  até o seu traço horizontal (**h** <sub>$\rho$</sub> ) ficar de topo (perpendicular ao eixo **X**). A rotação de **h** <sub>$\rho$</sub>  processa-se necessariamente no Plano Horizontal de Projeção (que é o plano horizontal que contém a reta **h** <sub>$\rho$</sub> ), pelo que se conclui que os arcos da rotação estão contidos em planos horizontais (de nível) e que o eixo de rotação é uma **reta vertical** (ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical – a reta **e**. Note que se optou por localizar o eixo **e** de forma a conter um dos vértices do triângulo – o vértice **A**, neste caso. Essa opção tem a ver com economia de traçados – o ponto **A** é um ponto do eixo de rotação, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Isto evitará a rotação de um ponto – bastará rodar dois pontos (os pontos **B** e **C**). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto que nos permite rodar **h** <sub>$\rho$</sub>  (e o plano) – o ponto **P**. O ponto **P** é o ponto de **h** <sub>$\rho$</sub>  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) tal que **[OP]** é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta **e**) e a **h** <sub>$\rho$</sub> , sendo que **O** é o centro da rotação do ponto **P**. Note ainda que o ponto **P** é um ponto do eixo **X** (onde se situa **h** <sub>$\rho$</sub> ). O ponto **O** é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta **e**) com o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto **P** (que é o próprio Plano Horizontal de Projeção, pois o ponto **P** tem cota nula). Assim, o ponto **O** é o traço horizontal da reta **e**.

Para transformar **h** <sub>$\rho$</sub>  numa reta de topo (que é perpendicular ao eixo **X**), o segmento **[OP]** tem de rodar até ficar fronto-horizontal (paralelo ao eixo **X**) – o ponto **P**, após a rotação, tem de ficar com o mesmo afastamento do ponto **O**. O arco da rotação do ponto **P** está contido no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até **P**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **P**), desenhou-se o arco da rotação de **P** até à linha horizontal que passa por **O**<sub>1</sub>, na qual se situa **P**<sub>1</sub>' (que é o próprio eixo **X**) – **P**<sub>1</sub>' fica no eixo **X**, pois o ponto manteve a sua cota ao longo da sua rotação. O ponto **P**<sub>1</sub>' é o ponto **P** rodado. Note que a rotação efetuada tem 90° de amplitude.

Por **P**<sub>1</sub>' conduziu-se **h** <sub>$\rho$</sub> ' perpendicular a **[OP**<sub>1</sub>'] (e perpendicular ao eixo **X**, que era o pretendido) – **h** <sub>$\rho$</sub> ' é o traço horizontal do plano  $\rho$ , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos, para definir o plano  $\rho$  após a sua rotação. O ponto **A** é um ponto do eixo de rotação (reta **e**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, as projeções do ponto **A**' (o ponto **A** rodado) estão coincidentes com as projeções homónimas do ponto **A**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano  $\rho$ , após a rotação, é um plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais de todos os seus pontos (e retas) estão sobre o seu traço frontal. Assim, é possível, de forma imediata, desenhar o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço frontal do plano após a rotação) –  $f''_{\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ) é concorrente com  $h'_{\rho}$ , no eixo  $X$  e passa por  $A'_2$  (está definido por dois pontos). O plano  $\rho$ , após a rotação, já é um plano de topo.

Falta-nos rodar os pontos  $B$  e  $C$ , para ser possível desenhar as projeções do triângulo  $[ABC]$ , após a rotação. O plano  $\rho$ , após a rotação, foi transformado num plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais dos pontos  $B$  e  $C$  (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $f'_{\rho}$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , após a rotação). Uma vez que os arcos da rotação daqueles pontos estão contidos em planos horizontais (de nível), os pontos mantêm as suas cotas ao longo da sua rotação – nesse sentido, transportaram-se as projeções frontais dos pontos  $B$  e  $C$  para  $f'_{\rho}$  (através das paralelas ao eixo  $X$  que passam por  $B_2$  e  $C_2$ ), obtendo-se  $B'_2$  e  $C'_2$  sobre  $f'_{\rho}$  ( $B'$  e  $C'$  são os pontos  $B$  e  $C$  rodados, respetivamente).

Analisemos a rotação do ponto  $B$  – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $B'_2$  se situe na linha de chamada que passa por  $B'_1$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto  $B$  nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $B$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois está contido num plano horizontal) e a projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $O_1 \equiv (e_1)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e_1$  e raio até  $B_1$ , desenhou-se a projeção horizontal do arco da rotação de  $B$  até à linha de chamada de  $B'_2$ , sobre a qual se situa  $B'_1$  ( $B'$  é o ponto  $B$  rodado). O processo exposto para a rotação do ponto  $B$  repetiu-se para o ponto  $C$ , o que nos permitiu determinar a projeção frontal do ponto  $C'$  (o ponto  $C$  rodado) –  $C'_1$  situa-se na linha de chamada que passa por  $C'_2$ .

Note que, na rotação efetuada, o ponto  $C'$  (o ponto  $C$  rodado) ficou com afastamento nulo. No entanto, **sublinha-se que se trata de uma casualidade**, que resultou da posição escolhida para o eixo da rotação e, ainda, do sentido da rotação efetuada.

Por fim, desenharam-se as projeções do triângulo  $[A'B'C']$  (o triângulo  $[ABC]$ , após a rotação do plano  $\rho$  em torno do eixo  $e$ ) – a projeção frontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre  $f'_{\rho}$ , pois o plano  $\rho$ , após a rotação, é um plano projetante frontal.

### Transformação do plano $\rho$ num plano horizontal (de nível) com 1 cm de cota:

Para transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível) é necessário rodar o plano  $\rho$  até que ele fique paralelo ao Plano Horizontal de Projeção – as alterações processam-se ao nível das cotas dos pontos, mantendo-se os seus afastamentos. Assim, os arcos de rotação estão contidos em planos frontais (porque os afastamentos se mantêm), pelo que o eixo da rotação tem de ser uma **reta de topo** (ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Por outro lado, há que ter em conta que é pedido, expressamente, que o plano  $\rho$  seja transformado num plano horizontal (de nível) com 1 cm de cota. Assim, **há que posicionar criteriosamente o eixo da rotação** de forma a garantir esse resultado final. Nesse sentido, optou-se por começar por representar o traço frontal do plano  $\rho$ , após esta segunda rotação ( $f''_{\rho}$ ) –  $f''_{\rho}$  é paralelo ao eixo  $X$  e situa-se 1 cm acima deste, para que o plano tenha 1 cm de cota. Assim, para que a rotação garanta este resultado final, a posição do eixo da rotação (a reta  $e'$ ) tem de ser criteriosamente escolhida.

Na rotação a efetuar,  $f'_{\rho}$  tem de rodar em torno de um eixo de rotação, até atingir a posição predefinida para  $f''_{\rho}$ . Assim, determinou-se a bisetritz do ângulo formado entre aquelas duas retas ( $f'_{\rho}$  e  $f''_{\rho}$ ) – o eixo da rotação tem de passar por um ponto da bisetritz do ângulo para nos permitir o a rotação atrás referida. Por outro lado, com vista a uma economia de traçados, será conveniente que um dos vértices do triângulo  $[A'B'C']$  seja o ponto que nos permite rodar o plano – optou-se pelo ponto  $C'$ . A rotação do ponto  $C'$  processa-se com o recurso à ortogonalidade entre  $f'_{\rho}$  e o segmento de reta  $[QC']$  (sendo  $Q$  o centro da rotação do ponto  $C'$ )

Assim, o eixo de rotação  $e'$  tem de passar por um ponto da bisetritz do ângulo (previamente desenhada) e tem ainda de nos permitir rodar o ponto  $C'$ . Dessa forma, conduziu-se, por  $C''_2$ , uma perpendicular a  $f'_{\rho}$  (que corresponde à projeção frontal do segmento  $[QC']$ ) e determinou-se  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ ) sobre a bisetritz do ângulo entre  $f'_{\rho}$  e  $f''_{\rho}$ . Tendo em conta que o ponto  $Q$  é necessariamente um ponto do eixo de rotação  $e'$ , foi possível, de forma imediata, determinar as projeções do eixo de rotação (a reta  $e'$ ), contendo o ponto  $Q$ .

Dessa forma, o segmento de reta  $[QC']$  é simultaneamente ortogonal ao eixo de rotação (reta  $e'$ ) e ao plano  $\rho$  (sendo o ponto  $Q$  o centro da rotação do ponto  $C'$ ). Uma vez que o arco da rotação do ponto  $C'$  está contido no Plano Frontal de Projeção (porque o ponto  $C'$  tem afastamento nulo), o ponto  $Q$  (o centro da rotação do ponto  $C'$ ) é o traço frontal da reta  $e'$ .

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f''_{\rho}$ ), após a rotação, tem de ficar na posição predefinida ( $f''_{\rho}$  já foi desenhado). Assim, porque o arco da rotação do ponto  $C'$  está contido no Plano Frontal de Projeção, está em verdadeira grandeza em projeção frontal pelo que, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ ) e com raio até  $C'_2$  (a projeção frontal do ponto  $C'$ ), desenhou-se o arco da rotação de  $C'$  até  $f''_{\rho}$ , onde se situa  $C''_2$  (garantindo-se a perpendicularidade entre  $f''_{\rho}$  e  $[Q_2C''_2]$ ) –  $C''_1$  fica imediatamente coincidente com  $Q_1$  (no eixo  $X$ ), pois o ponto tem afastamento nulo e manteve o seu afastamento ao longo da sua rotação. O ponto  $C''$  é o ponto  $C'$  rodado.

Falta-nos rodar os restantes pontos (os pontos  $A'$  e  $B'$ ), para definir o plano  $\rho$  após a sua rotação e para ser possível desenhar as projeções do triângulo  $[A'B'C']$ , após a rotação.

O plano  $\rho$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais dos pontos  $A'$  e  $B'$  (após a rotação) situam-se necessariamente sobre  $f''_{\rho}$ . Analisemos a rotação do ponto  $A'$  – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que  $A''_2$  se situe sobre  $f''_{\rho}$ . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto  $A'$  nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto  $A'$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois está contido num plano frontal) e a projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com  $Q_2 \equiv (e'_2)$ . Com o compasso, fazendo centro em  $e'_2$  e raio até  $A'_2$ , desenhou-se a projeção frontal do arco da rotação de  $A'$  até  $f''_{\rho}$ , sobre o qual se situa  $A''_2$  ( $A''$  é o ponto  $A'$  rodado). Uma vez que o arco da rotação do ponto  $A'$  está contido num plano frontal (de frente), o ponto  $A'$  mantém o seu afastamento, o que nos permitiu transportar o afastamento de  $A'$  para a linha de chamada que passa por  $A''_2$ , determinando  $A''_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A''$ ). O ponto  $A''$  é o ponto  $A'$  rodado. O processo exposto para a rotação do ponto  $A'$  repetiu-se para o ponto  $C'$ , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $C''$  (o ponto  $C'$  rodado).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, a partir das projeções dos pontos **A''**, **B''** e **C''**, desenharam-se as projeções do triângulo [**A''B''C''**] (o triângulo [**ABC**], após a segunda rotação do plano  $\rho$  em torno do eixo  $e'$ ) – a projeção frontal do triângulo mantém-se reduzida a um segmento de reta sobre  $f''_p$ , pois o plano  $\rho$ , após a rotação, continua a ser um plano projetante frontal. O triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois o plano  $\rho$ , após a segunda rotação, está paralelo ao Plano Horizontal de Projeção – a verdadeira grandeza do triângulo [**ABC**] está no triângulo [**A''B''C''**].

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo [**ABC**]) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício e onde se situam os traços do plano  $\rho$ ). A projeção frontal do triângulo [**A''B''C''**], que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , dos eixos de rotação  $e$  e  $e'$  e, ainda, das projeções dos arcos das rotações).

## 278.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo [**ABC**], em função dos dados.

#### Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos **A**, **B** e **C**, para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano, com 1 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **A** – a reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). O ponto **A** é o ponto da reta  $h$  que tem 2 cm de afastamento.

A reta  $h'$  é a reta horizontal (de nível) do plano, com 3 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **B** – a reta  $h'$  está definida por um ponto (o ponto **F'**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). O ponto **B** é o ponto da reta  $h'$  que tem 1 cm de afastamento.

A reta  $h''$  é a reta horizontal (de nível) do plano, com 2 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **C** – a reta  $h''$  está definida por um ponto (o ponto **F''**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). O ponto **C** é o ponto da reta  $h''$  que tem 5 cm de afastamento.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [**ABC**].

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo [**ABC**] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo [**ABC**] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano de topo (com o recurso a uma mudança do diedro de projeção) e, depois rebatê-lo como um plano projetante frontal.

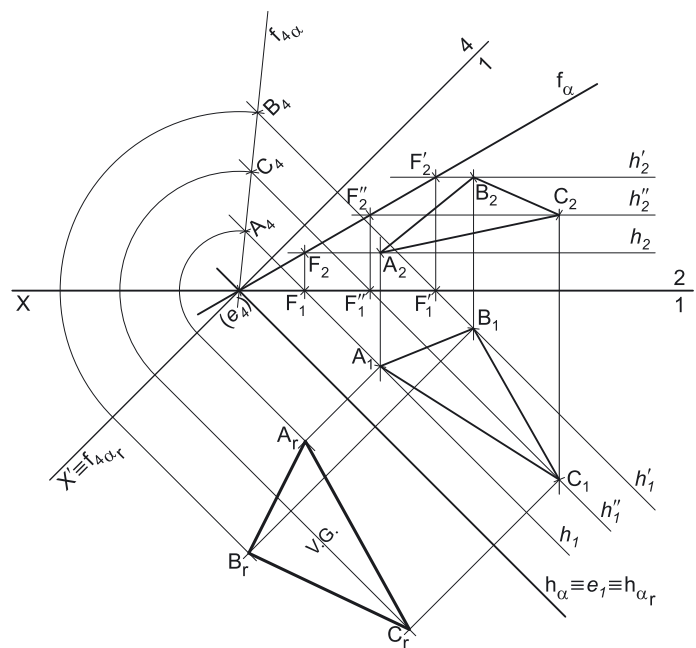
- a) Para transformar o plano  $\alpha$  num plano de topo (um plano projetante frontal) é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:
- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
  - no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo **X**).  $B_4$  é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo **X** (que é 3 cm – a cota de **B**).

Em seguida, desenhou-se o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** –  $f_{4\alpha}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** ( $f_{4\alpha}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_\alpha$  (que se situa no eixo  $X'$ ) e  $B_4$  (a nova projeção frontal do ponto **B**). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **C** no **plano 4** ( $A_4$  e  $C_4$ ), que se situam necessariamente sobre  $f_{4\alpha}$  (pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal). Note que  $A_4$  e  $C_4$  se poderiam ter determinado em função das respetivas cotas, que se situariam igualmente sobre  $f_{4\alpha}$ .

A projeção do triângulo [**ABC**] no **plano 4** reduz-se a um segmento de reta sobre  $f_{4\alpha}$ , pois o plano  $\alpha$ , no novo diedro de projeção, é um plano projetante frontal (um plano de topo).

(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

b) Optou-se por rebater o plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção. Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha r}$ . Tendo em conta que a charneira é uma reta de topo, a sua projeção no **plano 4** ( $e_4$ ) é um ponto no eixo  $X'$ . O novo traço frontal do plano ( $f_{4\alpha}$ ) roda até ao eixo  $X'$ , pelo que se tem  $f_{4\alpha r} \equiv X'$ .

A charneira do rebatimento (o eixo de rotação) é uma reta de topo, pelo que os planos ortogonais à charneira que contêm os arcos do rebatimento são planos frontais (no novo diedro de projeção – planos paralelos ao **plano 4**) – os pontos mantêm os seus afastamentos (no novo diedro de projeção) ao longo do rebatimento. Por fim, os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos frontais (paralelos ao **plano 4**), projetam-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Em seguida, efetuou-se o rebatimento de cada um dos pontos.

Para rebater o ponto **B**, conduziu-se uma paralela ao eixo  $X'$  por  $B_1$  (que corresponde ao traço horizontal do plano que contém o arco do seu rebatimento) –  $B_r$  tem necessariamente o afastamento de **B** (no novo diedro de projeção). Em seguida, fez-se centro em  $e_4$  (onde se situam as projeções, no **plano 4**, dos centros dos arcos do rebatimento) e, com raio até  $B_4$ , desenhou-se a projeção, no **plano 4**, do arco do rebatimento do ponto **B**, rodando (rebatendo)  $B_4$  até ao eixo  $X'$  (onde se situa  $f_{4\alpha}$ ). A partir do extremo do arco (que se situa no eixo  $X'$ ) conduziu-se uma linha de chamada do eixo  $X'$  até à paralela ao eixo  $X'$  que passa por  $B_1$  – o ponto de interseção das duas linhas é  $B_r$ .

Para rebater o ponto **A**, conduziu-se uma paralela ao eixo  $X'$  por  $A_1$  (que corresponde ao traço horizontal do plano que contém o arco do seu rebatimento) –  $A_r$  tem necessariamente o afastamento de **A** (no novo diedro de projeção). Em seguida, fez-se centro em  $e_4$  (onde se situam as projeções, no **plano 4**, dos centros dos arcos do rebatimento) e, com raio até  $A_4$ , desenhou-se a projeção, no **plano 4**, do arco do rebatimento do ponto **A**, rodando (rebatendo)  $A_4$  até ao eixo  $X'$  (onde se situa  $f_{4\alpha}$ ). A partir do extremo do arco (que se situa no eixo  $X'$ ) conduziu-se uma linha de chamada do eixo  $X'$  até à paralela ao eixo  $X'$  que passa por  $A_1$  – o ponto de interseção das duas linhas é  $A_r$ .

Para rebater o ponto **C**, conduziu-se uma paralela ao eixo  $X'$  por  $C_1$  (que corresponde ao traço horizontal do plano que contém o arco do seu rebatimento) –  $C_r$  tem necessariamente o afastamento de **C** (no novo diedro de projeção). Em seguida, fez-se centro em  $e_4$  (onde se situam as projeções, no **plano 4**, dos centros dos arcos do rebatimento) e, com raio até  $C_4$ , desenhou-se a projeção, no **plano 4**, do arco do rebatimento do ponto **C**, rodando (rebatendo)  $C_4$  até ao eixo  $X'$  (onde se situa  $f_{4\alpha}$ ). A partir do extremo do arco (que se situa no eixo  $X'$ ) conduziu-se uma linha de chamada do eixo  $X'$  até à paralela ao eixo  $X'$  que passa por  $C_1$  – o ponto de interseção das duas linhas é  $C_r$ .

Por fim, desenhou-se o triângulo definido pelos pontos  $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$  – o triângulo  $[A_r B_r C_r]$  é o triângulo  $[ABC]$  rebatido no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$  e as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O triângulo  $[A_r B_r C_r]$  (o triângulo  $[ABC]$  rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $h$ ,  $h'$  e  $h''$ , do eixo  $X'$ , dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção, bem como todos os traçados referentes ao rebatimento dos três pontos).

## 279.

### Dados:

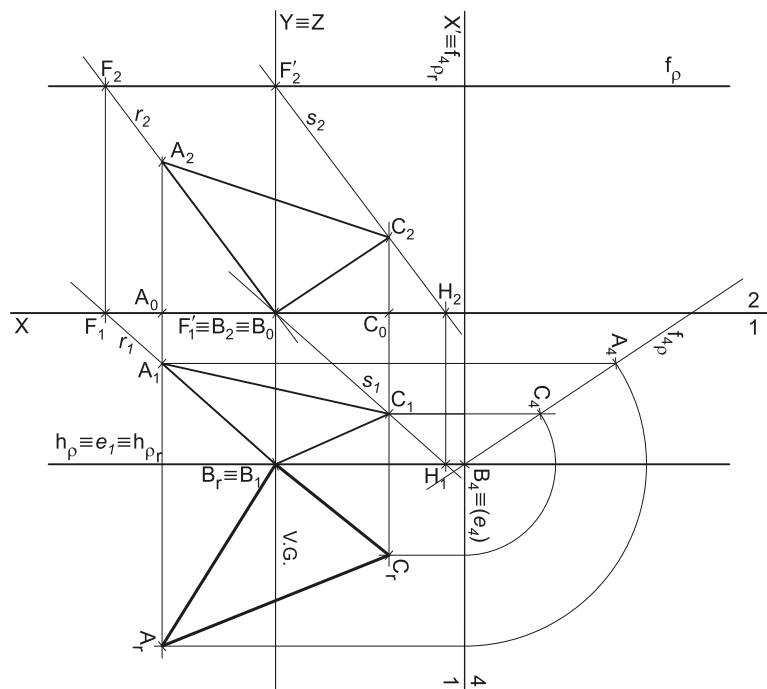
Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda determinar as projeções do ponto **B**, bem como as projeções frontais dos pontos **A** e **C**.

### Determinação das projeções do triângulo:

Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo  $[ABC]$  – os pontos **A**, **B** e **C**, para pertencerem ao plano  $\rho$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **B** é um ponto com cota nula, pelo que o ponto **B** é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ) – **B** é o ponto de  $h_\rho$  que tem abcissa nula.

A reta  $r$  é a reta oblíqua do plano a que se recorreu para se determinar a projeção horizontal do ponto **A**. Em primeiro lugar, desenhou-se a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ), passando pela projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por fazer com que a reta  $r$  seja a reta suporte do lado  $[AB]$  do triângulo. Assim, a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) passa, também, pela projeção frontal do ponto **B** ( $B_2$ ). A reta  $r$ , porque pertence ao plano  $\rho$ , tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano (**condição para que uma reta pertença a um plano**). Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $r$  (o ponto **F**), que se situa sobre  $f_\rho$  (o traço frontal do plano). O ponto **B** é, imediatamente, o traço horizontal da reta  $r$  (porque tem cota nula). Assim, a reta  $r$  está definida por dois pontos – os pontos **F** e **B**. A projeção horizontal do ponto **A** ( $A_1$ ) está sobre a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), na linha de chamada de  $A_2$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $s$  é a reta oblíqua do plano  $\rho$  a que se recorreu para se determinar a projeção horizontal do ponto  $C$ . Em primeiro lugar, desenhou-se a projeção frontal da reta  $s$  ( $s_2$ ), passando pela projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ). Optou-se por fazer com que a reta  $s$  seja paralela à reta  $r$ . Assim, a projeção frontal da reta  $s$  ( $s_2$ ) é paralela à projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ). A reta  $s$ , porque pertence ao plano  $\rho$ , tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano (**condição para que uma reta pertença a um plano**). Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $s$  (o ponto  $F'$ ), que se situa sobre  $f_p$  (o traço frontal do plano), bem como o traço horizontal da reta  $s$  (o ponto  $H$ ), que se situa sobre  $h_p$  (o traço horizontal do plano). Assim, a reta  $s$  está, na prática, definida por dois pontos (os pontos  $F'$  e  $H$ ) e uma direção (paralela à reta  $r$ ). A projeção horizontal do ponto  $C$  ( $C_1$ ) está sobre a projeção horizontal da reta  $s$  ( $s_1$ ), na linha de chamada de  $C_2$ .

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\rho$  num plano de topo (com o recurso a uma mudança do diedro de projeção) e, depois, rebatê-lo como um plano projetante frontal.

- a) Para transformar o plano  $\rho$  num plano de topo (um plano projetante frontal) é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se mantém o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:
- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
  - no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano ( $h_p$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $A$ ).

Em seguida, desenhou-se o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** –  $f_{4\rho}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_p$  (que se situa no eixo  $X'$ ) e  $A_4$  (a nova projeção frontal do ponto  $A$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $B$  e  $C$  no **plano 4** ( $B_4$  e  $C_4$ ), que se situam necessariamente sobre  $f_{4\rho}$  (pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal). Note que  $B_4$  e  $C_4$  se poderiam ter determinado em função das respetivas cotas, que se situariam igualmente sobre  $f_{4\rho}$ .

A projeção do triângulo  $[ABC]$  no **plano 4** reduz-se a um segmento de reta sobre  $f_{4\rho}$ , pois o plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, é um plano projetante frontal (um plano de topo).

- b) Optou-se por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção. Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente  $h_p \equiv e_r \equiv h_{pr}$ . Tendo em conta que a charneira é uma reta de topo, a sua projeção no **plano 4** ( $e_4$ ) é um ponto no eixo  $X'$ . O novo traço frontal do plano ( $f_{4\rho}$ ) roda até ao eixo  $X'$ , pelo que se tem  $f_{4\rho} \equiv X'$ .

A charneira do rebatimento (o eixo de rotação) é uma reta de topo, pelo que os planos ortogonais à charneira que contêm os arcos do rebatimento são planos frontais (no novo diedro de projeção – planos paralelos ao **plano 4**) – os pontos mantêm os seus afastamentos (no novo diedro de projeção) ao longo do rebatimento. Por fim, os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos frontais (paralelos ao **plano 4**), projetam-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Em seguida, efetuou-se o rebatimento de cada um dos pontos.

O ponto  $B$  é um ponto da charneira (porque é um ponto de  $h_p$ , que é a charneira do rebatimento), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $B_r \equiv B_1$ .

Para rebater o ponto  $A$ , conduziu-se uma paralela ao eixo  $X'$  por  $A_1$  (que corresponde ao traço horizontal do plano que contém o arco do seu rebatimento) –  $A_r$  tem necessariamente o afastamento de  $A$  (no novo diedro de projeção). Em seguida, fez-se centro em  $e_4$  (onde se situam as projeções, no **plano 4**, dos centros dos arcos do rebatimento) e, com raio até  $A_4$ , desenhou-se a projeção, no **plano 4**, do arco do rebatimento do ponto  $A$ , rodando (rebatendo)  $A_4$  até ao eixo  $X'$  (onde se situa  $f_{4\rho}$ ). A partir do extremo do arco (que se situa no eixo  $X'$ ) conduziu-se uma linha de chamada do eixo  $X'$  até à paralela ao eixo  $X'$  que passa por  $A_1$  – o ponto de interseção das duas linhas é  $A_r$ .

Para rebater o ponto  $C$ , conduziu-se uma paralela ao eixo  $X'$  por  $C_1$  (que corresponde ao traço horizontal do plano que contém o arco do seu rebatimento) –  $C_r$  tem necessariamente o afastamento de  $C$  (no novo diedro de projeção). Em seguida, fez-se centro em  $e_4$  (onde se situam as projeções, no **plano 4**, dos centros dos arcos do rebatimento) e, com raio até  $C_4$ , desenhou-se a projeção, no **plano 4**, do arco do rebatimento do ponto  $C$ , rodando (rebatendo)  $C_4$  até ao eixo  $X'$  (onde se situa  $f_{4\rho}$ ). A partir do extremo do arco (que se situa no eixo  $X'$ ) conduziu-se uma linha de chamada do eixo  $X'$  até à paralela ao eixo  $X'$  que passa por  $C_1$  – o ponto de interseção das duas linhas é  $C_r$ .

Por fim, desenhou-se o triângulo definido pelos pontos  $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$  – o triângulo  $[A_r B_r C_r]$  é o triângulo  $[ABC]$  rebatido no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$  e as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O triângulo  $[A_r B_r C_r]$  (o triângulo  $[ABC]$  rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , do eixo  $X'$ , dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção, bem como todos os traçados referentes ao rebatimento dos três pontos).

## 280.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **S**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ . Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção horizontal do ponto **T** ( $T_1$ ).

Para tal recorreu-se à reta  $r$ , que passa pelos pontos **R** e **S**, e determinaram-se os seus traços nos planos de projeção – o ponto **H** (o seu traço horizontal) e o ponto **F** (o seu traço frontal). O traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ) passa pelo ponto **F** e é paralelo ao eixo  $X - f_p$ , está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal). O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ) passa pelo ponto **H** e é paralelo ao eixo  $X - h_p$ , está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Por fim, determinou-se a projeção frontal do ponto **T** – o ponto  $T_2$ , porque tem afastamento nulo, é necessariamente um ponto de  $f_p$  (o traço frontal do plano). A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[RST]**.

### Resolução:

O plano que contém o triângulo **[RST]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[RST]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano  $\rho$  num plano vertical (com o recurso a uma mudança do diedro de projeção) e, depois rebatê-lo como um plano projetante horizontal.

a) Para transformar o plano  $\rho$  num plano vertical (um plano projetante horizontal) é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

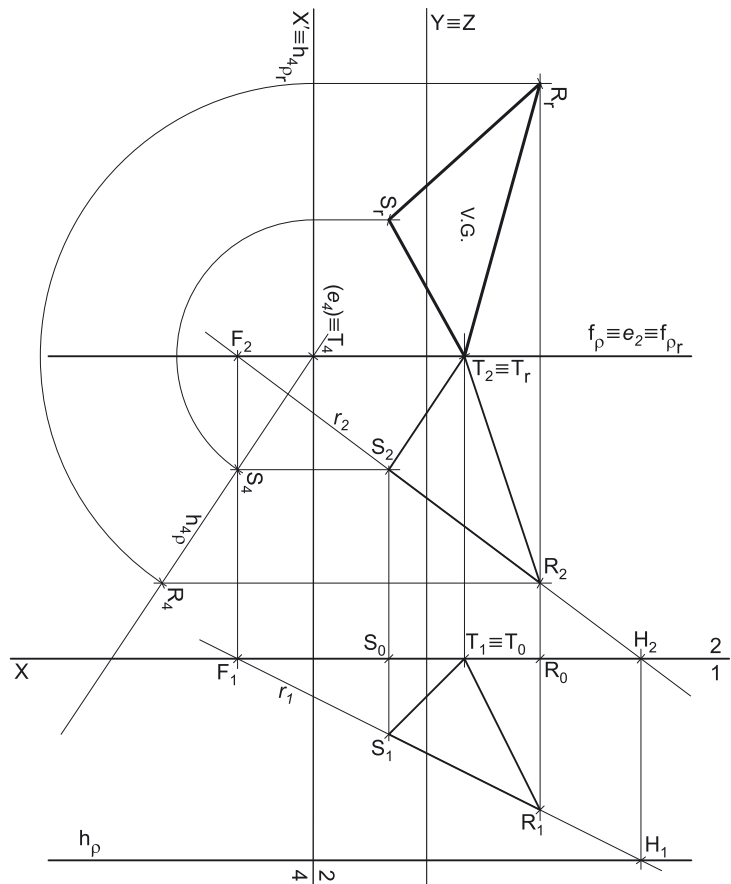
Assim, o novo eixo  $X'$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $4/2$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço frontal do plano ( $f_p$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).  $R_4$  é a projeção do ponto **R** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $R_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $R_1$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – o afastamento de **R**).

Em seguida, desenhou-se o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** –  $h_{4p}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $h_{4p}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $f_p$  (que se situa no eixo  $X'$ ) e  $R_4$  (a nova projeção horizontal do ponto **R**). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **S** e **T** no **plano 4** ( $S_4$  e  $T_4$ ), que se situam necessariamente sobre  $h_{4p}$ , (pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal). Note que  $S_4$  se poderia ter determinado em função do seu afastamento, que se situaria igualmente sobre  $h_{4p}$ . O ponto **T**, porque em afastamento nulo (que mantém na mudança do diedro de projeção efetuada), tem a sua projeção no **plano 4** ( $T_4$ ) no eixo  $X'$ .

A projeção do triângulo **[RST]** no **plano 4** reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_{4p}$ , pois o plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, é um plano projetante horizontal (um plano vertical).

b) Optou-se por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção. Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente  $f_p \equiv e_2 \equiv f_{pr}$ . Tendo em conta que a charneira é uma reta vertical, a sua projeção no **plano 4** ( $e_4$ ) é um ponto no eixo  $X'$ . O novo traço horizontal do plano ( $h_{4pr}$ ) roda até ao eixo  $X'$ , pelo que se tem  $h_{4pr} \equiv X'$ .

A charneira do rebatimento (o eixo de rotação) é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira que contém os arcos do rebatimento são planos horizontais (no novo diedro de projeção – planos paralelos ao **plano 4**) – os pontos mantêm as suas cotas (no novo diedro de projeção) ao longo do rebatimento. Por fim, os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao **plano 4**), projetam-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Em seguida, efetuou-se o rebatimento de cada um dos pontos.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **T** é um ponto da charneira (porque é um ponto de  $f_p$ , que é a charneira do rebatimento), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T_2$ .

Para rebater o ponto **R**, conduziu-se uma paralela ao eixo  $X'$  por  $R_2$  (que corresponde ao traço frontal do plano que contém o arco do seu rebatimento) –  $R_r$  tem necessariamente a cota de **R** (no novo diedro de projeção). Em seguida, fez-se centro em  $e_4$  (onde se situam as projeções, no **plano 4**, dos centros dos arcos do rebatimento) e, com raio até  $R_4$ , desenhou-se a projeção, no **plano 4**, do arco do rebatimento do ponto **R**, rodando (rebatendo)  $R_4$  até ao eixo  $X'$  (onde se situa  $h_{4p}$ ). A partir do extremo do arco (que se situa no eixo  $X'$ ) conduziu-se uma linha de chamada do eixo  $X'$  até à paralela ao eixo  $X'$  que passa por  $R_2$  – o ponto de interseção das duas linhas é  $R_r$ .

Para rebater o ponto **S**, conduziu-se uma paralela ao eixo  $X'$  por  $S_2$  (que corresponde ao traço frontal do plano que contém o arco do seu rebatimento) –  $S_r$  tem necessariamente a cota de **S** (no novo diedro de projeção). Em seguida, fez-se centro em  $e_4$  (onde se situam as projeções, no **plano 4**, dos centros dos arcos do rebatimento) e, com raio até  $S_4$ , desenhou-se a projeção, no **plano 4**, do arco do rebatimento do ponto **S**, rodando (rebatendo)  $S_4$  até ao eixo  $X'$  (onde se situa  $h_{4p}$ ). A partir do extremo do arco (que se situa no eixo  $X'$ ) conduziu-se uma linha de chamada do eixo  $X'$  até à paralela ao eixo  $X'$  que passa por  $S_2$  – o ponto de interseção das duas linhas é  $S_r$ .

Por fim, desenhou-se o triângulo definido pelos pontos  $R_r$ ,  $S_r$  e  $T_r$  – o triângulo  $[R_r S_r T_r]$  é o triângulo  $[RST]$  rebatido no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[RST]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $p$ , no contexto do exercício, são auxiliares, pelo que se representaram a **médio-leve**. O triângulo  $[R_r S_r T_r]$  (o triângulo  $[RST]$  rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $r$ , do eixo  $X'$ , dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção, bem como todos os traçados referentes ao rebatimento dos três pontos).

## 281.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **A** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois pertence ao  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

Em seguida, desenharam-se as projeções da reta  $r$ , a reta suporte do lado  $[AB]$  do triângulo, e determinaram-se as projeções do ponto **B**. A reta  $r$  é uma reta do  $\beta_{1/3}$ , pelo que as suas projeções são simétricas em relação ao eixo  $X$  – é uma reta passante. Tenha em conta que não se identificou o ponto de concorrência da reta  $r$  com o eixo  $X$ . O ponto **B** é o ponto da reta  $r$  que tem 6,5 cm de cota (a cota do lado  $[BC]$ ).

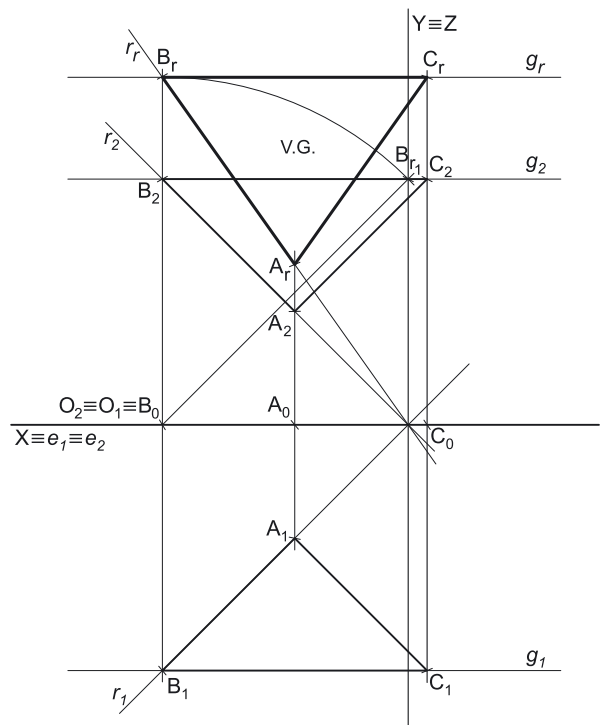
Tendo em conta que o lado  $[BC]$ , do triângulo, é fronto-horizontal, desenharam-se as projeções da reta  $g$ , a reta fronto-horizontal que é a reta suporte do lado  $[BC]$  do triângulo. A reta  $g$  está definida por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (é fronto-horizontal). Por fim, atendendo a que o lado  $[BC]$  mede 6,5 cm e se projeta em verdadeira grandeza em ambos os planos de projeção (a reta  $g$  é paralela aos dois planos de projeção), mediram-se os 6,5 cm sobre qualquer das duas projeções da reta, a partir da projeção respetiva do ponto **B**, e determinaram-se as projeções do ponto **C** (garantindo-se, ainda, que o ponto **C** se situa à direita do ponto **B**).

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .

Note que o  $\beta_{1/3}$  não se representa pelos seus traços, pois é um plano passante definido pelo eixo  $X$  e pela sua orientação, que é conhecida. Assim, apesar de não se ter identificado qualquer outro elemento do  $\beta_{1/3}$  para além dos pontos dados, é sobejamente conhecida a posição do plano no espaço.

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o  $\beta_{1/3}$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar**. Uma vez que o enunciado é omissivo no que respeita ao processo geométrico auxiliar a utilizar, optou-se pelo rebatimento do  $\beta_{1/3}$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo rebatimento das suas retas. Começamos por identificar a charneira do rebatimento, que é o próprio eixo  $X$  – tem-se imediatamente  $X \equiv e_1 \equiv e_2$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O recurso ao rebatimento de retas do plano (para rebater os pontos do plano que pertencem a essas retas) requer, tal como no rebatimento do plano de rampa, o rebatimento de um ponto do plano pelo triângulo do rebatimento. Optou-se por rebater o ponto **B**. Esta opção tem a ver com dois fatores:

- em primeiro lugar, por uma questão de rigor – tendo em conta que é necessário rebater a reta  $r$ , os pontos a recorrer devem estar o mais afastados possível;
- em segundo lugar, por uma questão de economia de traçados – o ponto **B** é o ponto de concorrência das retas  $r$  e  $g$  e, por isso, com o recurso ao ponto **B**, é possível ter um ponto de cada reta de forma imediata.

#### Rebatimento do ponto **B**:

Para rebater o ponto **B** conduziu-se, por  $B_2$ , uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o ponto **B**, bem como o arco do seu rebatimento (plano esse que não se identificou). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **B**, que é o ponto **O** (o ponto de interseção do plano de perfil que contém o ponto **B** com a charneira – o eixo **X**).

O raio do arco do rebatimento do ponto **B** é  $\overline{OB}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **B** – o triângulo do rebatimento do ponto **B** é o triângulo retângulo  $[OBB_2]$ . O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{OB}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **B**, neste caso. Para tal rebateu-se esse plano para o Plano Frontal de Projeção e construiu-se o triângulo  $[OBB_2]$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto **B**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou o afastamento do ponto **B** (que é um dos catetos do triângulo  $[OBB_2]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $B_{r_1}$ . O ponto  $B_{r_1}$  é o ponto **B**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o ponto **B**. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[O_2B_{r_1}]$ , que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O_2$  e raio  $O_2B_{r_1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **B** (o arco  $B_1B_r$ ) até à perpendicular à charneira que passa por  $B_2$ , onde se situa  $B_r$  (o ponto **B** rebatido).

#### Rebatimento do ponto **A**:

Para rebater o ponto **A** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **A** pertença – a reta  $r$ , neste caso. A reta  $r$  é a reta suporte do lado  $[AB]$  do triângulo. Para definirmos a reta  $r$  em rebatimento (a reta  $r_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência da reta  $r$  com o eixo **X** (que não se identificou) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir a reta  $r_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, já temos também o ponto  $B_r$  (o ponto **B** é um ponto da reta  $r$ ), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r_r$  – a reta  $r_r$  está definida por dois pontos (o ponto  $B_r$  e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**).

O ponto **A** é um ponto da reta  $r$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $A_r$  está sobre  $r_r$ , na perpendicular ao eixo **X** que passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal ao eixo **X** (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto **A**. Assim,  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) é o ponto de interseção de  $r_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $A_2$ .

#### Rebatimento do ponto **C**:

Para rebater o ponto **C** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **C** pertença – a reta  $g$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $g$  em rebatimento (a reta  $g_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $g$  é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos a direção para definir a reta  $g_r$  (em rebatimento, a reta  $g_r$  continua a ser paralela ao eixo **X**). O ponto  $B_r$  é um ponto da reta  $g$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $g_r$  – a reta  $g_r$  (a reta  $g$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $B_r$ ) e uma direção (é paralela ao eixo **X**).

O ponto **C** é um ponto da reta  $g$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $C_r$  está sobre  $g_r$ , na perpendicular ao eixo **X** que passa por  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal ao eixo **X** (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto **C**. Assim,  $C_r$  (o ponto **C** rebatido) é o ponto de interseção de  $g_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $C_2$ .

A partir dos três pontos rebatidos ( $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[ABC]$  em rebatimento (o triângulo  $[A_rB_rC_r]$ ), que é o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza.

#### Traçado:

Os dados (as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O triângulo  $[A_rB_rC_r]$  (o triângulo  $[ABC]$  rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$  e  $g$ , dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do ponto **B** e as retas  $r_r$  e  $g_r$ ).

## 282.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **P**, **Q** e **R**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, desenharam-se as projeções do triângulo. Não se determinaram os traços do plano  $\alpha$ , pois estes não são pedidos nem sequer são necessários à resolução do exercício.

- a) O plano que contém o triângulo **[PQR]** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[PQR]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer a um **processo geométrico auxiliar** que, de acordo com o que o enunciado pede expressamente, é o rebatimento do plano  $\alpha$  para o plano frontal (de frente) que contém os vértices **P** e **Q** do triângulo. Nesse sentido, em primeiro lugar representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém aqueles dois pontos (que têm o mesmo afastamento), pelo seu traço horizontal. O plano  $\phi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano  $\alpha$  com o plano  $\phi$ . A reta **e** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , que está definida por dois pontos – os pontos **P** e **Q** (os pontos **P** e **Q** pertencem simultaneamente aos dois planos). A reta **e** é, na prática, a reta suporte do lado **[PQ]** do triângulo.

Efetuada o rebatimento do plano  $\alpha$  para um plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, após o rebatimento, tudo o que estiver contido no plano  $\phi$  (em rebatimento) projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção.

O ponto **P** é um ponto da reta **e** (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_2$ . O ponto **Q** é outro ponto da reta **e** (que é a charneira), pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente  $Q_r \equiv Q_2$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do terceiro vértice da figura (o ponto **R**), pelo triângulo do rebatimento.

**Rebatimento do ponto R:**

Para rebater o ponto **R** conduziu-se, por **R**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **R**, e que não se identificou). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **R**, que é o ponto **O** (o ponto **O** é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira – a reta **e**). Note que se representou o ponto **O** apenas pela sua projeção frontal ( $O_2$ ), pois a sua projeção horizontal é desnecessária.

O raio do arco do rebatimento do ponto **R** é a distância  $\overline{OR}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **R**. Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **R** em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano que contém o arco do seu rebatimento. Para tal conduziu-se, por  $R_2$  (a projeção frontal do ponto **R**) uma paralela à charneira (reta **e**), sobre a qual se marcou a distância do ponto **R** ao plano  $\phi$  – a distância **d** (que é o **afastamento** do ponto **R** em relação ao plano  $\phi$ ). Isso permitiu-nos determinar o ponto  $R_{r1}$  (que é o ponto **R** rebatido pelo rebatimento do plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento).

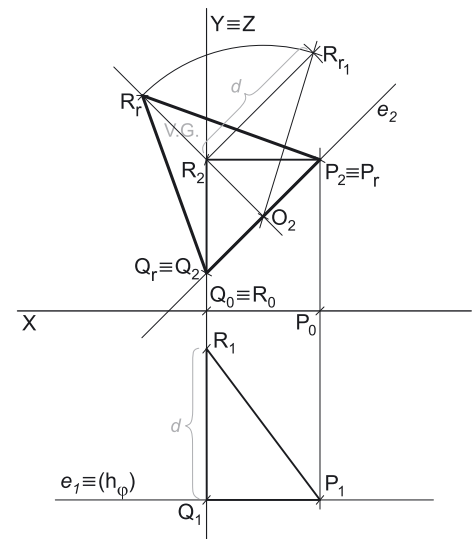
Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[O_2R_{r1}]$  (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O_2$  e raio  $\overline{O_2R_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **R** (o arco  $\overline{R_1R_r1}$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $R_r$  (o ponto **R** rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos ( $P_r$ ,  $Q_r$  e  $R_r$ ), desenhou-se o triângulo **[PQR]** em rebatimento (o triângulo  $[P_rQ_rR_r]$ ), que é o triângulo **[PQR]** em verdadeira grandeza.

- b) **Vantagens do rebatimento do plano  $\theta$  para o plano  $\phi$ , em relação ao rebatimento do plano  $\theta$  para qualquer dos planos de projeção:** o rebatimento do plano  $\theta$  para o plano  $\phi$  (que contém os pontos **P** e **Q**) permitiu-nos economizar o rebatimento de dois pontos – os pontos **P** e **Q**. De facto, uma vez que os pontos **P** e **Q** se situam na charneira do rebatimento (por pertencerem aos dois planos – o plano a rebater e o plano para o qual se processa o rebatimento), aqueles dois pontos rodam sobre si próprios, pelo que o seu rebatimento é imediato, sem quaisquer outros traçados auxiliares acrescidos – foi necessário, apenas, efetuar o rebatimento do terceiro vértice do triângulo (o vértice **R**). Caso se efetuasse o rebatimento do plano  $\theta$  para qualquer dos planos de projeção, seria necessário rebater os três vértices do triângulo, com todos os traçados de que tal procedimento exige.

**Traçado:**

Os dados (as projeções do triângulo **[PQR]**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O plano  $\phi$  (o plano para o qual se efetuou o rebatimento) é auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O triângulo  $[P_rQ_rR_r]$  (o triângulo **[PQR]** rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **e**, bem como todos os traçados referentes ao rebatimento do ponto **R**).







(continuação da página anterior)

Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[Q_1C_r]$  (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $Q_1$  e raio  $\overline{Q_1C_r}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $C$  (o arco  $\overline{C_rC_r}$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $C_r$  (o ponto  $C$  rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos ( $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ ), desenhou-se o triângulo  $[ABC]$  em rebatimento (o triângulo  $[A_rB_rC_r]$ ), que é o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza.

- b) Vantagens do rebatimento do plano  $\rho$  para o plano  $v$ , em relação ao rebatimento do plano  $\rho$  para qualquer dos planos de projeção:** o rebatimento do plano  $\rho$  para o plano  $v$  (que contém o ponto  $A$ ) permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto – o ponto  $A$ , precisamente. De facto, uma vez que aquele ponto se situa na charneira do rebatimento (por pertencer aos dois planos – o plano a rebater e o plano para o qual se processa o rebatimento), o ponto  $A$  roda sobre si próprio, pelo que o seu rebatimento é imediato, sem quaisquer outros traçados auxiliares acrescidos – foi necessário, apenas, efetuar o rebatimento dos outros dois vértices do triângulo (os vértices  $B$  e  $C$ ). Caso se efetuasse o rebatimento do plano  $\rho$  para qualquer dos planos de projeção, seria necessário rebater os três vértices do triângulo, com todos os traçados de que tal procedimento exige.

**Traçado:**

Os dados (as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), no contexto do exercício, e meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O plano  $v$  (o plano para o qual se efetuou o rebatimento) é igualmente auxiliar, pelo que se representou igualmente a **leve**. O triângulo  $[A_rB_rC_r]$  (o triângulo  $[ABC]$  rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $r$ ,  $s$  e  $e$ , bem como todos os traçados necessários ao rebatimento dos pontos  $B$  e  $C$ ).

## 16 REPRESENTAÇÃO DE FIGURAS PLANAS III

### 284.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $A$  e  $B$ , pertencentes ao plano  $\alpha$ . Os pontos  $A$  e  $B$ , para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto  $A$  tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto  $A$  é o ponto de  $h_\alpha$  que tem 5,5 cm de afastamento ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , com 3 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $B$ . A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). O ponto  $B$  é o ponto da reta  $h$  que tem 1 cm de afastamento.

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_f \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_f$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

O ponto  $A$  é um ponto de  $h_\alpha$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ . Note que o rebatimento efetuado nos permitiu economizar o rebatimento de um ponto (o ponto  $A$ ).

#### Rebatimento do traço frontal do plano $\alpha$ :

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou) é um ponto de  $f_\alpha$  e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $h$ . Para rebater o ponto  $F$  conduziu-se, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$  e que não se identificou). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $F_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , determinando-se  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Isto permitiu-nos desenhar  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), que passa por  $F_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $f_{\alpha_r}$  está definido por dois pontos).

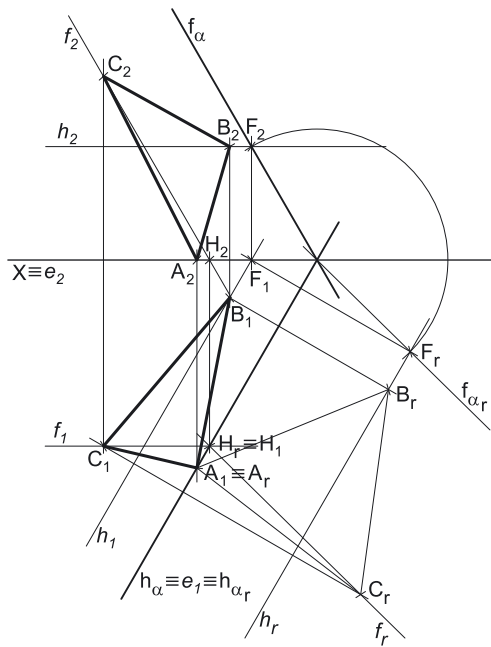
#### Rebatimento do ponto $B$ :

Para rebater o ponto  $B$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $B$  pertença – a reta  $h$ , neste caso. Para definirmos a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto  $F_r$ ), para definirmos a reta  $h_r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_r$ . A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) passa por  $F_r$  e é paralela a  $h_{\alpha_r}$  –  $h_r$  está definida por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha_r}$ ).

O ponto  $B$  é um ponto da reta  $h$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $B_r$  está sobre  $h_r$ , na perpendicular a  $h_\alpha$  (a charneira) que passa por  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ) – essa perpendicular corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal a  $h_\alpha$  (a charneira do rebatimento) que contém o ponto  $B$  (bem como o arco do seu rebatimento). Assim,  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido) é o ponto de interseção de  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ .

#### Determinação das projeções do ponto $C$ e do triângulo $[ABC]$ :

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o ponto  $C_r$ , garantindo-se que o triângulo se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro. Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções do ponto  $C$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto **C** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta **f**, uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ . A reta **f<sub>r</sub>** (a reta **f** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **C<sub>r</sub>**) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$  – é paralela a **f<sub>αr</sub>**). O ponto **H** é o traço horizontal da reta **f** e situa-se no traço horizontal do plano, pelo que **H<sub>r</sub>** se situa sobre **h<sub>αr</sub>**.

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **f**. O ponto **H** é um ponto da charneira (que é **h<sub>α</sub>**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **H<sub>1</sub> ≡ H<sub>r</sub>** (**H<sub>2</sub>** situa-se no eixo **X**, pois **H** tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta **f** em projeções – o ponto **H**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. No entanto, também já temos a direção da reta **f** (que é a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta **f** – a reta **f** está definida por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ).

Por fim, pelo ponto **C<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento e que não se identificou). O ponto de interseção da perpendicular à charneira com **f<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **f**) é **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**) – a projeção frontal do ponto **C** (**C<sub>2</sub>**) situa-se sobre **f<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **f**), na linha de chamada de **C<sub>1</sub>**.

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do triângulo **[ABC]** (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[ABC]**, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **h** e **f**, das retas **h<sub>r</sub>** e **f<sub>r</sub>**, dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu rebater **f<sub>α</sub>** e, ainda, o próprio **f<sub>αr</sub>**).

## 285.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\beta$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **O** e **A**, pertencentes ao plano  $\beta$ . Os pontos **O** e **A**, para pertencerem ao plano  $\beta$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de **f<sub>β</sub>** (o traço frontal do plano  $\beta$ ) – o ponto **A** é o ponto de **f<sub>β</sub>** que tem 3 cm de cota (**f<sub>β</sub>** é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo).

A reta **f** é a reta frontal (de frente) do plano  $\beta$ , com 3 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **O**. A reta **f** está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\beta$ ). O ponto **O** é o ponto da reta **f** que tem 4 cm de cota.

#### Resolução:

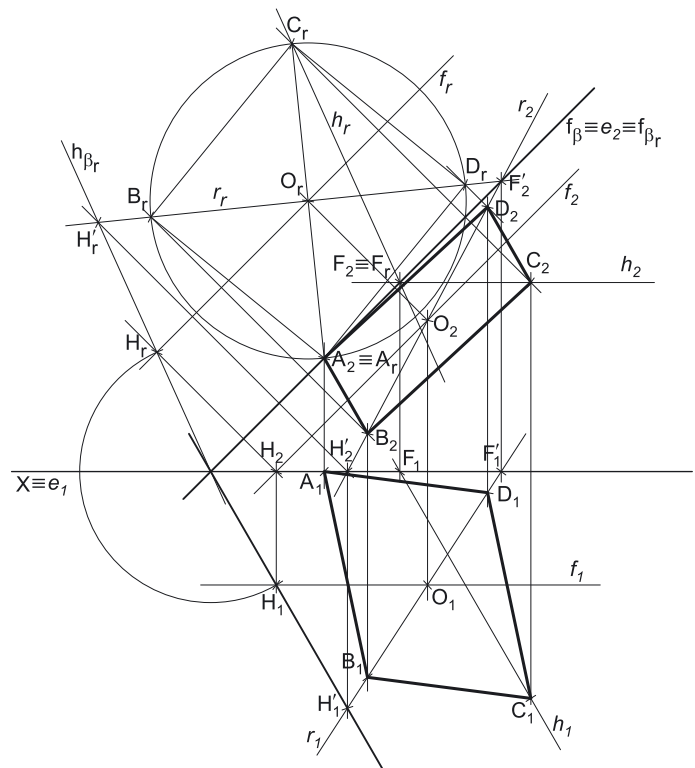
O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\beta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\beta$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\beta$  (**f<sub>β</sub>**), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, **f<sub>β</sub> ≡ e<sub>2</sub> ≡ f<sub>βr</sub>** (**e<sub>1</sub>**, a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a **f<sub>β</sub>**).

O ponto **A** é um ponto de **f<sub>β</sub>** (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **A<sub>r</sub> ≡ A<sub>2</sub>**. Note que o rebatimento efetuado nos permitiu economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **A**).

#### Rebatimento do traço horizontal do plano $\beta$ :

Em seguida, rebateu-se o traço horizontal do plano  $\beta$  (**h<sub>β</sub>**), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou) é um ponto de **h<sub>β</sub>** e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir **h<sub>βr</sub>** (o traço horizontal do plano em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se por se rebater o ponto **H**, o traço horizontal da reta **f**. Para rebater o ponto **H** conduziu-se, por **H<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **H**), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **H** e que não se identificou). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até **H<sub>1</sub>**, desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por **H<sub>2</sub>**, determinando-se **FH<sub>r</sub>** (o ponto **H** rebatido). Isto permitiu-nos desenhar **h<sub>βr</sub>** (o traço horizontal do plano  $\beta$  rebatido), que passa por **H<sub>r</sub>** e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano (**h<sub>βr</sub>** está definido por dois pontos).

### Rebatimento do ponto **O**:

Para rebater o ponto **O** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **O** pertença – a reta **f**, neste caso. Para definirmos a reta **f<sub>r</sub>** (a reta **f** rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto **H<sub>r</sub>**), para definirmos a reta **f<sub>r</sub>** – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\beta$  e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir **f<sub>r</sub>**. A reta **f<sub>r</sub>** (a reta **f** rebatida) passa por **H<sub>r</sub>** e é paralela a **f<sub>βr</sub> – f<sub>r</sub>** está definida por um ponto (o ponto **H<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a **f<sub>βr</sub>**).

O ponto **O** é um ponto da reta **f** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **O<sub>r</sub>** está sobre **f<sub>r</sub>**, na perpendicular a **f<sub>β</sub>** (a charneira) que passa por **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) – essa perpendicular corresponde ao traço frontal do plano ortogonal a **f<sub>β</sub>** (a charneira do rebatimento) que contém o ponto **O** (bem como o arco do seu rebatimento). Assim, **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** rebatido) é o ponto de interseção de **f<sub>r</sub>** com a perpendicular à charneira que passa por **O<sub>2</sub>**.

### Construção do quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza:

A partir dos pontos **O<sub>r</sub>** e **A<sub>r</sub>**, construiu-se o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento). Nesse sentido, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>r</sub>** e com raio até **A<sub>r</sub>**, desenhou-se a circunferência circunscrita ao polígono e construiu-se o quadrado em verdadeira grandeza, inscrito na circunferência e a partir do vértice conhecido (**A<sub>r</sub>**), o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos **B<sub>r</sub>**, **C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**.

### Determinação das projeções do ponto **C**:

A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\beta$  à qual o ponto **C** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta **h**, uma reta horizontal (de nível) do plano  $\beta$ . A reta **h<sub>r</sub>** (a reta **h** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **C<sub>r</sub>**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\beta$ ) – é paralela a **h<sub>βr</sub>**. O ponto **F** é o traço frontal da reta **h** e situa-se no traço frontal do plano, pelo que **F<sub>r</sub>** se situa sobre **f<sub>βr</sub>**.

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **h**. O ponto **F** é um ponto da charneira (que é **f<sub>β</sub>**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **F<sub>2</sub> ≡ F<sub>r</sub>** (**F<sub>1</sub>** situa-se no eixo **X**, pois **F** tem afastamento nulo). Já temos um ponto para definir a reta **h** em projeções – o ponto **F**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. No entanto, também já temos a direção da reta **h** (que é a direção das retas horizontais do plano  $\beta$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta **h** – a reta **h** está definida por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\beta$ ).

Por fim, pelo ponto **C<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento e que não se identificou). O ponto de interseção da perpendicular à charneira com **h<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **h**) é **C<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **C**) – a projeção horizontal do ponto **C** (**C<sub>1</sub>**) situa-se sobre **h<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **h**), na linha de chamada de **C<sub>2</sub>**.

### Determinação das projeções dos pontos **B** e **D** do quadrado [ABCD]:

A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **D** processa-se com o recurso a retas do plano  $\beta$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta **r**, uma reta oblíqua do plano  $\beta$  e que é a reta suporte da diagonal [BD] do quadrado. A reta **r<sub>r</sub>** (a reta **r** rebatida) está definida por dois pontos – os pontos **B<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**. Note ainda que a reta **r<sub>r</sub>**, sendo a reta suporte da diagonal [BD], contém necessariamente o ponto **O** (o centro do quadrado). O ponto **H'** é o traço horizontal da reta **r** e situa-se no traço horizontal do plano, pelo que **H'<sub>r</sub>** se situa sobre **h<sub>βr</sub>**.

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **r**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **r** contém o ponto **O**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **r** em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto **H'<sub>r</sub>** é um ponto de **h<sub>βr</sub>**, pelo que o ponto **H'** tem de se situar sobre **h<sub>β</sub>**. Para se determinarem as projeções do ponto **H'** conduziu-se, por **H'<sub>r</sub>**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **H'**) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo **X** é **H'<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **H'**), pois o ponto **H'** tem cota nula. A projeção horizontal do ponto **H'** (**H'<sub>1</sub>**) situa-se sobre o traço horizontal do plano (**h<sub>β</sub>**), pois o ponto **H'** é um ponto de **h<sub>β</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **r** – a reta **r** está, assim, definida por dois pontos (o ponto **O** e o ponto **H**), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta **r**. Por uma questão de rigor, determinou-se, ainda, o traço frontal da reta **r** (o ponto **F'**), que se situa necessariamente sobre o traço frontal do plano  $\beta$  (**f<sub>β</sub>**).

Em seguida, pelo ponto **B<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento e que não se identificou). O ponto de interseção da perpendicular à charneira com **r<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **r**) é **B<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **B**) – a projeção horizontal do ponto **B** (**B<sub>1</sub>**) situa-se sobre **r<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **r**), na linha de chamada de **B<sub>2</sub>**.

Por fim, pelo ponto **D<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento e que não se identificou). O ponto de interseção da perpendicular à charneira com **r<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **r**) é **D<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **D**) – a projeção horizontal do ponto **D** (**D<sub>1</sub>**) situa-se sobre **r<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **r**), na linha de chamada de **D<sub>2</sub>**.

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado [ABCD].

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\beta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado [ABCD] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado [ABCD], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **h**, **f** e **r**, das retas **h<sub>r</sub>**, **f<sub>r</sub>** e **r<sub>r</sub>**, dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu rebater **h<sub>β</sub>**, do próprio **h<sub>βr</sub>**, e, ainda, dos traçados necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza).

## 286.

**Dados:**

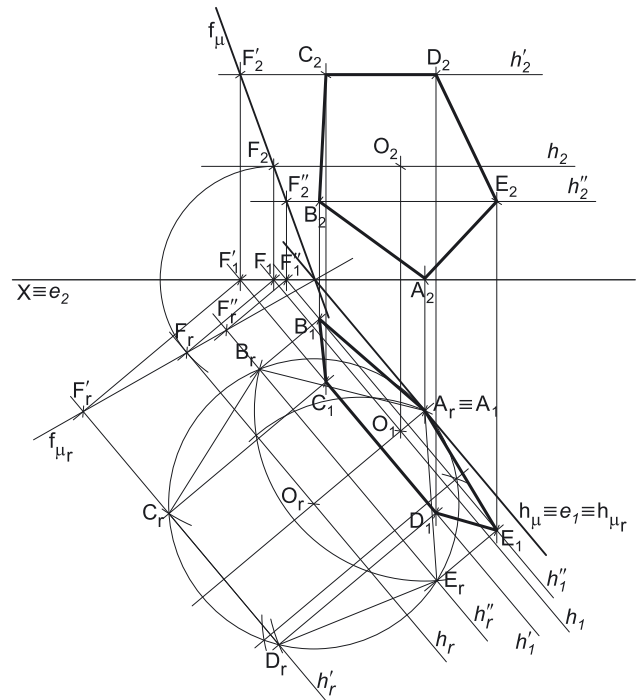
Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\mu$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $O$ , pertencente ao plano  $\mu$  – o ponto  $O$  tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** em relação ao plano  $\mu$  (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\mu$ ).

A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano  $\mu$ , com 3 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $O$ . A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). O ponto  $O$  é o ponto da reta  $h$  que tem 4 cm de afastamento.

**Resolução:**

O plano que contém o pentágono  $[ABCDE]$  (o plano  $\mu$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o pentágono  $[ABCDE]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do pentágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\mu$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\mu$  ( $h_\mu$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\mu \equiv e_1 \equiv h_{\mu r}$  (a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\mu$ ).

**Rebatimento do traço frontal do plano  $\mu$ :**

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\mu$  ( $f_\mu$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou) é um ponto de  $f_\mu$  e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir  $f_{\mu r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $h$ . Para rebater o ponto  $F$  conduziu-se, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$  e que não se identificou). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $F_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , determinando-se  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Isto permitiu-nos desenhar  $f_{\mu r}$  (o traço frontal do plano  $\mu$  rebatido), que passa por  $F_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $f_{\mu r}$  está definido por dois pontos).

**Rebatimento do ponto  $O$ :**

Para rebater o ponto  $O$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $O$  pertença – a reta  $h$ , neste caso. Para definirmos a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto  $F_r$ ), para definirmos a reta  $h_r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\mu$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_r$ . A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) passa por  $F_r$  e é paralela a  $h_{\mu r}$  –  $h_r$  está definida por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\mu r}$ ).

O ponto  $O$  é um ponto da reta  $h$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $O_r$  está sobre  $h_r$ , na perpendicular a  $h_\mu$  (a charneira) que passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) – essa perpendicular corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal a  $h_\mu$  (a charneira do rebatimento) que contém o ponto  $O$  (bem como o arco do seu rebatimento). Assim,  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido) é o ponto de interseção de  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $O_1$ .

**Construção do pentágono  $[ABCDE]$  em verdadeira grandeza:**

Em rebatimento, já é possível construir o pentágono  $[ABCDE]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento). O enunciado refere que um dos vértices do polígono tem cota nula, ou seja, situa-se no Plano Horizontal de Projeção. Esse vértice, porque pertence ao plano  $\mu$ , tem de se situar sobre  $h_\mu$  (o traço horizontal do plano  $\mu$ ). Por outro lado, é referido, ainda, que o lado de maior cota da figura é horizontal (de nível). Nesse sentido, a circunferência circunscrita ao pentágono tem de ser tangente ao traço horizontal do plano ( $h_\mu$ ).

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$ , desenhou-se uma circunferência tangente a  $h_{\mu r}$ , que é a circunferência circunscrita ao polígono. O ponto em que a circunferência é tangente a  $h_{\mu r}$  é necessariamente um dos vértices do pentágono – o vértice da figura que tem cota nula e que se decidiu ser o vértice  $A$  ( $A_r$ , pois estamos em rebatimento). Note que o enunciado não especifica a ordem e posição de cada vértice do polígono. Em seguida, construiu-se o pentágono em verdadeira grandeza, inscrito na circunferência e a partir do vértice conhecido ( $A_r$ ), o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $B_r$ ,  $C_r$ ,  $D_r$  e  $E_r$  (cuja ordem foi arbitrária, mas sequencial).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

### Determinação das projeções dos pontos **A**, **C** e **D**:

O ponto **A** é um ponto da charneira (que é  $h_{\mu}$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_1 \equiv A_r$  ( $A_2$  situa-se no eixo **X**, pois **A** tem cota nula).

A inversão do rebatimento dos pontos **C** e **D** processa-se com o recurso a retas do plano  $\mu$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $h'$ , que é a reta suporte do lado **[CD]** do pentágono. A reta  $h'_r$  está definida por dois pontos (os pontos **C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**) e é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\mu$ . O ponto **F'** é o traço frontal da reta  $h'$  e situa-se no traço frontal do plano, pelo que **F'<sub>r</sub>** se situa sobre  $f_{\mu r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h'$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\mu$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta  $h'$  em projeções. Falta-nos um ponto. O ponto **F'<sub>r</sub>** é um ponto de  $f_{\mu r}$ , pelo que o ponto **F'** tem se situar sobre  $f_{\mu}$ . Para se determinarem as projeções do ponto **F'** conduziu-se, por **F'<sub>r</sub>**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **F'**) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo **X** é **F'<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **F'**), pois o ponto **F'** tem afastamento nulo. A projeção frontal ponto **F'** (**F'<sub>2</sub>**) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_{\mu}$ ), pois o ponto **F'** é um ponto de  $f_{\mu}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $h'$  – a reta  $h'$  está, assim, definida por um ponto (o ponto **F'**) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\mu$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $h'$ .

Em seguida, pelo ponto **C<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta  $h'$ ) é **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** (**C<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $h'_2$  (a projeção frontal da reta  $h'$ ), na linha de chamada de **C<sub>1</sub>**. Por fim, pelo ponto **D<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta  $h'$ ) é **D<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **D**). A projeção frontal do ponto **D** (**D<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $h'_2$  (a projeção frontal da reta  $h'$ ), na linha de chamada de **D<sub>1</sub>**.

### Determinação das projeções dos pontos **B** e **E** do pentágono **[ABCDE]**:

A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **E** processa-se com o recurso a retas do plano  $\mu$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $h''$ , que é a reta suporte da diagonal **[BE]** do pentágono. A reta  $h''_r$  está definida por dois pontos (os pontos **B<sub>r</sub>** e **E<sub>r</sub>**) e é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\mu$ . O ponto **F''** é o traço frontal da reta  $h''$  e situa-se no traço frontal do plano, pelo que **F''<sub>r</sub>** se situa sobre  $f_{\mu r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h''$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h''$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\mu$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta  $h''$  em projeções. Falta-nos um ponto. O ponto **F''<sub>r</sub>** é um ponto de  $f_{\mu r}$ , pelo que o ponto **F''** tem de se situar sobre  $f_{\mu}$ . Para se determinarem as projeções do ponto **F''** conduziu-se, por **F''<sub>r</sub>**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **F''**) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo **X** é **F''<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **F''**), pois o ponto **F''** tem afastamento nulo. A projeção frontal ponto **F''** (**F''<sub>2</sub>**) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_{\mu}$ ), pois o ponto **F''** é um ponto de  $f_{\mu}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $h''$  – a reta  $h''$  está, assim, definida por um ponto (o ponto **F''**) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\mu$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $h''$ .

Em seguida, pelo ponto **B<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h''_1$  (a projeção horizontal da reta  $h''$ ) é **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**). A projeção frontal do ponto **B** (**B<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $h''_2$  (a projeção frontal da reta  $h''$ ), na linha de chamada de **B<sub>1</sub>**. Por fim, pelo ponto **E<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h''_1$  (a projeção horizontal da reta  $h''$ ) é **E<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **E**). A projeção frontal do ponto **E** (**E<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $h''_2$  (a projeção frontal da reta  $h''$ ), na linha de chamada de **E<sub>1</sub>**.

A partir das projeções dos cinco pontos, desenharam-se as projeções do pentágono **[ABCDE]**.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\mu$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do pentágono **[ABCDE]** (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O pentágono **[ABCDE]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $h$ ,  $h'$  e  $h''$ , das retas  $h_r$ ,  $h'_r$  e  $h''_r$ , dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu rebater  $f_{\mu}$ , do próprio  $f_{\mu r}$  e, ainda, dos traçados necessários à construção do pentágono em verdadeira grandeza).

## 287.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $P$ , pertencente ao plano  $\alpha$  – o ponto  $P$  tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\alpha$  (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano).

O ponto  $P$  tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto  $P$  é o ponto de  $h_\alpha$  que tem 1,5 cm de afastamento ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

Note que é dado o **ângulo** que o lado  $[PQ]$  do quadrado faz com  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\alpha$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

**Resolução:**

O plano que contém o quadrado  $[PQRS]$  (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[PQRS]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado  $[PQ]$  do quadrado faz com o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\alpha$  e, uma vez que o plano  $\alpha$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita). Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

O ponto  $P$  é um ponto de  $h_\alpha$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $P_r \equiv P_1$ . Note que o rebatimento efetuado nos permitiu economizar o rebatimento de um ponto (o ponto  $P$ ).

**Rebatimento do traço frontal do plano  $\alpha$ :**

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou) é um ponto de  $f_\alpha$  e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Tendo em conta que não temos mais nenhum ponto do traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), determinou-se um ponto  $A$ , qualquer, suficientemente afastado do ponto de concorrência dos traços do plano, para nos permitir um rigor apreciável. Para rebater o ponto  $A$  conduziu-se, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), uma perpendicular à charneira. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $A_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , determinando-se  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido). Isto permitiu-nos desenhar  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), que passa por  $A_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $f_{\alpha_r}$  está definido por dois pontos).

**Construção do quadrado  $[PQRS]$  em verdadeira grandeza:**

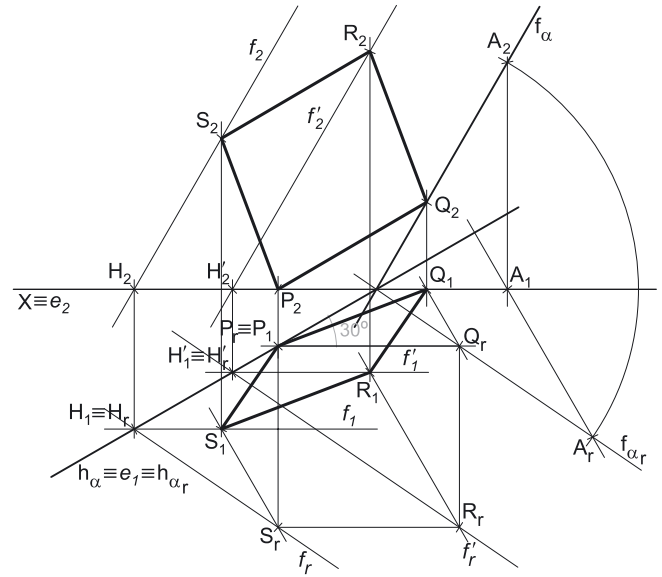
Em rebatimento, já é possível construir o quadrado  $[PQRS]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento). Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de  $P_r$ , é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado  $[PQ]$  faz com  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – é o ângulo que o segmento  $[P_rQ_r]$  faz com  $h_{\alpha_r}$ . Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte do lado  $[PQ]$  do triângulo, em rebatimento. Uma vez que o ponto  $Q$  tem afastamento nulo (é dado no enunciado), o ponto  $Q$  é um ponto do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) pelo que, em rebatimento, o ponto  $Q_r$  tem de se situar sobre  $f_{\alpha_r}$ . Assim, o ponto  $Q_r$  é o ponto de interseção da reta suporte do segmento  $[P_rQ_r]$  com  $f_{\alpha_r}$ .

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $30^\circ$  a partir de  $P_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ponto  $Q$ , pertencente a  $f_\alpha$ , tem cota positiva (para que o quadrado se situe no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente).

A partir dos pontos  $P_r$  e  $Q_r$ , construiu-se o quadrado  $[PQRS]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $R_r$  e  $S_r$ . Note que também nesta construção se garantiu que o quadrado se situa, na totalidade, no espaço do  $1^\circ$  Diedro.

**Determinação das projeções dos pontos  $Q$ ,  $R$  e  $S$  e do quadrado  $[PQRS]$ :**

Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos pontos  $Q$ ,  $R$  e  $S$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento do ponto **Q** (que é um ponto de  $f_\alpha$ ) processa-se de forma quase direta. De facto, conduziu-se, por  $Q_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **Q**) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo **X** é  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**), pois o ponto **Q** tem afastamento nulo. A projeção frontal do ponto **Q** ( $Q_2$ ) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), pois o ponto **Q** é um ponto de  $f_\alpha$ .

A inversão do rebatimento do ponto **S** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto **S** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $f$ , uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ . A reta  $f_r$  (a reta  $f$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $S_r$ ) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$  – é paralela a  $f_\alpha$ ). O ponto **H** é o traço horizontal da reta  $f$  e situa-se no traço horizontal do plano, pelo que  $H_r$  se situa sobre  $h_{\alpha_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $f$ . O ponto **H** é um ponto da charneira (que é  $h_\alpha$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_1 \equiv H_r$  ( $H_2$  situa-se no eixo **X**, pois **H** tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $f$  em projeções – o ponto **H**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. No entanto, também já temos a direção da reta  $f$  (que é a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $f$  – a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ).

Por fim, pelo ponto  $S_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira. O ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ) é  $S_1$  (a projeção horizontal do ponto **S**) – a projeção frontal do ponto **S** ( $S_2$ ) situa-se sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ), na linha de chamada de  $S_1$ .

A inversão do rebatimento do ponto **R** processa-se com o recurso a outra reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto **R** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $f'$ , outra reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ . A reta  $f'_r$  (a reta  $f'$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $R_r$ ) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$  – é paralela a  $f_\alpha$ ). O ponto  $H'$  é o traço horizontal da reta  $f'$  e situa-se no traço horizontal do plano, pelo que  $H'_r$  se situa sobre  $h_{\alpha_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $f'$ . O ponto  $H'$  é um ponto da charneira (que é  $h_\alpha$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H'_1 \equiv H'_r$  ( $H'_2$  situa-se no eixo **X**, pois  $H'$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $f'$  em projeções – o ponto  $H'$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. No entanto, também já temos a direção da reta  $f'$  (que é a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $f'$  – a reta  $f'$  está definida por um ponto (o ponto  $H'$ ) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ).

Por fim, pelo ponto  $R_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira. O ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f'_1$  (a projeção horizontal da reta  $f'$ ) é  $R_1$  (a projeção horizontal do ponto **R**) – a projeção frontal do ponto **R** ( $R_2$ ) situa-se sobre  $f'_2$  (a projeção frontal da reta  $f'$ ), na linha de chamada de  $R_1$ .

A partir das projeções dos quatro pontos (**P**, **Q**, **R** e **S**), desenharam-se as projeções do quadrado [**PQRS**].

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado [**PQRS**] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado [**PQRS**], em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $f$  e  $f'$ , das retas  $f_r$  e  $f'_r$ , dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu rebater  $f_\alpha$  e, ainda, do próprio  $f_\alpha$ ).

## 288.

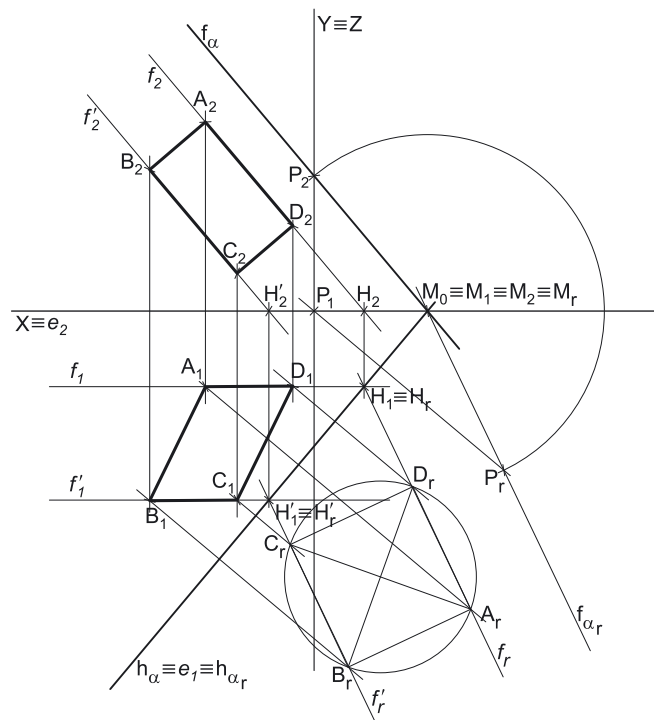
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **C**, pertencentes ao plano  $\alpha$  – os dois pontos têm, ambos, de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\alpha$  (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta  $f$  é a reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , com 2 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **A**. A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ). O ponto **A** é o ponto da reta  $f$  que tem 5 cm de cota.

A reta  $f'$  é a reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , com 5 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **C**. A reta  $f'$  está definida por um ponto (o ponto  $H'$ , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ). O ponto **C** é o ponto da reta  $f'$  que tem 1 cm de cota.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Resolução:

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projecção, pelo que o quadrado [ABCD] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projecção (ambas as projecções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projecção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_f \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projecção frontal da charneira, situa-se no eixo X). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

#### Rebatimento do traço frontal do plano $\alpha$ :

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (o ponto M) é um ponto de  $f_\alpha$  e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $M_r \equiv M_1 \equiv M_2$ . Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é  $M_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direcção.

Tendo em conta que não temos mais nenhum ponto do traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), determinou-se um ponto P, qualquer, suficientemente afastado do ponto M, para nos permitir um rigor apreciável. Para rebater o ponto P conduziu-se, por  $P_1$  (a projecção horizontal do ponto P), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto P) –  $P_r$  tem de se situar necessariamente sobre essa perpendicular à charneira. A distância  $\overline{MP}$  está contida em  $f_\alpha$  e, por isso mesmo, está em verdadeira grandeza tanto em  $\overline{M_2P_2}$  como em rebatimento. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $M_r$  e com raio  $\overline{M_2P_2}$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira (que apssa por  $P_1$ ), determinando-se  $P_r$  (o ponto P rebatido). Já temos o ponto que nos faltava, pelo que já foi possível desenhar  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), que passa por  $P_r$  e  $M_r$  (está definido por dois pontos).

#### Rebatimento dos pontos A e C:

Para rebater o ponto A é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto A pertença – a reta  $f$ , neste caso. Para definirmos a reta  $f_r$  (a reta  $f$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (o que se verifica no espaço, em projecções e em rebatimento), pelo que já temos uma direcção para definir a reta  $f_r$ . Falta-nos um ponto para definir a reta. O ponto H (o traço horizontal da reta  $f$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_r \equiv H_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta – a reta  $f_r$  está definida por um ponto (o ponto  $H_r$ ) e por uma direcção (é paralela a  $f_{\alpha_r}$ ).

O ponto A é um ponto da reta  $f$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $A_r$  está sobre  $f_r$ , na perpendicular a  $h_\alpha$  (a charneira) que passa por  $A_1$  (a projecção horizontal do ponto A). Assim,  $A_r$  (o ponto A rebatido) é o ponto de intersecção de  $f_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ .

Para rebater o ponto C é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto C pertença – a reta  $f'$ , neste caso. Para definirmos a reta  $f'_r$  (a reta  $f'$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A reta  $f'$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , pelo que já temos uma direcção para definir a reta  $f'_r$  (a direcção das retas frontais do plano, em rebatimento – é paralela a  $f_{\alpha_r}$ ). Falta-nos um ponto para definir a reta. O ponto H' (o traço horizontal da reta  $f'$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H'_r \equiv H'_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta – a reta  $f'_r$  está definida por um ponto (o ponto  $H'_r$ ) e por uma direcção (é paralela a  $f_{\alpha_r}$ ).

O ponto C é um ponto da reta  $f'$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $C_r$  está sobre  $f'_r$ , na perpendicular a  $h_\alpha$  (a charneira) que passa por  $C_1$  (a projecção horizontal do ponto C). Assim,  $C_r$  (o ponto C rebatido) é o ponto de intersecção de  $f'_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $C_1$ .

#### Construção do quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza:

A partir dos pontos  $A_r$  e  $C_r$ , construiu-se o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $B_r$  e  $D_r$ . Tendo em conta que o enunciado é omissivo no que respeita à ordem dos vértices, a atribuição das notações (B e D) aos outros vértices do quadrado foi arbitrária.

Salienta-se que, nesta situação particular, e **exclusivamente em função dos dados apresentados**, as retas  $f$  e  $f'$  são, imediatamente, as retas suporte de dois dos lados do quadrado. Isso significa que **dois lados do quadrado estão contidos em retas frontais (de frente)**, o que não é referido no enunciado mas que se conclui, a partir da resolução.

Por outro lado, estando dois lados do quadrado contidos em retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$  (os lados [AD] e [BC]) os outros dois lados (os lados [AB] e [CD]) estão necessariamente contidos em retas de maior inclinação do plano  $\alpha$ , pois estes últimos são perpendiculares aos primeiros.

#### Determinação das projecções dos pontos B e D e do quadrado [ABCD]:

Para determinar as projecções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projecções dos pontos B e D.

A inversão do rebatimento do ponto D processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto D pertença, que é a reta  $f$  (cujas projecções haviam sido previamente desenhadas). Assim, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto D). O ponto de intersecção da perpendicular à charneira com  $f_1$  (a projecção horizontal da reta  $f$ ) é  $D_1$  (a projecção horizontal do ponto D) – a projecção frontal do ponto D ( $D_2$ ) situa-se sobre  $f_2$  (a projecção frontal da reta  $f$ ), na linha de chamada de  $D_1$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento do ponto **B** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto **B** pertença, que é a reta  $f'$  (cuas projeções haviam sido previamente desenhadas). Assim, pelo ponto  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **B**). O ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f'_1$  (a projeção horizontal da reta  $f'$ ) é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**) – a projeção frontal do ponto **B** ( $B_2$ ) situa-se sobre  $f'_2$  (a projeção frontal da reta  $f'$ ), na linha de chamada de  $B_1$ .

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado **[ABCD]** (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado **[ABCD]**, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $f$  e  $f'$ , das retas  $f_r$  e  $f'_r$ , dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu rebater  $f_\alpha$  e, ainda, do próprio  $f_{\alpha r}$ ).

## 289.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\delta$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **Q**, pertencente ao plano  $\delta$  – o ponto **Q** tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** em relação ao plano  $\delta$  (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\delta$ ).

A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , com 5 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **Q**. A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). O ponto **Q** é o ponto da reta  $h$  que tem 5 cm de afastamento.

### Resolução:

O plano que contém o hexágono (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o hexágono não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do hexágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\delta$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\delta \equiv e_1 \equiv h_{\delta r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\delta$ ).

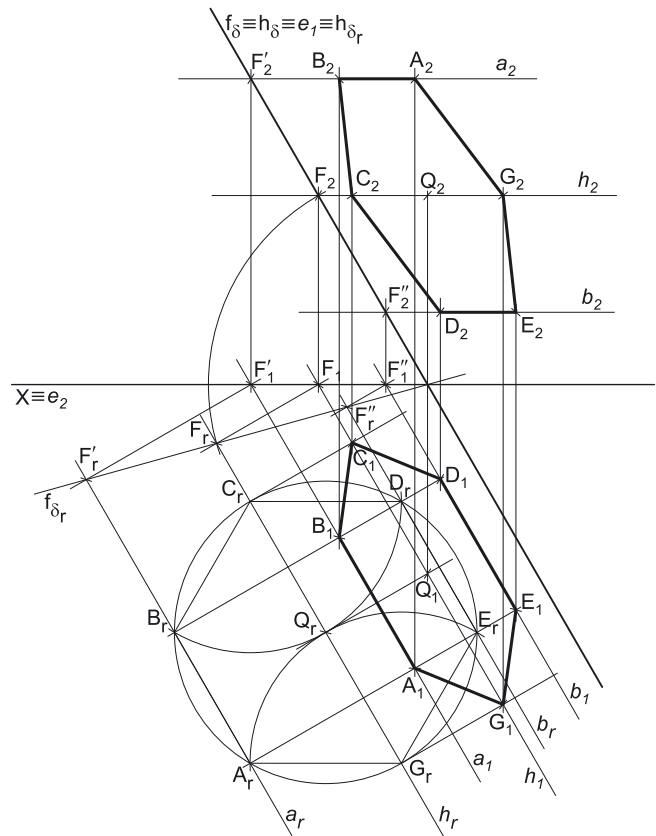
#### Rebatimento do traço frontal do plano $\delta$ :

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou) é um ponto de  $f_\delta$  e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir  $f_{\delta r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto **F**, o traço frontal da reta  $h$ . Para rebater o ponto **F** conduziu-se, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto **F**), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **F** e que não se identificou). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $F_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , determinando-se  $F_r$  (o ponto **F** rebatido). Isto permitiu-nos desenhar  $f_{\delta r}$  (o traço frontal do plano  $\delta$  rebatido), que passa por  $F_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $f_{\delta r}$  está definido por dois pontos).

#### Rebatimento do ponto **Q**:

Para rebater o ponto **Q** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **Q** pertença – a reta  $h$ , neste caso. Para definirmos a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto  $F_r$ ), para definirmos a reta  $h_r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_r$ . A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) passa por  $F_r$  e é paralela a  $h_{\delta r} - h_r$  está definida por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\delta r}$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto  $Q$  é um ponto da reta  $h$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $O_r$  está sobre  $h_r$ , na perpendicular a  $h_\delta$  (a charneira) que passa por  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ ) – essa perpendicular corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal a  $h_\delta$  (a charneira do rebatimento) que contém o ponto  $Q$  (bem como o arco do seu rebatimento). Assim,  $Q_r$  (o ponto  $Q$  rebatido) é o ponto de interseção de  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $Q_1$ .

#### Construção do hexágono em verdadeira grandeza:

Em rebatimento, já é possível construir o hexágono em verdadeira grandeza (em rebatimento). O enunciado refere que a figura tem 4 cm de lado. Ora, o **hexágono regular** é o **único polígono** cujo lado é igual (tem o mesmo comprimento) ao raio da circunferência em que o polígono se inscreve. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_r$ , desenhou-se uma circunferência com 4 cm de raio (o comprimento do lado do hexágono), que é a circunferência circunscrita ao polígono.

Por outro lado, o enunciado refere, ainda, que dois dos lados da figura são horizontais (de nível), o que nos permitiu perceber a posição da figura na circunferência – dois dos seus lados têm de ser paralelos a  $h_{\delta_r}$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ , rebatido).

Assim, construiu-se o hexágono em verdadeira grandeza, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono, em rebatimento. Salienta-se que a atribuição de notações aos vértices do hexágono ( $A_r, B_r, C_r, D_r, E_r$  e  $G_r$ ), foi completamente arbitrária (pois o enunciado é omissivo), mas sequencial.

#### Determinação das projeções dos pontos E e G:

A inversão do rebatimento dos pontos  $E$  e  $G$  processa-se com o recurso a retas do plano  $\delta$  às quais aqueles pontos pertençam. Acontece que é possível observar que os pontos  $E$  e  $G$  pertencem à reta  $h$  (a reta horizontal que contém o ponto  $Q$ ), cujas projeções já haviam sido previamente desenhadas.

Assim, pelo ponto  $E_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira ( $h_\delta$ ). O ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) é  $E_1$  (a projeção horizontal do ponto  $E$ ) – a projeção frontal do ponto  $E$  ( $E_2$ ) situa-se sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ), na linha de chamada de  $E_1$ . De forma semelhante, pelo ponto  $G_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira ( $h_\delta$ ). O ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) é  $G_1$  (a projeção horizontal do ponto  $G$ ) – a projeção frontal do ponto  $G$  ( $G_2$ ) situa-se sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ), na linha de chamada de  $G_1$ .

#### Determinação das projeções dos pontos A e B:

A inversão do rebatimento dos pontos  $A$  e  $B$  processa-se com o recurso a retas do plano  $\delta$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $h'$ , que é a reta suporte do lado  $[AB]$  do hexágono (um dos lados horizontais do polígono). A reta  $h'_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $B_r$ ) e é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ . O ponto  $F'$  é o traço frontal da reta  $h'$  e situa-se no traço frontal do plano, pelo que  $F'_r$  se situa sobre  $f_{\delta_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h'$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta  $h'$  em projeções (a direção das retas horizontais do plano). Falta-nos um ponto. O ponto  $F'$  é um ponto de  $f_{\delta_r}$ , pelo que o ponto  $F'$  tem de se situar sobre  $f_\delta$ . Para se determinarem as projeções do ponto  $F'$  conduziu-se, por  $F'_r$ , uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo  $X$  é  $F'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F'$ ), pois o ponto  $F'$  tem afastamento nulo. A projeção frontal ponto  $F'$  ( $F'_2$ ) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_\delta$ ), pois o ponto  $F'$  é um ponto de  $f_\delta$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $h'$  – a reta  $h'$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $F'$ ) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $h'$ .

Em seguida, pelo ponto  $A_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta  $h'$ ) é  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ). A projeção frontal do ponto  $A$  ( $A_2$ ) situa-se sobre  $h'_2$  (a projeção frontal da reta  $h'$ ), na linha de chamada de  $A_1$ . Por fim, pelo ponto  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta  $h'$ ) é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ). A projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ) situa-se sobre  $h'_2$  (a projeção frontal da reta  $h'$ ), na linha de chamada de  $B_1$ .

#### Determinação das projeções dos pontos D e E do hexágono [ABCDEG]:

A inversão do rebatimento dos pontos  $D$  e  $E$  processa-se com o recurso a retas do plano  $\delta$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $h''$ , que é a reta suporte do lado  $[DE]$  do hexágono (outro dos lados horizontais do polígono). A reta  $h''_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $D_r$  e  $E_r$ ) e é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ . O ponto  $F''$  é o traço frontal da reta  $h''$  e situa-se no traço frontal do plano, pelo que  $F''_r$  se situa sobre  $f_{\delta_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h''$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h''$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta  $h''$  em projeções (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ). Falta-nos um ponto. O ponto  $F''$  é um ponto de  $f_{\delta_r}$ , pelo que o ponto  $F''$  tem de se situar sobre  $f_\delta$ . Para se determinarem as projeções do ponto  $F''$  conduziu-se, por  $F''_r$ , uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo  $X$  é  $F''_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F''$ ), pois o ponto  $F''$  tem afastamento nulo. A projeção frontal ponto  $F''$  ( $F''_2$ ) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_\delta$ ), pois o ponto  $F''$  é um ponto de  $f_\delta$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $h''$  – a reta  $h''$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $F''$ ) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $h''$ .

Em seguida, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h''_1$  (a projeção horizontal da reta  $h''$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto  $D$ ). A projeção frontal do ponto  $D$  ( $D_2$ ) situa-se sobre  $h''_2$  (a projeção frontal da reta  $h''$ ), na linha de chamada de  $D_1$ . Por fim, pelo ponto  $E_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h''_1$  (a projeção horizontal da reta  $h''$ ) é  $E_1$  (a projeção horizontal do ponto  $E$ ). A projeção frontal do ponto  $E$  ( $E_2$ ) situa-se sobre  $h''_2$  (a projeção frontal da reta  $h''$ ), na linha de chamada de  $E_1$ .

A partir das projeções dos seis pontos, desenharam-se as projeções do hexágono  $[ABCDEG]$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do hexágono **[ABCDEF]** (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O hexágono **[ABCDEF]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $h, h' e h''$ , das retas  $h_r, h'_r e h''_r$ , dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu rebater  $f_\delta$ , do próprio  $f_{\delta_r}$  e, ainda, dos traçados necessários à construção do hexágono em verdadeira grandeza).

## 290.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\delta$  e  $\rho$ , pelos respetivos traços, em função dos dados. O plano  $\delta$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **B**, pertencentes ao plano  $\delta$ . Os pontos **A** e **B**, para pertencerem ao plano  $\delta$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ) – o ponto **A** é o ponto de  $f_\delta$  que tem 4 cm de cota ( $f_\delta$  é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo).

O ponto **B** tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ) – o ponto **B** é o ponto de  $h_\delta$  que tem 3 cm de afastamento ( $h_\delta$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

### Resolução:

É pedido segmento de reta resultante da interseção entre um quadrado (o quadrado **[ABCD]**) e o plano de rampa  $\rho$ . Nesse sentido, em primeiro lugar há que determinar as projeções do quadrado **[ABCD]**.

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\delta$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\delta \equiv e_1 \equiv h_{\delta_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\delta$ ).

O ponto **B** é um ponto de  $h_\delta$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $B_r \equiv B_1$ . O rebatimento efetuado nos permitiu economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **B**). No entanto, caso se tivesse efetuado o rebatimento do plano  $\delta$  para o Plano Frontal de Projeção, uma vez que o ponto **A** seria, nesse caso, um ponto da charneira, a situação seria semelhante à exposta, em termos de economia de traçados.

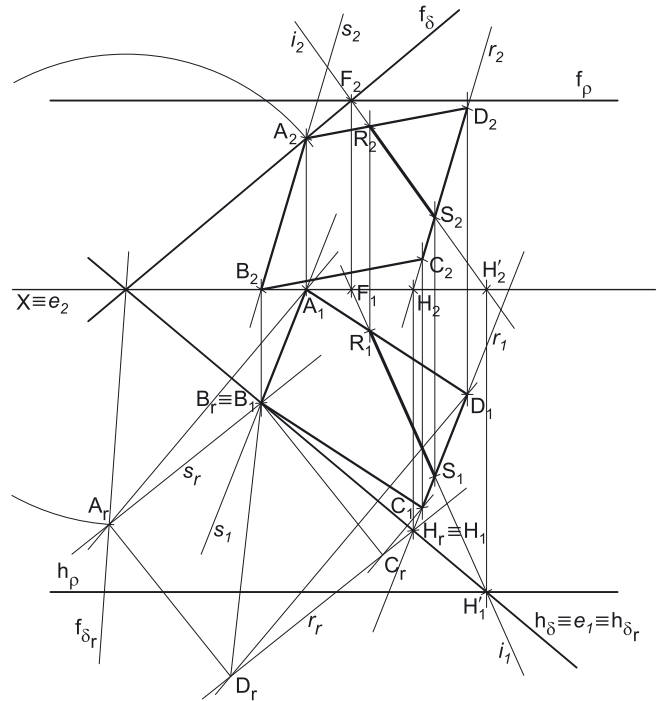
### Rebatimento do traço frontal do plano $\delta$ :

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou) é um ponto de  $f_\delta$  e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir  $f_{\delta_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto **A**, que é um ponto conhecido de  $f_\delta$ . Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), uma perpendicular à charneira. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $A_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , determinando-se  $A_r$  (o ponto **A** rebatido). Isto permitiu-nos desenhar  $f_{\delta_r}$  (o traço frontal do plano  $\delta$  rebatido), que passa por  $A_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\delta$ , está definido por dois pontos).

### Construção do quadrado **[ABCD]**, em verdadeira grandeza:

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $C_r$  e  $D_r$ . Note que, na construção do quadrado em rebatimento, se garantiu que o quadrado se situa, na sua totalidade, no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das projeções dos pontos **C** e **D** e do quadrado **[ABCD]**

A inversão do rebatimento dos pontos **C** e **D** processa-se com o recurso a retas do plano  $\delta$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta **r**, que é a reta suporte do lado **[CD]** do quadrado. A reta  $r_r$  está definida por dois pontos (os pontos **C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**) e é uma reta oblíqua do plano  $\delta$ . O ponto **H** é o traço frontal da reta **r** e situa-se no traço horizontal do plano, pelo que **H<sub>r</sub>** se situa sobre  $h_{\delta_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **r**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **H** (o traço horizontal da reta **r**) é um ponto da charneira (que é  $h_{\delta}$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **H<sub>1</sub>** **H<sub>r</sub>** (**H<sub>2</sub>** situa-se no eixo **X** pois o ponto **H** tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta **r** em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nesta situação, os dados do plano revelam-se insuficientes para, de uma forma direta, determinarmos o elemento em falta para definir a reta **r**, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta **s**, como reta auxiliar do plano  $\delta$  – a reta **s** é a reta suporte do lado **[AB]** do quadrado e está definida por dois pontos (os pontos **A** e **B**), quer em projeções quer em rebatimento. Assim, representou-se a reta **s** quer em projeções, quer em rebatimento. As retas **r** e **s** são necessariamente paralelas, pois são as retas suporte de dois lados paralelos do quadrado, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **r**. A reta **r** está, assim, definida por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é paralela à reta **s**).

Em seguida, pelo ponto **C<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta **r**) é **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** (**C<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta **s**), na linha de chamada de **C<sub>1</sub>**. Por fim, pelo ponto **D<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta **r**) é **D<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **D**). A projeção frontal do ponto **D** (**D<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta **s**), na linha de chamada de **D<sub>1</sub>**.

Note que se poderia ter invertido o rebatimento dos pontos **C** e **D** com o recurso por exemplo, a retas horizontais (de nível) do plano  $\delta$  – tal situação implicaria, no entanto, o recurso a duas retas (uma reta para cada ponto), o que resultaria em mais traçados do que a situação proposta.

A partir das projeções dos seis pontos, desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

#### Determinação das projeções do segmento de reta **[RS]**

A determinação das projeções do segmento **[RS]** (o segmento resultante da interseção do plano  $\rho$  com o quadrado **[ABCD]**) carece da determinação da reta de interseção entre os planos  $\delta$  (o plano que contém o quadrado) e o plano  $\rho$  (o plano que corta o quadrado).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções da reta **i**, a reta de interseção entre os dois planos. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **F**, o ponto de concorrência dos traços frontais dos dois planos ( $f_{\delta}$  e  $f_{\rho}$ ). O ponto **F** é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos e é, ainda, o traço frontal da reta **i**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **i** – falta-nos outro ponto ou uma direção. Em seguida, determinou-se o ponto **H'**, o ponto de concorrência dos traços horizontais dos dois planos ( $h_{\delta}$  e  $h_{\rho}$ ). O ponto **H'** é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos e é, ainda, o traço horizontal da reta **i**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i**.

A reta **i** está, assim, definida por dois pontos – os seus traços (os pontos **F** e **H'**). Note que a determinação da reta **i** se tratou, na prática, do **caso geral** da interseção entre dois planos.

A reta **i** intersesta o lado **[AD]** do quadrado no ponto **R** e intersesta o lado **[CD]** do quadrado no ponto **S**. Assim, determinaram-se as projeções dos pontos **R** e **S** e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[RS]** que é, assim, o segmento da reta **i** que se situa no quadrado **[ABCD]**.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\delta$  e os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado **[ABCD]** (parte do objetivo do exercício) representam-se a **médio-forte**, pois são parte do pedido. As projeções do segmento de reta **[RS]** (o objetivo final do exercício) representaram-se a forte, pois são o pedido. O quadrado **[ABCD]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **r**, **s** e **i**, das retas  $r_r$  e  $s_r$ , dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu rebater  $f_{\delta}$ , do próprio  $f_{\delta_r}$  e, ainda, dos traçados necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza).

## 291.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projecções, em função dos dados.

### Determinação dos traços do plano $\alpha$ :

O enunciado refere que o lado **[AB]** do quadrado está contido numa reta de maior inclinação do plano  $\alpha$ . Nesse sentido, desenharam-se as projecções da reta  $r$ , a reta que passa pelos pontos **A** e **B** (a reta suporte do lado **[AB]**). Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\alpha$ .

A reta  $r$  é uma reta de maior inclinação do plano  $\alpha$ , sendo esse dado que nos permite determinar os traços do plano  $\alpha$ . Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta  $r$  nos planos de projecção – o ponto **F** (o traço frontal da reta  $r$ ) e o ponto **H** (o traço horizontal da reta  $r$ ).

O traço frontal do plano  $\alpha$  é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto para definir  $f_\alpha$  – o ponto **F**. Falta-nos outro ponto ou uma direcção. A reta  $r$ , sendo uma reta de maior inclinação do plano  $\alpha$ , é uma reta do plano  $\alpha$  que faz o ângulo máximo com o Plano Frontal de Projecção, é perpendicular ao traço frontal do plano (e a todas as retas frontais do plano), sendo que a sua projecção frontal é perpendicular ao traço frontal do plano (a perpendicularidade é directa em projecção frontal). Já temos a direcção que nos faltava – a direcção perpendicular a  $r_2$  (a projecção frontal da reta  $r$ ). Assim, o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto **F**, o traço frontal da reta  $r$ ) e por uma direcção (é perpendicular à projecção frontal da reta  $r - r_2$ ).

O traço horizontal do plano  $\alpha$  é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto para definir  $h_\alpha$  – o ponto **H**. Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Os traços de um plano são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\alpha$ . O traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) está definido por dois pontos – o ponto **H** (o traço horizontal da reta  $r$ ) e o ponto de concorrência dos traços do plano.

### Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projecção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projecção (ambas as projecções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projecção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha r}$  ( $e_2$ , a projecção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

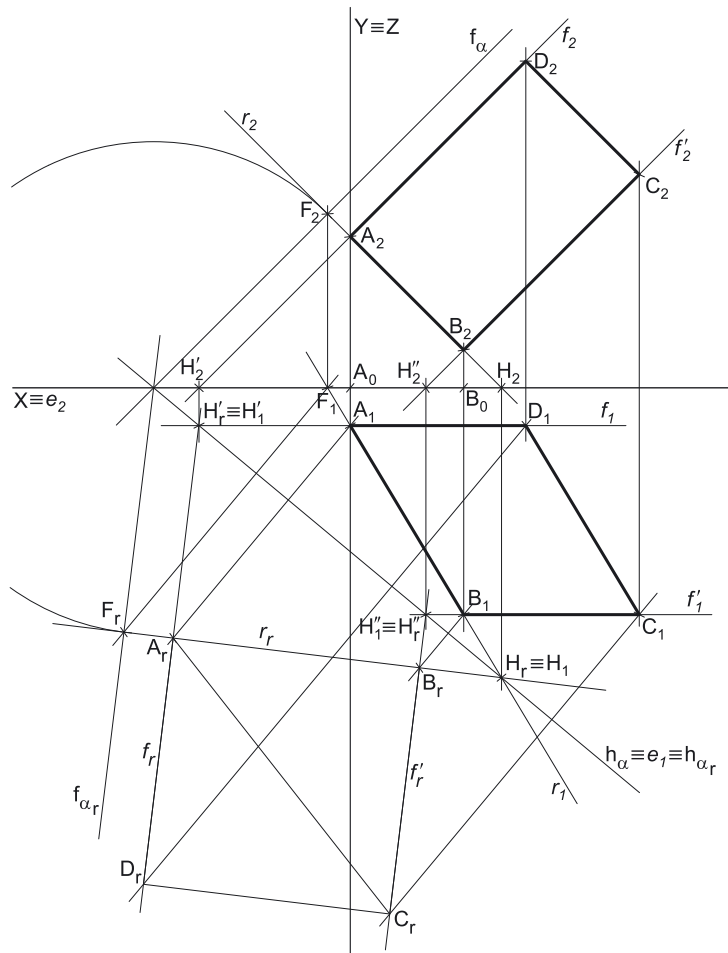
### Rebatimento do traço frontal do plano $\alpha$ :

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou) é um ponto de  $f_\alpha$  e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir  $f_{\alpha r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direcção.

Optou-se por se rebater o ponto **F**, o traço frontal da reta  $r$ . Para rebater o ponto **F** conduziu-se, por **F<sub>1</sub>** (a projecção horizontal do ponto **F**), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **F** e que não se identificou). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até **F<sub>2</sub>**, desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por **F<sub>1</sub>**, determinando-se **F<sub>r</sub>** (o ponto **F** rebatido). Isto permitiu-nos desenhar  $f_{\alpha r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), que passa por **F<sub>r</sub>** e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $f_{\alpha r}$  está definido por dois pontos).

### Rebatimento dos pontos **A** e **B**:

Para rebater os pontos **A** e **B** é necessário rebater retas do plano  $\alpha$  às quais aqueles pontos pertençam – a reta  $r$ , neste caso. De facto, uma vez que os dois pontos pertencem à reta  $r$ , o rebatimento desta reta permitir-nos-á rebater os dois pontos, recorrendo a uma única reta. Para definirmos a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto para definir a reta  $r_r$  – o ponto **F<sub>r</sub>**. Falta-nos outro ponto ou uma direcção. O ponto **H** (o traço horizontal da reta  $r$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **H<sub>r</sub>  $\equiv$  H<sub>1</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta – a reta  $r_r$  está definida por dois pontos (os pontos **F<sub>r</sub>** e **H<sub>1</sub>**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **A** é um ponto da reta  $r$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $A_r$  está sobre  $r_r$ , na perpendicular a  $h_\alpha$  (a charneira) que passa por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**). Assim,  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) é o ponto de interseção de  $r_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ .

O ponto **B** é outro ponto da reta  $r$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $B_r$  está sobre  $r_r$ , na perpendicular a  $h_\alpha$  (a charneira) que passa por  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**). Assim,  $B_r$  (o ponto **B** rebatido) é o ponto de interseção de  $r_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ .

*Construção do quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza:*

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os restantes vértices do polígono, em rebatimento (os pontos  $C_r$  e  $D_r$ ), garantindo-se que o quadrado se situa no espaço do  $1^a$  Diedro. Salienta-se que, se o lado [AB], do quadrado, está contido numa reta de maior inclinação do plano  $\alpha$ , o lado [CD], do quadrado, porque é paralelo ao lado [AB], estará necessariamente contido noutra reta de maior inclinação do plano.

Por outro lado, estando dois lados do quadrado contidos em retas de maior inclinação do plano  $\alpha$  (os lados [AB] e [CD]) os outros dois lados (os lados [AD] e [BC]) estão necessariamente contidos em retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$ , pois estes últimos são perpendiculares aos primeiros.

*Determinação das projeções dos pontos C e D e do quadrado [ABCD]:*

Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos pontos **C** e **D**.

A inversão do rebatimento do ponto **D** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto **D** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $f$ , a reta suporte do lado [AD] do quadrado. A reta  $f_r$  (a reta  $f$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $D_r$ ). A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , pelo que a reta  $f_r$  é paralela a  $f_{\alpha_r}$ . O ponto  $H$  é o traço horizontal da reta  $f$  e situa-se no traço horizontal do plano, pelo que  $H_r$  se situa sobre  $h_{\alpha_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $f$ . O ponto  $H$  é um ponto da charneira (que é  $h_\alpha$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_1 \equiv H_r$  ( $H_2$  situa-se no eixo  $X$ , pois  $H$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $f$  em projeções – o ponto  $H$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, a reta  $f$  contém o ponto **A**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $f$ , o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $f$  – a reta  $f$  está definida por dois pontos (os pontos  $H$  e **A**). Note, ainda, que a reta  $f$  é necessariamente paralela a  $f_{\alpha}$ .

Em seguida, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira. O ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto **D**) – a projeção frontal do ponto **D** ( $D_2$ ) situa-se sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ), na linha de chamada de  $D_1$ .

A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a outra reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto **C** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $f'$ , a reta suporte do lado [BC] do quadrado. A reta  $f'_r$  (a reta  $f'$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $C_r$ ). A reta  $f'$  é outra reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , pelo que a reta  $f'_r$  é paralela a  $f_{\alpha_r}$ . O ponto  $H'$  é o traço horizontal da reta  $f'$  e situa-se no traço horizontal do plano, pelo que  $H'_r$  se situa sobre  $h_{\alpha_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $f'$ . O ponto  $H'$  é um ponto da charneira (que é  $h_\alpha$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H'_1 \equiv H'_r$  ( $H'_2$  situa-se no eixo  $X$ , pois  $H'$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $f'$  em projeções – o ponto  $H'$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, a reta  $f'$  contém o ponto **B**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $f'$ , o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $f'$  – a reta  $f'$  está definida por dois pontos (os pontos  $H'$  e **B**). Note, ainda, que a reta  $f'$  é necessariamente paralela a  $f_{\alpha}$ .

Em seguida, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira. O ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f'_1$  (a projeção horizontal da reta  $f'$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**) – a projeção frontal do ponto **C** ( $C_2$ ) situa-se sobre  $f'_2$  (a projeção frontal da reta  $f'$ ), na linha de chamada de  $C_1$ .

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado [ABCD].

**Traçado:**

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os dados, nesta situação, são dois pontos cujas linhas de chamada se representam sempre a **leve**. Nesse sentido, os traços do plano  $\alpha$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **médio-leve**. As duas projeções do quadrado [ABCD] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado [ABCD], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$ ,  $f$  e  $f'$ , das retas  $r_r$ ,  $f_r$  e  $f'_r$ , dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu rebater  $f_{\alpha}$  e, ainda, do próprio  $f_{\alpha_r}$ ).

## 292.

### Dados:

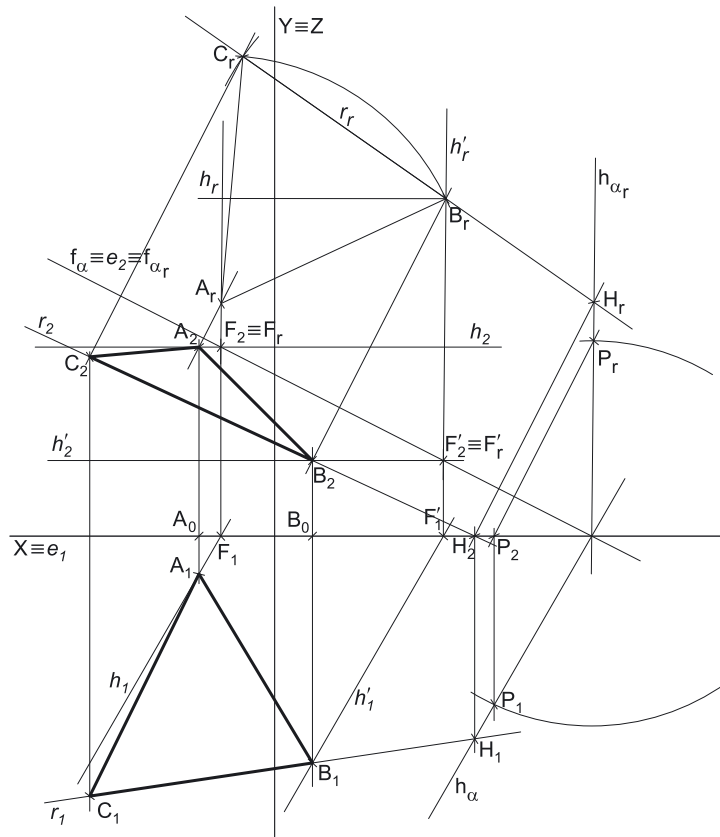
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projecções, em função dos dados.

### Determinação dos traços do plano $\alpha$ :

O enunciado fornece a direção das retas horizontais (de nível) do plano. Assim, para determinarmos o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dados do plano (os pontos **A** e **B**) são insuficientes para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se à reta **h**, como reta auxiliar do plano, passando pelo ponto **A**. A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano). Determinou-se o traço frontal da reta **h**, o ponto **F**. Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), falta-nos outro ponto ou uma direção.

Os dados do plano (os pontos **A** e **B**) são ainda insuficientes para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta **h'**, como reta auxiliar do plano, passando pelo ponto **B**. A reta **h'** é outra reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e está definida por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano). Determinou-se o traço frontal da reta **h'**, o ponto **F'**. Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) está, assim, definido por dois pontos – os pontos **F** e **F'**.



O traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano são concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos um ponto para definir  $h_\alpha$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) é uma reta horizontal (de nível) do plano (com cota nula), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_\alpha$ . O traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos traços do plano) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano – é paralelo às retas **h** e **h'**).

### Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $f_\alpha \equiv e_2 \equiv f_{\alpha_r}$  ( $e_1$ , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a  $f_\alpha$ ).

### Rebatimento do traço horizontal do plano $\alpha$ :

Em seguida, rebateteu-se o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou) é um ponto de  $h_\alpha$  e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir  $h_{\alpha_r}$  (o traço horizontal do plano em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Tendo em conta que não temos mais nenhum ponto do traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ), determinou-se um ponto **P**, qualquer, suficientemente afastado do ponto de concorrência dos dois traços do plano (para nos permitir um rigor apreciável). Para rebater o ponto **P** conduziu-se, por **P<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **P**), uma perpendicular à charneira. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até **P<sub>1</sub>**, desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por **P<sub>2</sub>**, determinando-se **P<sub>r</sub>** (o ponto **P** rebatido). Isto permitiu-nos desenhar  $h_{\alpha_r}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$  rebatido), que passa por **P<sub>r</sub>** e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $h_{\alpha_r}$  está definido por dois pontos).

### Rebatimento dos pontos **A** e **B**:

Para rebater o ponto **A** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **A** pertença – a reta **h**, neste caso. Para definirmos a reta **h<sub>r</sub>** (a reta **h** rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), pelo que já temos uma direção para definir a reta **h<sub>r</sub>**. Falta-nos um ponto para definir a reta. O ponto **F** (o traço frontal da reta **h**) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r \equiv F_2$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta – a reta **h<sub>r</sub>** está definida por um ponto (o ponto **F<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha_r}$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **A** é um ponto da reta **h** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **A<sub>r</sub>** está sobre **h<sub>r</sub>**, na perpendicular a **f<sub>α</sub>** (a charneira) que passa por **A<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**). Assim, **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido) é o ponto de interseção de **h<sub>r</sub>** com a perpendicular à charneira que passa por **A<sub>2</sub>**.

Para rebater o ponto **B** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **B** pertença – a reta **h'**, neste caso. Para definirmos a reta **h'<sub>r</sub>** (a reta **h'** rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **h'** é outra reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, pelo que já temos uma direção para definir a reta **h'<sub>r</sub>**. Falta-nos um ponto para definir a reta. O ponto **F'** (o traço frontal da reta **h'**) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **F'<sub>r</sub> = F'<sub>2</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta – a reta **h'<sub>r</sub>** está definida por um ponto (o ponto **F'<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a **h<sub>αr</sub>**).

O ponto **B** é um ponto da reta **h'** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **B<sub>r</sub>** está sobre **h'<sub>r</sub>**, na perpendicular a **f<sub>α</sub>** (a charneira) que passa por **B<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **B**). Assim, **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido) é o ponto de interseção de **h'<sub>r</sub>** com a perpendicular à charneira que passa por **B<sub>2</sub>**.

### Determinação das projeções do ponto **C** e do triângulo **[ABC]**:

A partir dos pontos **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**, construiu-se o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o ponto **C<sub>r</sub>**, garantindo-se que o triângulo se situa no espaço do 1<sup>a</sup> Diedro. Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções do ponto **C**.

A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto **C** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta **r**, a reta suporte do lado **[BC]** do triângulo. A reta **r<sub>r</sub>** (a reta **r** rebatida) está definida por dois pontos – os pontos **B<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**. O ponto **H** é o traço horizontal da reta **r** e situa-se no traço horizontal do plano, pelo que **H<sub>r</sub>** se situa sobre **h<sub>αr</sub>**.

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **r**. Já temos um ponto para definir a reta **r** em projeções – o ponto **B** (que é um ponto da reta **r**). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta **r**. O ponto **H** é um ponto de **h<sub>αr</sub>**, pelo que o ponto **H** tem de se situar sobre **h<sub>α</sub>**. Para se determinarem as projeções do ponto **H** conduziu-se, por **H<sub>r</sub>**, uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo **X** é **H<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **H**), pois o ponto **H** tem cota nula. A projeção horizontal ponto **H** (**H<sub>1</sub>**) situa-se sobre o traço horizontal do plano (**h<sub>α</sub>**), pois o ponto **H** é um ponto de **h<sub>α</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **r** – a reta **r** está, assim, definida por dois pontos (os pontos **B** e **H**), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta **r**.

Por fim, pelo ponto **C<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira. O ponto de interseção da perpendicular à charneira com **r<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **r**) é **C<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **C**) – a projeção horizontal do ponto **C** (**C<sub>1</sub>**) situa-se sobre **r<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **r**), na linha de chamada de **C<sub>2</sub>**.

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os dados, nesta situação, são dois pontos cujas linhas de chamada se representam sempre a **leve**. Nesse sentido, os traços do plano  $\alpha$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **médio-leve**. As duas projeções do triângulo **[ABC]** (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[ABC]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **h**, **h'** e **r**, das retas **h<sub>r</sub>**, **h'<sub>r</sub>** e **r<sub>r</sub>**, dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu rebater **h<sub>α</sub>** e, ainda, do próprio **h<sub>αr</sub>**).

## 293.

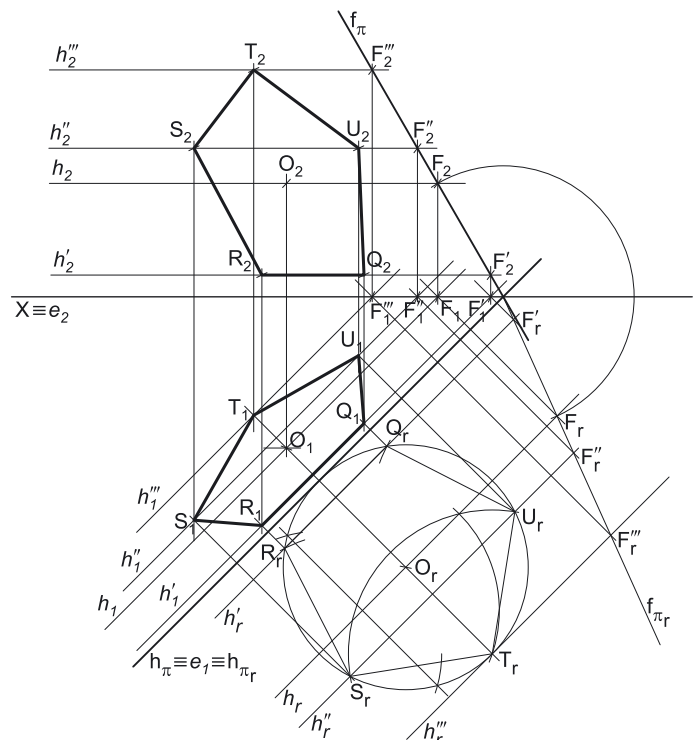
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\pi$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O**, pertencente ao plano  $\pi$  – o ponto **O** tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** em relação ao plano  $\pi$  (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\pi$ ).

A reta **h** é a reta horizontal (de nível) do plano  $\pi$ , com 3 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **O**. A reta **h** está definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). O ponto **O** é o ponto da reta **h** que tem 4 cm de afastamento.

### Resolução:

O plano que contém o pentágono **[QRSTU]** (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o pentágono **[QRSTU]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do pentágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\pi \equiv e_1 \equiv h_{\pi_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\pi$ ).

### Rebatimento do traço frontal do plano $\pi$ :

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou) é um ponto de  $f_\pi$  e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir  $f_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  rebatido). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $h$ . Para rebater o ponto  $F$  conduziu-se, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$  e que não se identificou). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $F_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , determinando-se  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Isto permitiu-nos desenhar  $f_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  rebatido), que passa por  $F_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $f_{\pi_r}$  está definido por dois pontos).

### Rebatimento do ponto $O$ :

Para rebater o ponto  $O$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $O$  pertença – a reta  $h$ , neste caso. Para definirmos a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto  $F_r$ ), para definirmos a reta  $h_r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\pi$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_r$ . A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) passa por  $F_r$  e é paralela a  $h_{\pi_r}$  –  $h_r$  está definida por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\pi_r}$ ).

O ponto  $O$  é um ponto da reta  $h$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $O_r$  está sobre  $h_r$ , na perpendicular a  $h_\pi$  (a charneira) que passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ). Assim,  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido) é o ponto de interseção de  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $O_1$ .

### Construção do pentágono [QRSTU] em verdadeira grandeza:

Em rebatimento, já é possível construir o pentágono [QRSTU] em verdadeira grandeza (em rebatimento). O enunciado refere que circunferência circunscrita ao pentágono é tangente ao traço horizontal do plano ( $h_\pi$ ) – em rebatimento, a circunferência circunscrita ao pentágono tem de ser tangente a  $h_{\pi_r}$ . Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao polígono, em verdadeira grandeza, e tangente a  $h_{\pi_r}$ .

Por outro lado, é referido, ainda, que o lado de menor cota (o lado [QR]) da figura é horizontal (de nível), ou seja, paralelo ao traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ). Este dado fornece-nos a posição do pentágono na circunferência, o que nos permitiu a sua construção (em rebatimento), de acordo com os dados – o lado [Q,R<sub>1</sub>] é, em rebatimento, o lado inferior do pentágono e é paralelo a  $h_{\pi_r}$ . Por outro lado, o ponto  $Q$  tem afastamento inferior a  $R$ , pelo que  $Q_r$  se situa mais próximo de  $f_{\pi_r}$  do que  $R_r$ .

A construção do pentágono em verdadeira grandeza, permitiu-nos determinar os vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $Q_r$ ,  $R_r$ ,  $S_r$ ,  $T_r$  e  $U_r$ .

### Determinação das projeções dos pontos $Q$ e $R$ :

A inversão do rebatimento dos pontos  $Q$  e  $R$  processa-se com o recurso a retas do plano  $\pi$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $h'$ , que é a reta suporte do lado [QR] do pentágono. A reta  $h'$  está definida por dois pontos (os pontos  $Q_r$  e  $R_r$ ) e é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\pi$ . O ponto  $F'$  é o traço frontal da reta  $h'$  e situa-se no traço frontal do plano, pelo que  $F'_r$  se situa sobre  $f_{\pi_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h'$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\pi$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta  $h'$  em projeções. Falta-nos um ponto. O ponto  $F'_r$  é um ponto de  $f_{\pi_r}$ , pelo que o ponto  $F'$  tem de situar sobre  $f_\pi$ . Assim, conduziu-se, por  $F'_r$ , uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo  $X$  é  $F'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F'$ ), pois o ponto  $F'$  tem afastamento nulo. A projeção frontal ponto  $F'$  ( $F'_2$ ) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ), pois o ponto  $F'$  é um ponto de  $f_\pi$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $h'$  – a reta  $h'$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $F'$ ) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\pi$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $h'$ .

Em seguida, pelo ponto  $Q_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta  $h'$ ) é  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ ). A projeção frontal do ponto  $Q$  ( $Q_2$ ) situa-se sobre  $h'_2$  (a projeção frontal da reta  $h'$ ), na linha de chamada de  $Q_1$ . Por fim, pelo ponto  $R_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta  $h'$ ) é  $R_1$  (a projeção horizontal do ponto  $R$ ). A projeção frontal do ponto  $R$  ( $R_2$ ) situa-se sobre  $h'_2$  (a projeção frontal da reta  $h'$ ), na linha de chamada de  $R_1$ .

### Determinação das projeções dos pontos $S$ e $U$ :

A inversão do rebatimento dos pontos  $S$  e  $U$  processa-se com o recurso à reta  $h''$ , que é a reta suporte da diagonal [SU] do pentágono. A reta  $h''$  está definida por dois pontos (os pontos  $S_r$  e  $U_r$ ) e é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\pi$ . O ponto  $F''$  é o traço frontal da reta  $h''$  e situa-se no traço frontal do plano, pelo que  $F''_r$  se situa sobre  $f_{\pi_r}$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h''$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h''$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\pi$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta  $h''$  em projeções. Falta-nos um ponto. O ponto  $F''_r$  é um ponto de  $f_{\pi_r}$ , pelo que o ponto  $F''$  tem de se situar sobre  $f_{\pi_r}$ . Assim, conduziu-se, por  $F''_r$ , uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo  $X$  é  $F''_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F''$ ), pois o ponto  $F''$  tem afastamento nulo. A projeção frontal do ponto  $F''$  ( $F''_2$ ) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_{\pi_r}$ ), pois o ponto  $F''$  é um ponto de  $f_{\pi_r}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $h''$  – a reta  $h''$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $F''$ ) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\pi$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $h''$ .

Em seguida, pelo ponto  $S_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h''_1$  (a projeção horizontal da reta  $h''$ ) é  $S_1$  (a projeção horizontal do ponto  $S$ ). A projeção frontal do ponto  $S$  ( $S_2$ ) situa-se sobre  $h''_2$  (a projeção frontal da reta  $h''$ ), na linha de chamada de  $S_1$ . Por fim, pelo ponto  $U_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h''_1$  (a projeção horizontal da reta  $h''$ ) é  $U_1$  (a projeção horizontal do ponto  $U$ ). A projeção frontal do ponto  $U$  ( $U_2$ ) situa-se sobre  $h''_2$  (a projeção frontal da reta  $h''$ ), na linha de chamada de  $U_1$ .

**Determinação das projeções do ponto T e do pentágono [QRSTU]:**

A inversão do rebatimento do ponto  $T$  processou-se com o recurso à reta  $h'''$ , uma outra reta horizontal (de nível) do plano  $\pi$ . A reta  $h'''$  está definida por um ponto (o ponto  $T_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\pi_r}$ ). O ponto  $F'''$  é o traço frontal da reta  $h'''$  e situa-se no traço frontal do plano, pelo que  $F'''_r$  se situa sobre  $f_{\pi_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h'''$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h'''$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\pi$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta  $h'''$  em projeções. Falta-nos um ponto. O ponto  $F'''_r$  é um ponto de  $f_{\pi_r}$ , pelo que o ponto  $F'''$  tem de se situar sobre  $f_{\pi_r}$ . Assim, conduziu-se, por  $F'''_r$ , uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo  $X$  é  $F'''_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F'''$ ), pois o ponto  $F'''$  tem afastamento nulo. A projeção frontal do ponto  $F'''$  ( $F'''_2$ ) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_{\pi_r}$ ), pois o ponto  $F'''$  é um ponto de  $f_{\pi_r}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $h'''$  – a reta  $h'''$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $F'''$ ) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\pi$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $h'''$ .

Em seguida, pelo ponto  $T_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h'''_1$  (a projeção horizontal da reta  $h'''$ ) é  $T_1$  (a projeção horizontal do ponto  $T$ ). A projeção frontal do ponto  $T$  ( $T_2$ ) situa-se sobre  $h'''_2$  (a projeção frontal da reta  $h'''$ ), na linha de chamada de  $T_1$ .

A partir das projeções dos cinco pontos, desenharam-se as projeções do pentágono [QRSTU].

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\pi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do pentágono [QRSTU] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O pentágono [QRSTU], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $h$ ,  $h'$ ,  $h''$  e  $h'''$ , das retas  $h_r$ ,  $h'_r$ ,  $h''_r$  e  $h'''_r$ , dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu rebater  $f_{\pi_r}$  do próprio  $f_{\pi_r}$  e, ainda, dos traçados necessários à construção do pentágono em verdadeira grandeza).

## 294.

**Dados:**

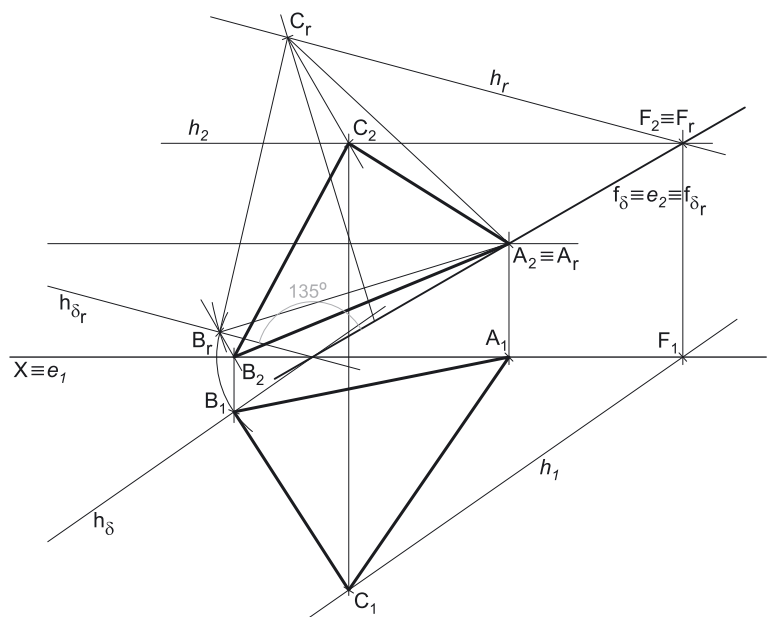
Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. Note que o ângulo  $a$  que o enunciado se refere (o ângulo que os traços do plano fazem **entre si**) não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\delta$ .

Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**, o que significa que se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si, no espaço**, antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – não se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem entre si, **na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $A$ , pertencente ao plano  $\delta$ . O ponto  $A$ , para pertencer ao plano  $\delta$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, como o ponto  $A$  tem afastamento nulo, é um ponto de  $f_{\delta}$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ) – o ponto  $A$  é, assim, o ponto de  $f_{\delta}$  que tem 3 cm de cota ( $f_{\delta}$  é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo).

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo [ABC] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\delta$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Note que não seria possível rebater o plano  $\delta$  para o Plano Horizontal de Projeção, pois não é conhecido o seu traço horizontal ( $h_\delta$ ) que, nesse caso, seria a charneira. Assim, começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $f_\delta \equiv e_2 \equiv f_{\delta_r}$  ( $e_1$ , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a  $f_\delta$ ).

O ponto  $A$  é um ponto de  $f_\delta$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_2$ .

*Representação do traço horizontal do plano  $\delta$ , em rebatimento, e construção do triângulo [ABC], em verdadeira grandeza:*

Em rebatimento, tudo o que está contido n plano  $\delta$  está em verdadeira grandeza, nomeadamente o próprio ângulo que os traços do plano fazem **entre si**. Assim, em rebatimento, já é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si**, o que nos permitiu desenhar  $h_{\delta_r}$  (fazendo um ângulo de  $135^\circ$  com  $f_{\delta_r}$ , como o enunciado refere expressamente).

Por outro lado, também já é possível construir o triângulo [ABC] em verdadeira grandeza, em rebatimento. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido) e com 8 cm de raio (o comprimento do lado do triângulo), determinou-se o ponto  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido) sobre  $h_{\delta_r}$  (o traço horizontal do plano  $\delta$  rebatido). Note que o ponto  $B$  tem cota nula (é dado no enunciado), pelo que o ponto  $B$  é necessariamente um ponto de  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ).

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o triângulo [ABC] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o terceiro vértice do polígono, em rebatimento – o ponto  $C_r$ . Note que, na construção do triângulo em rebatimento, se garantiu que o triângulo se situa, na sua totalidade, no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

*Determinação das projeções do ponto B e do traço horizontal do plano  $\delta$*

A inversão do rebatimento do ponto  $B$  permitir-nos-á desenhar o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ), pois o ponto  $B$  é um ponto do traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ).

Para inverter o rebatimento do ponto  $B$  conduziu-se, por  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal a charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $B$ ) – o ponto de interseção dessa perpendicular à charneira com o eixo  $X$  é  $B_2$  (a projeção frontal do ponto  $B$ ), pois o ponto  $B$  tem cota nula. A partir de  $B_2$ , desenhou-se a linha de chamada do ponto  $B$ , perpendicular ao eixo  $X$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é o ponto de  $h_\delta$  que é fixo, pois situa-se na charneira), e com raio até  $B_r$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à linha de chamada do ponto  $B$ , onde se situa  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ). Este procedimento permitiu-nos, também, desenhar o traço horizontal do plano  $\delta$  –  $h_\delta$  passa por  $B_1$  e é concorrente com  $f_\delta$  no eixo  $X$ . Nesse sentido,  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $B$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\delta$ .

*Determinação das projeções do ponto C e do triângulo [ABC]*

A inversão do rebatimento do ponto  $C$  processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\delta$  à qual o ponto  $C$  pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $h$ , uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$  passando pelo ponto  $C$ . A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $C_r$ ) e uma direção (é paralela a  $h_{\delta_r}$ , pois é uma reta horizontal). O ponto  $F$  é o traço frontal da reta  $h$  e situa-se no traço frontal do plano ( $f_\delta$ ), pelo que  $F_r$  se situa sobre  $f_{\delta_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h$ . O ponto  $F$  é um ponto da charneira (que é  $f_\delta$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_2 \equiv F_r$  ( $F_1$  situa-se no eixo  $X$ , pois  $F$  tem afastamento nulo). Já temos um ponto para definir a reta  $h$  em projeções – o ponto  $F$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , e retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $h$  (em projeções) – a reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ).

Em seguida, pelo ponto  $C_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira. O ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ) é  $C_2$  (a projeção frontal do ponto  $C$ ) – a projeção horizontal do ponto  $C$  ( $C_1$ ) situa-se sobre  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ), na linha de chamada de  $C_2$ .

A partir das projeções dos seis pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [ABC].

## Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano  $\delta$ ) representou-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do triângulo [ABC] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo [ABC], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. O traço horizontal do plano  $\delta$ , integrando os dados de uma forma secundária, acaba por ser meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta  $h$ , da reta  $h_r$ , dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu inverter o rebatimento de  $h_\delta$  e, ainda, do próprio  $h_{\delta_r}$ ).

## 295.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ , o que se processou de forma imediata.

O ponto **A** é um ponto com afastamento nulo, pelo que o ponto **A** é um ponto do traço frontal do plano ( $f_p$ ). Nesse sentido, desenhou-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{pr}$ ), que passa por  $A_2$  e é paralelo ao eixo  $X - f_p$  está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

O ponto **B** é um ponto com cota nula, pelo que o ponto **B** é um ponto do traço horizontal do plano ( $h_p$ ). Nesse sentido, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{pr}$ ), que passa por  $B_1$  e é paralelo ao eixo  $X - h_p$  está definido por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $f_p \equiv e_2 \equiv f_{pr}$  ( $e_1$ , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

O ponto **A** é um ponto de  $f_p$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_2$ . O rebatimento efetuado permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **A**). No entanto, caso se tivesse efetuado o rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, uma vez que o ponto **B** seria, nesse caso, um ponto da charneira, a situação seria semelhante à exposta, em termos de economia de traçados.

**Rebatimento do traço horizontal do plano  $\rho$ :**

Em seguida, é necessário rebater o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $h_p$  é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo  $X$ . Falta-nos um ponto para definir  $h_p$  em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de  $h_p$  – o ponto **B**, por exemplo. O ponto **B** tem de ser rebatido pelo triângulo do rebatimento.

Assim, por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto **B**) conduziu-se uma perpendicular à charneira – essa perpendicular à charneira corresponde ao plano de perfil (ortogonal à charneira) que contém o arco do rebatimento do ponto **B** e que é o próprio plano  $YZ$  (pois o ponto **B** tem abcissa nula). O centro do arco do rebatimento do ponto **B** (que também não se identificou) é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a própria charneira –  $f_p$ . O raio do arco do rebatimento do ponto **B** é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **B**, que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (está contida no plano de perfil). Nesse sentido, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **B** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil). Para tal conduziu-se, por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto **B**), uma paralela à charneira (que é o próprio eixo  $X$ ), para a qual se transportou o afastamento do ponto **B** com o compasso (fazendo centro em  $B_2$  e raio até  $B_{r1}$ ). Este procedimento permitiu-nos determinar  $B_{r1}$  (que é o ponto **B** rebatido pelo rebatimento do plano de perfil).

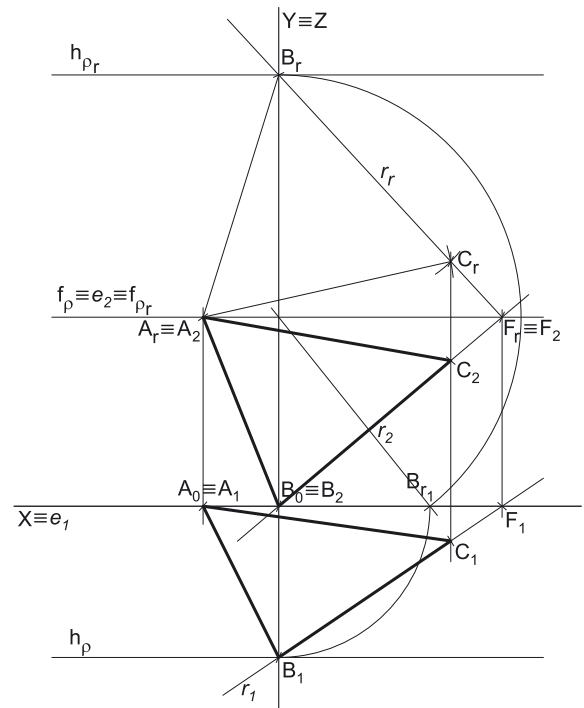
Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **B** e, com o compasso, fazendo centro na charneira e raio até  $B_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **B** (o arco  $\overline{B_r B_{r1}}$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $B_r$  (o ponto **B** rebatido). Pelo ponto  $B_r$ , conduziu-se  $h_{pr}$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ , em rebatimento), paralelo ao eixo  $X - h_{pr}$  está definido por um ponto (o ponto  $B_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

**Determinação das projeções do ponto **C** e do triângulo **[ABC]**:**

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o ponto  $C_r$ . Note que se garantiu que o ponto **C** é o vértice de menor abcissa do polígono (o seu vértice mais à direita).

A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto **C** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $r$ , uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , que é a reta suporte do lado **[BC]** do triângulo. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $B_r$  e  $C_r$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . O ponto  $F$  é o traço frontal da reta  $r$  e é um ponto de  $f_p$ , pelo que  $F_r$  (o ponto **F** rebatido) se situa sobre  $f_{pr}$ . O ponto  $F$  é um ponto da charneira (que é  $f_p$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_2 \equiv F_r$  ( $F_1$  situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto **F** tem afastamento nulo). Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções – o ponto  $F$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $r$ . Por outro lado, a reta  $r$  contém o ponto **B** (o ponto **B** é, na prática, o traço horizontal da reta  $r$ ), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – a reta  $r$  está definida por dois pontos (os pontos  $F$  e **B**). Este raciocínio permitiu-nos desenhar as projeções da reta  $r$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **F** e, com o compasso, fazendo centro na charneira e raio até  $F_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **F** (o arco  $F_{r1}F_r$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $F_r$  (o ponto **F** rebatido). Pelo ponto  $F_r$  conduziu-se  $f_{pr}$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , em rebatimento), paralelo ao eixo  $X - f_{pr}$  está definido por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

#### Rebatimento do ponto **O**:

Para rebater o ponto **O** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **O** pertença – a reta  $r$ , neste caso. Para definirmos a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **A** é um ponto da reta  $r$ , pelo que já temos um ponto (o ponto  $A_r$ ), para definirmos a reta  $r_r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, também já temos o ponto  $F_r$  (o traço frontal da reta  $r$  rebatido), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r_r - r_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $F_r$ ).

O ponto **O** é um ponto da reta  $r$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $O_r$  está sobre  $r_r$ , na perpendicular a  $h_p$  (a charneira) que passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**). Assim,  $O_r$  (o ponto **O** rebatido) é o ponto de interseção de  $r_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $O_1$ .

#### Determinação das projeções dos pontos **B**, **C** e **D** e do quadrado [ABCD]:

A partir dos pontos  $O_r$  e  $A_r$ , construiu-se o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento). Nesse sentido, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao polígono e construiu-se o quadrado em verdadeira grandeza, inscrito na circunferência e a partir do vértice conhecido ( $A_r$ ), o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $B_r$ ,  $C_r$  e  $D_r$ .

A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto **C** pertença – a própria reta  $r$ , que é a reta suporte da diagonal [AC]. Assim, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** ( $C_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), na linha de chamada de  $C_1$  (que é a própria perpendicular à charneira que passa por  $C_1$ ).

A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **D** processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$ , às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $s$ , que é a reta suporte da diagonal [BD]. A reta  $s_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $D_r$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $s$ . O ponto **H** é o traço horizontal da reta  $s$  e é um ponto de  $h_p$ , pelo que  $H_r$  (o ponto **H** rebatido) se situa sobre  $h_{pr}$ . O ponto **H** é um ponto da charneira (que é  $h_p$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_1 \equiv H_r$  ( $H_2$  situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto **H** tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $s$  em projeções – o ponto **H**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $s$ . Por outro lado, a reta  $s$  contém o ponto **O** (centro do quadrado), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $s$  em projeções – a reta  $s$  está definida por dois pontos (os pontos **H** e **O**). Este raciocínio permitiu-nos desenhar as projeções da reta  $s$ .

Em seguida, pelo ponto  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $s_r$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ) é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**). A projeção frontal do ponto **B** ( $B_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), na linha de chamada de  $B_1$  (que é a própria perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ ). Por fim, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $s_r$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto **D**). A projeção frontal do ponto **D** ( $D_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), na linha de chamada de  $D_1$  (que é a própria perpendicular à charneira que passa por  $D_1$ ).

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado [ABCD].

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os dados, nesta situação, são dois pontos cujas linhas de chamada se representam sempre a **leve**. Nesse sentido, os traços do plano  $\rho$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **médio-leve**. As duas projeções do triângulo [ABC] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo [ABC], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , das retas  $r_r$  e  $s_r$ , das perpendiculares à charneira, dos traçados necessários ao rebatimento do ponto **F**, do próprio  $f_{pr}$  e, ainda, dos traçados necessários à construção do quadrado em rebatimento).



## 297.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $P$ , pertencente ao plano  $\rho$  – o ponto  $P$  tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). O ponto  $P$  é um ponto com cota nula, pelo que o ponto  $P$  é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano ( $h_p$ ), cujas projeções se determinaram imediatamente.

Note que é dado o **ângulo** que o lado  $[PQ]$  do quadrado faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

### Resolução:

O plano que contém o quadrado  $[PQRS]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[PQRS]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado  $[PQ]$  do quadrado faz com o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções** (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{p_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

O ponto  $P$  é um ponto de  $h_p$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $P_r \equiv P_1$ . O rebatimento efetuado permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto  $P$ ).

### Rebatimento do traço frontal do plano $\rho$ :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $f_p$  é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo  $X$ . Falta-nos um ponto para definir  $f_p$  em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de  $f_p$  – um ponto  $A$ , por exemplo, que, por economia de traçados, se localizou no plano de perfil que contém o ponto  $P$ . O ponto  $A$  tem de ser rebatido pelo triângulo do rebatimento.

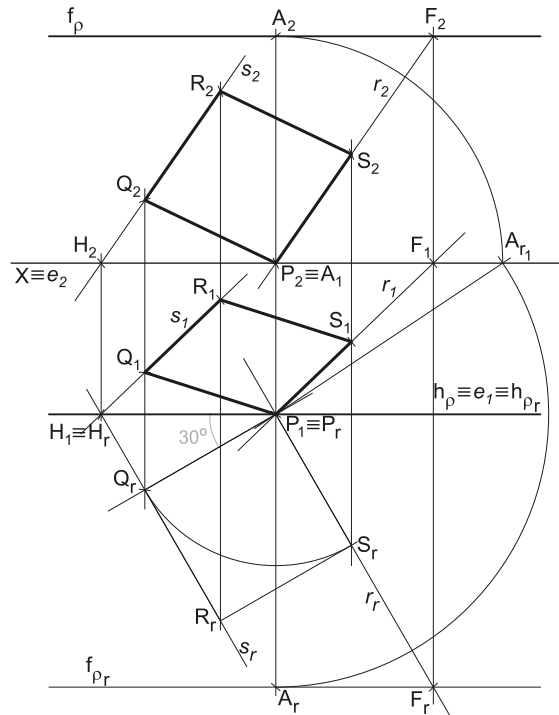
Assim, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil, ortogonal à charneira, que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ ). O centro do arco do rebatimento do ponto  $A$  (que não se identificou) é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a própria charneira –  $h_p$ . O raio do arco do rebatimento do ponto  $A$  é o comprimento da hipotenusa do triângulo do seu rebatimento, que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (está contida no plano de perfil). Nesse sentido, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil). Para tal conduziu-se, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), uma paralela à charneira (que é o próprio eixo  $X$ ), para a qual se transportou a cota do ponto  $A$  com o compasso (fazendo centro em  $A_1$  e raio até  $A_2$ ). Este procedimento permitiu-nos determinar  $A_{r_1}$  (que é o ponto  $A$  rebatido pelo rebatimento do plano de perfil).

Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $A$  e, com o compasso, fazendo centro na charneira e raio até  $A_{r_1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$  (o arco  $\overline{A_{r_1}A_r}$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido). Pelo ponto  $A_r$  conduziu-se  $f_{p_r}$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , em rebatimento), paralelo ao eixo  $X$  –  $f_{p_r}$  está definido por um ponto (o ponto  $A_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

### Construção do quadrado $[PQRS]$ em verdadeira grandeza:

Em rebatimento, já é possível construir o quadrado  $[PQRS]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento). Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de  $P_r$ , é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado  $[PQ]$  faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) – é o ângulo que o segmento  $[P_rQ_r]$  faz com  $h_{p_r}$ . Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte do lado  $[PQ]$  do quadrado, em rebatimento. Sobre a reta suporte do lado  $[PQ]$ , em rebatimento, e a partir de  $P_r$ , mediram-se os 4 cm (o comprimento do lado do quadrado) e determinou-se  $Q_r$ .

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $30^\circ$  a partir de  $P_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ponto  $Q$  se situa à esquerda do ponto  $P$  e que o quadrado se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir dos pontos  $P_r$  e  $Q_r$ , construiu-se o quadrado [PQRS] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $R_r$  e  $S_r$ . Note que também nesta construção se garantiu que o quadrado se situa, na totalidade, no espaço do 1.º Diedro.

#### Determinação das projeções do ponto S:

A inversão do rebatimento do ponto S processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto S pertença – a reta  $r$ , que é a reta suporte do lado [PS] do quadrado. A reta  $r_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $P_r$  e  $S_r$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  – ponto P. Falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto F é o traço frontal da reta  $r$  e é um ponto de  $f_{pr}$ , pelo que  $F_r$  (o ponto F rebatido) se situa sobre  $f_{pr}$ . Conduzindo, por  $F_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto F), determinaram-se as projeções do ponto F, garantindo-se que o ponto F se situa sobre  $f_p$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – a reta  $r$  está definida por dois pontos (o ponto P e o ponto F). Note que o ponto P é, na prática, o traço horizontal da reta  $r$ .

Em seguida, pelo ponto  $S_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $S_1$  (a projeção horizontal do ponto S). A projeção frontal do ponto S ( $S_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), na linha de chamada de  $S_1$  (que é a própria perpendicular à charneira que passa por  $S_r$ ).

#### Determinação das projeções dos pontos Q e R e do quadrado [PQRS]:

A inversão do rebatimento dos pontos Q e R processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$ , às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $s$ , que é a reta suporte do lado [QR]. A reta  $s_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $Q_r$  e  $R_r$ ). A reta  $s_r$  é necessariamente paralela à reta  $r_r$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $s$ . O ponto H é o traço horizontal da reta  $s$  e é um ponto de  $h_p$ , pelo que  $H_r$  (o ponto H rebatido) se situa sobre  $h_{pr}$ . O ponto H é, assim, um ponto da charneira (que é  $h_p$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_1 \equiv H_r$  ( $H_2$  situa-se no eixo X, pois o ponto H tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $s$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $s$  é paralela à reta  $r$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s$  em projeções – a reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto H) e uma direção (a direção da reta  $s$ ).

Depois, pelo ponto  $Q_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $s_1$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ) é  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto Q). A projeção frontal do ponto Q ( $Q_2$ ) situa-se sobre  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ), na linha de chamada de  $Q_1$  (que é a própria perpendicular à charneira que passa por  $Q_r$ ). Por fim, pelo ponto  $R_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $s_1$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ) é  $R_1$  (a projeção horizontal do ponto R). A projeção frontal do ponto R ( $R_2$ ) situa-se sobre  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ), na linha de chamada de  $R_1$  (que é a própria perpendicular à charneira que passa por  $R_r$ ).

A partir das projeções dos quatro pontos (P, Q, R e S), desenharam-se as projeções do quadrado [PQRS].

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado [PQRS] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado [PQRS], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , das retas  $r_r$  e  $s_r$ , das perpendiculares à charneira, dos traçados necessários ao rebatimento do ponto A, do próprio  $f_{pr}$  e, ainda, dos traçados necessários à construção do quadrado em rebatimento)

## 298.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\rho$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal a  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $A$ , pertencente ao plano  $\rho$  – o ponto  $A$  tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). O ponto  $A$  é um ponto com cota nula, pelo que o ponto  $A$  é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano ( $h_p$ ), cujas projeções se determinaram imediatamente.

Note que é dado o **ângulo** que o lado  $[AB]$  do quadrado faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

### Resolução:

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado  $[AB]$  do quadrado faz com o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{pr}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

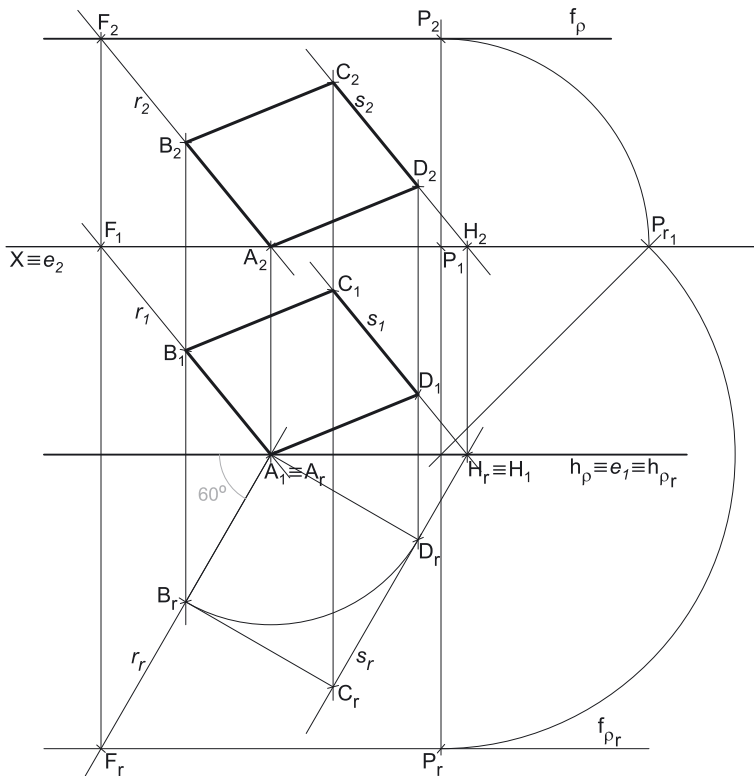
O ponto  $A$  é um ponto de  $h_p$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ . O rebatimento efetuado permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto  $A$ ).

### Rebatimento do traço frontal do plano $\rho$ :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $f_p$  é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo  $X$ . Falta-nos um ponto para definir  $f_p$  em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de  $f_p$  – um ponto  $P$ , por exemplo.

Assim, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil, ortogonal à charneira, que contém o arco do rebatimento do ponto  $P$ ). O centro do arco do rebatimento do ponto  $P$  (que não se identificou) é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a própria charneira –  $h_p$ . O raio do arco do rebatimento do ponto  $P$  é o comprimento da hipotenusa do triângulo do seu rebatimento, que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (está contida no plano de perfil). Nesse sentido, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil). Para tal, conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), uma paralela à charneira (que é o próprio eixo  $X$ ), para a qual se transportou a cota do ponto  $P$  com o compasso (fazendo centro em  $P_1$  e raio até  $P_2$ ). Este procedimento permitiu-nos determinar  $P_{r1}$  (que é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano de perfil).

Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $P$  e, com o compasso, fazendo centro na charneira e raio até  $P_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$  (o arco  $P_{r1}P_r$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido). Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se  $f_{pr}$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , em rebatimento), paralelo ao eixo  $X$  –  $f_{pr}$  está definido por um ponto (o ponto  $P_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Construção do quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza:**

Em rebatimento, já é possível construir o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento). Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de  $A_r$ , é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que o lado [AB] faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) – é o ângulo que o segmento  $[A_r B_r]$  faz com  $h_{pr}$ . Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte do lado [AB] do quadrado, em rebatimento. Sobre a reta suporte do lado [AB], em rebatimento, e a partir de  $A_r$ , mediram-se os 4,5 cm (o comprimento do lado do quadrado) e determinou-se  $B_r$ .

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $60^\circ$  a partir de  $A_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ângulo tem abertura para a esquerda e que o quadrado se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $C_r$  e  $D_r$ . Note que também nesta construção se garantiu que o quadrado se situa, na totalidade, no espaço do  $1^\circ$  Diedro.

**Determinação das projeções do ponto B:**

A inversão do rebatimento do ponto B processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto B pertença – a reta  $r$ , que é a reta suporte do lado [AB] do quadrado. A reta  $r_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $B_r$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  – ponto A (que é, na prática, o traço horizontal da reta  $r$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto F é o traço frontal da reta  $r$  e é um ponto de  $f_p$ , pelo que  $F_r$  (o ponto F rebatido) se situa sobre  $f_{pr}$ . Conduzindo, por  $F_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto F), determinaram-se as projeções do ponto F, garantindo-se que o ponto F se situa sobre  $f_p$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – a reta  $r$  está definida por dois pontos (o ponto A e o ponto F).

Em seguida, pelo ponto  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_r$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto B). A projeção frontal do ponto B ( $B_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), na linha de chamada de  $B_1$  (que é a própria perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ ).

**Determinação das projeções dos pontos C e D e do quadrado [ABCD]:**

A inversão do rebatimento dos pontos C e D processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$ , às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $s$ , que é a reta suporte do lado [CD]. A reta  $s_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $C_r$  e  $D_r$ ). A reta  $s_r$  é necessariamente paralela à reta  $r_r$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $s$ . O ponto H é o traço horizontal da reta  $s$  e é um ponto de  $h_p$ , pelo que  $H_r$  (o ponto H rebatido) se situa sobre  $h_{pr}$ . O ponto H é, assim, um ponto da charneira (que é  $h_p$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_1 \equiv H_r$  ( $H_2$  situa-se no eixo X, pois o ponto H tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $s$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $s$  é paralela à reta  $r$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s$  em projeções – a reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto H) e uma direção (a direção da reta  $r$ ).

Depois, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $s_r$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto C). A projeção frontal do ponto C ( $C_2$ ) situa-se sobre  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ), na linha de chamada de  $C_1$  (que é a própria perpendicular à charneira que passa por  $C_1$ ). Por fim, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $s_r$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto D). A projeção frontal do ponto D ( $D_2$ ) situa-se sobre  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ), na linha de chamada de  $D_1$  (que é a própria perpendicular à charneira que passa por  $D_1$ ).

A partir das projeções dos quatro pontos (A, B, C e D), desenharam-se as projeções do quadrado [ABCD].

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a médio, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado [ABCD] (o objetivo do exercício) representam-se a forte, pois são o pedido. O quadrado [ABCD], em rebatimento, representou-se a leve, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a leve, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , das retas  $r_r$  e  $s_r$ , das perpendiculares à charneira, dos traçados necessários ao rebatimento do ponto P, do próprio  $f_{pr}$ , e, ainda, dos traçados necessários à construção do quadrado em rebatimento).

## 299.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $Q$ , pertencente ao plano  $\rho$  – o ponto  $Q$  tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Nesse sentido, recorreu-se a uma reta  $r$ , oblíqua, pertencente ao plano  $\rho$ . A reta  $r$  está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços). A reta  $r$  verifica a **condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano  $\rho$ , pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\rho$ . O ponto  $O$  é o ponto da reta  $r$  com 3 cm de afastamento.

### Resolução:

O plano que contém o pentágono  $[ABCDE]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o pentágono  $[ABCDE]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do pentágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{p_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

#### Rebatimento do traço frontal do plano $\rho$ :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $f_p$  é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo  $X$ . Falta-nos um ponto para definir  $f_p$  em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de  $f_p$  – o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $r$ ), por exemplo.

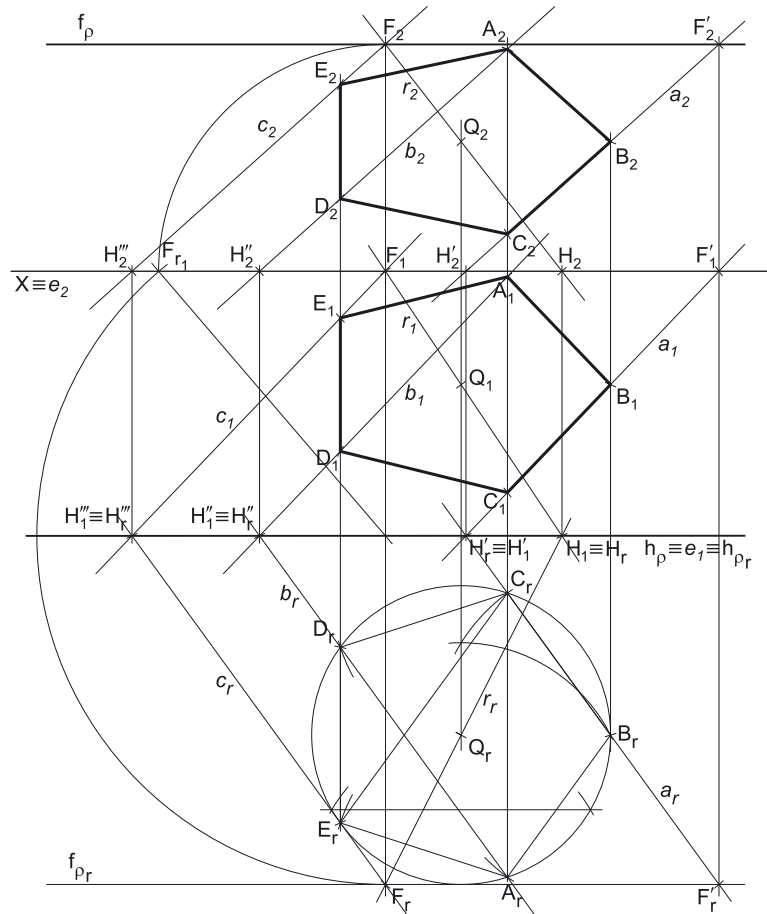
Assim, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil, ortogonal à charneira, que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ). O centro do arco do rebatimento do ponto  $F$  (que não se identificou) é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a própria charneira –  $h_p$ . O raio do arco do rebatimento do ponto  $F$  é o comprimento da hipotenusa do triângulo do seu rebatimento, que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (está contida no plano de perfil). Nesse sentido, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto  $F$  em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil). Para tal conduziu-se, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ), uma paralela à charneira (que é o próprio eixo  $X$ ), para a qual se transportou a cota do ponto  $F$  com o compasso (fazendo centro em  $F_1$  e raio até  $F_2$ ). Este procedimento permitiu-nos determinar  $F_{r1}$  (que é o ponto  $F$  rebatido pelo rebatimento do plano de perfil).

Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $F$  e, com o compasso, fazendo centro na charneira e raio até  $F_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $F$  (o arco  $F_{r1}F_r$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Pelo ponto  $F_r$  conduziu-se  $f_{p_r}$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , em rebatimento), paralelo ao eixo  $X$  –  $f_{p_r}$  está definido por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

#### Rebatimento do ponto $O$ e construção do pentágono $[ABCDE]$ em verdadeira grandeza:

Para rebater o ponto  $O$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $O$  pertença – a reta  $r$ , neste caso. Assim, para definirmos a reta  $r$  em rebatimento (a reta  $r_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto  $F_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal da reta  $r$  (o ponto  $H$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_r \equiv H_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r_r$  – a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $F_r$  e  $H_1$ ).

O ponto  $O$  é um ponto da reta  $r$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $O_r$  está sobre  $r_r$ , na perpendicular à charneira ( $h_p$ ) que passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em rebatimento, já é possível construir o pentágono **[ABCDE]** em verdadeira grandeza (em rebatimento). O enunciado refere, expressamente, que o pentágono se inscreve numa circunferência tangente ao traço horizontal do plano ( $h_{\mu}$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$ , desenhou-se uma circunferência tangente a  $h_{\mu r}$ , que é a circunferência circunscrita ao polígono.

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do pentágono em verdadeira grandeza, de acordo com os dados – sabendo que o lado de maior abscissa (o lado mais à esquerda) do pentágono é de perfil, foi possível perceber a posição da figura na circunferência. Em seguida, nomearam-se os vértices, de acordo com as indicações expressas no enunciado – **A** é o vértice de maior cota da figura (o vértice mais próximo de  $f_p$ ) e **B** o vértice de menor abscissa (o vértice mais à direita). Estas indicações foram respeitadas, em rebatimento –  $A_r$  é o vértice mais próximo de  $f_{pr}$ .

#### Determinação das projeções dos pontos **B** e **C**:

A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **C** processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$ , às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $a$ , que é a reta suporte do lado **[BC]**. A reta  $a_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $C_r$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $a$ . O ponto  $H'$  é o traço horizontal da reta  $s$  e é um ponto de  $h_{pr}$ , pelo que  $H'_r$  (o ponto  $H'$  rebatido) se situa sobre  $h_{pr}$ . O ponto  $H'$  é, assim, um ponto da charneira (que é  $h_p$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H'_1 \equiv H'_r$  ( $H'_2$  situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $H'$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto  $F'$  é o traço frontal da reta  $a$  e é um ponto de  $f_{pr}$ , pelo que  $F'_r$  (o ponto  $F'$  rebatido) se situa sobre  $f_{pr}$ . Conduzindo, por  $F'_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $F'$ ), determinaram-se as projeções do ponto  $F'$ , garantindo-se que o ponto  $F'$  se situa sobre  $f_p$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $a$  em projeções – a reta  $a$  está definida por dois pontos (os pontos  $F'$  e  $H'$ , os seus traços).

Depois, pelo ponto  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **B**), o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **B**, sobre as projeções homónimas da reta  $a$ . De forma, semelhante, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **C**), o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **C**, sobre as projeções homónimas da reta  $a$ .

#### Determinação das projeções dos pontos **A** e **D**:

A inversão do rebatimento dos pontos **A** e **D** processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$ , às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $b$ , que é a reta suporte da diagonal **[AD]**. A reta  $b_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $D_r$ ). Note que a reta  $b_r$  é necessariamente paralela à reta  $a_r$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $b$ . O ponto  $H''$  é o traço horizontal da reta  $b$  e é um ponto de  $h_{pr}$ , pelo que  $H''_r$  (o ponto  $H''$  rebatido) se situa sobre  $h_{pr}$ . O ponto  $H''$  é, assim, um ponto da charneira (que é  $h_p$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H''_1 \equiv H''_r$  ( $H''_2$  situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $H''$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $b$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$  em projeções – a reta  $b$  está definida por um ponto (o ponto  $H''$ ) e uma direção (a direção da reta  $a$ ).

Depois, pelo ponto  $A_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **A**, sobre as projeções homónimas da reta  $b$ . De forma, semelhante, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **D**, sobre as projeções homónimas da reta  $b$ .

#### Determinação das projeções do ponto **C** e do pentágono **[ABCDE]**:

A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto pertença. Optou-se por recorrer à reta  $c$ , que passa pelo ponto **C** e é paralela às retas  $a$  e  $b$ . A reta  $c_r$  está definida por um ponto (o ponto  $C_r$ ) e por uma direção (é paralela às retas  $a_r$  e  $b_r$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $c$ . O ponto  $H'''$  é o traço horizontal da reta  $c$  e é um ponto de  $h_{pr}$ , pelo que  $H'''_r$  (o ponto  $H'''$  rebatido) se situa sobre  $h_{pr}$ . O ponto  $H'''$  é, assim, um ponto da charneira (que é  $h_p$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H'''_1 \equiv H'''_r$  ( $H'''_2$  situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $H'''$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $c$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $c$  é paralela às retas  $a$  e  $b$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $c$  em projeções – a reta  $c$  está definida por um ponto (o ponto  $H'''$ ) e uma direção (a direção das retas  $a$  e  $b$ ).

Em seguida, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **C**, sobre as projeções homónimas da reta  $c$ .

Note que, **por mera casualidade**, o traço frontal da reta  $c$  acabou por ser, na prática, o traço frontal da reta  $r$  (a reta usada para se determinarem as projeções do ponto **O**). No entanto, sublinha-se que se tratou de uma casualidade, em função da reta  $r$  a que se recorreu – não aconteceria, caso a reta  $r$  tivesse outra posição.

A partir das projeções dos cinco pontos (**A**, **B**, **C**, **D** e **E**), desenharam-se as projeções do pentágono **[ABCDE]**.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do pentágono **[ABCDE]** (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O pentágono **[ABCDE]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$ ,  $a$ ,  $b$  e  $s$ , das retas  $r_r$ ,  $a_r$ ,  $b_r$  e  $c_r$ , das perpendiculares à charneira, dos traçados necessários ao rebatimento do ponto **F**, do próprio  $f_{pr}$ , e, ainda, dos traçados necessários à construção do pentágono em rebatimento).



## 300.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **D**, pertencentes ao plano  $\rho$  – os dois pontos têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **A** é um ponto com afastamento nulo, pelo que o ponto **A** é necessariamente um ponto do traço frontal do plano ( $f_\rho$ ), cujas projeções se determinaram imediatamente. O ponto **D** é um ponto com cota nula, pelo que o ponto **D** é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano ( $h_\rho$ ), cujas projeções se determinaram imediatamente. Note que se respeitou a distância entre as linhas de chamada dos dois pontos, dada no enunciado.

### Resolução:

O plano que contém o hexágono **[ABCDEF]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o hexágono **[ABCDEF]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do hexágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\rho \equiv e_1 \equiv h_{\rho_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

O ponto **D** é um ponto de  $h_\rho$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $D_r \equiv D_1$ . O rebatimento efetuado permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **D**). No entanto, caso se tivesse efetuado o rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, uma vez que o ponto **A** seria, nesse caso, um ponto da charneira, a situação seria semelhante à exposta, em termos de economia de traçados.

### Rebatimento do traço frontal do plano $\rho$ :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $f_\rho$  é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo **X**. Falta-nos um ponto para definir  $f_\rho$  em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de  $f_\rho$  – o ponto **A**, por exemplo.

Assim, por **A**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **A**) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil, ortogonal à charneira, que contém o arco do rebatimento do ponto **A**). O centro do arco do rebatimento do ponto **A** (que não se identificou) é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a própria charneira –  $h_\rho$ . O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é o comprimento da hipotenusa do triângulo do seu rebatimento, que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (está contida no plano de perfil). Nesse sentido, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil). Para tal conduziu-se, por **A**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **A**), uma paralela à charneira (que é o próprio eixo **X**), para a qual se transportou a cota do ponto **A** com o compasso (fazendo centro em **A**<sub>1</sub> e raio até **A**<sub>2</sub>). Este procedimento permitiu-nos determinar **A**<sub>r</sub> (que é o ponto **A** rebatido pelo rebatimento do plano de perfil).

Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A** e, com o compasso, fazendo centro na charneira e raio até **A**<sub>r</sub>, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco **A**<sub>r</sub>**A**<sub>1</sub>) até à perpendicular à charneira, onde se situa **A**<sub>r</sub> (o ponto **A** rebatido). Pelo ponto **A**<sub>r</sub> conduziu-se  $f_{\rho_r}$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , em rebatimento), paralelo ao eixo **X** –  $f_{\rho_r}$  está definido por um ponto (o ponto **A**<sub>r</sub>) e por uma direção (é fronto-horizontal).

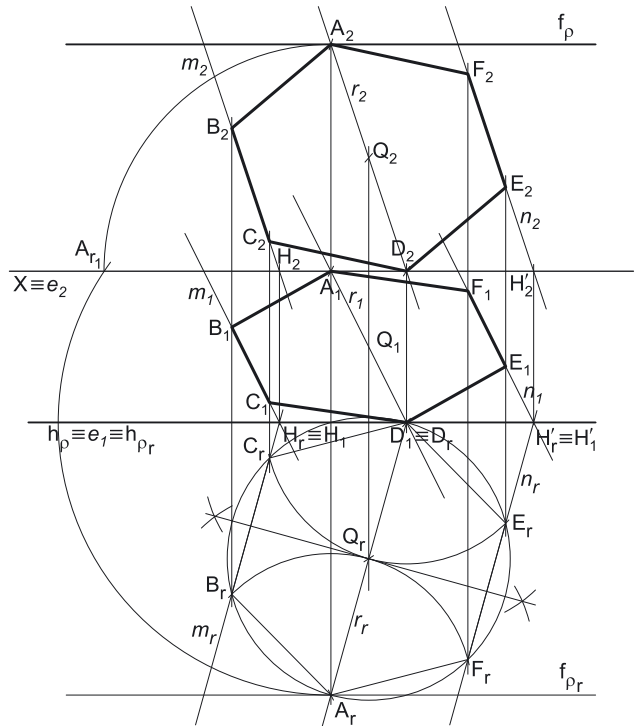
### Construção do hexágono **[ABCDEF]** em verdadeira grandeza:

Em seguida, desenhou-se o segmento **[A<sub>r</sub>D<sub>1</sub>]** (que é um diâmetro da circunferência em que o hexágono se inscreve) e determinou-se o seu ponto médio, com o recurso à construção da mediatriz do segmento. O ponto **Q**<sub>r</sub> é o ponto médio do segmento **[A<sub>r</sub>D<sub>1</sub>]** e é o centro da circunferência circunscrita ao polígono.

Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q**<sub>r</sub>, desenhou-se a circunferência que passa por **A**<sub>r</sub> e **D**<sub>1</sub> e efetuaram-se os traçados necessários à construção do hexágono em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os restantes vértices da figura, em rebatimento.

### Determinação das projeções dos pontos **B** e **C**:

A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **C** processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta **m**, que é a reta suporte do lado **[BC]** do hexágono. A reta **m** está definida por dois pontos (os pontos **B**<sub>r</sub> e **C**<sub>r</sub>) e é uma reta oblíqua do plano  $\rho$ . O ponto **H** é o traço frontal da reta **m** e situa-se no traço horizontal do plano, pelo que **H**<sub>r</sub> se situa sobre  $h_{\rho_r}$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $m$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $m$ ) é um ponto da charneira (que é  $h_p$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_1 H_r$  ( $H_2$  situa-se no eixo  $X$  pois o ponto  $H$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $m$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Poder-se-ia ter recorrido ao traço frontal da reta  $m$ , como o elemento em falta para definir a reta  $m$  (em projeções), mas optou-se por um raciocínio diferente, que resulta, na prática, em menos traçado. Nesse sentido, optou-se por recorrer a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Neste caso, recorreu-se à reta  $r$ , como reta auxiliar do plano  $\rho$  – a reta  $r$  é a reta suporte da diagonal  $[AD]$  do hexágono e está definida por dois pontos (os pontos  $A$  e  $D$ ), quer em projeções quer em rebatimento. Assim, representou-se a reta  $r$  quer em projeções, quer em rebatimento. As retas  $m$  e  $r$  são necessariamente paralelas (a diagonal  $[AD]$  é paralela ao lado  $[BC]$ ), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $m$ . A reta  $m$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $r$ ).

Em seguida, pelo ponto  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $B$ , sobre as projeções homónimas da reta  $m$ . De forma semelhante, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $C$ , sobre as projeções homónimas da reta  $m$ .

#### Determinação das projeções dos pontos $E$ e $F$ e do hexágono $[ABCDEF]$

A inversão do rebatimento dos pontos  $E$  e  $F$  processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$ , às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $n$ , que é a reta suporte do lado  $[EF]$  do hexágono. A reta  $n_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $E_r$  e  $F_r$ ). Note que a reta  $n_r$  é necessariamente paralela às retas  $m_r$  e  $r_r$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $n$ . O ponto  $H''$  é o traço horizontal da reta  $n$  e é um ponto de  $h_p$ , pelo que  $H''_r$  (o ponto  $H''$  rebatido) se situa sobre  $h_{p_r}$ . O ponto  $H''$  é, assim, um ponto da charneira (que é  $h_p$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H''_1 \equiv H''_r$  ( $H''_2$  situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $H''$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $n$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $n$  é paralela às retas  $r$  e  $m$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $n$  em projeções – a reta  $n$  está definida por um ponto (o ponto  $H''$ ) e uma direção (a direção das retas  $r$  e  $m$ ).

Depois, pelo ponto  $E_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $E$ , sobre as projeções homónimas da reta  $n$ . De forma, semelhante, pelo ponto  $F_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $F$ , sobre as projeções homónimas da reta  $n$ .

A partir das projeções dos seis pontos ( $A, B, C, D, E$  e  $F$ ), desenharam-se as projeções do hexágono  $[ABCDEF]$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do hexágono  $[ABCDEF]$  (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O hexágono  $[ABCDEF]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r, m$  e  $n$ , das retas  $r_r, m_r$  e  $n_r$ , das perpendiculares à charneira, dos traçados necessários ao rebatimento do ponto  $A$ , do próprio  $f_{p_r}$  e, ainda, dos traçados necessários à construção do hexágono em rebatimento).

## 301.

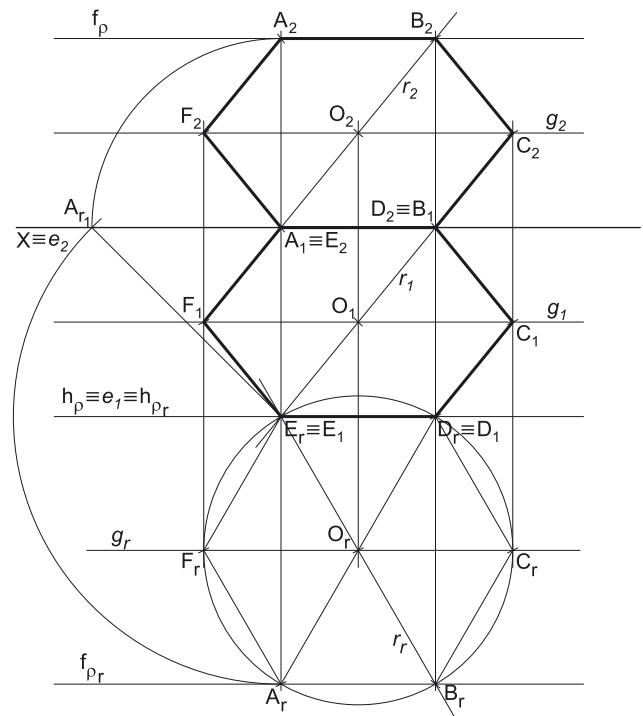
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. Um plano de rampa paralelo a  $\beta_{2/4}$  é **necessariamente** ortogonal a  $\beta_{1/3}$ . Assim, o plano  $\rho$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal a  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

Sendo dado que o lado  $[AB]$  pertence ao Plano Frontal de Projeção, sabe-se imediatamente que  $[AB]$  tem afastamento nulo, pelo que  $A$  e  $B$  são dois pontos de  $f_p$ . Por outro lado, uma vez que o lado  $[DE]$  pertence ao Plano Horizontal de Projeção, sabe-se imediatamente que  $[DE]$  tem cota nula, pelo que  $D$  e  $E$  são dois pontos de  $h_p$ . Por outro lado, ainda, sabendo que as diagonais  $[AE]$  e  $[BD]$  são de perfil, é possível representar os pontos  $A$  e  $E$  pelas respetivas projeções, pois os dois pontos têm a mesma abscissa.

Assim, determinaram-se as projeções dos pontos  $A$  e  $E$ , pertencentes ao plano  $\rho$  – os dois pontos têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano). O ponto  $A$  pertence ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o ponto  $A$  é necessariamente um ponto do traço frontal do plano ( $f_p$ ), cujas projeções se determinaram imediatamente. O ponto  $E$  pertence ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o ponto  $E$  é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano ( $h_p$ ). Atendendo a que o segmento  $[AE]$  é de perfil (como o enunciado refere expressamente), foi possível determinar as projeções do ponto  $E$ , de forma direta.

Salienta-se que não é possível representar os pontos  $B$  e  $D$ , pois não é dada a medida do lado do hexágono.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Resolução:

O plano que contém o hexágono [ABCDEF] (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o hexágono [ABCDEF] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do hexágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\rho \equiv e_1 \equiv h_{\rho r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

O ponto  $E$  é um ponto de  $h_\rho$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $E_r \equiv E_1$ . O rebatimento efetuado permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto  $E$ ). No entanto, caso se tivesse efetuado o rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, uma vez que o ponto  $A$  seria, nesse caso, um ponto da charneira, a situação seria semelhante à exposta, em termos de economia de traçados.

### Rebatimento do traço frontal do plano $\rho$ :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $f_\rho$  é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo  $X$ . Falta-nos um ponto para definir  $f_\rho$  em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de  $f_\rho$  – o ponto  $A$ , por exemplo.

Assim, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil, ortogonal à charneira, que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ ). O centro do arco do rebatimento do ponto  $A$  (que não se identificou) é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a própria charneira –  $h_\rho$ . O raio do arco do rebatimento do ponto  $A$  é o comprimento da hipotenusa do triângulo do seu rebatimento, que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (está contida no plano de perfil). Nesse sentido, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil). Para tal conduziu-se, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), uma paralela à charneira (que é o próprio eixo  $X$ ), para a qual se transportou a cota do ponto  $A$  com o compasso (fazendo centro em  $A_1$  e raio até  $A_2$ ). Este procedimento permitiu-nos determinar  $A_{r1}$  (que é o ponto  $A$  rebatido pelo rebatimento do plano de perfil).

Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $A$  e, com o compasso, fazendo centro na charneira e raio até  $A_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$  (o arco  $A_{r1}A_r$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido). Pelo ponto  $A_r$  conduziu-se  $f_{\rho r}$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , em rebatimento), paralelo ao eixo  $X$  –  $f_{\rho r}$  está definido por um ponto (o ponto  $A_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

### Construção do hexágono [ABCDEF] em verdadeira grandeza:

Em seguida, desenhou-se o segmento  $[A_rE_r]$ , que é uma diagonal do hexágono (em rebatimento). Em rebatimento, já temos dois pontos do hexágono em verdadeira grandeza – os pontos  $A_r$  e  $E_r$ , que são dois extremos de **uma das diagonais menores** do hexágono, pelo que a construção do hexágono requer um raciocínio particular.

Esse raciocínio é que a diagonal  $[AE]$  do hexágono faz, com a diagonal  $[AD]$ , um ângulo de  $30^\circ$  – a diagonal  $[AD]$  é, neste caso, uma das diagonais maiores do hexágono (porque contém dois vértices diametralmente opostos da figura) e, por isso mesmo, contém o centro da figura. Por outro lado, sabe-se que  $D$  é um ponto de  $h_\rho$ . Assim, a partir de  $A_r$  mediu-se um ângulo de  $30^\circ$  com o segmento  $[A_rE_r]$ , em verdadeira grandeza, e determinou-se  $D_r$  sobre  $h_{\rho r}$ . Uma outra forma de resolver a situação é ter em conta que a diagonal  $[AD]$ , do hexágono, faz um ângulo de  $60^\circ$  com o lado  $[AB]$ , o que nos conduziria a mesmo resultado, marcando o ângulo de  $60^\circ$  que o segmento  $[A_rD_r]$  faz com  $f_{\rho r}$ , a partir de  $A_r$ , o que nos permitiria, igualmente, determinar  $D_r$  sobre  $h_{\rho r}$ .

Atendendo a que a diagonal  $[BD]$  é de perfil (e dado no enunciado) e que  $B$  é um ponto de  $f_\rho$  (como acima se referiu), a determinação de  $B_r$  sobre  $f_{\rho r}$  é imediata. As diagonais  $[A_rD_r]$  e  $[B_rE_r]$  bisetam-se no centro do hexágono (que é o centro da circunferência circunscrita ao hexágono), o que nos permitiu determinar o ponto  $O_r$  (o ponto  $O$  é o centro da figura).

Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e raio até  $A_r$  (ou até  $B_r$  ou até  $D_r$  ou até  $E_r$ , pois todos estes pontos estão equidistantes de  $O_r$ ), desenhou-se a circunferência circunscrita ao hexágono (a circunferência passa pelos quatro pontos) e efetuaram-se os traçados necessários à construção do hexágono em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono (em rebatimento) – os pontos  $C_r$  e  $F_r$ .

### Determinação das projeções dos pontos $B$ , $D$ e $O$ :

A inversão do rebatimento dos pontos  $B$  e  $D$  processa-se de forma direta (como em seguida se expõe), pois são pontos que pertencem aos traços do plano  $\rho$ .

O ponto  $D$  é um ponto da charneira (que é  $h_\rho$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $D_1 \equiv D_r$  ( $D_2$  situa-se no eixo  $X$  pois o ponto  $D$  tem cota nula). O ponto  $B$  é um ponto de  $f_\rho$  – conduzindo, por  $B_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $B$ ), determinaram-se as projeções do ponto  $B$ , garantindo-se que o ponto  $B$  se situa sobre  $f_\rho$ .  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ), situa-se no eixo  $X$ , pois  $B$  tem afastamento nulo.

A inversão do rebatimento do ponto  $O$  processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto  $O$  pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $r$ , que é a reta suporte da diagonal  $[BE]$  do hexágono. A reta  $m_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $E_r$ ) e é uma reta oblíqua do plano  $\rho$ . Tendo em conta que já temos as projeções dos dois pontos, foi possível desenhar, de forma imediata, as projeções da reta  $r$ , passando pelas projeções homónimas dos pontos  $B$  e  $E$ .

Em seguida, pelo ponto  $O_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $O$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação do ponto **O** e desenho do círculo, em rebatimento:

Em rebatimento, é necessário começar por determinar o centro do círculo (o ponto **O**). Tendo em conta que o círculo é tangente aos dois planos de projeção (como o enunciado refere expressamente), isso quer dizer que, **no espaço**, o círculo (que está contido no plano  $\rho$ ) é tangente aos traços do plano.

Assim, o ponto **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** rebatido) tem de estar equidistante de **f<sub>pr</sub>** e de **h<sub>pr</sub>** – esta foi a premissa que nos permitiu determinar o ponto **O<sub>r</sub>**, que, por uma questão de economia de traçados, se localizou no plano de perfil que contém o ponto **A**.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>r</sub>**, desenhou-se (em rebatimento) a circunferência que delimita o círculo (em verdadeira grandeza) – essa circunferência é necessariamente tangente a **f<sub>pr</sub>** e a **h<sub>pr</sub>** (os traços do plano  $\rho$  em rebatimento), de forma a garantir que o círculo é tangente aos dois planos de projeção (como é pedido no enunciado).

## Determinação das projeções do círculo:

As **duas projeções** do círculo serão **elipses**, pois ambas as projeções do círculo estão deformadas. Assim, tratando-se de **duas elipses**, é necessário ter em conta que o desenho de cada uma requer alguns cuidados particulares, nomeadamente **um mínimo** de oito pontos e, se possível, os dois eixos (de cada uma) e um paralelogramo envolvente.

Sublinha-se que o diâmetro do círculo que **não sofre deformação em projeção frontal** (o diâmetro fronto-horizontal) é o mesmo que também **não sofre deformação em projeção horizontal**. Por outro lado, o diâmetro do círculo que **sofre a deformação máxima em projeção frontal** (o diâmetro de perfil) é o mesmo que também **sofre a deformação máxima em projeção horizontal**. Assim, os diâmetros que nos darão os eixos da elipse que é a projeção frontal da circunferência são os mesmos que nos darão os eixos da elipse que é a projeção horizontal da circunferência.

A relação mais direta entre o **objeto dado** (o círculo) e o **seu transformado** (as suas projeções) é a que existe entre o **círculo** em verdadeira grandeza e a **elipse** que é a sua projeção horizontal, sendo uma relação homológica cujo eixo de homologia é **h<sub>p</sub>** (a charneira do rebatimento). Assim, inscreveu-se o círculo num quadrado de lados paralelos ao eixo de homologia (**h<sub>p</sub>**) – o quadrado [**PQRS**]. Este quadrado, em rebatimento, é o quadrado [**P<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>R<sub>r</sub>S<sub>r</sub>**] e salienta-se que um dos seus lados (o lado [**QR**]) está contido no traço horizontal do plano (**h<sub>p</sub>**), sendo que outro lado (o lado [**PS**]) está contido no traço frontal do plano (**f<sub>p</sub>**).

Em seguida, desenharam-se as medianas e as diagonais do quadrado (em rebatimento). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado dão-nos, imediatamente, os extremos dos dois eixos das elipses – a **mediana fronto-horizontal** é o diâmetro cujas projeções são **os eixos maiores** das duas elipses, enquanto a **mediana de perfil** é o diâmetro cujas projeções são **os eixos menores** das duas elipses.

Para determinar as projeções do círculo há que, em primeiro lugar, determinar as projeções do quadrado envolvente (o quadrado em que a figura se inscreve). Os pontos **Q** e **R** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente, **R<sub>1</sub> ≡ R<sub>r</sub>** e **Q<sub>1</sub> ≡ Q<sub>r</sub>**. As projeções frontais dos pontos **Q** e **R** (**Q<sub>2</sub>** e **R<sub>2</sub>**, respetivamente), situam-se no eixo **X**, pois ambos os pontos têm cota nula (são dois pontos de **h<sub>p</sub>**).

Os pontos **P** e **S** são dois pontos de **f<sub>p</sub>** – conduzindo, por **P<sub>r</sub>** e por **S<sub>r</sub>**, as perpendiculares à charneira que por eles passam (e que correspondem aos planos de perfil que contêm os arcos do rebatimento daqueles pontos), determinaram-se as projeções dos pontos **P** e **S**, garantindo-se que ambos se situam sobre **f<sub>p</sub>**. **P<sub>1</sub>** e **S<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **P** e **S**, respetivamente), situam-se no eixo **X**, pois os dois pontos têm afastamento nulo.

A partir das projeções dos quatro vértices do quadrado, foi possível desenhar as duas projeções da figura. Em seguida, desenharam-se as projeções das diagonais do quadrado (a diagonal [**PR**] e a diagonal [**QS**]), o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **O** (o ponto **O** é o ponto em que as duas diagonais do quadrado se bisseitam – o ponto de concorrência das retas suporte das diagonais do quadrado). Note que as projeções do ponto **O** se situam na perpendicular à charneira que passa por **O<sub>r</sub>** (e que foi, também, a perpendicular à charneira que nos permitiu rebater o ponto **A**).

Por fim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções das medianas do quadrado. A **mediana fronto-horizontal** está definida por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é fronto-horizontal). A **mediana de perfil** está igualmente definida por um ponto (o ponto **O**) e uma direção (é de perfil) e está coincidente com a perpendicular à charneira que nos permitiu rebater o ponto **A** e inverter o rebatimento do ponto **O**. Os pontos em que as medianas do quadrado se apoiam nos lados do polígono (em ambas as projeções) são, imediatamente, quatro pontos de cada uma das duas **elipses** e são, também, os pontos de tangência das elipses aos lados do quadrado. Já temos **quatro pontos** para o desenho de cada uma das elipses.

Os quatro pontos que nos faltam para o desenho das duas elipses são os pontos de interseção da circunferência (que delimita o círculo) com as diagonais do quadrado – estes pontos transportaram-se, a partir do rebatimento, para as projeções das diagonais através das perpendiculares à charneira que passam pelos pontos (e que correspondem aos planos de perfil, ortogonais à charneira, que contêm os arcos do rebatimento). A partir dos **oito pontos** assim determinados, desenharam-se as **duas elipses** que são as projeções do círculo pedido.

## Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do círculo (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O círculo, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do quadrado circunscrito ao círculo, das suas medianas e diagonais, tanto em projeções como em rebatimento, das perpendiculares à charneira e, ainda, dos traçados referentes ao rebatimento do ponto **A**).





(continuação da página anterior)

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $P_1$  e raio até  $P_{r_1}$ , inverteu-se o rebatimento do plano de perfil, determinando-se  $P_2$  (note que  $\widehat{P_1 P_{r_1}}$  é a cota do ponto  $P$ ). Por fim, desenhou-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{\rho}$ ), que está definido por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). Tenha ainda em conta que se garantiu que o ponto  $P$  tem cota positiva, para que o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{\rho}$ ) se situe no **SPFS**, como o enunciado refere expressamente.

Em seguida, conclui-se o rebatimento do ponto  $P$ , de forma a rebater o traço frontal do plano  $\rho$ , como se pretendia. Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $A$  (o centro do arco do rebatimento do ponto  $P$ ) e raio até  $P_{r_1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$  (o arco  $P_{r_1} P_r$ ), em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira, onde se situa  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido). Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se  $f_{p_r}$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , em rebatimento), paralelo ao eixo  $X - f_{p_r}$ , está definido por um ponto (o ponto  $P_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

### Construção do quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza:

Em rebatimento, já é possível construir o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento). Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de  $A_r$ , é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que o lado [AB] faz com  $h_{p_r}$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) – é o ângulo que o segmento  $[A_r B_r]$  faz com  $h_{p_r}$ . Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte do lado [AB] do quadrado, em rebatimento. Sobre a reta suporte do lado [AB], em rebatimento, e a partir de  $A_r$ , mediram-se os 5 cm (o comprimento do lado do quadrado) e determinou-se  $B_r$ .

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $30^\circ$  a partir de  $A_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ângulo tem abertura para a direita e que o quadrado se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $C_r$  e  $D_r$ . Note que também nesta construção se garantiu que o quadrado se situa, na totalidade, no espaço do  $1^\circ$  Diedro.

### Determinação das projeções dos pontos B e C:

A inversão do rebatimento dos pontos  $B$  e  $C$  processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$ , às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $r$ , que é a reta suporte do lado [BC] do quadrado. A reta  $r_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $C_r$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . O ponto  $H$  é o traço horizontal da reta  $r$  e é um ponto de  $h_{p_r}$ , pelo que  $H_r$  (o ponto  $H$  rebatido) se situa sobre  $h_{p_r}$ . O ponto  $H$  é, assim, um ponto da charneira (que é  $h_p$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_1 \equiv H_r$  ( $H_2$  situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $H$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto  $F$  é o traço frontal da reta  $r$  e é um ponto de  $f_{p_r}$ , pelo que  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido) se situa sobre  $f_{p_r}$ . Conduzindo, por  $F_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ), determinaram-se as projeções do ponto  $F$ , garantindo-se que o ponto  $F$  se situa sobre  $f_p$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – a reta  $r$  está definida por dois pontos (o ponto  $H$  e o ponto  $F$ ).

Em seguida, pelo ponto  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $B$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ . De forma semelhante, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $C$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ .

### Determinação das projeções do ponto D e do quadrado [ABCD]:

A inversão do rebatimento do ponto  $D$  processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto  $D$  pertença – a reta  $s$ , que é a reta suporte do lado [AD] do quadrado. A reta  $s_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $D_r$ ). A reta  $s_r$  é necessariamente paralela à reta  $r_r$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $s$ . Já temos um ponto para definir a reta  $s$  em projeções – ponto  $A$  (que é, na prática, o traço horizontal da reta  $s$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $s$  é paralela à reta  $r$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s$  em projeções – a reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e uma direção (a direção da reta  $r$ ).

Por fim, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $D$ , sobre as projeções homónimas da reta  $s$ .

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do quadrado [ABCD].

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado [ABCD] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado [ABCD], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , das retas  $r_r$  e  $s_r$ , das perpendiculares à charneira, dos traçados necessários ao rebatimento do ponto  $P$ , do próprio  $f_{p_r}$  e, ainda, dos traçados necessários à construção do quadrado em rebatimento).

## 304.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. Note que a distância a que o enunciado se refere (a distância entre os traços do plano) não é uma distância em projeções – é uma distância **no espaço**, que está contida no plano  $\rho$ .

Por isso mesmo, essa distância **não pode ser representada em projeções**, o que significa que se trata da **distância** entre os dois traços do plano, **no espaço**, antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – não se trata da distância entre os dois traços do plano, **na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção. Assim, não é possível, de forma imediata, desenhar o traço horizontal do plano  $\rho$ . Assim, para já, o plano  $\rho$  está definido por uma única reta – o seu traço frontal ( $f_\rho$ ).

Também não é possível determinar as projeções do ponto **A**, pois o ponto **A**, tendo cota nula, é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que ainda não foi determinado. Assim, os dados do exercício não nos permitem representar qualquer outro elemento do plano, para além do seu traço frontal ( $f_\rho$ ).

Note que é dado o **ângulo** que o lado **[AB]** do quadrado faz com  $h_\rho$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

**Resolução:**

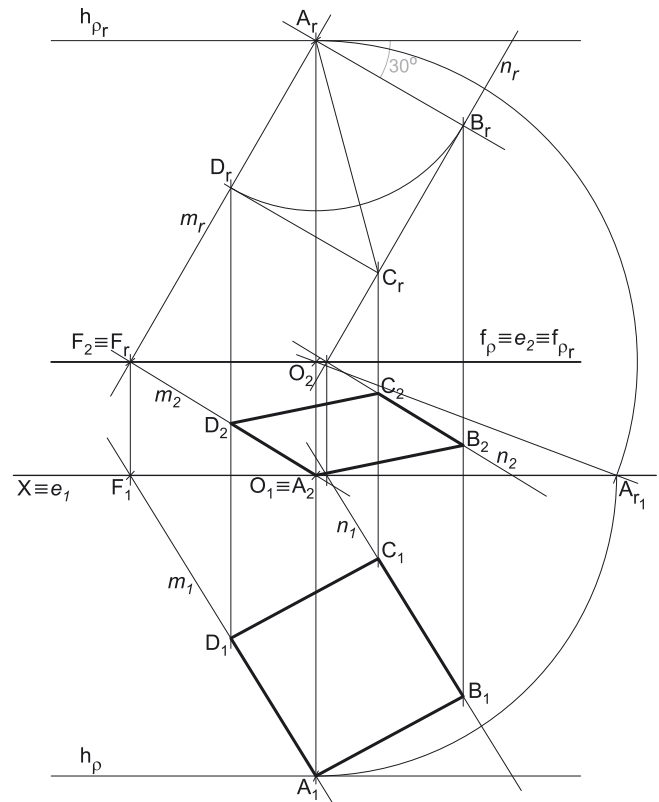
O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Por outro lado, também a **distância** entre os traços do plano **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois essa distância está contida no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também essa distância não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções da distância estão deformadas). Por fim, também o **ângulo** que o lado **[AB]** do quadrado faz com o traço horizontal do plano ( $h_\rho$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $f_\rho \equiv e_2 \equiv f_{\rho r}$  ( $e_1$ , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil. Note que não seria possível rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, pois, nessa situação, a charneira do rebatimento seria o traço horizontal do plano ( $h_\rho$ ), que não é conhecido ainda (não é dado e ainda não foi determinado).

**Rebatimento e determinação do traço horizontal do plano  $\rho$ :**

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano  $\rho$  está em verdadeira grandeza, nomeadamente a distância entre os dois traços do plano. Assim, desenhou-se  $h_{\rho r}$ , paralelo ao eixo **X** (porque é fronto-horizontal) e situado a 8,5 cm de  $f_{\rho r}$  (o traço frontal do plano  $\rho$  rebatido) – essa é a distância entre os dois traços do plano, em **verdadeira grandeza**. Em seguida, determinou-se o ponto **A** em rebatimento – o ponto **A** é um ponto do traço horizontal do plano  $\rho$  (pois o ponto **A** tem cota nula), pelo que  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) se situa sobre  $h_{\rho r}$ .



(continuação da página anterior)

Para se desenhar o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), é necessário inverter o rebatimento do ponto **A**. Para tal conduziu-se, por  $A_r$ , uma perpendicular a charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **A**), o que nos permitiu determinar, de forma imediata,  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), sobre o eixo **X** (pois o ponto **A** tem cota nula). Em seguida, determinou-se o ponto **O**, o centro do arco do rebatimento do ponto **A** – o ponto **O** é o ponto de interseção da charneira ( $f_\rho$ ) com o plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **A** (e que não se identificou). Agora há que construir o triângulo do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), de forma a ser possível determinar a projeção horizontal do ponto **A** e, dessa forma, determinar o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ).

O triângulo  $[OAA_2]$  é o triângulo do rebatimento do ponto **A** e é retângulo em  $A_2$ . Com o compasso, fazendo centro e  $O_2$  e com raio até  $A_r$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), até ao eixo **X**, onde se situa  $A_{r_1}$  –  $A_{r_1}$  é o ponto **A**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil (o plano que contém o arco do seu rebatimento). Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **A**, em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) – o triângulo  $[O_2A_{r_1}A_2]$  é o triângulo  $[OAA_2]$  em verdadeira grandeza.

Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $A_2$  e raio até  $A_{r_1}$ , inverteu-se o rebatimento do plano de perfil, determinando-se  $A_1$  sobre a perpendicular à charneira que passa por  $A_r$  (note que  $A_2A_{r_1}$  é o afastamento do ponto **A**). Este procedimento permitiu-nos, finalmente, desenhar o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é fronto-horizontal). Tenha ainda em conta que se garantiu que o ponto **A** tem afastamento positivo, para se situe no espaço do  $1^a$  Diedro (para que o quadrado se situe no  $1^a$  Diedro, como o enunciado refere expressamente).

### Construção do quadrado $[ABCD]$ em verdadeira grandeza:

Em rebatimento, já é possível construir o quadrado  $[ABCD]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento). Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de  $A_r$ , é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com  $h_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) – é o ângulo que o segmento  $[A_rB_r]$  faz com  $h_{\rho_r}$ . Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte do lado  $[AB]$  do quadrado, em rebatimento. Sobre a reta suporte do lado  $[AB]$ , em rebatimento, e a partir de  $A_r$ , mediram-se os 4,5 cm (o comprimento do lado do quadrado) e determinou-se  $B_r$ .

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $30^\circ$  a partir de  $A_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ângulo tem abertura para a direita e que o quadrado se situa no espaço do  $1^a$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o quadrado  $[ABCD]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $C_r$  e  $D_r$ . Note que também nesta construção se garantiu que o quadrado se situa, na totalidade, no espaço do  $1^a$  Diedro.

### Determinação das projeções do ponto **D**:

A inversão do rebatimento do ponto **D** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto **D** pertença – a reta  $m$ , que é a reta suporte do lado  $[AD]$  do quadrado. A reta  $m_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $D_r$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $s$ . Já temos um ponto para definir a reta  $s$  em projeções – ponto **A** (que é, na prática, o traço horizontal da reta  $s$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto **F** é o traço frontal da reta  $m$  e é um ponto de  $f_\rho$ , pelo que  $F_r$  (o ponto **F** rebatido) se situa sobre  $f_{\rho_r}$ . O ponto **F** é, assim, um ponto da charneira (que é  $f_\rho$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_2 \equiv F_r$  ( $F_1$  situa-se no eixo **X**, pois o ponto **F** tem afastamento nulo). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $m$  em projeções – a reta  $m$  está definida por dois pontos (o ponto **A** e o ponto **F**).

Em seguida, pelo ponto  $D_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira, que nos permitiu determinar as projeções do ponto **D**, sobre as projeções homónimas da reta  $m$ .

### Determinação das projeções dos pontos **B** e **C** e do quadrado $[ABCD]$

A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **C** processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$ , às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $n$ , que é a reta suporte do lado  $[BC]$  do quadrado. A reta  $n_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $C_r$ ). Note que a reta  $n_r$  é paralela à reta  $m_r$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $n$ . O ponto  $F'$  é o traço frontal da reta  $n$  e é um ponto de  $f_\rho$ , pelo que  $F'_r$  (o ponto **F'** rebatido) se situa sobre  $f_{\rho_r}$ . O ponto  $F'$  é, assim, um ponto da charneira (que é  $f_\rho$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F'_2 \equiv F'_r$  ( $F'_1$  situa-se no eixo **X**, pois o ponto  $F'$  tem afastamento nulo). Já temos um ponto para definir a reta  $n$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $n$  é paralela à reta  $m$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $n$  em projeções – a reta  $n$  está definida por um ponto (o ponto  $F'$ ) e uma direção (a direção da reta  $m$ ).

Em seguida, pelo ponto  $B_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira, que nos permitiu determinar as projeções do ponto **B**, sobre as projeções homónimas da reta  $n$ . De forma semelhante, pelo ponto  $C_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira, que nos permitiu determinar as projeções do ponto **C**, sobre as projeções homónimas da reta  $n$ .

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado  $[ABCD]$ .

### Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). No contexto do exercício, o traço horizontal do plano ( $h_\rho$ ), que não é dado de forma direta, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **médio-leve**. As duas projeções do quadrado  $[ABCD]$  (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $m$  e  $n$ , das retas  $m_r$  e  $n_r$ , das perpendiculares à charneira, dos traçados necessários à inversão do rebatimento do ponto **A**, do próprio  $h_\rho$  e, ainda, dos traçados necessários à construção do quadrado em rebatimento).

## 305.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. Note que a distância a que o enunciado se refere (a distância entre os traços do plano) não é uma distância em projeções – é uma distância **no espaço**, que está contida no plano  $\rho$ .

Por isso mesmo, essa distância **não pode ser representada em projeções**, o que significa que se trata da **distância** entre os dois traços do plano, **no espaço**, antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – não se trata da distância entre os dois traços do plano, **na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção. Assim, não é possível, de forma imediata, desenhar o traço frontal do plano  $\rho$ . Assim, para já, o plano  $\rho$  está definido por uma única reta – o seu traço horizontal ( $h_p$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **A**, pertencente ao plano  $\rho$  – o ponto **A** tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). O ponto **A** é um ponto com cota nula, pelo que o ponto **A** é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano ( $h_p$ ), cujas projeções se determinaram imediatamente.

Note que é dado o **ângulo** que o lado **[AB]** do triângulo faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Por outro lado, também a **distância** entre os traços do plano **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois essa distância está contida no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também essa distância não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções da distância estão deformadas). Por fim, também o **ângulo** que o lado **[AB]** do triângulo faz com o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio triângulo, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do triângulo (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

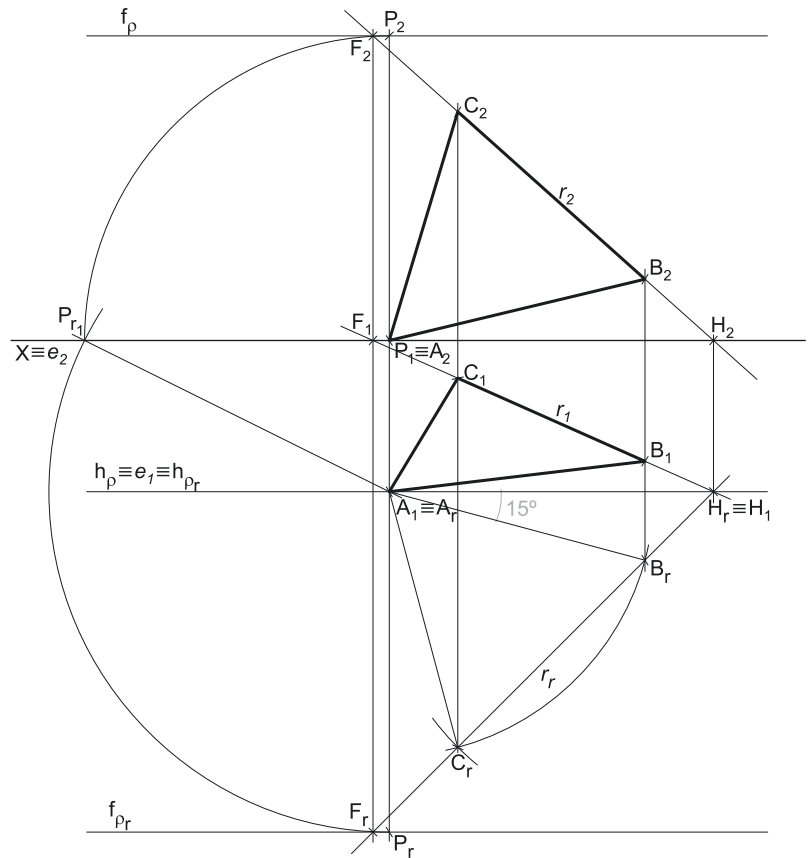
De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano ( $h_p$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{p_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil. Note que não seria possível rebater o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção, pois, nessa situação, a charneira do rebatimento seria o traço frontal do plano ( $f_p$ ), que não é conhecido ainda (não é dado e ainda não foi determinado).

O ponto **A** é um ponto de  $h_p$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ . Note que não seria possível rebater o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção, pois, nessa situação, a charneira do rebatimento seria o traço frontal do plano ( $f_p$ ), que não é conhecido ainda (não é dado e ainda não foi determinado).

**Rebatimento e determinação do traço frontal do plano  $\rho$ :**

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano  $\rho$  está em verdadeira grandeza, nomeadamente a distância entre os dois traços do plano. Assim, desenhou-se  $f_{p_r}$  paralelo ao eixo **X** (porque é fronto-horizontal) e situado a 9 cm de  $h_{p_r}$  (o traço horizontal do plano  $\rho$  rebatido) – essa é a distância entre os dois traços do plano, em **verdadeira grandeza**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para se desenhar o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), é necessário inverter o rebatimento de um ponto qualquer de  $f_\pi$  – um ponto  $P$ , qualquer. Nesse sentido, determinou-se, em rebatimento, um ponto  $P$  do traço frontal do plano – o ponto  $P_r$  (que, por uma questão de economia de traçados, se localizou no plano de perfil que contém o ponto  $A$ ). Em seguida, há que inverter o rebatimento do ponto  $P$ . Para tal conduziu-se, por  $P_r$ , uma perpendicular a charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $P$ ), o que nos permitiu determinar, de forma imediata,  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), sobre o eixo  $X$  (pois o ponto  $P$  tem afastamento nulo). Nesta situação, o ponto  $A$  é, de forma imediata, o centro do arco do rebatimento do ponto  $P$  – o ponto  $A$  é o ponto de interseção da charneira ( $h_p$ ) com o plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $P$  (e que não se identificou). Agora há que construir o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), de forma a ser possível determinar a projeção frontal do ponto  $P$  e, dessa forma, determinar o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ).

O triângulo  $[APP_1]$  é o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  e é retângulo em  $P_1$ . Com o compasso, fazendo centro e  $A_1$  e com raio até  $P_r$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), até ao eixo  $X$ , onde se situa  $P_{r1} - P_{r1}$  é o ponto  $P$ , rebatido pelo rebatimento do plano de perfil (o plano que contém o arco do seu rebatimento). Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) – o triângulo  $[A_1P_{r1}P_1]$  é o triângulo  $[APP_1]$  em verdadeira grandeza.

Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $P_1$  e raio até  $P_{r1}$ , inverteu-se o rebatimento do plano de perfil, determinando-se  $P_2$  sobre a perpendicular à charneira que passa por  $P_r$  (note que  $P_1P_{r1}$  é a cota do ponto  $P$ ). Este procedimento permitiu-nos, finalmente, desenhar o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que está definido por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). Tenha ainda em conta que se garantiu que o ponto  $P$  tem cota positiva, para se situe no espaço do  $1^a$  Diedro (para que o triângulo se situe no  $1^a$  Diedro, como o enunciado refere expressamente).

### Construção do triângulo $[ABC]$ em verdadeira grandeza:

Em rebatimento, já é possível construir o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento). Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de  $A_r$ , é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) – é o ângulo que o segmento  $[A_rB_r]$  faz com  $h_{p_r}$ . Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte do lado  $[AB]$  do triângulo, em rebatimento. Sobre a reta suporte do lado  $[AB]$ , em rebatimento, e a partir de  $A_r$ , mediram-se os 7 cm (o comprimento do lado do triângulo) e determinou-se  $B_r$ .

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $15^\circ$  a partir de  $A_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ponto  $B$  se situa à direita do ponto  $A$  e que o triângulo se situa no espaço do  $1^a$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o terceiro vértice do polígono, em rebatimento – o ponto  $C_r$ . Note que também nesta construção se garantiu que o triângulo se situa, na totalidade, no espaço do  $1^a$  Diedro.

### Determinação das projeções dos pontos $B$ e $C$ e do triângulo $[ABC]$

A inversão do rebatimento dos pontos  $B$  e  $C$  processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$ , às quais aqueles pontos pertencam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $r$ , que é a reta suporte do lado  $[BC]$  do triângulo. A reta  $r_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $C_r$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . O ponto  $H$  é o traço horizontal da reta  $r$  e é um ponto de  $h_p$ , pelo que  $H_r$  (o ponto  $H$  rebatido) se situa sobre  $h_{p_r}$ . O ponto  $H$  é, assim, um ponto da charneira (que é  $h_p$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_1 \equiv H_r$  ( $H_2$  situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $H$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto  $F$  é o traço frontal da reta  $r$  e é um ponto de  $f_p$ , pelo que  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido) se situa sobre  $f_{p_r}$ . Conduzindo, por  $F_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ), determinaram-se as projeções do ponto  $F$ , garantindo-se que o ponto  $F$  se situa sobre  $f_p$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – a reta  $r$  está definida por dois pontos (o ponto  $H$  e o ponto  $F$ ).

Em seguida, pelo ponto  $B_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira, que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $B$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ . De forma semelhante, pelo ponto  $C_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira, que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $C$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ .

A partir das projeções dos três pontos ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ), desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .

### Traçado:

Os dados (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). No contexto do exercício, o traço frontal do plano ( $f_p$ ), que não é dado de forma direta, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **médio-leve**. As duas projeções do triângulo  $[ABC]$  (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta  $r$ , da reta  $r_r$ , das perpendiculares à charneira, dos traçados necessários à inversão do rebatimento do ponto  $P$ , do próprio  $f_{p_r}$ , e, ainda, dos traçados necessários à construção do triângulo em rebatimento).

## 306.

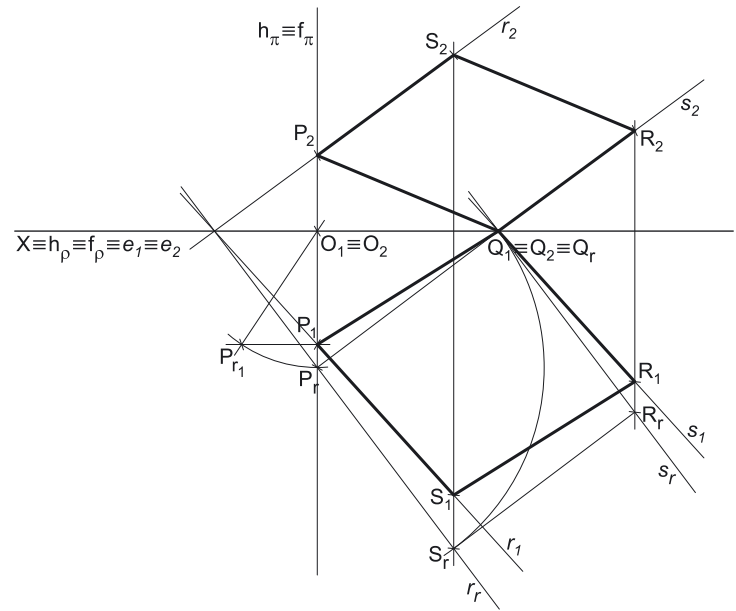
**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **P**.

**Resolução:**

O plano que contém o quadrado **[PQRS]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[PQRS]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano passante, pelo rebatimento das suas retas (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Optemos por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente  $X \equiv h_\rho \equiv f_\rho \equiv e_1 \equiv e_2$  (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

**Rebatimento do ponto P:**

Efetuu-se o rebatimento do ponto **P**. Nesse sentido, conduziu-se, pelo ponto **P**, o plano de perfil  $\pi$ , que se representou pelos seus traços. O plano  $\pi$  é o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **P**. O centro do arco do rebatimento do ponto **P** é o ponto **O** (o ponto de interseção do plano  $\pi$  com a charneira do rebatimento – o eixo **X**). O raio do arco do rebatimento do ponto **P** é  $\overline{OP}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **P**, que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, é necessário recorrer ao rebatimento do plano  $\pi$  (o plano que contém o triângulo do rebatimento do ponto **P**), com vista à construção do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. O triângulo do rebatimento do ponto **P** é o triângulo retângulo **[OPP<sub>1</sub>]**.

Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto **P** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano  $\pi$ ) conduziu-se, por **P<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **P**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **P** (que é um dos catetos do triângulo **[OPP<sub>1</sub>]**), o que nos permitiu determinar o ponto **P<sub>r1</sub>** (que é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano  $\pi$ ). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[OP<sub>r1</sub>]** (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e raio  $\overline{OP<sub>r1</sub>}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **P** (o arco **P<sub>r1</sub>P<sub>r</sub>**) até  $h_\pi$ , onde se situa **P<sub>r</sub>** (o ponto **P** rebatido).

**Construção do quadrado [PQRS] em verdadeira grandeza:**

Em seguida, efetuaram-se os procedimentos necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento. Com o compasso, fazendo centro em **P<sub>r</sub>** e com 6 cm de raio, determinou-se o ponto **Q<sub>r</sub>**, no eixo **X** – uma vez que o vértice **Q**, do quadrado, se situa no eixo **X**, **Q<sub>r</sub>** é o ponto do eixo **X** tal que  $\overline{P<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>} = 6$  cm (a medida do lado do polígono). A partir de **P<sub>r</sub>** e de **Q<sub>r</sub>**, construiu-se o quadrado **[P<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>R<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]**, o que nos permitiu determinar os pontos **R<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**.

Note que se garantiu que o quadrado se situa, na totalidade, no espaço do 1ª Diedro, como o enunciado refere expressamente.

**Determinação das projeções do ponto S:**

A inversão do rebatimento do ponto **S** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **S** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta **r**, uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , passando pelo ponto **P** (a reta **r** é a reta suporte do lado **[PS]** do quadrado). A reta **r<sub>r</sub>** (a reta **r** rebatida) está definida por dois pontos – os pontos **P<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**.

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **r**. A reta **r** passa pelo ponto **P**, cujas projeções são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta **r** em projeções – o ponto **P**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **r** é necessariamente uma reta passante, pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – note que não se identificou esse ponto. Assim, já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **r** em projeções – o seu ponto de concorrência com o eixo **X**. Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta **r**, que está definida por dois pontos – o ponto **P** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**.

Por fim, pelo ponto **S<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **r<sub>r</sub>** (a projeção horizontal da reta **r**) é **S<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **S**). A projeção frontal do ponto **S** (**S<sub>2</sub>**) situa-se sobre **r<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **r**).

**Determinação das projeções dos pontos Q e R e do quadrado [PQRS]:**

O ponto **Q** é um ponto da charneira (o eixo **X**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $Q_1 \equiv Q_2 \equiv Q_r$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento do ponto **R** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **R** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta **s**, uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , passando pelo ponto **R** e paralela à reta **r** (note que a reta **s** é a reta suporte do lado **[QR]** do quadrado). A reta **s<sub>r</sub>** (a reta **s** rebatida) está definida por dois pontos – os pontos **Q<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**.

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **s**. A reta **s** é necessariamente uma reta passante – é uma reta concorrente com o eixo **X** no ponto **Q** (um dos vértices do quadrado), cujas projeções já se determinaram. Assim, já temos um ponto para definir a reta **s** em projeções – o ponto **Q**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **s** é paralela à reta **r**, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **s** – a direção da reta **r**. Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta **s**, que está definida por um ponto (o ponto **Q**) e uma direção (a direção da reta **r**). Por fim, pelo ponto **R<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **s<sub>r</sub>** (a projeção horizontal da reta **s**) é **R<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **R**). A projeção frontal do ponto **R** (**R<sub>2</sub>**) situa-se sobre **s<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **s**).

A partir das projeções dos quatro pontos (**P**, **Q**, **R** e **S**), desenharam-se as projeções do quadrado **[PQRS]**.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ . As duas projeções do quadrado **[PQRS]** (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado **[PQRS]**, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **r** e **s**, das retas **r<sub>r</sub>** e **s<sub>r</sub>**, dos planos ortogonais à charneira e dos traçados necessários ao rebatimento do ponto **P**).

## 307.

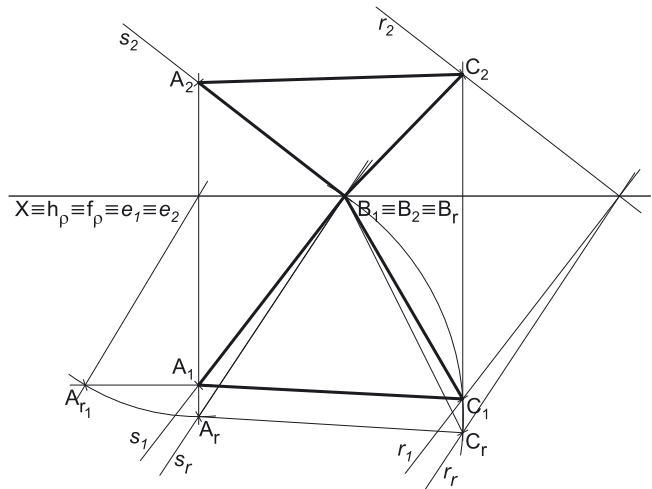
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**.

### Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano passante, pelo rebatimento das suas retas (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Optemos por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  (**h<sub>p</sub>**), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente **X ≡ h<sub>p</sub> ≡ f<sub>p</sub> ≡ e<sub>1</sub> ≡ e<sub>2</sub>** (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.



### Rebatimento do ponto A:

Efetuuou-se o rebatimento do ponto **A**. Pelo ponto **A** conduziu-se uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto **A** (note que não se identificou esse plano, com vista a uma simplificação da resolução gráfica, em termos de notações utilizadas). O centro do arco do rebatimento do ponto **A** é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com o eixo **X** (que é a charneira do rebatimento). O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A**, que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, é necessário recorrer ao rebatimento do plano de perfil (o plano que contém o triângulo do rebatimento do ponto **A**), com vista à construção do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza.

Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) conduziu-se, por **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **A** (que é um dos catetos do triângulo do rebatimento do ponto **A**), o que nos permitiu determinar o ponto **A<sub>r1</sub>** – **A<sub>r1</sub>** é o ponto **A**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil. Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento (em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio até **A<sub>r1</sub>**, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco **A<sub>r1</sub>A<sub>r</sub>**) até à perpendicular à charneira que passa por **A<sub>1</sub>**, que é onde se situa **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido).

### Construção do triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza:

Em seguida, efetuaram-se os procedimentos necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento. Com o compasso, fazendo centro em **A<sub>r</sub>** e com 7 cm de raio, determinou-se o ponto **B<sub>r</sub>**, no eixo **X** – uma vez que o vértice **B**, do triângulo, se situa no eixo **X**, **B<sub>r</sub>** é o ponto do eixo **X** tal que **A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>** = 7 cm (a medida do lado do polígono). A partir de **A<sub>r</sub>** e de **B<sub>r</sub>** construiu-se o triângulo **[ABC]** em rebatimento (o triângulo **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>C<sub>r</sub>]**), o que nos permitiu determinar o ponto **C<sub>r</sub>**.

Note que se garantiu que o triângulo se situa, na totalidade, no espaço do 1<sup>o</sup> Diedro, como o enunciado refere expressamente.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das projeções dos pontos B e C e do triângulo [ABC]:

O ponto B é um ponto da charneira (o eixo X), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $B_1 \equiv B_2 \equiv B_r$ .

A inversão do rebatimento do ponto C processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto C pertença. Já temos um ponto para definir a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesta situação, os dados do plano revelam-se insuficientes para, de uma forma direta, determinarmos o elemento em falta para definir a reta  $r_r$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $s_r$ , como reta auxiliar do plano  $\rho$  – a reta  $s$  é a reta suporte do lado [AB] do triângulo e está definida por dois pontos (os pontos A e B), quer em projeções quer em rebatimento. Assim, representou-se a reta  $s$  de forma direta, tanto em projeções como em rebatimento.

Em seguida, desenhou-se a reta  $r_r$ , passando por  $C_r$  e paralela à reta  $s_r$  – a reta  $r_r$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $C_r$ ) e por uma direção (a direção da reta  $r_r$ ). A reta  $s$  é necessariamente uma reta passante (pois é uma reta oblíqua contida num plano passante), pelo que é concorrente com o eixo X num ponto (que não se identificou). Esse ponto, porque é um ponto da charneira, roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção.

As retas  $r$  e  $s$  são duas retas paralelas (como atrás se referiu), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$ . A reta  $r$  está, assim, definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo X) e por uma direção (é paralela à reta  $s$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $r$ .

Por fim, pelo ponto  $C_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto C). A projeção frontal do ponto C ( $C_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

A partir das projeções dos três pontos (A, B e C), desenharam-se as projeções do triângulo [ABC].

#### Traçado:

O eixo X representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ . As duas projeções do triângulo [ABC] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo [ABC], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , das retas  $r_r$  e  $s_r$ , dos planos ortogonais à charneira e dos traçados necessários ao rebatimento do ponto A).

## 308.

#### Dados:

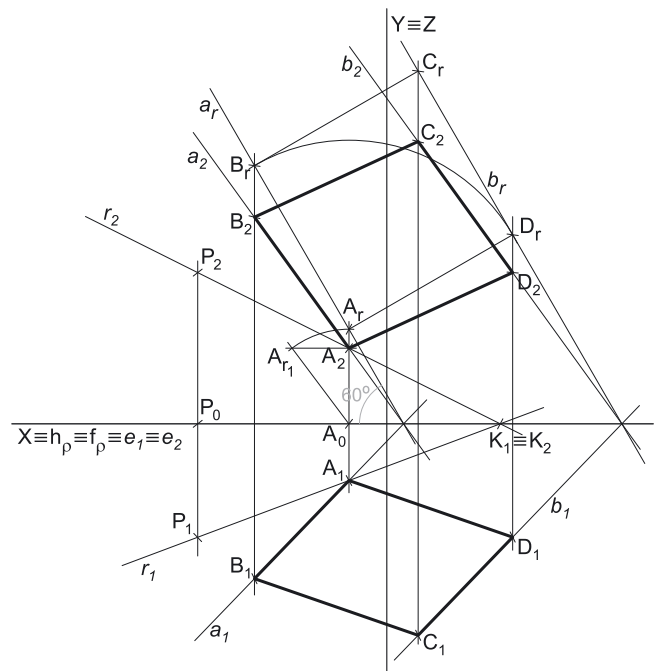
Em primeiro lugar, representou-se o ponto P, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo X (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto P. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção frontal do ponto A ( $A_2$ ).

Em seguida, determinou-se a projeção horizontal do ponto A, pertencentes ao plano  $\rho$  – o ponto A, para pertencer ao plano  $\rho$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Nesse sentido, recorreu-se à reta  $r$ , pertencente ao plano  $\rho$ , cuja projeção frontal ( $r_2$ ) passa pelas projeções frontais dos pontos P e A ( $P_2$  e  $A_2$ , respetivamente). A reta  $r$  é uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , pelo que é necessariamente uma reta passante. Assim, a reta  $r$  está definida por dois pontos – o ponto P (dado no enunciado) e o seu ponto de concorrência com o eixo X (o ponto K). Este procedimento permitiu-nos desenhar a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ) e, em seguida, determinar a projeção horizontal do ponto A ( $A_1$ ), sobre a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), na linha de chamada de  $A_2$ .

Note que é dado o **ângulo** que o lado [AB] do quadrado faz com o eixo X, mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

#### Resolução:

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado [ABCD] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado [AB] do quadrado faz com o eixo X **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano passante, pelo rebatimento das suas retas (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Optemos por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), que se situa no eixo  $X$ , pelo que se tem imediatamente  $X \equiv f_\rho \equiv h_\rho \equiv e_1 \equiv e_2$  (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

### Rebatimento do ponto $A$ :

Efetuiu-se o rebatimento do ponto  $A$ . Pelo ponto  $A$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$  (note que não se identificou esse plano, com vista a uma simplificação da resolução gráfica, em termos de notações utilizadas). O centro do arco do rebatimento do ponto  $A$  é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com o eixo  $X$  (que é a charneira do rebatimento). O raio do arco do rebatimento do ponto  $A$  é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $A$ , que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, é necessário recorrer ao rebatimento do plano de perfil (o plano que contém o triângulo do rebatimento do ponto  $A$ ), com vista à construção do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza.

Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) conduziu-se, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou o afastamento do ponto  $A$  (que é um dos catetos do triângulo do rebatimento do ponto  $A$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $A_{r1}$  –  $A_{r1}$  é o ponto  $A$ , rebatido pelo rebatimento do plano de perfil. Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento (em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio até  $A_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$  (o arco  $A_r A_r$ ) até à perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , que é onde se situa  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido).

### Construção do quadrado $[ABCD]$ em verdadeira grandeza:

Em seguida, efetuaram-se os procedimentos necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento. Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de  $A_r$ , é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com o eixo  $X$  – é o ângulo que o segmento  $[A_r B_r]$  faz com o eixo  $X$ . Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte do lado  $[AB]$  do quadrado, em rebatimento. Sobre a reta suporte do lado  $[AB]$ , em rebatimento, e a partir de  $A_r$ , mediram-se os 5 cm (o comprimento do lado do quadrado) e determinou-se  $B_r$ .

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $60^\circ$  a partir de  $A_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ângulo tem abertura para a esquerda, como o enunciado refere expressamente. Note ainda que os 5 cm (a medida do lado do quadrado) se mediram no sentido de garantir que o quadrado se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado pede de forma inequívoca.

A partir de  $A_r$  e de  $B_r$  construiu-se o quadrado  $[ABCD]$  em rebatimento (o quadrado  $[A_r B_r C_r D_r]$ ), o que nos permitiu determinar os pontos  $C_r$  e  $D_r$ . Note que se garantiu que o quadrado se situa, na totalidade, no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

### Determinação das projeções do ponto $B$ :

A inversão do rebatimento do ponto  $B$  processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  a qual o ponto  $B$  pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $a$ , uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , passando pelo ponto  $B$  (a reta  $a$  é a reta suporte do lado  $[AB]$  do quadrado). A reta  $a_r$  (a reta  $a$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $B_r$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $a$ . A reta  $a$  passa pelo ponto  $A$ , cujas projeções são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $a$  em projeções – o ponto  $A$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $a$  é necessariamente uma reta passante, pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – note que não se identificou esse ponto. Assim, já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $a$  em projeções – o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $a$ , que está definida por dois pontos – o ponto  $A$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ .

Por fim, pelo ponto  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto  $B$ , sobre as projeções homónimas da reta  $a$ .

### Determinação das projeções dos pontos $C$ e $D$ e do quadrado $[ABCD]$ :

A inversão do rebatimento dos pontos  $C$  e  $D$  processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $b$ , que é a reta suporte do lado  $[CD]$  do quadrado. A reta  $b_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $C_r$  e  $D_r$ ) e é necessariamente paralela à reta  $a_r$ .

A reta  $b$  é necessariamente uma reta passante – é uma reta concorrente com o eixo  $X$  num ponto (que não se identificou). O ponto de concorrência da reta  $b$  com o eixo  $X$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $b$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$  – a direção da reta  $a$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $b$ , que está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ) e uma direção (a direção da reta  $a$ ).

Em seguida, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto  $C$ , sobre as projeções homónimas da reta  $b$ . De forma semelhante, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto  $D$ , sobre as projeções homónimas da reta  $b$ .

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do quadrado  $[ABCD]$ .

### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ . As duas projeções do quadrado  $[ABCD]$  (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$ ,  $a$  e  $b$ , das retas  $a_r$  e  $b_r$ , dos planos ortogonais à charneira e dos traçados necessários ao rebatimento do ponto  $A$ ).

## 309.

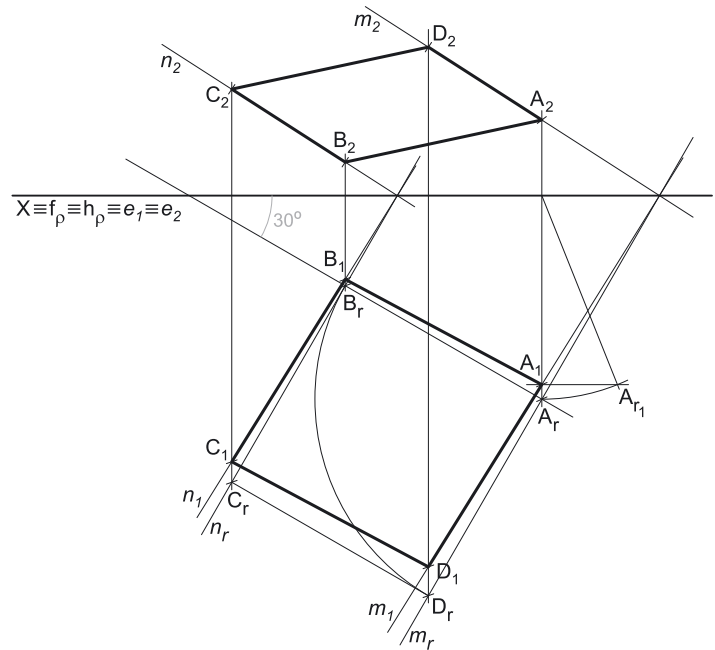
**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**.

Note que é dado o **ângulo** que o lado **[AB]** do quadrado faz com o eixo **X**, mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

**Resolução:**

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado **[AB]** do quadrado faz com o eixo **X** **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.



De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano passante, pelo rebatimento das suas retas (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Optemos por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente  $X \equiv f_\rho \equiv h_\rho \equiv e_1 \equiv e_2$  (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

**Rebatimento do ponto A:**

Efetuu-se o rebatimento do ponto **A**. Pelo ponto **A** conduziu-se uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto **A** (note que não se identificou esse plano, com vista a uma simplificação da resolução gráfica, em termos de notações utilizadas). O centro do arco do rebatimento do ponto **A** é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com o eixo **X** (que é a charneira do rebatimento). O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A**, que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, é necessário recorrer ao rebatimento do plano de perfil (o plano que contém o triângulo do rebatimento do ponto **A**), com vista à construção do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza.

Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) conduziu-se, por **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **A** (que é um dos catetos do triângulo do rebatimento do ponto **A**), o que nos permitiu determinar o ponto **A<sub>r1</sub>** – **A<sub>r1</sub>** é o ponto **A**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil. Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento (em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio até **A<sub>r1</sub>**, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco **A<sub>r</sub>A<sub>r1</sub>**) até à perpendicular à charneira que passa por **A<sub>1</sub>**, que é onde se situa **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido).

**Construção do quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza:**

Em seguida, efetuaram-se os procedimentos necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento. Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de **A<sub>r</sub>**, é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado **[AB]** faz com o eixo **X** – é o ângulo que o segmento **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** faz com o eixo **X**. Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte do lado **[AB]** do quadrado, em rebatimento. Sobre a reta suporte do lado **[AB]**, em rebatimento, e a partir de **A<sub>r</sub>**, mediram-se os 6 cm (o comprimento do lado do quadrado) e determinou-se **B<sub>r</sub>**.

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de 30° a partir de **A<sub>r</sub>**, aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ângulo tem abertura para a direita, como o enunciado refere expressamente. Note ainda que os 6 cm (a medida do lado do quadrado) se mediram no sentido de garantir que o vértice **B** é o vértice mais à direita do quadrado, como o enunciado refere expressamente.

A partir de **A<sub>r</sub>** e de **B<sub>r</sub>** construiu-se o quadrado **[ABCD]** em rebatimento (o quadrado **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>C<sub>r</sub>D<sub>r</sub>]**), o que nos permitiu determinar os pontos **C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**. Note que se garantiu que o quadrado se situa, na totalidade, no espaço do 1.<sup>a</sup> Diedro, como o enunciado pede de forma inequívoca.

**Determinação das projeções do ponto D:**

A inversão do rebatimento do ponto **D** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **D** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta **m**, uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , passando pelo ponto **D** (a reta **m** é a reta suporte do lado **[AD]** do quadrado). A reta **m<sub>r</sub>** (a reta **m** rebatida) está definida por dois pontos – os pontos **A<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

#### Rebatimento do ponto **R**:

Efetuiu-se o rebatimento do ponto **R**. Nesse sentido, conduziu-se, pelo ponto **R**, uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (um plano de perfil) que contem o arco do rebatimento do ponto **R**. Note que não se identificou esse plano, com vista a uma desejável simplificação da resolução gráfica, em termos do recurso a notações. O centro do arco do rebatimento do ponto **R** é o ponto **O** (o ponto de interseção da perpendicular à charneira com própria a charneira do rebatimento – o eixo **X**). O raio do arco do rebatimento do ponto **R** é  $\overline{OR}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **R**, que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, é necessário recorrer ao rebatimento do plano de perfil (o plano que contém o triângulo do rebatimento do ponto **R**), com vista à construção do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. O triângulo do rebatimento do ponto **R** é o triângulo retângulo  $[ORR_1]$ .

Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto **R** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), conduziu-se, por  $R_1$  (a projeção horizontal do ponto **R**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **R** (que é um dos catetos do triângulo  $[ORR_1]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $R_1$  (que é o ponto **R** rebatido pelo rebatimento do plano de perfil). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[OR_1]$  (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e raio  $\overline{OR_1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **R** (o arco  $R_1R_r$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $R_r$  (o ponto **R** rebatido).

#### Construção do quadrado $[RSTU]$ em verdadeira grandeza:

Em seguida, efetuaram-se os procedimentos necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento. Com o compasso, fazendo centro em  $R_r$  e com 7 cm de raio, determinou-se o ponto  $S_r$ , no eixo **X** – uma vez que o vértice **S**, do quadrado, se situa no eixo **X**,  $S_r$  é o ponto do eixo **X** tal que  $\overline{R_rS_r} = 7$  cm (a medida do lado do polígono). A partir de  $R_r$  e de  $S_r$  construiu-se o quadrado  $[R_rS_rT_rU_r]$  em rebatimento (o quadrado  $[R_rS_rT_rU_r]$ ), o que nos permitiu determinar os pontos  $T_r$  e  $U_r$ .

Note que se garantiu que o quadrado se situa, na totalidade, no espaço do  $1^a$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

#### Determinação das projeções dos pontos **S**, **T** e **U** e do quadrado $[RSTU]$ :

O ponto **S** é um ponto da charneira (o eixo **X**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $S_1 \equiv S_2 \equiv S_r$ .

A inversão do rebatimento dos pontos **T** e **U** processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $r$ , que é a reta suporte do lado  $[TU]$  do quadrado. A reta  $r_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $T_r$  e  $U_r$ ) e é uma reta oblíqua do plano  $\rho$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . A reta  $r$  é necessariamente uma reta passante (pois é uma reta oblíqua contida num plano passante) – é uma reta concorrente com o eixo **X** num ponto (que não se identificou). Esse ponto é um ponto da charneira (que é o eixo **X**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nesta situação, os dados do plano revelam-se insuficientes para, de uma forma direta, determinarmos o elemento em falta para definir a reta  $r$  em projeções, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $s_r$ , como reta auxiliar do plano  $\rho$  – a reta  $s$  é a reta suporte do lado  $[RS]$  do quadrado e está definida por dois pontos (os pontos **R** e **S**), quer em projeções quer em rebatimento. Assim, representou-se a reta  $s$  de forma direta, tanto em projeções como em rebatimento.

As retas  $r$  e  $s$  são duas retas paralelas (como atrás se referiu), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$ . A reta  $r$  está, assim, definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e por uma direção (é paralela à reta  $s$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $r$ .

Em seguida, pelo ponto  $T_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_r$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $T_1$  (a projeção horizontal do ponto **T**). A projeção frontal do ponto **T** ( $T_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ). De forma semelhante, pelo ponto  $U_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_r$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $U_1$  (a projeção horizontal do ponto **U**). A projeção frontal do ponto **U** ( $U_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

A partir das projeções dos quatro pontos (**R**, **S**, **T** e **U**), desenharam-se as projeções do quadrado  $[RSTU]$ .

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ . As duas projeções do quadrado  $[RSTU]$  (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[RSTU]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , das retas  $r_r$  e  $s_r$ , dos planos ortogonais à charneira e dos traçados necessários ao rebatimento do ponto **R**).



## 311.

### Dados:

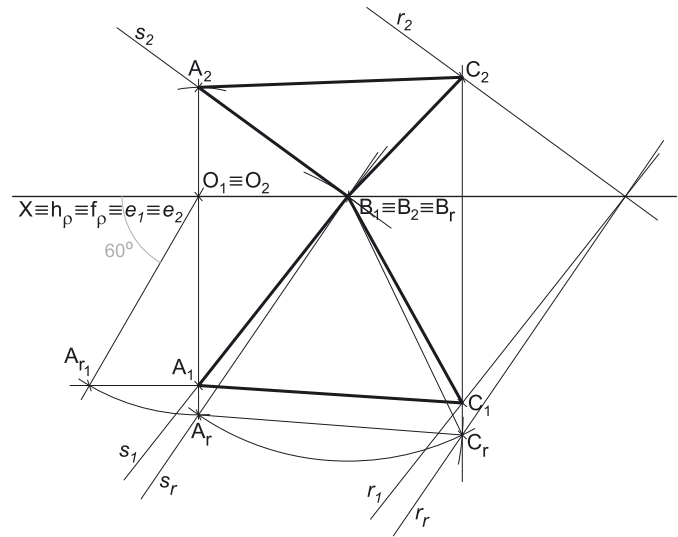
Os dados não nos permitem representar qualquer elemento do plano  $\rho$  – o plano  $\rho$  está definido por uma reta (o eixo  $X$ ) e pela sua orientação (o ângulo que o plano faz com o Plano Horizontal de Projeção).

Os dados permitiram-nos, apenas, determinar a projeção horizontal do ponto  $A$ , em função do seu afastamento.

### Resolução:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano passante, pelo rebatimento das suas retas (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Optemos por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que se situa no eixo  $X$ , pelo que se tem imediatamente  $X \equiv h_\rho \equiv f_\rho \equiv e_1 \equiv e_2$  (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.



### Rebatimento do ponto A:

O rebatimento do ponto  $A$  tem de se processar com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim, em primeiro lugar conduziu-se, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ , bem como o triângulo do seu rebatimento). Em seguida, determinou-se o ponto  $O$ , o centro do arco do rebatimento do ponto  $A$  – o ponto  $O$  é o ponto de interseção da charneira com o plano de perfil que contém o ponto  $A$ . O triângulo do rebatimento do ponto  $A$ , no espaço, é o triângulo retângulo  $[OAA_1]$ . O triângulo  $[OAA_1]$  é retângulo em  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) e a sua hipotenusa (o segmento  $[OA]$ ) está contida numa reta de perfil (que é a reta de interseção do plano  $\rho$  com o plano de perfil que contém o triângulo do rebatimento). Sabe-se que o diedro que um plano passante faz com o Plano Frontal de Projeção tem a mesma amplitude que o ângulo que as retas de perfil do plano fazem com o Plano Frontal de Projeção – assim, sabe-se imediatamente que a hipotenusa  $[OA]$  faz, com o Plano Frontal de Projeção, um ângulo de  $60^\circ$ , sendo que  $A$  se situa no  $1^\circ$  Diedro (pois o plano  $\rho$  atravessa os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros).

Assim, desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$ , diretamente (em verdadeira grandeza), pelo rebatimento do plano de perfil que contém esse triângulo (o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ ). Em primeiro lugar, conduziu-se, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), uma paralela à charneira (que contém um dos catetos do triângulo do rebatimento do ponto  $A$ ). Em seguida, a partir de  $O_r$ , mediu-se o ângulo de  $60^\circ$  com o eixo  $X$ , determinando-se  $A_{r1}$  na paralela à charneira (o eixo  $X$ ) que passa por  $A_1 - A_{r1}$  é o ponto  $A$ , rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento (bem como o seu triângulo do rebatimento). Note que o segmento  $[O_r A_{r1}]$  faz um ângulo de  $30^\circ$  (o ângulo complementar do ângulo de  $60^\circ$ ) com a perpendicular à charneira que passa por  $A_1$  – o ângulo de  $30^\circ$  e o ângulo que o plano passante faz com o Plano Horizontal de Projeção. O triângulo  $[O_r A_1 A_{r1}]$  é o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza.

Em seguida, concluiu-se o rebatimento do ponto  $A$ . Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  (o centro do arco do rebatimento do ponto  $A$ ) e raio até  $A_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$  (o arco  $\widehat{PA_r A_r}$ ), em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira, onde se situa  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido).

### Construção do triângulo $[ABC]$ em verdadeira grandeza:

Em seguida, efetuaram-se os procedimentos necessários à construção do triângulo em verdadeira grandeza, em rebatimento. Com o compasso, fazendo centro em  $A_r$  e com 7 cm de raio (o comprimento do lado da figura), determinou-se o ponto  $B_r$ , no eixo  $X$  – uma vez que o vértice  $B$ , do triângulo, se situa no eixo  $X$ ,  $B_r$  é o ponto do eixo  $X$  tal que  $\widehat{A_r B_r} = 7$  cm (a medida do lado do polígono). A partir de  $A_r$  e de  $B_r$ , construiu-se o triângulo  $[ABC]$  em rebatimento (o triângulo  $[A_r B_r C_r]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $C_r$ .

Note que se garantiu que o triângulo se situa, na totalidade, no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

### Determinação das projeções dos pontos B e C e do triângulo $[ABC]$ :

O ponto  $B$  é um ponto da charneira (o eixo  $X$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $B_1 \equiv B_2 \equiv B_r$ .

A inversão do rebatimento do ponto  $C$  processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  a qual o ponto  $C$  pertença – a reta  $r$ , por exemplo. Já temos um ponto para definir a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) – o ponto  $C_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta.

Nesta situação, os dados do plano revelam-se insuficientes para, de uma forma direta, determinarmos o elemento em falta para definir a reta  $r$  em rebatimento, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $s_r$ , como reta auxiliar do plano  $\rho$  – a reta  $s$  é a reta suporte do lado  $[AB]$  do triângulo e está definida por dois pontos (os pontos  $A$  e  $B$ ), tanto em projeções como em rebatimento. Assim, representou-se a reta  $s$  de forma direta, tanto em projeções como em rebatimento.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r_r$  – a direção da reta  $s_r$ . Assim, a reta  $r_r$  está definida por um ponto (o ponto  $C_r$ ) e uma direção (é paralela a  $s_r$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . A reta  $r$  é necessariamente uma reta passante (pois é uma reta oblíqua contida num plano passante) – é uma reta concorrente com o eixo  $X$  num ponto (que não se identificou). Esse ponto é um ponto da charneira (que é o eixo  $X$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. As retas  $r$  e  $s$  são duas retas paralelas (como atrás se referiu), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$ . A reta  $r$  está, assim, definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $s$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $r$ .

Em seguida, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto  $C$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ .

A partir das projeções dos três pontos ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ), desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $p$ . As duas projeções do triângulo  $[ABC]$  (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , das retas  $r_r$  e  $s_r$ , dos planos ortogonais à charneira e dos traçados necessários ao rebatimento do ponto  $R$ ).

## 312.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $R$  e  $S$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os pontos  $R$  e  $S$  têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois pertencem ao  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

O  $\beta_{1/3}$  está representado pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços, que não se identificam) e pela sua orientação (faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção e atravessa os  $1^a$  e  $3^a$  Diedros. Apesar disso, temos também as projeções de dois dos seus pontos (os pontos  $R$  e  $S$ ), se bem que estes não sejam absolutamente necessários para definir o plano.

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo  $[RST]$  (o  $\beta_{1/3}$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[RST]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano passante (o  $\beta_{1/3}$  é um plano passante), pelo rebatimento das suas retas (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

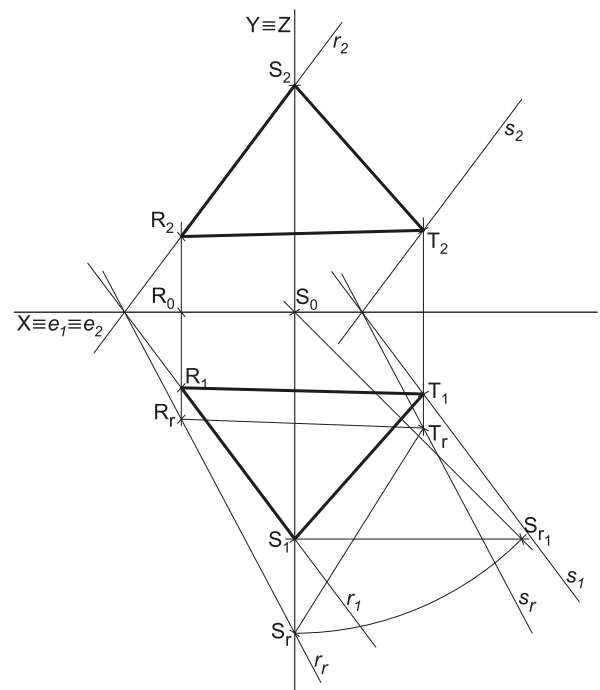
Optemos por rebater o  $\beta_{1/3}$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Comecemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o eixo  $X$ , pelo que se tem imediatamente  $X \equiv e_1 \equiv e_2$  (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

Em seguida, há que rebater um dos dois pontos conhecidos – o ponto  $R$  ou o ponto  $S$ . Por uma questão de rigor, optou-se por rebater o ponto  $S$ , que é o ponto mais afastado do eixo  $X$  e, por isso, é o ponto que nos permite maior rigor.

#### Rebatimento do ponto $S$ :

Para rebater o ponto  $S$  conduziu-se, pelo ponto  $S$ , uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (um plano de perfil) que contem o arco do rebatimento do ponto  $S$  (não se identificou esse plano). O centro do arco do rebatimento do ponto  $S$  é o ponto  $S_0$  (o ponto de interseção da perpendicular à charneira com própria a charneira do rebatimento – o eixo  $X$ ). O raio do arco do rebatimento do ponto  $S$  é  $\overline{S_0S}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $S$ , que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, é necessário recorrer ao rebatimento do plano de perfil (o plano que contém o triângulo do rebatimento do ponto  $S$ ), com vista à construção do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. O triângulo do rebatimento do ponto  $S$  é o triângulo retângulo  $[S_0SS_1]$ .

Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto  $S$  em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), conduziu-se, por  $S_1$  (a projeção horizontal do ponto  $S$ ) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto  $S$  (que é um dos catetos do triângulo  $[S_0SS_1]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $S_{r1}$  (que é o ponto  $S$  rebatido pelo rebatimento do plano de perfil). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[S_0S_{r1}]$  (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $S_0$  e raio  $\overline{S_0S_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $S$  (o arco  $\overline{S_1S_r}$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $S_r$  (o ponto  $S$  rebatido).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Rebatimento do ponto **R** e construção do triângulo [RST] em verdadeira grandeza

O rebatimento do ponto **R** processa-se com o recurso a uma reta do  $\beta_{1/3}$ , à qual o ponto **R** pertença – a reta **r**, por exemplo, que é a reta suporte do lado [RS]. Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta **r** de forma mediata – a reta **r** passa pelos pontos **R** e **S** e é uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo **X**.

O ponto de concorrência da reta **r** com o eixo **X** (que não se identificou) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – já temos um ponto para definir a reta **r<sub>r</sub>** (a reta **r** rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta **r** em rebatimento. Por outro lado, também já temos o ponto **S<sub>r</sub>**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **r<sub>r</sub>** – a reta **r<sub>r</sub>** está definida por dois pontos (o ponto **S<sub>r</sub>** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**).

Em seguida, por **R<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **R**) conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se **R<sub>r</sub>** (o ponto **R** rebatido) sobre **r<sub>r</sub>**.

Em seguida, a partir de **R<sub>r</sub>** e de **S<sub>r</sub>**, efetuou-se a construção do triângulo em verdadeira grandeza, em rebatimento, garantindo que o ponto **R** é o vértice abscissa do polígono (o seu vértice mais à esquerda), o que nos permitiu determinar o terceiro vértice do triângulo, em rebatimento – o ponto **T<sub>r</sub>**.

## Determinação das projeções do ponto **T** e do triângulo [RST]:

A inversão do rebatimento do ponto **T** processa-se com o recurso a uma reta do  $\beta_{1/3}$ , à qual o ponto **T** pertença – a reta **s**. Já temos um ponto para definir a reta **s<sub>r</sub>** (a reta **s** rebatida) – o ponto **T<sub>r</sub>**. Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta. Nesse sentido, optou-se por fazer com que a reta **s** seja paralela à reta **r** (que é uma reta do  $\beta_{1/3}$  já conhecida). Já temos a direção que nos faltava para definir a reta **s<sub>r</sub>** – a direção da reta **r<sub>r</sub>**. Assim, a reta **s<sub>r</sub>** está definida por um ponto (o ponto **T<sub>r</sub>**) e uma direção (é paralela a **r<sub>r</sub>**).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **s**. A reta **s** é necessariamente uma reta passante (pois é uma reta oblíqua contida num plano passante) – é uma reta concorrente com o eixo **X** num ponto (que não se identificou). Esse ponto é um ponto da charneira (que é o eixo **X**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir a reta **s** em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. As retas **s** e **r** são duas retas paralelas (como atrás se referiu), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **s**. A reta **s** está, assim, definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e por uma direção (é paralela à reta **r**), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta **s**.

Em seguida, pelo ponto **T<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto **T**, sobre as projeções homónimas da reta **s**.

A partir das projeções dos três pontos (**R**, **S** e **T**), desenharam-se as projeções do triângulo [RST].

## Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do  $\beta_{1/3}$  (que não se identificaram). As duas projeções do triângulo [RST] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo [RST], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **r** e **s**, das retas **r<sub>r</sub>** e **s<sub>r</sub>**, dos planos ortogonais à charneira e dos traçados necessários ao rebatimento do ponto **S**).

## 313.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\alpha$ .

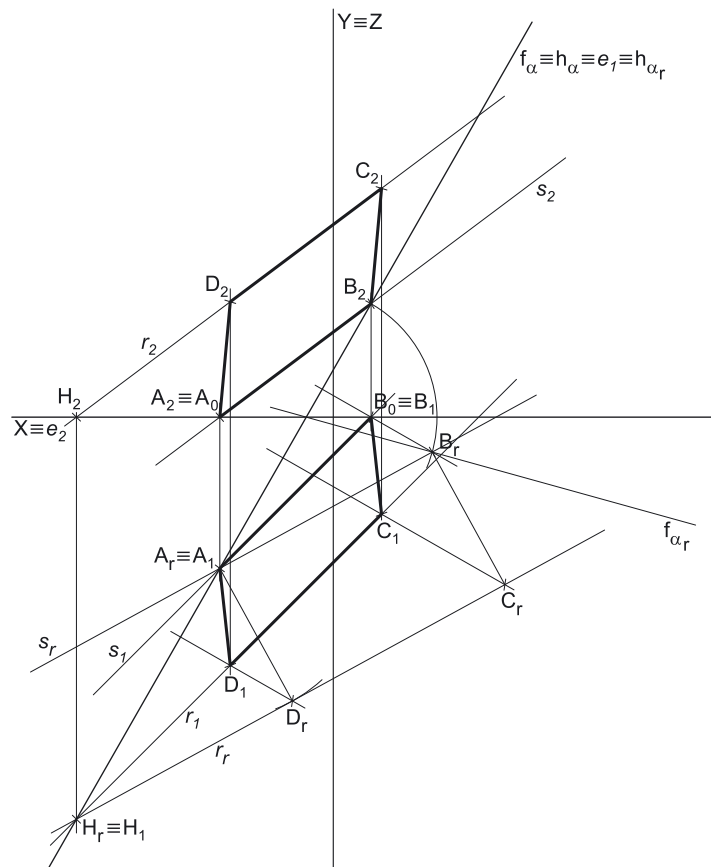
O ponto **A** é um ponto com cota nula, pelo que é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ). O ponto **B** é um ponto com afastamento nulo, pelo que é necessariamente um ponto do traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). O plano  $\alpha$  é um plano ortogonal a  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem os seus traços coincidentes (planos ortogonais a  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

Assim, o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) tem de passar por **A<sub>1</sub>** e o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) tem de passar por **B<sub>2</sub>** e, além disso, têm de estar coincidentes (na folha de papel), pelo que se desenhou uma reta passando por **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**) e por **B<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **B**) – essa reta é a reta na qual estão coincidentes os dois traços do plano  $\alpha$ .

### Resolução:

O plano que contém o retângulo [ABCD] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o retângulo [ABCD] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do retângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

#### Rebatimento do traço frontal do plano $\alpha$ :

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou) é um ponto de  $f_\alpha$  e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto  $B$ , que é um ponto conhecido de  $f_\alpha$ . Para rebater o ponto  $B$  conduziu-se, por  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $B$  e que não se identificou). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $B_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ , determinando-se  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido). Isto permitiu-nos desenhar  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), que passa por  $B_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $f_{\alpha_r}$  está definido por dois pontos).

O ponto  $A$  é um ponto de  $h_\alpha$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ . O rebatimento efetuado nos permitiu economizar o rebatimento de um ponto (o ponto  $A$ ). No entanto, caso se tivesse efetuado o rebatimento do plano  $\delta$  para o Plano Frontal de Projeção, uma vez que o ponto  $B$  seria, nesse caso, um ponto da charneira, a situação seria semelhante à exposta, em termos de economia de traçados.

#### Construção do retângulo [ABCD] em verdadeira grandeza:

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o retângulo [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento), respeitando os dados – os lados menores (os lados [BC] e [AD]) medem 4 cm (e são perpendiculares a [AB]).

Assim, determinaram-se os restantes vértices do polígono, em rebatimento (os pontos  $C_r$  e  $D_r$ ), garantindo-se que o retângulo se situa no espaço do 1<sup>o</sup> Diedro, na sua totalidade.

#### Determinação das projeções dos pontos C e D e do retângulo [ABCD]:

A inversão do rebatimento dos pontos  $C$  e  $D$  processa-se com o recurso a retas do plano  $\alpha$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $r$ , que é a reta suporte do lado [CD] do retângulo. A reta  $r_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $C_r$  e  $D_r$ ) e é uma reta oblíqua do plano  $\alpha$ . O ponto  $H$  é o traço horizontal da reta  $r$  e situa-se no traço horizontal do plano, pelo que  $H_r$  se situa sobre  $h_{\alpha_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $r$ ) é um ponto da charneira (que é  $h_\alpha$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_1 \equiv H_r$  ( $H_2$  situa-se no eixo  $X$  pois o ponto  $H$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nesta situação, os dados do plano revelam-se insuficientes para, de uma forma direta, determinarmos o elemento em falta para definir a reta  $r$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $s$ , como reta auxiliar do plano  $\alpha$  – a reta  $s$  é a reta suporte do lado [AB] do quadrado e está definida por dois pontos (os pontos  $A$  e  $B$ ), quer em projeções quer em rebatimento. Assim, representou-se a reta  $s$ , tanto em projeções, como em rebatimento. As retas  $r$  e  $s$  são necessariamente paralelas, pois são as retas suporte de dois lados paralelos do retângulo, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$ . A reta  $r$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $s$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $r$ .

Em seguida, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ). A projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ), na linha de chamada de  $C_1$ . Por fim, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto  $D$ ). A projeção frontal do ponto  $D$  ( $D_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), na linha de chamada de  $D_1$ .

Note que se poderia ter invertido o rebatimento dos pontos  $C$  e  $D$  com o recurso por exemplo, a retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$  – tal situação implicaria, no entanto, o recurso a duas retas (uma reta para cada ponto), o que resultaria em mais traçados do que a situação proposta.

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do retângulo [ABCD].

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os dados, nesta situação, são dois pontos cujas linhas de chamada se representam sempre a **leve**. Nesse sentido, os traços do plano  $\alpha$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **médio-leve**. As duas projeções do retângulo [ABCD] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O retângulo [ABCD], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , das retas  $r_r$  e  $s_r$ , dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu rebater  $f_\alpha$  e, ainda, do próprio  $f_{\alpha_r}$ ).



(continuação da página anterior)

A relação mais direta entre o **objeto dado** (o círculo) e o **seu transformado** (as suas projeções) é a que existe entre o **círculo** em verdadeira grandeza e a **elipse** que é a sua projeção frontal, sendo uma relação homológica cujo eixo de homologia é  $h_0$  (a charneira do rebatimento). Tratemos, então, da **elipse** que é a **projeção horizontal da circunferência**. Assim, inscreveu-se a circunferência num quadrado de lados paralelos ao eixo de homologia ( $h_0$ ) e desenharam-se as suas medianas e as suas diagonais. A mediana  $[A_r B_r]$  do quadrado é a mediana horizontal do quadrado (está contida na reta  $h_r$ ). A mediana  $[C_r D_r]$  é a mediana do quadrado que é perpendicular à reta  $h_r$  (está contida numa reta de maior declive do plano  $\theta$ ).

Os extremos das medianas do quadrado são os pontos em que a circunferência é tangente aos quatro lados do quadrado e dão-nos, imediatamente, os extremos dos dois eixos da elipse que é a projeção horizontal da circunferência. Assim, a projeção horizontal do diâmetro  $[AB]$  corresponderá ao eixo maior da referida elipse (por ser paralelo ao eixo de homologia e, por isso, não sofrer qualquer deformação), enquanto a projeção horizontal do diâmetro  $[CD]$  corresponderá ao eixo menor da elipse (por ser aquele que é perpendicular ao eixo de homologia e, por isso, sofrer a maior redução). Estes pontos serão, já, quatro pontos da elipse – os outros quatro pontos serão os pontos de interseção da circunferência com as diagonais do quadrado em que aquela se inscreve.

As projeções dos pontos **A** e **B** determinaram-se imediatamente, através das perpendiculares à charneira que passam por  $A_r$  e  $B_r$  (que correspondem aos planos ortogonais à charneira que contém os respetivos arcos do rebatimento). Uma vez que os dois pontos pertencem à reta  $h$ , as projeções dos pontos **A** e **B** situam-se sobre as projeções homónimas da reta  $h$ .

A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\theta$  à qual o ponto **C** pertença – a reta  $h'$ , que é a reta suporte do **lado de maior cota quadrado**. Tenha em conta que se trata de um dos dois lados do quadrado que são paralelos à charneira do rebatimento ( $h_0$ ), pelo que são lados horizontais (de nível) – a reta  $h'$  é outra reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$ . A reta  $h'_r$  (a reta  $h'$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $C_r$ ) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\theta$  – é paralela a  $h_r$  e a  $h_0$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h'$ . O ponto  $F'$  é o traço frontal da reta  $h'$  e situa-se sobre  $f_{0r}$ . Conduzindo, por  $F'_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $F'$ ), foi possível determinar  $F'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F'$ ) no eixo  $X - F'_2$  (a projeção frontal do ponto  $F'$ ) situa-se sobre  $f_0$ . Já temos um ponto para definir a reta  $h'$  em projeções – o ponto  $F'$ . Já temos também a direção (que é a direção das retas horizontais do plano  $\theta$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $h'$ .

Por fim, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção dessa perpendicular à charneira com  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta  $h'$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** ( $C_2$ ) situa-se sobre  $h'_2$  (a projeção frontal da reta  $h'$ ).

A inversão do rebatimento do ponto **D** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\theta$  à qual o ponto **D** pertença – a reta  $h''$ , que é a reta suporte do **lado de menor cota quadrado**. Como se trata de outro dos dois lados do quadrado que são paralelos à charneira do rebatimento ( $h_0$ ), a reta  $h''$  é outra reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$ . A reta  $h''_r$  (a reta  $h''$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $D_r$ ) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\theta$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h''$ . O ponto  $F''$  é o traço frontal da reta  $h''$  e situa-se sobre  $f_{0r}$ . Conduzindo, por  $F''_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $F''$ ), foi possível determinar  $F''_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F''$ ) no eixo  $X - F''_2$  (a projeção frontal do ponto  $F''$ ) situa-se sobre  $f_0$ . Já temos um ponto para definir a reta  $h''$  em projeções – o ponto  $F''$ . Já temos também a direção (que é a direção das retas horizontais do plano  $\theta$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $h''$ .

Por fim, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção dessa perpendicular à charneira com  $h''_1$  (a projeção horizontal da reta  $h''$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto **D**). A projeção frontal do ponto **D** ( $D_2$ ) situa-se sobre  $h''_2$  (a projeção frontal da reta  $h''$ ).

A partir das premissas atrás referidas (os lados do quadrado estarem contidos nas retas horizontais  $h'$  e  $h''$ ) e, ainda, das projeções dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**, desenharam-se as duas projeções do quadrado circunscrito ao círculo – a projeção horizontal do quadrado é um retângulo e a projeção frontal do quadrado é um paralelogramo. Já temos quatro pontos de cada uma das duas elipses. Tenha em conta que dois dos lados do quadrado são paralelos ao segmento  $[AB]$  (que é uma mediana do quadrado) e que os outros dois lados do quadrado são paralelos ao segmento  $[CD]$  (que é outra mediana do quadrado). As situações de paralelismo referidas mantêm-se em ambas as projeções. As projeções dos pontos **A**, **B**, **C** e **D** são, imediatamente, **quatro pontos** de cada uma das duas elipses que são as projeções do círculo.

Em seguida, desenharam-se as projeções das diagonais do quadrado (diretamente em projeções), que se bissetam sobre as projeções homónimas do ponto **O** (o centro do quadrado). Com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem a planos ortogonais à charneira), transportaram-se, para as projeções horizontais das diagonais do quadrado, os pontos em que a circunferência intersesta aquelas diagonais. A partir das projeções horizontais desses quatro pontos, determinaram-se as projeções frontais desses mesmos pontos, sobre as projeções frontais das diagonais do quadrado. Já temos **oito pontos** para desenhar cada uma das duas elipses.

No que respeita à **elipse** que é a **projeção horizontal da circunferência**,  $[A_1 B_1]$  é o seu eixo maior e  $[C_1 D_1]$  é o seu eixo menor e a curva é tangente aos lados do retângulo em  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ , precisamente.

No que respeita à **elipse** que é a **projeção frontal da circunferência**, optou-se por desenhá-la imediatamente, a partir dos oito pontos determinados e dos seus pontos de tangência ao paralelogramo envolvente ( $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ ). No entanto, este desenho carece do rigor da outra elipse, uma vez que não foram determinados os seus dois eixos.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para tal seria necessário, em rebatimento, determinar o diâmetro da circunferência que é paralelo a  $f_0$ , e o outro que lhe é perpendicular – a projeção frontal do primeiro seria o eixo maior dessa elipse e a projeção frontal do segundo seria o eixo menor dessa mesma elipse. Esse procedimento dar-nos-ia mais quatro pontos da curva em cada uma das projeções, o que permitiria um desenho ainda mais preciso das duas elipses (com um total de doze pontos). No entanto, optou-se por não efetuar esses procedimentos na solução apresentada, uma vez que a quantidade de informação gráfica que tal iria provocar dificultaria, em muito, a leitura da resolução gráfica proposta.

### Traçado:

Os traços do plano  $\theta$ , apesar de serem dados, representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são apenas auxiliares. O eixo  $X$  representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do círculo (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O círculo, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso das retas  $h, h'$  e  $h''$  (em projeções e em rebatimento), do quadrado envolvente com as suas medianas e as diagonais (em projeções e em rebatimento), das perpendiculares à charneira e, ainda, do arco de transporte que nos permitiu rebater  $f_0$ .

## 315.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. Não existe qualquer dado que nos permita, de forma imediata, desenhar o traço frontal do plano  $\rho$ . Assim, para já, o plano  $\rho$  está definido por uma única reta – o seu traço horizontal ( $h_p$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **B**, pertencentes ao plano  $\rho$  – os dois pontos têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Os dois pontos são pontos com cota nula, pelo que os dois pontos são, necessariamente, dois pontos do traço horizontal do plano ( $h_p$ ). Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos dois pontos, atendendo a que a distância entre os dois pontos está em verdadeira grandeza em ambas as projeções (porque o segmento de reta **[AB]** é fronto-horizontal).

### Resolução:

O plano que contém o hexágono **[ABCDEF]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o hexágono **[ABCDE]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

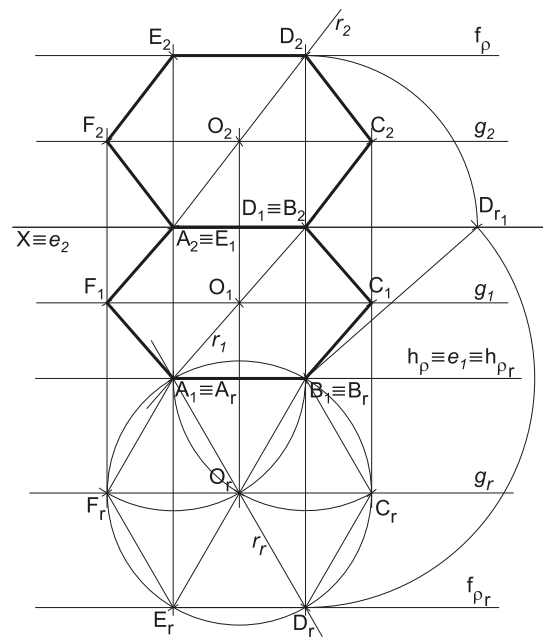
Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{p_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil. Note que não seria possível rebater o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção, pois, nessa situação, a charneira do rebatimento seria o traço frontal do plano ( $f_p$ ), que não é conhecido ainda (não é dado e ainda não foi determinado).

Os pontos **A** e **B** são dois pontos de  $h_p$  (que é a charneira), pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$  e  $B_r \equiv B_1$ . Note que não seria possível rebater o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção, pois, nessa situação, a charneira do rebatimento seria o traço frontal do plano ( $f_p$ ), que não é conhecido ainda (não é dado e ainda não foi determinado).

### Construção do hexágono **[ABCDEF]** em verdadeira grandeza:

Em rebatimento, já é possível construir o hexágono **[ABCDEF]** em verdadeira grandeza (em rebatimento). A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , determinou-se o ponto  $O_r$  (o centro da circunferência circunscrita ao hexágono) e desenhou-se a circunferência em que o polígono se inscreve – a circunferência tem centro em  $O_r$  e raio até  $A_r$  ou  $B_r$  (o raio é 3,5 cm, que é o lado do hexágono). Em seguida, construiu-se o hexágono **[ABCDEF]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono, em rebatimento.

Tendo em conta que o enunciado refere, expressamente, que os pontos **D** e **E** têm afastamento nulo, sabe-se que estes dois vértices do hexágono são dois pontos do traço frontal do plano ( $f_p$ ), o que nos permitiu desenhar o traço frontal do plano em rebatimento –  $f_{p_r}$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , rebatido) passa por  $C_r$  e por  $D_r$  (é paralelo ao eixo  $X$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação do traço frontal do plano $\rho$ :

Para se desenhar o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), é necessário inverter o rebatimento de um ponto qualquer de  $f_\pi$  – o ponto **D**, por exemplo. Para tal conduziu-se, por  $D_r$ , uma perpendicular a charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **D**), o que nos permitiu determinar, de forma imediata,  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto **D**), sobre o eixo **X** (pois o ponto **D** tem afastamento nulo). Nesta situação, o ponto **B** é, de forma imediata, o centro do arco do rebatimento do ponto **D** – o ponto **B** é o ponto de interseção da charneira ( $h_\rho$ ) com o plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **D** (e que não se identificou). Agora, há que construir o triângulo do rebatimento do ponto **D** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), de forma a ser possível determinar a projeção frontal do ponto **D** e, dessa forma, determinar o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ).

O triângulo  $[BDD_1]$  é o triângulo do rebatimento do ponto **D** e é retângulo em  $D_1$ . Com o compasso, fazendo centro em **B** e com raio até  $D_r$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **D** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), até ao eixo **X**, onde se situa  $D_{r_1} - D_r$  é o ponto **D**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil (o plano que contém o arco do seu rebatimento). Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **D**, em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) – o triângulo  $[B_1D_rD_1]$  é o triângulo  $[BDD_1]$  em verdadeira grandeza.

Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $D_1$  e raio até  $D_{r_1}$ , inverteu-se o rebatimento do plano de perfil, determinando-se  $D_2$  sobre a perpendicular à charneira que passa por  $D_r$  (note que  $D_1D_rD_{r_1}$  é a cota do ponto **D**). Este procedimento permitiu-nos, finalmente, desenhar o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), que está definido por um ponto (o ponto **D**) e por uma direção (é fronto-horizontal). Tenha ainda em conta que se garantiu que o ponto **D** tem cota positiva, para se situe no espaço do 1.<sup>a</sup> Diedro (para que o hexágono se situe no 1.<sup>a</sup> Diedro, como o enunciado refere expressamente).

#### Determinação das projeções do ponto **E**:

O ponto **E** é um ponto de  $f_\rho$ , pois  $E_r$  (o ponto **E** rebatido) situa-se sobre  $f_{\rho_r}$ . Conduzindo, por  $E_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **E**), determinaram-se as projeções do ponto **E** de forma imediata, garantindo-se que o ponto **E** se situa sobre  $f_\rho$ .

#### Determinação das projeções dos pontos **C** e **F** e do hexágono $[ABCDEF]$ :

A inversão do rebatimento dos pontos **C** e **F** processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$ , às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta **g**, que é a reta suporte da diagonal  $[CF]$  do hexágono. A reta **g** é uma reta fronto-horizontal do plano  $\rho$ . A reta  $g_r$  está definida, na prática, por dois pontos (os pontos  $C_r$  e  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **g**. A reta **g** é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos uma direção para definir a reta – falta-nos um ponto para definir a reta **g**. Esse outro ponto pode ser o ponto **O**, o centro do hexágono.

Assim, em primeiro lugar é necessário determinar as projeções do ponto **O**. Para tal recorreu-se à reta **r**, a reta suporte da diagonal  $[AD]$  do hexágono – a reta  $r_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $D_r$ ). As projeções da reta **r** desenharam-se de forma imediata, pois já temos as projeções dos dois pontos que a definem – os pontos **A** e **D**. Em seguida, pelo ponto  $O_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira, que nos permitiu determinar as projeções do ponto **O**, sobre as projeções homónimas da reta **r**.

Assim, já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **g** em projeções – a reta **g** (em projeções) está definida por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Em seguida, pelo ponto  $C_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto **C**, sobre as projeções homónimas da reta **g**. De forma semelhante, pelo ponto  $F_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto **F**, sobre as projeções homónimas da reta **g**.

A partir das projeções dos seis pontos (**A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F**), desenharam-se as projeções do hexágono  $[ABCDEF]$ .

#### Traçado:

Os dados (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). No contexto do exercício, o traço frontal do plano ( $f_\rho$ ), que não é dado de forma direta, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **médio-leve**. As duas projeções do hexágono  $[ABCDEF]$  (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O hexágono  $[ABCDEF]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **r** e **g**, das retas  $r_r$  e  $g_r$ , das perpendiculares à charneira, dos traçados necessários à inversão do rebatimento do ponto **D**, do próprio  $f_\rho$  e, ainda, dos traçados necessários à construção do hexágono em rebatimento).

## 316.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. Note que o ângulo a que o enunciado se refere (o ângulo que os traços do plano fazem **entre si**) não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\alpha$ .

Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**, o que significa que se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si, no espaço**, antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – não se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem entre si, **na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **A**, pertencente ao plano  $\alpha$ . O ponto **A**, para pertencer ao plano  $\alpha$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, como o ponto **A** tem cota nula, é um ponto de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto **A** é, assim, o ponto de  $h_\alpha$  que tem 3 cm de afastamento ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

### Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Note que não seria possível rebater o plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, pois não é conhecido o seu traço frontal ( $f_\alpha$ ) que, nesse caso, seria a charneira. Assim, começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

O ponto **A** é um ponto de  $h_\alpha$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ .

### Representação do traço frontal do plano $\alpha$ , em rebatimento, e construção do quadrado **[ABCD]**, em verdadeira grandeza:

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano  $\alpha$  está em verdadeira grandeza, nomeadamente o próprio ângulo que os traços do plano fazem **entre si**. Assim, em rebatimento, já é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si**, o que nos permitiu desenhar  $f_{\alpha_r}$  (fazendo um ângulo de  $70^\circ$  com  $h_{\alpha_r}$ , como o enunciado refere expressamente).

Por outro lado, também já é possível construir o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza, em rebatimento. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) e com 5 cm de raio (o comprimento do lado do quadrado), determinou-se o ponto  $B_r$  (o ponto **B** rebatido) sobre  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ , rebatido). Note que o ponto **B** tem afastamento nulo (é dado no enunciado), pelo que o ponto **B** é necessariamente um ponto de  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ).

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os outros dois vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $C_r$  e  $D_r$ . Note que, na construção do quadrado em rebatimento, se garantiu que o quadrado se situa, na sua totalidade, no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

### Determinação das projeções do ponto **B** e do traço frontal do plano $\alpha$

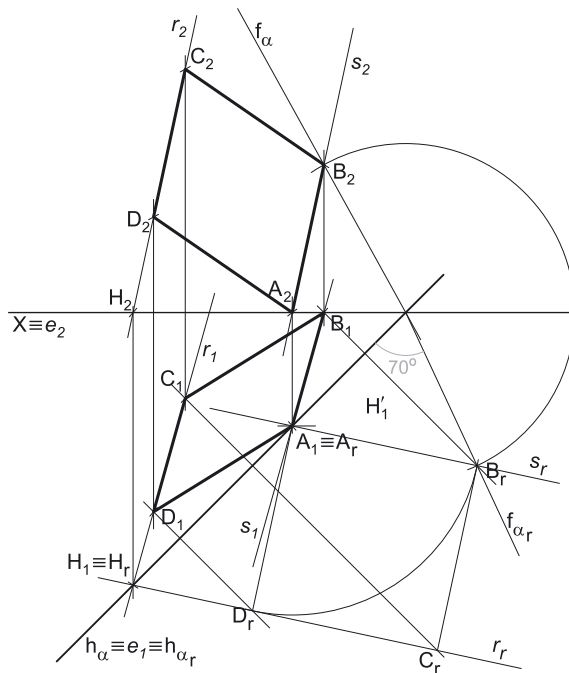
A inversão do rebatimento do ponto **B** permitir-nos-á desenhar o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), pois o ponto **B** é um ponto do traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ).

Para inverter o rebatimento do ponto **B** conduziu-se, por  $B_r$  (o ponto **B** rebatido), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal a charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **B**) – o ponto de interseção dessa perpendicular à charneira com o eixo **X** é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**), pois o ponto **B** tem afastamento nulo. A partir de  $B_1$ , desenhou-se a linha de chamada do ponto **B**, perpendicular ao eixo **X**.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é o ponto de  $f_\alpha$  que é fixo, pois situa-se na charneira), e com raio até  $B_r$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à linha de chamada do ponto **B**, onde se situa  $B_2$  (a projeção frontal do ponto **B**). Este procedimento permitiu-nos, também, desenhar o traço frontal do plano  $\alpha$  –  $f_\alpha$  passa por  $B_2$  e é concorrente com  $h_\alpha$  no eixo **X**. Nesse sentido,  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos – o ponto **B** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\alpha$ .

### Determinação das projeções dos pontos **C** e **D** e do quadrado **[ABCD]**

A inversão do rebatimento dos pontos **C** e **D** processa-se com o recurso a retas do plano  $\alpha$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $r$ , que é a reta suporte do lado **[CD]** do quadrado. A reta  $r_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $C_r$  e  $D_r$ ) e é uma reta oblíqua do plano  $\alpha$ . O ponto  $H$  é o traço horizontal da reta  $r$  e situa-se no traço horizontal do plano, pelo que  $H_r$  se situa sobre  $h_{\alpha_r}$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $r$ ) é um ponto da charneira (que é  $h_\alpha$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_1 \equiv H_r$  ( $H_2$  situa-se no eixo  $X$  pois o ponto  $H$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nesta situação, os dados do plano revelam-se insuficientes para, de uma forma direta, determinarmos o elemento em falta para definir a reta  $r$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $s$ , como reta auxiliar do plano  $\alpha$  – a reta  $s$  é a reta suporte do lado  $[AB]$  do quadrado e está definida por dois pontos (os pontos  $A$  e  $B$ ), quer em projeções quer em rebatimento. Assim, representou-se a reta  $s$ , tanto em projeções, como em rebatimento. As retas  $r$  e  $s$  são necessariamente paralelas, pois são as retas suporte de dois lados paralelos do retângulo, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$ . A reta  $r$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $s$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $r$ .

Em seguida, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ). A projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ), na linha de chamada de  $C_1$ . Por fim, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto  $D$ ). A projeção frontal do ponto  $D$  ( $D_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), na linha de chamada de  $D_1$ .

Note que se poderia ter invertido o rebatimento dos pontos  $C$  e  $D$  com o recurso por exemplo, a retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$  – tal situação implicaria, no entanto, o recurso a duas retas (uma reta para cada ponto), o que resultaria em mais traçados do que a situação proposta.

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do retângulo  $[ABCD]$ .

#### Traçado:

Os dados (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) representou-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado  $[ABCD]$  (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. O traço frontal do plano  $\alpha$ , integrando os dados de uma forma secundária, acaba por ser meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , das retas  $r_r$  e  $s_r$ , dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu inverter o rebatimento de  $f_\alpha$  e, ainda, do próprio  $f_{\alpha_r}$ ).

## 317.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto  $O$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois pertence ao  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

O  $\beta_{1/3}$  está representado pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços, que não se identificam) e pela sua orientação (faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção e atravessa os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros. Apesar disso, temos também as projeções de um dos seus pontos (o ponto  $O$ ), se bem que este não seja necessário para definir o plano.

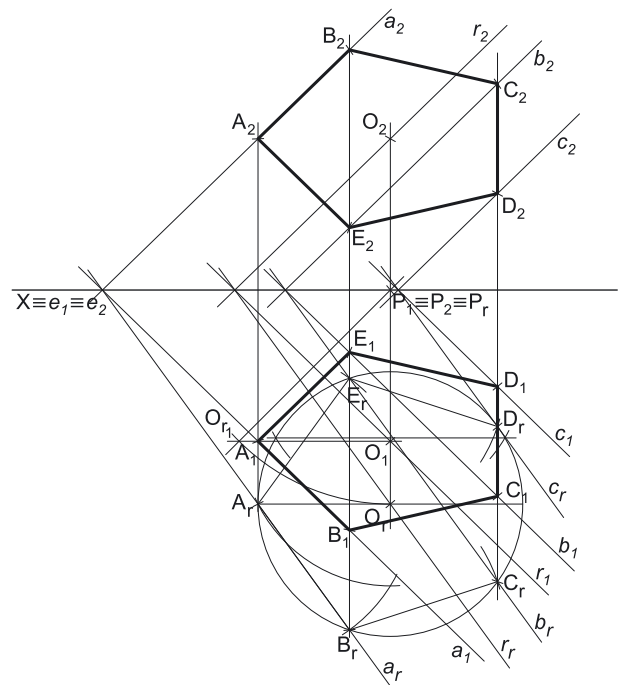
#### Resolução:

O plano que contém o pentágono  $[ABCDE]$  (o  $\beta_{1/3}$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o pentágono  $[ABCDE]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do pentágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano passante (o  $\beta_{1/3}$  é um plano passante), pelo rebatimento das suas retas (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Optemos por rebater o  $\beta_{1/3}$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o eixo  $X$ , pelo que se tem imediatamente  $X \equiv e_1 \equiv e_2$  (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

#### Rebatimento do ponto $O$ :

Para rebater o ponto  $O$  conduziu-se, pelo ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (um plano de perfil) que contem o arco do rebatimento do ponto  $O$  (não se identificou esse plano). O centro do arco do rebatimento do ponto  $O$  é o ponto  $P$  (o ponto de interseção da perpendicular à charneira com própria a charneira do rebatimento – o eixo  $X$ ). O raio do arco do rebatimento do ponto  $O$  é  $PO$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $O$ , que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, é necessário recorrer ao rebatimento do plano de perfil (o plano que contém o triângulo do rebatimento do ponto  $O$ ), com vista à construção do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. O triângulo do rebatimento do ponto  $O$  é o triângulo retângulo  $[POO_1]$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto **O** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), conduziu-se, por **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **O** (que é um dos catetos do triângulo [**POO**<sub>1</sub>]), o que nos permitiu determinar o ponto **O**<sub>r1</sub> (que é o ponto **O** rebatido pelo rebatimento do plano de perfil). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta [**P**,**O**<sub>r1</sub>] (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto **P** e raio  $\overline{P, O_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **O** (o arco  $\widehat{O_r1, O_r}$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa **O**<sub>r</sub> (o ponto **O** rebatido).

### Construção do pentágono [**ABCDE**] em verdadeira grandeza

Em rebatimento, já é possível construir o pentágono [**ABCDE**] em verdadeira grandeza (em rebatimento). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>r</sub> e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do polígono, de acordo com os dados – sabendo que o vértice **A** é o vértice de maior abscissa da figura (o vértice mais à esquerda) e que o lado que lhe é oposto é de perfil, foi possível perceber a posição da figura na circunferência.

Em seguida, nomearam-se os vértices, de acordo com as indicações expressas no enunciado – **A** é o vértice de mais à esquerda da figura e **C** e **B** os vértices mais à direita. Uma vez que o enunciado é omissivo em relação aos restantes dois vértices do pentágono (os vértices **B** e **E**), estes foram nomeados aleatoriamente, mas mantendo uma sequência alfabética.

### Determinação das projeções dos pontos **A** e **B**:

A inversão do rebatimento dos pontos **A** e **B** processa-se com o recurso a retas do  $\beta_{1/3}$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta **a**, que é a reta suporte do lado [**AB**] do pentágono. A reta **a**<sub>r</sub> está definida por dois pontos (os pontos **A**<sub>r</sub> e **B**<sub>r</sub>) e é uma reta oblíqua do plano  $\rho$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **a**. A reta **a** é necessariamente uma reta passante (pois é uma reta oblíqua contida num plano passante) – é uma reta concorrente com o eixo **X** num ponto (que não se identificou). Esse ponto é um ponto da charneira (que é o eixo **X**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir a reta **a** em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nesta situação, os dados do plano revelam-se insuficientes para, de uma forma direta, determinarmos o elemento em falta para definir a reta **a** em projeções, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta **r**<sub>r</sub>, como reta auxiliar do plano  $\rho$  – a reta **r** é uma reta que passa pelo ponto **O** e é paralela à reta **a**. A reta **r** é igualmente uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo **X** num ponto (que não se identificou). Esse ponto é um ponto da charneira (que é o eixo **X**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir a reta **r** em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **r** passa pelo ponto **O**, cujas projeções já são conhecidas, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **r** – a reta **r** (em projeções) está definida por dois pontos (o ponto **O** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**).

As retas **r** e **a** são duas retas paralelas (como atrás se referiu), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **a**. A reta **a** está, assim, definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e por uma direção (é paralela à reta **r**), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta **a**.

Em seguida, pelo ponto **A**<sub>r</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto **A**, sobre as projeções homónimas da reta **a**. De forma semelhante, pelo ponto **B**<sub>r</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto **B**, sobre as projeções homónimas da reta **a**.

### Determinação das projeções dos pontos **C** e **E**:

A inversão do rebatimento dos pontos **C** e **E** processa-se com o recurso a retas do  $\beta_{1/3}$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta **b**, que é a reta suporte da diagonal [**CE**] do pentágono. A reta **b**<sub>r</sub> está definida por dois pontos (os pontos **C**<sub>r</sub> e **E**<sub>r</sub>) e é uma reta oblíqua do plano  $\rho$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **b**. A reta **b** é necessariamente uma reta passante (pois é uma reta oblíqua contida num plano passante) – é uma reta concorrente com o eixo **X** num ponto (que não se identificou). Esse ponto é um ponto da charneira (que é o eixo **X**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir a reta **b** em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta. Por outro lado, a reta **b** é necessariamente paralela às retas **a** e **r**, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **b** (em projeções).

A reta **b** está, assim, definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e por uma direção (é paralela às retas **a** e **r**), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta **b**.

Em seguida, pelo ponto **C**<sub>r</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto **C**, sobre as projeções homónimas da reta **b**. De forma semelhante, pelo ponto **E**<sub>r</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto **E**, sobre as projeções homónimas da reta **b**.

### Determinação das projeções do ponto **D**:

A inversão do rebatimento do ponto **D** processa-se com o recurso a uma reta do  $\beta_{1/3}$ , à qual o ponto **D** pertença – a reta **c**. Já temos um ponto para definir a reta **c**<sub>r</sub> (a reta **c** rebatida) – o ponto **D**<sub>r</sub>. Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta. Nesse sentido, optou-se por fazer com que a reta **c** seja paralela às retas **a**, **b** e **r** (que são retas do  $\beta_{1/3}$  já conhecidas). Já temos a direção que nos faltava para definir a reta **c**<sub>r</sub> – a direção das retas **a**<sub>r</sub>, **b**<sub>r</sub> e **r**<sub>r</sub>. Assim, a reta **c**<sub>r</sub> está definida por um ponto (o ponto **D**<sub>r</sub>) e uma direção (é paralela àquelas retas).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **c**. A reta **c** é necessariamente uma reta passante (pois é uma reta oblíqua contida num plano passante) – é uma reta concorrente com o eixo **X** num ponto (que não se identificou). Esse ponto é um ponto da charneira (que é o eixo **X**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir a reta **c** em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta. A reta **c** é paralela às retas **a**, **b** e **r** (como atrás se referiu), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **c**. A reta **c** está, assim, definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e por uma direção (é paralela às retas **a**, **b** e **r**), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta **c**.

Em seguida, pelo ponto **D**, conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto **D**, sobre as projeções homónimas da reta **c**.

A partir das projeções dos cinco pontos (**A**, **B**, **C**, **D** e **E**), desenharam-se as projeções do pentágono **[ABCDE]**.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do  $\beta_{1/3}$  (que não se identificaram). As duas projeções do pentágono **[ABCDE]** (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O pentágono **[ABCDE]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **a**, **b**, **c** e **r**, das retas **a<sub>r</sub>**, **b<sub>r</sub>**, **c<sub>r</sub>** e **r<sub>r</sub>**, dos planos ortogonais à charneira e dos traçados necessários ao rebatimento do ponto **O**).

## 318.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **A**, pertencente ao plano  $\alpha$  – o ponto **A** tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** em relação ao plano  $\alpha$  (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\alpha$ ). O ponto **A** é um ponto com afastamento nulo, pelo que é necessariamente um ponto de  $f_{\alpha}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto **A** é o ponto de  $f_{\alpha}$  que tem 4 cm de cota.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **B**, pertencente ao plano  $\alpha$ , e de acordo com os dados. O ponto **B** é um ponto com cota nula, pelo que é necessariamente um ponto de  $h_{\alpha}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ). Por outro lado, é dado que o lado **[AB]** do triângulo é paralelo ao  $\beta_{2/4}$  – nesse sentido, o lado **[AB]** tem as suas projeções paralelas entre si (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). Assim, o ponto **B** é o ponto de  $h_{\alpha}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) que nos garante isso mesmo. Nesse sentido, é possível concluir que o ponto **B** tem de ter afastamento igual à cota do ponto **A** – o ponto **B** é, assim, o ponto de  $h_{\alpha}$  que tem 4 cm de afastamento.

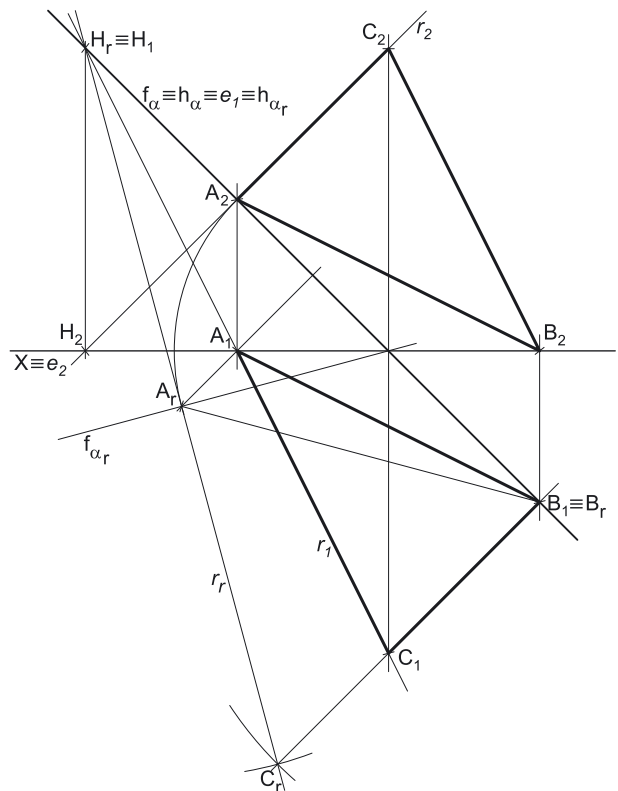
Um outro processo para determinar as projeções do ponto **B** seria garantir que a reta suporte do lado **[AB]** verificava o **critério de paralelismo entre retas e planos**, ou seja, que essa reta seria paralela a uma reta do  $\beta_{2/4}$ . Assim, nesse caso, seria necessário determinar, em primeiro lugar, a reta de interseção do plano  $\alpha$  com o  $\beta_{2/4}$  (a reta  $i$ ). A reta suporte do lado **[AB]**, por ser paralela ao  $\beta_{2/4}$ , seria necessariamente paralela à reta  $i$  (para ser paralela a uma reta do  $\beta_{2/4}$ ). Assim, pelas projeções do ponto **A** conduzir-se-iam as projeções homónimas de uma reta paralela à reta  $i$  – o ponto **B**, nesse caso, seria o traço horizontal dessa reta.

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_{\alpha}$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_{\alpha} \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_{\alpha}$ ).

O ponto **B** é um ponto de  $h_{\alpha}$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $B_r \equiv B_1$ . O rebatimento efetuado nos permitiu economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **B**). No entanto, caso se tivesse efetuado o rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, uma vez que o ponto **A** seria, nesse caso, um ponto da charneira, a situação seria semelhante à exposta, em termos de economia de traçados.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Rebatimento do traço frontal do plano $\alpha$ :

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou) é um ponto de  $f_\alpha$  e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto **A**, que é um ponto de  $f_\alpha$ . Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por **A**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **A**), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até **A**<sub>2</sub>, desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por **A**<sub>1</sub>, determinando-se **A**<sub>r</sub> (o ponto **A** rebatido). Isto permitiu-nos desenhar  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), que passa por **A**<sub>r</sub> e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $f_{\alpha_r}$  está definido por dois pontos).

## Construção do triângulo [ABC] em verdadeira grandeza:

Em rebatimento, já é possível construir o triângulo em verdadeira grandeza (em rebatimento). Assim, a partir de **A**<sub>r</sub> e **B**<sub>r</sub>, efetuaram-se os traçados necessários à construção do polígono (em rebatimento), o que nos permitiu determinar o terceiro vértice da figura (em rebatimento) – o ponto **C**<sub>r</sub>.

## Determinação das projeções do ponto **C** e do triângulo [ABC]:

A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto **C** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta **r**, a reta suporte do lado [AC] do triângulo. A reta **r**<sub>r</sub> (a reta **r** rebatida) está definida por dois pontos (os pontos **A**<sub>r</sub> e **C**<sub>r</sub>). O ponto **H** é o traço horizontal da reta **r** e situa-se no traço horizontal do plano, pelo que **H**<sub>r</sub> se situa sobre  $h_{\alpha_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **r**. O ponto **H** é um ponto da charneira (que é  $h_{\alpha_r}$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **H**<sub>1</sub>  $\equiv$  **H**<sub>r</sub> (**H**<sub>2</sub> situa-se no eixo **X**, pois **H** tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta **r** em projeções – o ponto **H**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, a reta **r** contém o ponto **A**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **r**, o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta **r** – a reta **r** está definida por dois pontos (os pontos **H** e **A**).

Em seguida, pelo ponto **C**<sub>r</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira. O ponto de interseção da perpendicular à charneira com **r**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **r**) é **C**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **C**) – a projeção frontal do ponto **C** (**C**<sub>2</sub>) situa-se sobre **r**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **r**), na linha de chamada de **C**<sub>1</sub>.

Note que, nesta situação particular, a perpendicular à charneira que passa por **C**<sub>r</sub> está coincidente com o lado [BC] do triângulo, em rebatimento e em projeção horizontal. Tal situação tem a ver com o facto de, nesta situação articular, o lado [BC] do triângulo estar contido numa reta de maior declive do plano  $\alpha$ .

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [ABC].

## Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do triângulo [ABC] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo [ABC], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta **r**, da reta **r**<sub>r</sub>, dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu rebater  $f_\alpha$ , do próprio  $f_\alpha$ , e, ainda, dos traçados necessários à construção do triângulo em verdadeira grandeza).

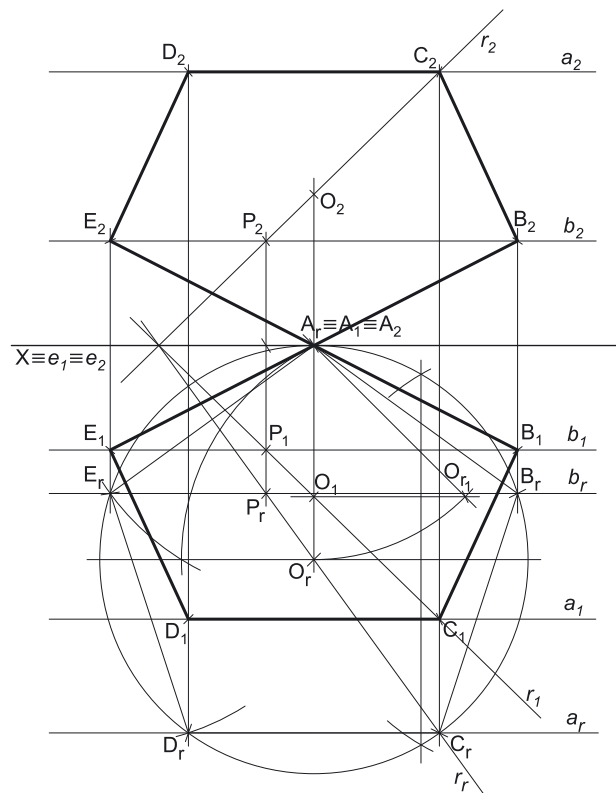
## 319.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **O** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois pertence ao  $\beta_{13}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**).

O  $\beta_{1/3}$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços, que não se identificam) e pela sua orientação (faz ângulos de 45° com os planos de projeção e atravessa os 1º e 3º Diedros. Apesar disso, temos também as projeções de um dos seus pontos (o ponto **O**), se bem que este não seja necessário para definir o plano.

Os dados permitem-nos, ainda, determinar as projeções do ponto **A**, o ponto do pentágono que tem cota nula. De facto, uma vez que a circunferência circunscrita ao pentágono é tangente ao eixo **X**, a circunferência é tangente ao eixo **X** num ponto com cota e afastamento nulos, que é, necessariamente, o ponto **A**. Por outro lado, para que se verifique a situação de tangência da circunferência em relação ao eixo **X** (no ponto **A**), o ponto **A** tem de se situar no plano de perfil que contém o ponto **O**. Este raciocínio relativamente simples permitiu-nos determinar as projeções do ponto **A**, no eixo **X**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Resolução:

O plano que contém o pentágono  $[ABCDE]$  (o  $\beta_{1/3}$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o pentágono  $[ABCDE]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do pentágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano passante (o  $\beta_{1/3}$  é um plano passante), pelo rebatimento das suas retas (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Optemos por rebater o  $\beta_{1/3}$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o eixo  $X$ , pelo que se tem imediatamente  $X \equiv e_1 \equiv e_2$  (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

#### Rebatimento do ponto $O$ :

Para rebater o ponto  $O$  conduziu-se, pelo ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  (não se identificou esse plano). O centro do arco do rebatimento do ponto  $O$  é o próprio ponto  $A$  (que é o ponto de interseção do plano de perfil que contém o ponto  $O$  com própria a charneira do rebatimento – o eixo  $X$ ). O raio do arco do rebatimento do ponto  $O$  é  $\overline{AO}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $O$ , que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, é necessário recorrer ao rebatimento do plano de perfil (o plano que contém o triângulo do rebatimento do ponto  $O$ ), com vista à construção do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. O triângulo do rebatimento do ponto  $O$  é o triângulo retângulo  $[AOO_1]$ .

Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto  $O$  em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), conduziu-se, por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto  $O$  (que é um dos catetos do triângulo  $[AOO_1]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $O_{r1}$  (que é o ponto  $O$  rebatido pelo rebatimento do plano de perfil). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[A_rO_{r1}]$  (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $A$  e raio  $\overline{A_rO_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $O$  (o arco  $\overline{O_rO_1}$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido).

#### Construção do pentágono $[ABCDE]$ em verdadeira grandeza

Em rebatimento, já é possível construir o pentágono  $[ABCDE]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento). Tendo em conta que a circunferência circunscrita ao pentágono é tangente ao eixo  $X$  (no ponto  $A$ , como acima se referiu), com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono.

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do polígono, de acordo com os dados – o vértice  $A$  é necessariamente o vértice de menor cota e menor afastamento da figura, pelo que o lado que lhe é oposto (o lado  $[CD]$ ) é fronto-horizontal. Em seguida, nomearam-se os vértices, de forma aleatória mas mantendo uma sequência alfabética, atendendo a que o enunciado é omissivo.

#### Determinação das projeções do ponto $C$ :

A inversão do rebatimento do ponto  $C$  processa-se com o recurso a uma reta do  $\beta_{1/3}$ , à qual o ponto  $C$  pertença – a reta  $r$ , por exemplo. Uma vez que já temos as projeções do ponto  $O$ , optou-se por garantir que a reta  $r$  contém o ponto  $O$ . Assim, a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – o ponto  $C_r$  e o ponto  $O_r$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . A reta  $r$  é necessariamente uma reta passante (pois é uma reta oblíqua contida num plano passante) – é uma reta concorrente com o eixo  $X$  num ponto (que não se identificou). Esse ponto é um ponto da charneira (que é o eixo  $X$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta. A reta  $r$  passa pelo ponto  $O$ , cujas projeções já são conhecidas, pelo que já temos o ponto que nos faltava, para definir a reta  $r$  em projeções. A reta  $r$  está, assim, definida por dois pontos (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  e o ponto  $O$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $r$ .

Em seguida, pelo ponto  $C_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto  $C$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ .

#### Determinação das projeções do ponto $D$ :

A inversão do rebatimento do ponto  $D$  processa-se com o recurso a uma reta do  $\beta_{1/3}$ , à qual o ponto  $D$  pertença – a reta  $a$ , por exemplo, que é a reta suporte do lado  $[CD]$  do pentágono. A reta  $a$  é uma reta fronto-horizontal do  $\beta_{1/3}$ . A reta  $a_r$  está definida, na prática, por dois pontos (os pontos  $C_r$  e  $D_r$ ) e por uma direção é paralela ao eixo  $X$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $a$ . A reta  $a$  é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos uma direção para definir a reta – falta-nos um ponto para definir a reta  $a$ . A reta  $a$  passa pelo ponto  $C$ , cujas projeções já são conhecidas, pelo que já temos o ponto que nos faltava, para definir a reta  $a$  em projeções. A reta  $a$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $C$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $a$ .

Em seguida, pelo ponto  $D_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto  $D$ , sobre as projeções homónimas da reta  $a$ .

#### Determinação das projeções dos pontos $B$ e $E$ :

A inversão do rebatimento dos pontos  $B$  e  $E$  processa-se com o recurso a retas do  $\beta_{1/3}$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $b$ , que é a reta suporte da diagonal  $[BE]$  do pentágono. A reta  $b$  é uma reta fronto-horizontal do  $\beta_{1/3}$ . A reta  $b_r$  está definida, na prática, por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $E_r$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $X$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **b**. A reta **b** é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos uma direção para definir a reta – falta-nos um ponto para definir a reta **b**. As retas **b** e **r** são duas retas coplanares (pertencem, ambas, ao  $\beta_{1/3}$ ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. A reta **r** é uma reta oblíqua e a reta **b** é uma reta fronto-horizontal, pelo que as duas retas não são paralelas (têm direções diferentes), pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **P**. Assim, determinou-se o ponto **P<sub>r</sub>**, que é o ponto de concorrência das retas **b<sub>r</sub>** e **r<sub>r</sub>**. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **P**, sobre as projeções homónimas da reta **r**, na perpendicular à charneira que passa por **P<sub>r</sub>**.

Assim, já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **b** em projeções – a reta **b** (em projeções) está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Em seguida, pelo ponto **B<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto **B**, sobre as projeções homónimas da reta **b**. De forma semelhante, pelo ponto **E<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto **E**, sobre as projeções homónimas da reta **b**.

A partir das projeções dos cinco pontos (**A**, **B**, **C**, **D** e **E**), desenharam-se as projeções do pentágono [**ABCDE**].

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do  $\beta_{1/3}$  (que não se identificaram). As duas projeções do pentágono [**ABCDE**] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O pentágono [**ABCDE**], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **a**, **b** e **r**, das retas **a<sub>r</sub>**, **b<sub>r</sub>** e **r<sub>r</sub>**, dos planos ortogonais à charneira e dos traçados necessários ao rebatimento do ponto **O**).

## 320.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. Note que o ângulo a que o enunciado se refere (o ângulo que os traços do plano fazem **entre si**) não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\alpha$ .

Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**, o que significa que se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si, no espaço**, antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – não se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem entre si, **na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **A**, pertencente ao plano  $\alpha$ . O ponto **A**, para pertencer ao plano  $\alpha$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, como o ponto **A** tem cota nula, é um ponto de **h<sub>α</sub>** (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto **A** é, assim, o ponto de **h<sub>α</sub>**, que tem 3 cm de afastamento (**h<sub>α</sub>** é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

Note que é dado o **ângulo** que o lado [**AB**], do triângulo, faz com **h<sub>α</sub>** (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\alpha$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

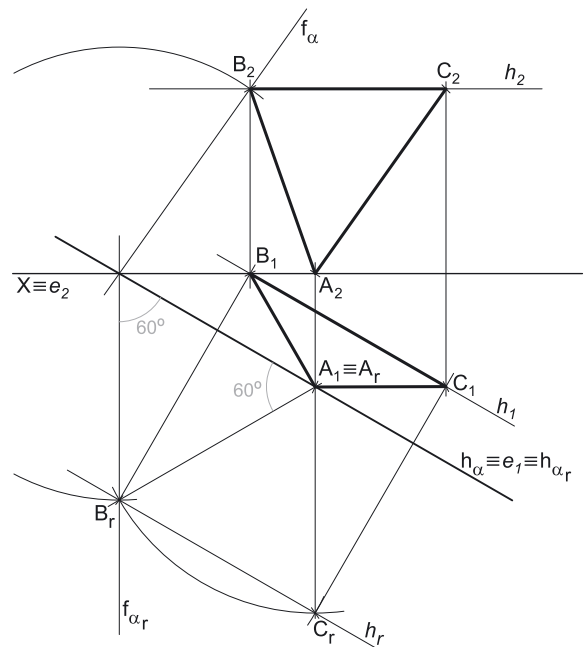
### Resolução:

O plano que contém o triângulo [**ABC**] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo [**ABC**] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado [**AB**], do triângulo, faz com o traço horizontal do plano (**h<sub>α</sub>**) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\alpha$  e, uma vez que o plano  $\alpha$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio triângulo, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Note que não seria possível rebater o plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, pois não é conhecido o seu traço frontal (**f<sub>α</sub>**) que, nesse caso, seria a charneira. Assim, começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  (**h<sub>α</sub>**), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, **h<sub>α</sub> ≡ e<sub>1</sub> ≡ h<sub>αr</sub>** (**e<sub>2</sub>**, a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a **h<sub>α</sub>**).

O ponto **A** é um ponto de **h<sub>α</sub>** (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **A<sub>r</sub> ≡ A<sub>1</sub>**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Representação do traço frontal do plano  $\alpha$ , em rebatimento, e construção do triângulo [ABC], em verdadeira grandeza:*

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano  $\alpha$  está em verdadeira grandeza, nomeadamente o próprio ângulo que os traços do plano fazem **entre si**. Assim, em rebatimento, já é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si**, o que nos permitiu desenhar  $f_{\alpha_r}$  (fazendo um ângulo de  $60^\circ$  com  $h_{\alpha_r}$ , como o enunciado refere expressamente).

Por outro lado, também já é possível construir o triângulo [ABC] em verdadeira grandeza, em rebatimento. Assim, em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de  $A_r$ , é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado [AB] faz com  $h_{\alpha_r}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – é o ângulo que o segmento  $[A_r B_r]$  faz com  $h_{\alpha_r}$ . Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte do lado [AB] do triângulo, em rebatimento. Uma vez que o ponto B tem afastamento nulo (é dado no enunciado), o ponto B é um ponto do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha_r}$ ) pelo que, em rebatimento, o ponto  $B_r$  tem de se situar sobre  $f_{\alpha_r}$ . Assim, o ponto  $B_r$  é o ponto de interseção da reta suporte do segmento  $[A_r B_r]$  com  $f_{\alpha_r}$ .

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $60^\circ$  a partir de  $A_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ponto B pertence a  $f_{\alpha}$  – na outra hipótese, a reta suporte do segmento  $[A_r B_r]$  seria paralela a  $f_{\alpha_r}$ , pelo que, nesse caso, o ponto B situar-se-ia no infinito.

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o triângulo [ABC] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o terceiro vértice do polígono, em rebatimento – o ponto  $C_r$ . Note que, nesta construção, se garantiu que o triângulo se situa, na totalidade, no espaço do  $1^a$  Diedro (como o enunciado refere expressamente).

*Determinação das projeções do ponto B e do traço frontal do plano  $\alpha$*

A inversão do rebatimento do ponto B permitir-nos-á desenhar o traço frontal do plano ( $f_{\alpha}$ ), pois o ponto B é um ponto do traço frontal do plano ( $f_{\alpha_r}$ ).

Para inverter o rebatimento do ponto B conduziu-se, por  $B_r$  (o ponto B rebatido), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal a charneira que contém o arco do rebatimento do ponto B) – o ponto de interseção dessa perpendicular à charneira com o eixo X é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto B), pois o ponto B tem afastamento nulo. A partir de  $B_1$ , desenhou-se a linha de chamada do ponto B, perpendicular ao eixo X.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é o ponto de  $f_{\alpha}$  que é fixo, pois situa-se na charneira), e com raio até  $B_r$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à linha de chamada do ponto B, onde se situa  $B_2$  (a projeção frontal do ponto B). Este procedimento permitiu-nos, também, desenhar o traço frontal do plano  $\alpha$  –  $f_{\alpha}$  passa por  $B_2$  e é concorrente com  $h_{\alpha}$  no eixo X. Nesse sentido,  $f_{\alpha}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos – o ponto B e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\alpha$ .

*Determinação das projeções do ponto C e do triângulo [ABC]*

A inversão do rebatimento do ponto C processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto C pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $h$ , uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ . Note que a reta  $h$  é, na prática, a reta suporte do lado [BC] do triângulo que é horizontal (de nível). A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $B_r$  e  $C_r$ . Sublinha-se que o ponto B é o traço frontal da reta  $h$ , pois é o ponto da reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) que se situa sobre  $f_{\alpha_r}$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h$ . O ponto B é um ponto cujas projeções já foram determinadas, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $h$  em projeções – o ponto B. Falta-nos outro ponto ou uma direção. No entanto, também já temos a direção da reta  $h$  (que é a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $h$  – a reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto B) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ).

Por fim, pelo ponto  $C_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento e que não se identificou). O ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto C) – a projeção frontal do ponto C ( $C_2$ ) situa-se sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ), na linha de chamada de  $C_1$ .

A partir das projeções dos três pontos (A, B, e C), desenharam-se as projeções do triângulo [ABC].

**Traçado:**

Os dados (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) representou-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do triângulo [ABC] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo [ABC], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. O traço frontal do plano  $\alpha$ , integrando os dados de uma forma secundária, acaba por ser meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta  $h$ , da reta  $h_r$ , dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu inverter o rebatimento de  $f_{\alpha}$  e, ainda, do próprio  $f_{\alpha_r}$ ).

## 321.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. Note que o ângulo  $a$  que o enunciado se refere (o ângulo que os traços do plano fazem **entre si**) não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\delta$ .

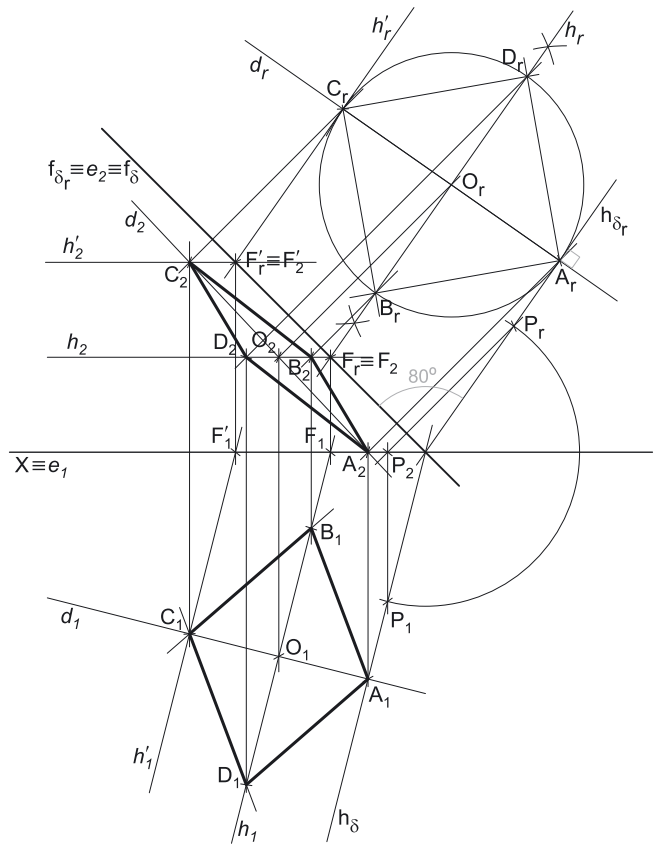
Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**, o que significa que se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si**, **no espaço**, antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – não se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem entre si, **na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção.

Também não é possível determinar as projeções do ponto **A**, pois o ponto **A**, tendo cota nula, é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), que ainda não foi determinado. Assim, os dados do exercício não nos permitem representar qualquer outro elemento do plano, para além do seu traço frontal ( $f_\delta$ ).

### Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\delta$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Note que não seria possível rebater o plano  $\delta$  para o Plano Horizontal de Projeção, pois não é conhecido o seu traço horizontal ( $h_\delta$ ) que, nesse caso, seria a charneira. Assim, começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $f_\delta \equiv e_2 \equiv f_{\delta_r}$  ( $e_1$ , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a  $f_\delta$ ).



### Representação do traço horizontal do plano $\delta$ e determinação das projeções do ponto **A**:

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano  $\delta$  está em verdadeira grandeza, nomeadamente o próprio ângulo que os traços do plano fazem **entre si**. Assim, em rebatimento, já é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si**, o que nos permitiu desenhar  $h_{\delta_r}$  (fazendo um ângulo de  $80^\circ$  com  $f_{\delta_r}$ , como o enunciado refere expressamente).

Por outro lado, sendo dado o afastamento do ponto **A**, não é ainda possível representar  $A_r$  sobre  $h_{\delta_r}$ , pois o afastamento do ponto **A** é a distância do ponto **A** ao Plano Frontal de Projeção e essa distância não se mede no plano  $\delta$  – mede-se ortogonalmente ao Plano Frontal de Projeção. De facto, caso se determinasse, por exemplo, o ponto de  $h_{\delta_r}$  que dista 6 cm de  $f_{\delta_r}$ , essa distância não seria o afastamento do ponto **A**, pois essa distância estaria a ser medida sobre o plano  $\delta$  (em rebatimento) e o plano  $\delta$  não é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção.

Assim, a determinação das projeções do ponto **A** tem de ser precedida pela representação do traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), para o que é necessário inverter o rebatimento efetuado. O rebatimento do traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ) processa-se com o recurso a um ponto qualquer de  $h_\delta$  – o ponto **P**, por exemplo. Nesse sentido, determinou-se um ponto qualquer,  $P_r$ , sobre  $h_{\delta_r}$ . A inversão do rebatimento do ponto **P** permitir-nos-á desenhar o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ), pois o ponto **P** é um ponto do traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ).

Para inverter o rebatimento do ponto **P** conduziu-se, por  $P_r$  (o ponto **P** rebatido), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal a charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **P**) – o ponto de interseção dessa perpendicular à charneira com o eixo **X** é  $P_2$  (a projeção frontal do ponto **P**), pois o ponto **P** tem cota nula. A partir de  $P_2$ , desenhou-se a linha de chamada do ponto **P**, perpendicular ao eixo **X**.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é o ponto de  $h_\delta$  que é fixo, pois situa-se na charneira), e com raio até  $P_r$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à linha de chamada do ponto **P**, onde se situa  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto **P**). Este procedimento permitiu-nos, também, desenhar o traço horizontal do plano  $\delta$  –  $h_\delta$  passa por  $P_1$  e é concorrente com  $f_\delta$  no eixo **X**. Nesse sentido,  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ) está definido por dois pontos – o ponto **P** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\delta$ .

Por fim, determinaram-se as projeções do ponto **A**, em função dos dados – o ponto **A**, porque tem cota nula (e porque pertence ao plano  $\delta$ ), é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ). Assim, o ponto **A** é o ponto de  $h_\delta$  que tem 6 cm de afastamento.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Rebatimento do ponto A e construção do quadrado [ABCD], em verdadeira grandeza:**

Em seguida, há que rebater o ponto **A** para ser possível, em rebatimento, construir o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza. Assim, por **A**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **A**) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contem o arco do rebatimento do ponto **A**) e determinou-se **A**<sub>r</sub> (o ponto **A** rebatido) sobre **h**<sub>δr</sub> (o traço horizontal do plano  $\delta$  rebatido) – **A**<sub>r</sub> é o ponto de concorrência da perpendicular à charneira que passa por **A**<sub>2</sub> com **h**<sub>δr</sub>.

Por fim, já é possível construir o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza, em rebatimento, respeitando os dados. O enunciado refere expressamente que a diagonal [AC] está contida numa reta de maior declive do plano  $\delta$  – reta de maior declive de um plano é toda a reta o plano que é perpendicular ao traço horizontal do plano. Em rebatimento, a perpendicularidade entre a reta de maior declive e o traço horizontal do plano é direta, pois todos os ângulos contidos no plano  $\delta$  estão em verdadeira grandeza, em rebatimento.

Nesse sentido, por **A**<sub>r</sub> conduziu-se uma perpendicular a **h**<sub>δr</sub> – essa perpendicular é **d**<sub>r</sub>, a reta de maior declive do plano  $\delta$  que passa pelo ponto **A** (em rebatimento) e que é, assim, a reta suporte da diagonal [AC] do quadrado (em rebatimento). Sobre a reta **d**<sub>r</sub> mediram-se os 7 cm (o comprimento da diagonal), o que nos permitiu determinar **C**<sub>r</sub> (o outro extremo da diagonal), sobre **d**<sub>r</sub>.

A partir de **A**<sub>r</sub> e de **C**<sub>r</sub> procedeu-se à construção do quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento) – o quadrado [A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>C<sub>r</sub>D<sub>r</sub>]. O ponto **O**<sub>r</sub> é o centro da circunferência circunscrita ao quadrado e é o ponto em que as diagonais do quadrado se bissectam. Note que, na determinação do ponto **C**<sub>r</sub>, se garantiu que o ponto **C** se situa no espaço do 1<sup>a</sup> Diedro, para que o quadrado se situe igualmente no espaço do 1<sup>a</sup> Diedro, como o enunciado refere expressamente.

A partir dos pontos **A**<sub>r</sub> e **B**<sub>r</sub>, construiu-se o triângulo [ABC] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o terceiro vértice do polígono, em rebatimento – o ponto **C**<sub>r</sub>.

**Determinação das projeções dos pontos B e D:**

A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **D** processa-se com o recurso a retas do plano  $\delta$  às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta **h**, que é a reta suporte da diagonal [BD] do quadrado. A reta **h**, está definida por dois pontos (os pontos **B**<sub>r</sub> e **D**<sub>r</sub>) e é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ . O ponto **F** é o traço frontal da reta **h** e situa-se no traço frontal do plano, pelo que **F**<sub>r</sub> se situa sobre **f**<sub>δr</sub>.

Sublinha-se que a reta **h** é necessariamente perpendicular à reta **d**, pois uma reta de maior declive de um plano é necessariamente perpendicular ao traço horizontal desse plano e a todas as retas horizontais (de nível) desse plano. Assim, se uma das diagonais do quadrado (que são perpendiculares entre si) está contida numa reta de maior declive do plano, a outra diagonal estaria necessariamente contida numa reta horizontal (de nível) do plano.

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **h**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta **h** em projeções. Falta-nos um ponto. O ponto **F**<sub>r</sub> é um ponto de **f**<sub>δr</sub>, que é a charneira, pelo que o ponto **F** roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **F**<sub>2</sub>  $\equiv$  **F**<sub>r</sub> (**F**<sub>1</sub> situa-se no eixo **X**, pois o ponto **F** tem afastamento nulo). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **h** – a reta **h** está, assim, definida por um ponto (o ponto **F**) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta **h**.

Em seguida, pelo ponto **B**<sub>r</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **h**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **h**) é **B**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **B**). A projeção horizontal do ponto **B** (**B**<sub>1</sub>) situa-se sobre **h**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **h**), na linha de chamada de **B**<sub>2</sub>. Por fim, pelo ponto **D**<sub>r</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **h**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **h**) é **D**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **D**). A projeção horizontal do ponto **D** (**D**<sub>1</sub>) situa-se sobre **h**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **h**), na linha de chamada de **D**<sub>2</sub>.

**Determinação das projeções do ponto C e do quadrado [ABCD]**

A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\delta$  à qual o ponto **C** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta **h'**, outra reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$  passando pelo ponto **C**. A reta **h'**, (a reta **h'** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **C**<sub>r</sub>) e uma direção (é paralela a **h**<sub>δr</sub>, pois é uma reta horizontal do plano  $\delta$ ). O ponto **F'** é o traço frontal da reta **h'** e situa-se no traço frontal do plano (**f**<sub>δ</sub>), pelo que **F'**<sub>r</sub> se situa sobre **f**<sub>δr</sub>.

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **h'**. O ponto **F'** é um ponto da charneira (que é **f**<sub>δ</sub>), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **F'**<sub>2</sub>  $\equiv$  **F'**<sub>r</sub> (**F'**<sub>1</sub> situa-se no eixo **X**, pois **F'** tem afastamento nulo). Já temos um ponto para definir a reta **h'** em projeções – o ponto **F'**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **h'** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , e retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **h'** (em projeções) – a reta **h'** está definida por um ponto (o ponto **F'**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ).

Em seguida, pelo ponto **C**<sub>r</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira. O ponto de interseção da perpendicular à charneira com **h'**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **h'**) é **C**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **C**) – a projeção horizontal do ponto **C** (**C**<sub>1</sub>) situa-se sobre **h'**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **h'**), na linha de chamada de **C**<sub>2</sub>.

Por fim, desenharam-se as duas projeções da reta **d**, a reta suporte da diagonal [AC] e determinaram-se as projeções do ponto **O** – a reta **d** está definida por dois pontos (os pontos **A** e **D**). O ponto **O** é necessariamente o ponto de concorrência das retas **h** e **d**. Assim, poder-se-ia ter recorrido à reta **d**, para se inverter o rebatimento do ponto **C** e se determinarem as suas projeções – a reta **d** estaria definida, nesse caso, pelos pontos **A** e **O**.

A partir das projeções dos quatro pontos, desenharam-se as projeções do quadrado [ABCD].

**Traçado:**

Os dados (o traço frontal do plano  $\delta$ ) representou-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado [ABCD] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado [ABCD], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. O traço horizontal do plano  $\delta$ , integrando os dados de uma forma secundária, acaba por ser meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **h**, **h'** e **d**, das retas **h**<sub>r</sub>, **h'**<sub>r</sub> e **d**<sub>r</sub>, dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu inverter o rebatimento de **h**<sub>δ</sub> e, ainda, do próprio **h**<sub>δr</sub>).





(continuação da página anterior)

*Rebatimento do ponto A e construção do triângulo [ABC], em verdadeira grandeza:*

Em seguida, há que rebater o ponto **A**, o que se processa rebatendo uma reta do plano à qual o ponto **A** pertença – a reta **h**, neste caso. Para definirmos a reta **h<sub>r</sub>** (a reta **h** rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **F** (o traço frontal da reta **h**) e um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **F<sub>r</sub> ≡ F<sub>2</sub>**. Já temos um ponto (o ponto **F<sub>r</sub>**), para definirmos a reta **h<sub>r</sub>** – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\psi$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir **h<sub>r</sub>**. A reta **h<sub>r</sub>** (a reta **h** rebatida) passa por **F<sub>r</sub>** e é paralela a **h<sub>ψr</sub>** – **h<sub>r</sub>** está definida por um ponto (o ponto **F<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a **h<sub>ψr</sub>**).

O ponto **A** é um ponto da reta **h** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **A<sub>r</sub>** está sobre **h<sub>r</sub>**, na perpendicular a **f<sub>ψ</sub>** (a charneira) que passa por **A<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**) – essa perpendicular corresponde ao traço frontal do plano ortogonal a **f<sub>ψ</sub>** (a charneira do rebatimento) que contém o ponto **A** (bem como o arco do seu rebatimento). Assim, **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido) é o ponto de interseção de **h<sub>r</sub>** com a perpendicular à charneira que passa por **A<sub>2</sub>**.

É dado que o ponto **B** (outro vértice do triângulo) é um ponto com 2 cm de cota e, como se referiu, não é possível medir quaisquer coordenadas dos pontos em rebatimento (no rebatimento do plano  $\psi$ ). Assim, o ponto **B** tem de pertencer a uma reta do plano  $\psi$ , que nos garanta que **B** tenha a cota pretendida. Nesse sentido, recorreu-se a uma reta **h'**, horizontal (de nível), pertencente ao plano  $\psi$  e com 2 cm de cota. A reta **h'** está definida por um ponto (o ponto **F'**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\psi$ ).

Em seguida, há que rebater a reta **h'** para, em rebatimento, ser possível determinar o ponto **B**. Para definirmos a reta **h'<sub>r</sub>** (a reta **h'** rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **F'** (o traço frontal da reta **h'**) e um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **F'<sub>r</sub> ≡ F'<sub>2</sub>**. Já temos um ponto (o ponto **F'<sub>r</sub>**), para definirmos a reta **h'<sub>r</sub>** – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **h'** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\psi$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **h'<sub>r</sub>** (a direção das retas horizontais do plano  $\psi$ ). A reta **h'<sub>r</sub>** (a reta **h'** rebatida) passa por **F'<sub>r</sub>** e é paralela a **h<sub>ψr</sub>** – **h'<sub>r</sub>** está definida por um ponto (o ponto **F'<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a **h<sub>ψr</sub>**).

Por fim, já é possível construir o triângulo [ABC] em verdadeira grandeza, em rebatimento, respeitando os dados. Com o compasso, fazendo centro em **A<sub>r</sub>** e com 6,5 cm de raio (o comprimento do lado do polígono), determinou-se **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido), sobre a reta **h'<sub>r</sub>**. Em seguida, a partir de **A<sub>r</sub>** e de **B<sub>r</sub>**, efetuou-se a construção do triângulo em verdadeira grandeza (o triângulo [A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>C<sub>r</sub>]), o que nos permitiu determinar o terceiro vértice da figura (em rebatimento) – o ponto **C<sub>r</sub>**. Tenha em conta que, tanto na determinação do ponto **B<sub>r</sub>**, como na construção do polígono em verdadeira grandeza, se garantiu que a figura se situa, na totalidade, no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro, como o enunciado refere expressamente.

*Determinação das projeções dos pontos B e C e do triângulo [ABC]*

O ponto **B** é um ponto da reta **h'** (cujas projeções já foram previamente determinadas), pelo que a inversão do seu rebatimento é direta. Assim, pelo ponto **B<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **h'<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **h'**) é **B<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **B**). A projeção horizontal do ponto **B** (**B<sub>1</sub>**) situa-se sobre **h'<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **h'**), na linha de chamada de **B<sub>2</sub>**.

A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\psi$  à qual o ponto **C** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta **h''**, outra reta horizontal (de nível) do plano  $\psi$  passando pelo ponto **C**. A reta **h''<sub>r</sub>** (a reta **h''** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **C<sub>r</sub>**) e uma direção (é paralela a **h<sub>ψr</sub>**, pois é uma reta horizontal do plano  $\psi$ ). O ponto **F''** é o traço frontal da reta **h''** e situa-se no traço frontal do plano (**f<sub>ψ</sub>**), pelo que **F''<sub>r</sub>** se situa sobre **f<sub>ψr</sub>**.

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **h''**. O ponto **F''** é um ponto da charneira (que é **f<sub>ψ</sub>**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **F''<sub>2</sub> ≡ F''<sub>r</sub>** (**F''<sub>1</sub>** situa-se no eixo **X**, pois **F''** tem afastamento nulo). Já temos um ponto para definir a reta **h''** em projeções – o ponto **F''**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **h''** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\psi$ , e retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **h''** (em projeções) – a reta **h''** está definida por um ponto (o ponto **F''**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\psi$ ).

Em seguida, pelo ponto **C<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira. O ponto de interseção da perpendicular à charneira com **h''<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **h''**) é **C<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **C**) – a projeção horizontal do ponto **C** (**C<sub>1</sub>**) situa-se sobre **h''<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **h''**), na linha de chamada de **C<sub>2</sub>**.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [ABC].

**Traçado:**

Os dados (o traço frontal do plano  $\psi$ ) representou-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do triângulo [ABC] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo [ABC], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. O traço horizontal do plano  $\psi$ , integrando os dados de uma forma secundária, acaba por ser meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **h**, **h'** e **h''**, das retas **h<sub>r</sub>**, **h'<sub>r</sub>** e **h''<sub>r</sub>**, dos planos ortogonais à charneira, do arco de transporte que nos permitiu inverter o rebatimento de **h<sub>ψ</sub>** e, ainda, do próprio **h<sub>δ</sub>**).

## 323.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. Note que não nos é dada qualquer informação sobre o traço frontal, de forma direta, pelo que não é possível representar o traço frontal do plano  $\rho$ . Assim, para já, o plano  $\rho$  está definido por uma única reta – o seu traço horizontal ( $h_\rho$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **C**, pertencente ao plano  $\rho$  – o ponto **C** tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). O ponto **C** é um ponto com cota nula, pelo que o ponto **C** é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano ( $h_\rho$ ), cujas projeções se determinaram imediatamente.

No entanto, não é possível determinar as projeções do ponto **A**, pois o ponto **A**, tendo afastamento nulo, é necessariamente um ponto do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), que ainda não foi determinado.

Note que é dado o **ângulo** que a diagonal **[AC]** do quadrado faz com  $h_\rho$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

### Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Por outro lado, também o **ângulo** que a diagonal **[AC]** do quadrado faz com o traço horizontal do plano ( $h_\rho$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\rho \equiv e_1 \equiv h_{\rho_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil. Note que não seria possível rebater o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção, pois, nessa situação, a charneira do rebatimento seria o traço frontal do plano ( $f_\rho$ ), que não é conhecido ainda (não é dado e ainda não foi determinado).

O ponto **C** é um ponto de  $h_\rho$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $C_r \equiv C_1$ . O rebatimento efetuado permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **C**).

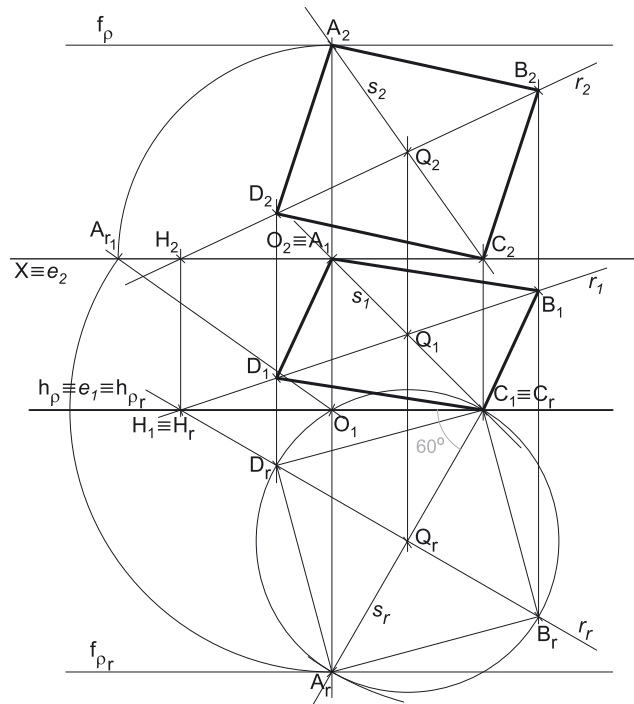
### Construção do quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza:

Em rebatimento, já é possível construir o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento). Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de  $C_r$ , é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que a diagonal **[AC]** faz com  $h_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) – é o ângulo que o segmento **[A<sub>r</sub>C<sub>r</sub>]** faz com  $h_{\rho_r}$ . Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte da diagonal **[AC]** do quadrado, em rebatimento. Sobre a reta suporte da diagonal **[AC]**, em rebatimento, e a partir de  $C_r$ , mediram-se os 8 cm (o comprimento da diagonal) e determinou-se  $A_r$ .

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $60^\circ$  a partir de  $C_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ponto **A** se situa à esquerda do ponto **C** e que o quadrado se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

A partir dos pontos  $A_r$  e  $C_r$ , construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), a partir da sua inscrição numa circunferência, e determinaram-se os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $B_r$  e  $D_r$ . Tenha em conta que, sendo o enunciado omissivo no que respeita a estes dois vértices, a decisão de situar **B** à direita e **D** à esquerda foi arbitrária.

Note que o ponto  $Q_r$  é o ponto médio do segmento **[A<sub>r</sub>C<sub>r</sub>]** e, por isso, em rebatimento, é o ponto em que as duas diagonais do quadrado se bissectam.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação do traço frontal do plano $\rho$ :

Em rebatimento, foi possível desenhar, de forma imediata, o traço frontal do plano  $\rho$  rebatido ( $f_{\rho r}$ ) –  $f_{\rho r}$  passa por  $A_r$  e é paralelo ao eixo  $X$ . Note que o ponto  $A$  tem afastamento nulo (é dado no enunciado), pelo que o ponto  $A$  é necessariamente um ponto do traço frontal do plano ( $f_{\rho}$ ).

Para se desenhar o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{\rho}$ ), é necessário inverter o rebatimento de um ponto qualquer de  $f_{\rho}$  – um ponto  $A$ , neste caso. Para tal conduziu-se, por  $A_r$ , uma perpendicular a charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ ), o que nos permitiu determinar, de forma imediata,  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), sobre o eixo  $X$  (pois o ponto  $A$  tem afastamento nulo). Em seguida, determinou-se o ponto  $O$ , que é o centro do arco do rebatimento do ponto  $A$  – o ponto  $O$  é o ponto de interseção da charneira ( $h_{\rho}$ ) com o plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$  (e que não se identificou). Agora há que construir o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), de forma a ser possível determinar a projeção frontal do ponto  $A$  e, dessa forma, determinar o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{\rho}$ ).

O triângulo  $[OAA_1]$  é o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  e é retângulo em  $A_1$ . Com o compasso, fazendo centro e  $O_1$  e com raio até  $A_r$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), até ao eixo  $X$ , onde se situa  $A_{r1}$  –  $A_{r1}$  é o ponto  $A$ , rebatido pelo rebatimento do plano de perfil (o plano que contém o arco do seu rebatimento). Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$ , em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) – o triângulo  $[O_1A_{r1}A_1]$  é o triângulo  $[OAA_1]$  em verdadeira grandeza.

Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $A_1$  e raio até  $A_{r1}$ , inverteu-se o rebatimento do plano de perfil, determinando-se  $A_2$  sobre a perpendicular à charneira que passa por  $A_r$  (note que  $A_1A_rA_{r1}$  é a cota do ponto  $A$ ). Este procedimento permitiu-nos, finalmente, desenhar o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{\rho}$ ), que está definido por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). Tenha ainda em conta que se garantiu que o ponto  $A$  tem cota positiva, para se situe no espaço do 1º Diedro (para que o triângulo se situe no 1º Diedro, como o enunciado refere expressamente).

#### Determinação das projeções dos pontos $A$ , $B$ e $D$ e do quadrado $[ABCD]$ :

O ponto  $A$  é um ponto de  $f_{\rho}$ , pois  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido) situa-se sobre  $f_{\rho r}$ . Conduzindo, por  $A_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ ), determinaram-se as projeções do ponto  $A$  de forma imediata, garantindo-se que o ponto  $A$  se situa sobre  $f_{\rho}$ .

A inversão do rebatimento dos pontos  $B$  e  $D$  processa-se com o recurso a retas do plano  $\rho$ , às quais aqueles pontos pertençam. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a uma única reta que contenha os dois pontos – a reta  $r$ , que é a reta suporte da diagonal  $[BD]$  do quadrado. A reta  $s_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $D_r$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . O ponto  $H$  é o traço horizontal da reta  $r$  e é um ponto de  $h_{\rho}$ , pelo que  $H_r$  (o ponto  $H$  rebatido) se situa sobre  $h_{\rho r}$ . O ponto  $H$  é, assim, um ponto da charneira (que é  $h_{\rho}$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_1 \equiv H_r$  ( $H_2$  situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $H$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. Esse outro ponto pode ser o ponto  $Q$ , o centro do quadrado.

Assim, em primeiro lugar é necessário determinar as projeções do ponto  $Q$ . Para tal recorreu-se à reta  $s$ , a reta suporte da diagonal  $[AC]$  do quadrado – a reta  $s_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $C_r$ ). As projeções da reta  $s$  desenharam-se de forma imediata, pois já temos as projeções dos dois pontos que a definem – os pontos  $A$  e  $C$ . Em seguida, pelo ponto  $Q_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira, que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $Q$ , sobre as projeções homónimas da reta  $s$ .

Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – a reta  $r$  está definida por dois pontos (o ponto  $H$  e o ponto  $Q$ ). Em seguida, pelo ponto  $B_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira, que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $B$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ . De forma semelhante, pelo ponto  $D_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira, que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $D$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ .

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do quadrado  $[ABCD]$ .

#### Traçado:

Os dados (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). No contexto do exercício, o traço frontal do plano ( $f_{\rho}$ ), que não é dado de forma direta, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **médio-leve**. As duas projeções do quadrado  $[ABCD]$  (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , das retas  $r_r$  e  $s_r$ , das perpendiculares à charneira, dos traçados necessários à inversão do rebatimento do ponto  $A$ , do próprio  $f_{\rho r}$  e, ainda, dos traçados necessários à construção do quadrado em rebatimento).

## 324.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Uma vez que o ponto **A** tem cota nula, sabe-se que o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) passa necessariamente pelo ponto **A**, o que nos permitiu, de forma direta, desenhar  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) –  $h_p$  está definido ponto um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Em seguida, desenhou-se o traço frontal do plano  $\rho$ , que tem 5 cm de cota, pois o plano  $\rho$ , porque é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ , tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X** (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

Note que é dado o **ângulo** que o lado **[AB]** do quadrado faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

### Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado **[AB]** do quadrado faz com o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{p_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

O ponto **A** é um ponto de  $h_p$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ . O rebatimento efetuado permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **A**).

### Rebatimento do traço frontal do plano $\rho$ :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $f_p$  é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo **X**. Falta-nos um ponto para definir  $f_p$  em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de  $f_p$  – um ponto **P**, por exemplo.

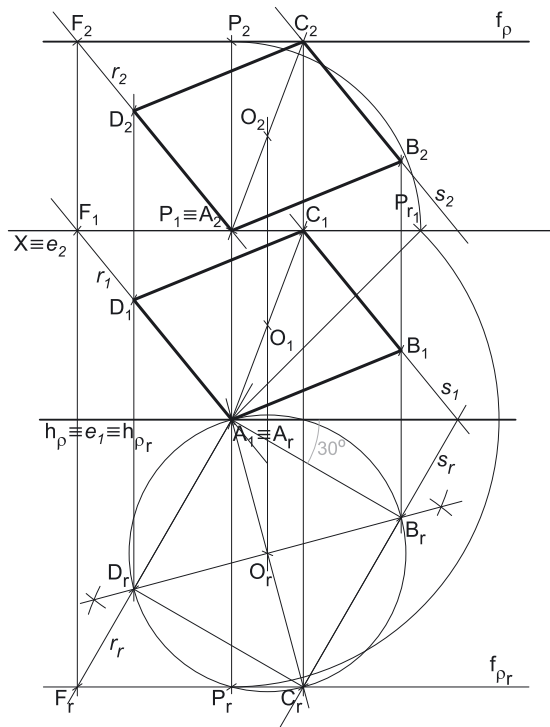
Assim, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto **P**) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil, ortogonal à charneira, que contém o arco do rebatimento do ponto **P**). O centro do arco do rebatimento do ponto **P** (que não se identificou) é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a própria charneira –  $h_p$ . O raio do arco do rebatimento do ponto **P** é o comprimento da hipotenusa do triângulo do seu rebatimento, que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (está contida no plano de perfil). Nesse sentido, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **P** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil). Para tal, conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto **P**), uma paralela à charneira (que é o próprio eixo **X**), para a qual se transportou a cota do ponto **P** com o compasso (fazendo centro em  $P_1$  e raio até  $P_2$ ). Este procedimento permitiu-nos determinar  $P_{r_1}$  (que é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano de perfil).

Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **P** e, com o compasso, fazendo centro na charneira e raio até  $P_{r_1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **P** (o arco  $\widehat{P_r P_{r_1}}$ ) até à perpendicular à charneira, onde se situa  $P_r$  (o ponto **P** rebatido). Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se  $f_{p_r}$  (o traço frontal do plano  $\rho$ , em rebatimento), paralelo ao eixo **X** –  $f_{p_r}$  está definido por um ponto (o ponto  $P_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

### Construção do quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza:

Em rebatimento, já é possível construir o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento). Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de  $A_r$ , é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado **[AB]** faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) – é o ângulo que o segmento  $[A_r B_r]$  faz com  $h_{p_r}$ . Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte do lado **[AB]** do triângulo, em rebatimento.

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $30^\circ$  a partir de  $A_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ângulo tem abertura para a direita.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, é dado que o vértice **C** do quadrado tem afastamento nulo, ou seja, situa-se no traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{\rho}$ ). Assim, há que desenhar a diagonal **[AC]** do quadrado, em rebatimento, ara, dessa forma, ser possível determinar o ponto **C** em rebatimento. Uma vez que as diagonais do quadrado fazem, com os lados do quadrado, ângulos de  $45^\circ$ , a partir de  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) mediu-se, em verdadeira grandeza, um ângulo de  $45^\circ$  com a reta suporte de  $[A_r B_r]$ , o que nos permitiu desenhar a reta suporte da diagonal **[AC]**, em rebatimento – o ponto de interseção desta reta com  $f_{\rho_r}$  (o traço frontal do plano  $\rho$  rebatido) é  $C_r$  (o ponto **C** rebatido). Assim,  $[A_r C_r]$  é, em rebatimento, a diagonal **[AC]** rebatida.

A partir dos pontos  $A_r$  e  $C_r$ , construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), a partir da sua inscrição numa circunferência, e determinaram-se os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $B_r$  e  $D_r$ . Tenha em conta que, sendo o enunciado omissivo no que respeita a estes dois vértices, a decisão de situar **B** à direita e **D** à esquerda foi arbitrária.

Note que o ponto  $O_r$  é o ponto médio do segmento  $[A_r C_r]$  e, por isso, em rebatimento, é o ponto em que as duas diagonais do quadrado se bissectam.

#### Determinação das projeções do ponto **D**:

A inversão do rebatimento do ponto **D** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto **D** pertença – a reta  $r$ , que é a reta suporte do lado **[AD]** do quadrado. A reta  $r_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $D_r$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  – ponto **A** (que é, na prática, o traço horizontal da reta  $r$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto **F** é o traço frontal da reta  $r$  e é um ponto de  $f_{\rho}$ , pelo que  $F_r$  (o ponto **F** rebatido) se situa sobre  $f_{\rho_r}$ . Conduzindo, por  $F_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **F**), determinaram-se as projeções do ponto **F**, garantindo-se que o ponto **F** se situa sobre  $f_{\rho}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – a reta  $r$  está definida por dois pontos (o ponto **A** e o ponto **F**).

Em seguida, pelo ponto  $D_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto **D**, sobre as projeções homónimas da reta  $r$ .

#### Determinação das projeções dos pontos **B** e **C** e do quadrado **[ABCD]**:

O ponto **C** é um ponto de  $f_{\rho}$ , pois  $C_r$  (o ponto **C** rebatido) situa-se sobre  $f_{\rho_r}$ . Conduzindo, por  $C_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **C**), determinaram-se as projeções do ponto **C** de forma imediata, garantindo-se que o ponto **C** se situa sobre  $f_{\rho}$ .

A inversão do rebatimento do ponto **B** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto **B** pertença – a reta  $s$ , que é a reta suporte do lado **[BC]** do quadrado. A reta  $s_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $C_r$ ). A reta  $s_r$  é necessariamente paralela à reta  $r_r$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $s$ . Já temos um ponto para definir a reta  $s$  – ponto **C** (que é, na prática, o traço frontal da reta  $s$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $s$  é paralela à reta  $r$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s$  em projeções – a reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto **C**) e uma direção (a direção da reta  $r$ ).

Por fim, pelo ponto  $B_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto **B**, sobre as projeções homónimas da reta  $s$ .

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**. Note que, não sendo pedido, se optou por determinar as projeções do ponto **O**, para haver uma total correspondência entre o rebatimento e as projeções. Assim, desenharam-se as duas projeções das diagonais do quadrado, o que nos permitiu determinar as projeções homónimas do ponto **O** – estas situam-se, ainda, na perpendicular à charneira que passa por  $O_r$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado **[ABCD]** (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado **[ABCD]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , das retas  $r_r$  e  $s_r$ , das perpendiculares à charneira, dos traçados necessários ao rebatimento do ponto **P**, do próprio  $f_{\rho_r}$  e, ainda, dos traçados necessários à construção do quadrado em rebatimento).



## 325.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **A**, bem como as retas **f** e **p**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta **f** está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção dada no enunciado). As projeções da reta **p** desenharam-se de forma direta, apesar de, em Dupla Projeção Ortogonal, a reta **p** não estar completamente definida, pois as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. No entanto, a reta **p** também está definida por um ponto (o ponto **A**) e uma direção (a direção dada no enunciado).

### Resolução:

O plano que contém o triângulo (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

No entanto, nesta situação, e porque não temos os traços do plano, o **recurso a esse processo não se revela viável**. Além do mais, não é possível recorrer, de forma imediata, ao rebatimento do plano  $\delta$ , pois não temos, ainda, elementos suficientes para se proceder ao rebatimento do plano.

Nesse sentido, é necessário, antes de mais, definir corretamente a reta **p**, o que se processa determinando as projeções do ponto **C**, pertencente à reta **p** e de acordo com os dados.

#### Determinação das projeções do ponto **C**:

Tendo em conta que existem, no espaço, infinitas retas de perfil passando pelo ponto **A** (e que têm as projeções desenhadas), há a referir que, dessa infinidade de retas, **apenas duas delas** fazem, com o Plano Horizontal de Projeção, um ângulo de  $65^\circ$  (o ângulo pedido). Por outro lado, há que determinar as projeções do ponto **C**, pertencente à reta **p** e situado a  $6,5$  cm do ponto **A**. Uma vez que as projeções da reta de perfil não verificam o **Critério de Reversibilidade**, a determinação do ponto **C** carece do recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, optou-se por se recorrer ao rebatimento do plano de perfil.

Assim, conduziu-se, pela reta **p**, o plano de perfil que a contém – o plano  $\pi$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ , que é uma reta vertical – reta **e**), rebatendo o ponto **A**, o que nos permitiu determinar **A<sub>r</sub>**. Note que os arcos do rebatimento estão contidos em planos horizontais (planos ortogonais à charneira), pelo que se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, o ponto **A**, ao longo do seu rebatimento, mantém a sua cota.

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano de perfil (o plano  $\pi$ ) está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de **A<sub>r</sub>**, é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que a reta **p** faz com o Plano Horizontal de Projeção (que é o ângulo que a reta **p<sub>r</sub>** faz com **h<sub>πr</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi$ , em rebatimento)). Isto permitiu-nos desenhar a reta **p<sub>r</sub>**, passando por **A<sub>r</sub>** e fazendo, com o eixo **X** (onde se situa **h<sub>πr</sub>**), o ângulo dado. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **A<sub>r</sub>** e com  $6,5$  cm de raio (o comprimento do lado **[AC]** do triângulo), determinou-se o ponto **C<sub>r</sub>**, sobre a reta **p<sub>r</sub>**.

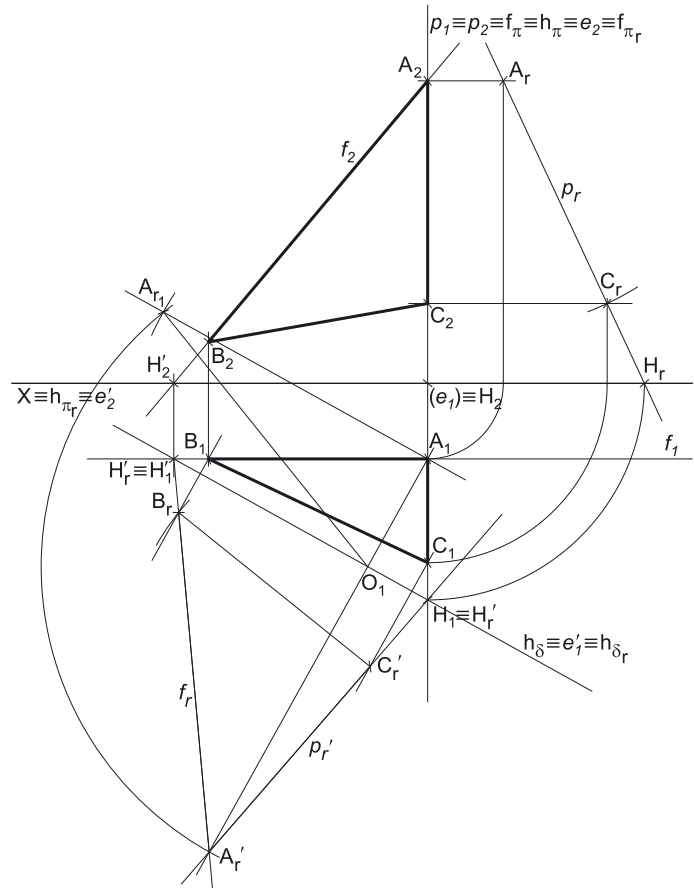
Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $65^\circ$  a partir de **A<sub>r</sub>**, aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ponto **C**, pertencente à reta **p**, se situa no  $1^\circ$  Diedro (para que o triângulo se situe no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente).

Por fim, invertendo-se o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto **C**, sobre as projeções homónimas da reta **p**. Note que não foi possível construir o triângulo **[ABC]** no rebatimento do plano  $\pi$ , pois o triângulo **não está contido** no plano  $\pi$  – o triângulo está contido no plano  $\delta$ .

#### Rebatimento do plano $\delta$ :

Como atrás se referiu, o plano que contém o triângulo (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\delta$  para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, há que determinar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (**h<sub>δ</sub>**).

O traço horizontal do plano  $\delta$  (**h<sub>δ</sub>**) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, é necessário determinar os traços horizontais das duas retas que definem o plano  $\delta$  – as retas **p** e **f**. Assim, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **p**, que foi previamente determinado em rebatimento (no rebatimento da reta **p** pelo rebatimento do plano  $\pi$ ) O ponto **H<sub>r</sub>** (o ponto **H** rebatido) é o ponto de concorrência da reta **p<sub>r</sub>** com **h<sub>πr</sub>** – invertendo o rebatimento, determinaram-se as projeções do ponto **H**. Já temos um ponto para definir **h<sub>δ</sub>** – falta-nos outro ponto ou uma direção. Em seguida, determinou-se o ponto **H'**, o traço horizontal da reta **f**. Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano  $\delta$  – **h<sub>δ</sub>** está definido por dois pontos (os pontos **H** e **H'**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, identificou-se a charneira do rebatimento do plano  $\delta$  (reta  $e'$ ), que é o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\delta \equiv e'_1 \equiv h_{\delta_r}$  ( $e'_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\delta$ ).

No rebatimento a efetuar, uma vez que não foi determinado o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), não é possível efetuar o rebatimento do plano  $\delta$  pelo rebatimento dos seus traços. Assim, optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\delta$ , pelo triângulo do rebatimento.

Optou-se por se rebater o ponto  $A$ , que é um dos dois pontos conhecidos do plano  $\delta$  (já são conhecidos dois vértices do triângulo  $[ABC]$  – os vértices  $A$  e  $C$ ). Note que a opção de rebater o ponto  $A$  (em vez de rebater o ponto  $C$ ) teve a ver com questões de rigor, pois  $A$  é o ponto mais distante da charneira. Por outro lado, o ponto  $A$  é o ponto de concorrência das duas retas que são as retas suporte de dois dos lados do triângulo – as retas  $f$  e  $p$ .

#### Rebatimento do ponto $A$ :

Para rebater o ponto  $A$  conduziu-se, por  $A_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ ) e determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto  $A$ , que é o ponto  $O$  (o ponto de interseção da charneira com a perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ ). Note que o ponto  $O$  se representou, apenas, pela sua projeção horizontal –  $O_1$ .

O raio do arco do rebatimento do ponto  $A$  é  $\overline{OA}$ , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto  $A$  – o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  é o triângulo retângulo  $[OAA_1]$ , que é retângulo em  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ). O raio do arco do rebatimento (a distância  $\overline{OA}$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (pois é oblíqua a ambos os planos de projeção), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano vertical (ortogonal à charneira) que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ , o que nos permite construir o triângulo  $[OAA_1]$  em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) conduziu-se uma paralela à charneira ( $h_\delta$ ), sobre a qual se marcou a cota do ponto  $A$  (que é um dos catetos do triângulo  $[OAA_1]$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $A_{r1}$ . O ponto  $A_{r1}$  é o ponto  $A$ , rebatido pelo rebatimento do plano vertical que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ . Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[O_1A_{r1}]$ , que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento (do ponto  $A$ ) em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O_1$  e com raio  $\overline{O_1A_{r1}}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$  (o arco  $\overline{A_rA_r}$ ), em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira (que passa por  $A_1$ ), onde se situa  $A_r' - A_r'$  é o ponto  $A$  rebatido pelo rebatimento do plano  $\delta$  (o ponto  $A$  no seu segundo rebatimento).

#### Rebatimento das retas $p$ e $f$ e do ponto $C$ :

Em seguida, há que rebater as retas  $p$  e  $f$ , de forma a ser possível construir o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza, em rebatimento.

Para definirmos a reta  $p_r'$  (a reta  $p$  rebatida pelo rebatimento do plano  $\delta$ ) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $p$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_r' \equiv H_1$ . Note que  $H_r'$  é o ponto  $H$  rebatido pelo rebatimento do plano  $\delta$  (o segundo rebatimento do ponto  $H$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $p_r'$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $p$  contém o ponto  $A$ , cujo rebatimento já foi efetuado, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p_r'$  – assim, desenhou-se a reta  $p_r'$ , que está definida por dois pontos (os pontos  $H_r'$  e  $A_r'$ ).

O ponto  $C$  é um ponto da reta  $p$  pelo que, em rebatimento, o ponto  $C$  tem de situar sobre a reta  $p_r'$ . Assim, por  $C_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal a charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $C$ ) e determinou-se  $C_r'$  sobre a reta  $p_r'$  –  $C_r'$  é o ponto  $C$ , rebatido pelo rebatimento do plano  $\delta$  (o segundo rebatimento do ponto  $C$ ).

Para definirmos a reta  $f_r'$  (a reta  $f$  rebatida) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $H'$  (o traço horizontal da reta  $f$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_r' \equiv H_1$ . Já temos um ponto para definir a reta  $f_r'$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $f$  contém o ponto  $A$ , cujo rebatimento já foi efetuado, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $f_r'$  – assim, desenhou-se a reta  $f_r'$ , que está definida por dois pontos (os pontos  $H_r'$  e  $A_r'$ ).

#### Construção do triângulo $[ABC]$ em verdadeira grandeza e determinação das suas projeções:

Em seguida, em rebatimento, já foi possível concluir a construção do triângulo  $[ABC]$  em rebatimento, em função dos dados. Com o compasso, fazendo centro no ponto  $C_r'$  e com 6,5 cm de raio, determinou-se o ponto  $B_r$ , sobre a reta  $f_r'$  – o ponto  $B$  é o ponto da reta  $f$  que dista 6,5 cm (o comprimento do lado  $[BC]$ ) do ponto  $C$ . Assim, no rebatimento do plano  $\delta$ , os segmentos  $[A_r'C_r']$  e  $[B_r'C_r']$  têm o mesmo comprimento, pois são (em rebatimento) os lados iguais do triângulo.

Por fim, para determinarmos as projeções do triângulo há que inverter o rebatimento do ponto  $B$ , o que se processa de forma direta. A inversão do rebatimento do ponto  $B$  processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\delta$  à qual o ponto  $B$  pertença – a reta  $f$ , neste caso, cujas projeções já são conhecidas.

Assim, pelo ponto  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento). O ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ) é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ) – a projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ) situa-se sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ), na linha de chamada de  $B_1$ .

A partir das projeções dos três pontos (os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ ), desenharam-se as duas projeções do triângulo  $[ABC]$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $f$  e  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do triângulo  $[ABC]$  (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  e, ainda, de todos os traçados respeitantes ao rebatimento do plano  $\delta$ , nomeadamente o seu traço horizontal –  $h_\delta$ ).

## 326.

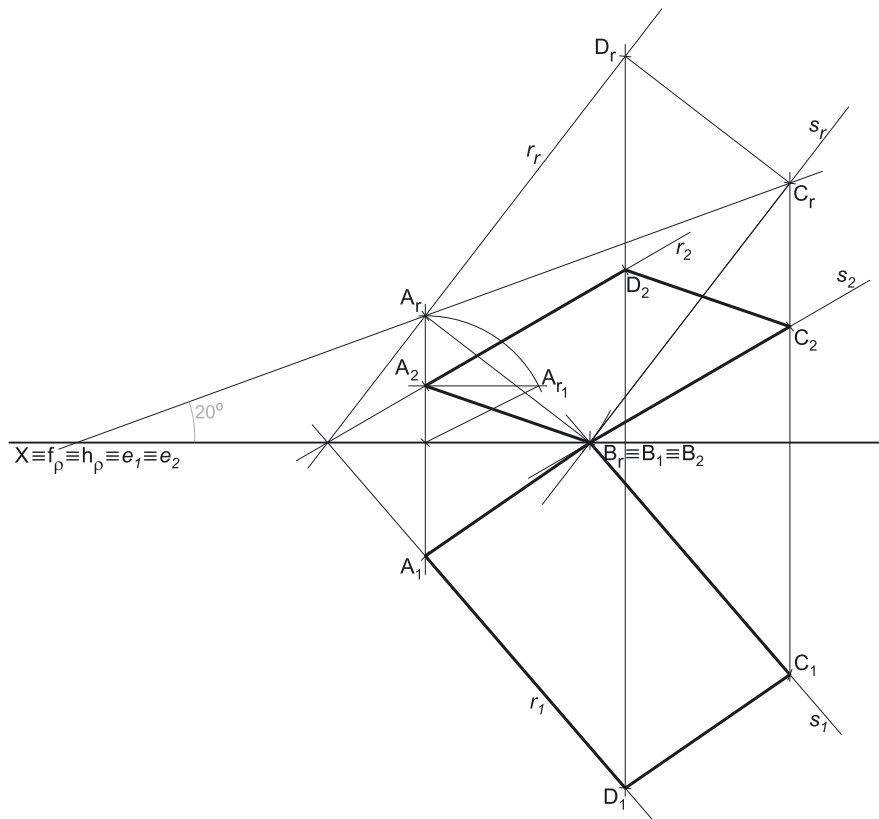
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**.

Note que é dado o **ângulo** que a diagonal **[AC]** do retângulo faz com o eixo **X**, mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

### Resolução:

O plano que contém o retângulo **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o retângulo **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do retângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Por outro lado, também o **ângulo** que a diagonal **[AC]** do retângulo faz com o eixo **X** **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio retângulo, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.



De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano passante, pelo rebatimento das suas retas (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Optemos por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente  $X \equiv f_p \equiv h_p \equiv e_1 \equiv e_2$  (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

### Rebatimento do ponto **A**:

Efetuiu-se o rebatimento do ponto **A**. Pelo ponto **A** conduziu-se uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto **A** (note que não se identificou esse plano, com vista a uma simplificação da resolução gráfica, em termos de notações utilizadas). O centro do arco do rebatimento do ponto **A** é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com o eixo **X** (que é a charneira do rebatimento). O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A**, que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, é necessário recorrer ao rebatimento do plano de perfil (o plano que contém o triângulo do rebatimento do ponto **A**), com vista à construção do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza.

Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) conduziu-se, por **A<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou o afastamento do ponto **A** (que é um dos catetos do triângulo do rebatimento do ponto **A**), o que nos permitiu determinar o ponto **A<sub>r1</sub>** – **A<sub>r1</sub>** é o ponto **A**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil. Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento (em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio até **A<sub>r1</sub>**, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco **A<sub>r1</sub>A<sub>r</sub>**) até à perpendicular à charneira que passa por **A<sub>1</sub>**, que é onde se situa **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido).

### Construção do quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza:

Em seguida, efetuaram-se os procedimentos necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento. Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de **A<sub>r</sub>**, é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que a diagonal **[AC]** faz com o eixo **X** – é o ângulo que o segmento **[A<sub>r</sub>C<sub>r</sub>]** faz com o eixo **X**. Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte da diagonal **[AC]** do retângulo, em rebatimento.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **A<sub>r</sub>** e com 5,5 cm de raio, determinou-se o ponto **B<sub>r</sub>**, no eixo **X** – uma vez que o vértice **B**, do retângulo, se situa no eixo **X**, **B<sub>r</sub>** é o ponto do eixo **X** tal que **A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>** = 5,5 cm (a medida do lado **[AB]** do polígono). A partir de **B<sub>r</sub>** mediu-se um ângulo reto, o que nos permitiu determinar o ponto **C<sub>r</sub>**, na reta suporte da diagonal **[A<sub>r</sub>C<sub>r</sub>]**. Por fim, concluiu-se a construção do retângulo **[ABCD]** em rebatimento (o retângulo **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>C<sub>r</sub>D<sub>r</sub>]**), o que nos permitiu determinar o vértice **D<sub>r</sub>**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $20^\circ$  a partir de  $A_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ângulo tem abertura para a direita, como o enunciado refere expressamente. Note ainda que se garantiu que o retângulo se situa, na totalidade, no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado pede de forma inequívoca.

#### Determinação das projeções do ponto $D$ :

A inversão do rebatimento do ponto  $D$  processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto  $D$  pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $r$ , uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , passando pelo ponto  $D$  (a reta  $r$  é a reta suporte do lado  $[AD]$  do retângulo). A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $D_r$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . A reta  $r$  passa pelo ponto  $A$ , cujas projeções são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções – o ponto  $A$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $r$  é necessariamente uma reta passante, pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – note que não se identificou esse ponto. Assim, já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $r$ , que está definida por dois pontos – o ponto  $A$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ .

Por fim, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto  $D$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ .

#### Determinação das projeções dos pontos $B$ e $C$ e do retângulo $[ABCD]$ :

O ponto  $B$  é um ponto da charneira (o eixo  $X$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $B_1 \equiv B_2 \equiv B_r$ .

A inversão do rebatimento do ponto  $C$  processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto  $C$  pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $s$ , uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , passando pelo ponto  $C$  (a reta  $s$  é a reta suporte do lado  $[BC]$  do retângulo). A reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida) está definida por dois pontos ( $B_r$  e  $C_r$ ) e é necessariamente paralela à reta  $m_r$ .

A reta  $s$  é necessariamente uma reta passante – é uma reta concorrente com o eixo  $X$  num ponto (o ponto  $B$ ), cujas projeções já são foram determinadas. Assim, já temos um ponto para definir a reta  $s$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $s$  é paralela à reta  $r$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s$  – a direção da reta  $r$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $s$ , que está definida por um ponto (o ponto  $B$ ) e uma direção (a direção da reta  $r$ ).

Em seguida, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto  $C$ , sobre as projeções homónimas da reta  $s$ . A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do retângulo  $[ABCD]$ .

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ . As duas projeções do retângulo  $[ABCD]$  (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O retângulo  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas  $r$  e  $s$ , das retas  $r_r$  e  $s_r$ , dos planos ortogonais à charneira e dos traçados necessários ao rebatimento do ponto  $A$ ).

## 17 PROBLEMAS MÉTRICOS

### 327.

Por **problemas métricos** entende-se o conjunto das situações que envolvem a determinação da real dimensão (verdadeira grandeza) de algumas grandezas mensuráveis, nomeadamente **distâncias** (entre pontos, entre pontos e planos, entre pontos e retas e entre planos paralelos) e **ângulos** (entre retas, entre retas e planos e entre planos).

### 328.

O objetivo dos **problemas métricos** é, precisamente, determinar algumas grandezas mensuráveis (distâncias e ângulos), por processos racionais e científicos, traduzidos, na folha de papel, em procedimentos gráficos fundamentados na Dupla Projeção Ortogonal.

### 329.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B** pelas respetivas projeções, em função dos dados.

#### Resolução:

A distância entre os pontos **A** e **B** é o comprimento do segmento de reta que tem extremos nesses dois pontos. Assim, em primeiro lugar desenharam-se as projeções do segmento de reta **[AB]**, que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos.

O segmento de reta **[AB]** não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. O enunciado refere expressamente que o processo geométrico auxiliar a utilizar é o do rebatimento do plano projetante frontal da distância (do segmento) para o Plano Horizontal de Projeção.

Nesse sentido, representou-se o plano  $\alpha$  (o plano projetante frontal do segmento) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, é um ponto situado no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos frontais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

Os arcos do rebatimento dos pontos estão contidos em planos frontais (de frente), pelo que os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Em seguida, efetuou-se o rebatimento de cada um dos pontos, o que nos permitiu determinar **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**.

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>** – o segmento de reta **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** é o segmento de reta **[AB]** rebatido e está em verdadeira grandeza, porque está no Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, **A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>** é a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em **A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>** que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos traços do plano  $\alpha$ , de todos os traçados necessários ao rebatimento dos pontos **A** e **B** e do eixo **Y = Z**, que é uma linha de referência).

### 330.

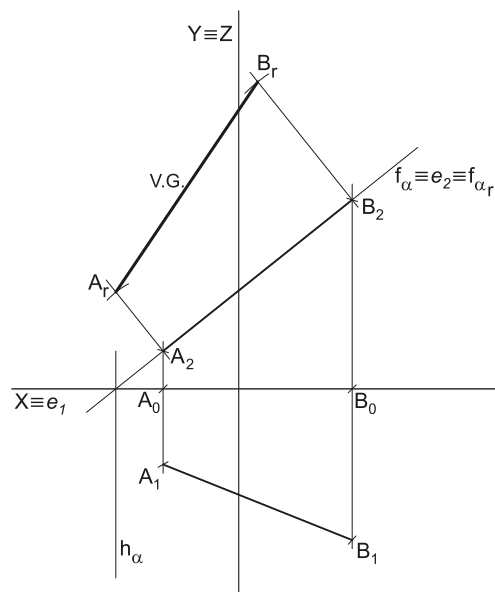
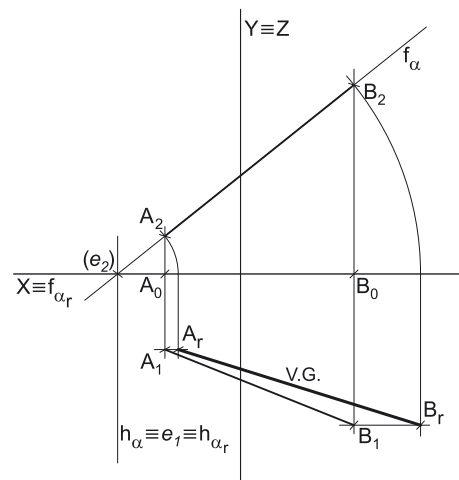
#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B** pelas respetivas projeções, em função dos dados.

#### Resolução:

A distância entre os pontos **A** e **B** é o comprimento do segmento de reta que tem extremos nesses dois pontos. Assim, em primeiro lugar desenharam-se as projeções do segmento de reta **[AB]**, que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos.

O segmento de reta **[AB]** não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. O enunciado refere expressamente que o processo geométrico auxiliar a utilizar é o do rebatimento do plano projetante frontal da distância (do segmento) para o Plano Frontal de Projeção.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, representou-se o plano  $\alpha$  (o plano projetante frontal do segmento) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $f_\alpha \equiv e_2 \equiv f_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ).

Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a  $f_\alpha$ ). Os arcos do rebatimento dos pontos estão contidos em planos de topo, que não são paralelos a qualquer dos planos de projeção – assim, ao longo do seu rebatimento, nem se mantém qualquer das coordenadas dos pontos a rebater nem os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de projeção. No entanto, sublinha-se que os planos que contêm os arcos do rebatimento são planos projetantes frontais.

Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao traço frontal do plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**) –  $A_r$  tem de se situar sobre esta perpendicular à charneira, porque o plano que contém o arco do rebatimento é um plano projetante frontal. Por outro lado, o **centro do arco do rebatimento** do ponto **A** (que não se identificou) é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a própria charneira. Por fim, o **raio do arco do rebatimento** do ponto **A** é, nesta situação, o afastamento do ponto **A** ao centro do arco do seu rebatimento). Assim, sobre a perpendicular à charneira (que passa por  $A_2$ ), e a partir de  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), mediu-se o afastamento do ponto **A** (o raio do arco do seu rebatimento) e determinou-se  $A_r$ , sobre a perpendicular à charneira.

De forma semelhante, para rebater o ponto **B** conduziu-se, por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto **B**), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao traço frontal do plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **B**) –  $B_r$  tem de se situar sobre esta perpendicular à charneira, porque o plano que contém o arco do rebatimento é um plano projetante frontal. Por outro lado, o **centro do arco do rebatimento** do ponto **B** (que não se identificou) é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a própria charneira. Por fim, o **raio do arco do rebatimento** do ponto **B** é, nesta situação, o afastamento do ponto **B** (a distância do ponto **B** ao centro do arco do seu rebatimento). Assim, sobre a perpendicular à charneira (que passa por  $B_2$ ), e a partir de  $B_2$  (a projeção frontal do ponto **B**), mediu-se o afastamento do ponto **B** (o raio do arco do seu rebatimento) e determinou-se  $B_r$ , sobre a perpendicular à charneira.

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $A_r$  e  $B_r$  – o segmento de reta  $[A_r B_r]$  é o segmento de reta  $[AB]$  rebatido e está em verdadeira grandeza, porque está no Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido,  $A_r B_r$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta  $[A_r B_r]$  representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em  $A_r B_r$  que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos traços do plano  $\alpha$ , de todos os traçados necessários ao rebatimento dos pontos **A** e **B** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 331.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B** pelas respetivas projeções, em função dos dados.

#### Resolução:

A distância entre os pontos **A** e **B** é o comprimento do segmento de reta que tem extremos nesses dois pontos. Assim, em primeiro lugar desenharam-se as projeções do segmento de reta  $[AB]$ , que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos.

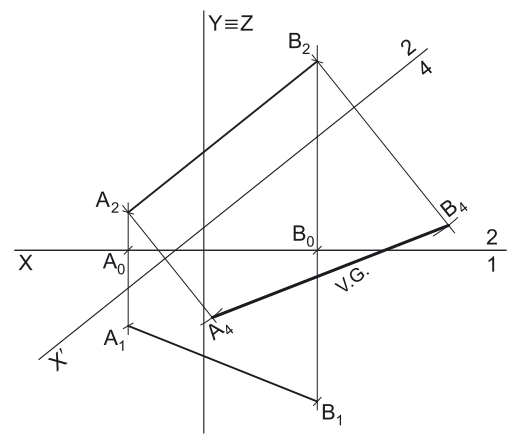
O segmento de reta  $[AB]$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. O enunciado refere expressamente que o processo geométrico auxiliar a utilizar é o da mudança do diedro de projeção.

Nesse sentido, para determinar a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos (a verdadeira grandeza do segmento de reta  $[AB]$ ) é necessário transformar o segmento de reta num segmento de reta paralelo a um dos planos de projeção – um segmento de reta horizontal (de nível) ou num segmento de reta frontal (de frente). Optou-se pela primeira hipótese.

Para transformar o segmento de reta  $[AB]$  num segmento de reta horizontal (de nível), é necessário, substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** dos seus pontos (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $4/2$ . Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta  $[AB]$ , o eixo  $X'$  é paralelo a  $[A_2 B_2]$ . As linhas de chamada dos pontos **A** e **B**, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

$A_4$  é a projeção do ponto **A** no plano 4 e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_1$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – o afastamento do ponto **A**).  $B_4$  é a projeção do ponto **B** no plano 4 e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_1$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – o afastamento de **B**).

No novo diedro de projeção, o segmento está paralelo ao plano 4 (está transformado num segmento de reta horizontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua projeção no plano 4 (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de  $\overline{AB}$  é  $\overline{A_4B_4}$ .

**Traçado:**

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta ( $\overline{A_4B_4}$ ) representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em  $\overline{A_4B_4}$  que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 332.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B** pelas respetivas projeções, em função dos dados.

**Resolução:**

A distância entre os pontos **A** e **B** é o comprimento do segmento de reta que tem extremos nesses dois pontos. Assim, em primeiro lugar desenharam-se as projeções do segmento de reta  $[\overline{AB}]$ , que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos.

O segmento de reta  $[\overline{AB}]$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. O enunciado refere expressamente que o processo geométrico auxiliar a utilizar é o do rebatimento do plano projetante horizontal da distância (do segmento) para o plano frontal (de frente) que contém o ponto **A**.

Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que passa por **A**) pelo seu traço horizontal –  $h_\varphi$ . O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**).

Não houve necessidade de representar o plano projetante horizontal do segmento pelos seus traços, como em seguida se exporá.

Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos – o plano  $\varphi$  e o plano projetante horizontal do segmento. Para definir a reta  $e$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta de interseção entre dois planos projetantes horizontais é necessariamente uma reta projetante horizontal (uma reta vertical), pelo que já temos uma direção para definir a reta  $e$ . Falta-nos um ponto para definir a reta  $e$ . O ponto **A** é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $e$  – a reta  $e$  (a charneira do rebatimento) está, assim, definida por um ponto (o ponto **A**) e uma direção (é vertical), o que nos permitiu representar a reta pelas suas projeções.

O plano projetante horizontal do segmento está, assim, definido por uma reta (a reta  $e$ ) e um ponto exterior à reta (o ponto **B**, que também pertence ao plano). Os planos ortogonais à charneira do rebatimento (que contêm os arcos do rebatimento de cada ponto) são planos horizontais (de nível).

Rebatendo o plano projetante horizontal do segmento para o plano  $\varphi$  (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), tudo o que estiver rebatido sobre o plano  $\varphi$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, o ponto **A**, porque é um ponto da charneira, roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que se tem imediatamente  $A_r \equiv A_2$ . Para rebater o segmento de reta (rebatendo o seu plano projetante horizontal) basta, então, rebater o ponto **B**.

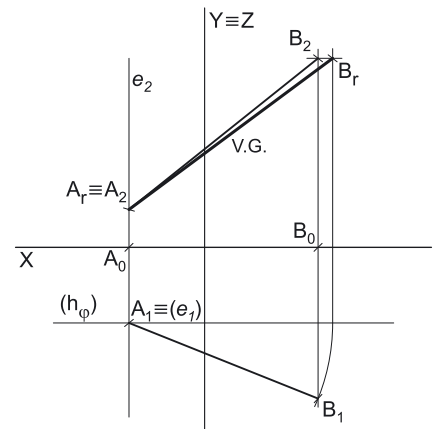
Os arcos do rebatimento dos pontos estão contidos em planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Por outro lado, a charneira é uma reta projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais dos centros dos arcos do rebatimento de todos os pontos estão coincidentes com a projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ).

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e_1$  (a projeção horizontal da charneira) e com raio até  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**), desenhou-se a projeção horizontal do arco do rebatimento do ponto **B**, até ao traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), onde se situa o outro extremo do arco. Em seguida, desenhou-se uma linha de chamada e, atendendo a que o ponto **B** mantém a sua cota ao longo do rebatimento, determinou-se  $B_r$  (o ponto **B** rebatido).

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $A_r$  e  $B_r$  – o segmento de reta  $[\overline{A_rB_r}]$  é o segmento de reta  $[\overline{AB}]$  rebatido e está em verdadeira grandeza, porque está contido num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido,  $\overline{A_rB_r}$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos, o que se identificou no desenho.

**Traçado:**

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta ( $[\overline{A_rB_r}]$ ) representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em  $\overline{A_rB_r}$  que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $e$ , do traço horizontal do plano  $\varphi$ , de todos os traçados necessários ao rebatimento do ponto **B** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 333.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B** pelas respectivas projeções, em função dos dados.

**Resolução:**

A distância entre os pontos **A** e **B** é o comprimento do segmento de reta que tem extremos nesses dois pontos. Assim, em primeiro lugar desenharam-se as projeções do segmento de reta **[AB]**, que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos.

O segmento de reta **[AB]** não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. O enunciado refere expressamente que o processo geométrico auxiliar a utilizar é o do rebatimento do plano projetante horizontal da distância (do segmento) para o plano horizontal (de nível) que contém o ponto **A**.

Nesse sentido, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que passa por **A**) pelo seu traço frontal –  $f_v$ . O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**).

Não houve necessidade de representar o plano projetante horizontal do segmento pelos seus traços, como em seguida se exporá.

Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos – o plano  $v$  e o plano projetante horizontal do segmento. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da charneira (reta  $e$ ) está sobre o traço frontal do plano  $v$  – tem-se, imediatamente,  $e_2 \equiv (f_v)$ . Por outro lado, o plano projetante horizontal do segmento **[AB]** é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ) está sobre a projeção horizontal do segmento de reta **[AB]** –  $e_1$  (a projeção horizontal da charneira) é a reta suporte de  $[A_1B_1]$  (a projeção horizontal do segmento). A reta  $e$ , definida pelas suas projeções, é a reta que pertence simultaneamente aos dois planos.

O plano projetante horizontal do segmento está, assim, definido por uma reta (a reta  $e$ ) e um ponto exterior à reta (o ponto **B**, que também pertence ao plano). Os planos ortogonais à charneira do rebatimento (que contêm os arcos do rebatimento de cada ponto) são planos verticais (ortogonais à reta  $e$ ).

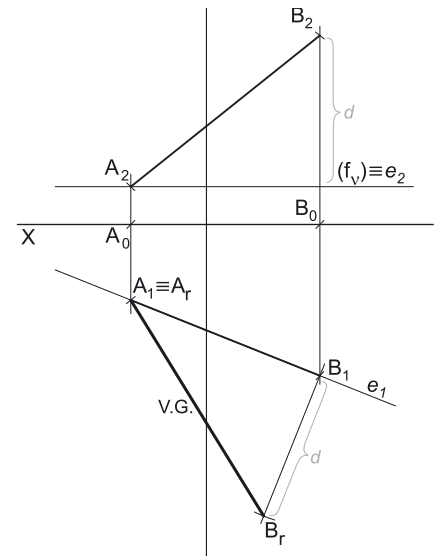
Rebatendo o plano projetante horizontal do segmento para o plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), tudo o que estiver rebatido sobre o plano  $v$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, o ponto **A**, porque é um ponto da charneira, roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que se tem imediatamente  $A_r \equiv A_1$ . Para rebater o segmento de reta (rebatendo o seu plano projetante horizontal) basta, então, rebater o ponto **B**.

Por  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **B** –  $B_r$  situa-se necessariamente sobre essa perpendicular à charneira. O raio do arco do rebatimento é a distância do ponto **B** ao plano  $v$  – a distância  $d$  (a cota do ponto **B** em relação ao plano  $v$ ). Assim, sobre a perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ , e a partir de  $B_1$ , mediu-se a distância  $d$  (a cota do ponto **B** em relação ao plano  $v$ ) e determinou-se  $B_r$  (o ponto **B** rebatido).

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $A_r$  e  $B_r$  – o segmento de reta  $[A_rB_r]$  é o segmento de reta **[AB]** rebatido e está em verdadeira grandeza, porque está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido,  $A_rB_r$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos, o que se identificou no desenho.

**Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta  $[A_rB_r]$  representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em  $A_rB_r$  que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $e$ , do traço frontal do plano  $v$ , dos traçados necessários ao rebatimento do ponto **B** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).





(continuação da página anterior)

Nesse sentido, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém o segmento) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ). A charneira do rebatimento é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira que contém os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento. Por fim, os arcos do rebatimento, projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento de cada um dos dois pontos. Para rebater o ponto **R**, com o compasso, fazendo centro em  $e_1$  (a projeção horizontal da charneira) e com raio até  $R_1$  (a projeção horizontal do ponto **R**), desenhou-se a projeção horizontal do arco do rebatimento do ponto **R**, até ao eixo **X**, onde se situa o outro extremo do arco. Em seguida, desenhou-se uma linha de chamada e, atendendo a que o ponto **R** mantém a sua cota ao longo do rebatimento, determinou-se  $R_r$  (o ponto **R** rebatido).

De forma semelhante, para rebater o ponto **S**, com o compasso, fazendo centro em  $e_1$  (a projeção horizontal da charneira) e com raio até  $S_1$  (a projeção horizontal do ponto **S**), desenhou-se a projeção horizontal do arco do rebatimento do ponto **S**, até ao eixo **X**, onde se situa o outro extremo do arco. Em seguida, desenhou-se uma linha de chamada e, atendendo a que o ponto **S** mantém a sua cota ao longo do rebatimento, determinou-se  $S_r$  (o ponto **S** rebatido).

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $R_r$  e  $S_r$  – o segmento de reta  $[R_rS_r]$  é o segmento de reta **[RS]** rebatido (situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza).  $R_rS_r$  é, assim, a verdadeira grandeza da distância entre os pontos **R** e **S**, o que se assinalou devidamente no desenho.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta  $[R_rS_r]$  representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em  $R_rS_r$  que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos traços do plano  $\pi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento dos dois pontos).

### 336.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **S** pelas respetivas projeções, em função dos dados.

#### Resolução:

A distância entre os pontos **R** e **S** é o comprimento do segmento de reta que tem extremos nesses dois pontos. Assim, em primeiro lugar desenharam-se as projeções do segmento de reta **[RS]**, que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos.

O segmento de reta **[RS]** não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. O enunciado refere expressamente que o processo geométrico auxiliar a utilizar é o da mudança do diedro de projeção.

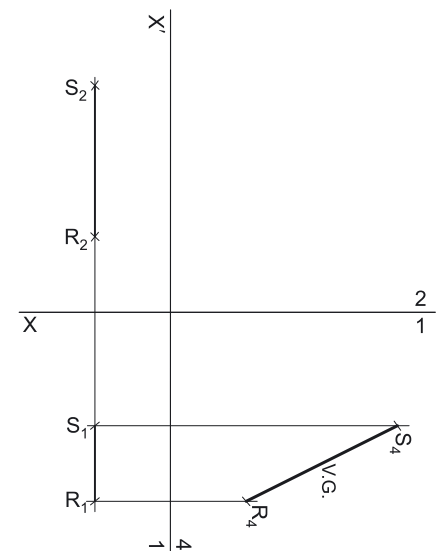
Nesse sentido, para determinar a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos (a verdadeira grandeza do segmento de reta **[RS]**) é necessário transformar o segmento de reta num segmento de reta paralelo a um dos planos de projeção – um segmento de reta horizontal (de nível) ou num segmento de reta frontal (de frente). Optou-se pela segunda hipótese.

Para transformar o segmento de reta **[RS]** num segmento de reta frontal (de frente), é necessário, substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** dos seus pontos (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta **[RS]**, o eixo  $X'$  é paralelo a  $[R_1S_1]$ . As linhas de chamada dos pontos **R** e **S**, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo **X**).

$R_4$  é a projeção do ponto **R** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $R_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $R_2$  ao eixo **X** (que é 2 cm – a cota do ponto **R**).  $S_4$  é a projeção do ponto **S** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $S_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $S_2$  ao eixo **X** (que é 6 cm – a cota de **S**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No novo diedro de projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta frontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de **RS** é  $\overline{R_4S_4}$ .

**Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta  $[R_4S_4]$  representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em  $\overline{R_4S_4}$  que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 337.

**Dados:**

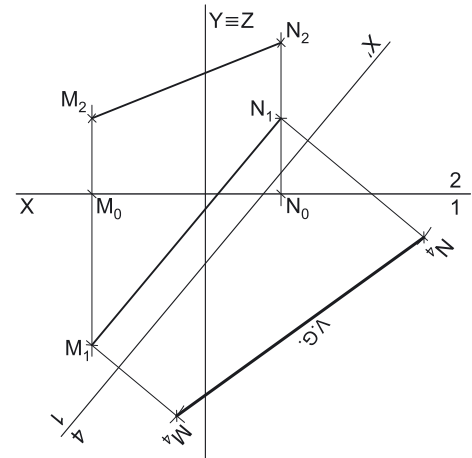
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M** e **N** pelas respetivas projeções, em função dos dados.

**Resolução:**

A distância entre os pontos **M** e **N** é o comprimento do segmento de reta que tem extremos nesses dois pontos. Assim, em primeiro lugar desenharam-se as projeções do segmento de reta **[MN]**, que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos.

O segmento de reta **[MN]** não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Uma vez que o enunciado é omissivo quanto ao processo geométrico auxiliar a utilizar, optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, para determinar a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos (a verdadeira grandeza do segmento de reta **[MN]**).

Nesse sentido, é necessário transformar o segmento de reta num segmento de reta paralelo a um dos planos de projeção – um segmento de reta horizontal (de nível) ou num segmento de reta frontal (de frente). Optou-se pela segunda hipótese.



Para transformar o segmento de reta **[MN]** num segmento de reta frontal (de frente), é necessário, substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** dos seus pontos (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta **[MN]**, o eixo **X'** é paralelo a  $[M_1N_1]$ . As linhas de chamada dos pontos **M** e **N**, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

$M_4$  é a projeção do ponto **M** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $M_4$  ao eixo **X'** é igual à distância de  $M_2$  ao eixo **X** (que é 2 cm – a cota do ponto **M**).  $N_4$  é a projeção do ponto **N** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $N_4$  ao eixo **X'** é igual à distância de  $N_2$  ao eixo **X** (que é 4 cm – a cota de **N**).

No novo diedro de projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta frontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de **MN** é  $\overline{M_4N_4}$ .

**Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta  $[M_4N_4]$  representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em  $\overline{M_4N_4}$  que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada e do eixo **Y ≡ Z**, que é uma linha de referência).

**338.**

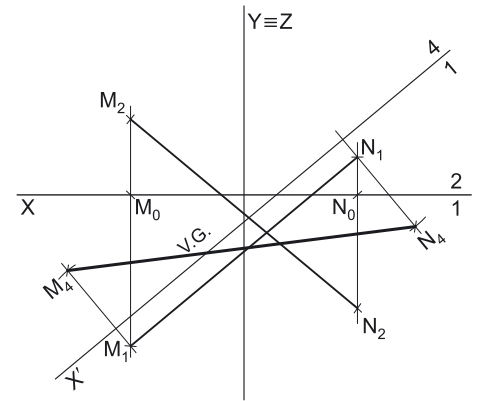
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M** e **N** pelas respetivas projeções, em função dos dados.

**Resolução:**

A distância entre os pontos **M** e **N** é o comprimento do segmento de reta que tem extremos nesses dois pontos. Assim, em primeiro lugar desenharam-se as projeções do segmento de reta **[MN]**, que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos.

O segmento de reta **[MN]** não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Uma vez que o enunciado é omissivo quanto ao processo geométrico auxiliar a utilizar, optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, para determinar a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos (a verdadeira grandeza do segmento de reta **[MN]**).



Nesse sentido, é necessário transformar o segmento de reta num segmento de reta paralelo a um dos planos de projeção – um segmento de reta horizontal (de nível) ou num segmento de reta frontal (de frente). Optou-se pela segunda hipótese.

Para transformar o segmento de reta **[MN]** num segmento de reta frontal (de frente), é necessário, substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** dos seus pontos (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta **[MN]**, o eixo **X'** é paralelo a **[M1N1]**. As linhas de chamada dos pontos **M** e **N**, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

**M4** é a projeção do ponto **M** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **M4** ao eixo **X'** é igual à distância de **M2** ao eixo **X** (que é 2 cm – a cota do ponto **M**). **N4** é a projeção do ponto **N** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **N4** ao eixo **X'** é igual à distância de **N2** ao eixo **X** (que é -3 – a cota de **N**). Salienta-se que a cota do ponto **N** (que é dada) é negativa – tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, se mantêm as cotas, no novo diedro de projeção, a cota do ponto **N** continua a ser negativa, razão pela qual **N4** (a projeção do ponto **N** no **plano 4**) se situa para baixo do eixo **X'**.

No novo diedro de projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta frontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de **MN** é **M4N4**.

**Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta **[M4N4]** representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em **M4N4** que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada e do eixo **Y = Z**, que é uma linha de referência).

**339.**

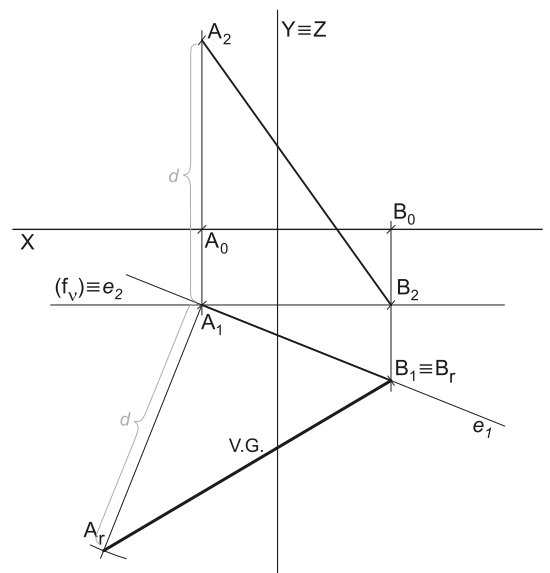
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B** pelas respetivas projeções, em função dos dados.

**Resolução:**

A distância entre os pontos **A** e **B** é o comprimento do segmento de reta que tem extremos nesses dois pontos. Assim, em primeiro lugar desenharam-se as projeções do segmento de reta **[AB]**, que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos.

O segmento de reta **[AB]** não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. O enunciado refere expressamente que o processo geométrico auxiliar a utilizar é o do rebatimento do plano projetante horizontal da distância (do segmento) para o plano horizontal (de nível) que contém o ponto **B**.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que passa por  $B$ ) pelo seu traço frontal –  $f_v$ . O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto  $B$ ).

Não houve necessidade de representar o plano projetante horizontal do segmento pelos seus traços, como em seguida se exporá.

Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos – o plano  $v$  e o plano projetante horizontal do segmento. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da charneira (reta  $e$ ) está sobre o traço frontal do plano  $v$  – tem-se, imediatamente,  $e_2 \equiv (f_v)$ . Por outro lado, o plano projetante horizontal do segmento  $[AB]$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ) está sobre a projeção horizontal do segmento de reta  $[AB]$  –  $e_1$  (a projeção horizontal da charneira) é a reta suporte de  $[A_1B_1]$  (a projeção horizontal do segmento). A reta  $e$ , definida pelas suas projeções, é a reta que pertence simultaneamente aos dois planos.

O plano projetante horizontal do segmento está, assim, definido por uma reta (a reta  $e$ ) e um ponto exterior à reta (o ponto  $A$ , que também pertence ao plano). Os planos ortogonais à charneira do rebatimento (que contêm os arcos do rebatimento de cada ponto) são planos verticais (ortogonais à reta  $e$ ).

Rebatendo o plano projetante horizontal do segmento para o plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), tudo o que estiver rebatido sobre o plano  $v$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, o ponto  $B$ , porque é um ponto da charneira, roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que se tem imediatamente  $B_r \equiv B_1$ . Para rebater o segmento de reta (rebatendo o seu plano projetante horizontal) basta, então, rebater o ponto  $A$ .

Por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ ) –  $A_r$ , situa-se necessariamente sobre essa perpendicular à charneira. O raio do arco do rebatimento é a distância do ponto  $A$  ao plano  $v$  – a distância  $d$  (a cota do ponto  $A$  em relação ao plano  $v$ ). Assim, sobre a perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , e a partir de  $A_1$ , mediou-se a distância  $d$  (a cota do ponto  $A$  em relação ao plano  $v$ ) e determinou-se  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido).

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $A_r$  e  $B_r$  – o segmento de reta  $[A_rB_r]$  é o segmento de reta  $[AB]$  rebatido e está em verdadeira grandeza, porque está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido,  $A_rB_r$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos, o que se identificou no desenho.

### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta  $[A_rB_r]$  representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em  $A_rB_r$ , que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $e$ , do traço frontal do plano  $v$ , dos traçados necessários ao rebatimento do ponto  $A$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 340.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$  e  $B$  pelas respetivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

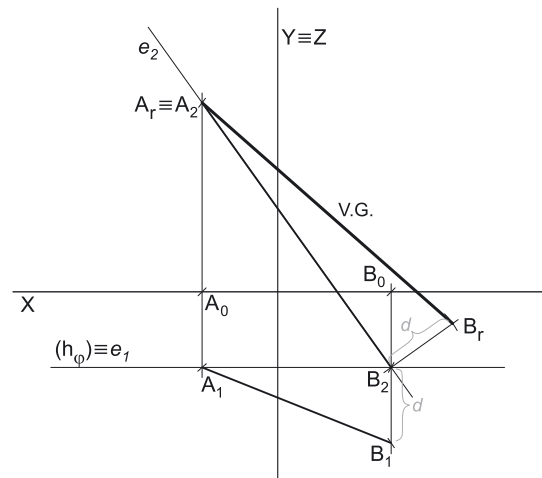
A distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é o comprimento do segmento de reta que tem extremos nesses dois pontos. Assim, em primeiro lugar desenharam-se as projeções do segmento de reta  $[AB]$ , que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos.

O segmento de reta  $[AB]$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. O enunciado refere expressamente que o processo geométrico auxiliar a utilizar é o do rebatimento do plano projetante frontal da distância (do segmento) para o plano frontal (de frente) que contém o ponto  $A$ .

Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que passa por  $A$ ) pelo seu traço horizontal –  $h_\varphi$ . O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ).

Não houve necessidade de representar o plano projetante frontal do segmento pelos seus traços, como em seguida se exporá.

Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos – o plano  $\varphi$  e o plano projetante frontal do segmento. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da charneira (reta  $e$ ) está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  – tem-se, imediatamente,  $e_1 \equiv (h_\varphi)$ . Por outro lado, o plano projetante frontal do segmento  $[AB]$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da charneira ( $e_2$ ) está sobre a projeção frontal do segmento de reta  $[AB]$  –  $e_2$  (a projeção frontal da charneira) é a reta suporte de  $[A_2B_2]$  (a projeção frontal do segmento). A reta  $e$ , definida pelas suas projeções, é a reta que pertence simultaneamente aos dois planos.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano projetante frontal do segmento está, assim, definido por uma reta (a reta  $e$ ) e um ponto exterior à reta (o ponto  $B$ , que também pertence ao plano). Os planos ortogonais à charneira do rebatimento (que contêm os arcos do rebatimento de cada ponto) são planos de topo (ortogonais à reta  $e$ ).

Rebatendo o plano projetante frontal do segmento para o plano  $\varphi$  (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), tudo o que estiver rebatido sobre o plano  $\varphi$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, o ponto  $A$ , porque é um ponto da charneira, roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que se tem imediatamente  $A_r \equiv A_2$ . Para rebater o segmento de reta (rebatendo o seu plano projetante horizontal) basta, então, rebater o ponto  $B$ .

Por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto  $B$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao traço frontal do plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $B$ ) –  $B_r$ , situa-se necessariamente sobre essa perpendicular à charneira. O raio do arco do rebatimento é a distância do ponto  $B$  ao plano  $\varphi$  – a distância  $d$  (o afastamento do ponto  $B$  em relação ao plano  $\varphi$ ). Assim, sobre a perpendicular à charneira que passa por  $B_2$ , e a partir de  $B_2$ , mediu-se a distância  $d$  (o afastamento do ponto  $B$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e determinou-se  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido).

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $A_r$  e  $B_r$  – o segmento de reta  $[A_r B_r]$  é o segmento de reta  $[AB]$  rebatido e está em verdadeira grandeza, porque está contido num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido,  $\overline{A_r B_r}$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta  $[A_r B_r]$  representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em  $\overline{A_r B_r}$  que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $e$ , do traço horizontal do plano  $\varphi$ , dos traçados necessários ao rebatimento do ponto  $B$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

### 341.

Por **distância de um ponto a um plano** entende-se o comprimento do segmento de reta ortogonal ao plano que tem um extremo no ponto dado e o outro extremo no plano (no ponto de interseção do plano com a reta suporte desse segmento).

### 342.

**Método geral para a determinação da distância de um ponto a um plano:** 1. conduz-se, pelo ponto dado, uma reta ortogonal ao plano; 2. determina-se o ponto de interseção dessa reta com o plano; 3. a distância entre os dois pontos (o ponto dado e o ponto de interseção) é a **distância do ponto ao plano**.

### 343.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $v$ , pelo seu traço frontal, bem como o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

#### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: 1. conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; 2. determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; 3. a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $A$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $v$ . A reta  $p$  é uma reta vertical, cujas projeções se determinaram de forma direta. A reta  $p$  verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano (quaisquer duas retas do plano).

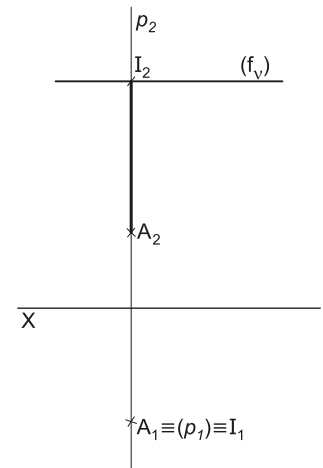
**Etapla 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $v$ . O plano  $v$  é um plano projetante frontal e a reta  $p$  é uma reta projetante horizontal, pelo que as duas projeções do ponto de interseção entre a reta  $p$  e o plano  $v$  (o ponto  $I$ ) se determinaram de forma direta.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $A$  ao plano  $v$ . A partir das projeções dos pontos  $A$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[AI]$ . O segmento  $[AI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $A$  ao plano  $v$ .

O segmento de reta  $[AI]$  é paralelo ao Plano Frontal de Projeção (é um segmento de reta vertical), pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal – a verdadeira grandeza da distância do ponto  $A$  ao plano  $v$  está na projeção frontal do segmento de reta  $[AI]$ .  $\overline{A_2 I_2}$  é, assim, a verdadeira grandeza da distância do ponto  $A$  ao plano  $v$ , o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano  $v$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (a projeção frontal do segmento  $[AI]$ ), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta  $p$ ) representaram-se a **leve**.



## 344.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\gamma$ . A reta  $p$  é uma reta horizontal (de nível), cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\gamma$ . A reta  $p$  verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\gamma$  (os traços do plano).

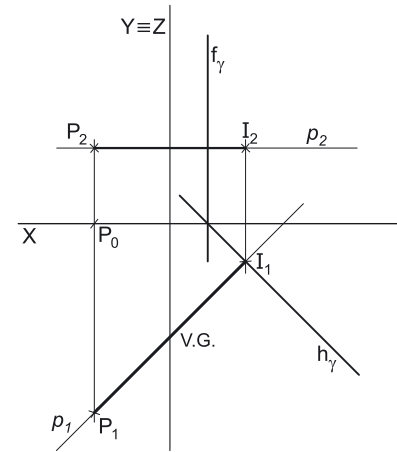
**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\gamma$ . O plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, pelo que o ponto de interseção entre a reta  $p$  e o plano  $\gamma$  (ponto  $I$ ) determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal ( $I_1$ ).

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\gamma$ . A partir das projeções dos pontos  $P$  e  $I$  desenham-se as projeções do segmento  $[PI]$ . O segmento  $[PI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\gamma$ .

O segmento de reta  $[PI]$  é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal – a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\gamma$  está na projeção horizontal do segmento de reta  $[PI]$ .  $P_1I_1$  é, assim, a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\gamma$ , o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\gamma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (as projeções do segmento  $[PI]$ ), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 345.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\pi$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\pi$ . A reta  $p$  é uma reta fronto-horizontal e verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a quaisquer duas retas concorrentes do plano  $\pi$  (nomeadamente aos traços do plano).

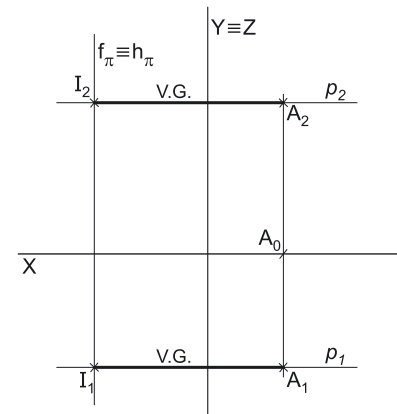
**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\pi$ . O plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o ponto de interseção entre a reta  $p$  e o plano  $\pi$  (ponto  $I$ ) determinou-se de forma direta.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\pi$ . A partir das projeções dos pontos  $P$  e  $I$  desenham-se as projeções do segmento  $[PI]$ . O segmento  $[PI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\pi$ .

O segmento de reta  $[PI]$  é paralelo aos dois planos de projeção (a reta  $p$  é uma reta fronto-horizontal), pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em ambas as projeções –  $P_1I_1 = P_2I_2$  é, assim, a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\pi$ , o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\pi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



### 346.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M**, **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto **M** é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X** (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\delta$ . O ponto **B** é um ponto com cota nula, pelo que é um ponto do traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ), que é uma reta de topo do plano com cota nula. Assim, pelo ponto **B** conduziu-se o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), que está definido por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (é uma reta projetante frontal).

O ponto **A** é um ponto com afastamento nulo, pelo que é um ponto do traço frontal do plano ( $f_\delta$ ), que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano ( $f_\delta$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, os traços do plano são duas necessariamente concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\delta$ . O traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ) está, assim, definido por dois pontos – o ponto **A** e o ponto de concorrência dos traços do plano (que se situa no eixo **X**).

**Resolução:**

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto **M** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\delta$ . A reta **p** é uma reta frontal (de frente), cujas projeções são perpendiculares aos traços homólogos do plano  $\delta$ . A reta **p** verifica o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (os traços do plano).

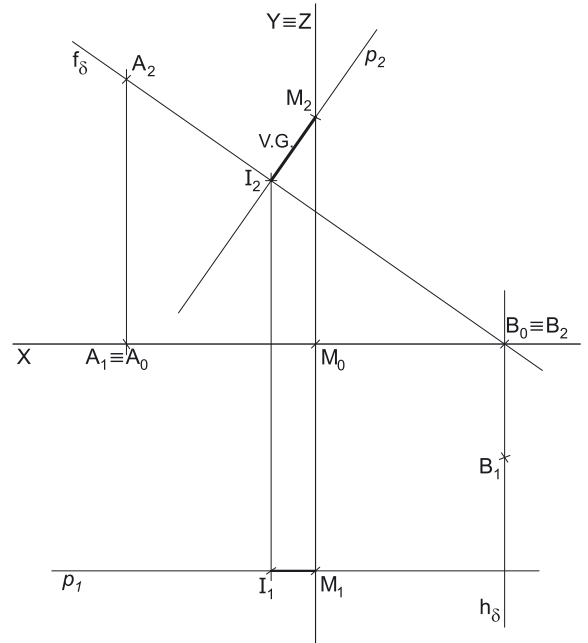
**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\delta$ . O plano  $\delta$  é um plano projetante frontal, pelo que o ponto de interseção entre a reta **p** e o plano  $\delta$  (ponto **I**) determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ).

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **M** ao plano  $\delta$ . A partir das projeções dos pontos **M** e **I** desenharam-se as projeções do segmento **[MI]**. O segmento **[MI]** é segmento representativo da distância do ponto **M** ao plano  $\delta$ .

O segmento de reta **[MI]** é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal – a verdadeira grandeza da distância do ponto **M** ao plano  $\delta$  está na projeção frontal do segmento de reta **[MI]**.  $M_2I_2$  é, assim, a verdadeira grandeza da distância do ponto **M** ao plano  $\delta$ , o que se identificou no desenho.

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (as projeções do segmento **[MI]**), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



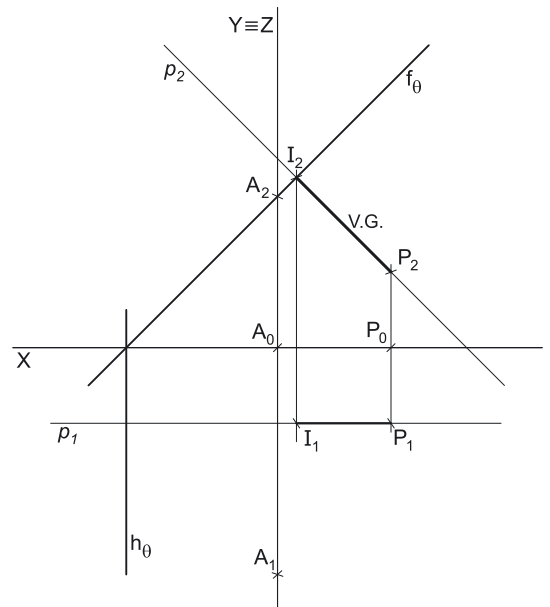
### 347.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **P**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto **P** é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X** (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . O ponto **A** pertence ao plano  $\theta$ , que é um plano projetante frontal, pelo que  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**) tem de se situar necessariamente sobre  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Assim, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**) conduziu-se  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ) fazendo, com o eixo **X**, o ângulo que o plano  $\theta$  faz com o Plano Horizontal de Projeção está em verdadeira grandeza no ângulo que seu traço frontal faz com o eixo **X**).

Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ), que é uma reta de topo do plano com cota nula e é concorrente com o traço frontal do plano ( $f_\theta$ ) num ponto do eixo **X** –  $h_\theta$  está, assim, definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é projetante frontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto **P** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\theta$ . A reta **p** é uma reta frontal (de frente), cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\theta$ . A reta **p** verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\theta$  (os traços do plano).

**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\theta$ . O plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, pelo que o ponto de interseção entre a reta **p** e o plano  $\theta$  (ponto **I**) determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ).

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **P** ao plano  $\theta$ . A partir das projeções dos pontos **P** e **I** desenharam-se as projeções do segmento **[PI]**. O segmento **[PI]** é segmento representativo da distância do ponto **P** ao plano  $\theta$ .

O segmento de reta **[PI]** é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal – a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** ao plano  $\theta$  está na projeção frontal do segmento de reta **[PI]**.  $P_2I_2$  é, assim, a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** ao plano  $\theta$ , o que se identificou no desenho.

## Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (as projeções do segmento **[PI]**), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 348.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **M**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto **A** é um ponto do  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem as suas projeções coincidentes (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e as suas projeções coincidentes).

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\gamma$ . O ponto **M** pertence ao plano  $\gamma$ , que é um plano projetante horizontal, pelo que **M<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **M**) tem de se situar necessariamente sobre **h<sub>γ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ). Assim, por **M<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **M**) conduziu-se **h<sub>γ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ) fazendo, com o eixo **X**, o ângulo dado no enunciado (o ângulo que o plano  $\gamma$  faz com o Plano Frontal de Projeção está em verdadeira grandeza no ângulo que seu traço horizontal faz com o eixo **X**).

Por fim, desenhou-se o traço frontal do plano (**f<sub>γ</sub>**), que é uma reta vertical do plano com afastamento nulo e é concorrente com o traço horizontal do plano (**h<sub>γ</sub>**) num ponto do eixo **X – f<sub>γ</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é projetante horizontal).

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto **A** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\gamma$ . A reta **p** é uma reta horizontal (de nível), cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\gamma$ . A reta **p** verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\gamma$  (os traços do plano).

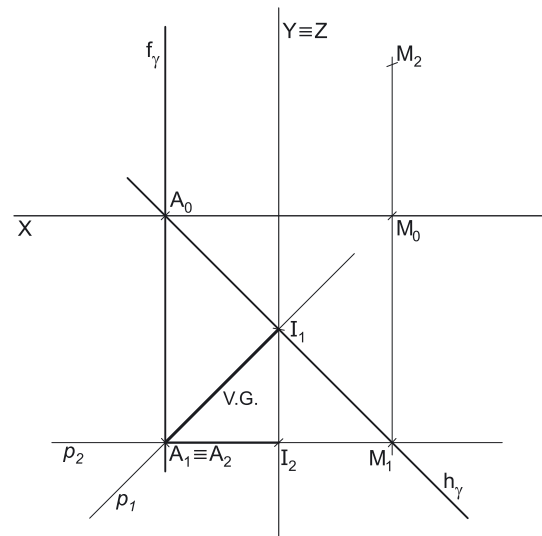
**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\gamma$ . O plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, pelo que o ponto de interseção entre a reta **p** e o plano  $\gamma$  (ponto **I**) determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal (**I<sub>1</sub>**).

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **A** ao plano  $\gamma$ . A partir das projeções dos pontos **A** e **I** desenharam-se as projeções do segmento **[AI]**. O segmento **[AI]** é segmento representativo da distância do ponto **A** ao plano  $\gamma$ .

O segmento de reta **[AI]** é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal – a verdadeira grandeza da distância do ponto **A** ao plano  $\gamma$  está na projeção horizontal do segmento de reta **[AI]**.  $A_1I_1$  é, assim, a verdadeira grandeza da distância do ponto **A** ao plano  $\gamma$ , o que se identificou no desenho.

## Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\gamma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (as projeções do segmento **[AI]**), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 349.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). O ponto  $P$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

**Resolução:**

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

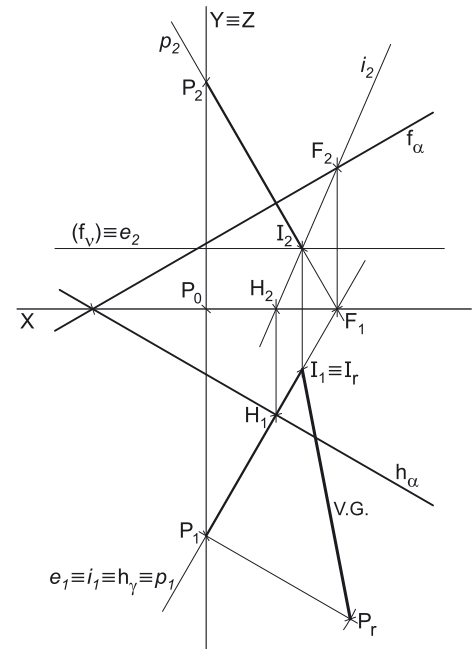
**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\alpha$ . A reta  $p$  verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (os seus traços).

**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\gamma$ , que é o plano projetante horizontal da reta  $p$ .

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano dado) – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projeção).

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  – o ponto  $I$ .



Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ . A partir das projeções dos pontos  $P$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[PI]$ . O segmento  $[PI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se pelo **rebatimento** do plano  $\gamma$  (o plano projetante horizontal do segmento  $[PI]$ ) para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o ponto  $I$  (cujo traço frontal se desenhou imediatamente, passando por  $I_2$ ). Para tal, determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção frontal ( $e_2$ ) está coincidente com o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ) está coincidente com o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal.

O ponto  $I$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que se tem, imediatamente,  $I_r \equiv I_1$ . Falta-nos rebater o ponto  $P$ . O arco do rebatimento do ponto  $P$  está contido num plano vertical ortogonal à reta  $e$  (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto  $P$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim conduziu-se, por  $P_1$ , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $P$ . Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto  $P$  ao plano  $v$  (a cota do ponto  $P$  em relação a  $v$ ), determinando-se  $P_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[P_r I_r]$  é o segmento de reta  $[PI]$  rebatido e situa-se no plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ , o que se identificou no desenho.

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\gamma$ , da reta  $i$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 350.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\alpha$ . A reta  $p$  verifica o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (os seus traços).

**Etapla 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

- A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\gamma$ , que é o plano projetante horizontal da reta  $p$ .
- B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano dado) – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projeção).
- C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  – o ponto  $I$ .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapla 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ . A partir das projeções dos pontos  $P$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[PI]$ . O segmento  $[PI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ .

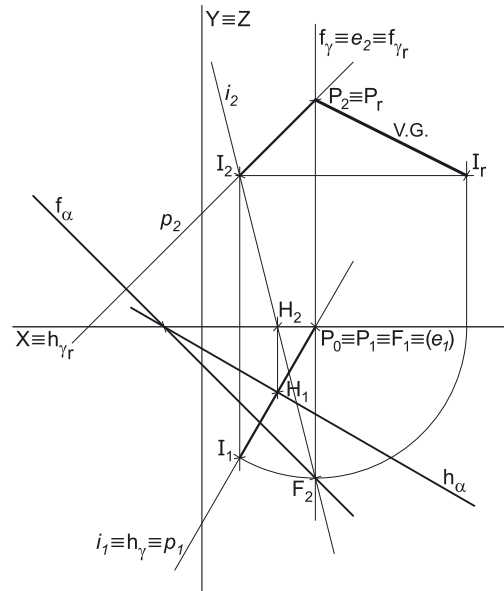
O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se pelo **rebatimento** do plano  $\gamma$  (o plano projetante horizontal do segmento  $[PI]$ ) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o traço frontal do plano (uma reta vertical) – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_2 \equiv f_{\alpha r} - e_1$  (a projeção horizontal da charneira) é um ponto no eixo  $X$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento de cada ponto) são planos horizontais (de nível).

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $P_r \equiv P_2$ . Em seguida, rebateu-se o ponto  $I$ , desenhando a projeção horizontal do arco do seu rebatimento (que tem centro em  $e_1$  e raio até  $I_1$ ), o que nos permitiu determinar  $I_r$  (note que o ponto  $I$  manteve a sua cota, pois o arco do seu rebatimento está contido num plano horizontal).

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[P_r I_r]$  é o segmento de reta  $[PI]$  rebatido e situa-se no plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $\overline{P_r I_r}$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ , o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\gamma$ , da reta  $i$ , dos traçados necessários ao rebatimento do ponto  $I$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 351.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\delta$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\delta$  tem os seus traços coincidentes, pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

**Resolução:**

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\delta$ . A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\delta$ . A reta  $p$  verifica o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (os seus traços). Note que, nesta situação, a reta  $p$  é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pois tem as suas projeções paralelas entre si.

**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\delta$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\alpha$ , que é o plano projetante frontal da reta  $p$ .

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\alpha$  (o plano auxiliar) com o plano  $\delta$  (o plano dado) – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projeção).

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$  – o ponto  $I$ .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\delta$ . A partir das projeções dos pontos  $P$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[PI]$ . O segmento  $[PI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\delta$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por recorrer a uma **mudança do diedro de projeção**, transformando o segmento de reta  $[PI]$  num segmento de reta horizontal (de nível).

Para transformar o segmento de reta  $[PI]$  num segmento de reta horizontal (de nível), é necessário, substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte: – no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 4**); – no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** dos seus pontos (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

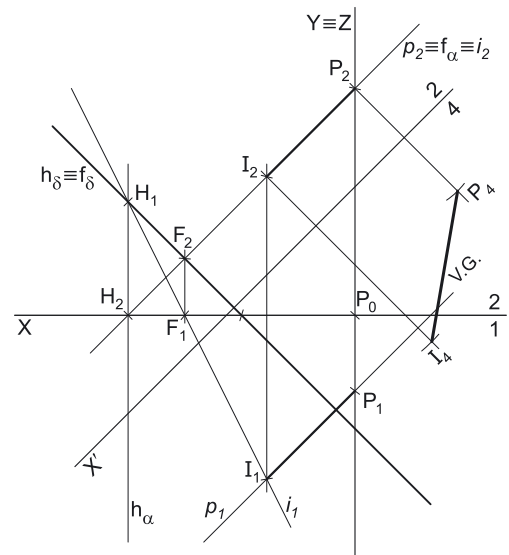
Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $4/2$ . Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta  $[PI]$ , o eixo  $X'$  é paralelo a  $[P_2I_2]$ . As linhas de chamada dos pontos  $P$  e  $I$ , no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_1$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – o afastamento do ponto  $P$ ).  $I_4$  é a projeção do ponto  $I$  no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $I_1$  ao eixo  $X$  (o afastamento de  $I$ ).

No novo diedro de projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta horizontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de  $\overline{PI}$  é  $\overline{P_4I_4}$ .

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância, que é o comprimento do segmento  $[P_4I_4]$  (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\alpha$ , da reta  $i$ , de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).





(continuação da página anterior)

O ponto **P** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $P_r \equiv P_1$ . Falta-nos rebater o ponto **I**. O arco do rebatimento do ponto **I** está contido num plano vertical ortogonal à reta **e** (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto **I** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim conduziu-se, por  $I_1$ , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **I**. Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto **I** ao plano  $v$  (a cota do ponto **I** em relação a  $v$ ), determinando-se  $I_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[P_r I_r]$  é o segmento de reta  $[PI]$  rebatido e situa-se no plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** ao plano  $\lambda$ , o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta **r**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos traços do plano  $\lambda$ , da reta **p**, do plano  $\alpha$ , da reta **i** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 353.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **M** e **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto **P** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**).

#### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

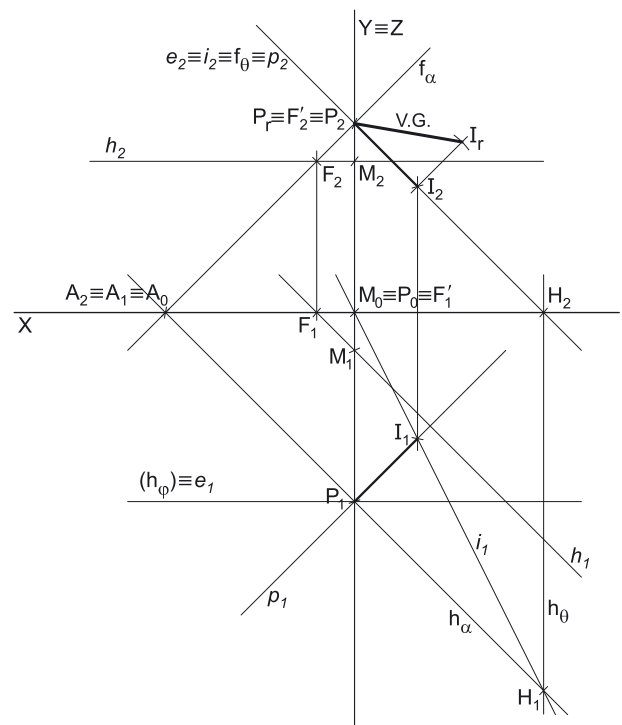
**Etapla 1.** Pelo ponto **P** conduz-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\alpha$ . Para a reta **p** ser ortogonal ao plano  $\alpha$ , a reta **p** tem de verificar o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$  (tem de ser ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ).

Acontece que, neste momento, não temos nenhuma reta do plano  $\alpha$ . Assim, para garantir a ortogonalidade da reta **p** ao plano  $\alpha$ , necessitamos de duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  e, preferencialmente, uma reta horizontal (de nível) e uma reta frontal (de frente), para que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\alpha$  se processe de forma direta. Essas duas retas podem ser, por exemplo, os traços do plano  $\alpha$ . Assim, começou-se por determinar os traços do plano  $\alpha$ .

Começamos pelo traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **A** é um ponto do eixo **X** e pertence ao plano  $\alpha$ , pelo que o ponto **A** é o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. O enunciado fornece-nos a direção das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$  e o traço horizontal de um plano é uma reta horizontal (de nível) desse plano, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço horizontal do plano –  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ).

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **A** é um ponto do eixo **X** e pertence ao plano  $\alpha$ , pelo que o ponto **A** é o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano são insuficientes para definir  $f_\alpha$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta **h**, como reta auxiliar do plano, passando pelo ponto **M**. A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e está definida por um ponto (o ponto **M**, dado no enunciado) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta **h**, o ponto **F**. Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano –  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos (o ponto **A** e o ponto **F**).

Por fim, desenharam-se as projeções da reta **p**, a reta que passa pelo ponto **P** e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . A reta **p** é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\alpha$ , o que nos garante a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\alpha$ . Está, assim, concluída a **Etapla 1 do método geral da distância de pontos a planos**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapas 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

- A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\theta$ , que é o plano projetante horizontal da reta  $p$ .
- B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano dado) – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projeção).
- C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  – o ponto  $I$ .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapas 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapas 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ . A partir das projeções dos pontos  $P$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[PI]$ . O segmento  $[PI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se pelo **rebatimento** do plano  $\theta$  (o plano projetante frontal do segmento  $[PI]$ ) para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o ponto  $P$  (cujo traço horizontal se desenhou imediatamente, passando por  $P_1$ ). Para tal, determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção horizontal ( $e_1$ ) está coincidente com o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. A projeção frontal da charneira ( $e_2$ ) está coincidente com o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal.

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $P_r \equiv P_2$ . Falta-nos rebater o ponto  $I$ . O arco do rebatimento do ponto  $I$  está contido num plano de topo ortogonal à reta  $e$  (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto  $I$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim conduziu-se, por  $I_2$ , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $I$ . Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto  $I$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento do ponto  $I$  em relação ao plano  $\varphi$ ), determinando-se  $I_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[P_r I_r]$  é o segmento de reta  $[PI]$  rebatido e situa-se no plano  $\varphi$  (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ , o que se identificou no desenho.

**Traçado:**

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os dados são pontos, cujas linhas de chamada se representam sempre a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos traços do plano  $\alpha$ , da reta  $p$ , do plano  $\theta$ , da reta  $i$ , de todos os traçados necessários ao rebatimento do ponto  $I$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 354.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

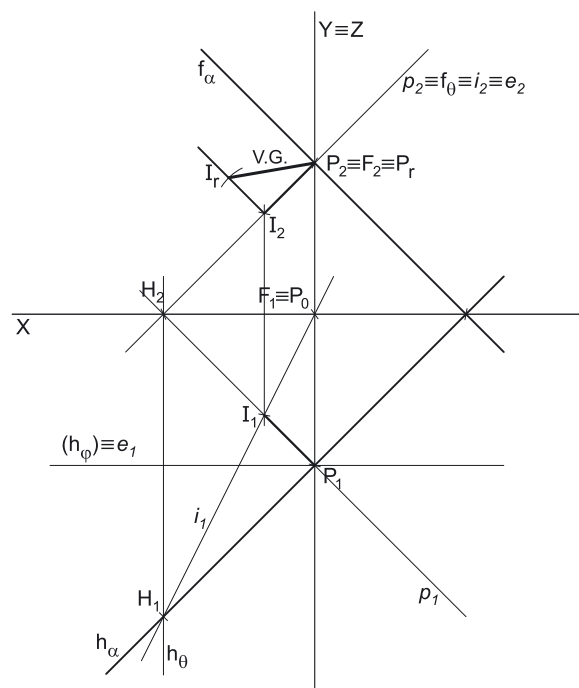
Note que o ponto  $P$  não pertence ao plano  $\alpha$ , pois não pertence a qualquer reta que pertença ao plano  $\alpha$ . Note que, nesta situação, o ponto  $P$  é necessariamente um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pois tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ .

**Resolução:**

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapas 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\alpha$ . A reta  $p$  verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (os seus traços).

Nesta situação particular, a reta  $p$  é necessariamente uma reta do  $\beta_{1/3}$ , pois as suas projeções são simétricas em relação ao eixo  $X$ .



(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

A reta  $f$  é concorrente com a reta  $h$  e é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $f$  é direta em projeção frontal. Assim, a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) passa por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ) e é perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a uma segunda reta do plano  $\alpha$  (concorrente com a reta  $h$ ), pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ .

Está, assim, concluída a **Etapa 1 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\theta$ , que é o plano projetante frontal da reta  $p$ . O plano  $\theta$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal, pelo que  $f_0$  se identificou entre parêntesis.

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano dado) – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos  $M$  e  $N$ . O ponto  $M$  é o ponto de interseção do plano  $\theta$  com a reta  $h$  e foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção frontal (porque o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal). O ponto  $N$  é o ponto de interseção do plano  $\theta$  com a reta  $f$  e foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção frontal (porque o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal).

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  – o ponto  $I$ .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ . A partir das projeções dos pontos  $P$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[PI]$ . O segmento  $[PI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se pelo **rebatimento** do plano projetante horizontal do segmento  $[PI]$  (que não é o plano  $\theta$ ) para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o ponto  $P$  (cujo traço frontal se desenhou imediatamente, passando por  $P_2$ ). Note que o plano  $v$  também contém a reta  $h$ , pois o ponto  $P$  tem 4 cm de cota e a reta  $h$  também, pelo que o plano  $v$ , que também tem 4 cm de cota, contém o ponto  $P$  e a reta  $h$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção frontal ( $e_2$ ) está coincidente com o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ) está coincidente com a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), pois o plano projetante horizontal do segmento também contém a reta  $p$  e é um plano projetante horizontal.

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $P_r \equiv P_1$ . Falta-nos rebater o ponto  $I$ . O arco do rebatimento do ponto  $I$  está contido num plano vertical ortogonal à reta  $e$  (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto  $I$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim conduziu-se, por  $I_1$ , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $I$ . Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto  $I$  ao plano  $v$  (a cota do ponto  $I$  em relação ao plano  $v$ ), determinando-se  $I_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[P_r I_r]$  é o segmento de reta  $[PI]$  rebatido e situa-se no plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ , o que se identificou no desenho.

## Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $h$  e  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\theta$ , da reta  $i$ , de todos os traçados necessários ao rebatimento do ponto  $I$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 356.

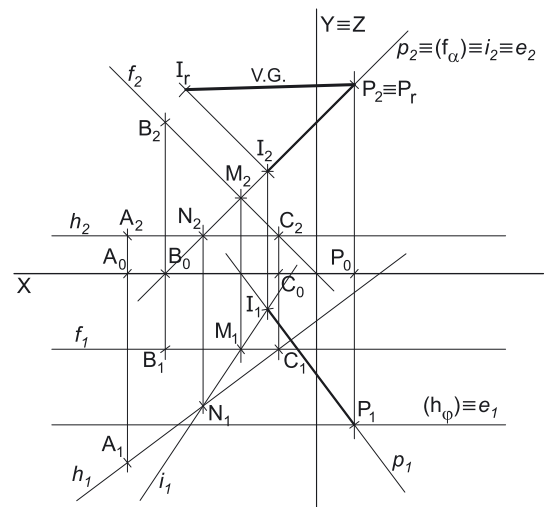
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\delta$  está representado pelas projeções dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  (os três pontos que definem o plano).

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduz-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\delta$ . Para a reta  $p$  ser ortogonal ao plano  $\delta$ , a reta  $p$  tem de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\delta$  (tem de ser ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Acontece que, neste momento, não temos qualquer reta do plano  $\delta$ . No entanto, para se garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\delta$ , necessitamos de duas retas concorrentes do plano  $\delta$  e, preferencialmente, uma reta horizontal (de nível) e uma reta frontal (de frente), para que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\delta$  se processe de forma direta.

Dessa forma, os dados do plano (os pontos **A**, **B** e **C**) são insuficientes para definir a reta  $p$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $h$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $h$  está definida por dois pontos (os pontos **A** e **C**, dois dos pontos que definem o plano) e é uma reta horizontal (de nível) do plano, pois os pontos **A** e **C** têm a mesma cota.

A reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $h$  é direta em projeção horizontal. Assim, a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) passa por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto **P**) e é perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a uma reta do plano  $\delta$ . Para a reta  $p$  ser ortogonal ao plano  $\delta$ , é necessário garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra reta do plano  $\delta$  (que seja concorrente com a reta  $h$ ).

Os dados do plano (os pontos **A**, **B** e **C**) são ainda insuficientes para definir a reta  $p$ , pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $f$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $f$  está definida por dois pontos (os pontos **B** e **C**, dois dos pontos que definem o plano) e é uma reta frontal (de frente) do plano, pois os pontos **B** e **C** têm o mesmo afastamento.

A reta  $f$  é concorrente com a reta  $h$  (no ponto **C**) e é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $f$  é direta em projeção frontal. Assim, a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) passa por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto **P**) e é perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a uma segunda reta do plano  $\delta$  (concorrente com a reta  $h$ ), pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\delta$ .

Está, assim, concluída a **Etapa 1 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\alpha$ , que é o plano projetante frontal da reta  $p$ . O plano  $\alpha$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal, pelo que  $f_\alpha$  se identificou entre parêntesis.

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\alpha$  (o plano auxiliar) com o plano  $\delta$  (o plano dado) – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos **M** e **N**. O ponto **M** é o ponto de interseção do plano  $\alpha$  com a reta  $f$  e foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção frontal (porque o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal). O ponto **N** é o ponto de interseção do plano  $\alpha$  com a reta  $h$  e foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção frontal (porque o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal).

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$  – o ponto **I**.

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$  (o ponto **I**), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **P** ao plano  $\delta$ . A partir das projeções dos pontos **P** e **I** desenharam-se as projeções do segmento **[PI]**. O segmento **[PI]** é segmento representativo da distância do ponto **P** ao plano  $\delta$ .

O segmento **[PI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se pelo **rebatimento** do plano  $\theta$  (o plano projetante frontal do segmento **[PI]**) para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o ponto **P** (cujo traço horizontal se desenhou imediatamente, passando por  $P_1$ ). Para tal, determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção horizontal ( $e_1$ ) está coincidente com o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. A projeção frontal da charneira ( $e_2$ ) está coincidente com o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal.

O ponto **P** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $P_r \equiv P_2$ . Falta-nos rebater o ponto **I**. O arco do rebatimento do ponto **I** está contido num plano de topo ortogonal à reta  $e$  (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto **I** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim conduziu-se, por  $I_2$ , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **I**. Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto **I** ao plano  $\varphi$  (o afastamento do ponto **I** em relação ao plano  $\varphi$ ), determinando-se  $I_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta **[P<sub>r</sub>I<sub>r</sub>]** é o segmento de reta **[PI]** rebatido e situa-se no plano  $\varphi$  (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** ao plano  $\alpha$ , o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os dados são pontos, cujas linhas de chamada se representam sempre a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (do segmento **[PI]**), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\alpha$ , da reta  $i$ , de todos os traçados necessários ao rebatimento do ponto **I** e do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

## 357.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$ , têm os seus traços coincidentes). O ponto  $P$  tem as suas projeções coincidentes, pois é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes).

Note que o ponto  $P$  não pertence ao plano  $\alpha$ , pois não pertence a qualquer reta que pertença ao plano  $\alpha$ .

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\alpha$ . A reta  $p$  verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (os seus traços).

Nesta situação particular, a reta  $p$  é necessariamente uma reta do  $\beta_{2/4}$ , pois as tem suas projeções coincidentes.

**Etapla 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

- A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\theta$ , que é o plano projetante frontal da reta  $p$ .
- B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano dado) – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projeção).
- C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  – o ponto  $I$ .

Note que o ponto  $I$  é um ponto do  $\beta_{2/4}$ , pois tem as suas projeções coincidentes. Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapla 2** do **método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ . A partir das projeções dos pontos  $P$  e  $I$  desenham-se as projeções do segmento  $[PI]$ . O segmento  $[PI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se pelo **rebatimento** do plano  $\theta$  (o plano projetante frontal do segmento  $[PI]$ ) para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o ponto  $P$  (cujo traço horizontal se desenhou imediatamente, passando por  $P_1$ ). Salienta-se que, nesta situação, o plano frontal (de frente)  $\varphi$  tem afastamento negativo, pois o ponto  $P$  tem afastamento negativo.

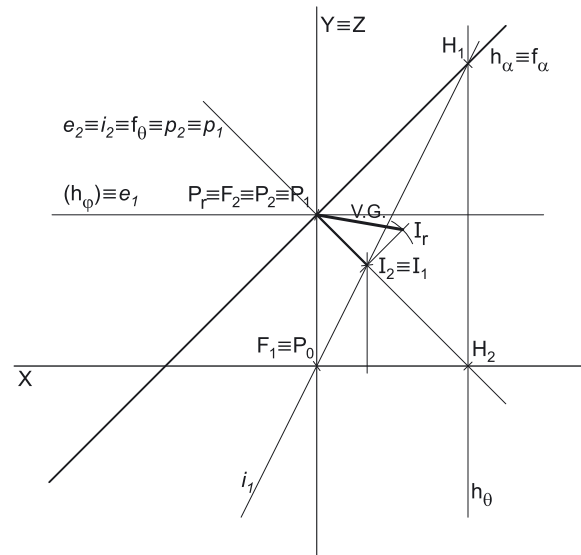
Em seguida, determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção horizontal ( $e_1$ ) está coincidente com o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. A projeção frontal da charneira ( $e_2$ ) está coincidente com o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal.

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $P_r \equiv P_2$ . Falta-nos rebater o ponto  $I$ . O arco do rebatimento do ponto  $I$  está contido num plano de topo ortogonal à reta  $e$  (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto  $I$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim conduziu-se, por  $I_2$ , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $I$ . Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto  $I$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento do ponto  $I$  em relação ao plano  $\varphi$ ), determinando-se  $I_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[P_r I_r]$  é o segmento de reta  $[PI]$  rebatido e situa-se no plano  $\varphi$  (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ , o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\theta$ , da reta  $i$ , de todos os traçados necessários ao rebatimento do ponto  $I$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).





## 359.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapla 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ ;
3. por fim, a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  pertencem a uma única «família» de retas, o que não nos permite garantir da ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** (como o enunciado pede expressamente) permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção os dois traços do plano  $\rho$  serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o plano  $\rho$  seja um plano projetante. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

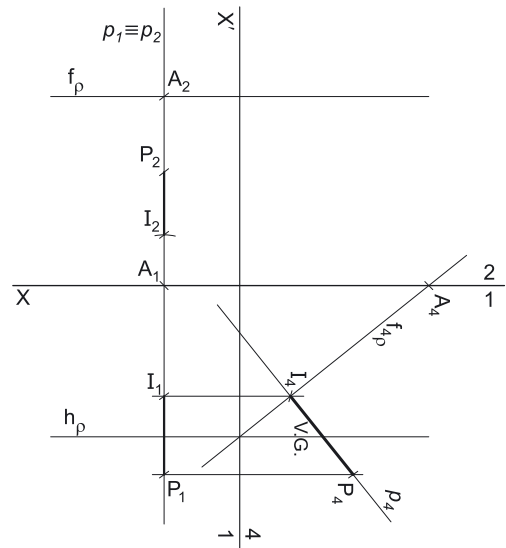
- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto  $P$  no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ .  $P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $P$ ).

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se um ponto  $A$ , qualquer, do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto  $A$  no plano de perfil que contém o ponto  $P$ .

Em seguida, determinou-se  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 5 cm – a cota de  $A$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $A_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto  $A_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4p}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta **p** é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $P_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4p}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta **p** já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, é possível, de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$ , a partir da sua projeção no **plano 4** –  $I_4$  (a projeção do ponto **I** no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta **p** no **plano 4**) com  $f_{4p}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto **I**), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta **p**). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto **I**), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $I_4$  ao eixo **X'**.

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta **p** está definida por dois pontos (os pontos **P** e **I**), já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  e já se determinou o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  (o ponto **I**).

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  (o ponto **I**), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **P** ao plano  $\rho$ . A partir das projeções dos dois pontos, desenharam-se as projeções do segmento **[PI]**, que é o segmento representativo da distância do ponto **P** ao plano  $\rho$ .

O segmento **[PI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento **[PI]** está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano – a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** ao plano  $\rho$  está no segmento  $[P_4I_4]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p**, do eixo **X'**, da reta  $p_4$  e, ainda, do novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4p}$ ).

## 360.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, bem como o ponto **P**, pelas suas projeções, em função dos dados.

#### Resolução:

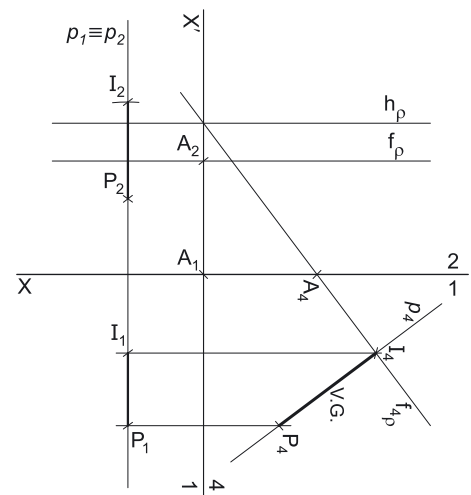
A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto **P** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\rho$ . A reta **p** é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta **p** ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$ . Nem a reta **p** nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **p** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **p**, para além do ponto **P**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  – a reta **p** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ ;
3. por fim, a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  não se pode processar de forma direta.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  pertencem a uma única «família» de retas, o que não nos permite garantir da ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção os dois traços do plano  $\rho$  serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o plano  $\rho$  seja um plano projetante. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto  $P$  no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ .  $P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $P$ ).

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4p}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se um ponto  $A$ , qualquer, do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar a linha de chamada do ponto  $A$  no eixo  $X'$ .

Em seguida, determinou-se  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $A$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4p}$ , passa por  $A_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4p}$  está definido por dois pontos – o ponto  $A_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4p}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $P_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4p}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, é possível, de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ , a partir da sua projeção no **plano 4** –  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4p}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$ .

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $P$  e  $I$ ), já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  e já se determinou o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ).

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ . A partir das projeções dos dois pontos, desenharam-se as projeções do segmento  $[PI]$ , que é o segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento  $[PI]$  está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano – a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$  está no segmento  $[P_4I_4]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do eixo  $X'$ , da reta  $p_4$  e, ainda, do novo traço frontal do plano  $\rho - f_{4\rho}$ ).

## 361.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Crítério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapla 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\pi$ , que é o plano projetante da reta  $p$  – o plano  $\pi$  é um plano de perfil.

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\pi$  (o plano auxiliar) com o plano  $\rho$  – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projeção). Note que a reta  $i$  é também uma reta de perfil, cujas projeções não verificam, igualmente, o **Crítério de Reversibilidade**.

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  – o ponto  $I$ . Não é possível determinar diretamente o ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$ , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_{\pi}$  (a reta  $e$ , que é o traço frontal do plano  $\pi$ ). Em seguida, rebateram-se os traços da reta  $i$ ,  $F$  e  $H - F_r$  e  $H_r$  são os traços da reta  $i$  em rebatimento. O ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r \equiv F_2$ . Em seguida, desenhou-se a reta  $i_r$ , que é a reta  $i$  rebatida –  $i_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $F_r$  e  $H_r$ ). O ponto  $P_r$  é o ponto  $P$  rebatido. Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), perpendicular à reta  $i_r$ , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  – a reta  $p_r$  é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas do plano  $\rho$  (a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ ). A reta  $p_r$  já verifica o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ . Por fim, determinou-se, em rebatimento, o ponto  $I$  (o ponto de concorrência entre as retas  $p_r$  e  $i_r$ ) –  $I_r$ . O ponto  $I$  é o ponto de concorrência da reta  $p$  com a reta  $i$  e é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $I$ .

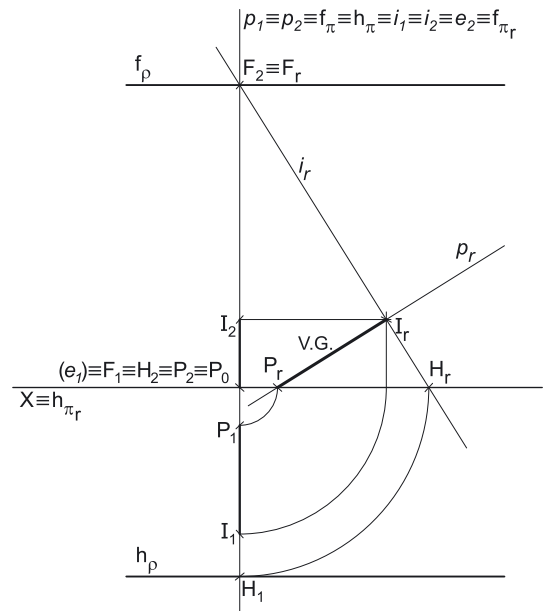
Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapla 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ . A partir das projeções do ponto  $I$ , foi possível desenhar as projeções do segmento  $[PI]$ . As projeções do segmento  $[PI]$  são as projeções do segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano  $\pi$ ), observa-se que o segmento  $[PI]$  está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$  está no segmento  $[P_r I_r]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, das retas  $p_r$  e  $i_r$ , etc.).



## 362.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\rho$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). O ponto  $A$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $A$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapla 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $A$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ ;
3. por fim, a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  pertencem a uma única «família» de retas, o que não nos permite garantir da ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção os dois traços do plano  $\rho$  serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o plano  $\rho$  seja um plano projetante. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

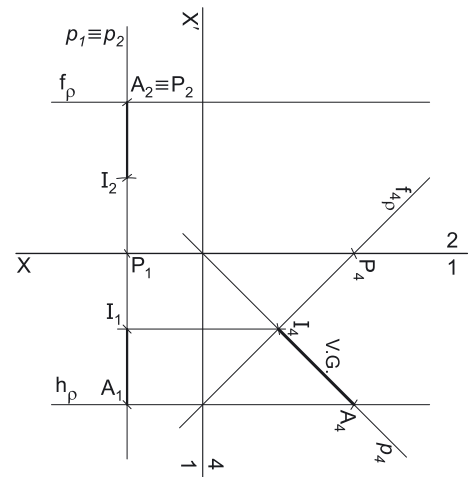
- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida foi necessário determinar a projeção do ponto  $A$  no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ .  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $A$ ).

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se um ponto  $P$ , qualquer, do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto  $P$  no plano de perfil que contém o ponto  $A$ .

Em seguida, determinou-se  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $P$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $P_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto  $P_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4p}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta **p** é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $A_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4p}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta **p** já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, é possível, de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$ , a partir da sua projeção no **plano 4** –  $I_4$  (a projeção do ponto **I** no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta **p** no **plano 4**) com  $f_{4p}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto **I**), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta **p**). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto **I**), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $I_4$  ao eixo **X'**.

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta **p** está definida por dois pontos (os pontos **P** e **I**), já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  e já se determinou o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  (o ponto **I**).

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  (o ponto **I**), foi concluída a **Etapla 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **A** ao plano  $\rho$ . A partir das projeções dos dois pontos, desenharam-se as projeções do segmento **[AI]**, que é o segmento representativo da distância do ponto **A** ao plano  $\rho$ .

O segmento **[AI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento **[AI]** está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano – a verdadeira grandeza da distância do ponto **A** ao plano  $\rho$  está no segmento **[A<sub>4</sub>I<sub>4</sub>]**, e foi devidamente assinalada no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p**, do eixo **X'**, da reta  $p_4$  e, ainda, do novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4p}$ ).

## 363.

### Dados:

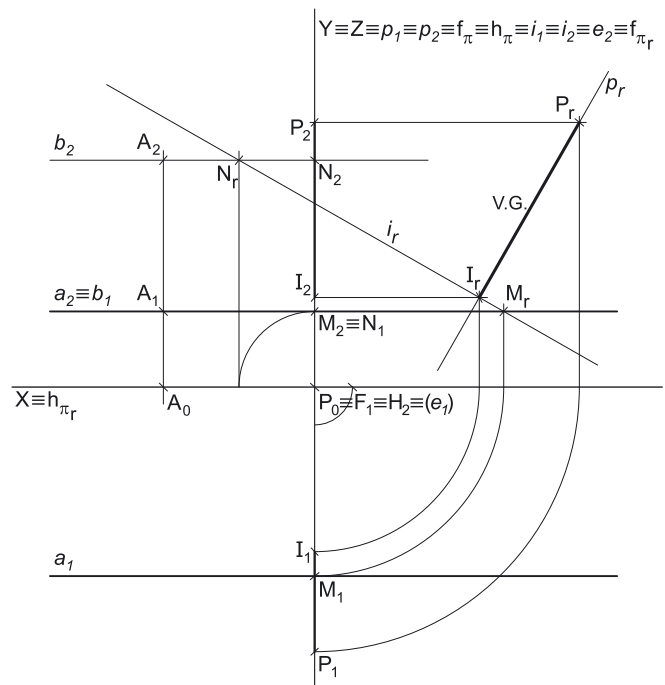
Em primeiro lugar, representaram-se a reta **a**, bem como os pontos **A** e **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto **P** é ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X** (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). O plano  $\rho$  está representado pelas projeções da reta **a** e do ponto **A**.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapla 1.** Pelo ponto **P** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\rho$ . A reta **p** é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta **p** ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapla 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$ . Nem a reta **p** nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\pi$ , que é o plano projetante da reta  $p$  – o plano  $\pi$  é um plano de perfil.

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\pi$  (o plano auxiliar) com o plano  $\rho$  – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Assim, determinou-se o ponto  $M$ , que é o ponto de interseção da reta  $a$  com o plano  $\pi$ . Já temos um ponto para definir a reta  $i$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta  $i$ . Os dados do plano  $\rho$  (a reta  $a$  e o ponto  $A$ ) são insuficientes para definir a reta  $i$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $b$ , como reta auxiliar ao plano, passando pelo ponto  $A$  – a reta  $b$  é uma reta fronto-horizontal e está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). Em seguida, determinou-se o ponto  $N$ , o ponto de interseção da reta  $b$  com o plano  $\pi$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ .

A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos  $M$  e  $N$ . Note que a reta  $i$  é também uma reta de perfil, cujas projeções não verificam, igualmente, o **Critério de Reversibilidade**.

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  – o ponto  $I$ . Não é possível determinar diretamente o ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$ , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (a reta  $e$ , que é o traço frontal do plano  $\pi$ ). Em seguida, rebateram-se os pontos  $M$  e  $N$ , que definem a reta  $i$  –  $M_r$  e  $N_r$  são aqueles pontos rebatidos. Note que os dois pontos se situam em *Diedros* distintos, mas que os respetivos arcos do rebatimento **rodam no mesmo sentido** (o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, neste caso) e têm **a mesma amplitude de rotação** (uma rotação de  $90^\circ$ , neste caso). Em seguida, desenhou-se a reta  $i_r$ , que é a reta  $i$  rebatida –  $i_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $M_r$  e  $N_r$ ). O ponto  $P_r$  é o ponto  $P$  rebatido. Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), perpendicular à reta  $i_r$ , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  – a reta  $p_r$  é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas do plano  $\rho$  (a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ ). A reta  $p_r$  já verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ . Por fim, determinou-se, em rebatimento, o ponto  $I$  (o ponto de concorrência entre as retas  $p_r$  e  $i_r$ ) –  $I_r$ . O ponto  $I$  é o ponto de concorrência da reta  $p$  com a reta  $i$  e é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $I$ .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ . A partir das projeções do ponto  $I$ , foi possível desenhar as projeções do segmento  $[PI]$ . As projeções do segmento  $[PI]$  são as projeções do segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano  $\pi$ ), observa-se que o segmento  $[PI]$  está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$  está no segmento  $[P_r I_r]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $b$ , das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, das retas  $p_r$  e  $i_r$ , do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência, etc.).

## 364.

### Dados:

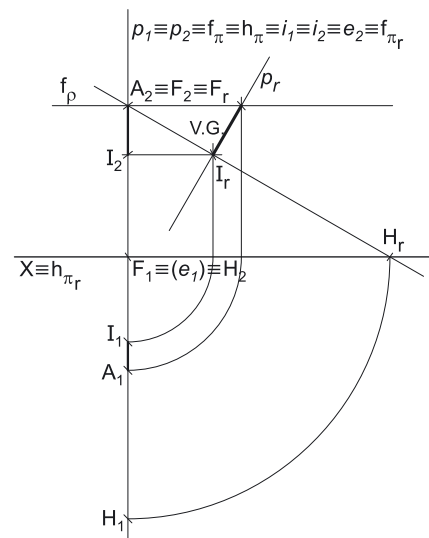
Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelo seu traço frontal, bem como o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\rho$  está definido por uma reta (o seu traço frontal) e pela sua orientação (é dado o ângulo que o plano faz com o Plano Frontal de Projeção).

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $A$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\pi$ , que é o plano projetante da reta  $p$  – o plano  $\pi$  é um plano de perfil.

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\pi$  (o plano auxiliar) com o plano  $\rho$  – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por um ponto e uma direção. O ponto que define a reta  $i$  é o seu traço frontal (o ponto  $F$ ), que se situa sobre o traço frontal do plano ( $f_p$ ). A direção da reta  $i$  corresponde ao ângulo que a reta faz com o Plano Frontal de Projeção, que é igual ao ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Frontal de Projeção – esse ângulo é, na prática, o ângulo que a reta  $i$  faz com o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_{\pi}$ ). Note que a reta  $i$  é também uma reta de perfil, cujas projeções não verificam, igualmente, o **Critério de Reversibilidade**.

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  – o ponto  $I$ . Não é possível determinar diretamente o ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$ , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_{\pi}$  (a reta  $e$ , que é o traço frontal do plano  $\pi$ ). Em seguida, rebateu-se o traço frontal da reta  $i$  (o ponto  $F$ ), que é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r \equiv F_2$ .

**Em rebatimento**, o ângulo que a reta  $i$  faz com o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_{\pi}$ ) já está em verdadeira grandeza, no ângulo entre a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) e  $f_{\pi r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  em rebatimento). Assim, por  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido) conduziu-se  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) fazendo, com  $f_{\pi r}$ , um ângulo de  $60^\circ$  e garantindo-se, ainda, que o traço horizontal da reta  $i$  tem afastamento positivo (para que o traço horizontal do plano  $\rho$  se situe no **SPHA**). Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de  $F_r$ , aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta  $i$  em rebatimento –  $H_r$ .  $H_r$  (o traço horizontal da reta  $i$  em rebatimento) está necessariamente sobre  $h_{\pi r}$  –  $H_r$  é o ponto de interseção de  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) com  $h_{\pi r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  rebatido). As projeções do ponto  $H$  determinam-se invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ . Note que não era necessária a determinação do traço horizontal da reta  $i$ , pois nada no enunciado nos pede esse ponto – a sua determinação pretendeu, apenas, assegurar que a reta  $i$  satisfaz pedido no enunciado (o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção). Exatamente por isso mesmo, não se determinou o traço horizontal do plano  $\rho$  – porque não é pedido e também não é necessário.

Em seguida, rebateu-se o ponto  $A$  – o ponto  $A_r$  é o ponto  $A$  rebatido. Pelo ponto  $A_r$  conduziu-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), perpendicular à reta  $i_r$ , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  – a reta  $p_r$  é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas do plano  $\rho$  (a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ ). A reta  $p_r$  já verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ . Por fim, determinou-se, em rebatimento, o ponto  $I$  (o ponto de concorrência entre as retas  $p_r$  e  $i_r$ ) –  $I_r$ . O ponto  $I$  é o ponto de concorrência da reta  $p$  com a reta  $i$  e é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $I$ .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ . A partir das projeções do ponto  $I$ , foi possível desenhar as projeções do segmento  $[PI]$ . As projeções do segmento  $[PI]$  são as projeções do segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano  $\pi$ ), observa-se que o segmento  $[PI]$  está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$  está no segmento  $[P_r I_r]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

#### Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\pi$ , das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, das retas  $p_r$  e  $i_r$ , etc.).

## 365.

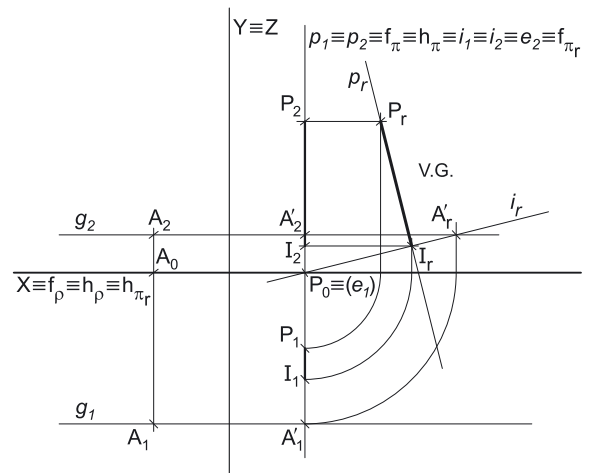
#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\rho$  está definido pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços, pois é um plano passante) e pelo ponto  $A$  (um ponto exterior ao eixo  $X$ ), cujas projeções se determinaram em função das suas coordenadas.

#### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\pi$ , que é o plano projetante da reta  $p$  – o plano  $\pi$  é um plano de perfil.

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\pi$  (o plano auxiliar) com o plano  $\rho$  – a reta  $i$ . Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $i$  é necessariamente uma **reta de perfil passante**, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $i$  – o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  (que não se identificou). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta  $i$ . Os dados do plano  $\rho$  são insuficientes para definir a reta  $i$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\rho$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $g$ , como reta auxiliar do plano  $\rho$ . A reta  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ , que é o ponto que define o plano  $\rho$ ) e por uma direção (a direção das retas fronto-horizontais). Em seguida, determinou-se o ponto  $A'$ , que é o ponto de interseção da reta  $g$  com o plano  $\pi$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – o ponto  $A'$ . A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $A'$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ . Salienta-se que a reta  $i$  é também uma reta de perfil, cujas projeções não verificam, igualmente, o **Crítério de Reversibilidade**.

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  – o ponto  $I$ . Não é possível determinar diretamente o ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$ , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo **rebatimento do plano de perfil** (o plano  $\pi$ ), como o enunciado pede expressamente. Nesse sentido, rebateu-se o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (a reta  $e$ , que é o traço frontal do plano  $\pi$ ). Em seguida, rebateu-se o ponto  $A'$ , o que nos permitiu determinar  $A'_r$  (o ponto  $A'$  rebatido) e desenhar a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) – a reta  $i_r$  está definida por dois pontos (o ponto  $A'_r$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é um ponto fixo, pois é um ponto da charneira). O ponto  $P_r$  é o ponto  $P$  rebatido. Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), perpendicular à reta  $i_r$ , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  – a reta  $p_r$  é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas do plano  $\rho$  (a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ ). A reta  $p_r$  já verifica o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ . Por fim, determinou-se, em rebatimento, o ponto  $I$  (o ponto de concorrência entre as retas  $p_r$  e  $i_r$ ) –  $I_r$ . O ponto  $I$  é o ponto de concorrência da reta  $p$  com a reta  $i$  e é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $I$ .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ . A partir das projeções do ponto  $I$ , foi possível desenhar as projeções do segmento  $[PI]$ . As projeções do segmento  $[PI]$  são as projeções do segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano  $\pi$ ), observa-se que o segmento  $[PI]$  está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$  está no segmento  $[P_r I_r]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ , que se situam no eixo  $X$ ) representaram-se a **médio**, que é a expressividade para o eixo  $X$  (a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, das retas  $p_r$  e  $i_r$ , do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência, etc.).

## 366.

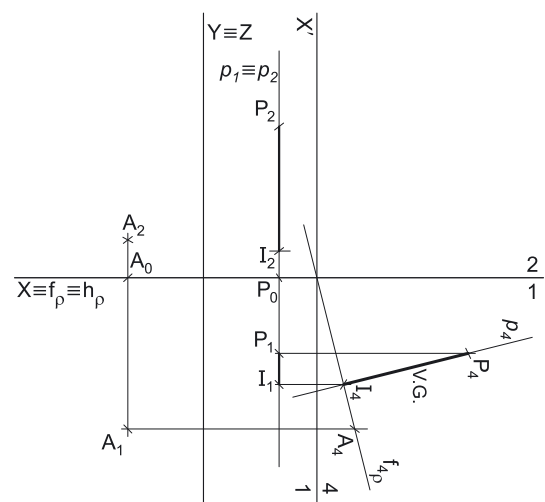
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\rho$  está definido pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços, pois é um plano passante) e pelo ponto  $A$  (um ponto exterior ao eixo  $X$ ), cujas projeções se determinaram em função das suas coordenadas.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Crítério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ ;
3. por fim, a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  são uma única reta, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** (como o enunciado pede expressamente) permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro, nesse diedro de projeção teremos dois traços do plano  $\rho$  (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o plano  $\rho$  seja um plano projetante. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  (é perpendicular ao eixo  $X$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto  $P$  no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ .  $P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $P$ ).

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, há que determinar a projeção no **plano 4** de um ponto do plano – o ponto  $A$ , por exemplo, que é o ponto que define o plano. Assim, determinou-se  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 1 cm – a cota de  $A$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $A_4$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto  $A_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $P_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, é possível, de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ , a partir da sua projeção no **plano 4** –  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$ .

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $P$  e  $I$ ), já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  e já se determinou o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ).

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **P** ao plano  $\rho$ . A partir das projeções dos dois pontos, desenharam-se as projeções do segmento **[PI]**, que é o segmento representativo da distância do ponto **P** ao plano  $\rho$ .

O segmento **[PI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento **[PI]** está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano – a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** ao plano  $\rho$  está no segmento **[P<sub>4</sub>I<sub>4</sub>]**, e foi devidamente assinalada no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ , que se situam no eixo **X**) representaram-se a **médio**, que é a expressividade para o eixo **X** (a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta **p**, do eixo **X'**, da reta **p<sub>4</sub>**, do eixo **Y = Z**, que é uma linha de referência, e, ainda, do novo traço frontal do plano  $\rho$  – **f<sub>4p</sub>**).

**Vantagens deste processo de resolução em relação ao utilizado no exercício anterior:** as vantagens existentes e evidentes têm a ver com a possibilidade de resolver diretamente um conjunto de situações pendentes, com uma substancial economia quer de traçados quer, mesmo, de raciocínios. Um dos raciocínios que este processo consegue evitar é, por exemplo, todos os raciocínios necessários à determinação da reta de interseção do plano  $\pi$  com um plano passante (o plano  $\rho$ ), expostos no relatório do exercício anterior.

## 367.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , bem como o ponto **P**, pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\rho$  está definido pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços, pois é um plano passante) e pelo ponto **A** (um ponto exterior ao eixo **X**), cujas projeções se determinaram em função das suas coordenadas.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto **P** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\rho$ . A reta **p** é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta **p** ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

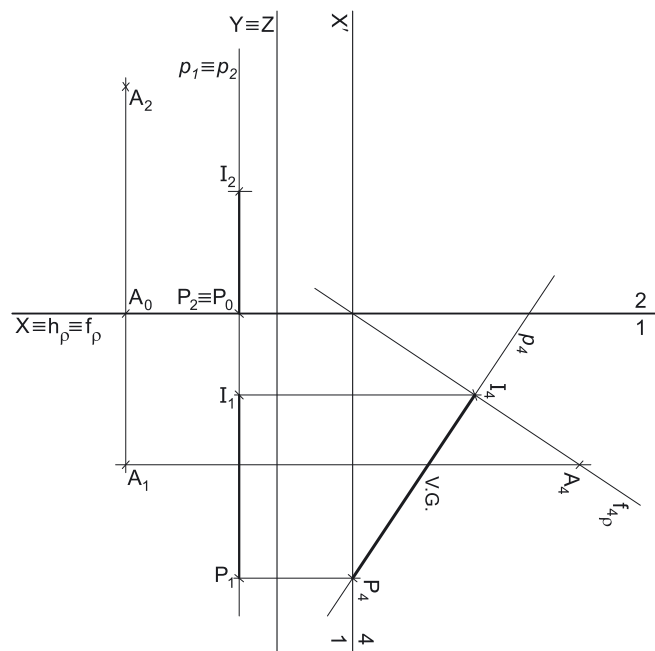
**Etapa 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$ . Nem a reta **p** nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **p** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **p**, para além do ponto **P**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  – a reta **p** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ ;
3. por fim, a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta **p** não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  são uma única reta, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta **p** nem o plano  $\rho$  são projetantes.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro, nesse diedro de projeção teremos dois traços do plano  $\rho$  (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o plano  $\rho$  seja um plano projetante. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  (é perpendicular ao eixo  $X$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto  $P$  no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ .  $P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve (e é nula) –  $P_4$  situa-se no eixo  $X'$ , tal como  $P_2$  se situa eixo  $X$ .

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, há que determinar a projeção no **plano 4** de um ponto do plano – o ponto  $A$ , por exemplo, que é o ponto que define o plano. Assim, determinou-se  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 6 cm – a cota de  $A$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $A_4$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto  $A_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $P_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, é possível, de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ , a partir da sua projeção no **plano 4** –  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$ .

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $P$  e  $I$ ), já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  e já se determinou o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ).

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapla 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ . A partir das projeções dos dois pontos, desenharam-se as projeções do segmento  $[PI]$ , que é o segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento  $[PI]$  está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano – a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$  está no segmento  $[P_4I_4]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ , que se situam no eixo  $X$ ) representaram-se a **médio**, que é a expressividade para o eixo  $X$  (a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do eixo  $X'$ , da reta  $p_4$ , do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência, e, ainda, do novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ ).

## 368.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções, em função dos dados. Não há necessidade de se representar o  $\beta_{1/3}$ , que é um plano passante cuja orientação é conhecida – o  $\beta_{1/3}$  faz diedros de  $45^\circ$  com os planos de projeção e atravessa os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapla 1.** Pelo ponto **P** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ . A reta **p** é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **CrITÉrio de reversibilidade**. Por outro lado, a reta **p** ainda não verifica o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapla 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta **p** com o  $\beta_{1/3}$ . Nem a reta **p** nem o  $\beta_{1/3}$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta **p**, o plano  $\pi$ , que é o plano projetante da reta **p** – o plano  $\pi$  é um plano de perfil.

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\pi$  (o plano auxiliar) com o  $\beta_{1/3}$  – a reta **i**. Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **i** é necessariamente uma **reta de perfil passante**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **i** – o seu ponto de concorrência com o eixo **X**. Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta **i**. Já temos a direção da reta **i** – a reta **i**, porque pertence ao  $\beta_{1/3}$ , é uma reta de perfil que faz ângulos de  $45^\circ$  com os dois planos de projeção, atravessando os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros. A reta **i** está, assim, definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com ambos os planos de projeção, ou seja, com os traços do plano  $\pi$ ). Salienta-se que a reta **i** é também uma reta de perfil, cujas projeções não verificam, igualmente, o **CrITÉrio de Reversibilidade**.

**C.** O ponto de concorrência das retas **p** e **i** é o ponto de interseção da reta **p** com o  $\beta_{1/3}$  – o ponto **I**. Não é possível determinar diretamente o ponto de concorrência das retas **p** e **i**, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (a reta **e**, que é o traço frontal do plano  $\pi$ ). Começou-se por rebater o ponto **P** – **P<sub>r</sub>** é o ponto **P** rebatido.

Em seguida, rebateu-se a reta **i** – a reta **i<sub>r</sub>** está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que é um ponto da charneira, pelo que é fixo) e por uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com os traços do plano  $\pi$  em rebatimento). Note que se garantiu que a reta **i<sub>r</sub>** passa pelo quadrante no qual se situa **P<sub>r</sub>**. Tenha em conta que a reta **i** tem que atravessar os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros (os Diedros que o  $\beta_{1/3}$  atravessa), pelo que a reta **i** atravessa o mesmo Diedro no qual se situa o ponto **P** (que é um ponto do  $1^\circ$  Diedro). Dessa forma, em rebatimento, a reta **i<sub>r</sub>** tem de passar pelo quadrante no qual se situa **P<sub>r</sub>**. Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo, aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

Pelo ponto **P<sub>r</sub>** conduziu-se a reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida), perpendicular à reta **i<sub>r</sub>**, o que nos garante a ortogonalidade entre a reta **p** e o  $\beta_{1/3}$  – a reta **p** é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas do  $\beta_{1/3}$  (a «família» das retas de perfil do  $\beta_{1/3}$ ). A reta **p<sub>r</sub>** já verifica o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao  $\beta_{1/3}$ . Por fim, determinou-se, em rebatimento, o ponto **I** (o ponto de concorrência entre as retas **p<sub>r</sub>** e **i<sub>r</sub>**) – **I<sub>r</sub>**. O ponto **I** é o ponto de concorrência da reta **p** com a reta **i** e é o ponto de interseção da reta **p** com o  $\beta_{1/3}$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **I**.

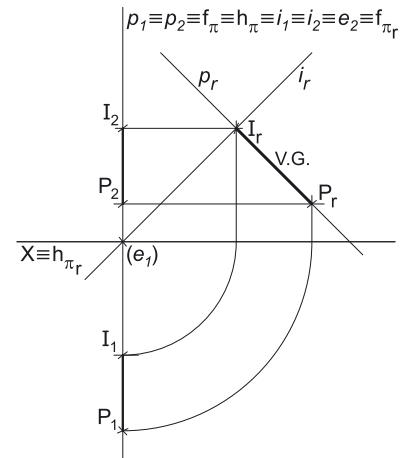
Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o  $\beta_{1/3}$  (o ponto **I**), foi concluída a **Etapla 2** do **método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **P** ao  $\beta_{1/3}$ . A partir das projeções do ponto **I**, foi possível desenhar as projeções do segmento **[PI]**. As projeções do segmento **[PI]** são as projeções do segmento representativo da distância do ponto **P** ao  $\beta_{1/3}$ .

O segmento **[PI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano  $\pi$ ), observa-se que o segmento **[PI]** está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** ao  $\beta_{1/3}$  está no segmento **[P<sub>r</sub>I<sub>r</sub>]**, e foi devidamente assinalada no desenho.

### Traçado:

Os dados representados são apenas um ponto, cuja linha de chamada se representa a **leve**, pelo que não há qualquer representação a **médio** no que respeita aos dados do exercício. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p**, das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, das retas **p<sub>r</sub>** e **i<sub>r</sub>**, etc.).



369.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções, em função dos dados. À partida, não há necessidade de se representar o  $\beta_{1/3}$ , que é um plano passante cuja orientação é conhecida – o  $\beta_{1/3}$  faz diedros de  $45^\circ$  com os planos de projeção.

Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapla 1.** Pelo ponto **P** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ . A reta **p** é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Crítério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta **p** ainda não verifica o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapla 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta **p** com o  $\beta_{1/3}$ . Nem a reta **p** nem o  $\beta_{1/3}$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **p** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **p**, para além do ponto **P**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao  $\beta_{1/3}$  – a reta **p** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do  $\beta_{1/3}$ ;
3. por fim, a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o  $\beta_{1/3}$  não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta **p** não verificam **Crítério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do  $\beta_{1/3}$  são uma única reta (o eixo **X**), o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao  $\beta_{1/3}$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta **p** nem o  $\beta_{1/3}$  são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** (como o enunciado pede expressamente) permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta **p** verificarão o **Crítério de Reversibilidade**, por outro, nesse diedro de projeção teremos dois traços do  $\beta_{1/3}$  (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o  $\beta_{1/3}$  seja um plano projetante. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Para uma melhor compreensão da situação, optou-se por se representar os traços do  $\beta_{1/3}$  – assinalou-se devidamente  $X \equiv f_\beta \equiv h_\beta$  (considerando-se que o plano  $\beta$  é, precisamente, o  $\beta_{1/3}$ ).

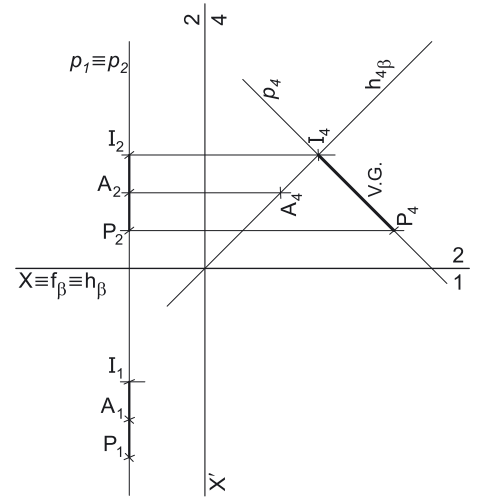
Optou-se por substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ , o que nos permite transformar o  $\beta_{1/3}$  num plano vertical (projetante horizontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do  $\beta_{1/3}$  (é perpendicular ao eixo **X**). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que, no novo diedro de projeção, o  $\beta_{1/3}$  será um plano projetante horizontal (um plano ortogonal ao novo Plano Horizontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto **P** no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ . **P<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **P** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento, que se manteve – a distância de **P<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **P<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 5 cm – o afastamento de **P**).

O novo traço horizontal do  $\beta_{1/3}$  (**h<sub>4β</sub>**) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço horizontal do  $\beta_{1/3}$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, também já temos a direção, pois é conhecido o ângulo que o  $\beta_{1/3}$  faz com os dois planos de projeção. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), o  $\beta_{1/3}$  é um plano vertical, o ângulo que o  $\beta_{1/3}$  faz com o Plano Frontal de Projeção projeta-se em verdadeira grandeza no ângulo que o seu traço horizontal (**h<sub>4β</sub>**) faz com o eixo **X'**. Assim, sabe-se imediatamente que **h<sub>4β</sub>** (o novo traço horizontal do  $\beta_{1/3}$ ) faz, com o eixo **X'**, um ângulo de  $45^\circ$ , o que nos permitiu desenhar **h<sub>4β</sub>** (o novo traço horizontal do  $\beta_{1/3}$ ) – **h<sub>4β</sub>** está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo **X'**) e por uma direção (faz um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo **X'**).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta horizontal (de nível) e o  $\beta_{1/3}$  é um plano vertical, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e o  $\beta_{1/3}$  já é direta (os traços do  $\beta_{1/3}$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $h_{4\beta}$  é uma reta horizontal (de nível) do plano (com cota nula) e que a reta **p** é, também ela, uma reta horizontal (de nível), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por **P<sub>4</sub>** conduziu-se **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a  $h_{4\beta}$  (o novo traço horizontal do  $\beta_{1/3}$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra «família» de retas do  $\beta_{1/3}$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao  $\beta_{1/3}$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta **p** já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, o  $\beta_{1/3}$  é um plano projetante horizontal, é possível, de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta **p** com o  $\beta_{1/3}$ , a partir da sua projeção no **plano 4** – **I<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **I** no **plano 4**) é o ponto de concorrência de **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**) com  $h_{4\beta}$  (o novo traço horizontal do  $\beta_{1/3}$ ). Em seguida, determinou-se **I<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **I**), de forma direta, sobre **p<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **p**). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar **I<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **I**), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **I<sub>1</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **I<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta **p** está definida por dois pontos (os pontos **P** e **I**), já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao  $\beta_{1/3}$  e já se determinou o ponto de interseção da reta **p** com o  $\beta_{1/3}$  (o ponto **I**).

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o  $\beta_{1/3}$  (o ponto **I**), foi concluída a **Etapa 2** do **método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **P** ao  $\beta_{1/3}$ . A partir das projeções do ponto **I**, foi possível desenhar as projeções do segmento **[PI]**. As projeções do segmento **[PI]** são as projeções do segmento representativo da distância do ponto **P** ao  $\beta_{1/3}$ .

O segmento **[PI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Frontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento **[PI]** está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano – a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** ao  $\beta_{1/3}$  está no segmento **[P<sub>4</sub>I<sub>4</sub>]**, e foi devidamente assinalada no desenho.

### Traçado:

Os dados representados são apenas um ponto, cuja linha de chamada se representa a **leve**, pelo que não há qualquer representação a **médio** no que respeita aos dados do exercício. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p**, do eixo **X'**, da reta **p<sub>4</sub>** e, ainda, do novo traço horizontal do  $\beta_{1/3}$  –  $h_{4\beta}$ ).

## 370.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , bem como o ponto **P**, pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\rho$  está definido por uma reta (o eixo **X**) e pela sua orientação (é dado o ângulo que o plano faz com o Plano Horizontal de Projeção).

### Resolução:

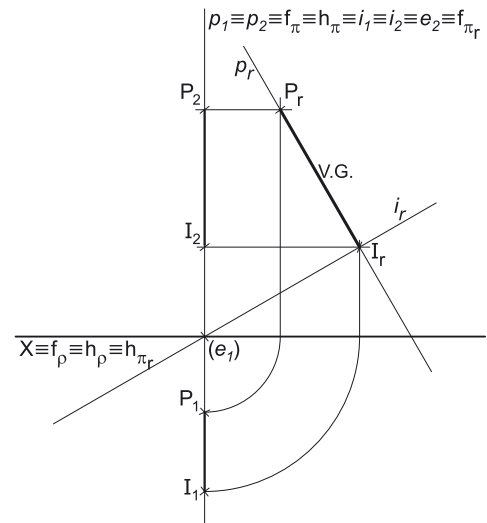
A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto **P** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\rho$ . A reta **p** é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta **p** ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$ . Nem a reta **p** nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta **p**, o plano  $\pi$ , que é o plano projetante da reta **p** – o plano  $\pi$  é um plano de perfil.

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\pi$  (o plano auxiliar) com o plano  $\rho$  – a reta **i**. Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **i** é necessariamente uma **reta de perfil passante**, pelo que já temos um ponto para definir a reta **i** – o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que não se identificou). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta **i**. No entanto, já sabemos a direção da reta **i**, que corresponde ao ângulo que a reta faz com o Plano Horizontal de Projeção, que é igual ao ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo é, na prática, o ângulo que a reta **i** faz com o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_{\pi}$ ). A reta **i** está, assim, definida por um ponto e uma direção. Note que a reta **i** é também uma reta de perfil, cujas projeções não verificam, igualmente, o **Critério de Reversibilidade**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  – o ponto  $I$ . Não é possível determinar diretamente o ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$ , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil (o plano  $\pi$ ) para o Plano Frontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (a reta  $e$ , que é o traço frontal do plano  $\pi$ ). Começou-se por rebater o ponto  $P$  – o ponto  $P_r$  é o ponto  $P$  rebatido.

Em seguida, rebateu-se a reta  $i$ . O ponto de concorrência da reta  $i$  com o eixo  $X$  que é um ponto fixo, pois é um ponto da charneira), pelo que roda sobre si próprio. Por outro lado, em rebatimento, o ângulo que a reta  $i$  faz com o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ) já está em verdadeira grandeza, no ângulo entre a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) e  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  em rebatimento). Assim, pelo ponto de concorrência da reta  $i$  com o eixo  $X$  conduziu-se  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) fazendo, com  $h_{\pi_r}$ , um ângulo de  $30^\circ$  e garantindo-se, ainda, que a reta  $i_r$  passe pelo quadrante no qual se situa  $P_r$ . Tenha em conta que a reta  $i$  tem que atravessar os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros (os Diedros que o plano  $\rho$  atravessa), pelo que a reta  $i$  atravessa o mesmo Diedro no qual se situa o ponto  $P$  (que é um ponto do  $1^\circ$  Diedro). Dessa forma, em rebatimento, a reta  $i_r$  tem de passar pelo quadrante no qual se situa  $P_r$ . Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de  $F_r$ , aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), perpendicular à reta  $i_r$ , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  – a reta  $p$  é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas do plano  $\rho$  (a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ ). A reta  $p$  já verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\rho$ . Por fim, determinou-se, em rebatimento, o ponto  $I$  (o ponto de concorrência entre as retas  $p_r$  e  $i_r$ ) –  $I_r$ . O ponto  $I$  é o ponto de concorrência da reta  $p$  com a reta  $i$  e é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $I$ .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ . A partir das projeções do ponto  $I$ , foi possível desenhar as projeções do segmento  $[PI]$ . As projeções do segmento  $[PI]$  são as projeções do segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano  $\pi$ ), observa-se que o segmento  $[PI]$  está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$  está no segmento  $[P_r I_r]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ , que se situam no eixo  $X$ ) representaram-se a **médio**, que é a expressividade para o eixo  $X$  (a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, das retas  $p_r$  e  $i_r$ , etc.).

## 371.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Não há necessidade de se representar o  $\beta_{2/4}$ , que é um plano passante cuja orientação é conhecida – o  $\beta_{2/4}$  faz diedros de  $45^\circ$  com os planos de projeção e atravessa os  $2^\circ$  e  $4^\circ$  Diedros.

#### Resolução:

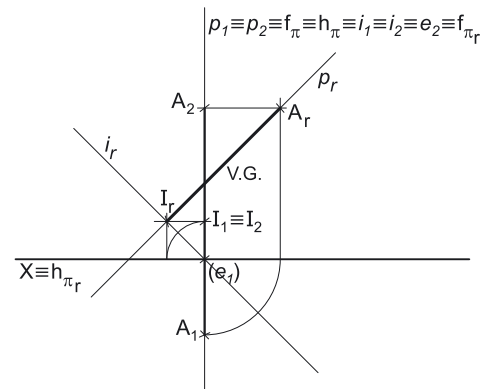
A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $A$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao  $\beta_{1/2/4}$ . A reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o  $\beta_{2/4}$ . Nem a reta  $p$  nem o  $\beta_{2/4}$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\pi$ , que é o plano projetante da reta  $p$  – o plano  $\pi$  é um plano de perfil.

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\pi$  (o plano auxiliar) com o  $\beta_{2/4}$  – a reta  $i$ . Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $i$  é necessariamente uma **reta de perfil passante**, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $i$  – o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta  $i$ . Já temos a direção da reta  $i$  – a reta  $i$ , porque pertence ao  $\beta_{2/4}$ , é uma reta de perfil que faz ângulos de  $45^\circ$  com os dois planos de projeção, atravessando os  $2^\circ$  e  $4^\circ$  Diedros. A reta  $i$  está, assim, definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ) e uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com ambos os planos de projeção, ou seja, com os traços do plano  $\pi$ ). Salienta-se que a reta  $i$  é também uma reta de perfil, cujas projeções não verificam, igualmente, o **Critério de Reversibilidade**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

C. O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o  $\beta_{2/4}$  – o ponto  $I$ . Não é possível determinar diretamente o ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$ , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (a reta  $e$ , que é o traço frontal do plano  $\pi$ ). Começou-se por rebater o ponto  $A$  –  $A_r$  é o ponto  $A$  rebatido.

Em seguida, rebateu-se a reta  $i$  – a reta  $i_r$  está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é um ponto da charneira, pelo que é fixo) e por uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com os traços do plano  $\pi$  em rebatimento). Note que se garantiu que a reta  $i_r$  **não passa** pelo quadrante no qual se situa  $A_r$ . Tenha em conta que a reta  $i$  tem que atravessar os  $2^\circ$  e  $4^\circ$  *Diedros* (os *Diedros* que o  $\beta_{2/4}$  atravessa), pelo que a reta  $i$  **não atravessa** o *Diedro* no qual se situa o ponto  $A$  (que é um ponto do  $1^\circ$  *Diedro*). Dessa forma, em rebatimento, a reta  $i_r$  **não pode passar** pelo quadrante no qual se situa  $A_r$ . Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo, aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

Pelo ponto  $A_r$  conduziu-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), perpendicular à reta  $i_r$ , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o  $\beta_{1/3}$  – a reta  $p$  é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas do  $\beta_{2/4}$  (a «família» das retas de perfil do  $\beta_{2/4}$ ). A reta  $p$  já verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao  $\beta_{2/4}$ . Por fim, determinou-se, em rebatimento, o ponto  $I$  (o ponto de concorrência entre as retas  $p_r$  e  $i_r$ ) –  $I_r$ . O ponto  $I$  é o ponto de concorrência da reta  $p$  com a reta  $i$  e é o ponto de interseção da reta  $p$  com o  $\beta_{2/4}$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $I$ .

Sublinha-se que o ponto  $I$  é um ponto com afastamento negativo – no entanto, o arco do seu rebatimento tem a mesma amplitude do arco do rebatimento do ponto  $A$  ( $90^\circ$  de amplitude), mas roda em sentido contrário (porque se está a inverter o rebatimento). Assim, o arco do rebatimento do ponto  $A$  rodou no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, enquanto o arco da inversão do rebatimento do ponto  $I$  rodou no sentido oposto (no sentido dos ponteiros do relógio). O ponto  $I$ , porque é um ponto do  $\beta_{2/4}$ , tem as suas projeções coincidentes.

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o  $\beta_{2/4}$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $A$  ao  $\beta_{2/4}$ . A partir das projeções do ponto  $I$ , foi possível desenhar as projeções do segmento  $[AI]$ . As projeções do segmento  $[AI]$  são as projeções do segmento representativo da distância do ponto  $A$  ao  $\beta_{2/4}$ .

O segmento  $[AI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano  $\pi$ ), observa-se que o segmento  $[AI]$  está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância do ponto  $A$  ao  $\beta_{2/4}$  está no segmento  $[A_r I_r]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

### Traçado:

Os dados representados são apenas um ponto, cuja linha de chamada se representa a **leve**, pelo que não há qualquer representação a **médio** no que respeita aos dados do exercício. O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, das retas  $p_r$  e  $i_r$ , etc.).

## 372.

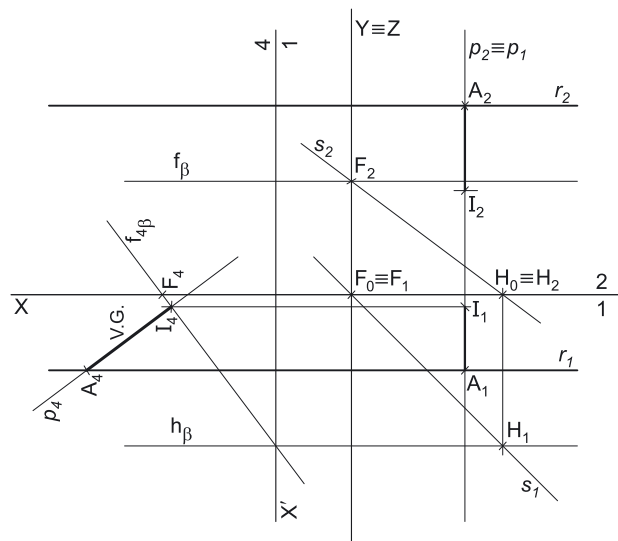
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $r$  e  $s$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\beta$ . O plano  $\beta$  é paralelo à reta  $r$ , pelo que o plano  $\beta$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta  $r$ , ou seja, o plano  $\beta$  tem de conter a «família» de retas à qual a reta  $r$  pertence. Nesse sentido, o plano  $\beta$  tem de conter a «família» das retas fronto-horizontais (a reta  $r$  é uma reta fronto-horizontais). Como o plano  $\beta$  também contém a reta  $s$  e, para além desta, tem de conter retas fronto-horizontais, o plano  $\beta$  é necessariamente um plano de rampa. Assim, foi possível, em seguida, determinar os traços do plano  $\beta$ .

O ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $s$ ) é um ponto do traço frontal do plano ( $f_\beta$ ). Nesse sentido, desenhou-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), que passa por  $F_2$  e é paralelo ao eixo  $X$  –  $f_\rho$  está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (é fronto-horizontais).

O ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $s$ ) é um ponto do traço horizontal do plano ( $h_\beta$ ). Nesse sentido, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que passa por  $H_1$  e é paralelo ao eixo  $X$  –  $h_\rho$  está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é fronto-horizontais).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Resolução:

Este exercício é, na prática, uma variante das situações de **distância de um ponto a um plano de rampa**. De facto, tendo em conta que a reta  $r$  (uma reta fronto-horizontal, cujos pontos têm, todos, o mesmo afastamento e a mesma cota) é paralela ao plano  $\beta$ , então a distância de qualquer dos seus pontos ao plano  $\beta$  será sempre a mesma. Nesse sentido, determinou-se um ponto  $A$ , qualquer, pertencente à reta  $r$ . Neste momento, o exercício resume-se à determinação da distância de um ponto (o ponto  $A$ ) a um plano de rampa (o plano  $\beta$ ).

Nesse sentido, a resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $A$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\beta$ . A reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\beta$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\beta$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $A$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\beta$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\beta$ ;
3. por fim, a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\beta$  não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\beta$  pertencem a uma única «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\beta$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem o plano  $\beta$  são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção os traços do plano  $\beta$  serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o plano  $\beta$  seja um plano projetante. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\beta$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\beta$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\beta$  ( $h_\beta$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\beta$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto  $A$  no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\beta$ .  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 5 cm – a cota de  $A$ ).

O novo traço frontal do plano  $\beta$  ( $f_{4\beta}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\beta$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto  $F$ , do traço frontal do plano  $\beta$  ( $f_\beta$ ) – o ponto  $F$  é o traço frontal da reta  $r$ .

Em seguida, determinou-se  $F_4$  (a projeção do ponto  $F$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $F$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\beta$  –  $f_{4\beta}$ , passa por  $F_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\beta$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\beta}$  está definido por dois pontos – o ponto  $F_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\beta$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\beta$  já é direta (os traços do plano  $\beta$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\beta}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta **p** é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $A_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4\beta}$  (o novo traço frontal do plano  $\beta$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra «família» de retas do plano  $\beta$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\beta$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta **p** já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, o plano  $\beta$  é um plano projetante frontal, é possível, de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\beta$ , a partir da sua projeção no **plano 4** –  $I_4$  (a projeção do ponto **I** no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta **p** no **plano 4**) com  $f_{4\beta}$  (o novo traço frontal do plano  $\beta$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto **I**), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta **p**). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto **I**), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $I_4$  ao eixo **X'**.

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta **p** está definida por dois pontos (os pontos **A** e **I**), já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\beta$  e já se determinou o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\beta$  (o ponto **I**).

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\beta$  (o ponto **I**), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **A** ao plano  $\beta$ . A partir das projeções dos dois pontos, desenharam-se as projeções do segmento **[AI]**, que é o segmento representativo da distância do ponto **A** ao plano  $\beta$ .

O segmento **[AI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento **[AI]** está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano – a verdadeira grandeza da distância do ponto **A** ao plano  $\beta$  está no segmento  $[A_4I_4]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

Assim,  $\overline{A_4I_4}$  é a verdadeira grandeza da distância da reta **r** ao plano  $\beta$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\beta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p**, do eixo **X'**, da reta  $p_4$  e, ainda, do novo traço frontal do plano  $\beta$  –  $f_{4\beta}$ ).

## 373.

Por **distância entre dois planos paralelos** entende-se a distância entre dois pontos quaisquer dos planos (um ponto de cada plano) contidos na mesma reta ortogonal aos dois planos, ou seja, é o comprimento de um segmento de reta ortogonal aos dois planos que tem um extremo em cada um dos planos.

## 374.

**Método geral para a determinação da distância entre dois planos paralelos:** 1. conduz-se uma reta qualquer, ortogonal aos dois planos; 2. determinam-se os pontos de interseção dessa reta com cada um dos dois planos; 3. a distância entre os dois pontos (os pontos de interseção) é a **distância entre os dois planos**.

## 375.

### Dados:

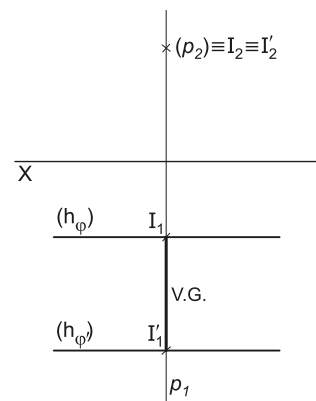
Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , pelos respetivos traços horizontais, em função dos respetivos afastamentos. Os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  não têm traço frontal, pelo que os seus traços horizontais se identificaram com o recurso a parêntesis.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: 1. conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; 2. determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; 3. a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta **p**, qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta **p** é necessariamente uma reta de topo. A reta **p** verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de qualquer dos planos (quaisquer duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos).

**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta **p** com os dois planos. Os dois planos são projetantes horizontais, pelo que a determinação dos pontos de interseção da reta **p** com os dois planos é imediata, a partir das respetivas projeções horizontais. O ponto **I** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\varphi$ . O ponto **I'** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\varphi'$ . Os dois pontos têm as suas projeções frontais, coincidentes, pois a reta **p** é uma reta projetante frontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos **I** e **I'** desenharam-se as projeções do segmento **[II']** (tendo em conta que a projeção frontal do segmento se reduz a um ponto). O segmento **[II']** é um segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento de reta **[II']** é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (a reta **p** é uma reta de topo), pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal – a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos está na projeção horizontal do segmento de reta **[II']**.  $\overline{I_1 I'_1}$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

Note que, nesta situação, a distância entre os dois planos corresponde, na prática, à diferença entre os respetivos afastamentos.

**Traçado:**

Os dados (os traços horizontais dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta **p**), representaram-se a **leve**.

### 376.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\delta$  e  $\theta$ , pelos respetivos traços, em função dos dados. O plano  $\theta$  é paralelo ao plano  $\delta$ , pelo que tem os seus traços paralelos aos traços homónimos do plano  $\delta$ , para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

**Resolução:**

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta **p**, qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta **p** é uma reta frontal (de frente), cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos dos dois planos. A reta **p** verifica, assim, o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de cada um dos planos (os respetivos traços).

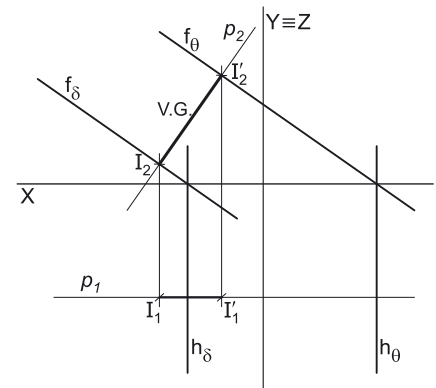
**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta **p** com os dois planos. Os dois planos são projetantes frontais, pelo que a determinação dos pontos de interseção da reta **p** com os dois planos é imediata, a partir das respetivas projeções frontais. O ponto **I** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\delta$ . O ponto **I'** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\theta$ .

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos **I** e **I'** desenharam-se as projeções do segmento **[II']**. O segmento **[II']** é um segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento de reta **[II']** é paralelo ao Plano Frontal de Projeção (a reta **p** é uma reta frontal), pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal – a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos está na projeção frontal do segmento de reta **[II']**.  $\overline{I_2 I'_2}$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

**Traçado:**

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



### 377.

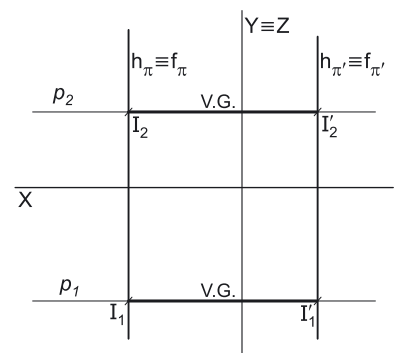
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\pi$  e  $\pi'$ , pelos respetivos traços, em função das respetivas abscissas.

**Resolução:**

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta **p**, qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta **p** é necessariamente uma reta fronto-horizontal. A reta **p** verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos (quaisquer duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Os dois planos são duplamente projetantes, pelo que a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos é direta. O ponto  $I$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\pi$ . O ponto  $I'$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\pi'$ .

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  desenharam-se as projeções do segmento  $[II']$  (tendo em conta que a projeção frontal do segmento se reduz a um ponto). O segmento  $[II']$  é segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento de reta  $[II']$  é paralelo aos dois planos de projeção (a reta  $p$  é uma reta fronto-horizontal), pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em ambas as projeções –  $\bar{I}_1\bar{I}'_1 = \bar{I}_2\bar{I}'_2$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

Note que, nesta situação, a distância entre os dois planos corresponde, na prática, à diferença entre as respetivas abcissas.

### Traçado:

Os dados (os traços horizontais dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 378.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços dos dois planos.

O plano  $\delta$  contém os pontos  $B$  e  $C$ , pelo que o seu traço horizontal ( $h_\delta$ ) passa necessariamente pelas projeções horizontais dos pontos  $B$  e  $C$  ( $B_1$  e  $C_1$ , respetivamente), pois o plano  $\delta$  é um plano projetante horizontal (um plano vertical) –  $h_\delta$  está definido por dois pontos (os pontos  $B_1$  e  $C_1$ ). O traço frontal do plano ( $f_\delta$ ) é uma reta vertical que é concorrente com  $h_\delta$  no eixo  $X$  –  $f_\delta$  está, assim, definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e uma direção (é vertical).

O plano  $\alpha$  contém o ponto  $A$ , pelo que o seu traço horizontal ( $h_\alpha$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto  $A$  ( $A_1$ ), pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal (um plano vertical). Por outro lado, o plano  $\alpha$  é paralelo ao plano  $\delta$ , pelo que tem os seus traços paralelos aos traços homónimos do plano  $\delta$ , para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**. Assim,  $h_\alpha$  está definido por um ponto (o ponto  $A_1$ ) e uma direção (é paralelo a  $h_\delta$ ). O traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) é uma reta vertical que é concorrente com  $h_\alpha$  no eixo  $X$  –  $f_\alpha$  está, assim, definido por um ponto e uma direção.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta  $p$ , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta  $p$  é uma reta horizontal (de nível), cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos dos dois planos. A reta  $p$  verifica, assim, o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de cada um dos planos (os respetivos traços).

Por uma questão de economia de traçados, optou-se por conduzir a reta  $p$  pelo ponto  $A$  (o ponto que é dado e que pertence ao plano  $\alpha$ ).

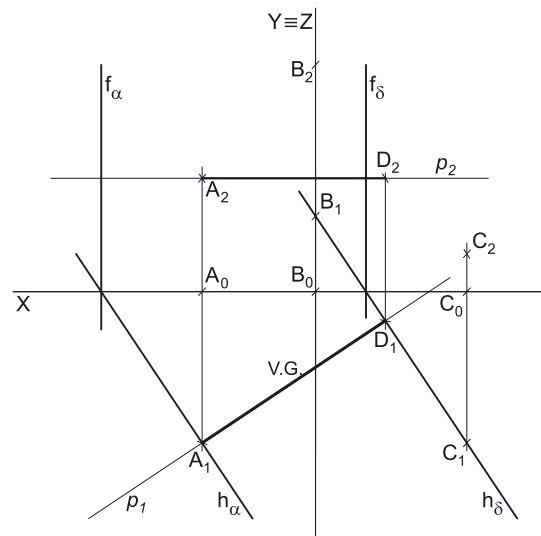
**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Os dois planos são projetantes horizontais, pelo que a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos é imediata, a partir das respetivas projeções horizontais. O ponto  $A$  é, imediatamente, o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ . O ponto  $B$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$ .

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos  $A$  e  $B$  desenharam-se as projeções do segmento  $[AB]$ . O segmento  $[AB]$  é um segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento de reta  $[AB]$  é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (a reta  $p$  é uma reta horizontal), pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal – a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos está na projeção horizontal do segmento de reta  $[AB]$ .  $A_1B_1$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



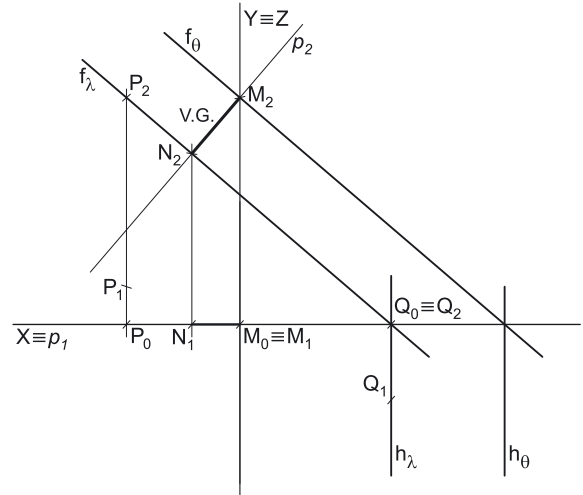
379.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M**, **P** e **Q**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços dos dois planos.

O plano  $\lambda$  contém os pontos **P** e **Q**, pelo que o seu traço frontal ( $f_\lambda$ ) passa necessariamente pelas projeções frontais dos pontos **P** e **Q** ( $P_2$  e  $Q_2$ , respetivamente), pois o plano  $\lambda$  é um plano projetante frontal (um plano de topo) –  $f_\lambda$  está definido por dois pontos (os pontos  $P_2$  e  $Q_2$ ). O traço horizontal do plano ( $h_\lambda$ ) é uma reta de topo que é concorrente com  $f_\lambda$  no eixo  $X - h_\lambda$  está, assim, definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e uma direção (é de topo).

O plano  $\theta$  contém o ponto **M**, pelo que o seu traço frontal ( $f_\theta$ ) passa necessariamente pela projeção frontal do ponto **M** ( $M_2$ ), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal (um plano de topo). Por outro lado, o plano  $\theta$  é paralelo ao plano  $\lambda$ , pelo que tem os seus traços paralelos aos traços homónimos do plano  $\lambda$ , para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**. Assim,  $f_\theta$  está definido por um ponto (o ponto  $M_2$ ) e uma direção (é paralelo a  $f_\lambda$ ). O traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ) é uma reta de topo que é concorrente com  $f_\theta$  no eixo  $X - h_\theta$  está, assim, definido por um ponto e uma direção.



Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas:

1. conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos;
2. determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados;
3. a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta **p**, qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta **p** é uma reta frontal (de frente), cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos dos dois planos. A reta **p** verifica, assim, o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de cada um dos planos (os respetivos traços).

Por uma questão de economia de traçados, optou-se por conduzir a reta **p** pelo ponto **M** (o ponto que é dado e que pertence ao plano  $\theta$ ). Nesse sentido, a reta **p** é uma reta frontal (de frente) com afastamento nulo (está contida no Plano Frontal de Projeção).

**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta **p** com os dois planos. Os dois planos são projetantes frontais, pelo que a determinação dos pontos de interseção da reta **p** com os dois planos é imediata, a partir das respetivas projeções frontais. O ponto **M** é, imediatamente, o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\theta$ . O ponto **N** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\lambda$ .

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos **M** e **N** desenham-se as projeções do segmento **[MN]**. O segmento **[MN]** é um segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento de reta **[MN]** está contido no Plano Frontal de Projeção (a reta **p** é uma reta frontal com afastamento nulo), pelo que o segmento de reta está em verdadeira grandeza em projeção frontal –  $M_2N_2$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

380.

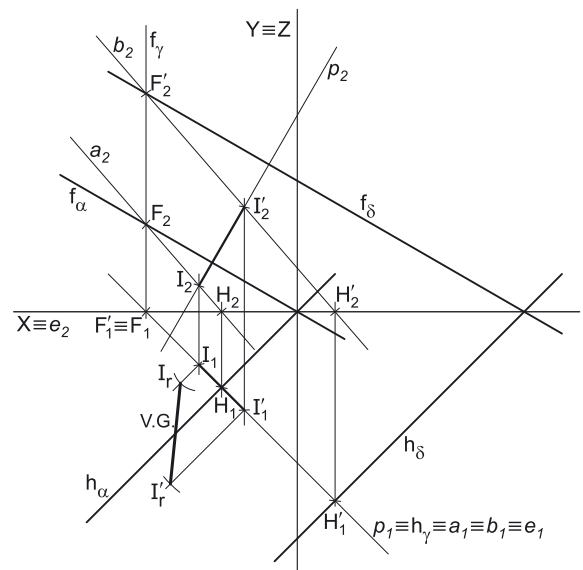
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\delta$  é paralelo ao plano  $\alpha$ , pelo que tem os seus traços paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$ , para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta **p**, qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta **p** é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos dos dois planos. A reta **p** verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos (os seus traços).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapla 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Nem a reta  $p$  nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\gamma$ , que é o plano projetante horizontal da reta  $p$ .

**B.** Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano  $\gamma$  com os dois planos dados. A reta  $a$  é a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  e está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projeção). A reta  $b$  é a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\delta$  e está igualmente definida por dois pontos – o ponto  $F'$  e  $H'$  (os seus traços nos planos de projeção).

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $a$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  – o ponto  $I$ . O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $b$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$  – o ponto  $I'$ .

Neste momento, com a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), foi concluída a **Etapla 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  desenham-se as projeções do segmento  $[II']$ . O segmento  $[II']$  é um segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento  $[II']$  é oblíquo aos dois planos de projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção) optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\gamma$  (o plano projetante horizontal do segmento  $[II']$ ) para o Plano Horizontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ). Os planos ortogonais à charneira são planos verticais, ortogonais a  $h_\gamma$ .

O arco do rebatimento do ponto  $I$  está contido num plano vertical ortogonal à reta  $e$  (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto  $I$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim conduziu-se, por  $I_1$ , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $I$ . Sobre esta perpendicular representou-se a cota do ponto  $I$ , determinando-se  $I_1$ .

De forma semelhante, o arco do rebatimento do ponto  $I'$  está contido num plano vertical ortogonal à reta  $e$  (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto  $I'$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim conduziu-se, por  $I'_1$ , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $I'$ . Sobre esta perpendicular representou-se a cota do ponto  $I'$ , determinando-se  $I'_1$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $I_1$  e  $I'_1$  – o segmento de reta  $[I_1I'_1]$  é o segmento de reta  $[II']$  rebatido e situa-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza.  $\overline{I_1I'_1}$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$ ,  $a$  e  $b$ , do plano  $\gamma$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 381.

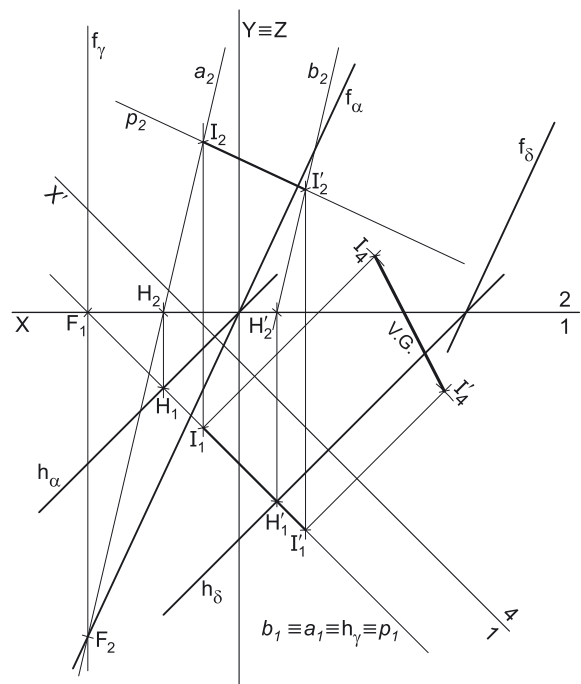
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\delta$  é paralelo ao plano  $\alpha$ , pelo que tem os seus traços paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$ , para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

### Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapla 1.** Conduziu-se uma reta  $p$ , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos dos dois planos. A reta  $p$  verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos (os seus traços).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Nem a reta  $p$  nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\gamma$ , que é o plano projetante horizontal da reta  $p$ .

**B.** Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano  $\gamma$  com os dois planos dados. A reta  $a$  é a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  e está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projeção). A reta  $b$  é a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\delta$  e está definida por um ponto (o ponto  $H'$ , o seu traço horizontal) e por uma direção (é paralela à reta  $a$ ).

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $a$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  – o ponto  $I$ . O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $b$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$  – o ponto  $I'$ .

Neste momento, com a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  desenharam-se as projeções do segmento  $[II']$ . O segmento  $[II']$  é um segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento  $[II']$  é oblíquo aos dois planos de projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção) optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, transformando o segmento num segmento de reta frontal (de frente).

Para transformar o segmento de reta  $[II']$  num segmento de reta frontal (de frente), é necessário, substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte: – no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 4**); – no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** dos seus pontos (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta  $[II']$ , o eixo  $X'$  é paralelo a  $[I_1I'_1]$ . As linhas de chamada dos pontos  $I$  e  $I'$ , no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$I_4$  é a projeção do ponto  $I$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $I_2$  ao eixo  $X$ .  $I'_4$  é a projeção do ponto  $I'$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I'_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $I'_2$  ao eixo  $X$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $I_4$  e  $I'_4$  – o segmento de reta  $[I_4I'_4]$  é o segmento de reta  $[II']$  rebatido e situa-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza.  $\overline{I_4I'_4}$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$ ,  $a$  e  $b$ , do plano  $\gamma$ , de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 382.

#### Dados:

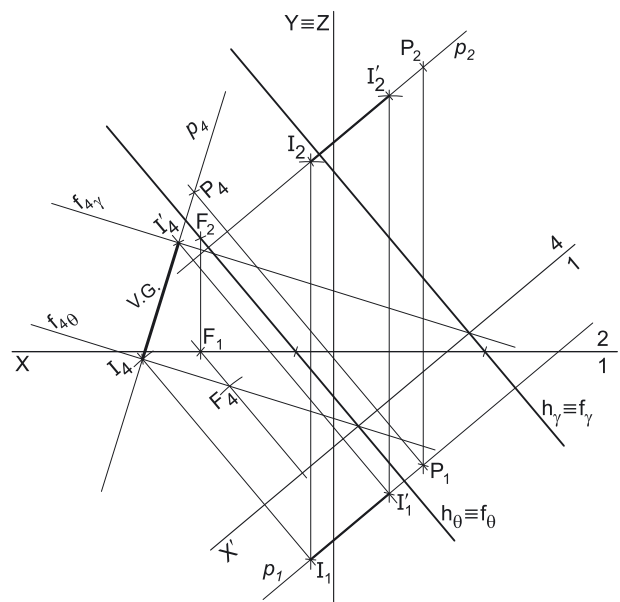
Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\theta$  e  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\theta$  é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem os seus traços coincidentes (planos ortogonais a  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes). O plano  $\gamma$  é paralelo ao plano  $\theta$ , pelo que tem os seus traços paralelos aos traços homónimos do plano  $\theta$ , para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

#### Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta  $p$ , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos dos dois planos. A reta  $p$  verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos (os seus traços).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Note que, no presente caso, a reta  $p$  é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pois tem as suas projeções paralelas entre si.

**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Nem a reta  $p$  nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. No entanto, optou-se por resolver esta situação de uma forma diferente – transformando os planos em planos projetantes, com o recurso a uma **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por transformar os dois planos em planos de topo (planos projetantes frontais), que são ortogonais ao Plano Frontal de Projeção. Para tal, há que substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal aos dois planos, o que nos permite transformar os dois planos oblíquos em planos de topo (projetantes frontais). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal aos dois planos, o eixo  $X'$  é perpendicular aos traços horizontais dos dois planos ( $h_0$  e  $h_7$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, foi necessário determinar os novos traços frontais dos dois planos. O novo traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_{4\theta}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\theta$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se um ponto  $F$ , qualquer, do traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ).

Assim, determinou-se  $F_4$  (a projeção do ponto  $F$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$  (a cota de  $F$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\theta$  –  $f_{4\theta}$  passa por  $F_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\theta}$  está definido por dois pontos – o ponto  $F_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).

O novo traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_{4\gamma}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\gamma$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, uma vez que os dois planos são paralelos, os novos traços frontais dos dois planos são também paralelos, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{4\gamma}$  –  $f_{4\gamma}$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X'$ ) e por uma direção (é paralelo a  $f_{4\theta}$ ).

Por fim, há que determinar as projeções da reta  $p$ , no novo diedro de projeção. A reta  $p$  é ortogonal aos dois planos, pelo que já temos a sua direção. No entanto, falta-nos um ponto para definir a reta. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto  $P$ , qualquer, pertencente à reta  $p$  – o ponto  $P$ . Em seguida, determinou-se  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (a cota de  $P$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$  –  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) está definida por um ponto (o ponto  $P_4$ ) e por uma direção (é perpendicular a  $f_{4\theta}$  e a  $f_{4\gamma}$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), os dois planos são dois planos de topo (projetantes frontais), pelo que a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos se processa de forma direta, a partir das respetivas projeções frontais (as suas projeções no **plano 4**).

O ponto  $I$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\theta$  –  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\theta}$  (o novo traço frontal do plano  $\theta$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) diretamente, pois situa-se sobre  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), na linha de chamada de  $I_1$ .

O ponto  $I'$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\gamma$  –  $I'_4$  (a projeção do ponto  $I'$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\gamma}$  (o novo traço frontal do plano  $\gamma$ ). Em seguida, determinou-se  $I'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I'$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I'_2$  (a projeção frontal do ponto  $I'$ ) diretamente, pois situa-se sobre  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), na linha de chamada de  $I'_1$ .

Neste momento, com a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância entre dois planos paralelos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  desenharam-se as projeções do segmento  $[II']$ . O segmento  $[II']$  é um segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento  $[II']$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento  $[II']$  está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano –  $\overline{I_4I'_4}$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 383.

**Dados:**

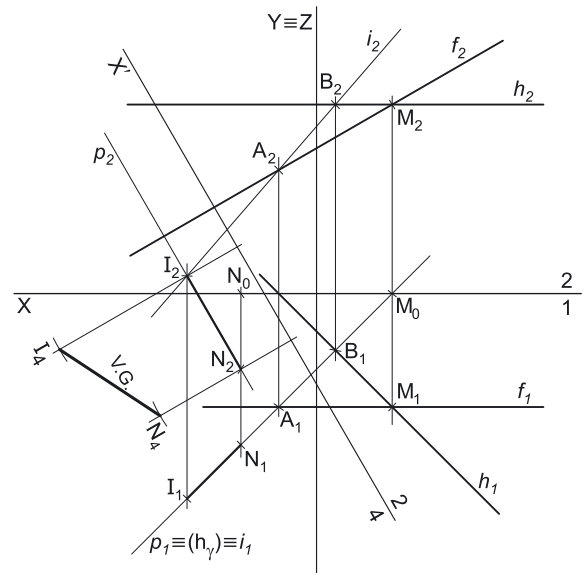
Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $h$  e  $f$ , bem como o ponto  $N$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. O plano  $\mu$  está definido por um ponto (o ponto  $N$ ) e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\alpha$ ). Nesse sentido, poder-se-iam determinar as projeções de retas do plano  $\mu$ , nomeadamente os seus traços, mas optou-se por não o fazer, como em seguida se expõe.

**Resolução:**

Este exercício é, na prática, uma variante das situações de **distância de um ponto a um plano oblíquo**. De facto, tendo em conta que o plano  $\mu$  é paralelo ao plano  $\alpha$ , então todos os pontos do plano  $\mu$  estão à mesma distância do plano  $\alpha$ . Nesse sentido, e porque é dado um ponto do plano  $\mu$  (o ponto  $N$ ), o exercício resume-se à determinação da distância de um ponto (o ponto  $N$ ) a um plano oblíquo (o plano  $\alpha$ ) – a distância do ponto  $N$  ao plano  $\alpha$  é igual à distância entre os dois planos.

A resolução do exercício passa, assim, pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $N$  conduz-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . Para a reta  $p$  ser ortogonal ao plano  $\alpha$ , a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$  (tem de ser ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ).



O plano  $\alpha$  está definido por duas retas – uma reta frontal (a reta  $f$ ) e uma reta horizontal (a reta  $h$ ). Tendo em conta que se trata, em ambos os casos, de uma reta paralela a um dos planos de projeção, a ortogonalidade da reta  $p$  em relação às duas retas é direta, como em seguida se expõe.

A reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $h$  é direta em projeção horizontal. Assim, a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) passa por  $N_1$  (a projeção horizontal do ponto  $N$ ) e é perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a uma reta do plano  $\alpha$ . Para a reta  $p$  ser ortogonal ao plano  $\alpha$ , é necessário garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra reta do plano  $\alpha$  (que seja concorrente com a reta  $h$ ).

A reta  $f$  é concorrente com a reta  $h$  e é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $f$  é direta em projeção frontal. Assim, a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) passa por  $N_2$  (a projeção frontal do ponto  $N$ ) e é perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a uma segunda reta do plano  $\alpha$  (concorrente com a reta  $h$ ), pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ .

Está, assim, concluída a **Etapa 1 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\gamma$ , que é o plano projetante horizontal da reta  $p$ . O plano  $\gamma$  foi representado, apenas, pelo seu traço horizontal, pelo que  $h_0$  se identificou entre parêntesis.

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano dado) – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $B$ . O ponto  $A$  é o ponto de interseção do plano  $\gamma$  com a reta  $f$  e foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal (porque o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal). O ponto  $B$  é o ponto de interseção do plano  $\gamma$  com a reta  $h$  e foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal (porque o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal).

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  – o ponto  $I$ .

Note que, caso se tivesse recorrido ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, ao se conduzir a reta  $p$  pelo ponto  $N$  (que é um ponto do plano  $\mu$ ), o ponto  $N$  seria, de forma imediata, o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\mu$ .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $N$  ao plano  $\alpha$ . A partir das projeções dos pontos  $N$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[NI]$ . O segmento  $[NI]$  é o segmento representativo da distância do ponto  $N$  ao plano  $\alpha$ , pelo que é um segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento  $[NI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por recorrer a uma **mudança do diedro de projeção**, transformando o segmento de reta  $[NI]$  num segmento de reta horizontal (de nível).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para transformar o segmento de reta **[NI]** num segmento de reta horizontal (de nível), é necessário, substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** dos seus pontos (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta **[NI]**, o eixo **X'** é paralelo a **[N<sub>2</sub>I<sub>2</sub>]**. As linhas de chamada dos pontos **N** e **I**, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que se posicionou o eixo **X'** de forma que, no novo diedro de projeção, o segmento **[NI]** seja um segmento horizontal (de nível) com **cota negativa**.

**N<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **N** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **N<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **N<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 4 cm – o afastamento do ponto **N**). **I<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **I** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **I<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **I<sub>1</sub>** ao eixo **X** (o afastamento de **I**).

No novo diedro de projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta horizontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de **N<sub>4</sub>I<sub>4</sub>** é **N<sub>4</sub>I<sub>4</sub>**, que é a distância do ponto **N** ao plano  $\alpha$  (e que é, afinal, a distancia entre os dois planos)

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas **h** e **f**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância, que é o comprimento do segmento **[N<sub>4</sub>I<sub>4</sub>]** (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (do segmento **[NI]**), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p**, do plano  $\gamma$ , da reta **i**, de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada e do eixo **Y = Z**, que é uma linha de referência).

## 384.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

### Resolução:

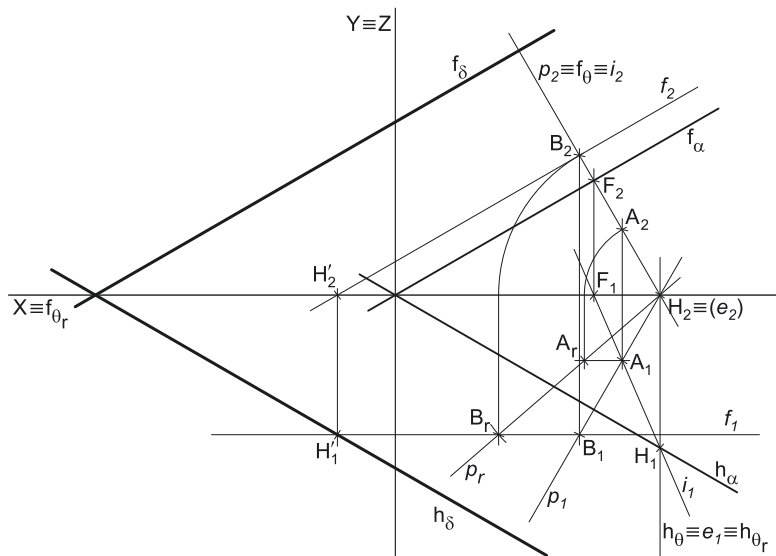
A situação proposta neste exercício consiste, na prática, numa variante das situações de distâncias entre dois planos paralelos – o plano  $\delta$  (o plano pretendido) é paralelo ao plano  $\alpha$  e tem de ser determinado em função da sua distância ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, a resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapla 1.** Conduziu-se uma reta **p**, qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta **p** é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\alpha$ . A reta **p** verifica o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de qualquer do plano  $\alpha$  (os seus traços). Salienta-se que a reta **p**, sendo ortogonal ao plano  $\alpha$ , e necessariamente ortogonal ao plano  $\delta$ , pois os dois planos são paralelos.

Por uma questão de economia de traçados, optou-se por fazer com que a reta **p** seja uma reta passante, mas essa situação não é vinculativa – a reta **p** pode ser outra reta qualquer, desde que seja ortogonal a plano  $\alpha$ .

**Etapla 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta **p** com os dois planos. Nem a reta **p** nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber:

- conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha;
- determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado;
- o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\theta$ , que é o plano projetante frontal da reta  $p$ .

**B.** Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano  $\theta$  com os dois planos dados. A reta  $i$  é a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano dado) e está definida por dois pontos – os pontos **F** e **H** (os seus traços nos planos de projeção). Não é possível, ainda, determinar a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano auxiliar) com o plano  $\delta$  (o plano pretendido), pois este ainda não foi determinado. Prossigamos com o **Método geral da interseção entre retas e planos**.

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  – o ponto **A**. Note que, não tendo sido ainda determinado o plano  $\delta$ , não é possível determinar o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$ . No entanto, esse ponto (o ponto **B**) será o ponto da reta  $p$  que se situa a 3 cm (a distância pretendida) do ponto **A**.

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  (o ponto **A**), está parcialmente concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. Assim, a partir das projeções do ponto **A**, há que determinar as projeções do ponto **B** – este, como acima se referiu, será o ponto da reta  $p$  que dista 3 cm do ponto **A**. Nesse sentido, o segmento **[AB]** será um segmento representativo da distância entre os dois planos.

A reta  $p$  (a reta suporte do segmento **[AB]**) é oblíqua aos dois planos de projeção, pelo que o segmento **[AB]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para medir a **verdadeira grandeza da distância dada** (que está deformada em ambos os planos de projeção) optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\theta$  (o plano projetante frontal do segmento **[AB]**) para o Plano Horizontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ). Os planos ortogonais à charneira são planos frontais (de frente) pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos mantêm os seus afastamentos, ao longo do rebatimento.

Para medir o comprimento do segmento de reta **[AB]** em verdadeira grandeza há que, em primeiro lugar, rebater a reta  $p$ . A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Começemos por rebater o ponto **A**. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $e_2$  (a projeção frontal da charneira) e com raio até  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), desenhou-se a projeção frontal do arco do rebatimento do ponto **A** e, atendendo a que o ponto **A** manteve o seu afastamento, determinou-se  $A_r$ . Já temos um ponto para definir a reta  $p_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $p$  é ma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto (que não se identificou), que é um ponto da charneira – é um ponto que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p_r$ . A reta  $p_r$  fica definida por dois pontos – o ponto  $A_r$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ .

Por fim, sobre a reta  $p_r$  e a partir de  $A_r$ , mediram-se os 3 cm (a distância entre os dois planos), o que nos permitiu determinar o ponto  $B_r$  (o outro extremo do segmento de reta **[AB]**, em rebatimento). O ponto  $B_r$  é, em rebatimento, o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$  e é o outro extremo do segmento de reta representativo da distância entre os dois planos. Note que o ponto  $B_r$  determinado nos garante que o plano  $\delta$  (o plano que contém o ponto) corta o eixo  $X$  num ponto com abcissa positiva, como o enunciado pede expressamente.

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\theta$  e determinaram-se as projeções do ponto **B**, sobre as projeções homónimas da reta  $p$ . O ponto **B**, definido pelas suas projeções e pertencente à reta  $p$ , é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$ . Há, agora, que determinar os traços do plano  $\delta$  – o plano  $\delta$  é o plano paralelo ao plano  $\alpha$  que contém o ponto **B**.

#### Determinação dos traços do plano $\delta$ :

O plano  $\delta$  é paralelo ao plano  $\alpha$ , pelo que tem de verificar o **CrITÉrio de paralelismo entre planos**, ou seja, o plano  $\delta$  tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Os traços de um plano oblíquo são duas retas concorrentes desse plano. Assim, para que o plano  $\delta$  seja paralelo ao plano  $\alpha$ , basta que os seus traços sejam paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$ .

Por outro lado, para que o plano  $\delta$  contenha o ponto **B**, o ponto **B** tem de pertencer ao plano  $\delta$ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\delta$ ). Assim, pelo ponto **B** conduziu-se uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$  – a reta  $f$ , paralela ao traço frontal do plano  $\alpha$  (que é a direção das retas frontais do plano  $\delta$ ). A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$ ).

Em seguida, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta  $f$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção de  $h_\delta$  já é conhecida – é paralelo a  $h_\alpha$ . Assim, pelo ponto **H** conduziu-se  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ), paralelo a  $h_\alpha$ . O traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ) está definido por um ponto (o ponto **H**) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ).

O plano  $\delta$  está definido por duas retas concorrentes – o seu traço horizontal ( $h_\delta$ ) e a reta  $f$ , que são concorrentes no ponto **H**. Já garantimos que o plano  $\delta$  é paralelo ao plano  $\alpha$ . Por fim, desenhou-se o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$  –  $f_\delta$  é paralelo à reta  $f$  e a  $f_\alpha$ ).

O plano  $\delta$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **B** e é paralelo ao plano  $\alpha$  – o plano  $\delta$  é, assim, o plano paralelo ao plano  $\alpha$  e que se situa a 3 cm deste, conforme era pedido.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano  $\delta$  (o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$ ,  $i$  e  $f$ , do plano  $\theta$ , da reta  $p_r$ , dos traçados necessários a rebatimento efetuado e, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 385.

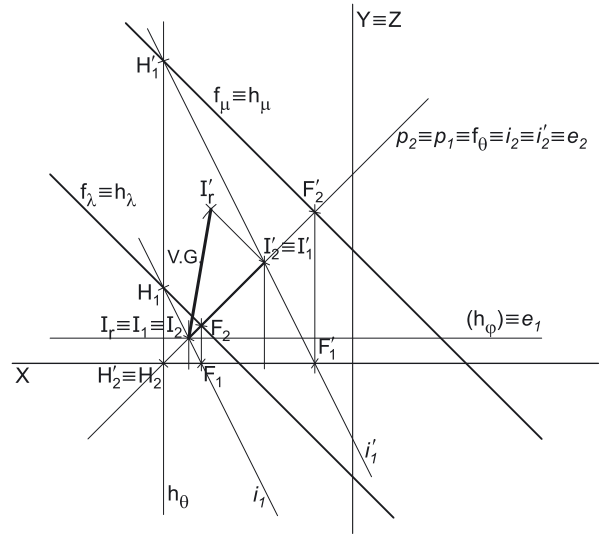
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\lambda$  e  $\mu$ , pelos seus traços, em função dos dados. Os dois planos são paralelos, pelo que têm os seus traços homónimos paralelos entre si, para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**. Este raciocínio permitiu-nos desenhar  $f_\mu$ , (o traço frontal do plano  $\mu$ ), paralelo a  $f_\lambda$  (o traço frontal do plano  $\lambda$ ). Por outro lado, o plano  $\mu$  tem os seus traços coincidentes (é dado no enunciado), o que nos permitiu determinar  $h_\mu$  (o traço horizontal do plano  $\mu$ ). Por fim, uma vez que os dois planos são paralelos,  $h_\lambda$  (o traço horizontal do plano  $\lambda$ ) é necessariamente paralelo a  $h_\mu$  (o traço horizontal do plano  $\mu$ ), pelo que o plano  $\lambda$  também tem os seus traços coincidentes.

Os dois planos são necessariamente dois planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$ , pois têm os seus traços coincidentes.

### Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.



**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta  $p$ , qualquer, ortogonal aos dois planos. Optou-se, apenas por uma questão de economia de traçados, por fazer com que a reta  $p$  fosse uma reta do  $\beta_{2/4}$  – isso permitiu-nos economizar uma reta, uma vez que a reta  $p$  fica com as suas projeções coincidentes. No entanto, caso se tivesse optado por outra situação (à semelhança, por exemplo, do que se efetuou no exercício **382.**), a reta  $p$  seria, nesse caso, uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$ .

Assim, a reta  $p$  é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos dos dois planos. A reta  $p$  verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos (os seus traços).

**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Nem a reta  $p$  nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber:

- conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha;
- determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado;
- o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

- Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\theta$ , que é o plano projetante frontal da reta  $p$ .
- Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano  $\theta$  com os dois planos dados. A reta  $i$  é a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano auxiliar) com o plano  $\lambda$  e está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projeção). A reta  $i'$  é a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano auxiliar) com o plano  $\mu$  e está igualmente definida por dois pontos – o ponto  $F'$  e  $H'$  (os seus traços nos planos de projeção).
- O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\lambda$  – o ponto  $I$ . O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i'$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\mu$  – o ponto  $I'$ .

Neste momento, com a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  desenharam-se as projeções do segmento  $[II']$ . O segmento  $[II']$  é um segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento  $[II']$  é oblíquo aos dois planos de projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção) optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\theta$  (o plano projetante frontal do segmento  $[II']$ ) para o plano frontal (de frente) que passa pelo ponto  $I$  (cujo traço horizontal se desenhou imediatamente, passando por  $I_1$ ). Salienta-se que, nesta situação, o plano frontal (de frente)  $\phi$  tem afastamento negativo, pois o ponto  $I$  tem afastamento negativo.

Em seguida, determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção horizontal ( $e_1$ ) está coincidente com o traço horizontal do plano  $\phi$  ( $h_\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. A projeção frontal da charneira ( $e_2$ ) está coincidente com o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal.

O ponto  $I$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $I_r \equiv I_2$ . Falta-nos rebater o ponto  $I'$ . O arco do rebatimento do ponto  $I'$  está contido num plano de topo ortogonal à reta  $e$  (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto  $I'$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim conduziu-se, por  $I_2$ , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $I'$ . Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto  $I'$  ao plano  $\phi$  (o afastamento do ponto  $I'$  em relação ao plano  $\phi$ ), determinando-se  $I'_r$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $I_r$  e  $I'_r$  – o segmento de reta  $[I_r I'_r]$  é o segmento de reta  $[II']$  rebatido e situa-se no plano  $\varphi$  (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $\overline{I_r I'_r}$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$ ,  $i$  e  $i'$ , do plano  $\theta$ , do plano  $\varphi$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 386.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $a$  e  $r$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dois planos são paralelos, pelo que têm de verificar o **Critério de paralelismo entre planos**. Nesse sentido, e exatamente porque os dois planos são paralelos, os dois planos têm necessariamente duas «famílias» de retas em comum. Sendo conhecida uma «família» de retas do plano  $\alpha$  (a «família» de retas  $a$  que a reta  $a$  pertence) e uma «família» de retas do plano  $\delta$  (a «família» de retas  $r$  que a reta  $r$  pertence), sabe-se imediatamente que qualquer dos dois planos contém essas duas «famílias» de retas.

#### Resolução:

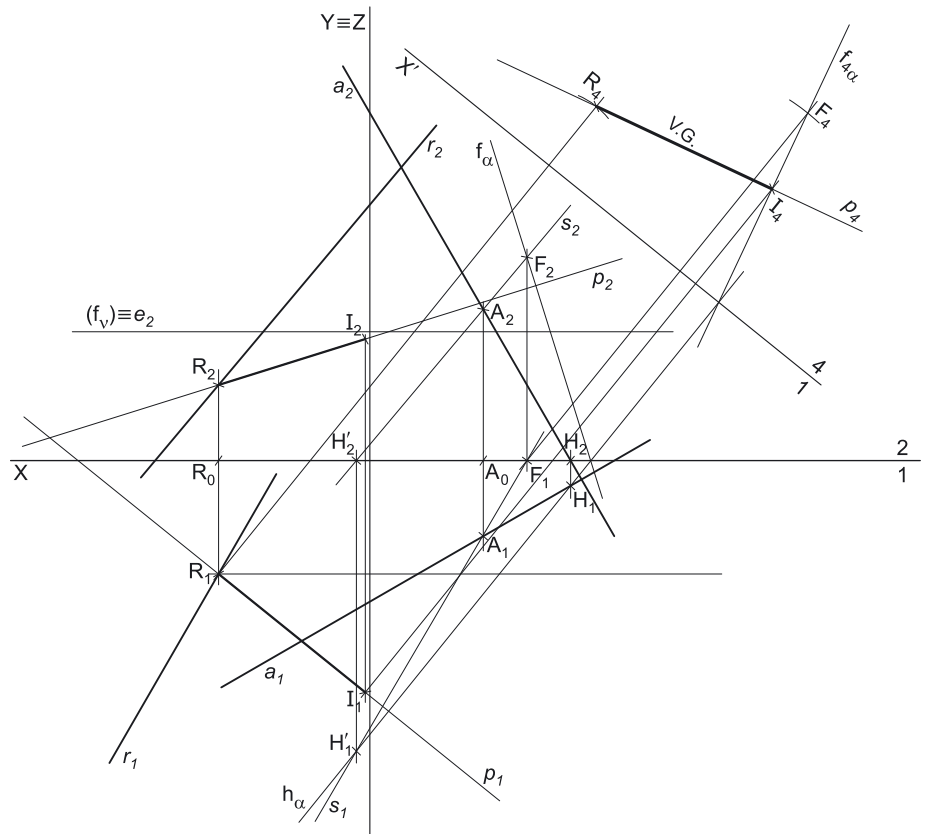
Este exercício é, na prática, uma variante das situações de **distância de um ponto a um plano oblíquo**. De facto, tendo em conta que os dois planos são paralelos, então todos os pontos do plano  $\delta$  (por exemplo) estão à mesma distância do plano  $\alpha$ . Nesse sentido, e porque é dado um ponto do plano  $\delta$  (o ponto  $R$ , que é o ponto pelo qual passa a reta  $r$ ), o exercício pode resumir-se à determinação da distância de um ponto (o ponto  $R$ ) a um plano oblíquo (o plano  $\alpha$ ) – a distância do ponto  $R$  ao plano  $\alpha$  é igual à distância entre os dois planos.

Nesse sentido, a resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $R$  conduz-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . Para a reta  $p$  ser ortogonal ao plano  $\alpha$ , a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$  (tem de ser ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ).

Acontece que, neste momento, só temos uma reta do plano  $\alpha$  – a reta  $a$ . A reta  $a$ , por outro lado, é uma reta oblíqua, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $a$  não é direta em nenhuma das suas projeções. Assim, para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  ao plano  $\alpha$ , necessitamos de duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  e, preferencialmente, uma reta horizontal (de nível) e uma reta frontal (de frente), para que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\alpha$  se processe de forma direta. Essas duas retas podem ser, por exemplo, os traços do plano  $\alpha$ . Assim, começou-se por determinar os traços do plano  $\alpha$ .

Como atrás se referiu, o plano  $\alpha$ , porque é paralelo ao plano  $\delta$ , contém, necessariamente, a «família» de retas a que a reta  $r$  (que é uma reta do plano  $\delta$ ) pertence. Assim, pelo ponto  $A$  conduziu-se uma reta  $s$ , paralela à reta  $r$  – a reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (a direção da reta  $r$ ). A reta  $s$  garante-nos, assim, que o plano  $\alpha$  é paralelo ao plano  $\delta$ . O plano  $\alpha$  está, agora, definido por duas retas concorrentes – a reta  $a$  e a reta  $s$  (concorrentes no ponto  $A$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Começamos por determinar o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da reta  $a$ , o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Em seguida, determinou-se o ponto  $H'$ , o traço horizontal da reta  $s$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\alpha$  –  $h_\alpha$  está definido por dois pontos (os pontos  $H$  e  $H'$ ).

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $s$ , o ponto  $F$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços do plano são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\alpha$  –  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos (o ponto  $F$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano)

Por fim, desenharam-se as projeções da reta  $p$ , a reta que passa pelo ponto  $R$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\alpha$ , o que nos garante a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ . Está, assim, concluída a **Etapa 1 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. No entanto, optou-se por resolver esta situação de uma forma diferente – transformando o plano  $\alpha$  num plano projetante, com o recurso a uma **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por transformar o plano  $\alpha$  num plano de topo (um plano projetante frontal), que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção. Para tal, há que substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\alpha$ , o que nos permite transformar o plano (oblíquo) num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, foi necessário determinar o novo traço frontal do plano  $\alpha$ . O novo traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{4\alpha}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\alpha$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $a$ ), que é um ponto do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ). Assim, determinou-se  $F_4$  (a projeção do ponto  $F$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$  (a cota de  $F$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\alpha$  –  $f_{4\alpha}$  passa por  $F_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\alpha}$  está definido por dois pontos – o ponto  $F_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).

Por fim, há que determinar as projeções da reta  $p$ , no novo diedro de projeção. A reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\alpha$ , pelo que já temos a sua direção. No entanto, falta-nos um ponto para definir a reta. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto  $R$ , que é um ponto da reta  $p$ . Em seguida, determinou-se  $R_4$  (a projeção do ponto  $R$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $R_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $R_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $R$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$  –  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) está definida por um ponto (o ponto  $R_4$ ) e por uma direção (é perpendicular a  $f_{4\alpha}$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\alpha$  é um plano de topo (projetante frontal), pelo que a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  se processa de forma direta, a partir da sua projeção frontal (a sua projeção no **plano 4**).

Assim, o ponto  $I$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  –  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\alpha}$  (o novo traço frontal do plano  $\alpha$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) diretamente, pois situa-se sobre  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), na linha de chamada de  $I_1$ .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $R$  ao plano  $\alpha$ . A partir das projeções dos pontos  $R$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[RI]$ . O segmento  $[RI]$  é o segmento representativo da distância do ponto  $R$  ao plano  $\alpha$ , pelo que é um segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento  $[RI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento  $[RI]$  está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano –  $R_4I_4$  é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $a$  e  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $s$ , dos traços do plano  $\alpha$ , da reta  $p$ , de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).





(continuação da página anterior)

Optou-se por transformar o plano  $\gamma$  num plano de topo (um plano projetante frontal), que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção. Para tal, há que substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\gamma$ , o que nos permite transformar o plano (obliquo) num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\gamma$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano ( $h_\gamma$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, foi necessário determinar o novo traço frontal do plano  $\gamma$ . O novo traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_{4\gamma}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\gamma$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto **F** (o traço frontal da reta **n**), que é um ponto do traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ). Assim, determinou-se **F<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **F** no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de **F<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **F<sub>2</sub>** ao eixo **X** (a cota de **F**). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\gamma$  – **f<sub>4\gamma</sub>**, passa por **F<sub>4</sub>**, pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\gamma$  é um plano projetante frontal. Assim, **f<sub>4\gamma</sub>** está definido por dois pontos – o ponto **F<sub>4</sub>** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X'**).

Por fim, há que determinar as projeções da reta **p**, no novo diedro de projeção. A reta **p** é ortogonal ao plano  $\gamma$ , pelo que já temos a sua direção. No entanto, falta-nos um ponto para definir a reta. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto **M**, que é um ponto da reta **p**. Em seguida, determinou-se **M<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **M** no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de **M<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **M<sub>2</sub>** ao eixo **X** (a cota de **M**). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **p** – **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**) está definida por um ponto (o ponto **M<sub>4</sub>**) e por uma direção (é perpendicular a **f<sub>4\gamma</sub>**).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\gamma$  é um plano de topo (projetante frontal), pelo que a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\gamma$  se processa de forma direta, a partir da sua projeção frontal (a sua projeção no **plano 4**).

Assim, o ponto **I** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\gamma$  – **I<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **I** no **plano 4**) é o ponto de concorrência de **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**) com **f<sub>4\gamma</sub>** (o novo traço frontal do plano  $\gamma$ ). Em seguida, determinou-se **I<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **I**), de forma direta, sobre **p<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **p**). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar **I<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **I**) diretamente, pois situa-se sobre **p<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **p**), na linha de chamada de **I<sub>1</sub>**.

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\gamma$  (o ponto **I**), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **M** ao plano  $\gamma$ . A partir das projeções dos pontos **M** e **I** desenharam-se as projeções do segmento [**MI**]. O segmento [**MI**] é o segmento representativo da distância do ponto **M** ao plano  $\gamma$ , pelo que é um segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento [**MI**] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento [**MI**] está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano – **M<sub>4</sub>I<sub>4</sub>** é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas **m** e **a**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **n**, dos traços do plano  $\gamma$ , da reta **p**, de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada e do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

## 388.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, e o plano  $\sigma$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. Os dois planos são paralelos, pelo que o plano  $\sigma$  está definido por uma reta (o seu traço frontal) e a sua orientação (é paralelo ao plano  $\rho$ ).

**Resolução:**

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapla 1.** Conduziu-se uma reta  $p$ , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenham imediatamente. Note que as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas dos planos – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapla 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Nem a reta  $p$  nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\pi$ , que é o plano projetante da reta  $p$  – o plano  $\pi$  é um plano de perfil.

**B.** Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano  $\pi$  com os dois planos dados. A reta  $i$  é a reta de interseção do plano  $\pi$  (o plano auxiliar) com o plano  $\rho$  e está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos Planos de Projeção). A reta  $i'$  é a reta de interseção do plano  $\pi$  (o plano auxiliar) com o plano  $\sigma$  e está definida por um ponto (o  $F'$ , o seu traço frontal) e uma direção (é paralela à reta  $i$ ). Salienta-se que as retas  $i$  e  $i'$  são também retas de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, tal como referido para a reta  $p$ .

**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  – o ponto  $I$ . O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i'$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\sigma$  – o ponto  $I'$ . Não é possível determinar diretamente qualquer dos pontos  $I$  e  $I'$ , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo **rebatimento do plano de perfil** (o plano  $\pi$ ), conforme o enunciado pede expressamente. Nesse sentido rebateu-se o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (a reta  $e$ , que é o traço frontal do plano  $\pi$ ).

O ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $i$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_r \equiv F_2$ . Em seguida, rebateu-se o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $i$ ), determinando-se  $H_r$ . A reta  $i_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $F_r$  e  $H_r$ . O ponto  $F'$  (o traço frontal da reta  $i'$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F'_r \equiv F'_2$ . A reta  $i'_r$  está definida por um ponto (o ponto  $F'_r$ ) e uma direção (é paralela à reta  $i_r$ ).

Em seguida, desenhou-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), perpendicular às retas  $i_r$  e  $i'_r$ , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os planos  $\rho$  e  $\sigma$  – a reta  $p_r$  é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas dos dois planos (a «família» das retas de perfil dos dois planos). A reta  $p_r$  já verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos de rampa.

Por fim, em rebatimento, determinaram-se os pontos  $I$  (o ponto de concorrência entre as retas  $p_r$  e  $i_r$ ) e  $I'$  (o ponto de concorrência entre as retas  $p_r$  e  $i'_r$ ) –  $I$  e  $I'_r$ , respetivamente. O ponto  $I$  é o ponto de concorrência da reta  $p$  com a reta  $i$  e é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . O ponto  $I'$  é o ponto de concorrência da reta  $p$  com a reta  $i'$  e é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\sigma$ .

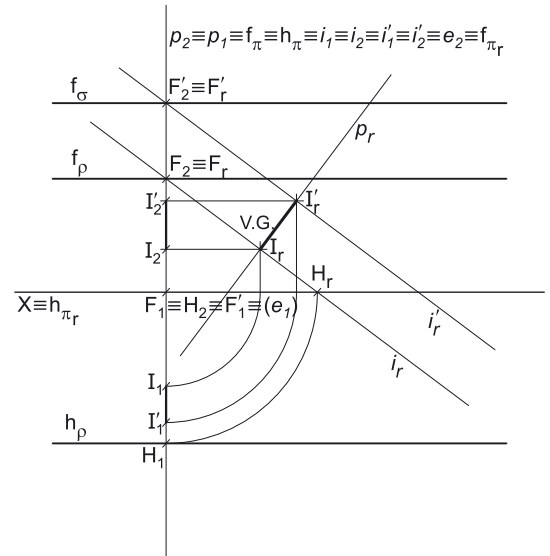
Neste momento, com a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), foi concluída a **Etapla 2 do método geral da distância entre dois planos paralelos**.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  desenharam-se as projeções do segmento  $[II']$ . O segmento  $[II']$  é um segmento representativo da distância entre os dois planos e é um segmento de reta de perfil.

O segmento  $[II']$  é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano  $\pi$ ), observa-se que o segmento  $[II']$  está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância entre os planos  $\rho$  e  $\sigma$  está no segmento  $[I_r I'_r]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

**Traçado:**

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$ ,  $i$  e  $i'$ , do plano  $\pi$ , das retas  $p_r$ ,  $i_r$  e  $i'_r$ , bem como de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ )



## 389.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, e o plano  $\sigma$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. Os dois planos são paralelos, pelo que o plano  $\sigma$  está definido por uma reta (o seu traço frontal) e a sua orientação (é paralelo ao plano  $\rho$ ).

### Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapla 1.** Conduziu-se uma reta  $p$ , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenharam imediatamente. Note que as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas dos planos – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapla 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Nem a reta  $p$  nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de dois pontos da reta  $p$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas de ambos os planos;
3. por fim, a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os dois traços de um plano de rampa pertencem à mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem qualquer dos dois planos de rampa são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** (como o enunciado pede expressamente) permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção teremos os dois planos de rampa definidos por dois traços (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual os planos de rampa sejam planos projetantes. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

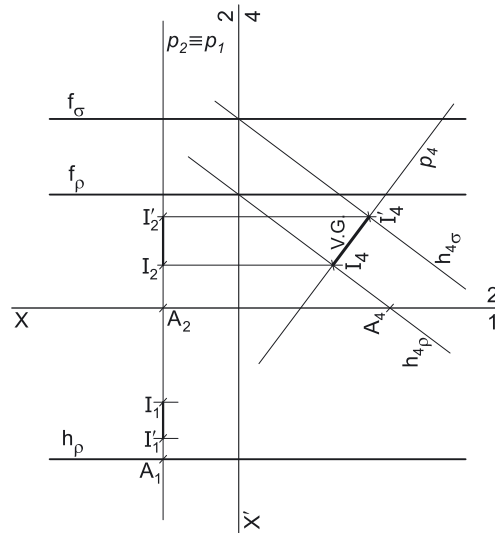
Optou-se por substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**), ortogonal aos dois planos, o que nos permite transformar os planos de rampa em planos verticais (projetantes horizontais). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal aos planos de rampa, o eixo  $X'$  é perpendicular aos traços frontais dos dois planos. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, os dois planos serão planos projetantes horizontais (planos ortogonais ao novo Plano Horizontal de Projeção).

Em seguida, é necessário determinar os novos traços horizontais dos dois planos. O novo traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano  $\rho$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço horizontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se um ponto  $A$ , qualquer, do traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto  $A$  no plano de perfil que contém a reta  $p$ .

Em seguida, determinou-se  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**), em função do seu afastamento, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_1$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – o afastamento de  $A$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço horizontal do plano  $\rho$  –  $h_{4\rho}$ , passa por  $A_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal. Assim,  $h_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto  $A_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O novo traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_{4\sigma}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano  $\sigma$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço horizontal do plano  $\sigma$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os planos  $\rho$  e  $\sigma$  são dois planos paralelos, pelo que os seus novos traços horizontais são necessariamente paralelos, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_{4\sigma}$  –  $h_{4\sigma}$  (o novo traço horizontal do plano  $\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X'$ ) e por uma direção (é paralelo a  $h_{4\rho}$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta horizontal (de nível) e os planos  $\rho$  e  $\sigma$  são dois planos verticais, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os dois planos já é direta (os traços dos dois planos, no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $h_{4\rho}$  e  $h_{4\sigma}$  são duas retas horizontais (de nível) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta horizontal (de nível), a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os novos traços horizontais dos dois planos é direta em projeção horizontal (no **plano 4**). Nesse sentido, conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), qualquer, perpendicular a  $h_{4\rho}$  (o novo traço horizontal do plano  $\rho$ ) e a  $h_{4\sigma}$  (o novo traço horizontal do plano  $\sigma$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas de ambos os planos, pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos. Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, os dois planos são planos projetantes horizontais, é possível, de forma imediata, determinar os pontos de interseção da reta  $p$  com ambos os planos, a partir das respetivas projeções no **plano 4**.

Assim,  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $h_{4\rho}$  (o novo traço horizontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), de forma direta, sobre  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $I_1$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$ .

De forma semelhante,  $I'_4$  (a projeção do ponto  $I'$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $h_{4\sigma}$  (o novo traço horizontal do plano  $\sigma$ ). Em seguida, determinou-se  $I'_2$  (a projeção frontal do ponto  $I'$ ), de forma direta, sobre  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I'$ ), em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $I'_1$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I'_4$  ao eixo  $X'$ .

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa e já se determinaram os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ).

Neste momento, com a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  desenharam-se as projeções do segmento  $[II']$ . O segmento  $[II']$  é um segmento representativo da distância entre os dois planos e é um segmento de reta de perfil.

O segmento  $[II']$  é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que o segmento  $[II']$  se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4** – no diedro de projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**, o segmento de reta  $[II']$  é um segmento de reta horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4**. A verdadeira grandeza da distância entre os planos  $\rho$  e  $\sigma$  está no segmento  $[I_4I'_4]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

#### Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das projeções da reta  $p$ , do eixo  $X'$ , da reta  $p_4$  e, ainda, de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, nomeadamente os novos traços horizontais dos dois planos).

## 390.

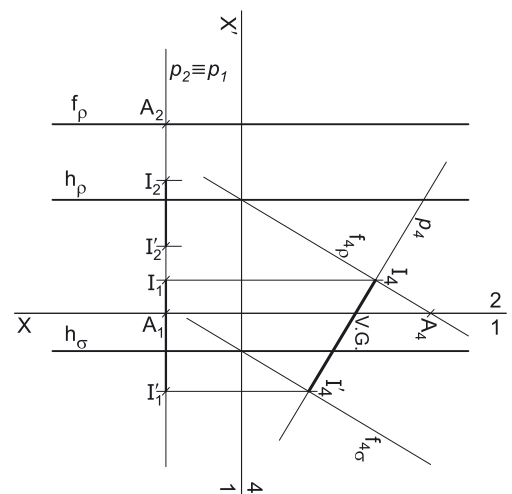
#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, e o plano  $\sigma$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. Os dois planos são paralelos, pelo que o plano  $\sigma$  está definido por uma reta (o seu traço horizontal) e a sua orientação (é paralelo ao plano  $\rho$ ).

#### Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta  $p$ , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenharam imediatamente. Note que as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas dos planos – a «família» das retas fronto-horizontais.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Nem a reta  $p$  nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de dois pontos da reta  $p$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas de ambos os planos;
3. por fim, a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os dois traços de um plano de rampa pertencem à mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem qualquer dos dois planos de rampa são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção teremos os dois planos de rampa definidos por dois traços (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual os planos de rampa sejam planos projetantes. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**), ortogonal aos dois planos, o que nos permite transformar os planos de rampa em planos de topo (projetantes frontais). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal aos planos de rampa, o eixo  $X'$  é perpendicular aos traços horizontais dos dois planos. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, os dois planos serão planos projetantes frontais (planos ortogonais ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, é necessário determinar os novos traços frontais dos dois planos. O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano  $\rho$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se um ponto  $A$ , qualquer, do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto  $A$  no plano de perfil que contém a reta  $p$ . Note, no entanto, que o ponto  $A$  **não pertence** à reta  $p$ .

Em seguida, determinou-se  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 5 cm – a cota de  $A$ , que é a cota de  $f_\rho$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $A_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto  $A_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).

O novo traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_{4\sigma}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano  $\sigma$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço horizontal do plano  $\sigma$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os planos  $\rho$  e  $\sigma$  são dois planos paralelos, pelo que os seus novos traços frontais são necessariamente paralelos, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{4\sigma}$  –  $f_{4\sigma}$  (o novo traço frontal do plano  $\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X'$ ) e por uma direção (é paralelo a  $f_{4\rho}$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e os planos  $\rho$  e  $\sigma$  são dois planos de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os dois planos já é direta em projeções (os traços dos dois planos, no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\sigma}$  são duas retas frontais (de frente) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os novos traços frontais dos dois planos é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), qualquer, perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ) e a  $f_{4\sigma}$  (o novo traço frontal do plano  $\sigma$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas de ambos os planos, pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos. Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, os dois planos são planos projetantes frontais, é possível, de forma imediata, determinar os pontos de interseção da reta  $p$  com ambos os planos, a partir das respetivas projeções no **plano 4**.

Assim,  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuado, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

De forma semelhante,  $I'_4$  (a projeção do ponto  $I'$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\sigma}$  (o novo traço frontal do plano  $\sigma$ ). Em seguida, determinou-se  $I'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I'$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I'_2$  (a projeção frontal do ponto  $I'$ ), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I'_4$  ao eixo  $X$ .

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa e já se determinaram os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ).

Assim, com a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  desenharam-se as projeções do segmento  $[II']$ . O segmento  $[II']$  é um segmento representativo da distância entre os dois planos e é um segmento de reta de perfil.

O segmento  $[II']$  é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que o segmento  $[II']$  se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4** – no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta  $[II']$  é um segmento de reta frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4**. A verdadeira grandeza da distância entre os planos  $p$  e  $\sigma$  está no segmento  $[I_4I'_4]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

#### Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das projeções da reta  $p$ , do eixo  $X'$ , da reta  $p_4$  e, ainda, de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, nomeadamente os novos traços frontais dos dois planos).

## 391.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $p$ , pelos seus traços, e o plano  $\sigma$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. Os dois planos são paralelos, pelo que o plano  $\sigma$  está definido por uma reta (o seu traço horizontal) e a sua orientação (é paralelo ao plano  $p$ ).

#### Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta  $p$ , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenharam imediatamente. Note que as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas dos planos – a «família» das retas fronto-horizontais.

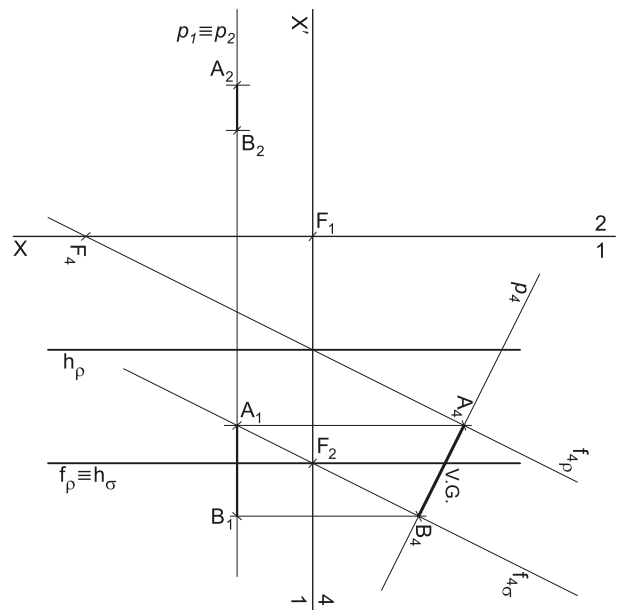
**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Nem a reta  $p$  nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de dois pontos da reta  $p$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas de ambos os planos;
3. por fim, a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os dois traços de um plano de rampa pertencem à mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir da ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem qualquer dos dois planos de rampa são projetantes.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção teremos os dois planos de rampa definidos por dois traços (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual os planos de rampa sejam planos projetantes. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**), ortogonal aos dois planos, o que nos permite transformar os planos de rampa em planos de topo (projetantes frontais). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal aos planos de rampa, o eixo  $X'$  é perpendicular aos traços horizontais dos dois planos. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, os dois planos serão planos projetantes frontais (planos ortogonais ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, é necessário determinar os novos traços frontais dos dois planos. O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano  $\rho$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se um ponto  $F$ , qualquer, do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{\rho}$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto  $F$  no plano de perfil que contém a reta  $p$ .

Em seguida, determinou-se  $F_4$  (a projeção do ponto  $F$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$  (a cota do ponto  $F$  é  $-6$ , que é um valor negativo). Note que, atendendo a que a cota do ponto  $F$  é negativa,  $F_4$  (a projeção do ponto  $F$  no **plano 4**) fica para baixo do eixo  $X'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $F_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto  $F_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).

O novo traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_{4\sigma}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano  $\sigma$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço horizontal do plano  $\sigma$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os planos  $\rho$  e  $\sigma$  são dois planos paralelos, pelo que os seus novos traços frontais são necessariamente paralelos, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{4\sigma}$  –  $f_{4\sigma}$  (o novo traço frontal do plano  $\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X'$ ) e por uma direção (é paralelo a  $f_{4\rho}$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e os planos  $\rho$  e  $\sigma$  são dois planos de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os dois planos já é direta em projeções (os traços dos dois planos, no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\sigma}$  são duas retas frontais (de frente) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os novos traços frontais dos dois planos é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), qualquer, perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ) e a  $f_{4\sigma}$  (o novo traço frontal do plano  $\sigma$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas de ambos os planos, pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos. Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, os dois planos são planos projetantes frontais, é possível, de forma imediata, determinar os pontos de interseção da reta  $p$  com ambos os planos, a partir das respetivas projeções no **plano 4**.

Assim,  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$ .

De forma semelhante,  $I'_4$  (a projeção do ponto  $I'$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\sigma}$  (o novo traço frontal do plano  $\sigma$ ). Em seguida, determinou-se  $I'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I'$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I'_2$  (a projeção frontal do ponto  $I'$ ), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I'_4$  ao eixo  $X'$ .

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa e já se determinaram os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ).

Assim, com a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  desenharam-se as projeções do segmento  $[II']$ . O segmento  $[II']$  é um segmento representativo da distância entre os dois planos e é um segmento de reta de perfil.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O segmento  $[\Pi']$  é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que o segmento  $[\Pi']$  se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4** – no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta  $[\Pi']$  é um segmento de reta frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4**. A verdadeira grandeza da distância entre os planos  $\rho$  e  $\sigma$  está no segmento  $[I_4I'_4]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

### Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das projeções da reta  $p$ , do eixo  $X'$ , da reta  $p_4$  e, ainda, de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, nomeadamente os novos traços frontais dos dois planos).

## 392.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $\alpha$  e os pontos  $A$  e  $B$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto  $B$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

O plano  $\alpha$  está definido por uma reta (a reta  $\alpha$ ) e por um ponto exterior à reta (o ponto  $A$ ). Uma vez que a reta  $\alpha$  é uma reta fronto-horizontal, o plano  $\alpha$  é necessariamente um plano de rampa. Os dois planos são paralelos, pelo que o plano  $\theta$  está definido por um ponto (o ponto  $B$ ) e a sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ). Nesse sentido, o plano  $\theta$  é, também, um plano de rampa.

### Resolução:

Este exercício é, na prática, uma variante das situações de **distância de um ponto a um plano de rampa**. De facto, tendo em conta que o plano  $\theta$  é paralelo ao plano  $\alpha$ , então todos os pontos do plano  $\theta$  estão à mesma distância do plano  $\alpha$ . Nesse sentido, e porque é dado um ponto do plano  $\theta$  (o ponto  $B$ ), o exercício resume-se à determinação da distância de um ponto (o ponto  $B$ ) a um plano de rampa (o plano  $\alpha$ ) – a distância do ponto  $B$  ao plano  $\alpha$  é igual à distância entre os dois planos.

A resolução do exercício passa, assim, pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $B$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . O plano  $\alpha$  é um plano de rampa, pelo que a reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

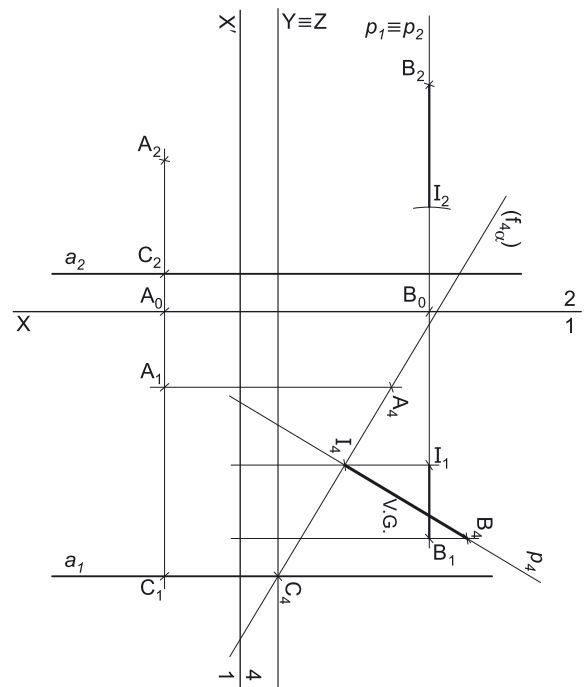
**Etapa 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $B$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\alpha$ ;
3. por fim, a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\alpha$  (que não se determinaram) pertencem a uma única «família» de retas, o que não nos permite garantir da ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permite-nos resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção os dois traços do plano  $\alpha$  serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o plano  $\alpha$  seja um plano projetante. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\alpha$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo  $X'$  é perpendicular à reta  $a$  (que é uma reta fronto-horizontal do plano  $\alpha$ ), pelo que o eixo  $X'$  é perpendicular a  $a_1$  (a projeção horizontal da reta  $a$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto **B** no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4**.  $B_4$  é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  (que é 6 cm – a cota de **B**).

O traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** ( $f_{4\alpha}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se  $A_4$  (a projeção do ponto **A** no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de **A**). Já temos um ponto para definirmos o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se um ponto **C**, qualquer, pertencente à reta  $a$ . Por uma questão de economia de traçados, optou-se por localizar o ponto **C** no plano de perfil que contém o ponto **A**. Em seguida, determinou-se  $C_4$  (a projeção do ponto **C** no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $C_2$  ao eixo  $X$  (que é 1 cm – a cota de **C** e da reta  $a$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** –  $f_{4\alpha}$  passa por  $A_4$  e por  $C_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\alpha}$  está definido por dois pontos – o ponto  $A_4$  e o ponto  $C_4$ . Tendo em conta que o plano  $\alpha$ , no novo diedro de projeção, foi representado, apenas, pelo seu traço frontal, este identificou-se entre parêntesis.

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\alpha$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\alpha$  já é direta. Assim, uma vez que  $f_{4\alpha}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $B_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4\alpha}$  (o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4**). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\alpha$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, é possível, de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ , a partir da sua projeção no **plano 4** –  $I_4$  (a projeção do ponto **I** no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\alpha}$  (o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4**). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto **I**), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto **I**), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$ .

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos **B** e **I**), já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$  e já se determinou o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  (o ponto **I**).

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  (o ponto **I**), foi concluída a **Etapla 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **B** ao plano  $\alpha$  (que é, afinal, a **distância entre os dois planos**). A partir das projeções dos dois pontos, desenharam-se as projeções do segmento **[BI]**, que é o segmento representativo da distância do ponto **B** ao plano  $\alpha$ .

O segmento **[BI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento **[BI]** está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano – a verdadeira grandeza da distância do ponto **B** ao plano  $\alpha$  está no segmento **[B<sub>4</sub>I<sub>4</sub>]**, e foi devidamente assinalada no desenho.

Assim,  $\overline{B_4I_4}$  é a verdadeira grandeza da distância entre os planos  $\alpha$  e  $\theta$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $a$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e ainda, de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, nomeadamente o novo traço frontal do plano  $\alpha$  –  $f_{4\alpha}$ ).

## 393.

**Dados:**

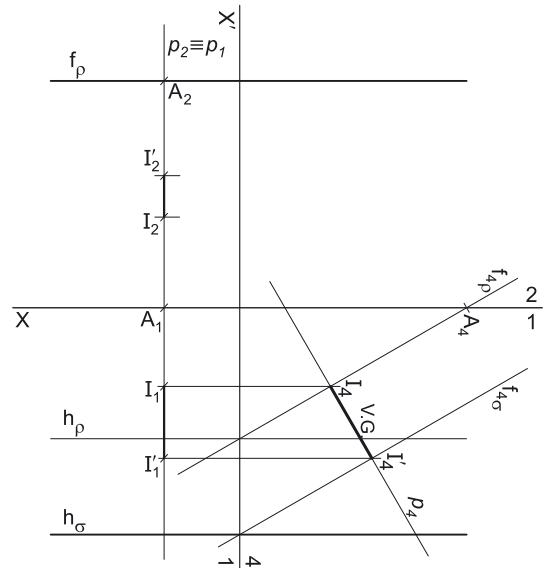
Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelo seu traço frontal, bem como o plano  $\sigma$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. Os dois planos são paralelos e é dada a orientação do plano  $\rho$  (o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção), pelo que ambos os planos estão definidos por uma reta (um dos seus traços) e pela sua orientação.

**Resolução:**

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta  $p$ , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenham imediatamente. Note que as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas dos planos – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Nem a reta  $p$  nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.



Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de dois pontos da reta  $p$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas de ambos os planos;
3. por fim, a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os dois traços de um plano de rampa pertencem à mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem qualquer dos dois planos de rampa são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção teremos os dois planos de rampa definidos por dois traços (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual os planos de rampa sejam planos projetantes. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**), ortogonal aos dois planos, o que nos permite transformar os planos de rampa em planos de topo (projetantes frontais). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal aos planos de rampa, o eixo  $X'$  é perpendicular aos traços horizontais dos dois planos. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, os dois planos serão planos projetantes frontais (planos ortogonais ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, é necessário determinar os novos traços frontais dos dois planos. O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. É dado o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção (um ângulo de  $60^\circ$ ) que foi o plano que se manteve. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\rho$  é um plano de topo, o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção projeta-se em verdadeira grandeza no ângulo que o seu traço frontal ( $f_{4\rho}$ ) faz com o eixo  $X'$ . Nesse sentido, já temos uma direção para definir  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos um ponto para definir  $f_{4\rho}$ . Para tal, recorreu-se a um ponto  $A$ , qualquer, de  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto  $A$  no plano de perfil que contém a reta  $p$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no plano 4), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 6 cm – a cota de  $A$ , que é a cota de  $f_p$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $A_4$  (no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal) e faz, com o eixo  $X'$ , um ângulo de  $60^\circ$ . Assim,  $f_{4\rho}$  está definido por um ponto (o ponto  $A_4$ ) e por uma direção, o que nos permitiu desenhar  $f_{4\rho}$ .

Em seguida, apesar de não ser pedido, optou-se por se desenhar o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{4\rho}$ ), o que se processou de forma direta. Os dois traços do plano  $\rho$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definir  $h_p$ . Por outro lado,  $h_p$  é uma reta fronto-horizontal, pelo que também já temos a sua direção – nesse sentido, desenhou-se  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X'$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). Note que, tal como era pedido no enunciado,  $h_p$  tem afastamento positivo, pelo que se situa no **SPHA**.

Por outro lado, foi necessário, também, determinar o novo traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_{4\sigma}$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano  $\sigma$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\sigma$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os planos  $\rho$  e  $\sigma$  são dois planos paralelos, pelo que os seus novos traços frontais são necessariamente paralelos, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{4\sigma}$  –  $f_{4\sigma}$  (o novo traço frontal do plano  $\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X'$ ) e por uma direção (é paralelo a  $f_{4\rho}$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo plano 1 e pelo plano 4), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e os planos  $\rho$  e  $\sigma$  são dois planos de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os dois planos já é direta em projeções (os traços dos dois planos, no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\sigma}$  são duas retas frontais (de frente) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os novos traços frontais dos dois planos é direta em projeção frontal (no plano 4). Nesse sentido, conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no plano 4), qualquer, perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ) e a  $f_{4\sigma}$  (o novo traço frontal do plano  $\sigma$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas de ambos os planos, pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos. Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, os dois planos são planos projetantes frontais, é possível, de forma imediata, determinar os pontos de interseção da reta  $p$  com ambos os planos, a partir das respetivas projeções no plano 4.

Assim,  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no plano 4) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no plano 4) com  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$ .

De forma semelhante,  $I'_4$  (a projeção do ponto  $I'$  no plano 4) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no plano 4) com  $f_{4\sigma}$  (o novo traço frontal do plano  $\sigma$ ). Em seguida, determinou-se  $I'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I'$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I'_2$  (a projeção frontal do ponto  $I'$ ), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I'_4$  ao eixo  $X'$ .

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa e já se determinaram os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ).

Assim, com a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  desenharam-se as projeções do segmento  $[II']$ . O segmento  $[II']$  é um segmento representativo da distância entre os planos  $\rho$  e  $\sigma$  e é um segmento de reta de perfil.

O segmento  $[II']$  é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que o segmento  $[II']$  se projeta em verdadeira grandeza no plano 4 – no diedro de projeção formado pelo plano 1 e pelo plano 4, o segmento de reta  $[II']$  é um segmento de reta frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no plano 4. A verdadeira grandeza da distância entre os planos  $\rho$  e  $\sigma$  está no segmento  $[I_4I'_4]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

#### Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano  $\rho$  e o traço horizontal do plano  $\sigma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das projeções da reta  $p$ , do eixo  $X'$ , da reta  $p_4$ , de  $h_p$  e, ainda, de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, nomeadamente os novos traços frontais dos dois planos).

## 394.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seu traço horizontal, em função dos dados. À partida, não há necessidade de se representar o  $\beta_{1/3}$ , que é um plano passante cuja orientação é conhecida – o  $\beta_{1/3}$  faz diedros de  $45^\circ$  com os planos de projeção. Os dois planos são paralelos e é conhecida a orientação do  $\beta_{1/3}$ , pelo que ambos os planos estão definidos por uma reta e pela sua orientação. O  $\beta_{1/3}$  está definido pelo eixo  $X$  e pela sua orientação (como acima se referiu). O plano  $\rho$  está definido por uma reta (o seu traço horizontal) e pela sua orientação (é paralelo ao  $\beta_{1/3}$ ).

Sublinha-se que seria possível representar o plano  $\rho$  pelos seus traços, com um raciocínio muito simples – o plano  $\rho$ , sendo um plano de rampa paralelo ao  $\beta_{1/3}$ , é necessariamente ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (o  $\beta_{1/3}$  e o  $\beta_{2/4}$  são ortogonais entre si), pelo que o plano  $\rho$  tem necessariamente os seus traços coincidentes (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

**Resolução:**

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta  $p$ , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenham imediatamente. Note que as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas dos planos – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Nem a reta  $p$  nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de dois pontos da reta  $p$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa (o  $\beta_{1/3}$  é um plano de rampa passante) – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas de ambos os planos;
3. por fim, a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os dois traços de um plano de rampa pertencem à mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir da ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem qualquer dos dois planos de rampa são projetantes.

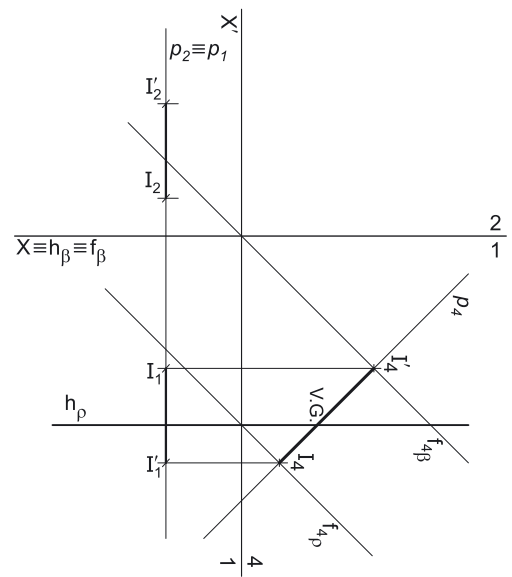
Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção teremos os dois planos de rampa definidos por dois traços (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual os planos de rampa sejam planos projetantes. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Para uma melhor compreensão da situação, optou-se por se representar os traços do  $\beta_{1/3}$  – assinalou-se devidamente  $X \equiv f_\beta \equiv h_\beta$  (considerando-se que o plano  $\beta$  é, precisamente, o  $\beta_{1/3}$ ).

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**), ortogonal aos dois planos, o que nos permite transformar os planos de rampa em planos de topo (projetantes frontais). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal aos planos de rampa, o eixo  $X'$  é perpendicular aos traços horizontais dos dois planos. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, os dois planos serão planos projetantes frontais (planos ortogonais ao novo Plano Frontal de Projeção).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, é necessário determinar os novos traços frontais dos dois planos. Nesse sentido, determinou-se o novo traço frontal do  $\beta_{1/3}$  ( $f_{4\beta}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do  $\beta_{1/3}$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do  $\beta_{1/3}$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, também já temos a direção, pois é conhecido o ângulo que o  $\beta_{1/3}$  faz com os dois planos de projeção. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o  $\beta_{1/3}$  é um plano de topo, o ângulo que o  $\beta_{1/3}$  faz com o Plano Horizontal de Projeção projeta-se em verdadeira grandeza no ângulo que o seu traço frontal ( $f_{4\beta}$ ) faz com o eixo  $X'$ . Assim, sabe-se imediatamente que  $f_{4\beta}$  (o novo traço frontal do  $\beta_{1/3}$ ) faz, com o eixo  $X'$ , um ângulo de  $45^\circ$ , o que nos permitiu desenhar  $f_{4\beta}$  (o novo traço frontal do  $\beta_{1/3}$ ) –  $f_{4\beta}$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X'$ ) e por uma direção (faz um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo  $X'$ ).

Em seguida, determinou-se o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano  $\rho$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. O plano  $\rho$  é paralelo ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que os seus novos traços frontais são necessariamente paralelos, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{4\rho}$  –  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X'$ ) e por uma direção (é paralelo a  $f_{4\beta}$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e os dois planos são dois planos de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os dois planos já é direta em projeções (os traços dos dois planos, no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\beta}$  são duas retas frontais (de frente) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os novos traços frontais dos dois planos é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), qualquer, perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ) e a  $f_{4\beta}$  (o novo traço frontal do  $\beta_{1/3}$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas de ambos os planos, pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos. Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, os dois planos são planos projetantes frontais, é possível, de forma imediata, determinar os pontos de interseção da reta  $p$  com ambos os planos, a partir das respetivas projeções no **plano 4**.

Assim,  $I_4$  (a projeção do ponto **I** no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto **I**), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto **I**), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$ .

De forma semelhante,  $I'_4$  (a projeção do ponto **I'** no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\beta}$  (o novo traço frontal do  $\beta_{1/3}$ ). Em seguida, determinou-se  $I'_1$  (a projeção horizontal do ponto **I'**), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I'_2$  (a projeção frontal do ponto **I'**), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I'_4$  ao eixo  $X'$ .

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos **I** e **I'**), já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa e já se determinaram os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos **I** e **I'**).

Assim, com a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos **I** e **I'**), foi concluída a **Etapa 2** do **método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos **I** e **I'** desenharam-se as projeções do segmento **[II']**. O segmento **[II']** é um segmento representativo da distância entre os dois planos e é um segmento de reta de perfil.

O segmento **[II']** é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que o segmento **[II']** se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4** – no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta **[II']** é um segmento de reta frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4**. A verdadeira grandeza da distância entre o plano  $\rho$  e o  $\beta_{1/3}$  está no segmento  $I_4I'_4$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

### Traçado:

Os dados (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das projeções da reta  $p$ , do eixo  $X'$ , da reta  $p_4$  e, ainda, de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, nomeadamente os novos traços frontais dos dois planos).

## 395.

**Dados:**

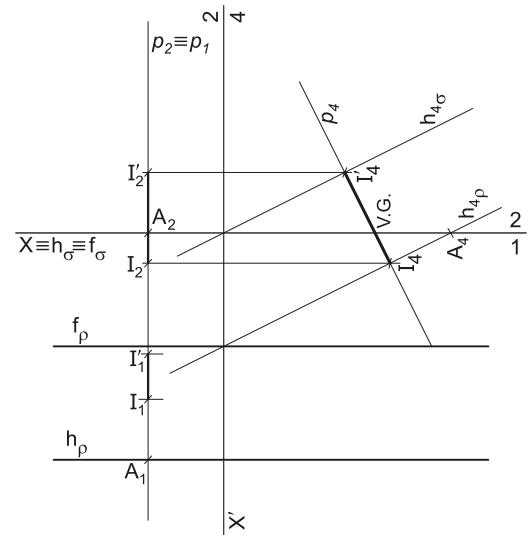
Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\rho$  e  $\sigma$ , pelos respetivos traços, em função dos dados. Os traços do plano  $\sigma$  (que é um plano passante) estão coincidentes no eixo  $X$ . Os dois planos são paralelos, pelo que o plano  $\sigma$  está definido por uma reta (o eixo  $X$ ) e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\rho$ ).

**Resolução:**

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapa 1.** Conduziu-se uma reta  $p$ , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenham imediatamente. Note que as projeções da reta  $p$  não verificam o **CrITÉrio de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas dos planos – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapa 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. Nem a reta  $p$  nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.



Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de dois pontos da reta  $p$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas de ambos os planos;
3. por fim, a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **CrITÉrio de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os dois traços de um plano de rampa pertencem à mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem qualquer dos dois planos de rampa são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **CrITÉrio de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção teremos os dois planos de rampa definidos por dois traços (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual os planos de rampa sejam planos projetantes. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**), ortogonal aos dois planos, o que nos permite transformar os planos de rampa em planos verticais (projetantes horizontais). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $4/2$ . Como o **plano 4** é ortogonal aos planos de rampa, o eixo  $X'$  é perpendicular aos traços frontais dos dois planos. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, os dois planos serão planos projetantes horizontais (planos ortogonais ao novo Plano Horizontal de Projeção).

Em seguida, é necessário determinar os novos traços horizontais dos dois planos. O novo traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano  $\rho$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{4\rho}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto  $A$ , qualquer, de  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto  $A$  no plano de perfil que contém a reta  $p$ .

Em seguida, determinou-se  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**), em função do seu afastamento, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_1$  ao eixo  $X$  (que é 6 cm – o afastamento de  $A$ , que é o afastamento de  $h_p$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço horizontal do plano  $\rho$  –  $h_{4\rho}$ , passa por  $A_4$  (no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal) e é concorrente com  $f_p$  no eixo  $X'$ . Assim,  $h_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto  $A_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, foi necessário, também, determinar o novo traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_{4\sigma}$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano  $\sigma$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço horizontal do plano  $\sigma$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os planos  $\rho$  e  $\sigma$  são dois planos paralelos, pelo que os seus novos traços horizontais são necessariamente paralelos, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_{4\sigma} - h_{4\rho}$  (o novo traço horizontal do plano  $\sigma$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X'$ ) e por uma direção (é paralelo a  $h_{4\rho}$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta horizontal (de nível) e os planos  $\rho$  e  $\sigma$  são dois planos verticais, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os dois planos já é direta em projeções (os traços dos dois planos, no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $h_{4\rho}$  e  $h_{4\sigma}$  são duas retas horizontais (de nível) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta horizontal (de nível), a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os novos traços horizontais dos dois planos é direta em projeção horizontal (no **plano 4**). Nesse sentido, conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), qualquer, perpendicular a  $h_{4\rho}$  (o novo traço horizontal do plano  $\rho$ ) e a  $h_{4\sigma}$  (o novo traço horizontal do plano  $\sigma$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas de ambos os planos, pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos. Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, os dois planos são planos projetantes horizontais, é possível, de forma imediata, determinar os pontos de interseção da reta  $p$  com ambos os planos, a partir das respetivas projeções no **plano 4**.

Assim,  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $h_{4\rho}$  (o novo traço horizontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), de forma direta, sobre  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $I_1$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$ .

De forma semelhante,  $I'_4$  (a projeção do ponto  $I'$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $h_{4\sigma}$  (o novo traço horizontal do plano  $\sigma$ ). Em seguida, determinou-se  $I'_2$  (a projeção frontal do ponto  $I'$ ), de forma direta, sobre  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I'$ ), em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $I'_1$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I'_4$  ao eixo  $X'$ .

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa e já se determinaram os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ).

Assim, com a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $I$  e  $I'$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  desenharam-se as projeções do segmento  $[II']$ . O segmento  $[II']$  é um segmento representativo da distância entre os planos  $\rho$  e  $\sigma$  e é um segmento de reta de perfil.

O segmento  $[II']$  é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que o segmento  $[II']$  se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4** – no diedro de projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**, o segmento de reta  $[II']$  é um segmento de reta horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4**. A verdadeira grandeza da distância entre os planos  $\rho$  e  $\sigma$  está no segmento  $[I_4I'_4]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das projeções da reta  $p$ , do eixo  $X'$ , da reta  $p_4$  e ainda, de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, nomeadamente os novos traços horizontais dos dois planos).

## 396.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços (que se situam no eixo  $X$ ), bem como o plano  $\sigma$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o ponto  $P$  pelas suas projeções. O plano  $\rho$  está definido por uma reta (o eixo  $X$ ) e um ponto exterior à reta (o ponto  $P$ ). Os dois planos são paralelos, pelo que o plano  $\sigma$  está definido por uma reta (o seu traço frontal) e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\rho$ ).

**Resolução:**

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapá 1.** Conduziu-se uma reta  $p$ , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenham imediatamente. Note que as projeções da reta  $p$  não verificam o **Crítérío de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Crítérío de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas dos planos – a «família» das retas fronto-horizontais.

Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se considerar que a reta  $p$  passa pelo ponto  $P$ .

**Etapá 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos. O ponto  $P$  é, imediatamente, o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\pi$  (note que se considerou que a reta  $p$  passa pelo ponto  $P$ ). No entanto, nem a reta  $p$  nem o plano  $\sigma$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de dois pontos da reta  $p$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas de ambos os planos;
3. por fim, a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\sigma$  não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Crítérío de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os dois traços de um plano de rampa pertencem à mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem o plano  $\sigma$  são projetantes.

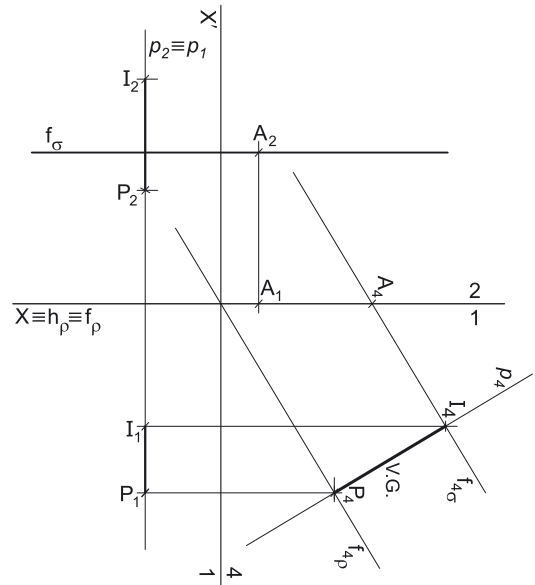
Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Crítérío de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção teremos os dois planos de rampa definidos por dois traços (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual os planos de rampa sejam planos projetantes. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**), ortogonal aos dois planos, o que nos permite transformar os planos de rampa em planos de topo (projetantes frontais). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal aos planos de rampa, o eixo  $X'$  é perpendicular aos traços horizontais dos dois planos. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, os dois planos serão planos projetantes frontais (planos ortogonais ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, é necessário determinar os novos traços frontais dos dois planos. O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano  $\rho$  são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $P$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $P_4$  (no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal) é concorrente com  $h_p$  no eixo  $X'$ . Assim,  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto  $P_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

**Etapla 1.** Pelo ponto **B** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\rho$ . A reta **p** é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta **p** ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapla 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$ . Nem a reta **p** nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **p** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **p**, para além do ponto **B**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  – a reta **p** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ ;
3. por fim, a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta **p** não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  pertencem a uma única «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta **p** nem o plano  $\rho$  são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta **p** verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção os dois traços do plano  $\rho$  serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o plano  $\rho$  seja um plano projetante. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  (ao eixo **X**, que é onde se situa  $h_p$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto **B** no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ . **B<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **B<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **B<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 1 cm – a cota de **B**).

O novo traço frontal do plano  $\rho$  (**f<sub>4p</sub>**) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, há que determinar a projeção no **plano 4** de um ponto do plano – o ponto **A**, por exemplo, que é o ponto que define o plano. Assim, determinou-se **A<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **A** no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de **A<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 5 cm – a cota de **A**). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  – **f<sub>4p</sub>**, passa por **A<sub>4</sub>**, pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim, **f<sub>4p</sub>** está definido por dois pontos – o ponto **A<sub>4</sub>** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X'**).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que **f<sub>4p</sub>** é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta **p** é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por **B<sub>4</sub>** conduziu-se **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a **f<sub>4p</sub>**, (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta **p** já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, é possível, de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$ , a partir da sua projeção no **plano 4** – **I<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **I** no **plano 4**) é o ponto de concorrência de **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**) com **f<sub>4p</sub>** (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se **I<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **I**), de forma direta, sobre **p<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **p**). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar **I<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **I**), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **I<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **I<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta **p** está definida por dois pontos (os pontos **B** e **I**), já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  e já se determinou o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  (o ponto **I**).

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  (o ponto **I**), foi concluída a **Etapla 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

**Etapas 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **B** ao plano  $\rho$  (que é a distância entre os dois planos). A partir das projeções dos dois pontos, desenharam-se as projeções do segmento **[BI]**, que é o segmento representativo da distância do ponto **B** ao plano  $\rho$  (a distância entre os planos  $\rho$  e  $\sigma$ ).

O segmento **[BI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento **[BI]** está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano – a verdadeira grandeza da distância do ponto **B** ao plano  $\rho$  está no segmento **[B<sub>4</sub>I<sub>4</sub>]**, e foi devidamente assinalada no desenho. Assim, **B<sub>4</sub>I<sub>4</sub>** é a verdadeira grandeza da distância entre os planos  $\rho$  e  $\sigma$ .

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\rho$ , que se situam no eixo **X**) representaram-se a **médio**, que é a expressividade para o eixo **X** (a linha estruturante do exercício). Os restantes dados são pontos, cujas linhas de chamada se representam sempre a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta **p**, do eixo **X'**, da reta **p<sub>4</sub>**, do eixo **Y = Z**, que é uma linha de referência, e, ainda, do novo traço frontal do plano  $\rho$  – **f<sub>4</sub> $\rho$** ).

## 398.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços em função dos dados.

**Resolução:**

A situação proposta neste exercício consiste, na prática, numa variante das situações de distâncias entre dois planos de rampa paralelos – o plano  $\sigma$  (o plano pretendido) é paralelo ao plano  $\rho$  e tem de ser determinado em função da sua distância ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, a resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

**Etapas 1.** Conduziu-se uma reta **p**, qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenharam imediatamente. Note que as projeções da reta **p** não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta **p** ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas dos planos – a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapas 2.** Determinam-se os pontos de interseção da reta **p** com os dois planos. Nem a reta **p** nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

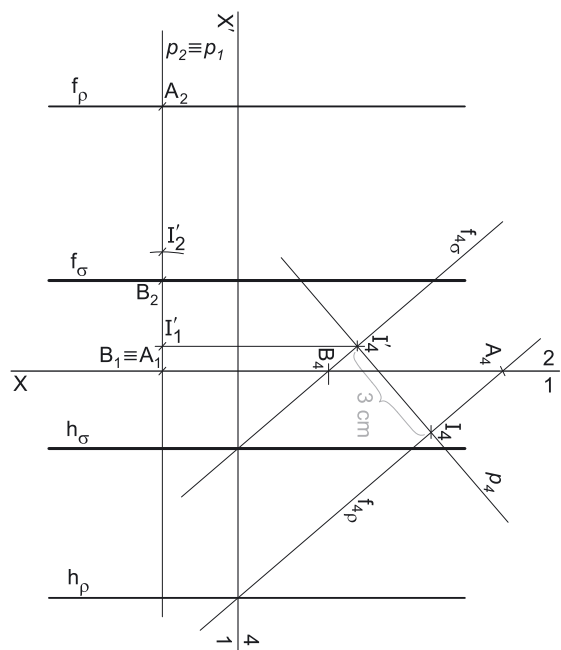
Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **p** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de dois pontos da reta **p**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação aos dois planos de rampa (o  $\beta_{1/3}$  é um plano de rampa passante) – a reta **p** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas de ambos os planos;
3. por fim, a determinação dos pontos de interseção da reta **p** com os dois planos não se pode processar de forma direta.

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta **p** não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os dois traços de um plano de rampa pertencem à mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação aos dois planos de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta **p** nem qualquer dos dois planos de rampa são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta **p** verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção teremos os dois planos de rampa definidos por dois traços (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual os planos de rampa sejam planos projetantes. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**), ortogonal aos dois planos, o que nos permite transformar os planos de rampa em planos de topo (projetantes frontais). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal aos planos de rampa, o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que, no novo diedro de projeção, os dois planos serão planos projetantes frontais (planos ortogonais ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, é necessário determinar os novos traços frontais dos dois planos. Nesse sentido, determinou-se o novo traço frontal do  $\beta_{1/3}$  ( $f_{4\beta}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano  $\rho$  são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se um ponto **A**, qualquer, do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto **A** no plano de perfil que contém a reta **p**. Note, no entanto, que o ponto **A não pertence** à reta **p**.

Em seguida, determinou-se **A<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **A** no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de **A<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 7 cm – a cota de **A**, que é a cota de  $f_\rho$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  – **f<sub>4\rho</sub>**, passa por **A<sub>4</sub>**, pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim, **f<sub>4\rho</sub>** está definido por dois pontos – o ponto **A<sub>4</sub>** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X'**).

Não é possível determinar o novo traço frontal do plano  $\sigma$ , pois o plano  $\sigma$  é o plano pretendido e não um plano dado. Assim, vamos prosseguir com o raciocínio inicial, o que é perfeitamente possível, apesar de não termos representado (ainda) o plano  $\sigma$  no novo diedro de projeção.

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta frontal (de frente) e os dois planos são dois planos de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e os dois planos já é direta em projeções (os traços dos dois planos, no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que **f<sub>4\rho</sub>** é uma reta frontal (de frente) e que a reta **p** é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre a reta **p** e o novo traço frontal do plano  $\rho$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, conduziu-se **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**), qualquer, perpendicular a **f<sub>4\rho</sub>** (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra «família» de retas de ambos os planos, pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação aos dois planos (apesar de o plano  $\sigma$  ainda não estar representado). Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta **p** já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, os dois planos são planos projetantes frontais, é possível, de forma imediata, determinar os pontos de interseção da reta **p** com ambos os planos, a partir das respetivas projeções no **plano 4**.

Assim, **I<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **I** no **plano 4**) é o ponto de concorrência de **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**) com **f<sub>4\rho</sub>** (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se **I<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **I**), de forma direta, sobre **p<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **p**). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar **I<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **I**), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **I<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **I<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

Note que, não tendo sido ainda determinado o plano  $\sigma$ , não é possível determinar o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\sigma$ . No entanto, esse ponto (o ponto **I'**) será o ponto da reta **p** que se situa a 3 cm (a distância pretendida) do ponto **I**.

Neste momento temos todas as situações pendentes parcialmente resolvidas – a reta **p** ainda está definida por um único ponto (o ponto **I**), mas já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação aos dois planos de rampa e já se determinou um dos pontos de interseção da reta **p** com os dois planos (o ponto **I**).

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  (o ponto **I**), está parcialmente concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. Assim, a partir das projeções do ponto **I**, há que determinar as projeções do ponto **I'** – este, como acima se referiu, será o ponto da reta **p** que dista 3 cm do ponto **I**. Nesse sentido, o segmento **[II']** será um segmento representativo da distância entre os dois planos.

O segmento **[II']** é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que a reta **p** (a reta suporte do segmento **[II']**) é paralela ao novo Plano Frontal de Projeção (o **plano 4**), pelo que o segmento se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4** – no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta **[II']** é necessariamente um segmento de reta frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4**.

Assim, sobre a reta **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**) e a partir de **I<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **I** no **plano 4**), mediram-se os 3 cm (a distância entre os dois planos), o que nos permitiu determinar **I'<sub>4</sub>** (a projeção, no **plano 4**, do outro extremo do segmento de reta **[II']**). O ponto **I'<sub>4</sub>** é, no novo diedro de projeção, o ponto de interseção da reta **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**) com **f<sub>4\sigma</sub>** (o novo traço frontal do plano  $\rho$ , que ainda não se determinou). O ponto **I'** é, assim, o outro extremo do segmento de reta representativo da distância entre os dois planos e é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\sigma$ . Note que o ponto **I'<sub>4</sub>** determinado nos garante que o plano  $\sigma$  (o plano que contém o ponto) se situa entre o plano  $\rho$  e o eixo **X**, como o enunciado pede expressamente.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, há que determinar os traços do plano de rampa que contém o ponto  $I'$ . Por outro lado, sabe-se que, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\sigma$  é um plano projetante frontal (tal como o plano  $\rho$ ). Assim, por  $I'_4$  conduziu-se o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** ( $f_{4\sigma}$ ), o que nos garante que o ponto  $I'$  pertence ao plano  $\sigma$ .

Os traços do plano  $\sigma$  (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) são duas retas do plano  $\sigma$  que são concorrentes num ponto do eixo  $X'$ . Assim, já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano  $\sigma$  ( $h_\sigma$ ), que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano (um ponto do eixo  $X$ ). Por outro lado, também já temos a sua direção (é necessariamente fronto-horizontal), o que nos permitiu desenhar  $h_\sigma$  (o traço horizontal do plano  $\sigma$ ) –  $h_\sigma$  está definido por um ponto (o ponto do eixo  $X'$  que é o ponto de concorrência dos traços do plano) e uma direção (é paralelo ao eixo  $X$  inicial).

Para determinar o traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ), no diedro de projeção inicial, que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal do plano ( $f_\sigma$ ) é necessariamente uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos uma direção para defini  $f_\sigma$ . Falta-nos outro ponto para definir o traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ). Nesse sentido, recorreu-se a um ponto  $B$ , qualquer, pertencente ao plano  $\sigma$  e com afastamento nulo –  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ) situa-se necessariamente no eixo  $X$ . Por outro lado,  $B_4$  (a projeção do ponto  $B$  no **plano 4**) situa-se necessariamente sobre  $f_{4\sigma}$  (pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\sigma$  é um plano projetante frontal). Em seguida, determinou-se a projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ), que se processou através da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_\sigma$ ) –  $f_\sigma$  está definido por um ponto (o ponto  $B$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Note que, por uma questão de economia de traçados, se situou o ponto  $B$  no mesmo plano de perfil que contém o ponto  $A$  (o ponto usado para se determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$ ).

Por fim, optou-se por determinar as projeções do ponto  $I'$  no diedro de projeção inicial, apesar de não serem necessárias. Assim, determinou-se  $I'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I'$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I'_2$  (a projeção frontal do ponto  $I'$ ), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I'_4$  ao eixo  $X'$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano  $\sigma$  (o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das projeções da reta  $p$ , do eixo  $X'$ , da reta  $p_4$  e, ainda, de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, nomeadamente os novos traços frontais dos dois planos).

### 399.

Por **distância de um ponto a uma reta** entende-se o comprimento de um segmento de reta perpendicular à reta, que tem um extremo no ponto dado e o outro extremo sobre a reta dada (no ponto de concorrência da reta dada com a reta que lhe é perpendicular e que passa pelo ponto dado), ou seja, é a menor distância do ponto à reta, medida numa perpendicular à reta que passa pelo ponto.

### 400.

**Método geral para a determinação da distância de um ponto a uma reta:** **1.** conduz-se, pelo ponto dado, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de concorrência das duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos (o ponto dado e o ponto de concorrência) é a **distância do ponto à reta**.

### 401.

**Método convencional para a determinação da distância de um ponto a uma reta:** **1.** conduz-se, pelo ponto dado, um plano ortogonal à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta dada e o plano que lhe é ortogonal (e que passa pelo ponto dado); **3.** a distância entre os dois pontos (o ponto dado e o ponto de interseção) é a **distância do ponto à reta**.

### 402.

De uma forma geral, recorre-se ao **método geral** na determinação da **distância de um ponto a uma reta** sempre que a reta dada é **paralela** a um dos planos de projeção e, por isso, a perpendicularidade entre a reta dada e a reta sobre a qual se mede a distância é **direta**, numa das projeções.

Por oposição ao exposto, recorre-se ao **método convencional** na determinação da **distância de um ponto a uma reta** sempre que a reta dada **não é paralela** a qualquer dos planos de projeção e, por isso, a perpendicularidade entre a reta dada e a reta sobre a qual se mede a distância **não é direta**, em nenhuma das projeções. Salvuaguarda-se, no entanto, as situações em que se opte por transformar a reta dada numa reta paralela a um dos planos de projeção o que nos permitirá o recurso ao **método geral**.

## 403.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $h$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $h$  está definida por um ponto ( $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (é dado o ângulo que a reta  $h$  faz com o Plano Frontal de Projeção).

**Resolução:**

Uma vez que a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , perpendicular à reta  $h$ . A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cuja projeção horizontal é perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ), para garantir a perpendicularidade entre as duas retas (a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a perpendicularidade entre as duas retas é direta, em projeção horizontal).

Por outro lado, e uma vez que a reta  $p$  é **perpendicular** à reta  $h$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção horizontal ( $I_1$ ) –  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ). A reta  $p$  está, assim, definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ .

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência (ou interseção) entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas já foi previamente determinado na etapa anterior – o ponto  $I$ .

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $h$ . A partir das projeções dos pontos  $P$  e  $I$  desenham-se as projeções do segmento  $[PI]$ . O segmento  $[PI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $h$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o segmento de reta  $[PI]$  num segmento de reta frontal (de frente). Para tal, é necessário, substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta.

Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

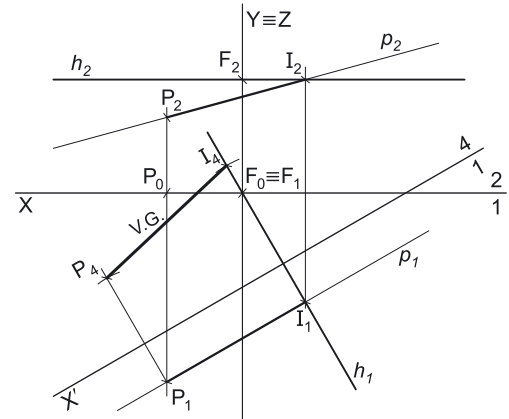
- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** dos seus pontos (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta  $[PI]$ , o eixo  $X'$  é paralelo a  $[P_1I_1]$ . As linhas de chamada dos pontos  $P$  e  $I$ , no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).  $P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$ .  $I_4$  é a projeção de  $I$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $I_2$  ao eixo  $X$ .

No novo diedro de projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta frontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de  $\overline{PI}$  é  $\overline{P_4I_4}$  (que é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $h$ ).

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).



## 404.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $f$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $H$ , o seu traço horizontal) e por uma direção (é dado o ângulo que a reta  $f$  faz com o Plano Horizontal de Projeção). O ponto  $P$  tem as suas projeções coincidentes, pois é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes).

### Resolução:

Uma vez que a reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção, a resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , perpendicular à reta  $f$ . A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cuja projeção frontal é perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ), para garantir a perpendicularidade entre as duas retas (a reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a perpendicularidade entre as duas retas é direta, em projeção frontal).

Por outro lado, e uma vez que a reta  $p$  é **perpendicular** à reta  $f$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ). A reta  $p$  está, assim, definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ .

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência (ou interseção) entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas já foi previamente determinado na etapa anterior – o ponto  $I$ .

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $f$ . A partir das projeções dos pontos  $P$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[PI]$ . O segmento  $[PI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $f$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o segmento de reta  $[PI]$  num segmento de reta frontal (de frente). Para tal, é necessário, substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta.

Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

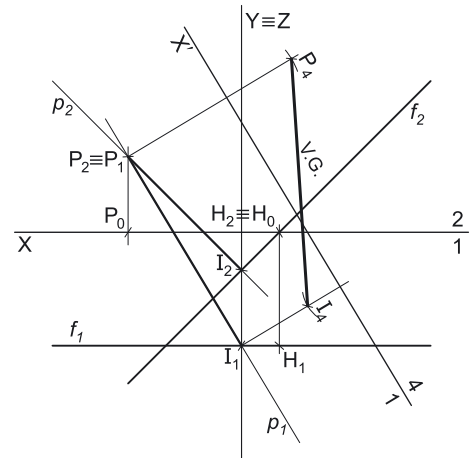
- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** dos seus pontos (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta  $[PI]$ , o eixo  $X'$  é paralelo a  $[P_1I_1]$ . As linhas de chamada dos pontos  $P$  e  $I$ , no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).  $P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$ .  $I_4$  é a projeção de  $I$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $I_2$  ao eixo  $X$ .

No novo diedro de projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta frontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de  $\overline{PI}$  é  $\overline{P_4I_4}$  (que é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $f$ ).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).



## 405.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $t$  e o ponto  $M$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $M$  conduziu-se uma reta  $p$ , perpendicular à reta  $t$ . A reta  $t$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $t$  é direta em projeção horizontal. Dessa forma, a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ) é perpendicular a  $t_1$  (a projeção horizontal da reta  $t$ ), o que nos garante a perpendicularidade entre as duas retas. A reta  $p$  é, assim, uma reta frontal (de frente). Por outro lado, e uma vez que a reta  $p$  é perpendicular à reta  $t$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção horizontal ( $I_1$ ) –  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) está coincidente com  $t_2$  (a projeção frontal da reta  $t$ ), pois a reta  $t$  é uma reta projetante frontal. A reta  $p$  está, assim, definida por dois pontos – os pontos  $M$  e  $I$ .

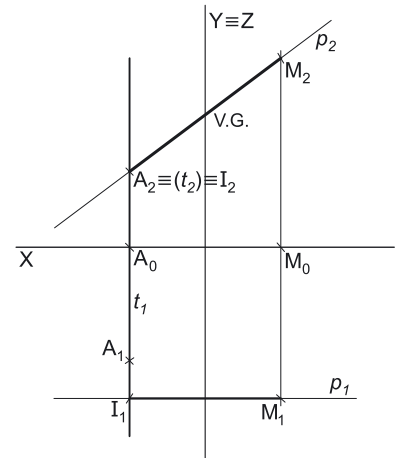
**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas já foi previamente determinado na etapa anterior – o ponto  $I$ .

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $M$  à reta  $t$ . A partir das projeções dos pontos  $M$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[MI]$ . O segmento  $[MI]$  é o segmento representativo da distância do ponto  $M$  à reta  $t$ .

O segmento  $[MI]$  é um segmento de reta frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção). Assim, o segmento de reta  $[M_2I_2]$  é a projeção frontal do segmento de reta  $[MI]$  e está em verdadeira grandeza.  $M_2I_2$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $M$  à reta  $t$ , o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $t$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício), que se situa na projeção frontal do segmento. A projeção horizontal da distância, porque é parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representou-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 406.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

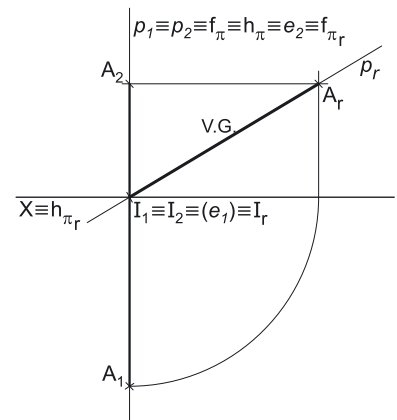
A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $A$  conduziu-se uma reta  $p$ , perpendicular ao eixo  $X$ . O eixo  $X$  é uma reta fronto-horizontal, que é simultaneamente um caso particular das retas horizontais (de nível) e das retas frontais (de frente), pelo que a perpendicularidade entre o eixo  $X$  e qualquer outra reta é direta em qualquer das projeções. Assim, uma reta perpendicular ao eixo  $X$  (que é uma reta fronto-horizontal) tem de ser uma **reta de topo**, uma **reta vertical** ou uma **reta de perfil**. Tendo em conta que a reta  $p$  tem de ser concorrente com o eixo  $X$ , estão excluídas as hipóteses de ser uma reta de topo ou uma reta vertical, pelo que a reta  $p$  é necessariamente uma **reta de perfil**.

Assim, a reta  $p$  é uma **reta de perfil passante**, pois é uma reta de perfil concorrente com o eixo  $X$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $I$ , que é o ponto de concorrência da reta  $p$  com o eixo  $X$ . A reta  $p$  está, assim, definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $I$ .

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas já foi previamente determinado na etapa anterior – o ponto  $I$ .

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $A$  ao eixo  $X$ . A partir das projeções dos pontos  $A$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[AI]$ . O segmento  $[AI]$  é o segmento representativo da distância do ponto  $A$  ao eixo  $X$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O segmento de reta **[AI]** não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, optou-se por recorrer ao rebatimento do plano de perfil para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se representou o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém o segmento) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ). A charneira do rebatimento é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento. Por fim, os arcos do rebatimento, projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

O ponto **I** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $I_r \equiv I_2 \equiv I_1$ . Em seguida, rebateu-se o ponto **A**, o que nos permitiu determinar  $A_r$ . Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $A_r$  e em  $I_r - \bar{A}_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto **A** ao eixo **X**, o que se assinalou devidamente no desenho.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os dados são um único ponto, cuja linha de chamada se representou a **leve**, pois as linhas de chamada são sempre a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício), que se situa na projeção frontal do segmento. As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p** e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).

## 407.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta **r** e o ponto **M**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto **M** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). O ponto **R** (o ponto da reta **r** que é dado) tem as suas projeções coincidentes, pois é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes).

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapla 1.** Pelo ponto **M** conduziu-se uma reta **p**, perpendicular à reta **r**. A reta **r** é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a perpendicularidade entre a reta **p** e a reta **r** é direta em projeção frontal. Dessa forma, a projeção frontal da reta **p** ( $p_2$ ) é perpendicular a  $r_2$  (a projeção frontal da reta **r**), o que nos garante a perpendicularidade entre as duas retas. A reta **p** é, assim, uma reta horizontal (de nível). Por outro lado, e uma vez que a reta **p** é **perpendicular** à reta **r**, as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto **I**, o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto **I**) está coincidente com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta **r**), pois a reta **r** é uma reta projetante horizontal. A reta **p** está, assim, definida por dois pontos – os pontos **M** e **I**.

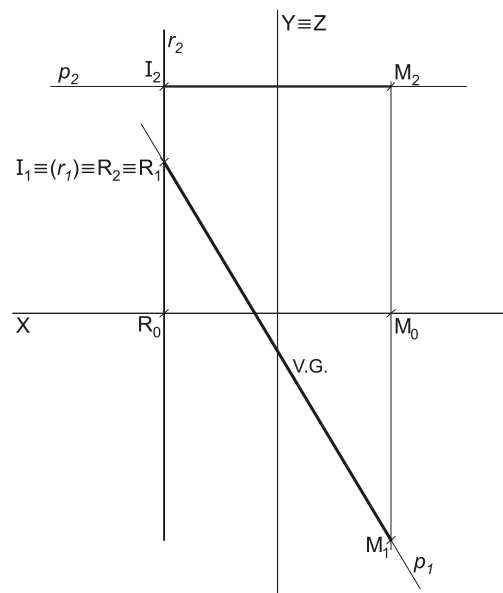
**Etapla 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas já foi previamente determinado na etapa anterior – o ponto **I**.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **M** à reta **r**. A partir das projeções dos pontos **M** e **I** desenham-se as projeções do segmento **[MI]**. O segmento **[MI]** é o segmento representativo da distância do ponto **M** à reta **r**.

O segmento **[MI]** é um segmento de reta horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção). Assim, o segmento de reta  $[M_1 I_1]$  é a projeção horizontal do segmento de reta **[MI]** e está em verdadeira grandeza.  $\bar{M}_1 I_1$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto **M** à reta **r**, o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta **r**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício), que se situa na projeção horizontal do segmento. A projeção frontal da distância, porque é parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representou-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p** e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 408.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $f$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (é dado o ângulo que a reta  $f$  faz com o Plano Horizontal de Projeção). O ponto  $A$  tem as suas projeções coincidentes, pois é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes). Uma vez que o ponto  $A$  tem afastamento negativo, a reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) com afastamento negativo. O ponto  $P$  é ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

**Resolução:**

Uma vez que a reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção, a resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , perpendicular à reta  $f$ . A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cuja projeção frontal é perpendicular a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ), para garantir a perpendicularidade entre as duas retas (a reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a perpendicularidade entre as duas retas é direta, em projeção frontal).

Por outro lado, e uma vez que a reta  $p$  é perpendicular à reta  $f$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ). A reta  $p$  está, assim, definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ .

**Etapla 2.** Determina-se o ponto de concorrência (ou interseção) entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas já foi previamente determinado na etapa anterior – o ponto  $I$ .

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $f$ . A partir das projeções dos pontos  $P$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[PI]$ . O segmento  $[PI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $f$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por recorrer ao rebatimento do plano projetante frontal da distância (do segmento) para o plano frontal (de frente) que contém o ponto  $I$  (e que contém necessariamente a reta  $f$ ).

Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que passa por  $I$ ) pelo seu traço horizontal –  $h_\varphi$ . O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente por  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ). Não houve necessidade de representar o plano projetante frontal do segmento pelos seus traços, como em seguida se exporá.

Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos – o plano  $\varphi$  e o plano projetante frontal do segmento. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da charneira (reta  $e$ ) está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  – tem-se, imediatamente,  $e_1 \equiv (h_\varphi)$ . Por outro lado, o plano projetante frontal do segmento  $[PI]$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da charneira ( $e_2$ ) está sobre a projeção frontal do segmento de reta  $[PI]$  –  $e_2$  (a projeção frontal da charneira) é a reta suporte de  $[P_2I_2]$  (a projeção frontal do segmento). A reta  $e$ , definida pelas suas projeções, é a reta que pertence simultaneamente aos dois planos.

O plano projetante frontal do segmento está, assim, definido por uma reta (a reta  $e$ ) e um ponto exterior à reta (o ponto  $P$ , que também pertence ao plano). Os planos ortogonais à charneira do rebatimento (que contém os arcos do rebatimento de cada ponto) são planos de topo (ortogonais à reta  $e$ ).

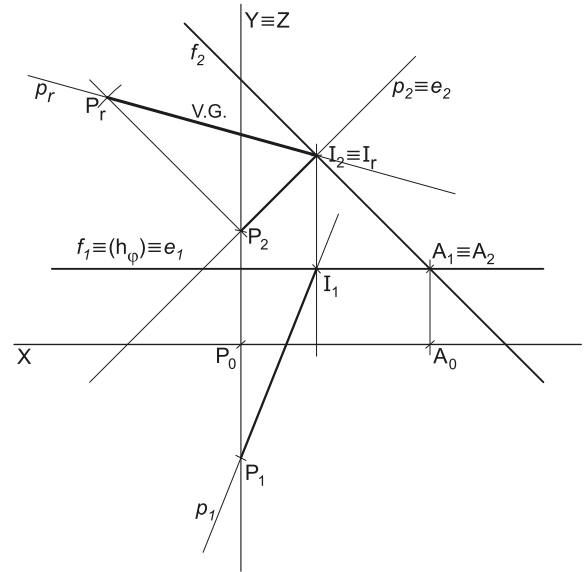
Rebatendo o plano projetante frontal do segmento para o plano  $\varphi$  (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), tudo o que estiver rebatido sobre o plano  $\varphi$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, o ponto  $I$ , porque é um ponto da charneira, roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que se tem imediatamente  $I_r \equiv I_2$ . Para rebater o segmento de reta (rebatendo o seu plano projetante horizontal) basta, então, rebater o ponto  $P$ .

Por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao traço frontal do plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $P$ ) –  $P_r$  situa-se necessariamente sobre essa perpendicular à charneira. O raio do arco do rebatimento é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\varphi$  – o afastamento do ponto  $P$  em relação ao plano  $\varphi$ . Assim, sobre a perpendicular à charneira que passa por  $P_2$ , e a partir de  $P_2$ , mediu-se o afastamento do ponto  $P$  em relação ao plano  $\varphi$  e determinou-se  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido).

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[P_rI_r]$  é o segmento de reta  $[PI]$  rebatido e está em verdadeira grandeza, porque está contido num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido,  $\overline{P_rI_r}$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $f$ , o que se identificou no desenho.

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento efetuado).



## 409.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $h$  e o ponto  $A$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $M$ ) e por uma direção (é dado o ângulo que a reta  $h$  faz com o Plano Frontal de Projeção). O ponto  $M$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). O ponto  $A$  tem as suas projeções coincidentes, pois é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes).

### Resolução:

Uma vez que a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $A$  conduziu-se uma reta  $p$ , perpendicular à reta  $h$ . A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cuja projeção horizontal é perpendicular a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ), para garantir a perpendicularidade entre as duas retas (a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a perpendicularidade entre as duas retas é direta, em projeção horizontal).

Por outro lado, e uma vez que a reta  $p$  é **perpendicular** à reta  $h$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção horizontal ( $I_1$ ) –  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ). A reta  $p$  está, assim, definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $I$ .

**Etapla 2.** Determina-se o ponto de concorrência (ou interseção) entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas já foi previamente determinado na etapa anterior – o ponto  $I$ .

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $A$  à reta  $h$ . A partir das projeções dos pontos  $A$  e  $I$  desenham-se as projeções do segmento  $[AI]$ . O segmento  $[AI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $A$  à reta  $h$ .

O segmento  $[AI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por recorrer ao rebatimento do plano projetante horizontal da distância (do segmento) para o plano horizontal (de nível) que contém o ponto  $I$  (e que contém necessariamente a reta  $h$ )

Nesse sentido, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que passa pelo ponto  $I$ ) pelo seu traço frontal –  $f_v$ . O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ). Não houve necessidade de representar o plano projetante horizontal do segmento pelos seus traços, como em seguida se exporá.

Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos – o plano  $v$  e o plano projetante horizontal do segmento. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da charneira (reta  $e$ ) está sobre o traço frontal do plano  $\phi$  – tem-se, imediatamente,  $e_2 \equiv (f_v)$ . Por outro lado, o plano projetante horizontal do segmento  $[AI]$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ) está sobre a projeção horizontal do segmento de reta  $[AI]$  –  $e_1$  (a projeção horizontal da charneira) é a reta suporte de  $[A_1I_1]$  (a projeção horizontal do segmento). A reta  $e$ , definida pelas suas projeções, é a reta que pertence simultaneamente aos dois planos.

O plano projetante horizontal do segmento está, assim, definido por uma reta (a reta  $e$ ) e um ponto exterior à reta (o ponto  $A$ , que também pertence ao plano). Os planos ortogonais à charneira do rebatimento (que contém os arcos do rebatimento de cada ponto) são planos verticais (ortogonais à reta  $e$ ).

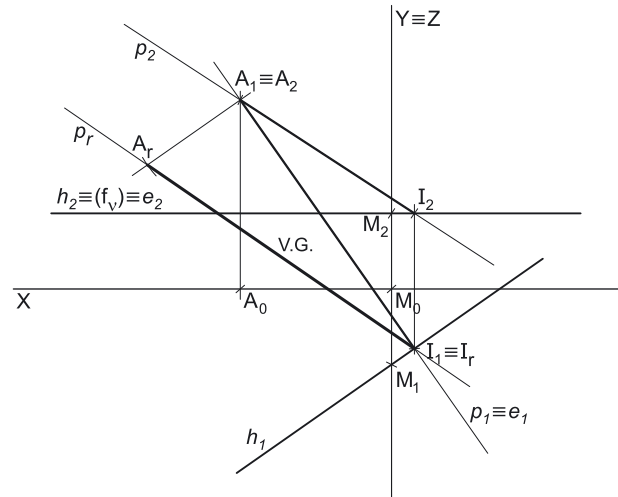
Rebatendo o plano projetante horizontal do segmento para o plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), tudo o que estiver rebatido sobre o plano  $v$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, o ponto  $I$ , porque é um ponto da charneira, roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que se tem imediatamente  $I_r \equiv I_1$ . Para rebater o segmento de reta (rebatendo o seu plano projetante horizontal) basta, então, rebater o ponto  $A$ .

Por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ ) –  $A_r$  situa-se necessariamente sobre essa perpendicular à charneira. O raio do arco do rebatimento é a distância do ponto  $A$  ao plano  $v$  – a cota do ponto  $A$  em relação ao plano  $v$ . Assim, sobre a perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , e a partir de  $A_1$ , mediu-se a cota do ponto  $A$  em relação ao plano  $v$  e determinou-se  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido).

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $A_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[A_rI_r]$  é o segmento de reta  $[AI]$  rebatido e está em verdadeira grandeza, porque está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido,  $A_rI_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $A$  à reta  $h$ , o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento efetuado).



## 410.

**Dados:**

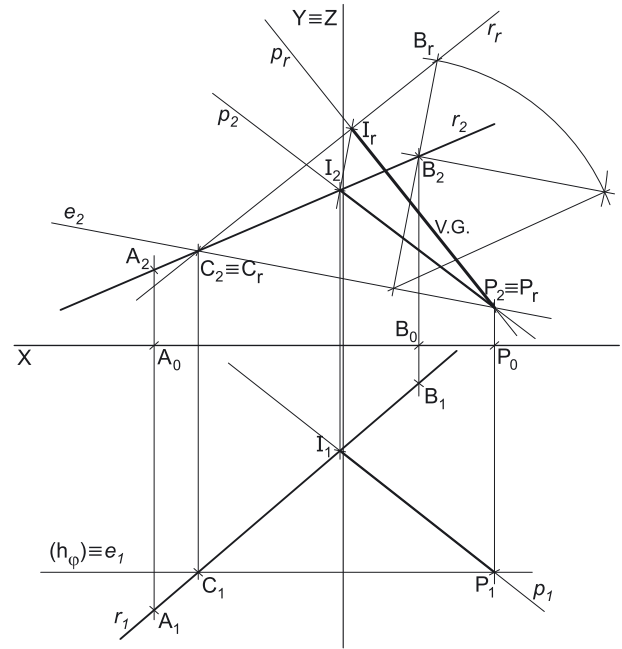
Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados.

**Resolução:**

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método direto**, que nos permite a aplicação do **método geral da distância de pontos a retas** a duas dimensões, após o rebatimento do plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ .

Assim, optou-se por se rebater o plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$  para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o ponto  $P$  – nesse sentido, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), que passa por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ) que é a reta de interseção entre os dois planos. A charneira do rebatimento (reta  $e$ ) fica definida por dois pontos – o ponto  $P$  e o ponto  $C$  (que é o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\varphi$ ). O ponto  $C$  foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal ( $C_1$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_2$ . O ponto  $C$  é outro ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente  $C_r \equiv C_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em rebatimento – o ponto  $C_r$ . Faltam-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $r$  em rebatimento.



Recorreu-se a um outro ponto da reta  $r$  – o ponto  $B$ , por exemplo. O recurso ao ponto  $B$  (em detrimento do ponto  $A$ ) teve a ver com questões de rigor – o ponto  $B$  está substancialmente mais afastado do ponto  $C$  do que o ponto  $A$ , o que nos permite um maior rigor de execução. O rebatimento do ponto  $B$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $B_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $B$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $B$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $B$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $B$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $B_2$ , determinando  $B_r$ . Por fim desenhou-se a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $B_r$  e  $C_r$ .

Em seguida, no rebatimento efetuado, procedeu-se à execução sequencial das três etapas do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se uma perpendicular à reta  $r_r$  – a reta  $p_r$ . Uma vez que o problema está a ser resolvido em verdadeira grandeza (no plano rebatido), a perpendicularidade entre as duas retas é direta e a reta  $p_r$  é necessariamente perpendicular à reta  $r_r$ , pois as duas retas são efetivamente concorrentes.

**Etapla 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I_r$ , que foi determinado imediatamente, em rebatimento.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . O segmento  $[PI]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . Tendo em conta que o problema está a ser resolvido em rebatimento, o segmento  $[P_r I_r]$  está em verdadeira grandeza –  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ .

Por fim, inverteu-se o rebatimento do ponto  $I$  – por  $I_r$  (o ponto  $I$  rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ). A projeção horizontal do ponto  $I$  ( $I_1$ ) situa-se na projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), na linha de chamada de  $I_2$ . Por fim, desenharam-se as duas projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ) e da reta  $p$  (a reta que passa pelo ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $r$ ) – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $P$  e  $I$ ).

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\varphi$  e dos traçados relativos ao rebatimento do plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ , entre os quais a charneira do rebatimento).

## 411.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  está definida por dois pontos – o ponto  $A$  e o seu traço horizontal (o ponto  $H$ ).

### Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método direto**, que nos permite a aplicação do **método geral da distância de pontos a retas** a duas dimensões, após o rebatimento do plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ .

Assim, optou-se por se rebater o plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$  para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o ponto  $P$  – nesse sentido, desenhou-se o traço frontal do plano  $v$  ( $(f_v) \equiv e_2$ ), que passa por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos. A charneira do rebatimento (reta  $e$ ) fica definida por dois pontos – o ponto  $P$  e o ponto  $A$  (que é o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $v$ ). Note que o ponto  $A$  é o ponto da reta  $r$  que foi dado no enunciado e que tem a mesma cota do ponto  $P$ .

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_1$ . O ponto  $A$  é outro ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em rebatimento – o ponto  $A_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $r$  em rebatimento.

Recorreu-se a um outro ponto da reta  $r$  – o ponto  $H$ . O rebatimento do ponto  $H$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $H_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $H$  ao plano  $v$  (a cota de  $H$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $H$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $H$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $H_1$ , determinando  $H_r$ . Por fim desenhou-se a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $H_r$ .

Em seguida, no rebatimento efetuado, procedeu-se à execução sequencial das três etapas do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se uma perpendicular à reta  $r_r$  – a reta  $p_r$ . Uma vez que o problema está a ser resolvido em verdadeira grandeza (no plano rebatido), a perpendicularidade entre as duas retas é direta e a reta  $p_r$  é necessariamente perpendicular à reta  $r_r$ , pois as duas retas são efetivamente concorrentes.

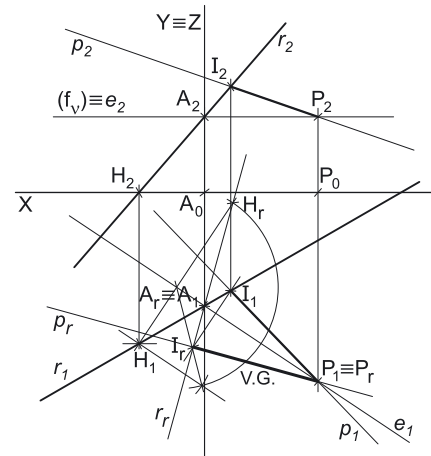
**Etapla 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I_r$ , que foi determinado imediatamente, em rebatimento.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . O segmento  $[P_r I_r]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . Tendo em conta que o problema está a ser resolvido em rebatimento, o segmento  $[P_r I_r]$  está em verdadeira grandeza –  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ .

Por fim, inverteu-se o rebatimento do ponto  $I_r$  – por  $I_r$  (o ponto  $I$  rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ). A projeção frontal do ponto  $I$  ( $I_2$ ) situa-se na projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ), na linha de chamada de  $I_1$ . Por fim, desenharam-se as duas projeções da distância (do segmento  $[P I]$ ) e da reta  $p$  (a reta que passa pelo ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $r$ ) – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $P$  e  $I$ ).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $v$  e dos traçados relativos ao rebatimento do plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ , entre os quais a charneira do rebatimento).



## 412.

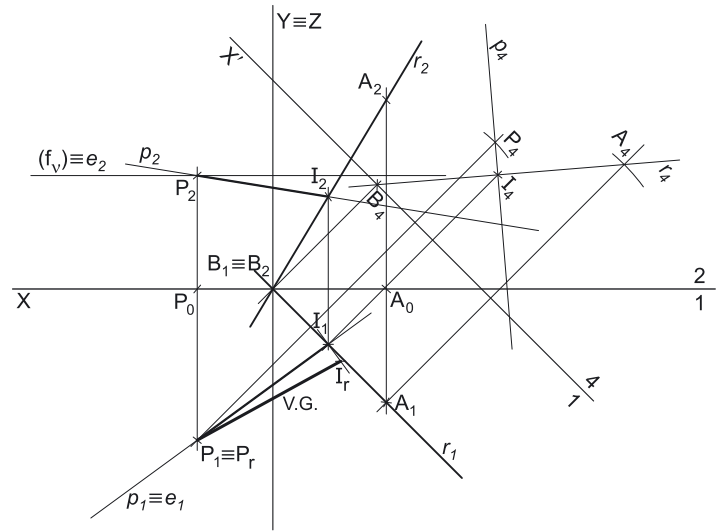
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  é uma reta passante, pelo que e uma reta concorrente com o eixo  $X$  (no ponto  $B$ , cujas projeções se identificaram).

**Resolução:**

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduz-se uma reta perpendicular à reta  $r$  – a reta  $p$ . Uma vez que a reta  $r$  é uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, a **perpendicularidade** entre a reta  $p$  e a reta  $r$  **não é direta** em nenhum dos planos de projeção. Assim, as projeções da reta  $r$  não são as mais favoráveis para concretizar o pretendido (conduzir uma reta perpendicular à reta  $r$ ), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser uma **mudança do diedro de projeção**, de forma a transformar a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção para, dessa forma, a perpendicularidade entre as duas retas ser direta num dos planos de projeção.



Optou-se por transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta  $r$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $r$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $P$ ).  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 5 cm – a cota de  $A$ ).

Já temos um ponto para definirmos a nova projeção frontal da reta  $r$  – o ponto  $A_4$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto  $B$  (o ponto de concorrência da reta  $r$  com o eixo  $X$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**.  $B_4$  é a projeção do ponto  $B$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que é nula e se manteve) –  $B_4$  situa-se necessariamente no eixo  $X'$ , pois, no novo diedro de projeção, a sua cota continua a ser nula. Assim, desenhou-se  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), que está definida por dois pontos –  $A_4$  e  $B_4$ .

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre as duas retas.

Por outro lado, e uma vez que a reta  $p$  é **perpendicular** à reta  $r$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção no **plano 4** ( $I_4$ ) –  $I_1$  situa-se sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Em seguida, determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), na linha de chamada de  $I_1$ . Por fim, desenharam-se as projeções frontal e horizontal da reta  $p$ , que está definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ .

Está concluída a **Etapa 1 do método geral para a determinação da distância de pontos a retas**.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I$ , já determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . O segmento  $[PI]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ , pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta  $[PI]$  também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (quer ao **plano 1**, quer ao **plano 4**), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambas as projeções), optou-se por rebater o plano projetante horizontal do segmento  $[PI]$  para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o ponto  $P$  (e cujo traço frontal se desenhou imediatamente, passando por  $P_2$ ). Para tal determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção frontal ( $e_2$ ) está coincidente com o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ) está coincidente com a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), pois o plano que contém o segmento  $[PI]$  (e a reta  $p$ ) é um plano projetante horizontal.

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_1$ . Falta-nos rebater o ponto  $I$ . Conduziu-se, por  $I_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de  $I$ ), sobre a qual se representou a distância do ponto  $I$  ao plano  $v$  (a cota de  $I$  em relação a  $v$ ), determinando-se  $I_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[P_r I_r]$  é o segmento de reta  $[PI]$  rebatido e situa-se no plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ , o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada e, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do plano projetante horizontal de  $[PI]$  para o plano  $v$ , para a determinação da verdadeira grandeza de  $[PI]$ ).

## 413.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

### Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método direto**, que nos permite a aplicação do **método geral da distância de pontos a retas** a duas dimensões, após o rebatimento do plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ .

Assim, optou-se por se rebater o plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$  para o Plano Frontal de Projeção (que é o plano frontal que contém o ponto  $P$ ). Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos. A charneira do rebatimento (reta  $e$ ) fica definida por dois pontos – o ponto  $P$  e o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $r$ ).

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_2$ . O ponto  $F$  é outro ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_r \equiv F_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em rebatimento – o ponto  $F_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $r$  em rebatimento.

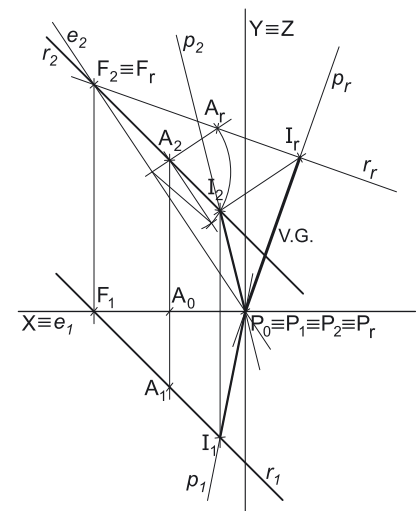
Recorreu-se a um outro ponto da reta  $r$  – o ponto  $A$ , que é o ponto da reta  $r$  que é dado no enunciado. O rebatimento do ponto  $A$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $A_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se o afastamento do ponto  $A$  e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $A_2$ , determinando  $A_r$ . Por fim, desenhou-se a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $F_r$ .

Em seguida, no rebatimento efetuado, procedeu-se à execução sequencial das três etapas do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se uma perpendicular à reta  $r_r$  – a reta  $p_r$ . Uma vez que o problema está a ser resolvido em verdadeira grandeza (no plano rebatido), a perpendicularidade entre as duas retas é direta e a reta  $p_r$  é necessariamente perpendicular à reta  $r_r$ , pois as duas retas são efetivamente concorrentes.

**Etapla 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I_r$ , que foi determinado imediatamente, em rebatimento.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . O segmento  $[PI]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . Tendo em conta que o problema está a ser resolvido em rebatimento, o segmento  $[P_r I_r]$  está em verdadeira grandeza –  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, inverteu-se o rebatimento do ponto  $I$  – por  $I_r$  (o ponto  $I$  rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ). A projeção horizontal do ponto  $I$  ( $I_1$ ) situa-se na projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), na linha de chamada de  $I_2$ . Por fim, desenharam-se as duas projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ) e da reta  $p$  (a reta que passa pelo ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $r$ ) – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $P$  e  $I$ ).

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e dos traçados relativos ao rebatimento do plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ , entre os quais a charneira do rebatimento).

## 414.

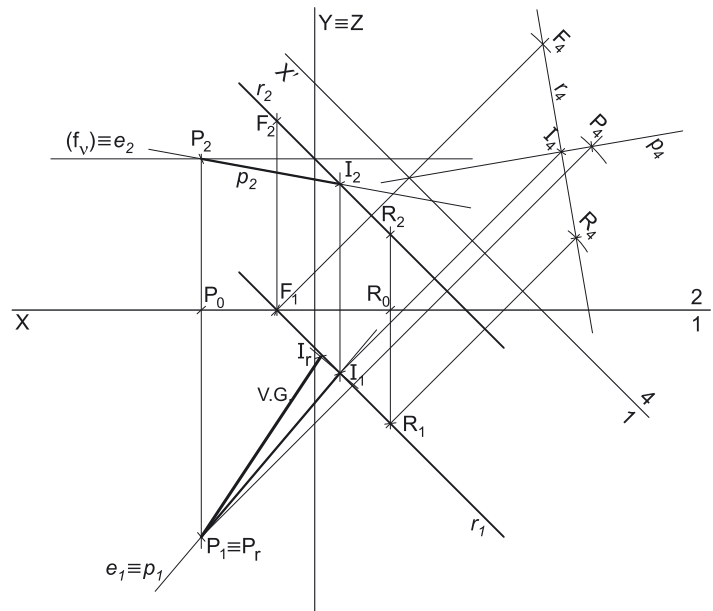
#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

#### Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduz-se uma reta perpendicular à reta  $r$  – a reta  $p$ . Uma vez que a reta  $r$  é uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, a **perpendicularidade** entre a reta  $p$  e a reta  $r$  **não é direta** em nenhum dos planos de projeção. Assim, as projeções da reta  $r$  não são as mais favoráveis para concretizar o pretendido (conduzir uma reta perpendicular à reta  $r$ ), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser uma **mudança do diedro de projeção**, de forma a transformar a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção para, dessa forma, a perpendicularidade entre as duas retas ser direta num dos planos de projeção.



Optou-se por transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta  $r$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $r$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $P$ ).  $R_4$  é a projeção do ponto  $R$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $R_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $R_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $R$ ).

Já temos um ponto para definirmos a nova projeção frontal da reta  $r$  – o ponto  $R_4$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $r$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**.  $F_4$  é a projeção do ponto  $F$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$ . Assim, desenhou-se  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), que está definida por dois pontos –  $R_4$  e  $F_4$ .

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre as duas retas.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, e uma vez que a reta  $p$  é perpendicular à reta  $r$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção no plano 4 ( $I_4$ ) –  $I_1$  situa-se sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Em seguida, determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), na linha de chamada de  $I_1$ . Por fim, desenharam-se as projeções frontal e horizontal da reta  $p$ , que está definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ .

Está concluída a **Etapa 1** do método geral para a determinação da distância de pontos a retas.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I$ , já determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . O segmento  $[PI]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ , pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo plano 1 e pelo plano 4, o segmento de reta  $[PI]$  também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (quer ao plano 1, quer ao plano 4), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Para determinar a verdadeira grandeza da distância pretendida (que está deformada em ambas as projeções), optou-se por rebater o plano projetante horizontal do segmento  $[PI]$  para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o ponto  $P$  (e cujo traço frontal se desenhou imediatamente, passando por  $P_2$ ). Para tal determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção frontal ( $e_2$ ) está coincidente com o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ) está coincidente com a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), pois o plano que contém o segmento  $[PI]$  (e a reta  $p$ ) é um plano projetante horizontal.

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_1$ . Falta-nos rebater o ponto  $I$ . Conduziu-se, por  $I_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de  $I$ ), sobre a qual se representou a distância do ponto  $I$  ao plano  $v$  (a cota de  $I$  em relação a  $v$ ), determinando-se  $I_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[P_r I_r]$  é o segmento de reta  $[PI]$  rebatido e situa-se no plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ , o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a médio, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a leve, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a forte – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a médio-forte. As restantes linhas representaram-se a leve, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada e, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do plano projetante horizontal de  $[PI]$  para o plano  $v$ , para a determinação da verdadeira grandeza de  $[PI]$ ).

## 415.

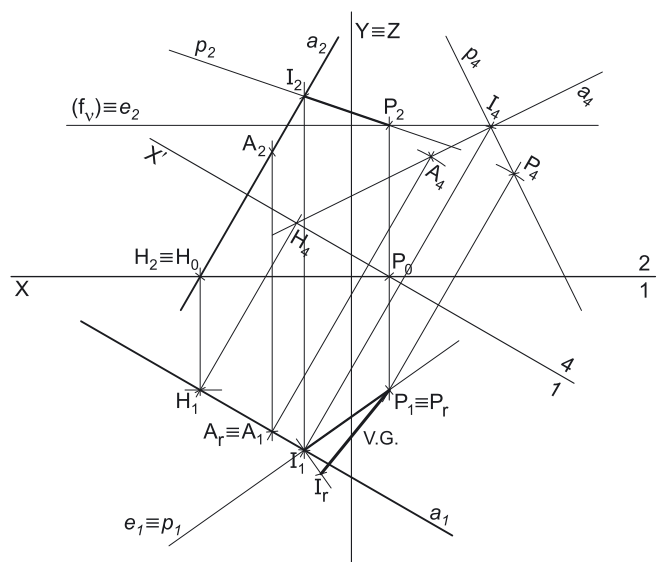
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao método geral da distância de pontos a retas que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduz-se uma reta perpendicular à reta  $r$  – a reta  $p$ . Uma vez que a reta  $r$  é uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  não é direta em nenhum dos planos de projeção. Assim, as projeções da reta  $r$  não são as mais favoráveis para concretizar o pretendido (conduzir uma reta perpendicular à reta  $r$ ), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção para, dessa forma, a perpendicularidade entre as duas retas ser direta num dos planos de projeção.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se por transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta  $r$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $r$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $P$ ).  $H_4$  é a projeção do ponto  $H$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que é nula e se manteve) –  $H_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois, no novo diedro de pro, a cota do ponto  $H$  continua a ser nula.

Já temos um ponto para definirmos a nova projeção frontal da reta  $r$  – o ponto  $H_4$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto  $A$  (um ponto qualquer da reta  $r$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**.  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $FA_2$  ao eixo  $X$ . Assim, desenhou-se  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), que está definida por dois pontos –  $H_4$  e  $A_4$ .

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre as duas retas.

Por outro lado, e uma vez que a reta  $p$  é **perpendicular** à reta  $r$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção no **plano 4** ( $I_4$ ) –  $I_1$  situa-se sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Em seguida, determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), na linha de chamada de  $I_1$ . Por fim, desenharam-se as projeções frontal e horizontal da reta  $p$ , que está definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ .

Está concluída a **Etapa 1 do método geral para a determinação da distância de pontos a retas**.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I$ , já determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . O segmento  $[PI]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ , pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta  $[PI]$  também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (quer ao **plano 1**, quer ao **plano 4**), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambas as projeções), optou-se por rebater o plano projetante horizontal do segmento  $[PI]$  para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o ponto  $P$  (e cujo traço frontal se desenhou imediatamente, passando por  $P_2$ ). Para tal determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção frontal ( $e_2$ ) está coincidente com o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ) está coincidente com a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), pois o plano que contém o segmento  $[PI]$  (e a reta  $p$ ) é um plano projetante horizontal.

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_1$ . Falta-nos rebater o ponto  $I$ . Conduziu-se, por  $I_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de  $I$ ), sobre a qual se representou a distância do ponto  $I$  ao plano  $v$  (a cota de  $I$  em relação a  $v$ ), determinando-se  $I_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[P_r I_r]$  é o segmento de reta  $[PI]$  rebatido e situa-se no plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $\overline{P_r I_r}$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ , o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada e, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do plano projetante horizontal de  $[PI]$  para o plano  $v$ , para a determinação da verdadeira grandeza de  $[PI]$ ).

## 416.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $m$  e o ponto  $M$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto  $M$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (o bissetor dos diedros ímpares), pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). A reta  $m$  tem as suas projeções coincidentes, pois é uma reta do  $\beta_{2/4}$  (retas do  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções coincidentes).

### Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método direto**, que nos permite a aplicação do **método geral da distância de pontos a retas** a duas dimensões, após o rebatimento do plano definido pela reta  $m$  e pelo ponto  $M$ .

Assim, optou-se por se rebater o plano definido pela reta  $m$  e pelo ponto  $M$  para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o ponto  $M$  – nesse sentido, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), que passa por  $M_1$  (a projeção horizontal do ponto  $M$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos. A charneira do rebatimento (reta  $e$ ) fica definida por dois pontos – o ponto  $M$  e o ponto  $A$  (que é o ponto de interseção da reta  $m$  com o plano  $\varphi$ ). O ponto  $A$  foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal ( $A_1$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. O ponto  $A$ , porque pertence à reta  $m$ , pertence também ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem as suas projeções coincidentes.

O ponto  $M$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $M_r \equiv M_2$ . O ponto  $A$  é outro ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $m$  em rebatimento – o ponto  $A_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $m$  em rebatimento.

Recorreu-se a um outro ponto da reta  $m$  – o ponto  $B$ , por exemplo (o ponto  $B$  é o ponto de concorrência da reta  $m$  com o eixo  $X$ ). O rebatimento do ponto  $B$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $B_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $B$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $B$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $B$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $B$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $B_2$ , determinando  $B_r$ . Por fim, desenhou-se a reta  $m_r$  (a reta  $m$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $B_r$ .

Em seguida, no rebatimento efetuado, procedeu-se à execução sequencial das três etapas do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $M_r$  conduziu-se uma perpendicular à reta  $m_r$  – a reta  $p_r$ . Uma vez que o problema está a ser resolvido em verdadeira grandeza (no plano rebatido), a perpendicularidade entre as duas retas é direta e a reta  $p_r$  é necessariamente perpendicular à reta  $m_r$ , pois as duas retas são efetivamente concorrentes.

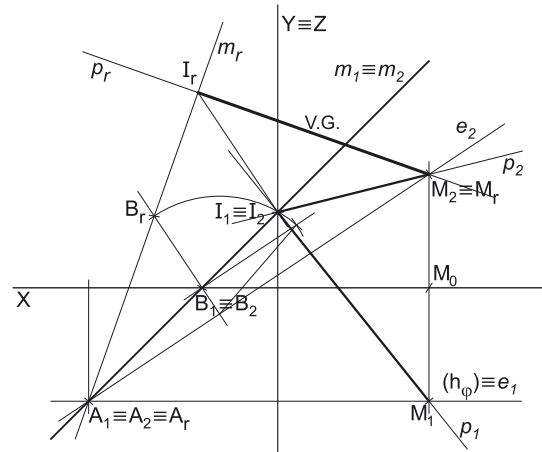
**Etapla 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I_r$ , que foi determinado imediatamente, em rebatimento.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $M$  à reta  $m$ . O segmento  $[MI]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $M$  à reta  $m$ . Tendo em conta que o problema está a ser resolvido em rebatimento, o segmento  $[M_r I_r]$  está em verdadeira grandeza –  $\overline{M_r I_r}$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $M$  à reta  $m$ .

Por fim, inverteu-se o rebatimento do ponto  $I$  – por  $I_r$  (o ponto  $I$  rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) sobre  $m_2$  (a projeção frontal da reta  $m$ ). A projeção horizontal do ponto  $I$  ( $I_1$ ) situa-se na projeção horizontal da reta  $m$  ( $m_1$ ), na linha de chamada de  $I_2$ . Por fim, desenharam-se as duas projeções da distância (do segmento  $[MI]$ ) e da reta  $p$  (a reta que passa pelo ponto  $M$  e é perpendicular à reta  $m$ ) – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $M$  e  $I$ ).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $m$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\varphi$  e dos traçados relativos ao rebatimento do plano definido pela reta  $m$  e pelo ponto  $M$ , entre os quais a charneira do rebatimento).



## 417.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  é uma reta do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$  (retas do  $\beta_{1/3}$  têm projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). A reta  $r$ , sendo uma reta oblíqua do  $\beta_{1/3}$ , é necessariamente uma reta passante – uma reta concorrente com o eixo  $X$  num ponto (o ponto  $A$ ). O ponto  $P$  é ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

**Resolução:**

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método direto**, que nos permite a aplicação do **método geral da distância de pontos a retas** a duas dimensões, após o rebatimento do plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ .

Assim, optou-se por se rebater o plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$  para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o ponto  $P$ . Note que tanto a reta  $r$  como o ponto  $P$  pertencem ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que o plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$  é o próprio  $\beta_{1/3}$ . Assim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), que passa por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos. A charneira do rebatimento (reta  $e$ ) fica definida por dois pontos – o ponto  $P$  e o ponto  $B$  (que é o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\varphi$ ). O ponto  $B$  foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal ( $B_1$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_2$ . O ponto  $B$  é outro ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente  $B_r \equiv B_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em rebatimento – o ponto  $B_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $r$  em rebatimento.

Recorreu-se a um outro ponto da reta  $r$  – o ponto  $A$  (o ponto de concorrência da reta  $r$  com o eixo  $X$ ), por exemplo. O rebatimento do ponto  $A$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $A_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $A$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $A$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $A_2$ , determinando  $A_r$ . Por fim, desenhou-se a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $B_r$ .

Em seguida, no rebatimento efetuado, procedeu-se à execução sequencial das três etapas do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se uma perpendicular à reta  $r_r$  – a reta  $p_r$ . Uma vez que o problema está a ser resolvido em verdadeira grandeza (no plano rebatido), a perpendicularidade entre as duas retas é direta e a reta  $p_r$  é necessariamente perpendicular à reta  $r_r$ , pois as duas retas são efetivamente concorrentes.

**Etapla 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I_r$ , que foi determinado imediatamente, em rebatimento.

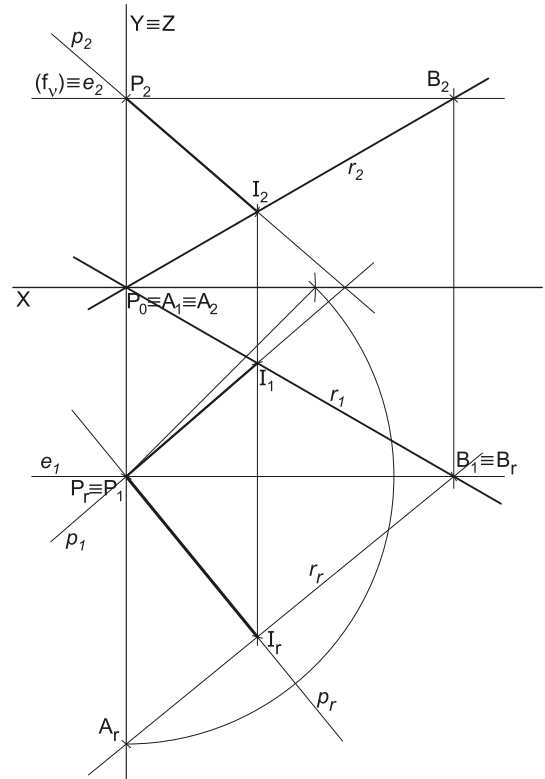
**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . O segmento  $[PI]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . Tendo em conta que o problema está a ser resolvido em rebatimento, o segmento  $[P_r I_r]$  está em verdadeira grandeza –  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ .

Por fim, inverteu-se o rebatimento do ponto  $I$  – por  $I_r$  (o ponto  $I$  rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ). A projeção horizontal do ponto  $I$  ( $I_1$ ) situa-se na projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), na linha de chamada de  $I_2$ . Por fim, desenharam-se as duas projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ) e da reta  $p$  (a reta que passa pelo ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $r$ ) – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $P$  e  $I$ ).

Note que a reta  $p$  está contida no plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ , que é o próprio  $\beta_{1/3}$ , como oportunamente se referiu. Assim, a reta  $p$  é, também ela, uma reta do  $\beta_{1/3}$ , pelo que as suas projeções são simétricas em relação ao eixo  $X$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\varphi$  e dos traçados relativos ao rebatimento do plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ , entre os quais a charneira do rebatimento).





## 418.

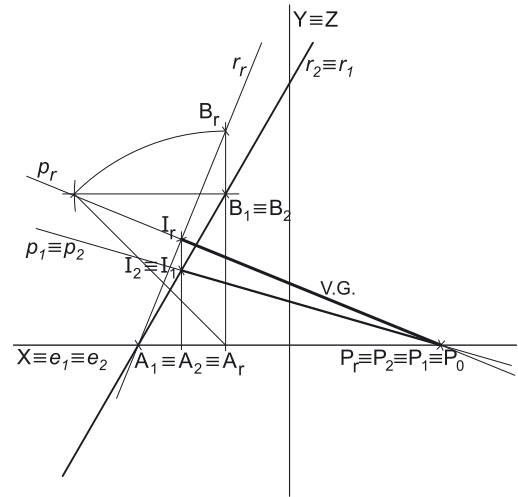
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  é uma reta do  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem as suas projeções coincidentes (retas do  $\beta_{2/4}$  têm projeções coincidentes). A reta  $r$ , sendo uma reta oblíqua do  $\beta_{2/4}$ , é necessariamente uma reta passante – uma reta concorrente com o eixo  $X$  num ponto (o ponto  $A$ ). O ponto  $P$  é ponto do eixo  $X$ , pelo que é, também ele, um ponto do  $\beta_{2/4}$  (o  $\beta_{2/4}$  é um plano que contém o eixo  $X$ ).

### Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método direto**, que nos permite a aplicação do **método geral da distância de pontos a retas** a duas dimensões, após o rebatimento do plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ .

Assim, optou-se por se rebater o plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$  para o Plano Frontal de Projeção. Note que tanto a reta  $r$  como o ponto  $P$  pertencem ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que o plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$  é o próprio  $\beta_{2/4}$ . Assim, há que rebater o  $\beta_{2/4}$  (o plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ ) para o Plano Frontal de Projeção (o plano frontal que contém o ponto  $P$ ). Nesse sentido, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos. A charneira do rebatimento (reta  $e$ ) fica definida por dois pontos – o ponto  $P$  e o ponto  $A$  (que é o ponto de concorrência da reta  $r$  com o eixo  $X$ ).



O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_2$ . O ponto  $A$  é outro ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em rebatimento – o ponto  $A_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $r$  em rebatimento.

Recorreu-se a um outro ponto da reta  $r$  – o ponto  $B$  (um ponto qualquer da reta  $r$ ). O rebatimento do ponto  $B$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $B_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se o afastamento do ponto  $B$  e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $B$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $B$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $B_2$ , determinando  $B_r$ . Por fim, desenhou-se a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $B_r$ .

Em seguida, no rebatimento efetuado, procedeu-se à execução sequencial das três etapas do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**: 1. conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; 2. determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; 3. a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapas 1.** Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se uma perpendicular à reta  $r_r$  – a reta  $p_r$ . Uma vez que o problema está a ser resolvido em verdadeira grandeza (no plano rebatido), a perpendicularidade entre as duas retas é direta e a reta  $p_r$  é necessariamente perpendicular à reta  $r_r$ , pois as duas retas são efetivamente concorrentes.

**Etapas 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I_r$ , que foi determinado imediatamente, em rebatimento.

**Etapas 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . O segmento  $[PI]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ . Tendo em conta que o problema está a ser resolvido em rebatimento, o segmento  $[P_r I_r]$  está em verdadeira grandeza –  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $r$ .

Por fim, inverteu-se o rebatimento do ponto  $I$  – por  $I_r$  (o ponto  $I$  rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ). A projeção horizontal do ponto  $I$  ( $I_1$ ) situa-se na projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), na linha de chamada de  $I_2$ . Por fim, desenharam-se as duas projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ) e da reta  $p$  (a reta que passa pelo ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $r$ ) – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $P$  e  $I$ ).

Note que a reta  $p$  está contida no plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ , que é o próprio  $\beta_{2/4}$ , como oportunamente se referiu. Assim, a reta  $p$  é, também ela, uma reta do  $\beta_{2/4}$ , pelo que a reta  $p$  tem as suas projeções coincidentes.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y = Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e dos traçados relativos ao rebatimento do plano definido pela reta  $r$  e pelo ponto  $P$ , entre os quais a charneira do rebatimento).

## 419.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida pelos pontos  $A$  e  $B$ .

**Resolução:**

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método direto**, que nos permite a aplicação do **método geral da distância de pontos a retas** a duas dimensões, após o rebatimento do plano definido pela reta  $p$  e pelo ponto  $P$ .

Assim, optou-se por se rebater o plano definido pela reta  $p$  e pelo ponto  $P$  para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o ponto  $P$ . Assim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), que passa por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos. Já temos um ponto para definir a charneira do rebatimento – o ponto  $P$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Esse outro ponto é o ponto de interseção do plano  $\varphi$  com a reta  $p$  – o ponto  $C$ , cuja projeção horizontal ( $C_1$ ) se determinou diretamente (pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal).

No entanto, a reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que não é possível, de forma direta, determinar a projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Nesse sentido, optou-se por se recorrer ao rebatimento do plano de perfil que contém a reta  $p$  – o plano  $\pi$ , cujos raios se representaram imediatamente.

Efetou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) foi  $f_\pi$  (o traço frontal do plano). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se os pontos  $A$  e  $B$ . Em seguida, desenhou-se  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) que passa por  $A_r$  e por  $B_r$  (a reta  $p_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $B_r$ ). Em seguida, rebateu-se a projeção horizontal do ponto  $C$  ( $C_1$ ), o que nos permitiu determinar  $C_r$  (o ponto  $C$  rebatido) sobre a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Invertendo-se o rebatimento, determinou-se  $C_2$  (a projeção frontal do ponto  $C$ ), sobre  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ), com a mesma cota de  $C_r$  (porque, no rebatimento efetuado, os pontos mantiveram as suas cotas). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $e$ .

A reta  $e$  (a charneira do rebatimento do plano definido pela reta  $p$  e pelo ponto  $P$  para o plano  $\varphi$ ) está definida por dois pontos – o ponto  $P$  e o ponto  $C$ .

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_2$ . O ponto  $C$  é outro ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente  $C_r' \equiv C_2$ . Note que o ponto  $C_r'$  é o ponto  $C$  no seu segundo rebatimento –  $C_r'$  é o ponto  $C$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pela reta  $p$  e pelo ponto  $P$ . Já temos um ponto para definir a reta  $p$  em rebatimento – o ponto  $C_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $r$  em rebatimento.

Recorreu-se a um outro ponto da reta  $r$  – o ponto  $A$ , por exemplo. O rebatimento do ponto  $A$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $A_2$  conduziu-se uma paralela à charneira (a reta  $e$ ) e uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento). Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $A$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $A$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $A_2$ , determinando  $A_r'$ . Note que o ponto  $A_r'$  é o ponto  $A$  no seu segundo rebatimento –  $A_r'$  é o ponto  $A$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pela reta  $p$  e pelo ponto  $P$ .

Por fim, desenhou-se a reta  $p_r'$  (a reta  $p$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $A_r'$  e  $C_r'$ . Note que a reta  $p_r'$  é a reta  $p$  no seu segundo rebatimento –  $p_r'$  é a reta  $p$  rebatida pelo rebatimento do plano definido pela reta  $p$  e pelo ponto  $P$ .

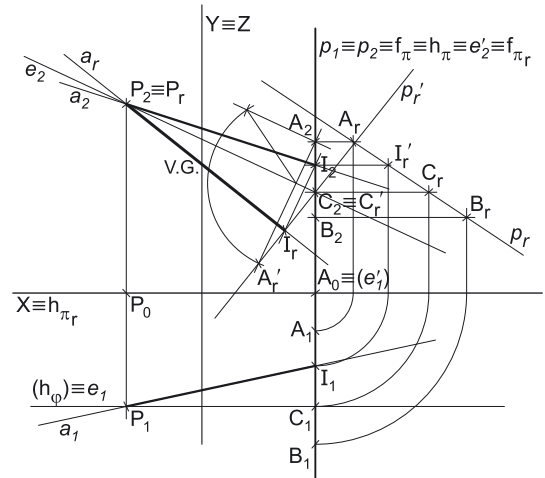
Em seguida, no rebatimento efetuado, procedeu-se à execução sequencial das três etapas do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se uma perpendicular à reta  $p_r'$  – a reta  $a_r$ . Uma vez que o problema está a ser resolvido em verdadeira grandeza (no plano rebatido), a perpendicularidade entre as duas retas é direta e a reta  $a_r$  é necessariamente perpendicular à reta  $p_r'$ , pois as duas retas são efetivamente concorrentes.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I_r$ , que foi determinado imediatamente, em rebatimento.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $p$ . O segmento  $[PI]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $p$ . Tendo em conta que o problema está a ser resolvido em rebatimento, o segmento  $[P_r I_r]$  está em verdadeira grandeza –  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $p$ .

Por fim, inverteu-se o rebatimento do ponto  $I$  – por  $I_r$  (o ponto  $I$  rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) sobre  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ). A projeção horizontal do ponto  $I$  ( $I_1$ ) não tem determinação direta sobre a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), porque as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o do rebatimento do plano de perfil, previamente efetuado para se determinar a projeção frontal do ponto  $C$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, transportou-se, para a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida pelo rebatimento do plano  $\pi$ ) a cota do ponto  $I$  (que se manteve), o que nos permitiu determinar  $I_r'$ , sobre a reta  $p_r$ . Note que o ponto  $I_r'$  é o ponto  $I$  no seu segundo rebatimento –  $I_r'$  é o ponto  $I$  rebatido pelo rebatimento do plano de perfil (o plano  $\pi$ ). Em seguida, invertendo-se o rebatimento do plano  $\pi$ , foi possível determinar  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Por fim, desenharam-se as duas projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ) e da reta  $a$  (a reta que passa pelo ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $p$ ) – a reta  $a$  está definida por dois pontos (os pontos  $P$  e  $I$ ).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $a$ , do plano  $\varphi$  e dos traçados relativos ao rebatimento do plano definido pela reta  $p$  e pelo ponto  $P$ , entre os quais a charneira do rebatimento).

## 420.

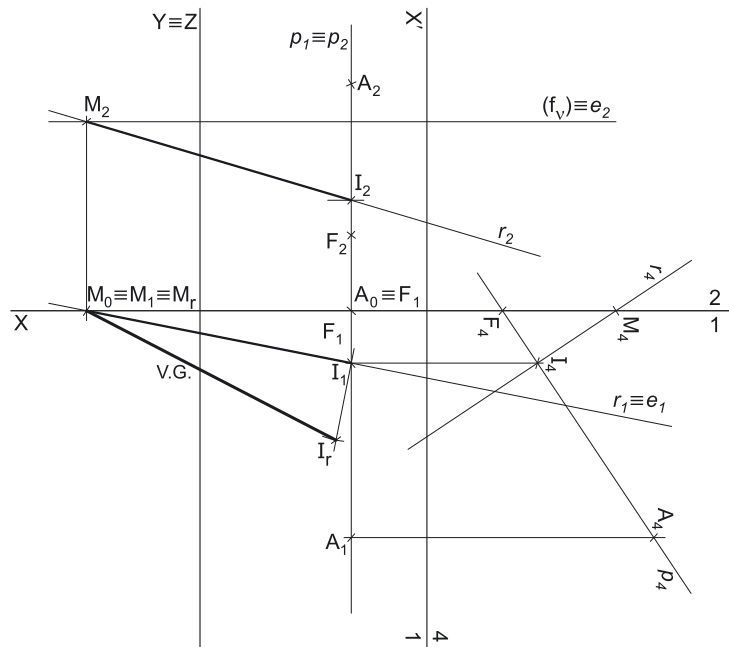
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $M$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por dois pontos – o ponto  $A$  e o ponto  $F$  (o seu traço frontal). O ponto  $A$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

### Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $M$  conduz-se uma reta perpendicular à reta  $p$  – a reta  $r$ . Uma vez que a reta  $p$  é uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, a **perpendicularidade** entre a reta  $r$  e a reta  $p$  não é direta em nenhum dos planos de projeção. Assim, as projeções da reta  $p$  (que não verificam o **Critério de Reversibilidade**) não são as mais favoráveis para concretizar o pretendido (conduzir uma reta perpendicular à reta  $p$ ), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser uma **mudança do diedro de projeção**, de forma a transformar a reta  $p$  numa reta paralela a um dos planos de projeção para, dessa forma, a perpendicularidade entre as duas retas ser direta num dos planos de projeção.



Optou-se por transformar a reta  $p$  numa reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta  $p$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$M_4$  é a projeção do ponto  $M$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $M_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $M_2$  ao eixo  $X$  (que é 5 cm – a cota de  $M$ ).  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 6 cm – a cota de  $A$ ).  $F_4$  é a projeção do ponto  $F$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $F$ ).

Em seguida, desenhou-se a projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ), que está definida por dois pontos –  $A_4$  e  $F_4$ . No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, a perpendicularidade entre a reta  $r$  e a reta  $p$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, por  $M_4$  (a projeção do ponto  $M$  no **plano 4**) conduziu-se  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), perpendicular a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre as duas retas.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, e uma vez que a reta  $r$  é **perpendicular** à reta  $p$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção no **plano 4** ( $I_4$ ) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Em seguida, determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) em função da sua cota (que se manteve). Por fim, desenharam-se as projeções frontal e horizontal da reta  $r$ , que está definida por dois pontos – os pontos  $M$  e  $I$ .

Está concluída a **Etapa 1 do método geral para a determinação da distância de pontos a retas**.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I$ , já determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $M$  à reta  $p$ . O segmento  $[MI]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $M$  à reta  $p$ , pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento  $[MI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta  $[MI]$  também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (nem ao **plano 1**, nem ao **plano 4**), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambas as projeções), optou-se por rebater o plano projetante horizontal do segmento  $[MI]$  para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o ponto  $M$  (e cujo traço frontal se desenhou imediatamente, passando por  $M_2$ ). Para tal determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção frontal ( $e_2$ ) está coincidente com o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ) está coincidente com a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), pois o plano que se pretende rebater (o plano projetante horizontal do segmento  $[MI]$  e da reta  $r$ ) é, precisamente, um plano projetante horizontal.

O ponto  $M$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $M_r \equiv M_1$ . Falta-nos rebater o ponto  $I$ . Para tal conduziu-se, por  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de  $I$ ), sobre a qual se representou a distância do ponto  $I$  ao plano  $v$  (a cota de  $I$  em relação ao plano  $v$ ), determinando-se  $I_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $M_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[M_r I_r]$  é o segmento de reta  $[MI]$  rebatido e situa-se no plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $M_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $M$  à reta  $p$ , o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $r$ , dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada e, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do plano projetante horizontal de  $[MI]$  para o plano  $v$ , para a determinação da verdadeira grandeza de  $[MI]$ ).

## 421.

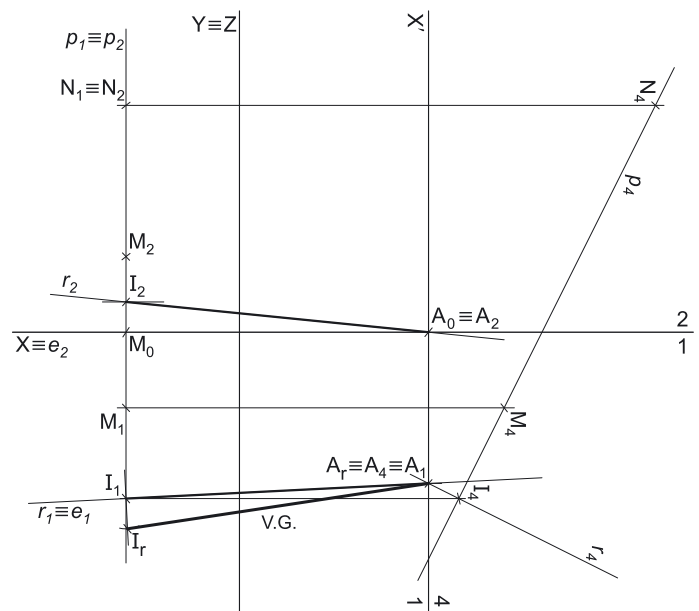
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $A$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por dois pontos – o ponto  $M$  e o ponto  $N$ . O ponto  $M$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). O ponto  $N$  tem as suas projeções coincidentes, pois é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes).

### Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $A$  conduz-se uma reta perpendicular à reta  $p$  – a reta  $r$ . Uma vez que a reta  $p$  é uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, a **perpendicularidade** entre a reta  $r$  e a reta  $p$  **não é direta** em nenhum dos planos de projeção. Assim, as projeções da reta  $p$  (que não verificam o **Critério de Reversibilidade**) não são as mais favoráveis para concretizar o pretendido (conduzir uma reta perpendicular à reta  $p$ ), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser uma **mudança do diedro de projeção**, de forma a transformar a reta  $p$  numa reta paralela a um dos planos de projeção para, dessa forma, a perpendicularidade entre as duas retas ser direta num dos planos de projeção.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se por transformar a reta  $p$  numa reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta  $p$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que é nula e se manteve) –  $A_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois, no novo diedro de projeção, o ponto  $A$  continua a ter cota nula.  $M_4$  é a projeção do ponto  $M$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $M_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $M_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $M$ ).  $N_4$  é a projeção do ponto  $N$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $N_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $N_2$  ao eixo  $X$  (que é 6 cm – a cota de  $N$ ).

Em seguida, desenhou-se a projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ), que está definida por dois pontos –  $M_4$  e  $N_4$ . No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, a perpendicularidade entre a reta  $r$  e a reta  $p$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, por  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**) conduziu-se  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), perpendicular a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre as duas retas.

Por outro lado, e uma vez que a reta  $r$  é **perpendicular** à reta  $p$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção no **plano 4** ( $I_4$ ) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Em seguida, determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) em função da sua cota (que se manteve). Por fim, desenharam-se as projeções frontal e horizontal da reta  $r$ , que está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $I$ .

Está concluída a **Etapa 1** do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I$ , já determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $A$  à reta  $p$ . O segmento  $[AI]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $A$  à reta  $p$ , pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento  $[AI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta  $[AI]$  também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (nem ao **plano 1**, nem ao **plano 4**), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambas as projeções), optou-se por rebater o plano projetante horizontal do segmento  $[AI]$  para o Plano Horizontal de Projeção. Para tal determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção frontal ( $e_2$ ) está no eixo  $X$ , pois a reta  $e$  é uma reta do Plano Horizontal de Projeção (tem cota nula). A projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ) está coincidente com a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), pois o plano que se pretende rebater (o plano projetante horizontal do segmento  $[AI]$  e da reta  $r$ ) é, precisamente, um plano projetante horizontal.

O ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ . Falta-nos rebater o ponto  $I$ . Para tal conduziu-se, por  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de  $I$ ), sobre a qual se representou a cota do ponto  $I$ , determinando-se  $I_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $A_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[A_r I_r]$  é o segmento de reta  $[AI]$  rebatido e situa-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza.  $\overline{A_r I_r}$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $A$  à reta  $p$ , o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $r$ , dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada e, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do plano projetante horizontal de  $[AI]$  para o Plano Horizontal de Projeção, para a determinação da verdadeira grandeza de  $[AI]$ ).





(continuação da página anterior)

Para determinar a **verdadeira grandeza** do segmento **[MI]**, optou-se por se recorrer a outra mudança do diedro de projeção, que nos permita transformar o segmento de reta **[MI]** num segmento de reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 5**), paralelo à reta **r** (a reta suporte do segmento). Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X''**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/5**. Como o **plano 5** é paralelo à reta **r**, o eixo **X''** é paralelo à projeção horizontal da reta **r** (**r<sub>1</sub>**), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X''** (o novo eixo **X**).

**M<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **M** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **M<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **M<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 5 cm – a cota de **M**). **I<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **I** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **I<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **I<sub>2</sub>** ao eixo **X**.

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em **M<sub>5</sub>** e **I<sub>5</sub>** – o segmento de reta **[M<sub>5</sub>I<sub>5</sub>]** é a projeção do segmento de reta **[MI]** no **plano 5** e está em verdadeira grandeza, pois no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 5**), o segmento de reta **[MI]** está paralelo ao **plano 5**. **M<sub>5</sub>I<sub>5</sub>** é a verdadeira grandeza da distância do ponto **M** à reta **p**, o que se identificou no desenho.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta **p**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **r**, dos traçados relativos às duas mudanças do diedro de projeção efetuadas – a necessária à determinação da perpendicularidade entre as duas retas e a necessária à determinação da verdadeira grandeza de **[MI]**).

## 423.

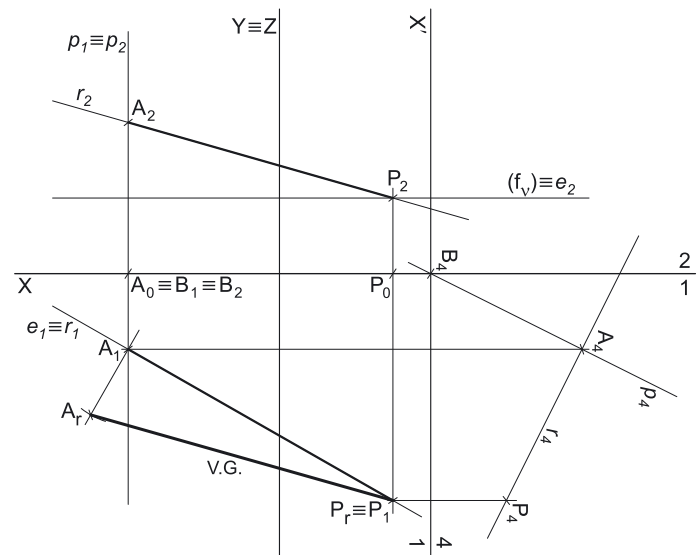
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta **p** e o ponto **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta **p** é uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo **X** (no ponto **B**, cujas projeções se identificaram). Assim, a reta **p** está definida por dois pontos – o ponto **A** e o ponto **B**.

### Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapla 1.** Pelo ponto **P** conduz-se uma reta perpendicular à reta **p** – a reta **r**. Uma vez que a reta **p** é uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, a **perpendicularidade** entre a reta **r** e a reta **p** **não é direta** em nenhum dos planos de projeção. Assim, as projeções da reta **p** (que não verificam o **Critério de Reversibilidade**) não são as mais favoráveis para concretizar o pretendido (conduzir uma reta perpendicular à reta **p**), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser uma **mudança do diedro de projeção**, de forma a transformar a reta **p** numa reta paralela a um dos planos de projeção para, dessa forma, a perpendicularidade entre as duas retas ser direta num dos planos de projeção.



Optou-se por transformar a reta **p** numa reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta **p**. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $P$ ).  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $A$ ).  $B_4$  é a projeção do ponto  $B$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que é nula e se manteve) –  $B_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois, no novo diedro de projeção, o ponto  $B$  continua a ter cota nula.

Em seguida, desenhou-se a projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ), que está definida por dois pontos –  $A_4$  e  $B_4$ . No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, a perpendicularidade entre a reta  $r$  e a reta  $p$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), perpendicular a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre as duas retas.

Por outro lado, e uma vez que a reta  $r$  é perpendicular à reta  $p$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção no **plano 4**. Note que, **nesta situação particular** (em função dos dados do enunciado), o ponto de concorrência das duas retas é o próprio ponto  $A$ , que é um dos pontos que define a reta  $p$ . Tendo em conta que as projeções do ponto  $A$  já são conhecidas, desenharam-se imediatamente as projeções frontal e horizontal da reta  $r$ , que está definida por dois pontos – os pontos  $M$  e  $A$ .

Está concluída a **Etapa 1 do método geral para a determinação da distância de pontos a retas**.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I$ , já determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $p$ . O segmento  $[PA]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $p$ , pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento  $[PA]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta  $[PA]$  também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (nem ao **plano 1**, nem ao **plano 4**), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambas as projeções), optou-se por rebater o plano projetante horizontal do segmento  $[PA]$  para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o ponto  $P$  (e cujo traço frontal se desenhou imediatamente, passando por  $P_2$ ). Para tal determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção frontal ( $e_2$ ) está coincidente com o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ) está coincidente com a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), pois o plano que se pretende rebater (o plano projetante horizontal do segmento  $[PA]$  e da reta  $r$ ) é, precisamente, um plano projetante horizontal.

O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $P_r \equiv P_1$ . Falta-nos rebater o ponto  $A$ . Para tal conduziu-se, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de  $A$ ), sobre a qual se representou a distância do ponto  $A$  ao plano  $v$  (a cota de  $A$  em relação ao plano  $v$ ), determinando-se  $A_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $A_r$  – o segmento de reta  $[P_r A_r]$  é o segmento de reta  $[PA]$  rebatido e situa-se no plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $\overline{P_r A_r}$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $p$ , o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $r$ , dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada e, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do plano projetante horizontal de  $[PA]$  para o plano  $v$ , para a determinação da verdadeira grandeza de  $[PA]$ ).



(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto **I**, já determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **P** à reta **p**. O segmento **[PI]** é, assim, o segmento representativo da distância do ponto **P** à reta **p**, pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento **[PI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta **[PI]** também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (nem ao **plano 1**, nem ao **plano 4**), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Para determinar a **verdadeira grandeza** do segmento **[PI]**, optou-se por se recorrer a outra mudança do diedro de projeção, que nos permita transformar o segmento de reta **[PI]** num segmento de reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo à reta **r** (a reta suporte do segmento **[PI]**). Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/5**. Como o **plano 5** é paralelo à reta **r**, o eixo **X'** é paralelo à projeção horizontal da reta **r** ( $r_1$ ), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

**P<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **P** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que é nula e se manteve) – **P<sub>5</sub>** situa-se no eixo **X'**, pois, no novo diedro de projeção, o ponto **P** continua a ter cota nula. **I<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **I** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **I<sub>5</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **I<sub>2</sub>** ao eixo **X** (a cota de **I**). Salienta-se que a cota do ponto **I** é negativa, pelo que **I<sub>5</sub>** se situa para baixo do eixo **X'**.

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em **P<sub>5</sub>** e **I<sub>5</sub>** – o segmento de reta **[P<sub>5</sub>I<sub>5</sub>]** é a projeção do segmento de reta **[PI]** no **plano 5** e está em verdadeira grandeza, pois no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 5**), o segmento de reta **[PI]** está paralelo ao **plano 5**. **P<sub>5</sub>I<sub>5</sub>** é a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** à reta **p**, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta **p**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **r**, dos traçados relativos às duas mudanças do diedro de projeção efetuadas – a necessária à determinação da perpendicularidade entre as duas retas e a necessária à determinação da verdadeira grandeza de **[PI]**).

## 425.

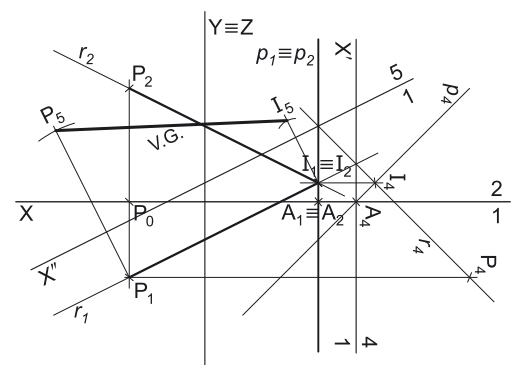
#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta **p** e o ponto **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta **p** é uma reta de perfil do  $\beta_{2/4}$ , pelo que é necessariamente uma reta de perfil passante. Nesse sentido, a reta **p** é concorrente co o eixo **X** num ponto (o ponto **A**), que se identificou imediatamente. Assim, a reta **p** está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção das retas de perfil do  $\beta_{2/4}$ ).

#### Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapa 1.** Pelo ponto **P** conduz-se uma reta perpendicular à reta **p** – a reta **r**. Uma vez que a reta **p** é uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, a **perpendicularidade** entre a reta **r** e a reta **p** **não é direta** em nenhum dos planos de projeção. Assim, as projeções da reta **p** (que não verificam o **Critério de Reversibilidade**) não são as mais favoráveis para concretizar o pretendido (conduzir uma reta perpendicular à reta **p**), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser uma **mudança do diedro de projeção**, de forma a transformar a reta **p** numa reta paralela a um dos planos de projeção para, dessa forma, a perpendicularidade entre as duas retas ser direta num dos planos de projeção.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se por transformar a reta  $p$  numa reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta  $p$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $P$ ).  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que é nula e se manteve) –  $A_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois, no novo diedro de projeção, o ponto  $A$  continua a ter cota nula.

Para definir  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto, que é  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**). Por outro lado, é-nos dada, no enunciado, a direção da reta  $p$  – a reta  $p$  é uma reta de perfil do  $\beta_{2/4}$ . Assim, poder-se-ia representar o  $\beta_{2/4}$  no novo diedro de projeção e, assim, garantir a situação de pertença da reta  $p$  em relação ao  $\beta_{2/4}$ . Todavia, optou-se por uma situação mais simples, que em seguida se expõe. Essa situação assenta no facto de que o  $\beta_{2/4}$  é um plano passante que faz, com ambos os planos de projeção, ângulos de  $45^\circ$ , sendo que atravessa os  $2^\circ$  e  $4^\circ$  Diedros.

Nesse sentido, e porque a reta  $p$  pertence ao  $\beta_{2/4}$ , a reta  $p$  faz um ângulo de  $45^\circ$  com o Plano Horizontal de Projeção (o plano que se manteve). Uma vez que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente), o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Assim,  $p_4$  passa por  $A_4$  e faz, com o eixo  $X'$ , um ângulo de  $45^\circ$ . Das duas hipóteses que existem para medir esse ângulo, uma delas fará com que a reta  $p$  seja pertença ao  $\beta_{1/3}$  (a hipótese em  $p_4$  passa pelo quadrante onde se situa  $P_4$ , que é um ponto do  $1^\circ$  Diedro), enquanto a outra fará com que a reta  $p$  pertença ao  $\beta_{2/4}$  (a hipótese em  $p_4$  não passe pelo quadrante onde se situa  $P_4$ ). Das duas hipóteses atrás referidas, a que a resolução apresenta é, precisamente, a que nos garante que a reta  $p$  pertence ao  $\beta_{2/4}$ .

Assim, desenhou-se a projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ), que está definida por um ponto (o ponto  $A_4$ ) e por uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com o eixo  $X'$ , com a direção acima referida).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, a perpendicularidade entre a reta  $r$  e a reta  $p$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), perpendicular a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre as duas retas.

Por outro lado, e uma vez que a reta  $r$  é **perpendicular** à reta  $p$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção no **plano 4** ( $I_4$ ) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Em seguida, determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) em função da sua cota (que se manteve). Por fim, desenharam-se as projeções frontal e horizontal da reta  $r$ , que está definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ .

Está concluída a **Etapa 1** do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto  $I$ . Já determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  à reta  $p$ . O segmento  $[PI]$  é, assim, o segmento representativo da distância do ponto  $P$  à reta  $p$ , pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta  $[PI]$  também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (nem ao **plano 1**, nem ao **plano 4**), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Para determinar a **verdadeira grandeza** do segmento  $[PI]$ , optou-se por se recorrer a outra mudança do diedro de projeção, que nos permita transformar o segmento de reta  $[PI]$  num segmento de reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo à reta  $r$  (a reta suporte do segmento  $[PI]$ ). Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/5$ . Como o **plano 5** é paralelo à reta  $r$ , o eixo  $X''$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

$P_5$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que é nula e se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $P$ ).  $I_5$  é a projeção do ponto  $I$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_5$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $I_2$  ao eixo  $X$  (a cota de  $I$ ).

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_5$  e  $I_5$  – o segmento de reta  $[P_5I_5]$  é a projeção do segmento de reta  $[PI]$  no **plano 5** e está em verdadeira grandeza, pois no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 5**), o segmento de reta  $[PI]$  está paralelo ao **plano 5**.  $P_5I_5$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  à reta  $p$ , o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $r$ , dos traçados relativos às duas mudanças do diedro de projeção efetuadas – a necessária à determinação da perpendicularidade entre as duas retas e a necessária à determinação da verdadeira grandeza de  $[PI]$ ).

## 426.

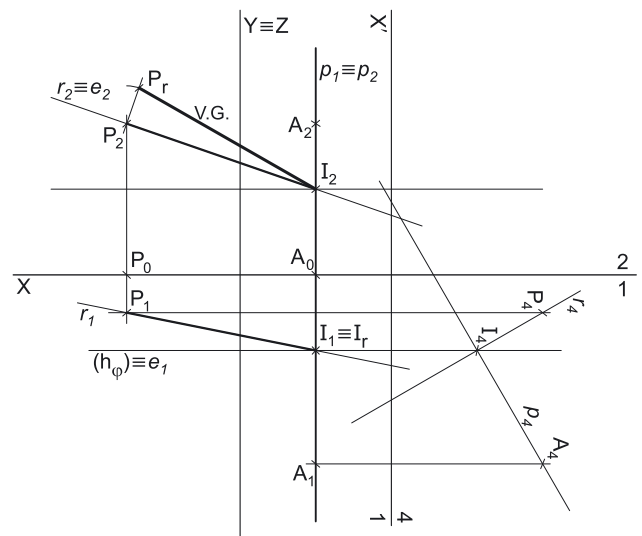
#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $P$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (é dado o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção).

#### Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapla 1.** Pelo ponto  $P$  conduz-se uma reta perpendicular à reta  $p$  – a reta  $r$ . Uma vez que a reta  $p$  é uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, a **perpendicularidade** entre a reta  $r$  e a reta  $p$  **não é direta** em nenhum dos planos de projeção. Assim, as projeções da reta  $p$  (que não verificam o **Crítério de Reversibilidade**) não são as mais favoráveis para concretizar o pretendido (conduzir uma reta perpendicular à reta  $p$ ), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser uma **mudança do diedro de projeção**, de forma a transformar a reta  $p$  numa reta paralela a um dos planos de projeção para, dessa forma, a perpendicularidade entre as duas retas ser direta num dos planos de projeção.



Optou-se por transformar a reta  $p$  numa reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta  $p$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $p$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $P$ ).  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $A$ ).

Já temos um ponto para definir  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) – o ponto  $A_4$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. É dado o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção (o plano que se manteve), que é um ângulo de  $30^\circ$ . Uma vez que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente), o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Assim,  $p_4$  passa por  $A_4$  e faz, com o eixo  $X'$ , um ângulo de  $30^\circ$ . Das duas hipóteses que existem para medir esse ângulo, a que a resolução apresenta é a que nos garante que o traço horizontal da reta  $p$  tem afastamento negativo, para que se situe no **SPHP** (como o enunciado pede expressamente). Note que, na outra hipótese, o traço horizontal da reta  $p$  teria afastamento positivo e, por isso, se situaria no **SPHA**. Assim, desenhou-se a projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ), que está definida por um ponto (o ponto  $A_4$ ) e por uma direção (faz um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo  $X'$ , com a direção acima referida).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, a perpendicularidade entre a reta **r** e a reta **p** é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, por **P<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **P** no **plano 4**) conduziu-se **r<sub>4</sub>** (a projeção da reta **r** no **plano 4**), perpendicular a **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre as duas retas.

Por outro lado, e uma vez que a reta **r** é **perpendicular** à reta **p**, as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto **I**, o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção no **plano 4** (**I<sub>4</sub>**) – **I<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **I**) situa-se sobre **p<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **p**). Em seguida, determinou-se **I<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **I**) em função da sua cota (que se manteve). Por fim, desenharam-se as projeções frontal e horizontal da reta **r**, que está definida por dois pontos – os pontos **P** e **I**.

Está concluída a **Etapa 1** do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**.

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto **I**, já determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **P** à reta **p**. O segmento **[PI]** é, assim, o segmento representativo da distância do ponto **P** à reta **p**, pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento **[PI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta **[PI]** também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (nem ao **plano 1**, nem ao **plano 4**), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambas as projeções), optou-se por rebater o plano projetante horizontal do segmento **[PI]** para o plano horizontal (de nível) **v** que contém o ponto **I** (e cujo traço frontal se desenhou imediatamente, passando por **I<sub>2</sub>**). Para tal determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta **e**), o que se processou de forma direta. A projeção frontal (**e<sub>2</sub>**) está coincidente com o traço frontal do plano **v** (**f<sub>v</sub>**), pois o plano **v** é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira (**e<sub>1</sub>**) está coincidente com a projeção horizontal da reta **r** (**r<sub>1</sub>**), pois o plano que se pretende rebater (o plano projetante horizontal do segmento **[PI]** e da reta **r**) é, precisamente, um plano projetante horizontal.

O ponto **I** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **I<sub>r</sub> ≡ I<sub>1</sub>**. Falta-nos rebater o ponto **P**. Para tal conduziu-se, por **P<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **P**) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de **P**), sobre a qual se representou a distância do ponto **P** ao plano **v** (a cota de **P** em relação ao plano **v**), determinando-se **P<sub>r</sub>**.

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em **P<sub>r</sub>** e **I<sub>r</sub>** – o segmento de reta **[P<sub>r</sub>I<sub>r</sub>]** é o segmento de reta **[PI]** rebatido e situa-se no plano **v** (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. **P<sub>r</sub>I<sub>r</sub>** é a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** à reta **p**, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta **p**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **r**, dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada e, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do plano projetante horizontal de **[PI]** para o plano **v**, para a determinação da verdadeira grandeza de **[PI]**).

## 427.

Por **ângulo entre duas retas** entende-se a amplitude de qualquer dos dois ângulos menores formados entre as duas retas. Como um ângulo é uma **superfície bidimensional**, o ângulo entre duas retas concorrentes está **necessariamente** contido no plano definido pelas duas retas.

## 428.

Duas retas concorrentes são duas **retas coplanares**, ou seja, duas retas que definem um plano. Por outro lado, um ângulo é a superfície plana compreendida entre duas semirretas com direções diferentes e a mesma extremidade. Assim, atendendo a que um ângulo é uma **superfície bidimensional** (uma porção de um plano), o ângulo entre duas retas concorrentes está **necessariamente** contido no plano que essas duas retas definem (o ângulo é uma porção do plano que essas duas retas definem).

## 429.

O **ângulo entre duas retas concorrentes** é o menor ângulo por elas formado e está contido no plano definido pelas duas retas. Se o **plano que contém o ângulo for paralelo a um dos planos de projeção**, então o ângulo projeta-se em verdadeira grandeza nesse plano de projeção. Se o **plano que contém o ângulo não for paralelo a qualquer dos planos de projeção**, então o ângulo projeta-se com deformação em ambas as projeções, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

**430.**

Duas retas enviesadas não formam, entre si, nenhum ângulo de forma direta, pois não são coplanares (o ângulo entre duas retas, sendo uma superfície bidimensional, está contido **no plano** definido pelas duas retas e duas retas enviesadas não definem plano nenhum). No entanto, o ângulo que duas retas enviesadas formam (indiretamente) entre si é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que formam, entre si, duas retas quaisquer, **concorrentes** entre si e paralelas às retas dadas (duas retas coplanares). Assim, sendo dadas duas retas enviesadas quaisquer,  $r$  e  $s$ , para determinar o ângulo entre elas é necessário conduzir duas retas quaisquer, concorrentes entre si e paralelas às retas dadas. Nesse sentido, é possível, por exemplo, conduzir uma reta  $s'$ , paralela à reta  $s$  e concorrente com a reta  $r$  num ponto qualquer – o ângulo formado entre as retas  $r$  e  $s'$  (que são concorrentes) é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que as retas  $r$  e  $s$  formam entre si (de forma indireta).

**431.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $h$  e  $t$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

**Resolução:**

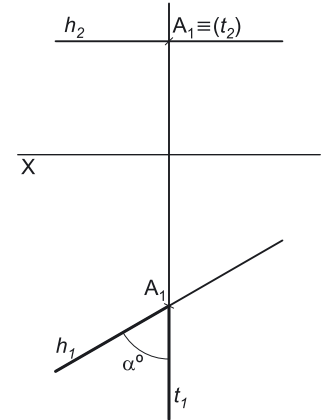
As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um plano horizontal (de nível). É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas – o plano horizontal (de nível) que as duas retas definem (e que não se identificou).

O plano que contém o ângulo (o plano horizontal que contém as duas retas) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do ângulo está em verdadeira grandeza). O ângulo entre as duas retas é, assim, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as projeções horizontais das duas retas ( $h_1$  e  $t_1$ ), com vértice em  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto de concorrência das duas retas).

Identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções das retas  $h$  e  $t$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). A linha restante representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de chamada.

**432.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $f$  e  $g$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto de concorrência das duas retas (o ponto  $P$ ) tem 2,5 cm de afastamento (o afastamento da reta  $f$ ) e 4 cm de cota (a cota da reta  $g$ ). As projeções horizontais das duas retas estão necessariamente coincidentes, pois trata-se de duas retas frontais (a reta  $g$  é um caso particular das retas frontais – é uma reta frontal que é paralela ao Plano Horizontal de Projeção).

**Resolução:**

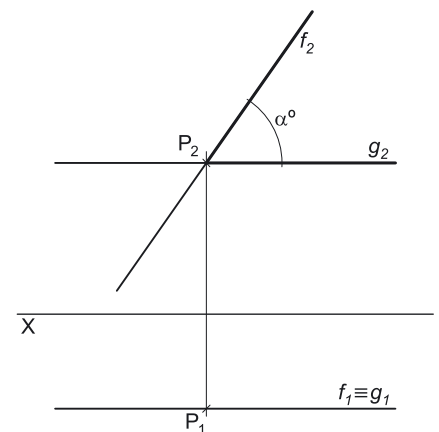
As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um plano frontal (de frente). É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas – o plano frontal (de frente) que as duas retas definem (e que não se identificou).

O plano que contém o ângulo (o plano frontal que contém as duas retas) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do ângulo está em verdadeira grandeza). O ângulo entre as duas retas é, assim, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as projeções frontais das duas retas ( $f_2$  e  $g_2$ ), com vértice em  $P_2$  (a projeção frontal do ponto de concorrência das duas retas).

Identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções das retas  $f$  e  $g$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). A linha restante representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de chamada.



## 433.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). O plano  $\delta$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

### Resolução:

E pedido o ângulo entre os traços frontais dos dois planos, que são duas retas frontais (de frente) com afastamento nulo –  $f_\alpha$  é uma reta frontal (de frente) com afastamento nulo do plano  $\alpha$  e  $f_\delta$  é uma reta frontal (de frente) com afastamento nulo do plano  $\delta$ . Trata-se, portanto, do ângulo entre duas retas frontais (de frente). Por outro lado, as duas retas estão, ambas, contidas no Plano Frontal de Projeção (porque têm, ambas, afastamento nulo), pelo que as duas retas ou são paralelas ou são concorrentes (porque são coplanares). Tendo em conta que as duas retas têm direções diferentes, as duas retas não são paralelas, pelo que são necessariamente concorrentes. Trata-se, portanto, de determinar o ângulo entre duas retas frontais (de frente) concorrentes. Nesse sentido, determinou-se o ponto de concorrência das duas retas – o ponto  $F$ .

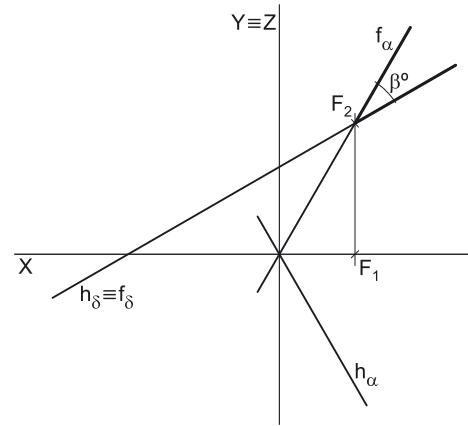
As duas retas são concorrentes, pelo que o ângulo entre as duas retas está contido no plano definido pelas duas retas – o Plano Frontal de Projeção, nesta situação.

O plano que contém o ângulo (o plano frontal que contém as duas retas) é o próprio Plano Frontal de Projeção, pelo que o ângulo está em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do ângulo está em verdadeira grandeza). O ângulo entre as duas retas é, assim, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as duas retas ( $f_\alpha$  e  $f_\delta$ ), com vértice em  $F_2$  (a projeção frontal do ponto de concorrência das duas retas).

Identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\beta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois trata-se ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 434.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $f$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

A reta  $f$  e o eixo  $X$  são duas retas não coplanares (são **enviesadas**), pelo que as duas retas não definem plano algum. Dessa forma, as duas retas não formam nenhum ângulo entre si, de forma direta. No entanto, o ângulo que as duas retas formam entre si (de forma indireta) é igual ao ângulo formado por quaisquer duas retas **concorrentes**, paralelas às retas dadas.

Assim, conduziu-se uma reta  $g$ , paralela ao eixo  $X$  (a reta  $g$  é uma reta fronto-horizontal) e concorrente com a reta  $f$  (no seu traço horizontal – o ponto  $F$ ).

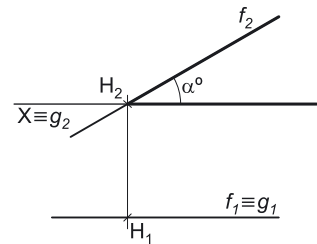
As retas  $f$  e  $g$  são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um plano frontal (de frente), que é, na prática, o plano frontal (de frente) que contém a reta  $f$  (plano esse que não se identificou). Assim, o ângulo entre as duas retas está contido nesse plano frontal (de frente). Neste caso, salienta-se que a reta  $g$  é, na prática, o traço horizontal desse plano frontal (de frente).

O plano que contém o ângulo (o plano frontal que contém as retas  $f$  e  $g$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do ângulo está em verdadeira grandeza). O ângulo entre as duas retas é, assim, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as projeções frontais das duas retas ( $f_2$  e  $g_2$ ), com vértice em  $H_2$  (a projeção frontal do ponto de concorrência das duas retas).

Identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). A linha restante representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de chamada.



435.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $h$  e  $h'$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

As duas retas são não coplanares (são **enviesadas**), pelo que não definem plano algum. Dessa forma, as duas retas não formam nenhum ângulo entre si, de forma direta. No entanto, o ângulo que as duas retas formam entre si (de forma indireta) é igual ao ângulo formado por quaisquer duas retas **concorrentes**, paralelas às retas dadas.

Assim, conduziu-se uma reta  $h''$ , paralela à reta  $h'$  e concorrente com a reta  $h$  (no ponto  $P$ ) – por uma questão de economia de traçados, optou-se por fazer a projeção horizontal da reta  $h''$  ( $h''_1$ ) coincidente com a projeção horizontal da reta  $h'$  ( $h'_1$ ). As retas  $h$  e  $h''$  são concorrentes no ponto  $P$ .

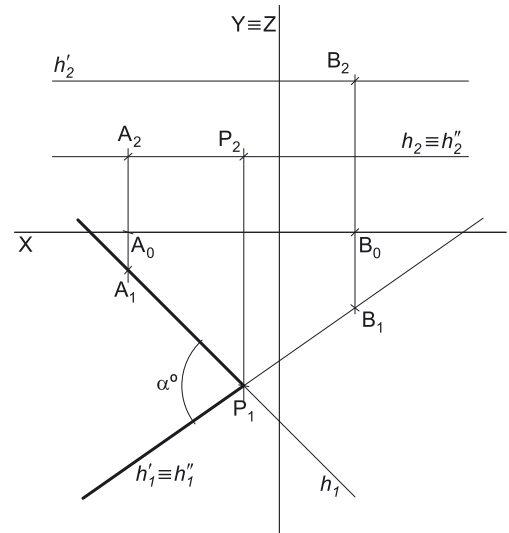
As retas  $h$  e  $h''$  são concorrentes, pelo que definem um plano – trata-se de um plano horizontal (de nível). O ângulo entre as duas retas está contido no plano definido pelas duas retas – o plano horizontal (de nível) que as duas retas definem (e que não se identificou).

O plano que contém o ângulo (o plano horizontal que contém as duas retas) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do ângulo está em verdadeira grandeza). O ângulo que as retas  $h$  e  $h'$  formam entre si (de forma indireta) é, assim, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as projeções horizontais das retas  $h$  e  $h''$  ( $h_1$  e  $h''_1$ ), com vértice em  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto de concorrência das duas retas).

Identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $h$  e  $h'$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta  $h''$ ).



436.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $r$  e  $s$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

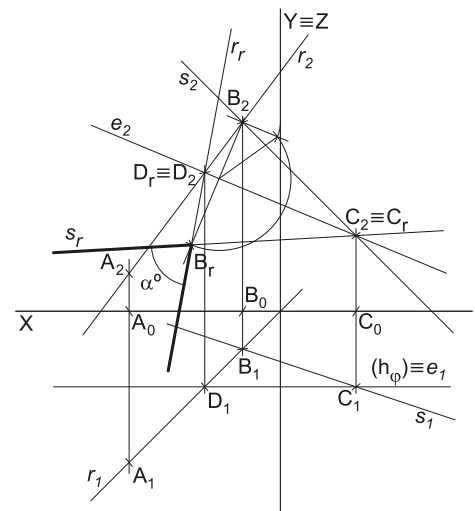
As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo**. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e é um ângulo que tem vértice no ponto  $B$  (o ponto de concorrência das duas retas).

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as duas retas) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para um plano frontal (de frente) qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano frontal (de frente)  $\varphi$ , qualquer, pelo seu traço horizontal (que se identificou entre parêntesis, pois o plano  $\varphi$  não tem traço frontal). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por conduzir o plano  $\varphi$  pelo ponto  $C$  – assim,  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) passa por  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que está definida por dois pontos – o ponto  $C$  e o ponto  $D$  (o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\varphi$ ). O ponto  $D$  foi determinado diretamente a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (trata-se da interseção de uma reta não projetante com um plano projetante horizontal). Note que, na prática, o ponto  $C$  é o ponto de interseção da reta  $s$  com o plano  $\varphi$ .

Os pontos  $C$  e  $D$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $C_r \equiv C_2$  e  $D_r \equiv D_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $B$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O rebatimento do ponto **B** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por **B**<sub>2</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediou-se a distância do ponto **B** ao plano  $\varphi$  (o afastamento de **B** em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **B** em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **B**, até à perpendicular à charneira que passa por **B**<sub>2</sub>, determinando **B**<sub>r</sub>.

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta **r**<sub>r</sub> (a reta **r** rebatida) passa por **D**<sub>r</sub> e **B**<sub>r</sub> (está definida por dois pontos). A reta **s**<sub>r</sub> (a reta **s** rebatida) passa por **C**<sub>r</sub> e **B**<sub>r</sub> (está igualmente definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo entre as retas **r** e **s** está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas **r**<sub>r</sub> e **s**<sub>r</sub>, com vértice em **B**<sub>r</sub>. Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas **r** e **s**) representaram-se igualmente a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $\varphi$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).

## 437.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas **r** e **s**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta **r** é uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo **X** (no ponto **A**, cujas projeções se identificaram imediatamente). A reta **m** tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). Assim, em função dos dados, as projeções horizontais das duas retas ficam coincidentes.

### Resolução:

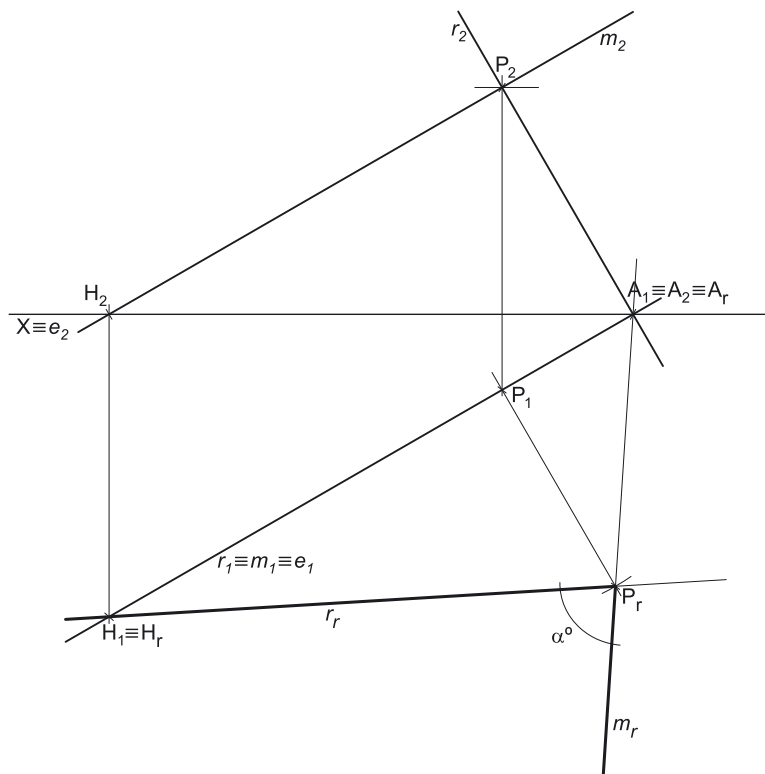
As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano vertical** (um plano projetante horizontal), pois as duas retas têm as suas projeções horizontais coincidentes. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e é um ângulo que tem vértice no ponto **P** (o ponto de concorrência das duas retas).

O plano que contém o ângulo (o plano vertical que contém as duas retas) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, determinou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que está definida por dois pontos – o ponto **A** (o ponto de concorrência da reta **r** com o eixo **X**) e o ponto **D** (o traço horizontal da reta **m**). Note que, neste caso, a reta **e** é, na prática, o traço horizontal do plano definido pelas duas retas. Por outro lado, tendo em conta que se trata de um plano projetante horizontal, a projeção horizontal da charneira (**e**<sub>1</sub>) está necessariamente coincidente com as projeções horizontais das retas **r** e **m** (**r**<sub>1</sub> e **m**<sub>1</sub>).

Os pontos **A** e **H** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente **A**<sub>r</sub>  $\equiv$  **A**<sub>1</sub> e **H**<sub>r</sub>  $\equiv$  **H**<sub>1</sub>. Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto **P**, que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto **P** processou-se de forma direta, a partir do raio do arco do seu rebatimento (que é a cota do ponto **P**). Nesse sentido, por **P**<sub>1</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) Sobre a perpendicular à charneira mediou-se a cota do ponto **P** (que é o raio do arco do seu rebatimento) e determinou-se **P**<sub>r</sub>.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $A_r$  e  $B_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $m_r$  (a reta  $m$  rebatida) passa por  $H_r$  e  $P_r$  (está igualmente definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo entre as retas  $r$  e  $m$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $r_r$  e  $m_r$ , com vértice em  $P_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $r$  e  $m$ ) representaram-se igualmente a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).

## 438.

#### Dados:

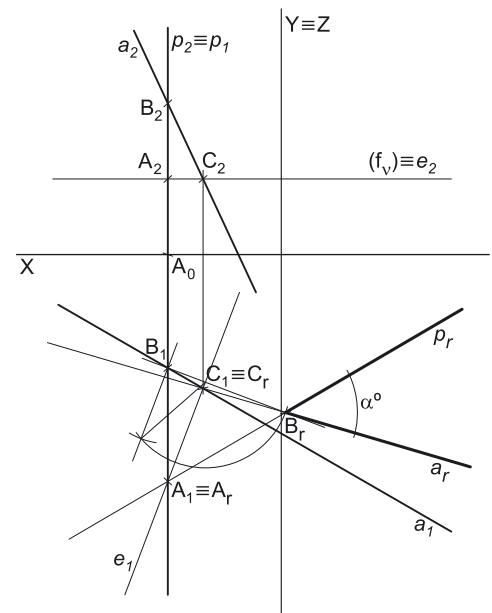
Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $a$  e  $p$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $A$  e  $B$ .

#### Resolução:

As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo**. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e que tem vértice no ponto  $B$  (o ponto de concorrência das duas retas).

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as retas  $a$  e  $p$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano horizontal (de nível)  $v$  que passa pelo ponto  $A$ . Nesse sentido, representou-se esse plano horizontal (de nível) pelo seu traço frontal ( $f_v$ ), que se identificou entre parêntesis, pois o plano  $v$  não tem traço horizontal. –  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ), pois o plano  $v$  é projetante frontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (que é imediatamente o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $v$ ) e o ponto  $C$  (o ponto de interseção da reta  $a$  com o plano  $v$ ). O ponto  $C$  foi determinado diretamente a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante e um plano projetante frontal).



Note que, por uma questão de economia de traçados, seria sempre conveniente que o plano horizontal (de nível) contivesse um dos pontos que define a reta  $p$ . No entanto, caso o plano  $v$  passasse pelo ponto  $B$  (o ponto de concorrência das retas  $p$  e  $a$ ), a determinação da reta  $e$  (a charneira do rebatimento) não seria direta, como acima se expôs.

Os pontos  $A$  e  $C$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$  e  $C_r \equiv C_1$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $B$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto  $B$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $B_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $B$  ao plano  $v$  (a cota de  $B$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $B$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $B$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ , determinando  $B_r$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $A_r$  e  $B_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $a_r$  (a reta  $a$  rebatida) passa por  $C_r$  e  $B_r$  (está igualmente definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas  $a$  e  $p$  formam entre si está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $a_r$  e  $p_r$ , com vértice em  $B_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $a$  e  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $v$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).



## 439.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $r$  e  $f$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $f$ , tendo 5 cm de afastamento e sendo concorrente com a reta  $r$ , é necessariamente concorrente com a reta  $r$  no ponto  $A$  (o ponto  $A$  é o ponto da reta  $r$  que tem 5 cm de afastamento).

### Resolução:

As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo**. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e que tem vértice no ponto  $A$  (o ponto de concorrência das duas retas).

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as retas  $r$  e  $f$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano frontal (de frente) que contém a reta  $f$ . Nesse sentido, identificou-se o plano frontal (de frente)  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal, que está coincidente com  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ), pois o plano  $\varphi$  é projetante horizontal. Note que o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ) se identificou entre parêntesis, pois o plano  $\varphi$  não tem traço frontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria reta  $f$  (a reta  $f$  é, na prática, a reta de interseção do plano  $\varphi$  com o plano definido pelas retas  $r$  e  $f$ ).

Note que a opção de conduzir o plano  $\varphi$  pela reta  $f$  teve a ver com economia de traçados. De facto, como acima se referiu, nesta situação a reta  $f$  é a própria charneira do rebatimento, pelo que não foi necessário determinar qualquer outra reta para além das já existentes no desenho.

A reta  $f$  (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si própria, pelo que se tem imediatamente  $f_r \equiv f_2$ . Por outro lado, também o ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto da reta  $r$  e a reta  $f$  em rebatimento. Falta-nos um ponto ou uma direção, para definirmos a reta  $r$  em rebatimento. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer da reta  $r$  (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e efetuou-se o seu rebatimento.

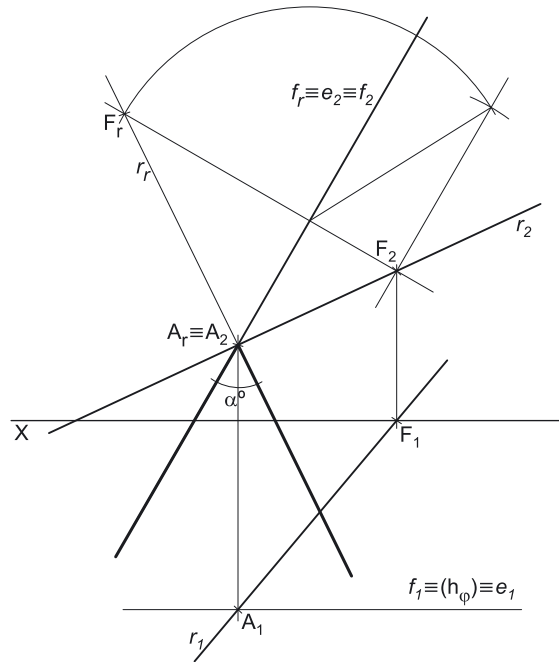
O rebatimento do ponto  $F$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $F_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $F$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $F$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $F$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $F$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $F_2$ , determinando  $F_r$ .

Em seguida, desenhou-se a reta  $r$  em rebatimento (a reta  $r_r$ ), que passa por  $A_r$  e  $F_r$  (a reta  $r_r$  está definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas  $r$  e  $f$  formam entre si está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $f_r$  e  $r_r$ , com vértice em  $A_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $r$  e  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $v$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).





## 441.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas **f** e **h**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto de concorrência das duas retas (o ponto **P**) tem 3 cm de afastamento (o afastamento da reta **f**) e 6 cm de cota (a cota da reta **h**).

### Resolução:

As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo**. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e que tem vértice no ponto **P** (o ponto de concorrência das duas retas).

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as retas **f** e **h**) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano horizontal (de nível) que contém a reta **h**. Nesse sentido, identificou-se o plano horizontal (de nível) **v**, pelo seu traço frontal, que está coincidente com **h<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **h**), pois o plano **v** é projetante frontal. Note que o traço frontal do plano **v** (**f<sub>v</sub>**) se identificou entre parêntesis, pois o plano **v** não tem traço horizontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria reta **h** (a reta **h** é, na prática, a reta de interseção do plano **v** com o plano definido pelas retas **f** e **h**).

Note que a opção de conduzir o plano **v** pela reta **h** teve a ver com economia de traçados. De facto, como acima se referiu, nesta situação a reta **h** é a própria charneira do rebatimento, pelo que não foi necessário determinar qualquer outra reta para além das já existentes no desenho.

A reta **h** (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si própria, pelo que se tem imediatamente **h<sub>r</sub> ≡ h<sub>1</sub>**. Por outro lado, também o ponto **P** é um ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **P<sub>r</sub> ≡ P<sub>1</sub>**. Já temos, em rebatimento, um ponto da reta **f** e a reta **h** em rebatimento. Falta-nos um ponto ou uma direção, para definirmos a reta **r** em rebatimento. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer da reta **f** (o ponto **H**, por exemplo, que é o traço horizontal da reta **f**) e efetuou-se o seu rebatimento.

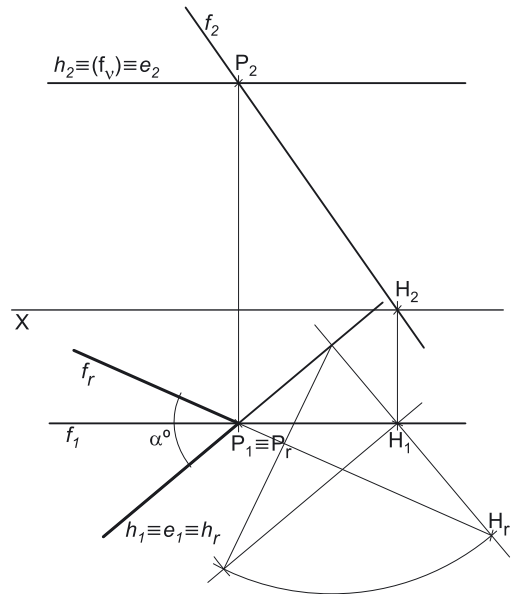
O rebatimento do ponto **H** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por **H<sub>1</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediou-se a distância do ponto **H** ao plano **v** (a cota de **H** em relação ao plano **v**) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **H** em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **H**, até à perpendicular à charneira que passa por **H<sub>1</sub>**, determinando **H<sub>r</sub>**.

Em seguida, desenhou-se a reta **f** em rebatimento (a reta **f<sub>r</sub>**), que passa por **H<sub>r</sub>** e **P<sub>r</sub>** (a reta **f<sub>r</sub>** está definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas **f** e **h** formam entre si está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas **f<sub>r</sub>** e **h<sub>r</sub>**, com vértice em **P<sub>r</sub>**. Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas **f** e **h**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano **v** e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).



## 442.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $r$  e  $p$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $Q$ .

**Resolução:**

As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo**. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e que tem vértice no ponto  $P$  (o ponto de concorrência das duas retas).

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as retas  $r$  e  $p$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que passa pelo ponto  $Q$ . Nesse sentido, representou-se esse plano frontal (de frente) pelo seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ), que se identificou entre parêntesis, pois o plano  $\varphi$  não tem traço frontal –  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) passa por  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ ), pois o plano  $\varphi$  é projetante horizontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que está definida por dois pontos – o ponto  $Q$  (que é imediatamente o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\varphi$ ) e o ponto  $R$  (o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\varphi$ ). O ponto  $R$  foi determinado diretamente a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante e um plano projetante horizontal).

Note que, por uma questão de economia de traçados, seria sempre conveniente que o plano frontal (de frente) contivesse um dos pontos que define a reta  $p$ . No entanto, caso o plano  $\varphi$  passasse pelo ponto  $P$  (o ponto de concorrência das retas  $p$  e  $r$ ), a determinação da reta  $e$  (a charneira do rebatimento) não seria direta, como acima se expôs.

Os pontos  $Q$  e  $R$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $Q_r \equiv Q_2$  e  $R_r \equiv R_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $P$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

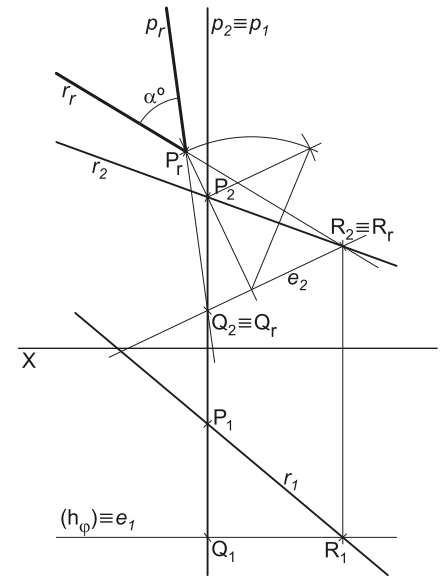
O rebatimento do ponto  $P$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $P$  ao plano  $\varphi$  (o **afastamento** de  $P$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $P_2$ , determinando  $P_r$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $Q_r$  e  $P_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $R_r$  e  $P_r$  (está igualmente definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas  $r$  e  $p$  formam entre si está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $r_r$  e  $p_r$ , com vértice em  $P_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções das retas  $r$  e  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $\varphi$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).



## 443.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $r$  e  $g$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo** (ou mais especificamente, um **plano de rampa**). É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e que tem vértice no ponto  $P$  (o ponto de concorrência das duas retas).

O plano que contém o ângulo (o plano de rampa que contém as retas  $r$  e  $g$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano frontal (de frente) que contém a reta  $g$ . Nesse sentido, identificou-se o plano frontal (de frente)  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal, que está coincidente com  $g_1$  (a projeção horizontal da reta  $g$ ), pois o plano  $\varphi$  é projetante horizontal. Note que o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ) se identificou entre parêntesis, pois o plano  $\varphi$  não tem traço frontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria reta  $g$  (a reta  $g$  é, na prática, a reta de interseção do plano  $\varphi$  com o plano definido pelas retas  $r$  e  $g$ ).

Note que a opção de conduzir o plano  $\varphi$  pela reta  $g$  teve a ver com economia de traçados. De facto, como acima se referiu, nesta situação, a reta  $g$  é a própria charneira do rebatimento, pelo que não foi necessário determinar qualquer outra reta para além das já existentes no desenho.

A reta  $g$  (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si própria, pelo que se tem imediatamente  $g_r \equiv g_2$ . Por outro lado, o ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto da reta  $r$  e a reta  $g$  em rebatimento. Falta-nos um ponto ou uma direção, para definirmos a reta  $r$  em rebatimento. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer da reta  $r$  (o ponto  $M$ ) e efetuou-se o seu rebatimento.

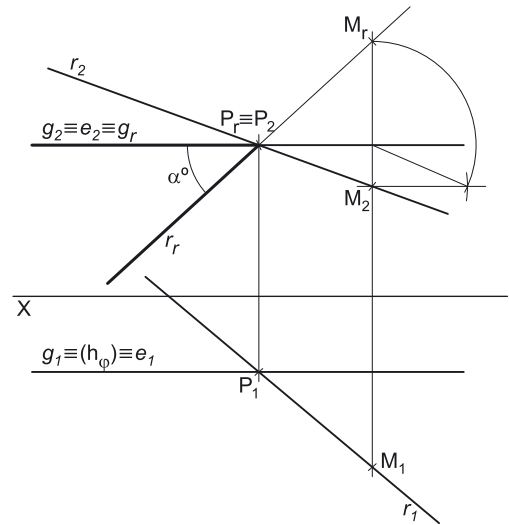
O rebatimento do ponto  $M$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $M_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $M$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $M$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $M$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $M$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $M_2$ , determinando  $M_r$ .

Em seguida, desenhou-se a reta  $r$  em rebatimento (a reta  $r_r$ ), que passa por  $P_r$  e  $M_r$  (a reta  $r_r$  está definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas  $r$  e  $g$  formam entre si está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $r_r$  e  $g_r$ , com vértice em  $P_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $r$  e  $g$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $\varphi$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).



## 444.

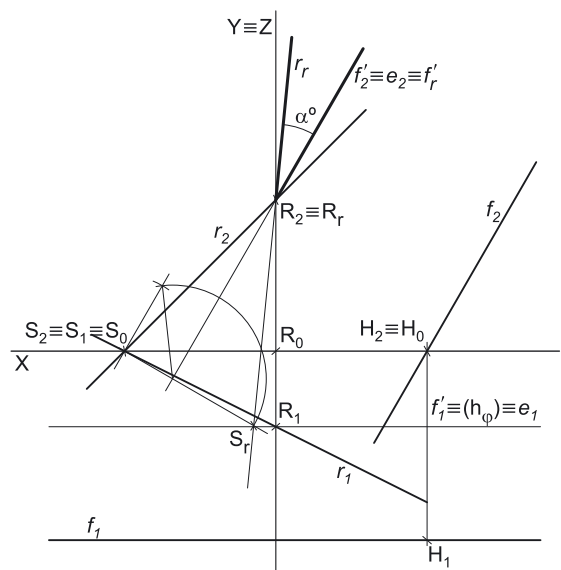
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $r$  e  $f$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  e um a reta passante, que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto (o ponto  $S$ , cujas projeções se identificaram imediatamente).

### Resolução:

As duas retas são não coplanares (são **enviesadas**), pelo que não definem plano algum. Dessa forma, as duas retas não formam nenhum ângulo entre si, de forma direta. No entanto, o ângulo que as duas retas formam entre si (de forma indireta) é igual ao ângulo formado por quaisquer duas retas **concorrentes**, paralelas às retas dadas.

Assim, conduziu-se, pelo ponto  $R$ , da reta  $r$ , uma reta  $f'$ , paralela à reta  $f$  – as retas  $r$  e  $f'$  são concorrentes no ponto  $R$ . As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo**. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e que tem vértice no ponto  $R$  (o ponto de concorrência das duas retas).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as retas  $r$  e  $f'$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano frontal (de frente) que contém a reta  $f'$ . Nesse sentido, identificou-se o plano frontal (de frente)  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal, que está coincidente com  $f'_1$  (a projeção horizontal da reta  $f'$ ), pois o plano  $\varphi$  é projetante horizontal. Note que o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ) se identificou entre parêntesis, pois o plano  $\varphi$  não tem traço frontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria reta  $f'$  (a reta  $f'$  é, na prática, a reta de interseção do plano  $\varphi$  com o plano definido pelas retas  $r$  e  $f'$ ).

Note que a opção de conduzir o plano  $\varphi$  pela reta  $f'$  teve a ver com economia de traçados. De facto, como acima se referiu, nesta situação, a reta  $f'$  é a própria charneira do rebatimento, pelo que não foi necessário determinar qualquer outra reta para além das já existentes no desenho.

A reta  $f'$  (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si própria, pelo que se tem imediatamente  $f'_r \equiv f'_2$ . Por outro lado, também o ponto  $R$  é um ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $R_r \equiv R_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto da reta  $r$  e a reta  $f'$  em rebatimento. Falta-nos um ponto ou uma direção, para definirmos a reta  $r$  em rebatimento. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer da reta  $r$  (o ponto  $S$ , por exemplo) e efetuou-se o seu rebatimento.

O rebatimento do ponto  $S$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $S_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $S$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $S$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $S$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $S$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $S_2$ , determinando  $S_r$ .

Em seguida, desenhou-se a reta  $r$  em rebatimento (a reta  $r_r$ ), que passa por  $R_r$  e  $S_r$  (a reta  $r_r$  está definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas  $r$  e  $f$  formam entre si está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $r_r$  e  $f'_r$ , com vértice em  $R_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $r$  e  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta  $f'$ , do plano  $\varphi$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).

## 445.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $h$  e  $p$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (é dado o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção).

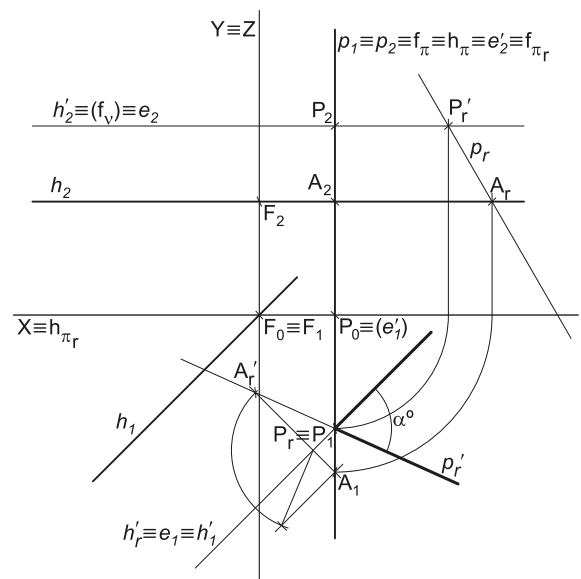
#### Resolução:

As duas retas são não complanares (são **enviesadas**), pelo que não definem plano algum. Dessa forma, as duas retas não formam nenhum ângulo entre si, de forma direta. No entanto, o ângulo que as duas retas formam entre si (de forma indireta) é igual ao ângulo formado por quaisquer duas retas **concorrentes**, paralelas às retas dadas.

Assim, conduziu-se, pelo ponto  $P$ , da reta  $p$ , uma reta  $h'$ , paralela à reta  $h$  – as retas  $p$  e  $h'$  são concorrentes no ponto  $P$ . As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo**. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e que tem vértice no ponto  $P$  (o ponto de concorrência das duas retas).

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as retas  $p$  e  $h'$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano horizontal (de nível) que contém a reta  $h'$ . Nesse sentido, identificou-se o plano horizontal (de nível)  $v$ , pelo seu traço frontal, que está coincidente com  $h'_2$  (a projeção frontal da reta  $h'$ ), pois o plano  $v$  é projetante frontal. Note que o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ) se identificou entre parêntesis, pois o plano  $v$  não tem traço horizontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria reta  $h'$  (a reta  $h'$  é, na prática, a reta de interseção do plano  $v$  com o plano definido pelas retas  $p$  e  $h'$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Note que a opção de conduzir o plano  $v$  pela reta  $h'$  teve a ver com economia de traçados. De facto, como acima se referiu, nesta situação a reta  $h'$  é a própria charneira do rebatimento, pelo que não foi necessário determinar qualquer outra reta para além das já existentes no desenho.

A reta  $h'$  (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si própria, pelo que se tem imediatamente  $h'_r \equiv h'_1$ . Por outro lado, também o ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_1$ . Já temos, em rebatimento, um ponto da reta  $p$  e a reta  $h'$  em rebatimento. Falta-nos um ponto ou uma direção, para definirmos a reta  $p$  em rebatimento.

No entanto, não temos mais nenhum ponto da reta  $p$  nem sequer é possível determinar qualquer ponto da reta  $p$  de forma direta, pois as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Dessa forma, é necessário recorrer a um processo geométrico auxiliar, para se determinar um outro ponto da reta  $p$ . Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil. Nesse sentido, conduziu-se, pela reta  $p$  um plano de perfil (o plano  $\pi$ ), cujos traços se identificaram imediatamente. Optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ) foi o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ), o que se assinalou imediatamente.

Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se o ponto  $P$ , o que nos permitiu determinar  $P_r'$ . Note que o ponto  $P_r'$  é o ponto  $P$  no seu segundo rebatimento –  $P_r'$  é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano de perfil (o plano  $\pi$ ).

Já temos um ponto para definir a reta  $p_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, é-nos dada, no enunciado, a direção da reta  $p$  – o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção. Esse ângulo corresponde, na prática, ao ângulo que a reta  $p$  faz com  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). Assim, o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção é o ângulo que a reta  $p$  faz com  $h_\pi$ , ângulo esse que está em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano  $\pi$  – é o ângulo que a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) faz com  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  rebatido).

Assim, por  $P_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , fazendo, com  $h_{\pi_r}$ , um ângulo de  $60^\circ$ . Note que, das duas hipóteses para medir o ângulo de  $60^\circ$  com  $h_{\pi_r}$ , a que a resolução apresenta é aquela que nos garante que o traço horizontal da reta  $p$  (que não se determinou mas que, em rebatimento, é o ponto de interseção de  $p_r$  com  $h_{\pi_r}$ ) tem afastamento superior a  $P$  (e, por isso, se situa no **SPHA**). A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) está, assim, definida por um ponto (o ponto  $P_r$ ) e por uma direção (a direção dada no enunciado). Em seguida, determinou-se, em rebatimento, um ponto  $A$ , qualquer, pertencente à reta. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se determinar o ponto da reta  $p_r$  que tem a cota da reta  $h$  – o ponto  $A_r$ . Invertendo-se o rebatimento, determinaram-se as projeções do ponto  $A$ , sobre as projeções homónimas da reta  $p$ .

Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p$  em rebatimento (no rebatimento do plano oblíquo definido pela reta  $p$  e pela reta  $h'$ ) – o ponto  $A$ . Assim, efetuou-se o rebatimento do ponto  $A$ , o que se processou com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $A_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $A$  ao plano  $v$  (a cota de  $A$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , determinando  $A_r'$ . Note que o ponto  $A_r'$  é o ponto  $A$  no seu segundo rebatimento –  $A_r'$  é o ponto  $A$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $h'$ .

Por fim, desenhou-se a reta  $p_r'$  (a reta  $p$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $A_r'$  e  $P_r$ . Note que a reta  $p_r'$  é a reta  $p$  no seu segundo rebatimento –  $p_r'$  é a reta  $p$  rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $h'$ .

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas  $p$  e  $h$  formam entre si (de forma indireta) está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $p_r'$  e  $h'_r$ , com vértice em  $P_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

## Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $p$  e  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $\pi$ , de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , do plano  $v$  e, ainda, de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).

## 446.

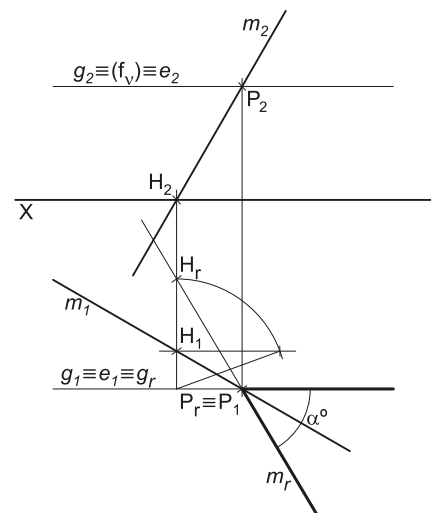
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $m$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

É pedido o ângulo formado entre a reta  $m$  e o eixo  $X$ , que são duas retas não complanares (são **enviesadas**), pelo que não definem plano algum. Dessa forma, as duas retas (a reta  $m$  e o eixo  $X$ ) não formam nenhum ângulo entre si, de forma direta. No entanto, o ângulo que as duas retas formam entre si (de forma indireta) é igual ao ângulo formado por quaisquer duas retas **concorrentes**, paralelas às retas dadas.

Assim, conduziu-se, pelo ponto  $P$ , da reta  $m$ , uma reta  $g$ , paralela ao eixo  $X$  – as retas  $m$  e  $g$  são concorrentes no ponto  $P$ . As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo** (ou mais especificamente, um **plano de rampa**). É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e que tem vértice no ponto  $P$  (o ponto de concorrência das duas retas).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano que contém o ângulo (o plano de rampa que contém as retas  $m$  e  $g$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano horizontal (de nível) que contém a reta  $g$ . Nesse sentido, identificou-se o plano horizontal (de nível)  $v$ , pelo seu traço frontal, que está coincidente com  $g_2$  (a projeção frontal da reta  $g$ ), pois o plano  $v$  é projetante frontal. Note que o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ) se identificou entre parêntesis, pois o plano  $v$  não tem traço horizontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é a própria reta  $g$  (a reta  $g$  é, na prática, a reta de interseção do plano  $v$  com o plano definido pelas retas  $m$  e  $g$ ).

Note que a opção de conduzir o plano  $v$  pela reta  $g$  teve a ver com economia de traçados. De facto, como acima se referiu, nesta situação, a reta  $g$  é a própria charneira do rebatimento, pelo que não foi necessário determinar qualquer outra reta para além das já existentes no desenho.

A reta  $g$  (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si própria, pelo que se tem imediatamente  $g_r \equiv g_f$ . Por outro lado, também o ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_f$ . Já temos, em rebatimento, um ponto da reta  $m$  e a reta  $g$  em rebatimento. Falta-nos um ponto ou uma direção, para definirmos a reta  $m$  em rebatimento. Para tal determinou-se um ponto qualquer da reta  $m$  (o ponto  $H$ , o seu traço horizontal) e efetuou-se o seu rebatimento.

O rebatimento do ponto  $H$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $H_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $H$  ao plano  $v$  (a cota de  $H$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $H$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $H$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $H_1$ , determinando  $H_r$ .

Em seguida, desenhou-se a reta  $m$  em rebatimento (a reta  $m_r$ ), que passa por  $P_r$  e  $H_r$  (a reta  $m_r$  está definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo que a reta  $m$  e o eixo  $X$  formam entre si (de forma indireta) está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $m_r$  e  $g_r$ , com vértice em  $P_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $m$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício e também integra os dados). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $v$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).

## 447.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). O plano  $\delta$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

#### Resolução:

É pedido o ângulo entre o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) e o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), que são duas retas não coplanares (são **enviesadas**), pelo que não definem plano algum. Dessa forma, as duas retas ( $f_\alpha$  e  $h_\delta$ ) não formam nenhum ângulo entre si, de forma direta. No entanto, o ângulo que as duas retas formam entre si (de forma indireta) é igual ao ângulo formado por quaisquer duas retas **concorrentes**, paralelas às retas dadas.

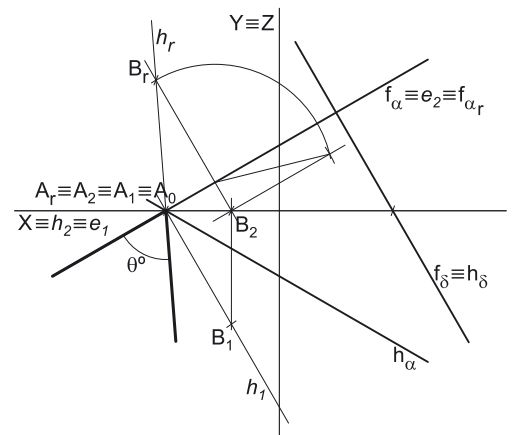
Assim, conduziu-se, pelo ponto  $A$  (o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\alpha$ ), uma reta  $h$ , paralela a  $h_\delta$  o traço horizontal do plano  $\delta$  – as retas  $f_\alpha$  e  $h$  são concorrentes no ponto  $A$ . As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo** (que **não é** nem o plano  $\alpha$  nem o plano  $\delta$ ). É pedido o ângulo entre as duas retas (as retas  $f_\alpha$  e  $h$ ), ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e que tem vértice no ponto  $A$  (o ponto de concorrência das duas retas).

Salienta-se que  $f_\alpha$  é uma reta frontal (de frente) do plano que contém o ângulo (uma reta frontal do plano com afastamento nulo), enquanto a reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) desse mesmo plano (uma reta horizontal do plano com cota nula).

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as retas  $f_\alpha$  e  $h$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o Plano Frontal de Projeção (que é o plano frontal que contém a reta  $f_\alpha$ ). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é a própria reta  $f_\alpha$  (a reta  $f_\alpha$  é, na prática, o traço frontal do plano definido pelas retas  $f_\alpha$  e  $h$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A reta  $f_\alpha$  (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si própria, pelo que se tem imediatamente  $f_{\alpha_r} \equiv f_\alpha$ . Por outro lado, também o ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto da reta  $h$  e a reta  $f_\alpha$  em rebatimento. Falta-nos um ponto ou uma direção, para definirmos a reta  $h$  em rebatimento. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer da reta  $h$  (o ponto  $B$ , que é necessariamente um ponto com cota nula) e efetuou-se o seu rebatimento.

O rebatimento do ponto  $B$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $B_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se o afastamento do ponto  $B$  e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $B$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $B$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $B_2$ , determinando  $B_r$ .

Em seguida, desenhou-se a reta  $h$  em rebatimento (a reta  $h_r$ ), que passa por  $A_r$  e  $B_r$  (a reta  $h_r$  está definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas  $f_\alpha$  e  $h_r$  formam entre si (de forma indireta) está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $h_r$  e  $f_{\alpha_r}$ , com vértice em  $A_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta  $h$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).

## 448.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (é dado o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção).

Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar  $f_1$ , a projeção horizontal da reta  $f$ . No entanto, sendo conhecida a direção da reta  $f$  (é dada no enunciado), não é possível desenhar a projeção frontal da reta  $f$  ( $f_2$ ), porque nos falta um ponto para definir a reta  $f$ . É dado que as duas retas são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $P$ .

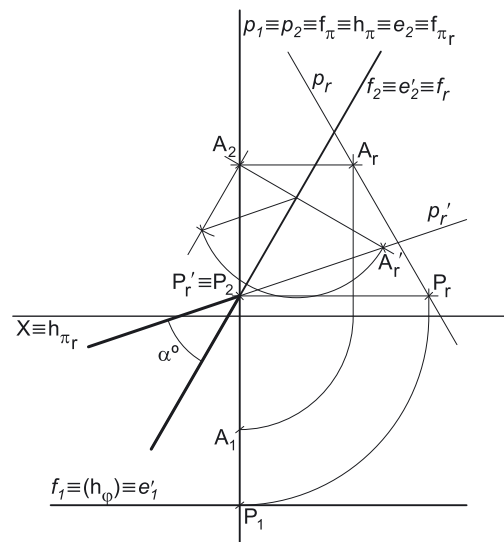
Foi possível, de forma direta, determinar a projeção horizontal do ponto  $P$  ( $P_1$ ), que é o ponto de concorrência das projeções horizontais das duas retas ( $f_1$  e  $p_1$ ). No entanto, não é possível determinar a projeção frontal do ponto  $P$  ( $P_2$ ), de forma direta, porque as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de Reversibilidade** (não é possível, de forma direta, determinar as projeções de quaisquer pontos pertencentes a uma reta de perfil, para além os pontos dados).

Dessa forma, é necessário recorrer a um processo geométrico auxiliar, para se determinar a projeção frontal do ponto  $P$ . Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil. Nesse sentido, conduziu-se, pela reta  $p$  um plano de perfil (o plano  $\pi$ ), cujos traços se identificaram imediatamente. Optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ) foi o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ), o que se assinalou imediatamente.

Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se o ponto  $A$ , o que nos permitiu determinar  $A_r$ . Já temos um ponto para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. É-nos dada, no enunciado, a direção da reta  $p$  – o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Frontal de Projeção. Esse ângulo corresponde, na prática, ao ângulo que a reta  $p$  faz com  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ). Assim, o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Frontal de Projeção é o ângulo que a reta  $p$  faz com  $f_\pi$ , ângulo esse que está em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano  $\pi$  – é o ângulo que a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) faz com  $f_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  rebatido).

Assim, por  $A_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , fazendo, com  $f_{\pi_r}$ , um ângulo de  $30^\circ$ . Note que, das duas hipóteses para medir o ângulo de  $30^\circ$  com  $f_{\pi_r}$ , a que a resolução apresenta é aquela que nos garante que o traço frontal da reta  $p$  (que não se determinou mas que, em rebatimento, é o ponto de interseção de  $p_r$  com  $f_{\pi_r}$ ) tem cota positiva (e, por isso, se situa no **SPFS**). A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) está, assim, definida por um ponto (o ponto  $A_r$ ) e por uma direção (a direção dada no enunciado). Em seguida, transportou-se, para o rebatimento, a projeção horizontal do ponto  $P$  ( $P_1$ ), o que nos permitiu determinar o ponto  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido), sobre a reta  $p_r$ . Invertendo-se o rebatimento, determinou-se a projeção frontal do ponto  $P$  ( $P_2$ ), sobre a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ).

Finalmente, já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $f$ , o que nos permitiu desenhar a projeção frontal da reta  $f$  ( $f_2$ ) – a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção dada no enunciado).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Resolução:

As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo**. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e que tem vértice no ponto **P** (o ponto de concorrência das duas retas).

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as retas **f** e **p**) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano frontal (de frente) que contém a reta **f**. Nesse sentido, identificou-se o plano frontal (de frente)  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal, que está coincidente com **f<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **f**), pois o plano  $\varphi$  é projetante horizontal. Note que o traço horizontal do plano  $\varphi$  (**h<sub>φ</sub>**) se identificou entre parêntesis, pois o plano  $\varphi$  não tem traço frontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a própria reta **f** (a reta **f** é, na prática, a reta de interseção do plano  $\varphi$  com o plano definido pelas retas **f** e **p**).

Note que a opção de conduzir o plano  $\varphi$  pela reta **f** teve a ver com economia de traçados. De facto, como acima se referiu, nesta situação a reta **f** é a própria charneira do rebatimento, pelo que não foi necessário determinar qualquer outra reta para além das já existentes no desenho.

A reta **f** (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si própria, pelo que se tem imediatamente **f<sub>r</sub> ≡ f<sub>2</sub>**. Por outro lado, também o ponto **P** é um ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **P<sub>r</sub>' ≡ P<sub>2</sub>**. Note que o ponto **P<sub>r</sub>'** é o ponto **P** no seu segundo rebatimento – **P<sub>r</sub>'** é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas **p** e **f**. Já temos, em rebatimento, um ponto da reta **p** e a reta **f** em rebatimento. Falta-nos um ponto ou uma direcção, para definirmos a reta **p** em rebatimento.

Já temos um outro ponto da reta **p**, que nos permite definir a reta **p** em rebatimento (no rebatimento do plano oblíquo definido pela reta **p** e pela reta **f**) – o ponto **A**. Assim, efectuou-se o rebatimento do ponto **A**, o que se processou com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por **A<sub>2</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto **A** ao plano  $\varphi$  (o afastamento de **A** em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A**, até à perpendicular à charneira que passa por **A<sub>2</sub>**, determinando **A<sub>r</sub>'**. Note que o ponto **A<sub>r</sub>'** é o ponto **A** no seu segundo rebatimento – **A<sub>r</sub>'** é o ponto **A** rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas **p** e **f**.

Por fim, desenhou-se a reta **p<sub>r</sub>'** (a reta **p** rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos **A<sub>r</sub>'** e **P<sub>r</sub>'**. Note que a reta **p<sub>r</sub>'** é a reta **p** no seu segundo rebatimento – **p<sub>r</sub>'** é a reta **p** rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas **p** e **f**.

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas **p** e **f** formam entre si está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas **p<sub>r</sub>'** e **f<sub>r</sub>**, com vértice em **P<sub>r</sub>'**. Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas **p** e **f**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $\pi$ , de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , do plano  $\varphi$  e, ainda, de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).

## 449.

Por **ângulo entre uma reta e um plano** entende-se qualquer dos dois menores ângulos formados entre a reta dada e a sua projeção ortogonal sobre o plano dado, ou seja, o ângulo formado entre a reta dada e a reta de interseção do plano dado com o plano que contém o ângulo (que é o plano ortogonal ao plano dado e que contém a reta dada).

## 450.

O **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano** consiste na execução sequencial das seguintes etapas: **1.** conduzir, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determinar a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

## 451.

- a) Sobre o ângulo entre a reta **r** e o plano  $\alpha$ , sabe-se que o ângulo está contido no plano que contém a reta **r** e é ortogonal ao plano  $\alpha$  e é o ângulo entre a reta **r** e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, se o plano que contém o ângulo for paralelo a um dos planos de projeção, o ângulo projeta-se em verdadeira grandeza nesse plano de projeção. Se o plano que contém o ângulo não for paralelo a qualquer dos planos de projeção, o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (apresenta deformação em ambas as projeções), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.
- b) O plano que contém o ângulo está definido por duas retas concorrentes – a reta **r** (a reta dada) e uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  (uma reta **p**) e concorrente com a reta **r**. Note que a reta **p**, ortogonal ao plano  $\alpha$ , é a reta que nos garante a ortogonalidade do plano que contém o ângulo ao plano  $\alpha$  (para que se verifique o **Critério de ortogonalidade entre planos**).

## 452.

O **ângulo entre uma reta e um plano** é o ângulo formado entre a reta dada e a reta de interseção do plano dado com o plano que contém o ângulo (o plano ortogonal ao plano dado e que contém a reta dada). Assim, na prática, toda e qualquer situação de **ângulo entre uma reta e um plano** reduz, afinal, numa qualquer situação do **ângulo entre duas retas concorrentes** – a reta dada e a reta de interseção entre o plano dado e o plano que contém o ângulo (que é o plano ortogonal ao plano dado e que contém a reta dada).

## 453.

### Dados:

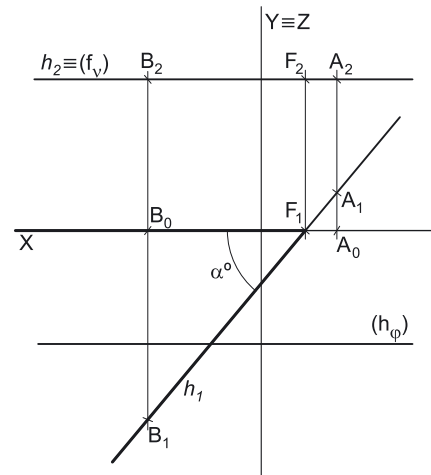
Em primeiro lugar, representou-se a reta  $h$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

O ângulo que uma reta faz com um dado plano é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que essa reta faz com qualquer plano paralelo ao plano dado. Assim, sendo pedido o ângulo que a reta  $h$  faz com o plano  $\varphi$ , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $h$  faz com o Plano Frontal de Projeção (que é paralelo ao plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que a reta  $h$  faz com o Plano Frontal de Projeção e não o ângulo que a reta  $h$  faz com o plano  $\varphi$ .

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos.

Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $h$  e o Plano Frontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.



**Etapa 1.** Pela reta  $h$  conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção – o plano  $v$ , que é um plano horizontal (de nível). Um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção é um plano projetante frontal. O plano  $v$  é, assim, o plano projetante frontal da reta  $h$ . O plano  $v$  foi representado pelo seu traço frontal ( $f_v$ ), que está coincidente com  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ).

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $v$  e o Plano Frontal de Projeção) é o próprio traço frontal do plano  $v$ , que já foi determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $h$  e  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas, que é o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $h$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $h$ ).

O ângulo entre a reta  $h$  e  $f_v$  está contido no plano  $v$ , que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do ângulo não apresenta deformação). Tendo em conta que a projeção horizontal de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) se situa no eixo  $X$ , o ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta  $h$  e o plano  $\varphi$ ) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre o eixo  $X$  e a projeção horizontal da reta  $h$  ( $h_1$ ), com vértice em  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ).

Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $h$  e o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.

## 454.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $f$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $v$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:**

O ângulo que uma reta faz com um dado plano é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que essa reta faz com qualquer plano paralelo ao plano dado. Assim, sendo pedido o ângulo que a reta  $f$  faz com o plano  $v$ , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $f$  faz com o Plano Horizontal de Projeção (que é paralelo ao plano  $v$ ). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que a reta  $f$  faz com o Plano Horizontal de Projeção e não o ângulo que a reta  $f$  faz com o plano  $v$ .

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos.

Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $f$  e o Plano Horizontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapá 1.** Pela reta  $f$  conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção – o plano  $\varphi$ , que é um plano frontal (de frente). Um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção é um plano projetante horizontal. O plano  $\varphi$  é, assim, o plano projetante horizontal da reta  $f$ . O plano  $\varphi$  foi representado pelo seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ), que está coincidente com  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ).

**Etapá 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\varphi$  e o Plano Horizontal de Projeção) é o próprio traço horizontal do plano  $\varphi$ , que já foi determinado na etapa anterior.

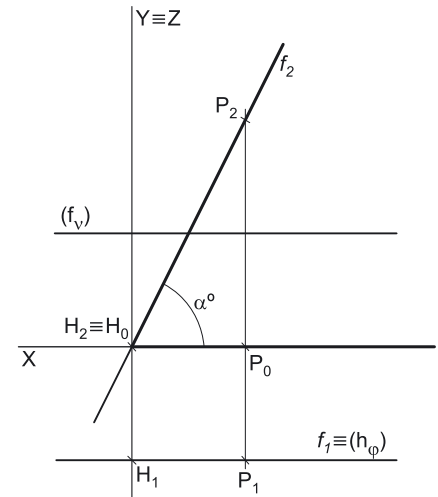
**Etapá 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $f$  e  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas, que é o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $f$ ).

O ângulo entre a reta  $f$  e  $h_\varphi$  está contido no plano  $\varphi$ , que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do ângulo não apresenta deformação). Tendo em conta que a projeção frontal de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) se situa no eixo  $X$ , o ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta  $f$  e o plano  $v$ ) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre o eixo  $X$  e a projeção frontal da reta  $f$  ( $f_2$ ), com vértice em  $H_2$  (a projeção frontal do ponto  $H$ ).

Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta  $f$  e o traço frontal do plano  $v$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.



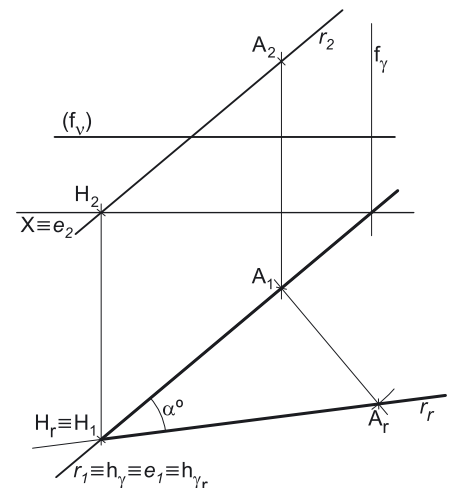
## 455.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $v$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

**Resolução:**

O ângulo que uma reta faz com um dado plano é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que essa reta faz com qualquer plano paralelo ao plano dado. Assim, sendo pedido o ângulo que a reta  $r$  faz com o plano  $v$ , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $r$  faz com o Plano Horizontal de Projeção (que é paralelo ao plano  $v$ ). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que a reta  $r$  faz com o Plano Horizontal de Projeção e não o ângulo que a reta  $r$  faz com o plano  $v$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $r$  e o Plano Horizontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção – o plano  $\gamma$ . Um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção é um plano projetante horizontal. O plano  $\gamma$  é, assim, o plano projetante horizontal da reta  $r$ , (é um plano vertical), pelo que o seu traço horizontal ( $h_\gamma$ ) está coincidente com a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ).

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\gamma$  e o Plano Horizontal de Projeção) é o próprio traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), que já foi determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $r$  e  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas, que é o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $r$ ).

O ângulo entre a reta  $r$  e  $h_\gamma$  está contido no plano  $\gamma$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Horizontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem imediatamente  $h_\gamma \equiv e_1 \equiv h_{\gamma r}$ .

O ponto  $H$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_r \equiv H_1$ . Já temos um ponto para rebater a reta  $r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao rebatimento do ponto  $A$ . Por  $A_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e sobre essa perpendicular, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), mediu-se a cota do ponto  $A$  (que é o raio do arco do rebatimento) e determinou-se  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido). A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $H_r$  e  $A_r$ .

O ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $v$ ) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre  $h_{\gamma r}$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$  rebatido) e a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), com vértice em  $H_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$  e o traço frontal do plano  $v$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\gamma$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\gamma$ ).

## 456.

### Dados:

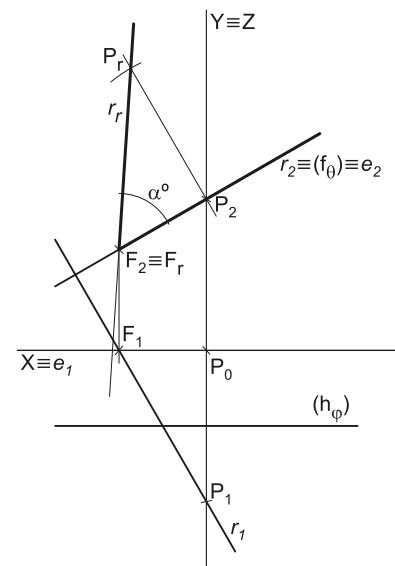
Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. O ponto  $P$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

### Resolução:

O ângulo que uma reta faz com um dado plano é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que essa reta faz com qualquer plano paralelo ao plano dado. Assim, sendo pedido o ângulo que a reta  $r$  faz com o plano  $\varphi$ , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $r$  faz com o Plano Frontal de Projeção (que é paralelo ao plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que a reta  $r$  faz com o Plano Frontal de Projeção e não o ângulo que a reta  $r$  faz com o plano  $\varphi$ .

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $r$  e o Plano Frontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção – o plano  $\theta$ . Um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção é um plano projetante frontal. O plano  $\theta$  é, assim, o plano projetante frontal da reta  $r$  (é um plano de topo), pelo que o seu traço frontal ( $f_\theta$ ) está coincidente com a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ). Note que o plano  $\theta$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal ( $f_\theta$ ), facto pelo qual este se identificou entre parêntesis.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\theta$  e o Plano Frontal de Projeção) é o próprio traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que já foi determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $r$  e  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas, que é o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $r$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $r$ ).

O ângulo entre a reta  $r$  e  $f_\theta$  está contido no plano  $\theta$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem imediatamente  $f_\theta \equiv e_2 \equiv f_{\theta_r}$ .

O ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_r \equiv F_2$ . Já temos um ponto para rebater a reta  $r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao rebatimento do ponto  $P$ , que é o ponto da reta  $r$  que foi dado no enunciado. Por  $P_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e sobre essa perpendicular, a partir de  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), mediu-se o afastamento do ponto  $P$  (que é o raio do arco do rebatimento) e determinou-se  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido). A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $F_r$  e  $P_r$ .

O ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\varphi$ ) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre  $f_{\theta_r}$  (o traço frontal do plano  $\gamma$  rebatido) e a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), com vértice em  $F_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$  e o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\theta$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\theta$ ).

## 457.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $s$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $s$  é uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto – o ponto  $R$  (cuja projeções se determinaram imediatamente).

#### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $s$  e o Plano Frontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber:

1. conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado;
2. determina-se a reta de interseção entre os dois planos;
3. o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

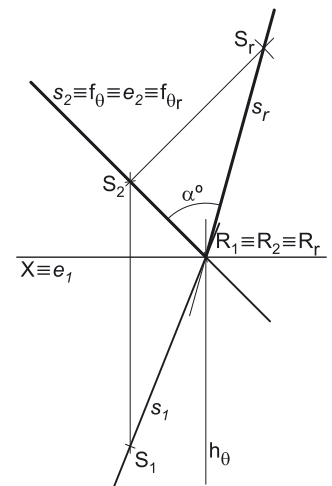
**Etapa 1.** Pela reta  $s$  conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção – o plano  $\theta$ . Um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção é um plano projetante frontal. O plano  $\theta$  é, assim, o plano projetante frontal da reta  $s$  (é um plano de topo), pelo que o seu traço frontal ( $f_\theta$ ) está coincidente com a projeção frontal da reta  $s$  ( $s_2$ ).

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\theta$  e o Plano Frontal de Projeção) é o próprio traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que já foi determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $s$  e  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas, que é o ponto  $R$  (o ponto de concorrência da reta  $s$  com o eixo  $X$ ).

O ângulo entre a reta  $s$  e  $f_\theta$  está contido no plano  $\theta$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem imediatamente  $f_\theta \equiv e_2 \equiv f_{\theta_r}$ .

O ponto  $R$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $R_r \equiv R_2 \equiv R_1$ . Já temos um ponto para definir a reta  $s$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao rebatimento do ponto  $S$ , que é o ponto da reta  $s$  que foi dado no enunciado. Por  $S_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e sobre essa perpendicular, a partir de  $S_2$  (a projeção frontal do ponto  $S$ ), mediu-se o afastamento do ponto  $S$  (que é o raio do arco do rebatimento) e determinou-se  $S_r$  (o ponto  $S$  rebatido). A reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $R_r$  e  $S_r$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta  $s$  e o Plano Frontal de Projeção) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre  $f_{\theta}$  e a reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida), com vértice em  $R_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $s$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\theta$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\theta$ ).

## 458.

### Dados:

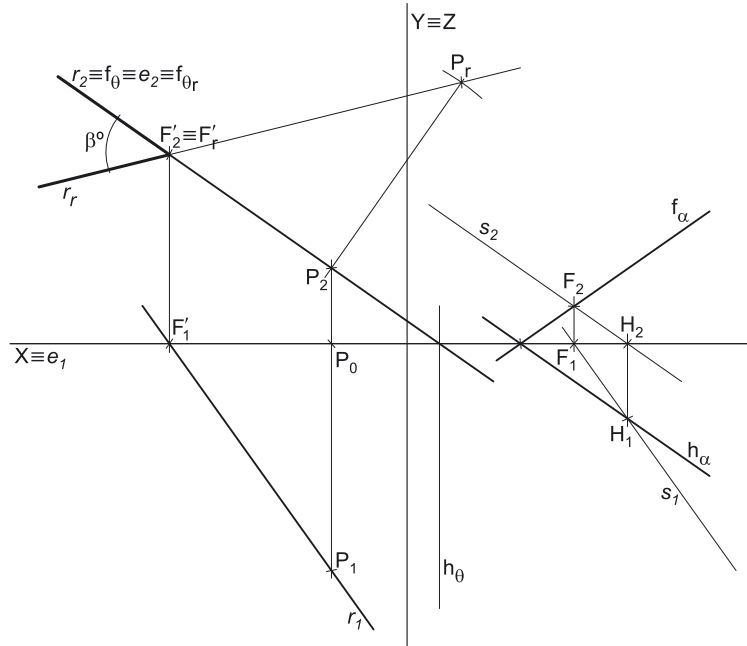
Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $P$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar  $r_2$ , a projeção frontal da reta  $r$ , em função do ângulo dado. No entanto, não é possível desenhar a projeção horizontal da reta  $r$ , de forma imediata.

### Determinação da projeção horizontal da reta $r$ ( $r_1$ ):

Sobre a reta  $r$ , sabe-se que é paralela ao plano  $\alpha$  e que passa pelo ponto  $P$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $r$  passa pelo ponto  $P$  (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Faltam-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta  $r$  ser paralela ao plano  $\alpha$ , a reta  $r$  tem de verificar o **Crítério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta  $r$  tem de ser paralela a uma reta do plano  $\alpha$ . Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\alpha$  (a reta  $s$ ), cuja projeção frontal ( $s_2$ ) é paralela à projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ). A reta  $s$  está definida por dois pontos (os pontos  $F$  e  $H$  – os seus traços) e pertence ao plano  $\alpha$ , pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\alpha$ .



Para a reta  $r$  ser paralela ao plano  $\alpha$ , a reta  $r$  tem de ser paralela à reta  $s$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$ . A reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção da reta  $s$ ), pelo que se conduziu  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ) por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), paralela a  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ).

### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $r$  e o Plano Frontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapla 1.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção – o plano  $\theta$ . Um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção é um plano projetante frontal. O plano  $\theta$  é, assim, o plano projetante frontal da reta  $r$  (é um plano de topo), pelo que o seu traço frontal ( $f_{\theta}$ ) está coincidente com a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ).

**Etapla 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\theta$  e o Plano Frontal de Projeção) é o próprio traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_{\theta}$ ), que já foi determinado na etapa anterior.

**Etapla 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $r$  e  $f_{\theta}$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas, que é o ponto  $F'$  (o traço frontal da reta  $r$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto  $F'$  (o traço frontal da reta  $r$ ).

O ângulo entre as duas retas (a reta  $r$  e  $f_{\theta}$ ) está contido no plano  $\theta$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_{\theta}$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem imediatamente  $f_{\theta} \equiv e_2 \equiv f_{\theta r}$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto  $F'$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F'_r \equiv F'_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao rebatimento do ponto  $P$ , que é o ponto da reta  $r$  que foi dado no enunciado. Por  $P_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e sobre essa perpendicular, a partir de  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), mediu-se o afastamento do ponto  $P$  (que é o raio do arco do rebatimento) e determinou-se  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido). A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $F'_r$  e  $P_r$ .

O ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta  $r$  e o Plano Frontal de Projeção) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre  $f_{0_r}$  e a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), com vértice em  $F'_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\beta^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$  e as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $s$ , do plano  $\theta$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\theta$ ).

## 459.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $v$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis). A reta  $p$  está definida pelos pontos  $M$  e  $N$  mas, porque se trata de uma reta de perfil, as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

#### Resolução:

O ângulo que uma reta faz com um dado plano é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que essa reta faz com qualquer plano paralelo ao plano dado. Assim, sendo pedido o ângulo que a reta  $p$  faz com o plano  $\varphi$ , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Frontal de Projeção (que é paralelo ao plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Frontal de Projeção e não o ângulo que a reta  $p$  faz com o plano  $\varphi$ .

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $p$  e o Plano Frontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $p$  conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção – o plano  $\pi$ . Um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção é um plano projetante frontal. O plano  $\pi$  é, assim, o plano projetante frontal da reta  $p$ , pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) está coincidente com a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ) – o plano  $\pi$  é um plano de perfil.

Tendo em conta que se trata de um plano de perfil, o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante pelo que, na prática, o plano  $\pi$  é simultaneamente o plano projetante frontal da reta  $p$  e o plano projetante horizontal da reta  $p$ .

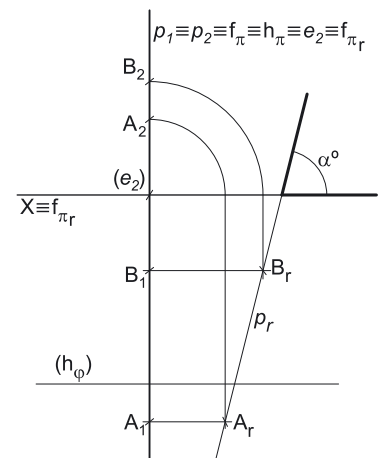
**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\pi$  e o Plano Frontal de Projeção) é o próprio traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ), que já foi determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $p$  e  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ).

Esse ângulo está contido no plano  $\pi$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Horizontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem imediatamente  $h_\pi \equiv e_1 \equiv h_{\pi_r}$ . O traço frontal do plano em rebatimento ( $f_{\pi_r}$ ) fica sobre o eixo  $X$ , pelo que se tem  $X \equiv f_{\pi_r}$ .

Em seguida, rebateu-se o ponto  $A$  – com o compasso, fazendo centro em  $e_2$  e raio até  $A_2$ , desenhou-se a projeção frontal do arco do rebatimento do ponto  $A$  até ao eixo  $X$ . Tendo em conta que o ponto  $A$ , no seu rebatimento, mantém o seu afastamento (o arco do seu rebatimento está contido num plano frontal, ortogonal à charneira do rebatimento), determinou-se  $A_r$ , com o afastamento de  $A_1$ . Depois, rebateu-se o ponto  $B$  – com o compasso, fazendo centro em  $e_2$  e raio até  $B_2$ , desenhou-se a projeção frontal do arco do rebatimento do ponto  $B$  até ao eixo  $X$ . Tendo em conta que o ponto  $B$ , no seu rebatimento, também mantém o seu afastamento (o arco do seu rebatimento está contido noutro plano frontal, ortogonal à charneira do rebatimento), determinou-se  $B_r$ , com o afastamento de  $B_1$ . A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $B_r$ .

O ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta  $p$  e o plano  $\varphi$ ) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre o eixo  $X$  (onde se situa  $f_{\pi_r}$ ) e a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo (que seria o traço frontal da reta  $p$ ) só se poderia processar em rebatimento mas, na prática, tal não é necessário. Assim, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

## Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$  e o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\pi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ ).

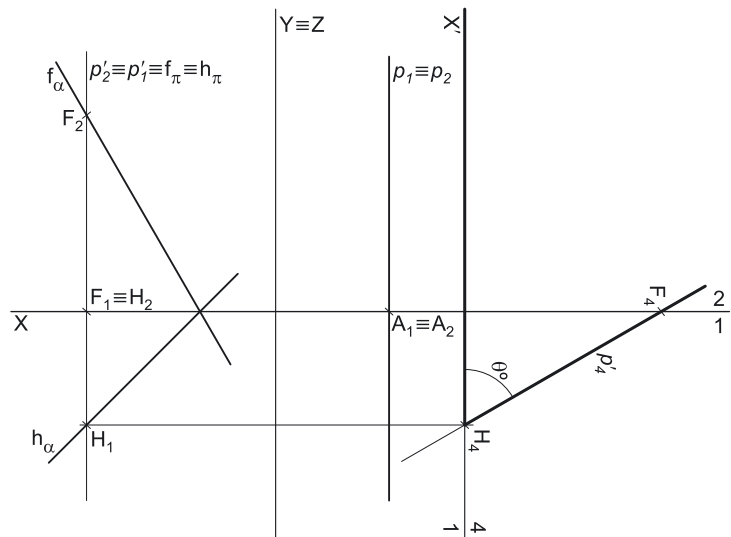
## 460.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. A reta  $p$  está, porque é uma reta passante, e necessariamente concorrente com o eixo  $X$  num ponto – o ponto  $A$ , cujas projeções se determinaram imediatamente. Tendo em conta que a reta  $p$  é uma reta de perfil, as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Sobre a reta  $p$ , sabe-se que é paralela ao plano  $\alpha$  e que passa pelo ponto  $A$  (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p$  passa pelo ponto  $A$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta  $p$  ser paralela ao plano  $\alpha$ , a reta  $p$  tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ , ou seja, a reta  $p$  tem de ser paralela a uma reta do plano  $\alpha$ . Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano  $\alpha$  (a reta  $p'$ ), também ela uma reta de perfil. A reta  $p'$  está definida por dois pontos (os pontos  $F$  e  $H$  – os seus traços) e pertence ao plano  $\alpha$ , pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\alpha$ .



Para a reta  $p$  ser paralela ao plano  $\alpha$ , a reta  $p$  tem de ser paralela à reta  $p'$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $p$ . A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (a direção da reta  $p'$ ).

### Resolução:

O ângulo que uma dada reta faz com um dado plano é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que qualquer reta paralela a essa reta faz com qualquer plano paralelo ao plano dado. Assim, sendo pedido o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção, sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $p'$  (que é uma reta paralela à reta  $p$ ) faz com o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que a reta  $p'$  faz com o Plano Horizontal de Projeção e não o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção.

Essa opção tem a ver com o facto de a reta  $p'$  estar, já, definida por dois pontos (os seus traços – os pontos  $F$  e  $H$ ) e a reta  $p$  estar definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e pela direção da reta  $p'$ .

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $p'$  e o Plano Horizontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapla 1.** Pela reta  $p'$  conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção – o plano  $\pi$ . Um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção é um plano projetante horizontal. O plano  $\pi$  é, assim, o plano projetante horizontal da reta  $p'$ , pelo que o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) está coincidente com a projeção horizontal da reta  $p'$  ( $p'1$ ) – o plano  $\pi$  é um plano de perfil.

Tendo em conta que se trata de um plano de perfil, o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante pelo que, na prática, o plano  $\pi$  é simultaneamente o plano projetante frontal da reta  $p'$  e o plano projetante horizontal da reta  $p'$ .

**Etapla 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\pi$  e o Plano Horizontal de Projeção) é o próprio traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ), que já foi determinado na etapa anterior.

**Etapla 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $p'$  e  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Esse ângulo está contido no plano  $\pi$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\pi$  (o plano que contém o ângulo) num plano paralelo a um dos planos de projeção para, dessa forma, o Ângulo entre as duas retas se projetar em verdadeira grandeza.

Optou-se por transformar o plano  $\pi$  num plano frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\pi$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\pi$ , o eixo  $X'$  é paralelo ao traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ), que se situa no plano de projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$F_4$  é a projeção do ponto  $F$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$  (a cota de  $F$ ).  $H_4$  é a projeção do ponto  $H$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que é nula e se manteve) –  $H_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois o ponto  $H$  continua a ter cota nula, no novo diedro de projeção.

Em seguida, desenhou-se a reta  $p'_4$  (a projeção da reta  $p'$  no **plano 4**), que passa por  $F_4$  e por  $H_4$  (a reta  $p'$ , no novo diedro de projeção, está definida por dois pontos).

No novo diedro de projeção, o plano  $\pi$  é um plano frontal (de frente), pois é paralelo ao **plano 4** (o novo plano de projeção). Assim, o ângulo entre as duas retas (porque está contido no plano  $\pi$ ), projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Dessa forma, o ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta  $p$  e o Plano Frontal de Projeção) é qualquer dos dois menores ângulos formados entre o eixo  $X$  e a reta  $p'_4$  (a projeção da reta  $p'$  no **plano 4**), com vértice em  $H_4$  (a projeção do ponto  $H$  no **plano 4**). Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$  e os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p'$ , do plano  $\pi$  e de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 461.

#### Dados:

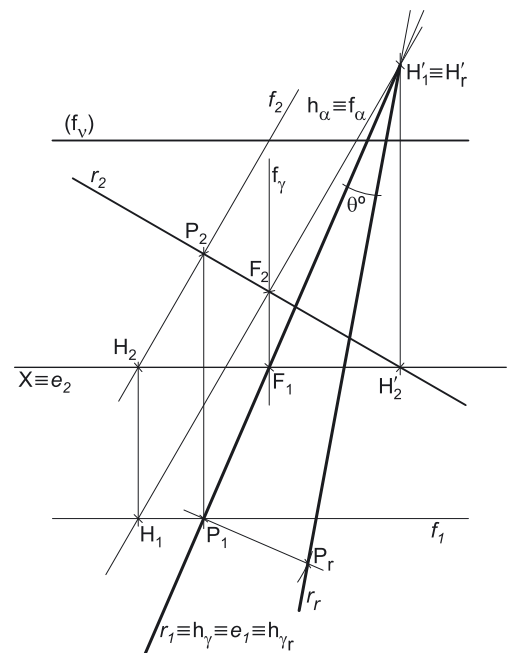
Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $v$ , pelos respetivos traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis).

#### Determinação das projeções da reta $r$ :

Sobre a reta  $r$ , sabe-se que passa pelo ponto  $P$  (3; 4) e que pertence ao plano  $\alpha$ . Assim, o ponto  $P$  (3; 4) e necessariamente um ponto do plano  $\alpha$  pelo que, em primeiro lugar, há que determinar as projeções do ponto  $P$ .

O ponto  $P$ , para pertencer ao plano  $\alpha$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, a reta  $f$  é a reta frontal (de frente) do plano, com 3 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $P$ . A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $H$ , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ). O ponto  $P$  é o ponto da reta  $f$  que tem 4 cm de cota. Já temos um ponto para definir a reta  $r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta  $r$  é a reta de maior inclinação do plano  $\alpha$ , pelo que a sua projeção frontal ( $r_2$ ) é perpendicular ao traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ). Assim, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ) conduziu-se  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ), perpendicular a  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) e determinou-se o traço  $l$  da reta  $r$  (o ponto  $F$ ) que se situa necessariamente sobre  $f_\alpha$  (traço frontal do plano  $\alpha$ ). Recorde que, para que a reta  $r$  pertença ao plano  $\alpha$ , a reta  $r$  tem de verificar a **condição para que uma reta pertença a um plano** (a reta tem de ter os seus traços sobre os traços homónimos do plano). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  – a reta  $r$  está definida por dois pontos (o ponto  $P$  e o ponto  $F$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por uma questão de rigor, optou-se por se determinar o traço horizontal da reta  $r$  (o ponto  $H'$ ), de forma a garantir que a reta  $r$  pertence mesmo ao plano  $\alpha$  (se bem que tal já estava garantido).

### Resolução:

O ângulo que uma reta faz com um dado plano é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que essa reta faz com qualquer plano paralelo ao plano dado. Assim, sendo pedido o ângulo que a reta  $r$  faz com o plano  $v$ , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $r$  faz com o Plano Horizontal de Projeção (que é paralelo ao plano  $v$ ). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que a reta  $r$  faz com o Plano Horizontal de Projeção e não o ângulo que a reta  $r$  faz com o plano  $v$ .

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $v$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção – o plano  $\gamma$ . Um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção é um plano projetante horizontal. O plano  $\gamma$  é, assim, o plano projetante horizontal da reta  $r$  (é um plano vertical), pelo que o seu traço horizontal ( $h_\gamma$ ) está coincidente com a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ).

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\gamma$  e o Plano Horizontal de Projeção) é o próprio traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), que já foi determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $r$  e  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas, que é o ponto  $H'$  (o traço horizontal da reta  $r$ ).

O ângulo entre as duas retas (a reta  $r$  e  $h_\gamma$ ) está contido no plano  $\gamma$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Horizontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem imediatamente  $h_\gamma \equiv e_1 \equiv h_{\gamma_r}$ .

O ponto  $H'$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H'_{r'} \equiv H'_1$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao rebatimento do ponto  $P$ , que é o ponto da reta  $r$  que foi dado no enunciado. Por  $P_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e sobre essa perpendicular, a partir de  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), mediu-se a cota do ponto  $P$  (que é o raio do arco do rebatimento) e determinou-se  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido). A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $H'_1$  e  $P_r$ .

O ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $v$ ) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre  $h_{r'}$  e a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), com vértice em  $H'_1$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$  e as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $f$ , do plano  $\gamma$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\gamma$ ).

## 462.

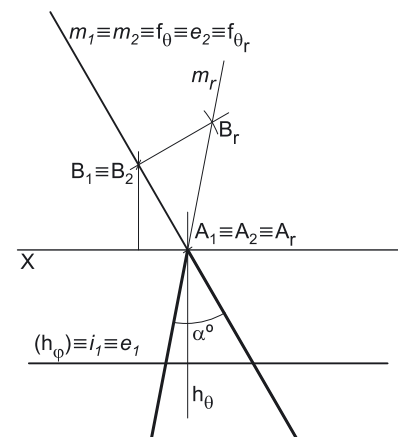
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $m$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis).

A reta  $m$  tem as suas projeções coincidentes, pois é uma reta do  $\beta_{2/4}$  (retas do  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções coincidentes). Por outro lado, a reta  $m$  é necessariamente uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto – o ponto  $A$  (cujas projeções se determinaram imediatamente).

### Resolução:

O ângulo que uma reta faz com um dado plano é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que essa reta faz com qualquer plano paralelo ao plano dado. Assim, sendo pedido o ângulo que a reta  $m$  faz com o plano  $\varphi$ , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $m$  faz com o Plano Frontal de Projeção (que é paralelo ao plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que a reta  $m$  faz com o Plano Frontal de Projeção e não o ângulo que a reta  $m$  faz com o plano  $\varphi$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $m$  e o plano  $\varphi$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $m$  conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção – o plano  $\theta$ . Um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção é um plano projetante frontal. O plano  $\theta$  é, assim, o plano projetante frontal da reta  $m$  (é um plano de topo), pelo que o seu traço frontal ( $f_\theta$ ) está coincidente com a projeção frontal da reta  $m$  ( $m_2$ ).

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\theta$  e o Plano Frontal de Projeção) é o próprio traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que já foi determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $s$  e  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas, que é o ponto  $A$  (o ponto de concorrência da reta  $m$  com o eixo  $X$ ).

O ângulo entre a reta  $m$  e  $f_\theta$  está contido no plano  $\theta$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem imediatamente  $f_\theta \equiv e_2 \equiv f_{\theta_r}$ .

O ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2 \equiv A_1$ . Já temos um ponto para definir a reta  $m$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto  $B$ , qualquer, pertencente à reta  $m$ , e efetuou-se o seu rebatimento. Nesse sentido, por  $B_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e sobre essa perpendicular, a partir de  $B_2$  (a projeção frontal do ponto  $B$ ), mediu-se o afastamento do ponto  $B$  (que é o raio do arco do rebatimento) e determinou-se  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido). A reta  $m_r$  (a reta  $m$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $B_r$ .

O ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta  $m$  e o plano  $\varphi$ ) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre  $f_{\theta_r}$  e a reta  $m_r$  (a reta  $m$  rebatida), com vértice em  $A_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $m$  e o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\theta$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\theta$ ).

## 463.

Os dois processos para determinar a amplitude do ângulo entre uma reta e um plano são o **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano** e o **método do ângulo complementar**. Apesar de os dois métodos serem universais (utilizáveis independentemente da situação), o recurso a um ou a outro tem a ver, **apenas**, com economia de traçados. De facto, dada a quantidade de traçados a que o primeiro processo obriga em determinadas situações, é, nessas situações, bastante mais vantajoso o recurso ao segundo processo.

Essas situações são aquelas em que se pretende o ângulo entre uma reta qualquer e um **plano não projetante**, pois a determinação das sucessivas interseções (do ponto de interseção da reta dada com o plano dado e do ponto de interseção do plano dado com a reta que lhe é ortogonal e que passa por um ponto da reta dada) obriga ao recurso ao **método geral da interseção de retas com planos** vezes sucessivas, o que resulta num traçado muito denso e complexo, de difícil leitura e de execução bastante morosa. Assim, nessas situações (ângulo entre uma reta qualquer e um plano não projetante) é mais conveniente o recurso ao **método do ângulo complementar**.

## 464.

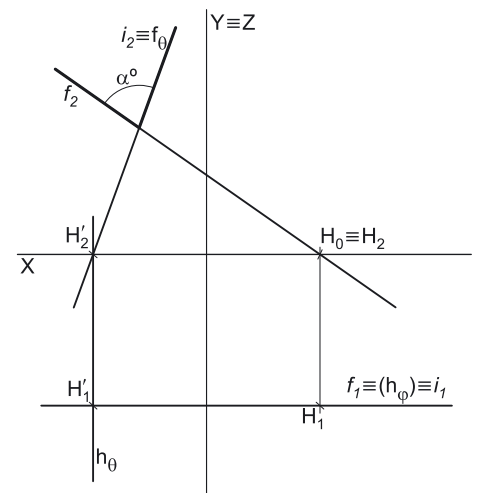
#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $f$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados.

#### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $f$  e o plano  $\theta$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $f$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\theta$  – o plano  $\varphi$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Um plano ortogonal ao plano  $\theta$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\theta$ , ou seja, tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\theta$ . Uma reta ortogonal ao plano  $\theta$  (que é um plano de topo) é necessariamente uma reta frontal (de frente), ortogonal a  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Por outro lado, esse plano tem de conter a reta  $f$ . Assim, o plano  $\varphi$  tem de conter duas retas frontais (de frente) concorrentes – a reta  $f$  e uma outra reta frontal (de frente), que seja ortogonal ao plano  $\theta$  (e que não se representou).

Nesse sentido (porque contém duas diferentes «famílias» de retas frontais), o plano ortogonal ao plano  $\theta$  e que contém a reta  $f$  é necessariamente um plano frontal (de frente) – o plano  $\varphi$ . O plano  $\varphi$  é, na prática, o plano projetante horizontal da reta  $f$ , pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) está coincidente com a projeção horizontal da reta  $f$  ( $f_1$ ).

**Etapas 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\theta$  e o plano  $\varphi$ ) é a reta  $i$ , cujas projeções se determinam diretamente.

O plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ) está necessariamente sobre  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\theta$ . O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ) está necessariamente sobre  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\varphi$ .

**Etapas 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $f$  e a reta  $i$ . Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas (que não se identificou).

O plano que contém o ângulo (o plano frontal que contém a reta  $f$  e contém, também, a reta  $i$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do ângulo está em verdadeira grandeza). O ângulo entre as duas retas é, assim, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as projeções frontais das duas retas ( $f_2$  e  $i_2$ ) – note que, na presente situação, não se identificou o vértice do ângulo (que seria o ponto de concorrência das duas retas) mas, na prática, tal não é necessário. Assim, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

Identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $f$  e os traços do plano  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\varphi$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 465.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $h$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $h$  e o plano  $\delta$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

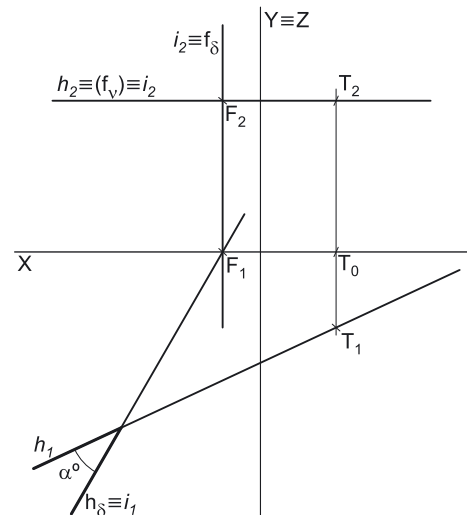
**Etapas 1.** Pela reta  $h$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\delta$  – o plano  $v$ .

Um plano ortogonal ao plano  $\delta$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano  $\delta$ , ou seja, tem de conter uma reta ortogonal ao plano  $\delta$ . Uma reta ortogonal ao plano  $\delta$  (que é um plano vertical) é necessariamente uma reta horizontal (de nível), ortogonal a  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ). Por outro lado, esse plano tem de conter a reta  $h$ . Assim, o plano  $v$  tem de conter duas retas horizontais (de nível) concorrentes – a reta  $h$  e uma outra reta horizontal (de nível), que seja ortogonal ao plano  $\delta$  (e que não se representou).

Nesse sentido (porque contém duas diferentes «famílias» de retas horizontais), o plano ortogonal ao plano  $\delta$  e que contém a reta  $h$  é necessariamente um plano horizontal (de nível) – o plano  $v$ . O plano  $v$  é, na prática, o plano projetante frontal da reta  $h$ , pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) está coincidente com a projeção frontal da reta  $h$  ( $h_2$ ).

**Etapas 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\delta$  e o plano  $v$ ) é a reta  $i$ , cujas projeções se determinam diretamente.

O plano  $\delta$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ) está necessariamente sobre  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\delta$ . O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ) está necessariamente sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $v$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $h$  e a reta  $i$ . Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas (que não se identificou).

O plano que contém o ângulo (o plano horizontal que contém a reta  $h$  e contém, também, a reta  $i$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do ângulo está em verdadeira grandeza). O ângulo entre as duas retas é, assim, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as projeções horizontais das duas retas ( $h_1$  e  $i_1$ ) – note que, na presente situação, não se identificou o vértice do ângulo (que seria o ponto de concorrência das duas retas) mas, na prática, tal não é necessário. Assim, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

Identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $h$  e os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\varphi$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 466.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $h$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados.

#### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $h$  e o plano  $\theta$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $h$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\theta$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $h$  (a reta dada) e uma reta qualquer, ortogonal ao plano  $\theta$  e concorrente com a reta  $h$  (a reta  $p$ ). Assim, por um ponto  $P$ , qualquer, da reta  $h$ , conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\theta$ . A reta  $p$  é uma reta frontal (de frente), ortogonal a  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). O plano definido pelas retas  $h$  e  $p$  é o plano que contém a reta  $h$  e é ortogonal ao plano  $\theta$ .

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $h$  com o plano  $\theta$ ) e o ponto  $P'$  (o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\theta$ ). Os pontos  $I$  e  $P'$  foram determinados diretamente, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. O ponto  $P'$  é, na prática, a projeção ortogonal do ponto  $P$  no plano  $\theta$ , tal como a reta  $i$  é, na prática, a projeção ortogonal da reta  $h$  no plano  $\theta$ .

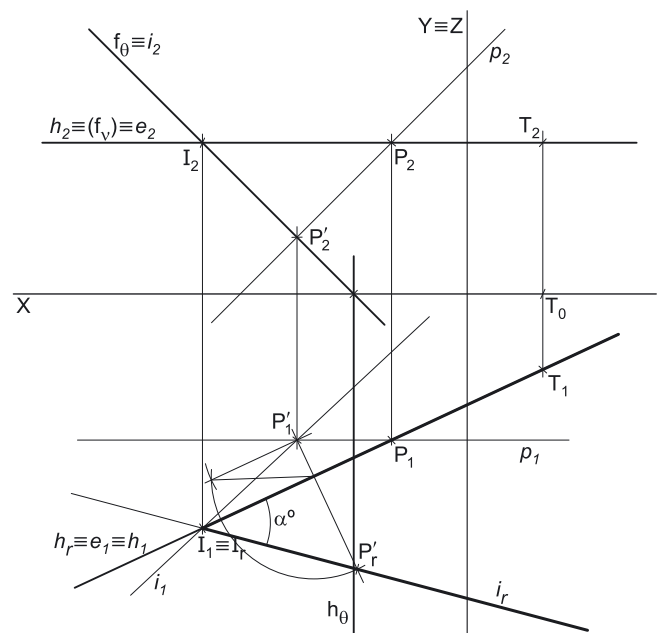
**Etapa 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre as retas  $h$  e  $i$ .

Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (as retas  $h$  e  $i$ ) para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a reta  $h$ . Assim, identificou-se o plano  $v$  (pelo seu traço frontal, que está coincidente com a projeção frontal da reta  $h$ , pois é um plano projetante frontal), bem como a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria reta  $h$ . Note que a reta  $h$  é a reta de interseção entre o plano  $v$  e o plano definido pelas retas  $h$  e  $i$ .

A reta  $h$  é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se, imediatamente,  $h_r \equiv h_1$ . O ponto  $I$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $I_r \equiv I_1$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $i$ , em rebatimento. Nesse sentido, recorreu-se ao rebatimento de um outro ponto da reta  $i$  – o ponto  $P'$ , por exemplo.

O rebatimento do ponto  $P'$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P'_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $P'$  ao plano  $v$  (a cota de  $P'$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P'$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P'$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $P'_1$ , determinando  $P'_r$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, desenhou-se a reta  $i$  em rebatimento – a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) passa por  $P'_r$  e  $I_r$  (está definida por dois pontos). A verdadeira grandeza do ângulo formado entre a reta  $h$  e o plano  $\theta$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $h_r$  e  $i_r$ , com vértice em  $I_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $h$  e os traços do plano  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $v$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano que contém o ângulo).

## 467.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. As projeções da reta  $r$  fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, pois a reta é paralela a  $\beta_{1/3}$  (retas paralelas a  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\gamma$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapla 1.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\gamma$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $r$  (a reta dada) e uma reta qualquer, ortogonal ao plano  $\gamma$  e concorrente com a reta  $r$  (a reta  $p$ ). Assim, pelo ponto  $P$  da reta  $r$  (o ponto da reta  $r$  que é dado no enunciado) conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\gamma$ . A reta  $p$  é uma reta horizontal (de nível), ortogonal a  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ). O plano definido pelas retas  $r$  e  $p$  é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\gamma$ .

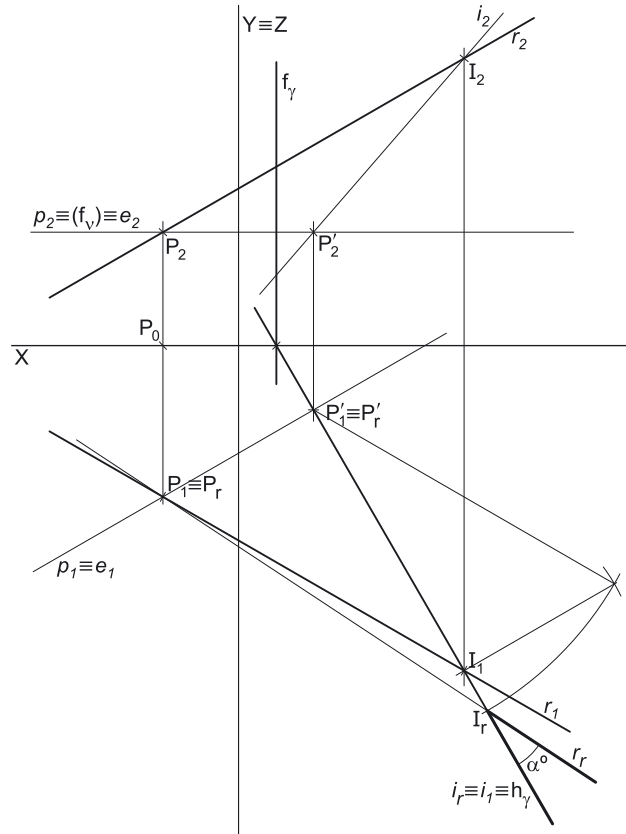
**Etapla 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\gamma$ ) e o ponto  $P'$  (o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\gamma$ ). Os pontos  $I$  e  $P'$  foram determinados diretamente, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal. O ponto  $P'$  é, na prática, a projeção ortogonal do ponto  $P$  no plano  $\gamma$ , tal como a reta  $i$  é, na prática, a projeção ortogonal da reta  $r$  no plano  $\gamma$ .

**Etapla 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre as retas  $r$  e  $i$ .

Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (as retas  $r$  e  $i$ ) para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a reta  $p$ . Assim, identificou-se o plano  $v$  (pelo seu traço frontal), bem como a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria reta  $p$ . Note que a reta  $p$  também pertence ao plano definido pelas retas  $r$  e  $i$ , pois é complanar com ambas as retas – assim, a reta  $p$  é a reta de interseção entre o plano  $v$  e o plano definido pelas retas  $r$ ,  $i$  e  $p$ .

Os pontos  $P$  e  $P'$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_1$  e  $P'_r \equiv P'_1$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir cada uma das duas retas. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir cada uma delas, em rebatimento. Para tal será conveniente efetuarmos o rebatimento do ponto  $I$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas – as retas  $r$  e  $i$ ).

O rebatimento do ponto  $I$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $I_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Note que a perpendicular à charneira é, na prática, o próprio traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ). Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $I$  ao plano  $v$  (a **cota** de  $I$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $I$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $I$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $I_1$ , determinando  $I_r$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $P_r$  e  $I_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) passa por  $P'_r$  e  $I_r$  (está igualmente definida por dois pontos). Note que a reta  $i_r$  fica coincidente com  $h_r$  e com  $i_r$  (a projeção horizontal da reta  $i$ ), pois o plano  $\gamma$  é o plano que contém a reta  $i$  e contém, ainda, os arcos do rebatimento de todos os pontos da reta (porque o plano  $\gamma$  é um plano ortogonal à charneira do rebatimento).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre a reta  $r$  e o plano  $\gamma$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $r_r$  e  $i_r$ , com vértice em  $I_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$  e os traços do plano  $\gamma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $v$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano que contém o ângulo).

## 468.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $f$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

#### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\alpha$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\alpha$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $r$  e uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  e concorrente com a reta  $r$  (a reta  $p$ ). Assim, pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . O plano definido pelas retas  $r$  e  $p$  é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

Tendo em conta que o ponto  $P$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$  e que o plano  $\alpha$  é um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ , nesta situação, a reta  $p$ , passando pelo ponto  $P$  (do  $\beta_{1/3}$ ) e sendo ortogonal ao plano  $\alpha$ , é necessariamente uma reta do  $\beta_{1/3}$  – a reta  $p$  é, assim, uma reta passante, ou seja, uma reta concorrente com o eixo  $X$  num ponto (o ponto  $A$ , cujas projeções se determinaram imediatamente).

Por outro lado, nesta situação, e em função dos dados, as retas  $f$  e  $p$  têm as suas projeções frontais ( $f_2$  e  $p_2$ , respetivamente) coincidentes.

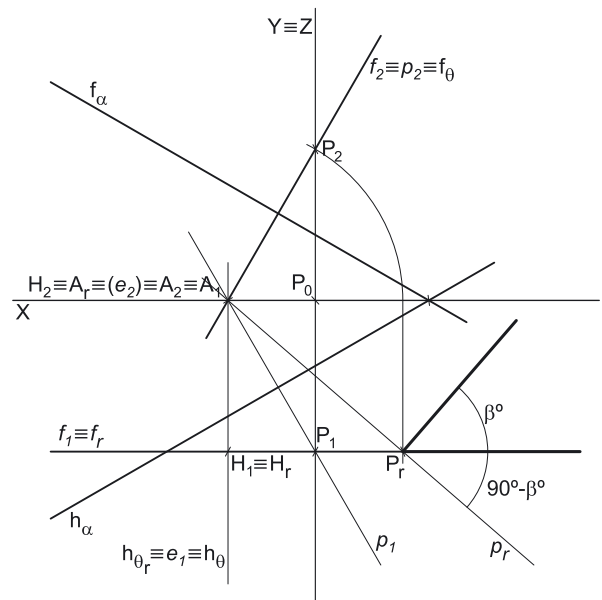
**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Tendo em conta que nem as retas  $f$  e  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, a determinação dos pontos de interseção das retas  $f$  e  $p$  com o plano  $\alpha$  (que nos permitiria determinar a reta de interseção entre os dois planos) teria de se processar com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Conclui-se, portanto, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.

Assim, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.

**Etapa 1.** Esta primeira etapa já foi executada – o plano definido pela reta  $f$  (a reta dada) e a reta  $p$  (a reta concorrente com a reta  $f$  e ortogonal ao plano  $\alpha$ ) é o plano que contém a reta  $f$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

**Etapa 2.** Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta  $f$  e a reta  $p$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Note que as retas  $f$  e  $p$ , tendo as suas projeções frontais coincidentes, estão contidas num mesmo plano projetante frontal. Assim, o plano que contém o ângulo é necessariamente um plano projetante frontal (um plano de topo) – o plano projetante frontal das retas  $f$  e  $p$  (cujos traços se determinaram imediatamente).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (o plano  $\theta$ ) para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ). O ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (e um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$ . Em seguida, determinou-se o ponto  $H$ , que é o traço horizontal da reta  $f$ . O ponto  $H$  é outro ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_r \equiv H_1$ .

Já temos, em rebatimento, um ponto para definirmos cada uma das duas retas (em rebatimento). Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $P$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do ponto  $P$  – com o compasso, fazendo centro em  $e_2$  (a projeção frontal da charneira) e com raio até  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ), desenhou-se a projeção frontal do arco do seu rebatimento, até ao eixo  $X$ . Em seguida, uma vez que o ponto  $P$  mantém o seu afastamento, determinou-se  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido).

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $f_r$  (a reta  $f$  rebatida) passa por  $H_r$  e  $P_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $A_r$  e  $P_r$  (está igualmente definida por dois pontos). A verdadeira grandeza do ângulo formado entre as retas  $f$  e  $p$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $f_r$  e  $p_r$ , com vértice em  $P_r$ . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $90^\circ - \beta^\circ$ .

**Etapas 3.** O ângulo entre a reta  $f$  e o plano  $\alpha$  é o **ângulo complementar** do ângulo entre as retas  $f$  e  $p$ .

Nesse sentido, desenhou-se uma semirreta perpendicular a  $p_r$  e com extremidade em  $P_r$ . O ângulo entre esta semirreta e a reta  $f_r$  é o **ângulo complementar** do ângulo anterior, pelo que este ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $f$  faz com o plano  $\alpha$ . Assim, identificou-se esse ângulo a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\beta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $f$  e os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\theta$ , que nos permitiram determinar o ângulo complementar do ângulo pretendido).

## 469.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. As projeções da reta  $r$  fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, pois a reta é paralela ao  $\beta_{1/3}$  (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

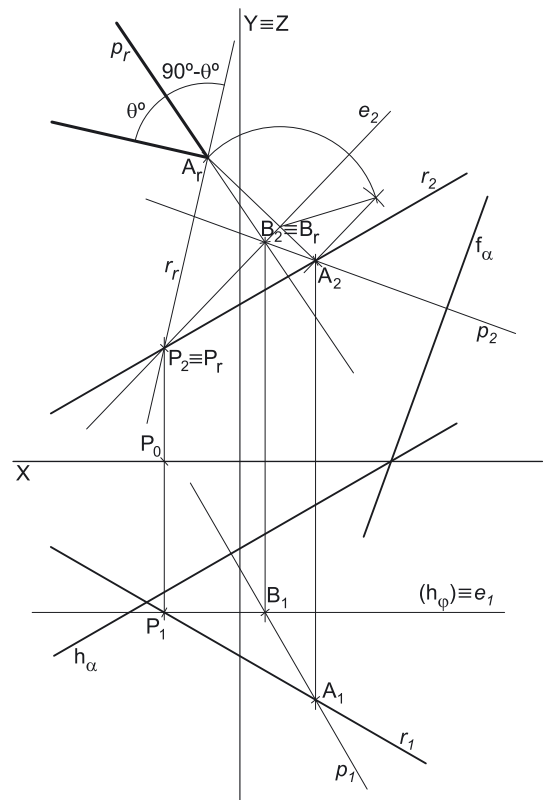
### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\alpha$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapas 1.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\alpha$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $r$  e uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  e concorrente com a reta  $r$  (a reta  $p$ ). Assim, por um ponto  $A$ , qualquer, da reta  $r$ , conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . O plano definido pelas retas  $r$  e  $p$  é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

**Etapas 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Tendo em conta que nem as retas  $r$  e  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, a determinação dos pontos de interseção das retas  $r$  e  $p$  com o plano  $\alpha$  teria de se processar com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Conclui-se, portanto, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.

Assim, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 1.** Esta primeira etapa já foi cumprida – o plano definido pela reta  $r$  (a reta dada) e a reta  $p$  (a reta concorrente com a reta  $r$  e ortogonal ao plano  $\alpha$ ) é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

**Etapa 2.** Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta  $r$  e a reta  $p$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para um plano frontal (de frente)  $\varphi$  qualquer. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por conduzir o plano  $\varphi$  pelo ponto  $P$  (o ponto da reta  $r$  que é dado no enunciado). Nesse sentido, representou-se o plano frontal (de frente)  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal, passando por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\varphi$  e o plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ ). A reta  $e$  (a charneira) está definida por dois pontos – o ponto  $P$  (que é, imediatamente, o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\varphi$ ) e o ponto  $B$  (o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\varphi$ ). O ponto  $B$  foi determinado a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Os pontos  $P$  e  $B$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_2$  e  $B_r \equiv B_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $A$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto  $A$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $A_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $A$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $A$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $A_2$ , determinando  $A_r$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $P_r$  e  $A_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $B_r$  e  $A_r$  (está igualmente definida por dois pontos). A verdadeira grandeza do ângulo formado entre as retas  $r$  e  $p$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $r_r$  e  $p_r$ , com vértice em  $A_r$ . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $90^\circ - \theta^\circ$ .

**Etapa 3.** O ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\alpha$  é o **ângulo complementar** do ângulo entre as retas  $r$  e  $p$ .

Nesse sentido, desenhou-se uma semirreta perpendicular a  $r_r$  e com extremidade em  $A_r$ . O ângulo entre esta semirreta e a reta  $p_r$  é o **ângulo complementar** do ângulo anterior, pelo que este ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $r$  faz com o plano  $\alpha$ . Assim, identificou-se esse ângulo a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$  e os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\varphi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ , que nos permitiram determinar o ângulo complementar do ângulo pretendido).

## 470.

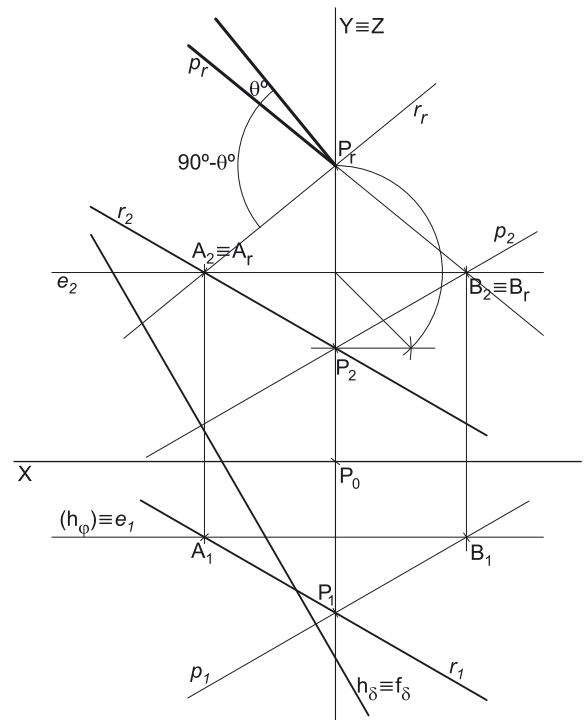
#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois a reta é paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as projeções paralelas entre si). O plano  $\delta$  tem os seus traços coincidentes, pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

#### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\delta$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\delta$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $r$  e uma reta ortogonal ao plano  $\delta$  e concorrente com a reta  $r$  (a reta  $p$ ). Assim, pelo ponto  $P$  (o ponto da reta  $r$  que é dado no enunciado), da reta  $r$ , conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\delta$ . O plano definido pelas retas  $r$  e  $p$  é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\delta$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Tendo em conta que nem as retas  $r$  e  $p$  nem o plano  $\delta$  são projetantes, a determinação dos pontos de interseção das retas  $r$  e  $p$  com o plano  $\delta$  teria de se processar com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Conclui-se, portanto, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.

Assim, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.

**Etapa 1.** Esta primeira etapa já foi cumprida – o plano definido pela reta  $r$  (a reta dada) e a reta  $p$  (a reta concorrente com a reta  $r$  e ortogonal ao plano  $\delta$ ) é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\delta$ .

**Etapa 2.** Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta  $r$  e a reta  $p$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para um plano frontal (de frente)  $\varphi$  qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano frontal (de frente)  $\varphi$ , qualquer, pelo seu traço horizontal – o plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\varphi$  e o plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ ). A reta  $e$  (a charneira) está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\varphi$ ) e o ponto  $B$  (o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\varphi$ ). Os pontos  $A$  e  $B$  foram determinados a partir das respetivas projeções horizontais, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Os pontos  $A$  e  $B$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2$  e  $B_r \equiv B_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $P$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto  $P$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $P$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $P$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $P_2$ , determinando  $P_r$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $A_r$  e  $P_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $B_r$  e  $P_r$  (está igualmente definida por dois pontos). A verdadeira grandeza do ângulo formado entre as retas  $r$  e  $p$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $r_r$  e  $p_r$ , com vértice em  $P_r$ . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $90^\circ - \theta^\circ$ .

**Etapa 3.** O ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\delta$  é o **ângulo complementar** do ângulo entre as retas  $r$  e  $p$ .

Nesse sentido, desenhou-se uma semirreta perpendicular a  $r_r$  e com extremidade em  $P_r$ . O ângulo entre esta semirreta e a reta  $p_r$  é o **ângulo complementar** do ângulo anterior, pelo que este ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $r$  faz com o plano  $\delta$ . Assim, identificou-se esse ângulo a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$  e os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\varphi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ , que nos permitiram determinar o ângulo complementar do ângulo pretendido).

## 471.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados.

**Resolução:**

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\rho$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\rho$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $r$  e uma reta ortogonal ao plano  $\rho$  e concorrente com a reta  $r$  (a reta  $p$ ). Assim, pelo ponto  $A$  (o ponto da reta  $r$  que é dado no enunciado), da reta  $r$ , conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$ .

Como oportunamente se estudou, qualquer reta ortogonal a um plano de rampa é necessariamente uma reta de perfil, pelo que a reta  $p$  é necessariamente uma **reta de perfil**. Assim, é possível desenhar, de forma imediata, as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $A$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $A$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $A$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

Assim, recorreu-se a uma reta  $a$ , de perfil, pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $a$  está definida pelos seus traços (os pontos  $F$  e  $H$ ). Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta  $a$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $p$ . A reta  $a$  é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas  $p$  e  $a$ . Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_r$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se os pontos  $F$ ,  $H$  e  $A$ . Em seguida, desenhou-se  $a_r$ , que passa por  $F_r$  e por  $H_r$  (a reta  $a_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $F_r$  e  $H_r$ ). Tenha em conta que o ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r \equiv F_2$ .

Pelo ponto  $A_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , perpendicular a  $a_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $a$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta  $p$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ .

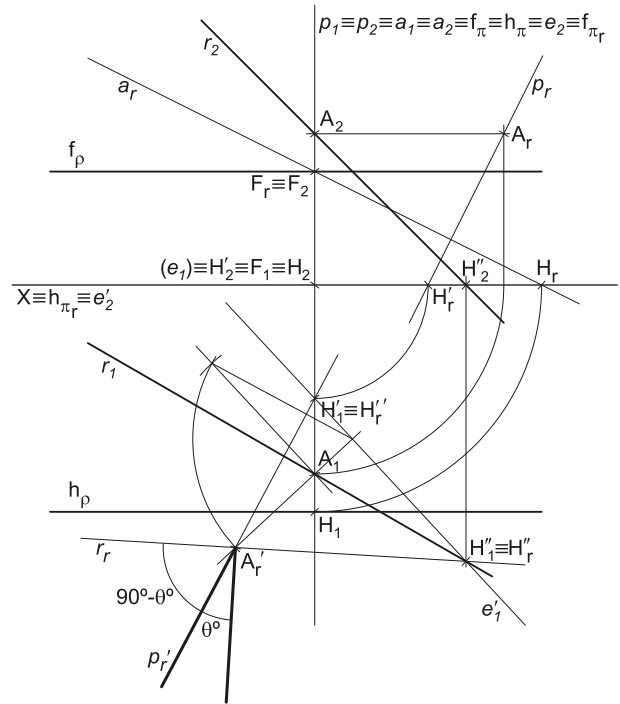
Sobre a reta  $p_r$  representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $H'_r$ . O ponto  $H'_r$  é, em rebatimento, o traço horizontal da reta  $p$ . Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $H'$ . A reta  $p$  (definida pelos pontos  $A$  e  $H'$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Está concluída a **Etapa 1 do método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano** – o plano definido pelas retas  $r$  e  $p$  é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\rho$ .

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Tendo em conta que nem as retas  $r$  e  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes, a determinação dos pontos de interseção das retas  $r$  e  $p$  com o plano  $\rho$  teria de se processar com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Conclui-se, portanto, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.

Assim, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.

**Etapa 1.** Esta primeira etapa já foi cumprida – o plano definido pela reta  $r$  (a reta dada) e a reta  $p$  (a reta concorrente com a reta  $r$  e ortogonal ao plano  $\rho$ ) é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\rho$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta  $r$  e a reta  $p$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos (é o traço horizontal do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ ). A reta  $e$  (a charneira) está definida por dois pontos – o ponto  $H'$  (o traço horizontal da reta  $p$ ) e o ponto  $H''$  (o traço horizontal da reta  $r$ ).

Os pontos  $H'$  e  $H''$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $H'_r \equiv H'_1$  e  $H''_r \equiv H''_1$ . Note que o ponto  $H'_r$  é o ponto  $H'$  no seu segundo rebatimento –  $H'_r$  é o ponto  $H'$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ .

Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $A$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto  $A$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $A_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediou-se a cota do ponto  $A$  e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , determinando  $A_r$ . Note que o ponto  $A_r$  é o ponto  $A$  no seu segundo rebatimento –  $A_r$  é o ponto  $A$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $H''_r$  e  $A_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida no seu segundo rebatimento) passa por  $H'_r$  e  $A_r$  (está igualmente definida por dois pontos). Note que a reta  $p_r$  é a reta  $p$  no seu segundo rebatimento –  $p_r$  é a reta  $p$  rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ .

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre as retas  $r$  e  $p$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $r_r$  e  $p_r$ , com vértice em  $A_r$ . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $90^\circ - \theta^\circ$ .

**Etapa 3.** O ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $p$  é o **ângulo complementar** do ângulo entre as retas  $r$  e  $p$ .

Nesse sentido, desenhou-se uma semirreta perpendicular a  $r_r$  e com extremidade em  $A_r$ . O ângulo entre esta semirreta e a reta  $p_r$  é o **ângulo complementar** do ângulo anterior, pelo que este ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $r$  faz com o plano  $p$ . Assim, identificou-se esse ângulo a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$  e os traços do plano  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\pi$ , de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  bem como, ainda, de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ , que nos permitiram determinar o ângulo complementar do ângulo pretendido).

## 472.

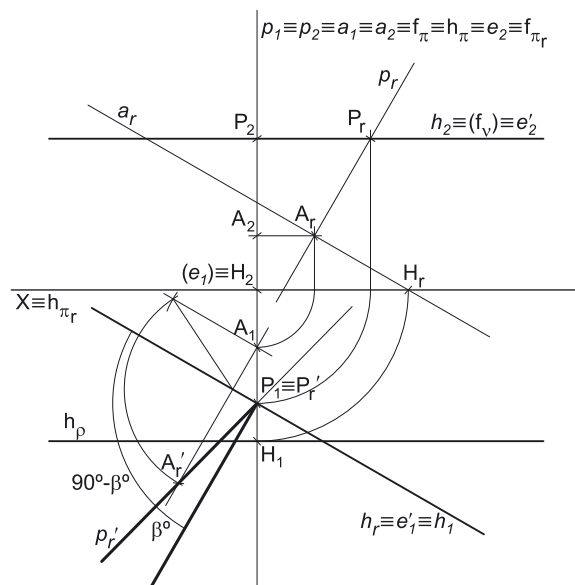
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $h$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $p$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. O plano  $p$  está definido por uma reta (o seu traço horizontal –  $h_p$ ) e pela sua orientação (é dado o ângulo que o plano  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção).

### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $h$  e o plano  $p$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $h$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $p$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $r$  e uma reta ortogonal ao plano  $p$  e concorrente com a reta  $h$  (a reta  $p$ ). Assim, por um ponto  $P$  qualquer, da reta  $h$ , conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $p$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Como oportunamente se estudou, qualquer reta ortogonal a um plano de rampa é necessariamente uma reta de perfil, pelo que a reta  $p$  é necessariamente uma **reta de perfil**. Assim, é possível desenhar, de forma imediata, as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $P$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $P$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

Assim, recorreu-se a uma reta  $a$ , de perfil, pertencente ao plano  $\rho$  – nesta situação, a reta  $a$  está definida por um ponto e uma direção. O ponto que define a reta  $a$  é o seu traço horizontal (o ponto  $H$ ), que se situa sobre o traço horizontal do plano ( $h_p$ ). A direção da reta  $a$  é dada pelo ângulo que a reta faz com o Plano Horizontal de Projeção, que é igual ao ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção. Salienta-se que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta  $a$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $p$ .

Note que, sendo dado o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção, esse ângulo corresponde ao ângulo que as retas de perfil do plano  $\rho$  fazem com o Plano Horizontal de Projeção. Assim, o ângulo que a reta  $a$  faz com o Plano Horizontal de Projeção tem a mesma amplitude do que o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano de perfil que contém a reta  $a$ , que não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, a reta  $a$  é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas  $p$  e  $a$ . Assim, também por isso, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas, o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas (e que contém o ângulo que a reta  $a$  faz com o Plano Horizontal de Projeção). Assim, o ângulo que a reta  $a$  faz com o Plano Horizontal de Projeção é o ângulo que a reta  $a$  faz com o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ).

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $a$ ), o que nos permitiu determinar  $H_r$ . Em rebatimento, o ângulo que a reta  $a$  faz com o traço horizontal do plano ( $h_\pi$ ) já está em verdadeira grandeza, no ângulo entre a reta  $a_r$  (a reta  $a$  rebatida) e  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  em rebatimento). Assim, por  $H_r$  (o ponto  $H$  rebatido) conduziu-se  $a_r$  (a reta  $a$  rebatida) fazendo, com  $h_{\pi_r}$ , um ângulo de  $30^\circ$  e garantindo-se, ainda, que o traço frontal da reta  $a$  tem cota positiva (para que o traço horizontal do plano  $\rho$  se situe no **SPFS**). Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de  $H_r$ , aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo. Note que não se determinou nem o traço frontal da reta  $a$  nem o traço frontal do plano  $\rho$ , pois nenhum desses dois elementos é pedido no enunciado. No entanto, salienta-se que se garantiu a informação dada no enunciado (de que o traço frontal do plano  $\rho$  se situa no **SPFS**), mesmo sem a sua determinação..

Em seguida, rebateu-se o ponto  $P$ , o que nos permitiu determinar  $P_r$ . Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , perpendicular a  $a_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $a$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta  $p$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ .

Sobre a reta  $p$ , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $A_r$ . O ponto  $A$  é o ponto que nos permitirá definir a reta  $p$ . Nesta situação, optou-se por escolher o ponto de interseção das duas retas (as retas  $p$  e  $a$ ) – o ponto  $A$  é o ponto de concorrência das duas retas ( $p$  e  $a$ ) e é, assim, o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ , mas poderia ser outro ponto qualquer. Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $A$ . A reta  $p$  (definida pelos pontos  $P$  e  $A$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Está concluída a **Etapa 1 do método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano** – o plano definido pelas retas  $h$  e  $p$  é o plano que contém a reta  $h$  e é ortogonal ao plano  $\rho$ .

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Tendo em conta que nem as retas  $h$  e  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes, a determinação dos pontos de interseção das retas  $h$  e  $p$  com o plano  $\rho$  teria de se processar com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Conclui-se, portanto, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.

Assim, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.

**Etapa 1.** Esta primeira etapa já foi cumprida – o plano definido pela reta  $h$  (a reta dada) e a reta  $p$  (a reta concorrente com a reta  $h$  e ortogonal ao plano  $\rho$ ) é o plano que contém a reta  $h$  e é ortogonal ao plano  $\rho$ .

**Etapa 2.** Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta  $h$  e a reta  $p$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano horizontal (de nível) que contém a reta  $h$ . Nesse sentido, representou-se o plano  $v$  pelo seu traço frontal ( $f_v$ ), que está coincidente com a projeção frontal da reta  $h$  ( $h_2$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Em seguida, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria reta  $h$  – note que a reta  $h$  é a reta de interseção entre o plano  $v$  e o plano definido pelas retas  $h$  e  $p$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A reta  $h$  é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se, imediatamente,  $h_r \equiv h_l$ . O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r' \equiv P_l$ . Note que o ponto  $P_r'$  é o ponto  $P$  no seu segundo rebatimento –  $P_r'$  é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $h$  e  $p$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta  $p_r'$  (a reta  $p$  rebatida, no seu segundo rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ , em rebatimento. Nesse sentido, recorreu-se ao rebatimento de um outro ponto da reta  $p$  – o ponto  $A$ , por exemplo.

O rebatimento do ponto  $A$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $A_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediou-se a distância do ponto  $A$  ao plano  $v$  (a cota de  $A$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , determinando  $A_r'$ . Note que o ponto  $A_r'$  é o ponto  $A$  no seu segundo rebatimento –  $A_r'$  é o ponto  $A$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $h$  e  $p$ .

Em seguida, desenhou-se a reta  $p$  em rebatimento. A reta  $p_r'$  (a reta  $p$  rebatida no seu segundo rebatimento) passa por  $P_r'$  e  $A_r'$  (está definida por dois pontos). Note que a reta  $p_r'$  é a reta  $p$  no seu segundo rebatimento –  $p_r'$  é a reta  $p$  rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $h$  e  $p$ .

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre as retas  $h$  e  $p$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $h_r$  e  $p_r'$ , com vértice em  $P_r'$ . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $90^\circ - \beta^\circ$ .

**Etapa 3.** O ângulo entre a reta  $h$  e o plano  $\rho$  é o **ângulo complementar** do ângulo entre as retas  $h$  e  $p$ .

Nesse sentido, desenhou-se uma semirreta perpendicular a  $h_r$  e com extremidade em  $P_r'$ . O ângulo entre esta semirreta e a reta  $p_r'$  é o **ângulo complementar** do ângulo anterior, pelo que este ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $h$  faz com o plano  $\rho$ . Assim, identificou-se esse ângulo a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\beta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $h$  e o traço horizontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\pi$ , de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  bem como, ainda, de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano definido pelas retas  $h$  e  $p$ , que nos permitiram determinar o ângulo complementar do ângulo pretendido).

## 473.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $g$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

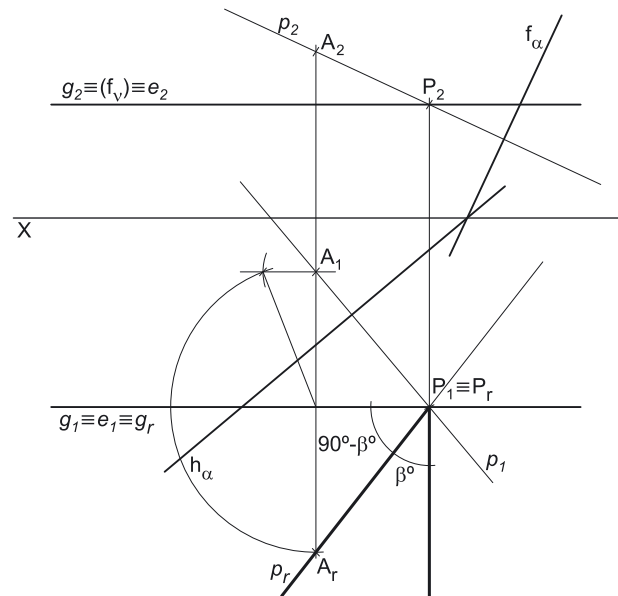
O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $g$  e o plano  $\alpha$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $g$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\alpha$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $g$  e uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  e concorrente com a reta  $g$  (a reta  $p$ ). Assim, por um ponto  $P$ , qualquer, da reta  $g$ , conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . O plano definido pelas retas  $g$  e  $p$  é o plano que contém a reta  $g$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Tendo em conta que nem as retas  $g$  e  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, a determinação dos pontos de interseção das retas  $g$  e  $p$  com o plano  $\alpha$  (que nos permitiria determinar a reta de interseção entre os dois planos) teria de se processar com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Conclui-se, portanto, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.

Assim, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.

**Etapa 1.** Esta primeira etapa já foi executada – o plano definido pela reta  $g$  (a reta dada) e a reta  $p$  (a reta concorrente com a reta  $g$  e ortogonal ao plano  $\alpha$ ) é o plano que contém a reta  $g$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapla 2.** Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta  $g$  e a reta  $p$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano horizontal (de nível) que contém a reta  $g$ . Nesse sentido, representou-se o plano  $v$  pelo seu traço frontal ( $f_v$ ), que está coincidente com a projeção frontal da reta  $g$  ( $g_2$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Em seguida, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria reta  $g$  – note que a reta  $g$  é a reta de interseção entre o plano  $v$  e o plano definido pelas retas  $g$  e  $p$ .

A reta  $g$  é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se, imediatamente,  $g_r \equiv g_f$ . O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_f$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ , em rebatimento. Nesse sentido, recorreu-se ao rebatimento de um outro ponto qualquer da reta  $p$  – o ponto  $A$  (que se determinou em seguida).

O rebatimento do ponto  $A$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $A_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $A$  ao plano  $v$  (a cota de  $A$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , determinando  $A_r$ .

Em seguida, desenhou-se a reta  $p$  em rebatimento. A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $P_r$  e  $A_r$  (está definida por dois pontos). A verdadeira grandeza do ângulo formado entre as retas  $g$  e  $p$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $g_r$  e  $p_r$ , com vértice em  $P_r$ . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $90^\circ - \beta^\circ$ .

**Etapla 3.** O ângulo entre a reta  $g$  e o plano  $\alpha$  é o **ângulo complementar** do ângulo entre as retas  $g$  e  $p$ .

Nesse sentido, desenhou-se uma semirreta perpendicular a  $g_r$  e com extremidade em  $P_r$ . O ângulo entre esta semirreta e a reta  $p_r$  é o **ângulo complementar** do ângulo anterior, pelo que este ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $g$  faz com o plano  $\alpha$ . Assim, identificou-se esse ângulo a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\beta^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $g$  e os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas  $g$  e  $p$ , que nos permitiram determinar o ângulo complementar do ângulo pretendido).

## 474.

### Dados:

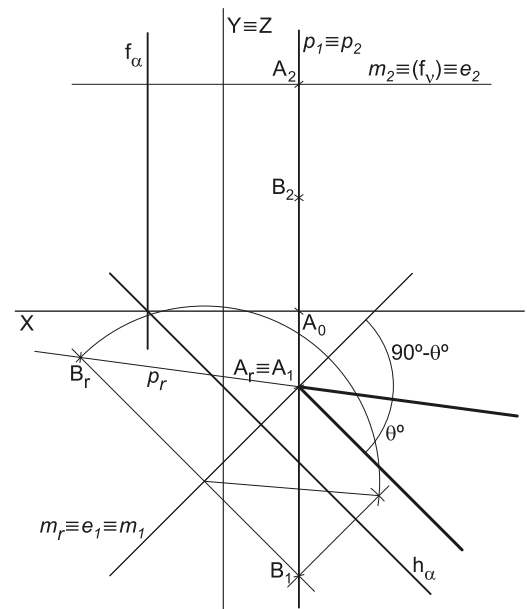
Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. A reta  $p$  está definida pelos pontos  $A$  e  $B$  mas, porque se trata de uma reta de perfil, as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $p$  e o plano  $\alpha$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapla 1.** Pela reta  $p$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\alpha$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $p$  e uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  e concorrente com a reta  $p$  (a reta  $m$ ). Assim, pelo ponto  $A$  conduziu-se uma reta  $m$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . Note que a reta  $m$  é uma reta horizontal (de nível), pois o plano  $\alpha$  é um plano vertical. O plano definido pelas retas  $p$  e  $m$  (concorrentes no ponto  $A$ ) é o plano que contém a reta  $p$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

**Etapla 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Note que, apesar de o plano  $\alpha$  ser um plano projetante horizontal, a determinação da reta de interseção entre os dois planos **não se processa de uma forma direta** – a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  (de perfil) com o plano  $\alpha$  carece sempre do recurso a um processo geométrico auxiliar, pois as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Conclui-se, assim, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Dessa forma, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.

**Etapa 1.** Esta primeira etapa já foi cumprida – o plano definido pela reta  $p$  (a reta dada) e a reta  $m$  (a reta concorrente com a reta  $p$  e ortogonal ao plano  $\alpha$ ) é o plano que contém a reta  $p$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

**Etapa 2.** Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta  $p$  e a reta  $m$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a reta  $m$ . Nesse sentido, representou-se o plano  $v$  pelo seu traço frontal ( $f_v$ ), que está coincidente com a projeção frontal da reta  $m$  ( $m_2$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Em seguida, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria reta  $m$  – note que a reta  $m$  é a reta de interseção entre o plano  $v$  e o plano definido pelas retas  $p$  e  $m$ .

A reta  $m$  é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se, imediatamente,  $m_r \equiv m_f$ . O ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_f$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p_r$  em rebatimento. Nesse sentido, recorreu-se ao rebatimento de um outro ponto da reta  $p$  – o ponto  $B$  (que é o único ponto conhecido da reta  $p$ , para além do ponto  $A$ ).

O rebatimento do ponto  $B$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $B_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediou-se a distância do ponto  $B$  ao plano  $v$  (a cota de  $B$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $B$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $B$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ , determinando  $B_r$ .

Em seguida, desenhou-se a reta  $p$  em rebatimento. A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $A_r$  e  $B_r$  (está definida por dois pontos). A verdadeira grandeza do ângulo formado entre as retas  $p$  e  $m$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $p_r$  e  $m_r$  com vértice em  $A_r$ . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $90^\circ - \theta^\circ$ .

**Etapa 3.** O ângulo entre a reta  $p$  e o plano  $\alpha$  é o **ângulo complementar** do ângulo entre as retas  $p$  e  $m$ .

Nesse sentido, desenhou-se uma semirreta perpendicular a  $m_r$  e com extremidade em  $A_r$ . O ângulo entre esta semirreta e a reta  $p_r$  é o **ângulo complementar** do ângulo anterior, pelo que este ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $p$  faz com o plano  $\alpha$ . Assim, identificou-se esse ângulo a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$  e os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $m$ , do plano  $v$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $m$ , que nos permitiram determinar o ângulo complementar do ângulo pretendido).

## 475.

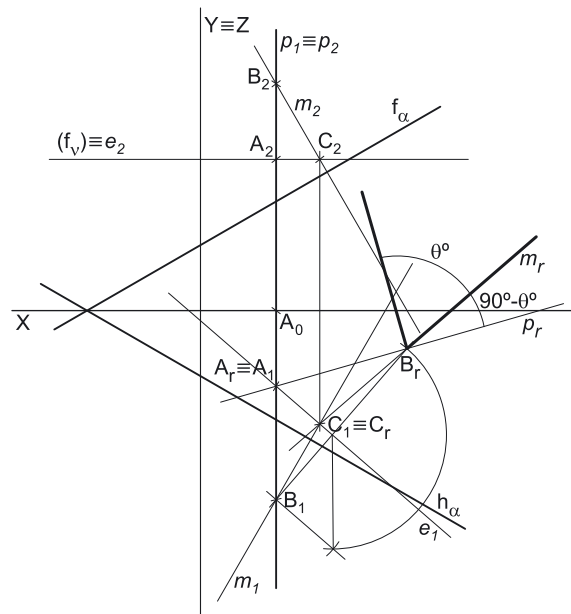
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). A reta  $p$  está definida pelos pontos  $A$  e  $B$  mas, porque se trata de uma reta de perfil, as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $p$  e o plano  $\alpha$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $p$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\alpha$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $p$  e uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  e concorrente com a reta  $p$  (a reta  $m$ ). Assim, pelo ponto  $B$  conduziu-se uma reta  $m$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . O plano definido pelas retas  $p$  e  $m$  (concorrentes no ponto  $B$ ) é o plano que contém a reta  $p$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Tendo em conta que nem as retas  $p$  e  $m$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, a determinação dos pontos de interseção das retas  $p$  e  $m$  com o plano  $\alpha$  teria de se processar com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Conclui-se, portanto, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.

Assim, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.

**Etapa 1.** Esta primeira etapa já foi cumprida – o plano definido pela reta  $p$  (a reta dada) e a reta  $m$  (a reta concorrente com a reta  $p$  e ortogonal ao plano  $\alpha$ ) é o plano que contém a reta  $p$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

**Etapa 2.** Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta  $p$  e a reta  $m$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para um plano horizontal (de nível)  $v$  qualquer. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por conduzir o plano  $v$  pelo ponto  $A$  (o único ponto da reta  $p$  que é conhecido, para além do ponto  $B$ ). Nesse sentido, representou-se o plano horizontal (de nível)  $v$ , pelo seu traço frontal, passando por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos (o plano  $v$  e o plano definido pelas retas  $p$  e  $m$ ). A reta  $e$  (a charneira) está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (que é, imediatamente, o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $v$ ) e o ponto  $C$  (o ponto de interseção da reta  $m$  com o plano  $v$ ). O ponto  $C$  foi determinado a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Os pontos  $A$  e  $C$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$  e  $C_r \equiv C_1$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $B$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto  $B$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $B_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $B$  ao plano  $v$  (a cota de  $B$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $B$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $B$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ , determinando  $B_r$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $A_r$  e  $B_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $m_r$  (a reta  $m$  rebatida) passa por  $C_r$  e  $B_r$  (está igualmente definida por dois pontos). A verdadeira grandeza do ângulo formado entre as retas  $p$  e  $m$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $p_r$  e  $m_r$ , com vértice em  $B_r$ . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $90^\circ - \theta^\circ$ .

**Etapa 3.** O ângulo entre a reta  $p$  e o plano  $\alpha$  é o **ângulo complementar** do ângulo entre as retas  $p$  e  $m$ .

Nesse sentido, desenhou-se uma semirreta perpendicular a  $p_r$  e com extremidade em  $B_r$ . O ângulo entre esta semirreta e a reta  $m_r$  é o **ângulo complementar** do ângulo anterior, pelo que este ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $p$  faz com o plano  $\alpha$ . Assim, identificou-se esse ângulo a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$  e os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $m$ , do plano  $v$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $m$ , que nos permitiram determinar o ângulo complementar do ângulo pretendido).

## 476.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. A reta  $p$  está definida pelos pontos  $A$  e  $B$  mas, porque se trata de uma reta de perfil, as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapla 1.** Pela reta  $p$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\rho$  – o plano  $\pi$ . Um plano ortogonal a um plano de rampa é um plano que contém a «família» de retas ortogonais ao plano de rampa, que é, necessariamente, uma «família» de retas de perfil. Assim, o plano tem de conter essa «família» de retas de perfil ortogonal ao plano de rampa) e contém, ainda, a reta  $p$ , que é outra reta de perfil. Consta-se, assim, que o plano contém duas «famílias» de retas de perfil, pelo que o plano é necessariamente um plano de perfil – o plano  $\pi$ . O plano  $\pi$  é, pois, o plano projetante da reta  $p$ .

**Etapla 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\pi$  e o plano  $\rho$ ). A reta  $i$  é uma reta de perfil e está definida por dois pontos (os seus traços nos planos de projeção – os pontos  $F$  e  $H$ ).

**Etapla 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $p$  e a reta  $i$ .

Esse ângulo está contido no plano  $\pi$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\pi$  (o plano que contém o ângulo) num plano frontal (de frente).

Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\pi$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\pi$ , o eixo  $X'$  é paralelo a  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), ou seja, é perpendicular ao eixo  $X$ . As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $A$ ).  $B_4$  é a projeção do ponto  $B$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  (que é 6 cm – a cota de  $B$ ). A projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ) passa por  $A_4$  e  $B_4$  (está definida por dois pontos).

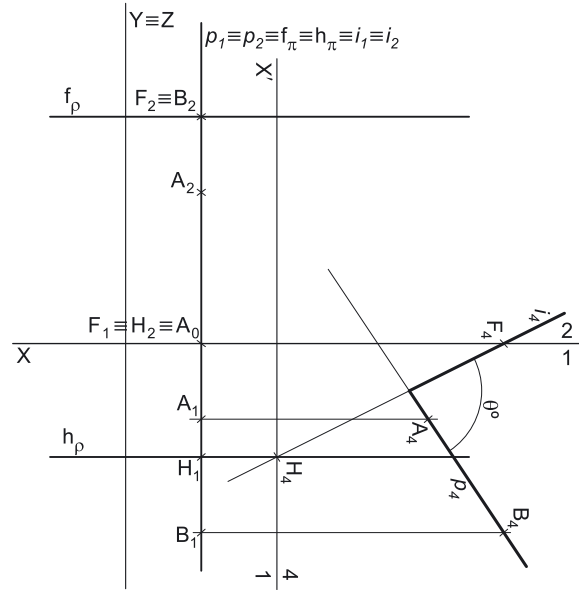
$F_4$  é a projeção do ponto  $F$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$  (que é 6 cm – a cota de  $F$ , que é a cota de  $f_p$ ).  $H_4$  é a projeção do ponto  $H$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) –  $H_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois o ponto  $H$  tem cota nula. A projeção da reta  $i$  no **plano 4** ( $i_4$ ) passa por  $F_4$  e  $H_4$  (está definida por dois pontos).

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\pi$  é um plano frontal (de frente), paralelo ao **plano 4**, o ângulo entre as duas retas projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Assim, o ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$ ) é qualquer dos dois menores ângulos formados entre  $p_4$  e  $i_4$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo só se poderia processar com o recurso a um processo geométrico auxiliar (como é o caso da mudança do diedro de projeção efetuada) mas que, na prática, tal não é necessário. Assim, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$  e os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).



## 477.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $A$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (a direção dada no enunciado) mas ainda assim, porque se trata de uma reta de perfil, as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. O plano  $\rho$  está definido por uma reta (o eixo  $X$ , onde se situam os seus traços) e um ponto exterior à reta (o ponto  $A$ ).

**Resolução:**

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapla 1.** Pela reta  $p$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\rho$  – o plano  $\pi$ . Um plano ortogonal a um plano passante (que é um plano de rampa) é um plano que contém a «família» de retas ortogonais ao plano passante, que é, necessariamente, uma «família» de retas de perfil. Assim, o plano tem de conter essa «família» de retas de perfil ortogonal ao plano passante) e contém, ainda, a reta  $p$ , que é outra reta de perfil. Constata-se, assim, que o plano contém duas «famílias» de retas de perfil, pelo que o plano é necessariamente um plano de perfil – o plano  $\pi$ . O plano  $\pi$  é, pois, o plano projetante da reta  $p$ .

**Etapla 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\pi$  e o plano  $\rho$ ). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $i$  é necessariamente uma reta passante (porque é uma reta de perfil de um plano passante), pelo que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto – o ponto  $M$ , cujas projeções se determinaram imediatamente. O ponto  $M$  é, necessariamente, o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\pi$ . Já temos um ponto para definir a reta  $i$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano  $\rho$  são insuficientes para definir a reta  $i$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\rho$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se à reta  $g$ , como reta auxiliar do plano  $\rho$ . A reta  $g$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $\rho$  e está definida por um ponto (o ponto  $A$  – o ponto que define o plano  $\rho$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). Em seguida, determinou-se o ponto  $A'$ , que é o ponto de interseção da reta  $g$  com o plano  $\pi$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por dois pontos (os pontos  $M$  e  $A'$ ).

**Etapla 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta  $p$  e a reta  $i$ .

Esse ângulo está contido no plano  $\pi$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\pi$  (o plano que contém o ângulo) num plano frontal (de frente).

Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\pi$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

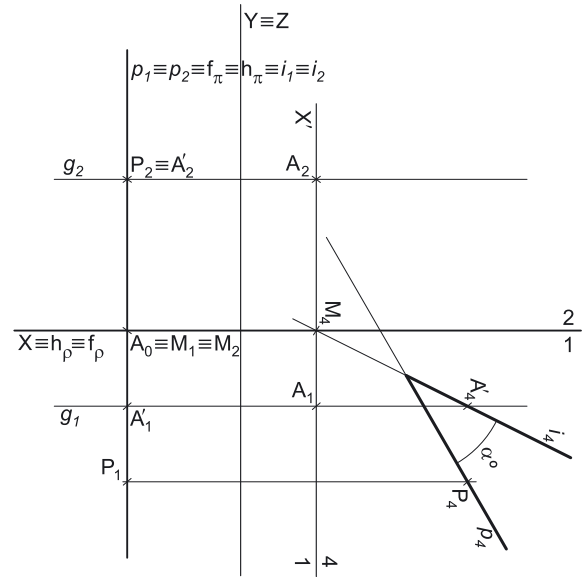
- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\pi$ , o eixo  $X'$  é paralelo a  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), ou seja, é perpendicular ao eixo  $X$ . As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$A'_4$  é a projeção do ponto  $A'$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A'_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A'_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $A'$ ).  $M_4$  é a projeção do ponto  $M$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) –  $M_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois o ponto  $M$  tem cota nula. A projeção da reta  $i$  no **plano 4** ( $i_4$ ) passa por  $A'_4$  e  $M_4$  (está definida por dois pontos).

$P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $P$ ). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (paralela ao **plano 4**), pelo que o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4** (no ângulo entre a  $p_4$  e o eixo  $X'$ ). Por outro lado, é dado o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Frontal de Projeção e não o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção. No entanto, tendo em conta que o os dois planos de projeção são ortogonais entre si, o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção é o ângulo complementar do ângulo dado – a reta  $p$  faz, assim, um ângulo de  $30^\circ$  com o Plano Horizontal de Projeção.

(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no plano 4) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no plano 4) fazendo, com o eixo  $X'$ , um ângulo de  $30^\circ$  e garantindo-se, ainda, que o traço horizontal da reta  $p$  tem afastamento negativo (para que o traço horizontal se situe no **SPHP**, como o enunciado pede expressamente). Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo de  $30^\circ$  a partir de  $P_4$ , aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo plano 1 e pelo plano 4), o plano  $\pi$  é um plano frontal (de frente), paralelo ao plano 4, o ângulo entre as duas retas projeta-se em verdadeira grandeza no plano 4. Assim, o ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$ ) é qualquer dos dois menores ângulos formados entre  $p_4$  e  $i_4$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo só se poderia processar com o recurso a um processo geométrico auxiliar (como é o caso da mudança do diedro de projeção efetuada) mas que, na prática, tal não é necessário. Assim, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ ). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 478.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é uma reta do  $\beta_{1/3}$  (retas do  $\beta_{1/3}$  têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). A reta  $r$  é necessariamente uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto que se identificou imediatamente – o ponto  $A$ . O plano  $\rho$  está definido por uma reta (o eixo  $X$ ) e pela sua orientação (é dado o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Frontal de Projeção).

### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\rho$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

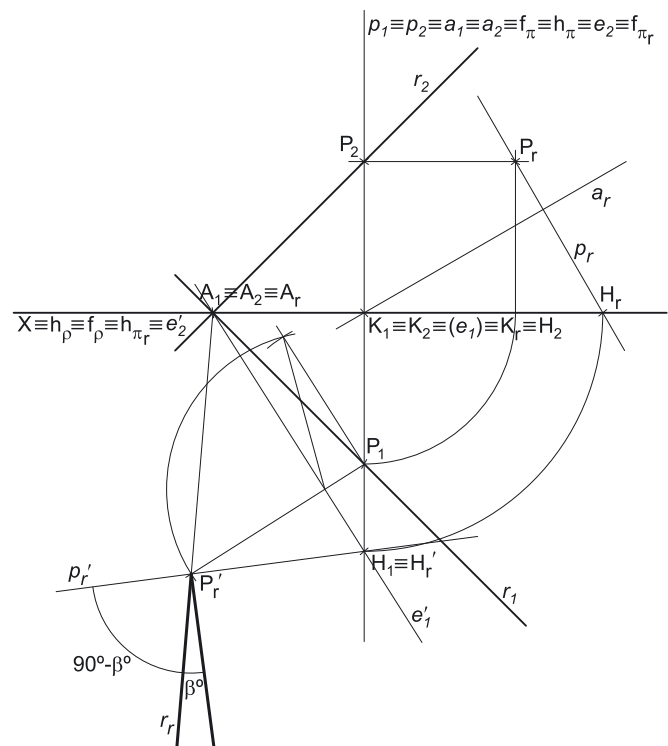
**Etapa 1.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\rho$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $r$  e uma reta ortogonal ao plano  $\rho$  e concorrente com a reta  $r$  (a reta  $p$ ). Assim, por um ponto  $P$  qualquer, da reta  $r$ , conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$ .

Como oportunamente se estudou, qualquer reta ortogonal a um plano de rampa é necessariamente uma reta de perfil, pelo que a reta  $p$  é necessariamente uma **reta de perfil**. Assim, é possível desenhar, de forma imediata, as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $P$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $P$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano  $\rho$ ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

Assim, recorreu-se a uma reta  $a$ , de perfil, pertencente ao plano  $\rho$  – nesta situação, a reta  $a$  é uma reta de perfil passante e está definida por um ponto e uma direção. O ponto que define a reta  $a$  é o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  (o ponto  $K$ ). A direção da reta  $a$  é dada pelo ângulo que a reta faz com o Plano Frontal de Projeção, que é igual ao ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Frontal de Projeção. Salienta-se que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta  $a$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $p$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que, sendo dado o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Frontal de Projeção, esse ângulo corresponde ao ângulo que as retas de perfil do plano  $\rho$  fazem com o Plano Frontal de Projeção. Assim, o ângulo que a reta  $a$  faz com o Plano Frontal de Projeção tem a mesma amplitude do que o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Frontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano de perfil que contém a reta  $a$ , que não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, a reta  $a$  é, também ela, uma reta de perfil (passante), cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas  $p$  e  $a$ . Assim, também por isso, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas, o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas (e que contém o ângulo que a reta  $a$  faz com o Plano Frontal de Projeção). Assim, o ângulo que a reta  $a$  faz com o Plano Frontal de Projeção é o ângulo que a reta  $a$  faz com o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ).

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se os pontos  $P$  e  $K$ . O ponto  $K$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $K_r \equiv K_2 \equiv K_1$ . Em rebatimento, o ângulo que a reta  $a$  faz com o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ) já está em verdadeira grandeza, no ângulo entre a reta  $a_r$  (a reta  $a$  rebatida) e  $f_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  em rebatimento). Assim, por  $K_r$  (o ponto  $K$  rebatido) conduziu-se  $a_r$  (a reta  $a$  rebatida) fazendo, com  $f_{\pi_r}$ , um ângulo de  $60^\circ$ . Note que se garantiu que a reta  $a_r$  passa pelo quadrante onde se situa  $P_r$ , pois o ponto  $P$  é um ponto do  $1^\text{a}$  Diedro e a reta  $a$  tem de atravessar o  $1^\text{a}$  Diedro (que é um dos *Diedros* que o plano  $\rho$  atravessa). Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de  $K_r$ , aquela que a resolução apresenta é a que garante isso mesmo.

Em seguida, pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $p_r$ , perpendicular a  $a_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $a$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta  $p$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$ .

Sobre a reta  $p_r$ , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $H_r$ . O ponto  $H$  é o ponto que nos permitirá definir a reta  $p$  em projeções – nesta situação, o ponto  $H$  é o traço horizontal da reta  $p$ . Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $H$ . A reta  $p$  (definida pelos pontos  $P$  e  $H$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Está concluída a **Etapa 1 do método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano** – o plano definido pelas retas  $r$  e  $p$  é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\rho$ .

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Tendo em conta que nem as retas  $r$  e  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes, a determinação dos pontos de interseção das retas  $r$  e  $p$  com o plano  $\rho$  teria de se processar com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Conclui-se, portanto, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.

Assim, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.

**Etapa 1.** Esta primeira etapa já foi cumprida – o plano definido pela reta  $r$  (a reta dada) e a reta  $p$  (a reta concorrente com a reta  $r$  e ortogonal ao plano  $\rho$ ) é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\rho$ .

**Etapa 2.** Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta  $r$  e a reta  $p$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é o traço horizontal do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ . A reta  $e$  (a charneira) está, assim, definida por dois pontos – o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $p$ , determinado previamente em rebatimento) e o ponto  $A$  (o ponto de concorrência da reta  $r$  com o eixo  $X$ , que é o ponto da reta  $r$  que tem cota nula).

Os pontos  $A$  e  $H$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $H_r' \equiv H_1$  e  $A_r \equiv A_1 \equiv A_2$ . Note que o ponto  $H_r'$  é o ponto  $H$  no seu segundo rebatimento –  $H_r'$  é o ponto  $H$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir cada uma das duas retas em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento do ponto  $P$ , que é o vértice do ângulo (e, portanto, é um ponto que pertence às duas retas em simultâneo).

O rebatimento do ponto  $P$  (pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ ) processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a **cota** do ponto  $P$  e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $P_1$ , determinando  $P_r'$ . O ponto  $P_r'$  é o ponto  $P$  rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $r_r'$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $A_r$  e  $H_r'$  (está definida por dois pontos). A reta  $p_r'$  (a reta  $p$  rebatida no seu segundo rebatimento) passa por  $P_r'$  e  $H_r'$  (está igualmente definida por dois pontos). Note que a reta  $p_r'$  é a reta  $p$  no seu segundo rebatimento – a reta  $p_r'$  é a reta  $p$  rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre as retas  $r$  e  $p$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $r_r$  e  $p_r'$ , com vértice em  $P_r'$ . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $90^\circ - \beta^\circ$ .

**Etapa 3.** O ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\rho$  é o **ângulo complementar** do ângulo entre as retas  $r$  e  $p$ .

Nesse sentido, desenhou-se uma semirreta perpendicular a  $p_r'$  e com extremidade em  $P_r'$ . O ângulo entre esta semirreta e a reta  $r_r$  é o **ângulo complementar** do ângulo anterior, pelo que este ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $r$  faz com o plano  $\rho$ . Assim, identificou-se esse ângulo a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\beta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ ). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\pi$ , de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  bem como, ainda, de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ , que nos permitiram determinar o ângulo complementar do ângulo pretendido).

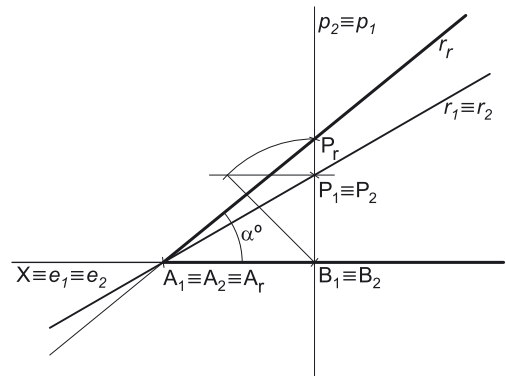
## 479.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções coincidentes, pois é uma reta do  $\beta_{2/4}$  (retas do  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções coincidentes). A reta  $r$  é necessariamente uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto que se identificou imediatamente – o ponto  $A$ . O  $\beta_{1/3}$  é um plano passante que está definido por uma reta (o eixo  $X$ ) e pela sua orientação (faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção e atravessa os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros).

### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $r$  e o  $\beta_{1/3}$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.



**Etapa 1.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $r$  e uma reta ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  e concorrente com a reta  $r$  (a reta  $p$ ). Assim, por um ponto  $P$  qualquer, da reta  $r$ , conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ .

Como oportunamente se estudou, qualquer reta ortogonal a um plano de rampa (o  $\beta_{1/3}$  é um plano de rampa) é necessariamente uma reta de perfil, pelo que a reta  $p$  é necessariamente uma **reta de perfil**. Assim, é possível desenhar, de forma imediata, as projeções da reta  $p$ , de perfil, passando pelo ponto  $P$ . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta  $p$  não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao  $\beta_{1/3}$  (existem infinitas retas de **retas de perfil** passando pelo ponto  $P$  e com as projeções desenhadas, mas apenas uma delas é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ ).

No entanto, a reta  $p$  contém um ponto do  $\beta_{2/4}$  (o ponto  $P$ ) e é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que, **nesta situação particular**, a reta  $p$  é **necessariamente** uma reta de perfil do  $\beta_{2/4}$ . Nesse sentido, é possível, de forma imediata, determinar quaisquer pontos da reta  $p$  para além do ponto  $P$  – todos os pontos da reta  $p$  têm as suas projeções coincidentes (porque pertencem ao  $\beta_{2/4}$ ). Assim, foi possível, imediatamente, determinar um outro ponto da reta  $p$  – o ponto  $B$  (que é o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ).

Por fim, atendendo a que a reta  $r$  é uma reta do  $\beta_{2/4}$  e que, como acima se referiu, a reta  $p$  é uma outra reta do  $\beta_{2/4}$ , o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (o plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ ) é, afinal o próprio  $\beta_{2/4}$ .

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o  $\beta_{1/3}$ , que é o plano dado, e o  $\beta_{2/4}$ , que é o plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  que contém a reta  $r$ ) é o eixo  $X$ .

**Etapa 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo entre a reta  $r$  (a reta dada) e o eixo  $X$  (a reta de interseção entre os dois planos) e, assim, o ângulo entre a reta  $r$  e o  $\beta_{1/3}$ . Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas (o  $\beta_{2/4}$ ), que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do  $\beta_{2/4}$  (o plano que contém o ângulo) para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é o próprio eixo  $X$ . O eixo  $X$  é a charneira do rebatimento, pelo que roda sobre si próprio. É necessário, apenas, rebater a reta  $r$ .

O ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1 \equiv A_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta  $r$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento do ponto  $P$ , que é um ponto da reta  $r$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O rebatimento do ponto **P** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por **P<sub>1</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento e que, no desenho, é a própria reta **p**) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se **a cota** do ponto **P** e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **P** em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices no eixo **X** – a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **P**, até à perpendicular à charneira que passa por **P<sub>1</sub>**, determinando **P<sub>r</sub>**.

Em seguida, desenhou-se a reta **r** em rebatimento – a reta **r<sub>r</sub>** (a reta **r** rebatida) passa por **A<sub>r</sub>** e por **P<sub>r</sub>** (está definida por dois pontos). A verdadeira grandeza do ângulo formado entre a reta **r** e o  $\beta_{1/3}$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre a reta **r<sub>r</sub>** e o eixo **X**. Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta **r**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p** e de todos os traçados referentes ao rebatimento do  $\beta_{2/4}$ , que nos permitiram determinar o ângulo pretendido).

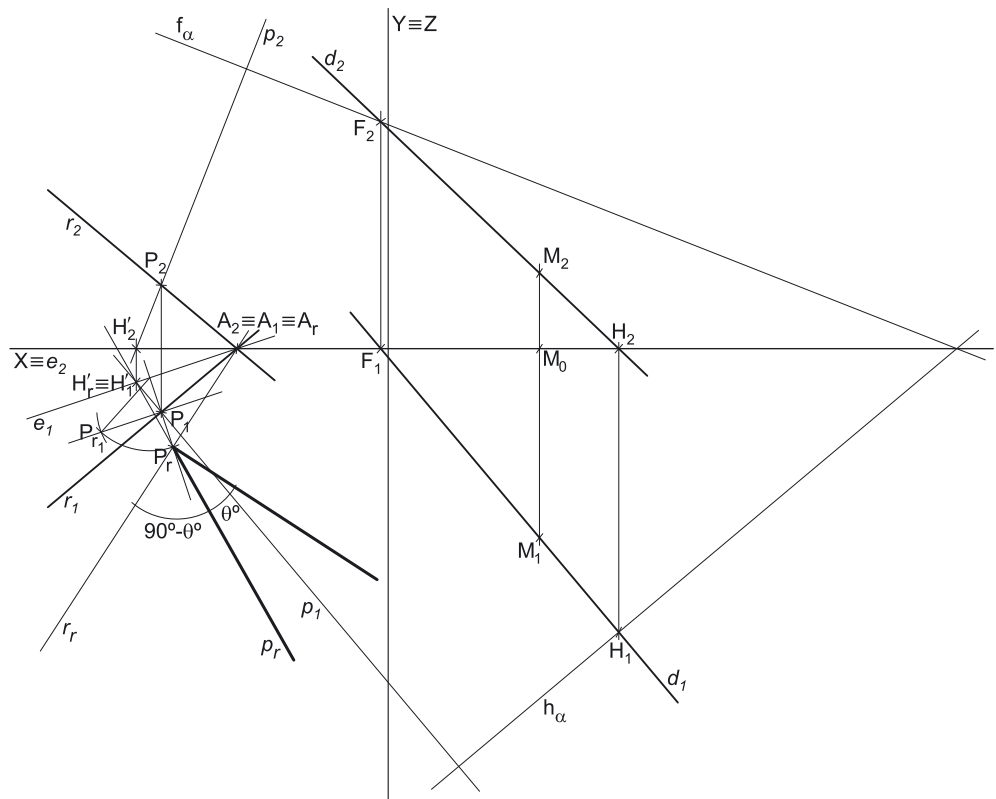
## 480.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas **r** e **d**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta **r** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é uma reta do  $\beta_{1/3}$  (retas do  $\beta_{1/3}$  têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**). A reta **r** é necessariamente uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo **X** num ponto que se identificou imediatamente – o ponto **A**.

#### Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta **r** e o plano  $\alpha$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduzir-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.



**Etapa 1.** Pela reta **r** conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\alpha$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta **r** e uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  e concorrente com a reta **r** (a reta **p**). Assim, há que conduzir, por um ponto qualquer da reta **r**, uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\alpha$ .

Acontece que, neste momento, só temos uma reta do plano  $\alpha$  – a reta **d**. A reta **d**, por outro lado, é uma reta oblíqua, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e a reta **r** não é direta em nenhuma das suas projeções. Assim, para garantir a ortogonalidade da reta **p** ao plano  $\alpha$ , necessitamos de duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  e, preferencialmente, uma reta horizontal (de nível) e uma reta frontal (de frente), para que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\alpha$  se processe de forma direta. Essas duas retas podem ser, por exemplo, os traços do plano  $\alpha$ . Assim, começou-se por determinar os traços do plano  $\alpha$ .

Começamos pelo traço horizontal do plano (**h<sub>α</sub>**), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da reta **d**, o ponto **H**. Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Uma vez que a reta **d** é uma reta de maior declive do plano  $\alpha$ , sabe-se que a reta **d** é perpendicular ao traço horizontal do plano (e a todas as retas horizontais do plano), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir **h<sub>α</sub>** – **h<sub>α</sub>** passa por **H<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **H**) e é perpendicular a **d<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **d**). Assim, **h<sub>α</sub>** (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é perpendicular a **d<sub>1</sub>**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $d$ , o ponto  $F$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços do plano são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\alpha - f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos (o ponto  $F$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano)

Assim, por um ponto  $P$ , qualquer, da reta  $r$ , conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$  (as projeções da reta  $p$  são ortogonais aos traços homónimos do plano  $\alpha$ ). O plano definido pelas retas  $r$  e  $p$  é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Tendo em conta que nem as retas  $r$  e  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, a determinação dos pontos de interseção das retas  $r$  e  $p$  com o plano  $\alpha$  teria de se processar com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Conclui-se, portanto, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.

Assim, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.

**Etapa 1.** Esta primeira etapa já foi cumprida – o plano definido pela reta  $r$  (a reta dada) e a reta  $p$  (a reta concorrente com a reta  $r$  e ortogonal ao plano  $\alpha$ ) é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

**Etapa 2.** Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta  $r$  e a reta  $p$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o traço horizontal do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ . A reta  $e$  (a charneira) está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o ponto de concorrência da reta  $r$  com o eixo  $X$ , que é o ponto da reta  $r$  que tem cota nula) e o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $p$ ), que se determinou imediatamente.

Os pontos  $A$  e  $H'$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1 \equiv A_2$  e  $H'_r \equiv H'_1$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $P$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto  $P$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a cota do ponto  $P$  e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $P_1$ , determinando  $P_r$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $P_r$  e  $A_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $P_r$  e  $H'_r$  (está igualmente definida por dois pontos). A verdadeira grandeza do ângulo formado entre as retas  $r$  e  $p$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $r_r$  e  $p_r$ , com vértice em  $P_r$ . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $90^\circ - \theta^\circ$ .

**Etapa 3.** O ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\alpha$  é o **ângulo complementar** do ângulo entre as retas  $r$  e  $p$ .

Nesse sentido, desenhou-se uma semirreta perpendicular a  $r_r$  e com extremidade em  $p_r$ . O ângulo entre esta semirreta e a reta  $p_r$  é o **ângulo complementar** do ângulo anterior, pelo que este ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta  $r$  faz com o plano  $\alpha$ . Assim, identificou-se esse ângulo a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $r$  e  $d$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os traços do plano  $\alpha$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ , que nos permitiram determinar o ângulo complementar do ângulo pretendido).

## 481.

Por **ângulo entre dois planos** entende-se o retilíneo do menor diedro formado entre os dois planos, ou seja, o ângulo formado entre as retas de interseção dos dois planos com um terceiro plano, ortogonal à aresta do diedro. Assim, o **ângulo entre dois planos** é o ângulo que está contido num plano ortogonal à aresta do diedro e é o ângulo entre as retas de interseção desse plano com os dois planos dados.

## 482.

Os dois processos para determinar a amplitude do diedro entre dois planos distinguem-se sobretudo ao nível dos traçados a executar, sendo que ambos são processos universais (utilizáveis independentemente da situação). De qualquer forma, o recurso a um ou a outro tem a ver, **sobretudo**, com economia de traçados e de raciocínios.

Assim, sempre que o plano ortogonal à aresta do diedro entre os dois planos dados **for projetante e tiver determinação imediata** (têm de se verificar as duas situações), é aconselhável o recurso ao **primeiro método geral**, em função da linearidade dos raciocínios e de traçados decorrentes da utilização desse processo. Por oposição, sempre que o plano ortogonal à aresta do diedro formado entre os dois planos dados **não seja projetante ou não tenha determinação imediata** (ou ambas as situações), o recurso ao **primeiro método geral** reveste-se de grande complexidade ao nível dos traçados e raciocínios, pelo que é aconselhável o recurso ao **segundo método geral**, em função, precisamente, da linearidade de raciocínios e de traçados decorrentes da utilização deste processo.

**483.**

O **primeiro método geral para a determinação do ângulo entre dois planos** consiste na execução sequencial das seguintes etapas: **1.** identificar a aresta do diedro; **2.** conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinar as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**484.**

O **segundo método geral para a determinação do ângulo entre dois planos** consiste na execução sequencial das seguintes etapas: **1.** por um ponto exterior qualquer, conduzir duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**485.**

O **ângulo entre dois planos** é o ângulo formado entre as retas de interseção desses planos com um terceiro plano ortogonal à aresta do diedro (ortogonal aos dois planos dados). Assim, na prática, toda e qualquer situação de **ângulo entre dois planos** redonda, afinal, numa qualquer situação do **ângulo entre duas retas concorrentes** – as retas de interseção entre os planos dados e o plano que contém o ângulo (que é o plano ortogonal à aresta do diedro).

**486.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\gamma$  e  $\varphi$  pelos respectivos traços, em função dos dados. O traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ) passa por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:**

É pedido o ângulo entre os planos  $\gamma$  e  $\varphi$ . O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano  $\gamma$  e o plano  $\varphi$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapla 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\gamma$  e  $\varphi$  é a reta de interseção entre os dois planos, que são dois planos projetantes horizontais. Assim, a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta projetante horizontal (uma reta vertical), que é a única «família» de retas que os dois planos têm em comum. A aresta do diedro está, assim, identificada (mas não determinada, pois não é necessária a sua determinação) – é uma reta vertical.

**Etapla 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta vertical é necessariamente um plano horizontal (de nível). Nesse sentido, considerou-se o Plano Horizontal de Projeção como o plano ortogonal à aresta do diedro.

**Etapla 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ) é a reta de interseção do plano  $\gamma$  com o Plano Horizontal de Projeção. O traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ) é a reta de interseção do plano  $\varphi$  com o Plano Horizontal de Projeção.

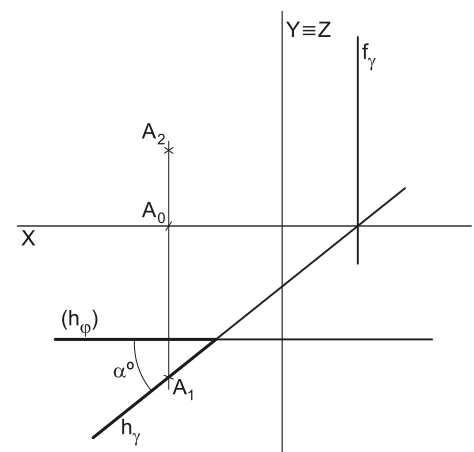
**Etapla 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. O ângulo formado entre  $h_\gamma$  e  $h_\varphi$  é, assim, o ângulo formado entre os planos  $\gamma$  e  $\varphi$  – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio Plano Horizontal de Projeção. Assim, o ângulo está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre os planos  $\gamma$  e  $\varphi$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $h_\gamma$  e  $h_\varphi$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

**Traçado:**

Os dados (os traços dos planos  $\gamma$  e  $\varphi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou é uma linha de chamada ou é uma linha auxiliar (o eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).





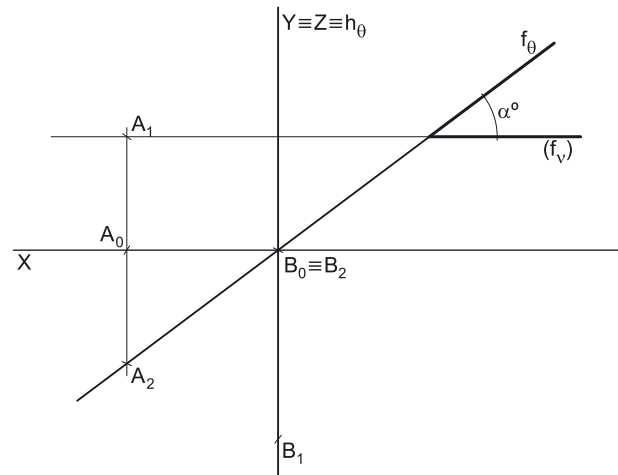
## 487.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, bem como os planos  $\theta$  e  $v$  pelos respetivos traços, em função dos dados. O ponto **A** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) passa por **A**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **A**) e por **B**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **B**), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

É pedido o ângulo entre os planos  $\theta$  e  $v$ . O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano  $\theta$  e o plano  $v$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.



**Etapa 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\theta$  e  $v$  é a reta de interseção entre os dois planos, que são dois planos projetantes frontais. Assim, a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta projetante frontal (uma reta de topo), que é a única «família» de retas que os dois planos têm em comum. A aresta do diedro está, assim, identificada (mas não determinada, pois não é necessária a sua determinação) – é uma reta de topo.

**Etapa 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta de topo é necessariamente um plano frontal (de frente). Nesse sentido, considerou-se o Plano Frontal de Projeção como o plano ortogonal à aresta do diedro.

**Etapa 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é a reta de interseção do plano  $\theta$  com o Plano Frontal de Projeção. O traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ) é a reta de interseção do plano  $v$  com o Plano Frontal de Projeção.

**Etapa 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. O ângulo formado entre  $f_\theta$  e  $f_v$  é, assim, o ângulo formado entre os planos  $\theta$  e  $v$  – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio Plano Frontal de Projeção. Assim, o ângulo está em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre os planos  $\theta$  e  $v$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $f_\theta$  e  $f_v$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\theta$  e  $v$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $Y = Z$ , que é uma linha de referência).

## 488.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\lambda$  e  $\varphi$  pelos respectivos traços, em função dos dados. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:**

O ângulo que um dado plano faz com outro plano é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que o plano dado faz com qualquer plano paralelo ao segundo plano. Assim, sendo pedido o ângulo que o plano  $\lambda$  faz com o plano  $\varphi$ , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que o plano  $\lambda$  faz com o Plano Frontal de Projeção (que é paralelo ao plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que o plano  $\lambda$  faz com o Plano Frontal de Projeção e não o ângulo que o plano  $\lambda$  faz com o plano  $\varphi$ .

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano  $\lambda$  e o Plano Frontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\lambda$  e pelo Plano Frontal de Projeção é  $f_\lambda$  (o traço frontal do plano  $\lambda$ ), que é uma reta frontal (de frente) do plano  $\lambda$ .

**Etapa 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta frontal (de frente) é necessariamente um plano de topo (projetante frontal). Assim, o plano  $\theta$  (plano de topo) é o plano ortogonal a  $f_\lambda$  – o plano ortogonal à aresta do diedro.

**Etapa 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é a reta de interseção do plano  $\theta$  com o Plano Frontal de Projeção. A reta  $i$ , definida pelos seus traços, é a reta de interseção do plano  $\theta$  com o plano  $\lambda$  – a reta  $i$  está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H**).

**Etapa 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $f_\theta$  e a reta  $i$  é, então, o ângulo formado entre os planos  $\lambda$  e  $\varphi$  – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio plano  $\theta$ .

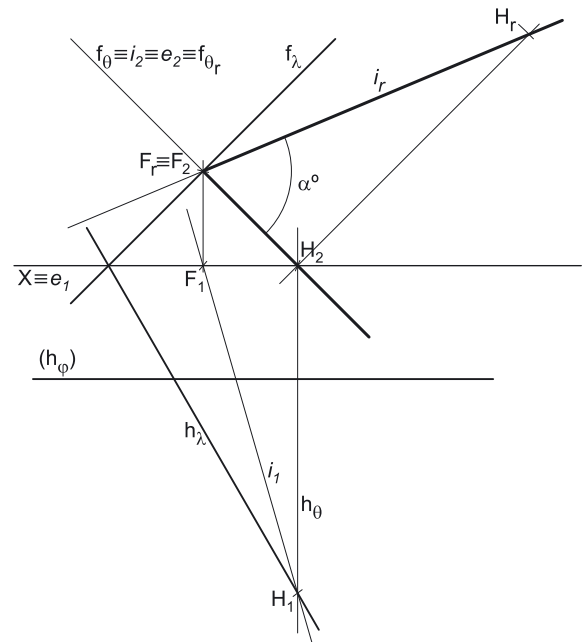
O plano que contém o ângulo (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento é  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_\theta \equiv e_2 \equiv f_{\theta_r}$ . Já temos uma das retas em rebatimento –  $f_{\theta_r}$ . Falta-nos rebater a reta  $i$ .

O ponto **F** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_r \equiv F_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $i$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do ponto **H** (o traço horizontal da reta  $i$ ). Para tal conduziu-se, por  $H_2$  (a projeção frontal do ponto **H**), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – sobre essa perpendicular mediu-se o afastamento do ponto **H**, o que nos permitiu determinar  $H_r$ . A reta  $i_r$  (a reta  $i$  em rebatimento) está definida por dois pontos –  $F_r$  e  $H_r$ .

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre os planos  $\lambda$  e  $\varphi$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $f_{\theta_r}$  e  $i_r$ , com vértice em  $F_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

**Traçado:**

Os dados (os traços dos planos  $\lambda$  e  $\varphi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\theta$ , da reta  $i$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$ ).



## 489.

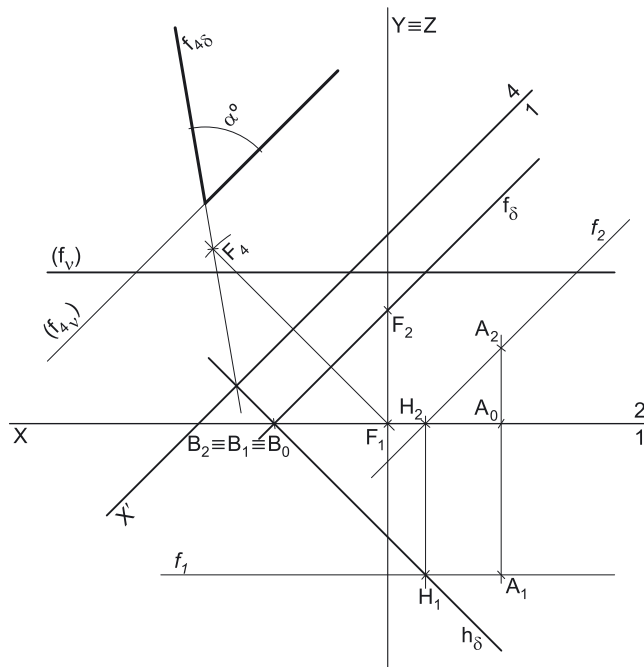
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, bem como o plano  $v$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. O ponto **B** é o ponto do plano  $\delta$  que se situa no eixo **X**. O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que está definido por um ponto (o ponto **B**) e uma direção (a direção dada no enunciado). Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **B** (que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano) é um ponto de  $h_\delta$ , pelo que já temos um ponto para definir  $h_\delta$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Os dados do plano são insuficientes para definirmos  $h_\delta$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $f$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$  e está definida por um ponto (o ponto **A**, um dos pontos do plano  $\delta$  que é dado no enunciado) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$ , que é a direção de  $f_\delta$ ).

Em seguida, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta  $f$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano  $\delta$  –  $h_\delta$  está definido por dois pontos (os pontos **B** e **H**).



### Resolução:

É pedido o ângulo entre os planos  $\delta$  e  $v$ . O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\delta$  e  $v$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapla 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\delta$  e pelo plano  $v$  é a reta de interseção entre os dois planos, que é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , paralela ao traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ).

**Etapla 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro.

Ao contrário das situações anteriores, optou-se por uma resolução que alia uma grande eficácia a uma grande economia de traçados – o plano ortogonal à aresta do diedro que se conduziu é um novo plano de projeção (o **plano 4**), que substitui o Plano Frontal de Projeção. Na prática, a situação referida recorre a uma **mudança do diedro de projeção** para a resolução do problema.

Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal à aresta do diedro (uma reta horizontal do plano  $\delta$ ), o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ). Note que, nesta situação, o novo plano de projeção (o **plano 4**) é ortogonal aos dois planos (o plano  $\delta$  e o plano  $v$ ), o que significa que o **plano 4** é necessariamente ortogonal à aresta do diedro. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, há que determinar os novos traços frontais dos dois planos (os traços dos planos  $\delta$  e  $v$  no **plano 4**).

O plano  $v$  é um plano horizontal (de nível) e, novo diedro de projeção, continua a ser um plano horizontal (de nível) pois manteve-se o Plano Horizontal de Projeção e o plano  $v$  é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que se mantiveram as cotas, a cota do plano  $v$  mantém-se. Dessa forma, desenhou-se o novo traço frontal do plano  $v$  ( $f_{4,v}$ ), com 4 cm de cota e paralelo ao eixo **X'**. No novo diedro de projeção, o plano  $v$  continua a não ter traço horizontal (continua paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu novo traço frontal ( $f_{4,v}$ ) se identificou entre parêntesis.

Para determinar o novo traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_{4,\delta}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\delta$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definir  $f_{4,\delta}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto **F**, qualquer, do traço frontal do plano ( $f_\delta$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por fazer com que o ponto **F** tenha abcissa nula.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

$F_4$  é a projeção do ponto  $F$  no plano 4 e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$  (a cota de  $F$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4\delta}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\delta$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\delta$  no plano 4 ( $f_{4\delta}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_\delta$  (que se situa no eixo  $X'$ ) e  $F_4$  (a nova projeção frontal do ponto  $F$ ).

**Etapa 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O novo traço frontal do plano  $v$  ( $f_{4v}$ ) é a reta de interseção do plano  $v$  com o plano 4 (o plano ortogonal à aresta do diedro). O novo traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_{4\delta}$ ) é a reta de interseção do plano  $\delta$  com o plano 4 (o plano ortogonal à aresta do diedro).

**Etapa 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $f_{4v}$  e  $f_{4\delta}$  é, então, o ângulo formado entre os planos  $\delta$  e  $v$  – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio plano 4. O plano que contém o ângulo (o plano 4) é o novo Plano Frontal de Projeção, pelo que o ângulo está em verdadeira grandeza no plano 4 (em projeção frontal).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre os planos  $\delta$  e  $v$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $f_{4\delta}$  e  $f_{4v}$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

#### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\delta$  e  $v$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X'$  e dos restantes traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 490.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. O ponto  $R$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pois é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

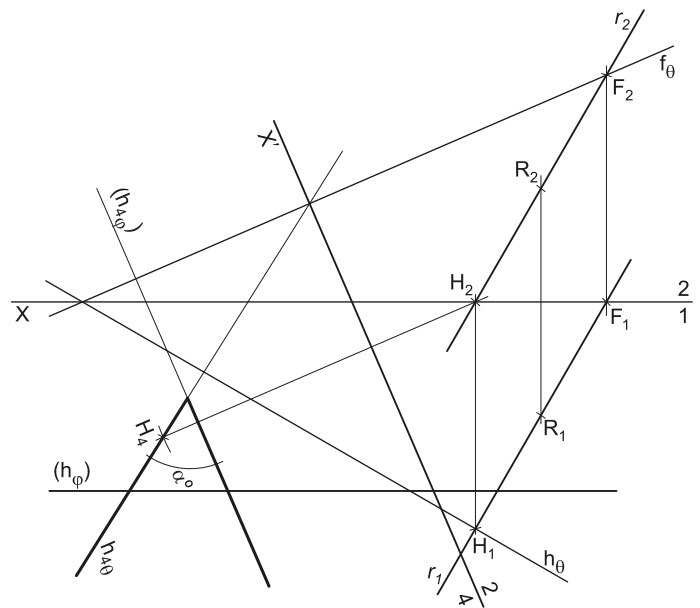
Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Começemos pelo traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da reta  $r$ , o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Uma vez que a reta  $r$  é uma reta de maior declive do plano  $\theta$ , sabe-se que a reta  $r$  é perpendicular ao traço horizontal do plano (e a todas as retas horizontais do plano), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_\theta$  –  $h_\theta$  passa por  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H$ ) e é perpendicular a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ). Assim,  $h_\theta$  (o traço horizontal do plano  $\theta$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é perpendicular a  $r_1$ ).

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano ( $f_\theta$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $r$ , o ponto  $F$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços do plano são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\theta$  –  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ) está definido por dois pontos (o ponto  $F$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano)

#### Resolução:

É pedido o ângulo entre os planos  $\theta$  e  $\varphi$ . O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\theta$  e  $\varphi$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\theta$  e pelo plano  $\varphi$  é a reta de interseção entre os dois planos, que é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$ , paralela ao traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro.

À semelhança da situação anterior, optou-se por uma resolução que alia uma grande eficácia a uma grande economia de traçados – o plano ortogonal à aresta do diedro que se conduziu é um novo plano de projeção (o **plano 4**), que substitui o Plano Horizontal de Projeção. Na prática, a situação referida recorre a uma **mudança do diedro de projeção** para a resolução do problema.

Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal à aresta do diedro (uma reta frontal do plano  $\theta$ ), o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ). Note que, nesta situação, o novo plano de projeção (o **plano 4**) é ortogonal aos dois planos (o plano  $\theta$  e o plano  $\varphi$ ), o que significa que o **plano 4** é necessariamente ortogonal à aresta do diedro. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, há que determinar os novos traços horizontais dos dois planos (os traços dos planos  $\theta$  e  $\varphi$  no **plano 4**).

O plano  $\varphi$  é um plano frontal (de frente) e, novo diedro de projeção, continua a ser um plano frontal (de frente), pois manteve-se o Plano Frontal de Projeção e o plano  $\varphi$  é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que se mantiveram os afastamentos, o afastamento do plano  $\varphi$  mantém-se. Dessa forma, desenhou-se o novo traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{4\varphi}$ ), com 5 cm de afastamento e paralelo ao eixo **X'**. No novo diedro de projeção, o plano  $\varphi$  continua a não ter traço frontal (continua paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu novo traço horizontal ( $h_{4\varphi}$ ) se identificou entre parêntesis.

Para determinar o novo traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_{4\theta}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definir  $h_{4\theta}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto **H** (o traço horizontal da reta  $r$ ), que é um ponto do traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**.

$H_4$  é a projeção do ponto **H** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $H_4$  ao eixo **X'** é igual à distância de  $H_1$  ao eixo **X** (o afastamento de **H**). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_{4\theta}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\theta$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\theta$  no **plano 4** ( $h_{4\theta}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $f_\theta$  (que se situa no eixo **X'**) e  $H_4$  (a nova projeção horizontal do ponto **H**).

**Etapa 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O novo traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{4\varphi}$ ) é a reta de interseção do plano  $\varphi$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro). O novo traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_{4\theta}$ ) é a reta de interseção do plano  $\theta$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro).

**Etapa 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $h_{4\theta}$  e  $h_{4\varphi}$  é, então, o ângulo formado entre os planos  $\theta$  e  $\varphi$  – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio **plano 4**. O plano que contém o ângulo (o **plano 4**) é o novo Plano Horizontal de Projeção, pelo que ângulo está em verdadeira grandeza no **plano 4** (em projeção horizontal).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre os planos  $\theta$  e  $\varphi$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $h_{4\theta}$  e  $h_{4\varphi}$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$  e o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\theta$ , sendo dados de uma forma indireta, representaram-se a **médio-leve**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo **X'** e dos restantes traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 491.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$  pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\delta$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

**Resolução:**

É pedido o ângulo formado entre o plano  $\delta$  e o Plano Horizontal de Projeção. O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano  $\delta$  e o Plano Horizontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\delta$  e pelo Plano Horizontal de Projeção é  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ), que é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ .

**Etapa 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta horizontal (de nível) é necessariamente um plano vertical (projetante horizontal). Assim, o plano  $\gamma$  (plano vertical) é o plano ortogonal a  $h_\delta$  – o plano ortogonal à aresta do diedro.

**Etapa 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ) é a reta de interseção do plano  $\gamma$  com o Plano Horizontal de Projeção. A reta  $i$ , definida pelos seus traços, é a reta de interseção do plano  $\gamma$  com o plano  $\delta$  – a reta  $i$  está definida por dois pontos (os pontos  $F$  e  $H$ ).

**Etapa 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $h_\gamma$  e a reta  $i$  é, então, o ângulo formado entre o plano  $\delta$  e o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio plano  $\gamma$ .

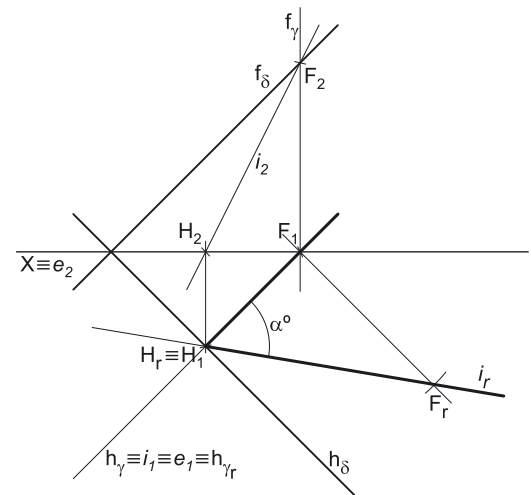
O plano que contém o ângulo (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Horizontal de Projeção. A charneira do rebatimento é  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $h_\gamma \equiv e_1 \equiv h_{\gamma_r}$ . Já temos uma das retas em rebatimento –  $h_\gamma$ . Falta-nos rebater a reta  $i$ .

O ponto  $H$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_r \equiv H_1$ . Já temos um ponto para definir a reta  $i$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $i$ ). Para tal conduziu-se, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – sobre essa perpendicular mediu-se a cota do ponto  $F$ , o que nos permitiu determinar  $F_r$ . A reta  $i_r$  (a reta  $i$  em rebatimento) está definida por dois pontos –  $F_r$  e  $H_r$ .

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre o plano  $\gamma$  e o Plano Horizontal de Projeção está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $h_{\gamma_r}$  e  $i_r$ , com vértice em  $H_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\gamma$ , da reta  $i$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\gamma$ ).



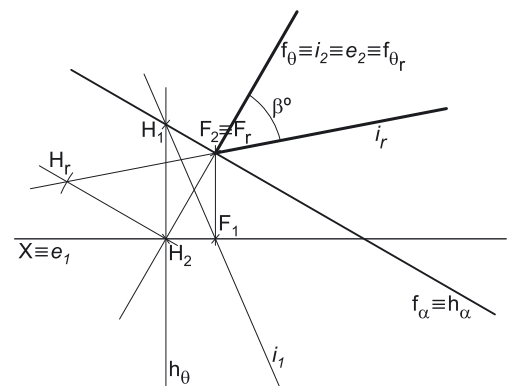
## 492.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$  pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

**Resolução:**

É pedido o ângulo formado entre o plano  $\alpha$  e o Plano Frontal de Projeção. O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano  $\alpha$  e o Plano Frontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

**Etapa 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\alpha$  e pelo Plano Frontal de Projeção é  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ), que é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ .

**Etapa 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta frontal (de frente) é necessariamente um plano de topo (projetante frontal). Assim, o plano  $\theta$  (plano de topo) é o plano ortogonal a  $f_\alpha$  – o plano ortogonal à aresta do diedro.

**Etapa 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é a reta de interseção do plano  $\theta$  com o Plano Frontal de Projeção. A reta  $i$ , definida pelos seus traços, é a reta de interseção do plano  $\theta$  com o plano  $\alpha$  – a reta  $i$  está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H**).

**Etapa 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $f_\theta$  e a reta  $i$  é, então, o ângulo formado entre o plano  $\alpha$  eo Plano Frontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio plano  $\theta$ .

O plano que contém o ângulo (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento é  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_\theta \equiv e_2 \equiv f_{\theta_r}$ . Já temos uma das retas em rebatimento –  $f_\theta$ . Falta-nos rebater a reta  $i$ .

O ponto **F** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_r \equiv F_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $i$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do ponto **H** (o traço horizontal da reta  $i$ ). Para tal conduziu-se, por  $H_2$  (a projeção frontal do ponto **H**), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – sobre essa perpendicular mediu-se o afastamento do ponto **H**, o que nos permitiu determinar  $H_r$ . A reta  $i_r$  (a reta  $i$  em rebatimento) está definida por dois pontos –  $F_r$  e  $H_r$ .

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre os planos  $\lambda$  e  $\varphi$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $f_{\theta_r}$  e  $i_r$ , com vértice em  $F_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\beta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\theta$ , da reta  $i$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$ ).

## 493.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ . Para tal conduziu-se, pelos pontos **A** e **B**, uma reta  $r$  e determinaram-se os traços da reta  $r$  – o ponto **F** (o seu traço frontal) e o ponto **H** (o seu traço horizontal).

Em seguida, desenharam-se os traços do plano  $\rho$ . O traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ) passa por  $F_2$  (a projeção frontal do ponto **F**) e é paralelo ao eixo **X** –  $f_\rho$  está definido por um ponto (o ponto **F**) e uma direção (é fronto-horizontal). O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ) passa por  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto **H**) e é paralelo ao eixo **X** –  $h_\rho$  está definido por um ponto (o ponto **H**) e uma direção (é fronto-horizontal).

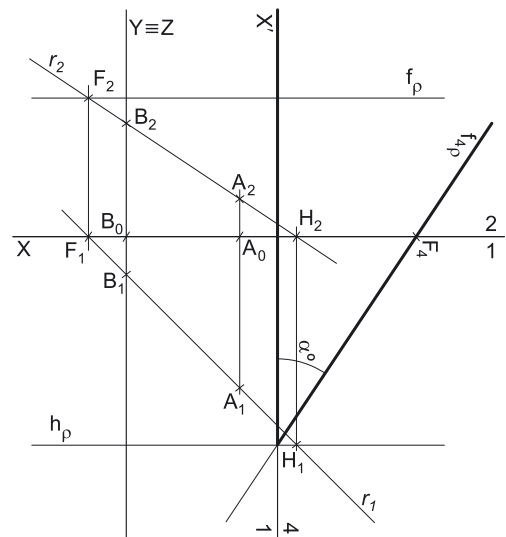
### Resolução:

É pedido o ângulo entre o plano  $\rho$  e o Plano Horizontal de Projeção. O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano  $\rho$  e o Plano Horizontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\rho$  e pelo Plano Horizontal de Projeção é a reta de interseção entre os dois planos, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ).

**Etapa 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro.

À semelhança das situações dos exercícios **489.** e **490.**, optou-se por uma resolução que alia uma grande eficácia a uma grande economia de traçados – o plano ortogonal à aresta do diedro que se conduziu é um novo plano de projeção (o **plano 4**), que substitui o Plano Frontal de Projeção. Na prática, esta resolução recorre a uma **mudança do diedro de projeção** para a resolução do problema.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal à aresta do diedro (o traço horizontal do plano  $\rho$ ), o eixo **X'** é perpendicular a  $h_p$ . As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, há que determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**). Para determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\rho$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definir  $f_{4\rho}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto **F**, o traço frontal da reta  $r$  (que é um ponto do traço frontal do plano  $\rho$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**.

$F_4$  é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_4$  ao eixo **X'** é igual à distância de  $F_2$  ao eixo **X** (a cota de **F**). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4\rho}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_p$  (que se situa no eixo **X'**) e  $F_4$  (a nova projeção frontal do ponto **F**).

**Etapa 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é a reta de interseção do plano  $\rho$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro). O eixo **X'** é a reta de interseção do Plano Horizontal de Projeção com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro).

**Etapa 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $f_{4\rho}$  e o eixo **X'** é, então, o ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio **plano 4**. O plano que contém o ângulo (o **plano 4**) é o novo Plano Frontal de Projeção, pelo que ângulo está em verdadeira grandeza no **plano 4** (em projeção frontal).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o Plano Horizontal de Projeção está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre  $f_{4\rho}$  e o eixo **X'**. Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

#### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\delta$  e  $\nu$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo **X'** e dos restantes traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 494.

#### Dados:

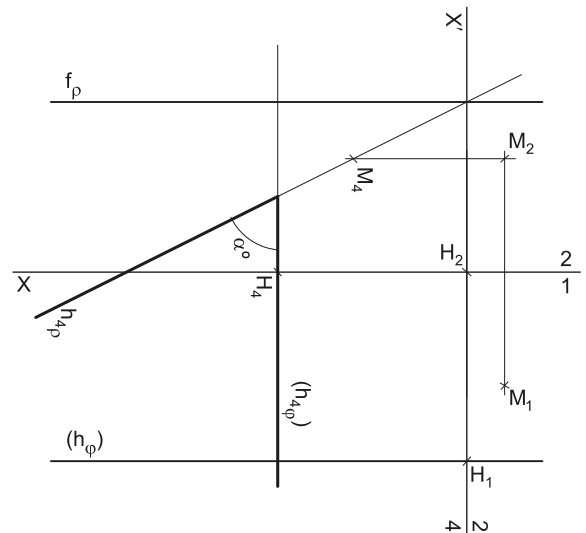
Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **M**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. O ponto **M** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). Representou-se, também, o traço frontal do plano  $\rho$ , em função da sua cota (eu é dada). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pois é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

O plano  $\rho$  está definido por uma reta (o seu traço frontal –  $f_p$ ) e por um ponto exterior à reta (o ponto **M**). Poder-se-ia determinar o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), para o que seria necessário recorrer a uma reta do plano, reta essa que teria de passar pelo ponto **M**. No entanto optou-se por não determinar o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ) porque, na prática, tal não se revela necessário (como adiante se verificará).

#### Resolução:

É pedido o ângulo entre os planos  $\rho$  e  $\varphi$ . O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\rho$  e  $\varphi$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber:

1. identifica-se a aresta do diedro;
2. conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos);
3. determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados;
4. o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\rho$  e pelo plano  $\varphi$  é a reta de interseção entre os dois planos, que é necessariamente uma reta fronto-horizontal do plano  $\rho$ .

**Etapa 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro.

À semelhança da situação anterior, optou-se por uma resolução que alia uma grande eficácia a uma grande economia de traçados – o plano ortogonal à aresta do diedro que se conduziu é um novo plano de projeção (o **plano 4**), que substitui o Plano Horizontal de Projeção. Na prática, a situação referida recorre a uma **mudança do diedro de projeção** para a resolução do problema.

Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal à aresta do diedro (uma reta fronto-horizontal do plano  $\rho$ , que é paralela ao eixo  $X$ ), o eixo  $X'$  é perpendicular ao eixo  $X$  inicial. Note que, nesta situação, o novo plano de projeção (o **plano 4**) é ortogonal aos dois planos (o plano  $\rho$  e o plano  $\varphi$ ), o que significa que o **plano 4** é necessariamente ortogonal à aresta do diedro. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, há que determinar os novos traços horizontais dos dois planos (os traços dos plano  $\rho$  e  $\varphi$  no **plano 4**).

O plano  $\varphi$  é um plano frontal (de frente) e, novo diedro de projeção, continua a ser um plano frontal (de frente), pois manteve-se o Plano Frontal de Projeção e o plano  $\varphi$  é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que se mantiveram os afastamentos, o afastamento do plano  $\varphi$  mantém-se. Dessa forma, desenhou-se o novo traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{4\varphi}$ ), com 5 cm de afastamento e paralelo ao eixo  $X'$ . No novo diedro de projeção, o plano  $\varphi$  continua a não ter traço frontal (continua paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu novo traço horizontal ( $h_{4\varphi}$ ) se identificou entre parêntesis.

Para determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $h_{4\rho}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\rho$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definir  $h_{4\rho}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto  $M$  (o ponto que define o plano  $\rho$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**.

$M_4$  é a projeção do ponto  $M$  no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $M_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $M_1$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – o afastamento de  $M$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_{4\rho}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $h_{4\rho}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $f_p$  (que se situa no eixo  $X'$ ) e  $M_4$  (a nova projeção horizontal do ponto  $M$ ).

**Etapa 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O novo traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{4\varphi}$ ) é a reta de interseção do plano  $\varphi$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro). O traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $h_{4\rho}$ ) é a reta de interseção do plano  $\rho$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro).

**Etapa 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $h_{4\rho}$  e  $h_{4\varphi}$  é, então, o ângulo formado entre os planos  $\rho$  e  $\varphi$  – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio **plano 4**. O plano que contém o ângulo (o **plano 4**) é o novo Plano Horizontal de Projeção, pelo que ângulo está em verdadeira grandeza no **plano 4** (em projeção horizontal).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre os planos  $\rho$  e  $\varphi$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $h_{4\rho}$  e  $h_{4\varphi}$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

#### Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano  $\rho$  e o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X'$  e dos restantes traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 495.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, bem como o plano  $v$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. O ponto **A** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). O ponto **B** tem as suas projeções coincidentes, pois é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes).

O plano  $p$  está definido por dois pontos (os pontos **A** e **B**) e, também, pela sua posição, pois é um plano de rampa. De facto, existe um único plano de rampa (paralelo ao eixo **X**) que contenha os pontos **A** e **B**. Poder-se-iam determinar os traços do plano  $p$ , para o que seria necessário recorrer a uma reta do plano, reta essa que teria de estar definida pelos pontos **A** e **B**. No entanto optou-se por não se determinar nenhum dos traços do plano  $p$  porque, na prática, tal não se revela necessário (como adiante se verificará).

**Resolução:**

É pedido o ângulo entre o plano  $p$  e o plano  $v$ . O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano  $p$  e o plano  $v$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $p$  e pelo plano  $v$  é a reta de interseção entre os dois planos, que é necessariamente uma reta fronto-horizontal (pois a «família» das retas fronto-horizontais é a única «família» de retas em comum aos dois planos – um plano de rampa e um plano horizontal).

**Etapa 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro.

À semelhança das situações dos exercícios **489.** e **490.**, optou-se por uma resolução que alia uma grande eficácia a uma grande economia de traçados – o plano ortogonal à aresta do diedro que se conduziu é um novo plano de projeção (o **plano 4**), que substitui o Plano Frontal de Projeção. Na prática, esta resolução recorre a uma **mudança do diedro de projeção** para a resolução do problema.

Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

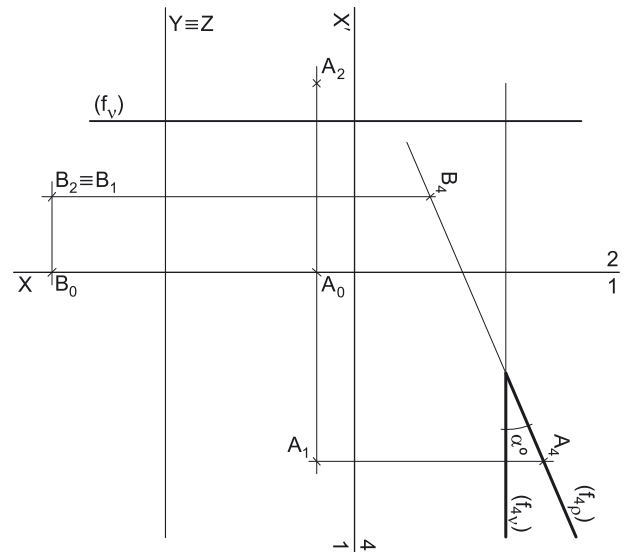
Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal à aresta do diedro (uma reta fronto-horizontal, que é paralela ao eixo **X**), o eixo **X'** é perpendicular ao eixo **X** inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, há que determinar os traços dos dois planos (os planos  $p$  e  $v$ ) no **plano 4**.

O plano  $v$  é um plano horizontal (de nível) e, novo diedro de projeção, continua a ser um plano horizontal (de nível) pois manteve-se o Plano Horizontal de Projeção e o plano  $v$  é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que se mantiveram as cotas, a cota do plano  $v$  mantém-se. Dessa forma, desenhou-se o novo traço frontal do plano  $v$  ( $f_{4,v}$ ), com 4 cm de cota e paralelo ao eixo **X'**. No novo diedro de projeção, o plano  $v$  continua a não ter traço horizontal (continua paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu novo traço frontal ( $f_{4,v}$ ) se identificou entre parêntesis.

Determinou-se, em seguida, o traço do plano  $p$  no **plano 4** (o que seria o novo traço frontal do plano  $p$ ). Para determinar o traço do plano  $p$  no **plano 4** ( $f_{4,p}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os únicos elementos conhecidos do plano  $p$  são os pontos **A** e **B**, pelo que é necessário determinar as respetivas projeções no **plano 4**.  $A_4$  é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo **X'** é igual à distância de  $A_2$  ao eixo **X** (que é 5 cm – a cota de **A**). Já temos um ponto para definir  $f_{4,p}$  – o ponto  $A_4$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

$B_4$  é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_4$  ao eixo **X'** é igual à distância de  $B_2$  ao eixo **X** (que é 2 cm – a cota de **B**). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4,p}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $p$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $p$  no **plano 4** ( $f_{4,p}$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $A_4$  (a projeção do ponto **A** no **plano 4**) e o ponto  $B_4$  (a projeção do ponto **B** no **plano 4**). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $p$  está representado, apenas, pelo seu traço frontal (não se determinou o seu traço horizontal), pelo que o traço frontal do plano  $p$  (o traço do plano  $p$  no **plano 4** –  $f_{4,p}$ ) se identificou entre parêntesis.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) é a reta de interseção do plano  $\rho$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro). O traço do plano  $\nu$  no **plano 4** ( $f_{4\nu}$ ) é a reta de interseção do plano  $\nu$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro).

**Etapa 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\nu}$  é, então, o ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o plano  $\nu$  – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio **plano 4**. O plano que contém o ângulo (o **plano 4**) é o novo Plano Frontal de Projeção, pelo que o ângulo está em verdadeira grandeza no **plano 4** (em projeção frontal).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o plano  $\nu$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\nu}$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

### Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano  $\nu$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo **X'** e dos restantes traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 496.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**.

### Resolução:

É pedido o ângulo entre o plano  $\rho$  e o Plano Frontal de Projeção. O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano  $\rho$  e o Plano Frontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\rho$  e pelo Plano Frontal de Projeção é a reta de interseção entre os dois planos (o traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_\rho$ ), que é o próprio eixo **X**.

**Etapa 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro.

À semelhança das situações dos exercícios **489.** e **490.**, optou-se por uma resolução que alia uma grande eficácia a uma grande economia de traçados – o plano ortogonal à aresta do diedro que se conduziu é um novo plano de projeção (o **plano 4**), que substitui o Plano Horizontal de Projeção. Na prática, esta resolução recorre a uma **mudança do diedro de projeção** para a resolução do problema.

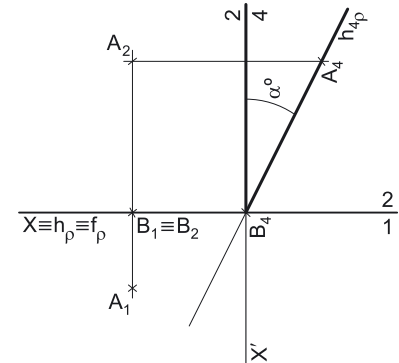
Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal à aresta do diedro (o traço frontal do plano  $\rho$  que se situa no eixo **X**), o eixo **X'** é perpendicular ao eixo **X** inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, há que determinar o novo traço horizontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**). Para determinar o novo traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{4\rho}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\rho$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definir  $h_{4\rho}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto **A**, o ponto que define o plano, e determinou-se a sua projeção no **plano 4**.

$A_4$  é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo **X'** é igual à distância de  $A_1$  ao eixo **X** (que é 2 cm – o afastamento de **A**). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_{4\rho}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $h_{4\rho}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $f_\rho$  (que se situa no eixo **X'**) e  $A_4$  (a nova projeção horizontal do ponto **A**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O novo traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{4\rho}$ ) é a reta de interseção do plano  $\rho$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro). O eixo  $X'$  é a reta de interseção do Plano Frontal de Projeção com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro).

**Etapa 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $h_{4\rho}$  e o eixo  $X'$  é, então, o ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o Plano Frontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio **plano 4**. O plano que contém o ângulo (o **plano 4**) é o novo Plano Horizontal de Projeção, pelo que ângulo está em verdadeira grandeza no **plano 4** (em projeção horizontal).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o Plano Frontal de Projeção está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre  $h_{4\rho}$  e o eixo  $X'$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é onde se situam os traços do plano  $\rho$  e é, também, a linha estruturante do exercício. O restante dado é um ponto (o ponto **A**), cuja linha de chamada se representou a **leve**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X'$  e dos restantes traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 497.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, bem como o plano  $v$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. O plano  $\rho$  está representado pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **M**.

#### Resolução:

É pedido o ângulo entre o plano  $\rho$  e o plano  $v$ . O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano  $\rho$  e o plano  $v$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber:

1. identifica-se a aresta do diedro;
2. conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos);
3. determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados;
4. o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\rho$  e pelo plano  $v$  é a reta de interseção entre os dois planos, que é necessariamente uma reta fronto-horizontal (pois a «família» das retas fronto-horizontais é a única «família» de retas em comum aos dois planos – um plano passante e um plano horizontal).

**Etapa 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro.

À semelhança das situações dos exercícios **489.** e **490.**, optou-se por uma resolução que alia uma grande eficácia a uma grande economia de traçados – o plano ortogonal à aresta do diedro que se conduziu é um novo plano de projeção (o **plano 4**), que substitui o Plano Frontal de Projeção. Na prática, esta resolução recorre a uma **mudança do diedro de projeção** para a resolução do problema.

Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

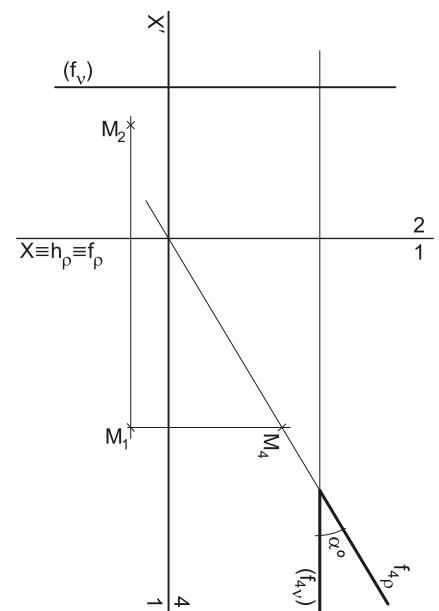
- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal à aresta do diedro (uma reta fronto-horizontal, que é paralela ao eixo  $X$ ), o eixo  $X'$  é perpendicular ao eixo  $X$  inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, há que determinar os traços dos dois planos (os planos  $\rho$  e  $v$ ) no **plano 4**.

O plano  $v$  é um plano horizontal (de nível) e, novo diedro de projeção, continua a ser um plano horizontal (de nível) pois manteve-se o Plano Horizontal de Projeção e o plano  $v$  é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que se mantiveram as cotas, a cota do plano  $v$  mantém-se. Dessa forma, desenhou-se o novo traço frontal do plano  $v$  ( $f_{4v}$ ), com 4 cm de cota e paralelo ao eixo  $X'$ . No novo diedro de projeção, o plano  $v$  continua a não ter traço horizontal (continua paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu novo traço frontal ( $f_{4v}$ ) se identificou entre parêntesis.

(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

Em seguida, há que determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**). Para determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\rho$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_{4\rho}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto  $M$ , o ponto que define o plano, e determinou-se a sua projeção no **plano 4**.

$M_4$  é a projeção do ponto  $M$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $M_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $M_1$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $M$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4\rho}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_p$  (que se situa no eixo  $X'$ ) e  $M_4$  (a nova projeção frontal do ponto  $M$ ).

**Etapas 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é a reta de interseção do plano  $\rho$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro). O novo traço frontal do plano  $v$  ( $f_{4v}$ ) é a reta de interseção do plano  $v$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro).

**Etapas 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $f_{4\rho}$  e  $f_{4v}$  é, então, o ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o plano  $v$  – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio **plano 4**. O plano que contém o ângulo (o **plano 4**) é o novo Plano Frontal de Projeção, pelo que o ângulo está em verdadeira grandeza no **plano 4** (em projeção frontal).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o plano  $v$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre  $f_{4\rho}$  e  $f_{4v}$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é onde se situam os traços do plano  $\rho$  e é, também, a linha estruturante do exercício. O restante dado é um ponto (o ponto  $M$ ), cuja linha de chamada se representou a **leve**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X'$  e dos restantes traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 498.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\gamma$ , pelos respetivos traços, em função dos dados.

### Resolução:

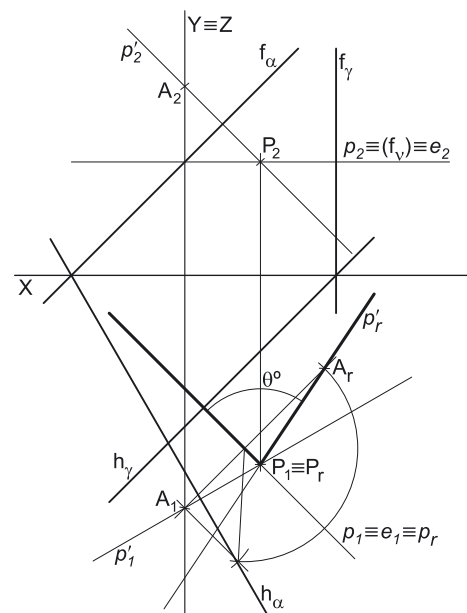
O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\gamma$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapas 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\alpha$  e  $\gamma$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapas 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** por um ponto exterior, qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapas 1.** Por um ponto  $P$ , exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\gamma$ , e a reta  $p'$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . A reta  $p$  é uma reta horizontal (de nível). As duas retas, porque são concorrentes, definem um plano – esse plano é um plano ortogonal à aresta do diedro (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta  $p$  e a reta  $p'$ ) é o ângulo formado entre os dois planos (os planos  $\alpha$  e  $\gamma$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a reta  $p$ . Esta opção teve a ver com a economia de traçados que tal permite. Nesse sentido, identificou-se o plano  $v$ , pelo seu traço frontal – o plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é a própria reta  $p$  – a reta  $p$  é uma reta que pertence aos dois planos (é reta de interseção entre os dois planos), pelo que é, imediatamente a charneira do rebatimento.

A reta  $p$  é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se imediatamente,  $p_r \equiv p_1$ . O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_1$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta  $p'$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento de um ponto  $A$ , qualquer, pertencente à reta  $p$ . Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se considerar o ponto  $A$  como o ponto da reta  $p'$  que tem abcissa nula.

O rebatimento do ponto  $A$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $A_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $A$  ao plano  $v$  (a cota de  $A$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , determinando  $A_r$ .

Em seguida, desenhou-se a reta  $p'$  em rebatimento. A reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) passa por  $P_r$  e  $A_r$  (está definida por dois pontos). O ângulo as retas  $p_r$  e  $p'_r$  é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\gamma$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $p_r$  e  $p'_r$ , com vértice em  $P_r$ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\gamma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$ , do plano  $v$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$ ).

## 499.

#### Dados:

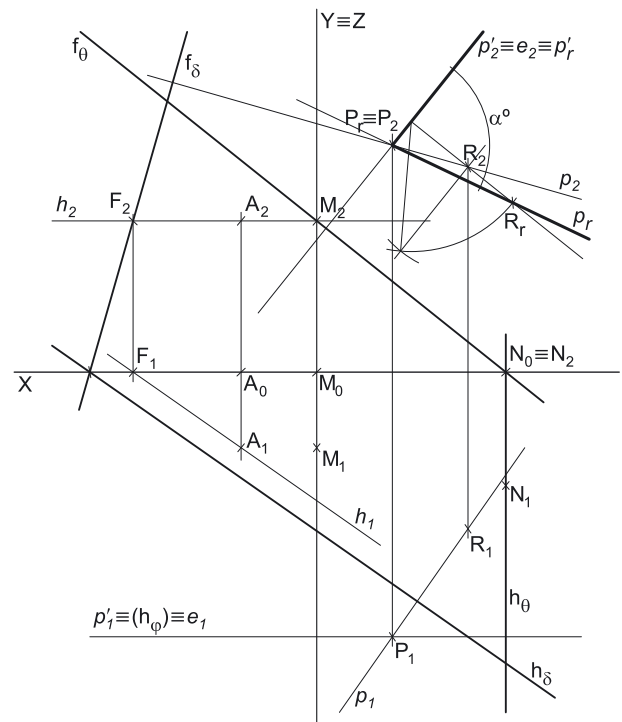
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$ ,  $M$  e  $N$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar as projeções do ponto  $B$  (o ponto de concorrência dos traços do plano  $\delta$ ) que se situa no eixo  $X$  – o ponto  $B$  é o ponto de concorrência do traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ) com o eixo  $X$ .

Em seguida, determinaram-se os traços dos planos  $\delta$  e  $\theta$ . O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) passa por  $M_2$  (a projeção frontal do ponto  $M$ ) e por  $N_2$  (a projeção frontal do ponto  $N$ ), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal.

Tendo em conta que o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ) é uma reta horizontal do plano  $\delta$  (cujas direção é dada no enunciado), foi possível desenhar, de forma imediata, o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), que está definido por um ponto (o ponto  $B$ ) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano, dada no enunciado). Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $B$  (que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano) é um ponto de  $f_\delta$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_\delta$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Os dados do plano são insuficientes para definirmos  $f_\delta$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $h$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$  e está definida por um ponto (o ponto  $A$ , um dos pontos do plano  $\delta$  que é dado no enunciado) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ , que é a direção de  $h_\delta$ ).

Em seguida, determinou-se o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $h$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\delta$  –  $f_\delta$  está definido por dois pontos (os pontos  $B$  e  $F$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\delta$  e  $\theta$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapla 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\delta$  e  $\theta$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapla 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** por um ponto exterior, qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapla 1.** Por um ponto **P**, exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta **p**, ortogonal ao plano  $\delta$ , e a reta **p'**, ortogonal ao plano  $\theta$ . A reta **p'** é uma reta frontal (de frente). As duas retas, porque são concorrentes, definem um plano – esse plano é um plano ortogonal à aresta do diedro (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

**Etapla 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta **p** e a reta **p'**) é o ângulo formado entre os dois planos (os planos  $\delta$  e  $\theta$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém a reta **p'**. Esta opção teve a ver com a economia de traçados que tal permite. Nesse sentido, identificou-se o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal – o plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta **e**), que é a própria reta **p'** – a reta **p'** é uma reta que pertence aos dois planos (é reta de interseção entre os dois planos), pelo que é, imediatamente a charneira do rebatimento.

A reta **p'** é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se imediatamente,  $p'_r \equiv p'_2$ . O ponto **P** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta **p** em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento de um ponto **R**, qualquer, pertencente à reta **p**.

O rebatimento do ponto **R** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por **R<sub>2</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto **R** ao plano  $\varphi$  (o **afastamento de R** em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **R** em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **R**, até à perpendicular à charneira que passa por **R<sub>2</sub>**, determinando **R<sub>r</sub>**.

Em seguida, desenhou-se a reta **p** em rebatimento. A reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida) passa por **P<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>** (está definida por dois pontos). O ângulo as retas **p<sub>r</sub>** e **p'<sub>r</sub>** é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos  $\delta$  e  $\theta$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas **p<sub>r</sub>** e **p'<sub>r</sub>**, com vértice em **P<sub>r</sub>**. Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

## Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\delta$  e  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **p** e **p'**, do plano  $\varphi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas **p** e **p'**).

## 500.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\delta$ , pelos respectivos traços, em função dos dados. O plano  $\delta$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais a  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

**Resolução:**

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\delta$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\alpha$  e  $\delta$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapa 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** por um ponto exterior, qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Por um ponto  $P$ , exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ , e a reta  $p'$ , ortogonal ao plano  $\delta$ . A reta  $p$  é uma reta frontal (de frente). Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por considerar o ponto  $P$  um ponto qualquer, com abcissa nula.

As retas  $p$  e  $p'$ , porque são concorrentes, definem um plano – esse plano é um plano ortogonal à aresta do diedro (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta  $p$  e a reta  $p'$ ) é o ângulo formado entre os dois planos (os planos  $\alpha$  e  $\delta$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém a reta  $p$ . Esta opção teve a ver com a economia de traçados que tal permite. Nesse sentido, identificou-se o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal – o plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é a própria reta  $p$  – a reta  $p$  é uma reta que pertence aos dois planos (é reta de interseção entre os dois planos), pelo que é, imediatamente a charneira do rebatimento.

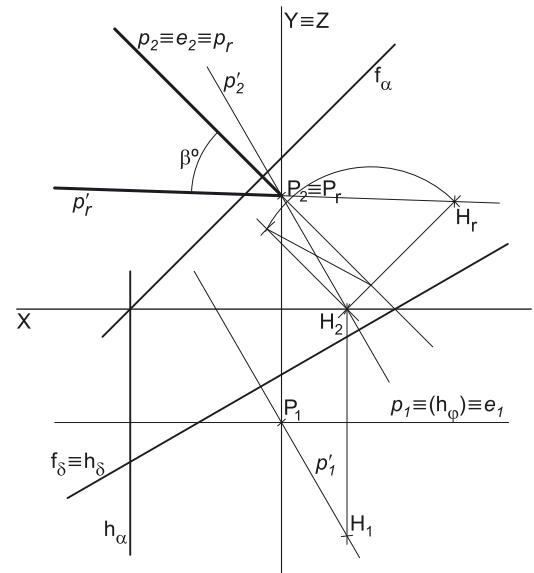
A reta  $p$  é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se imediatamente,  $p_r \equiv p_2$ . O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta  $p'$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento do ponto  $H$ , o traço horizontal da reta  $p'$ , que se determinou imediatamente (mas poder-se-ia ter recorrido a outro ponto qualquer).

O rebatimento do ponto  $H$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $H_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $H$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $H$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $H$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $H$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $H_2$ , determinando  $H_r$ .

Em seguida, desenhou-se a reta  $p'$  em rebatimento. A reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) passa por  $P_r$  e  $H_r$  (está definida por dois pontos). O ângulo as retas  $p_r$  e  $p'_r$  é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\delta$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $p_r$  e  $p'_r$ , com vértice em  $P_r$ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\beta^\circ$ .

**Traçado:**

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$ , do plano  $\varphi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$ ).



## 501.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\delta$  pelos respectivos traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\delta$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\alpha$  e  $\delta$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapa 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Por um ponto  $P$ , exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ , e a reta  $p'$ , ortogonal ao plano  $\delta$ . As duas retas, porque são concorrentes, definem um plano – esse plano é um plano ortogonal à aresta dos diedros (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

Note que a reta  $p$  é uma reta paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pois é ortogonal a um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ .

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta  $p$  e a reta  $p'$ ) é o ângulo formado entre os dois planos (os planos  $\alpha$  e  $\delta$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para um plano frontal (de frente)  $\varphi$ , qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano frontal (de frente)  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal – o plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\varphi$  e o plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$ ). A reta  $e$  (a charneira) está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\varphi$ ) e o ponto  $B$  (o ponto de interseção da reta  $p'$  com o plano  $\varphi$ ). Os pontos  $A$  e  $B$  foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções horizontais, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

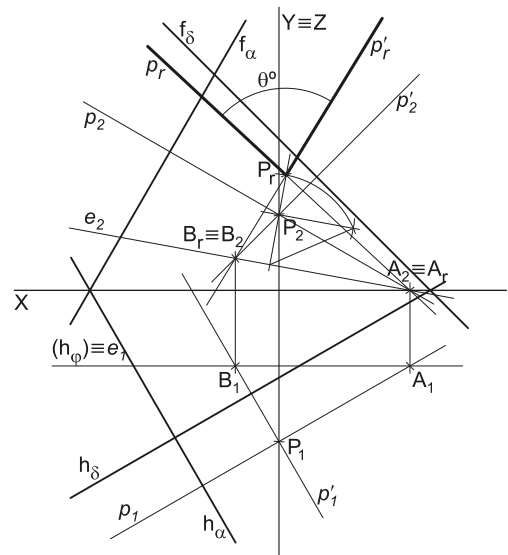
Os pontos  $A$  e  $B$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2$  e  $B_r \equiv B_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos outro ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $P$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto  $P$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $P$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $P$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $P_2$ , determinando  $P_r$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $A_r$  e  $P_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) passa por  $B_r$  e  $P_r$  (está igualmente definida por dois pontos). O ângulo as retas  $p_r$  e  $p'_r$  é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\delta$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $p_r$  e  $p'_r$ , com vértice em  $P_r$ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$ , do plano  $\varphi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$ ).



## 502.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\phi$  pelos respectivos traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). O plano  $\phi$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

**Resolução:**

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\phi$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\alpha$  e  $\phi$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapa 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Por um ponto  $P$ , exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ , e a reta  $p'$ , ortogonal ao plano  $\phi$ . As duas retas, porque são concorrentes, definem um plano – esse plano é um plano ortogonal à aresta dos diedros (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

Note que a reta  $p$  é necessariamente uma reta paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pois é ortogonal a um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (o plano  $\alpha$ ). Por sua vez, a reta  $p'$  é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pois é ortogonal a um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (o plano  $\phi$ ).

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta  $p$  e a reta  $p'$ ) é o ângulo formado entre os dois planos (os planos  $\alpha$  e  $\phi$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para um plano frontal (de frente)  $\varphi$ , qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano frontal (de frente)  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal – o plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\varphi$  e o plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$ ). A reta  $e$  (a charneira) está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\varphi$ ) e o ponto  $B$  (o ponto de interseção da reta  $p'$  com o plano  $\varphi$ ). Os pontos  $A$  e  $B$  foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções horizontais, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

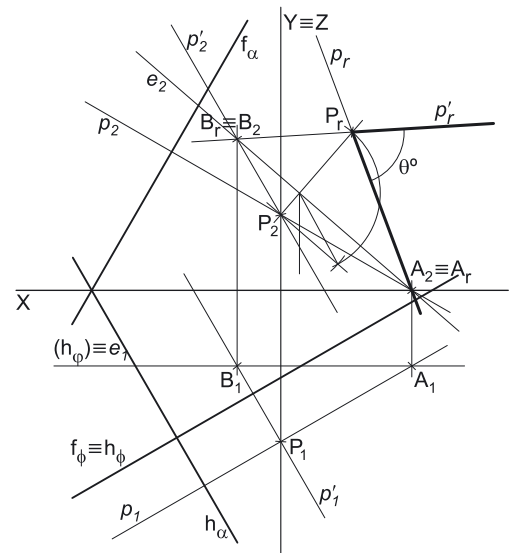
Os pontos  $A$  e  $B$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2$  e  $B_r \equiv B_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos outro ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $P$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto  $P$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $P$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $P$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $P_2$ , determinando  $P_r$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $A_r$  e  $P_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) passa por  $B_r$  e  $P_r$  (está igualmente definida por dois pontos). O ângulo as retas  $p_r$  e  $p'_r$  é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\phi$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $p_r$  e  $p'_r$ , com vértice em  $P_r$ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

**Traçado:**

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\phi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$ , do plano  $\varphi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$ ).





## 503.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\rho$  e  $\theta$  pelos respetivos traços, em função dos dados.

### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\rho$  e  $\theta$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\rho$  e  $\theta$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapa 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber:

1. Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro);
2. o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Por um ponto **P**, exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta **a**, ortogonal ao plano  $\rho$ , e a reta **b**, ortogonal ao plano  $\theta$ . A reta **b** é uma reta frontal (de frente). A reta **a** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Também por isso, ao contrário do que acontece com a reta **b**, não está ainda garantida a ortogonalidade entre a reta **a** e o plano  $\rho$ .

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **a** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **a**, para além do ponto **P**;
2. por outro lado, para que a reta **a** seja ortogonal ao plano  $\rho$ , a reta **a** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$  (para além da «família» de retas fronto-horizontais, cuja ortogonalidade já está garantida). Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

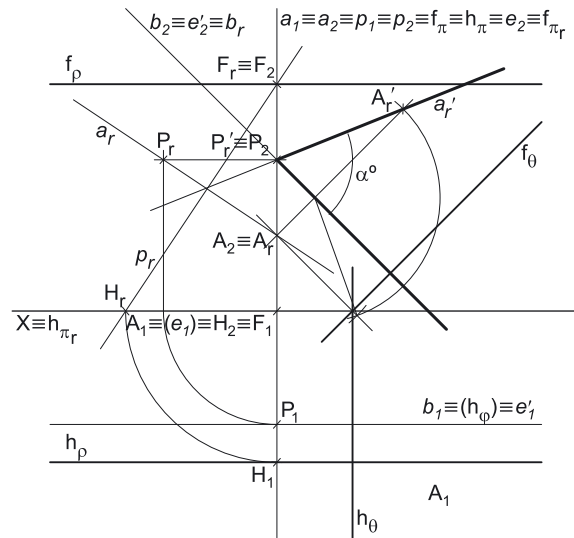
Assim, recorreu-se a uma reta **p**, pertencente ao plano  $\rho$  – a reta **p** está definida pelos seus traços (os pontos **F** e **H**). Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta **p** no mesmo plano de perfil que contém a reta **a**. A reta **p** é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas **a** e **p**. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil – nesse sentido conduziu-se, pelas duas retas o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se os pontos **F**, **H** e **P**. O ponto **F** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r \equiv F_2$ . Em seguida, desenhou-se a reta  $a_r$  (a reta **p** rebatida), que passa por  $F_r$  e por  $H_r$  (a reta **p** está definida por dois pontos – os pontos  $F_r$  e  $H_r$ ). Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $a_r$ , perpendicular a  $p_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta **a** em relação à reta **p**, pelo que está garantida a ortogonalidade da reta **a** em relação ao plano  $\rho$ . A reta **a** é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta **a** já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a reta **a** é ortogonal ao plano  $\rho$ .

Sobre a reta  $a_r$ , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $A_r$ . O ponto  $A_r$  é, em rebatimento, um ponto **A** pertencente à reta **a** (o ponto **A** é, nesta situação, o traço frontal da reta **a**). Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto **A** – o ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (tem-se, imediatamente,  $A_2 \equiv A_r$ ). A reta **a** (que já está definida por dois pontos – os pontos **P** e **A**) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Está cumprida a **Etapa 1** deste **2º método geral** – as retas **a** e **b**, porque são concorrentes (no ponto **P**), definem um plano, plano esse plano que é um plano ortogonal à aresta do diedro (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo entre os dois planos dados.

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta **a** e a reta **b**) é o ângulo formado entre os dois planos (os planos  $\rho$  e  $\theta$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (as retas  $a$  e  $b$ ) para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém a reta  $b$ . Esta opção teve a ver com a economia de traçados que tal permite. Nesse sentido, identificou-se o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal – o plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal foi identificado entre parêntesis. O traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ) está coincidente com  $b_1$  (a projeção horizontal da reta  $b$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a própria reta  $b$  – a reta  $b$  é uma reta que pertence aos dois planos (é reta de interseção entre os dois planos), pelo que é, imediatamente a charneira do rebatimento.

A reta  $b$  é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se imediatamente,  $b_r \equiv b_2$ . O ponto  $P$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r' \equiv P_2$ . O ponto  $P_r'$  é o ponto  $P$  rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta  $a$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento do ponto  $A$ , pertencente à reta  $a$  e determinado previamente.

O rebatimento do ponto  $A$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $A_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $A$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $A$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $A$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $A_2$ , determinando  $A_r'$ . O ponto  $A_r'$  é o ponto  $A$  rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto  $A$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ .

Em seguida, desenhou-se a reta  $a$  em rebatimento. A reta  $a_r'$  (a reta  $a$  rebatida) passa por  $P_r'$  e  $A_r'$  (está definida por dois pontos). Note que a reta  $a_r'$  é a reta  $a$  rebatida pelo seu segundo rebatimento – a reta  $a$  rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ . O ângulo as retas  $a_r'$  e  $b_r$  é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos  $\rho$  e  $\theta$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $a_r'$  e  $b_r$ , com vértice em  $P_r'$ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\rho$  e  $\theta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $a$  e  $b$ , do plano  $\pi$ , do plano  $\varphi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e ao rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ ).

## 504.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $P$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\pi$ , pelos seus traços, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar as projeções do ponto  $M$  (o ponto de concorrência dos traços do plano  $\alpha$ ) que se situa no eixo  $X$ .

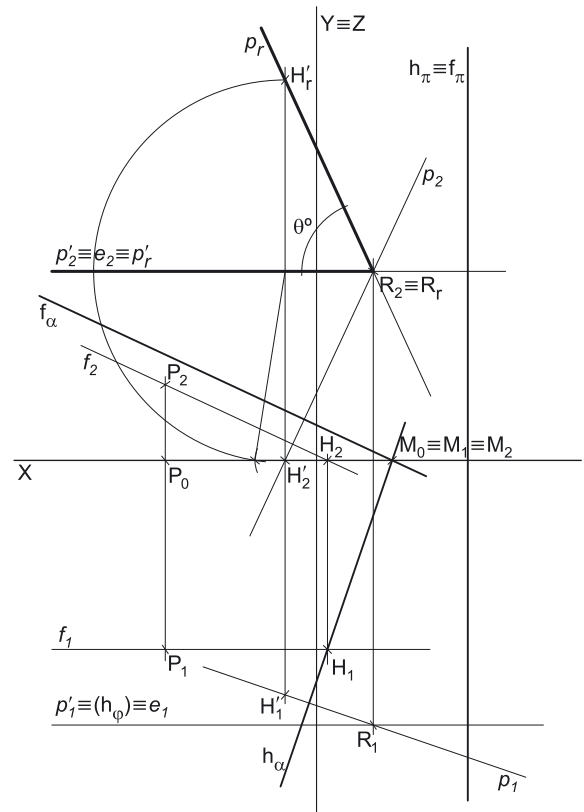
Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\alpha$ . Foi possível desenhar, de forma imediata, o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), pois é dada a sua direção –  $f_\alpha$  está definido por um ponto (o ponto  $M$ ) e uma direção (a direção dada no enunciado). Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $M$  (que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano) é um ponto de  $h_\alpha$ , pelo que já temos um ponto para definir  $h_\alpha$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Os dados do plano são insuficientes para definirmos  $h_\alpha$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $f$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e está definida por um ponto (o ponto  $P$ , o ponto do plano  $\alpha$  que é dado no enunciado) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ , que é a direção de  $f_\alpha$ ).

Em seguida, determinou-se o ponto  $H$ , o traço horizontal da reta  $f$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano  $\alpha$  –  $h_\alpha$  está definido por dois pontos (os pontos  $M$  e  $H$ ).

#### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\pi$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\alpha$  e  $\pi$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta de perfil, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapa 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta de perfil é necessariamente um plano de rampa (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** por um ponto exterior, qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Por um ponto **R**, exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta **p**, ortogonal ao plano  $\alpha$ , e a reta **p'**, ortogonal ao plano  $\pi$ . A reta **p'** é uma reta fronto-horizontal. As duas retas, porque são concorrentes, definem um plano – esse plano é um plano ortogonal à aresta do diedro (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo. Note que se trata de um plano de rampa, pois está definido por uma reta oblíqua e uma reta fronto-horizontal.

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta **p** e a reta **p'**) é o ângulo formado entre os dois planos (os planos  $\alpha$  e  $\pi$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém a reta **p'**. Esta opção teve a ver com a economia de traçados que tal permite. Nesse sentido, identificou-se o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal – o plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta **e**), que é a própria reta **p'** – a reta **p'** é uma reta que pertence aos dois planos (é reta de interseção entre os dois planos), pelo que é, imediatamente a charneira do rebatimento.

A reta **p'** é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se imediatamente,  $p'_r \equiv p'_2$ . O ponto **R** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $R_r \equiv R_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta **p** em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento do ponto **H'**, o traço horizontal da reta **p**, que se determinou em seguida.

O rebatimento do ponto **H'** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por **H'\_2** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira (que é o próprio eixo **X**). Sobre a paralela à charneira (o eixo **X**) mediu-se a distância do ponto **H'** ao plano  $\varphi$  (o **afastamento de H'** em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **H'** em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **H'**, até à perpendicular à charneira que passa por **H'\_2**, determinando **H'\_r**.

Em seguida, desenhou-se a reta **p** em rebatimento. A reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida) passa por **R<sub>r</sub>** e **H'<sub>r</sub>** (está definida por dois pontos). O ângulo as retas **p<sub>r</sub>** e **p'<sub>r</sub>** é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\pi$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas **p<sub>r</sub>** e **p'<sub>r</sub>**, com vértice em **R<sub>r</sub>**. Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\pi$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **p** e **p'**, do plano  $\varphi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas **p** e **p'**).



(continuação da página anterior)

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (as retas  $a$  e  $b$ ) para o Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é o traço horizontal do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ . A reta  $e'$  (a charneira do rebatimento) está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o traço horizontal da reta  $a$ ) e o ponto  $B$  (o traço horizontal da reta  $b$ ).

Os pontos  $A$  e  $B$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $A_r' \equiv A_1$  e  $B_r' \equiv B_1$ . Note que o ponto  $A_r'$  é o ponto  $A$  rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto  $A$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos outro ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $P$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto  $P$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a cota do ponto  $P$  e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $P_1$ , determinando  $P_r'$ . O ponto  $P_r'$  é o ponto  $P$  rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $a_r'$  (a reta  $a$  rebatida) passa por  $A_r'$  e  $P_r'$  (está definida por dois pontos). A reta  $b_r'$  (a reta  $b$  rebatida) passa por  $B_r'$  e  $P_r'$  (está igualmente definida por dois pontos). Note que a reta  $a_r'$  é a reta  $a$  rebatida pelo seu segundo rebatimento – a reta  $a$  rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ .

O ângulo as retas  $a_r'$  e  $b_r'$  é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\rho$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $a_r'$  e  $b_r'$ , com vértice em  $P_r'$ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $a$  e  $b$ , do plano  $\pi$ , do plano  $\varphi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e ao rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ ).

## 506.

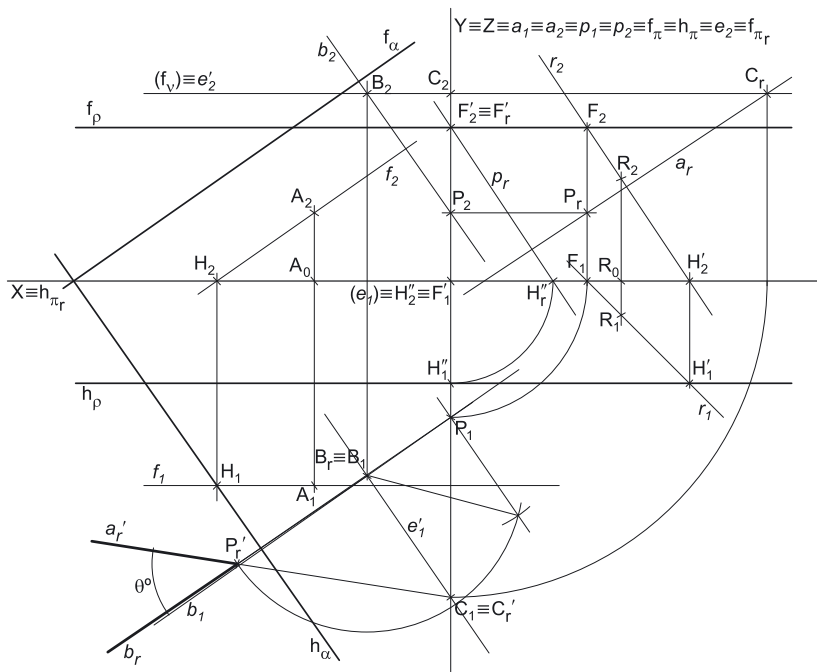
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$  e  $R$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar o traço horizontal do plano  $\rho$ . Em seguida, determinaram-se os traços dos dois planos.

### Determinação dos traços do plano $\alpha$ :

Começamos pelo traço horizontal ( $h_\alpha$ ), que é uma reta, e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dados do plano são insuficientes para definirmos  $h_\alpha$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $f$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e está definida por um ponto (o ponto  $A$ , o ponto do plano  $\alpha$  que é dado no enunciado) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ , que também é dada no enunciado). Em seguida, determinou-se o ponto  $H$ , o traço horizontal da reta  $f$ . Já temos um ponto que para definir o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $h_\alpha$ .

Tendo em conta que é dada a direção do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) e que o enunciado refere, expressamente, que os traços do plano são perpendiculares entre si, é possível deduzir a direção do traço horizontal do plano –  $h_\alpha$  faz, com o eixo  $X$ , um ângulo de  $55^\circ$ , que é o ângulo complementar do ângulo de  $35^\circ$  ( $35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$ ). Assim, já temos a direção que nos faltava para definir  $h_\alpha$  –  $h_\alpha$  está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (faz um ângulo de  $55^\circ$  com o eixo  $X$ , de abertura para a direita).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano é um ponto de  $f_\alpha$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_\alpha$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que é dada a direção das retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$ , também já temos a direção que nos faltava para definir  $f_\alpha$  –  $f_\alpha$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ).

*Determinação dos traços do plano  $\rho$ :*

Para determinarmos o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal do plano  $\rho$  é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos uma direção para definir  $f_\rho$  – falta-nos um ponto para definir  $f_\rho$ . Os dados do plano são insuficientes para definirmos  $f_\rho$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Nesse sentido, recorreu-se à reta  $r$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $r$  é uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , que passa pelo ponto  $R$  (o ponto do plano  $\rho$  que é dado no enunciado). A reta  $r$  está definida por dois pontos – o ponto  $R$  (o ponto do plano  $\rho$  que é dado no enunciado) e o ponto  $H'$  (o seu traço horizontal, que se situa sobre  $h_p$ ). Em seguida, determinou-se o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ) –  $f_\rho$  está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\rho$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\alpha$  e  $\rho$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapa 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Por um ponto  $P$ , exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta  $a$ , ortogonal ao plano  $\rho$ , e a reta  $b$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto  $P$  de forma a ter abscissa nula. A reta  $a$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Também por isso, ao contrário do que acontece com a reta  $b$ , não está ainda garantida a ortogonalidade entre a reta  $a$  e o plano  $\rho$ .

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $a$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $a$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, para que a reta  $a$  seja ortogonal ao plano  $\rho$ , a reta  $a$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$  (para além da «família» de retas fronto-horizontais, cuja ortogonalidade já está garantida). Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

Assim, recorreu-se a uma reta  $p$ , pertencente ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  está definida pelos seus traços (os pontos  $F'$  e  $H''$ ). Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta  $p$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $a$  (que é o plano  $YZ$ ). A reta  $p$  é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas  $a$  e  $p$ . Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil – nesse sentido conduziu-se, pelas duas retas o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se os pontos  $F'$ ,  $H''$  e  $P$ . O ponto  $F'$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F'_r \equiv F'_2$ . Em seguida, desenhou-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), que passa por  $F'_r$  e por  $H''_r$  (a reta  $p_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $F'_r$  e  $H''_r$ ). Pelo ponto  $P_r$ , conduziu-se a reta  $a_r$ , perpendicular a  $p_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $a$  em relação à reta  $p$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $a$  em relação ao plano  $\rho$ . A reta  $a$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta  $a$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a reta  $a$  é ortogonal ao plano  $\rho$ .

Sobre a reta  $a_r$ , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $C_r$ . O ponto  $C_r$  é, em rebatimento, um ponto  $C$  qualquer, pertencente à reta  $a$ . Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $C$ . A reta  $a$  (que já está definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $C$ ) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Está cumprida a **Etapa 1** deste **2º método geral** – as retas  $a$  e  $b$ , porque são concorrentes (no ponto  $P$ ), definem um plano, plano esse plano que é um plano ortogonal à aresta do diedro (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo entre os dois planos dados.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta  $a$  e a reta  $b$ ) é o ângulo formado entre os dois planos (os planos  $\alpha$  e  $\rho$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (as retas  $a$  e  $b$ ) para um plano horizontal (de nível)  $v$ , qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano  $v$ , horizontal (de nível), passando pelo ponto  $C$  (o ponto da reta  $a$  que foi previamente determinado). Esta opção teve a ver com a economia de traçados que tal permite, como adiante se exporá. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por  $C_2$  (a projeção frontal do ponto  $C$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal foi identificado entre parêntesis.

Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos. A reta  $e'$  está definida por dois pontos – o ponto  $C$  (que é, na prática, o ponto de interseção da reta  $a$  com o plano  $v$ ) e o ponto  $B$  (que é o ponto de interseção da reta  $b$  com o plano  $v$ ). O ponto  $B$  foi determinado a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Note que, caso o plano  $v$  não contivesse o ponto  $C$ , seria necessário determinar, através do rebatimento (por exemplo), o ponto de interseção da reta  $a$  com o plano  $v$ , uma vez que, ao contrário da reta  $b$ , as projeções da reta  $a$  não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Os pontos  $C$  e  $B$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $C_r' \equiv C_1$  e  $B_r \equiv B_1$ . O ponto  $C_r'$  é o ponto  $C$  rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto  $C$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir cada uma das duas retas em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento do ponto  $P$ , que é o vértice do ângulo (e, portanto, é um ponto que pertence às duas retas em simultâneo).

O rebatimento do ponto  $P$  (pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ ) processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $P$  ao plano  $v$  (a cota de  $P$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $P_1$ , determinando  $P_r'$ . O ponto  $P_r'$  é o ponto  $P$  rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $a_r'$  (a reta  $a$  rebatida) passa por  $C_r'$  e  $P_r'$  (está definida por dois pontos). A reta  $b_r$  (a reta  $b$  rebatida) passa por  $B_r$  e  $P_r'$  (está igualmente definida por dois pontos). Note que a reta  $a_r'$  é a reta  $a$  rebatida pelo seu segundo rebatimento – a reta  $a$  rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ .

O ângulo as retas  $a_r'$  e  $b_r$  é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\rho$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $a_r'$  e  $b_r$ , com vértice em  $P_r'$ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $a$  e  $b$ , do plano  $\pi$ , do plano  $v$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e ao rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ ).

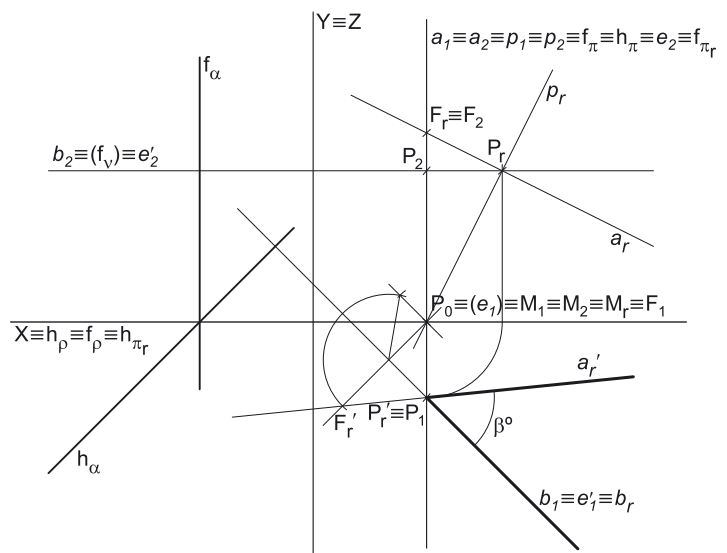
## 507.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\rho$  está representado pelo eixo  $X$  e pelas projeções do ponto  $P$  (o ponto que define o plano).

### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\rho$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\alpha$  e  $\rho$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapa 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Por um ponto qualquer, exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta **a**, ortogonal ao plano  $\rho$ , e a reta **b**, ortogonal ao plano  $\alpha$ . Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se utilizar, como ponto exterior, o ponto **P** que define o plano  $\rho$ . A reta **b** é uma reta horizontal (de nível). A reta **a** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Também por isso, ao contrário do que acontece com a reta **b**, não está ainda garantida a ortogonalidade entre a reta **a** e o plano  $\rho$ .

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **a** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **a**, para além do ponto **P**;
2. por outro lado, para que a reta **a** seja ortogonal ao plano  $\rho$ , a reta **a** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$  (para além da «família» de retas fronto-horizontais, cuja ortogonalidade já está garantida). Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ .

Assim, recorreu-se a uma reta **p**, pertencente ao plano  $\rho$ . A reta **p** está definida por dois pontos – o ponto **P** (o ponto que define o plano  $\rho$ ) e o ponto **M** (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, pois a reta **p** é necessariamente uma reta passante). A reta **p** é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas **a** e **p**. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil – nesse sentido conduziu-se, pelas duas retas o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se os pontos **M** e **P**. O ponto **M** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $M_r \equiv M_2 \equiv M_1$ . Em seguida, desenhou-se  $p_r$ , que passa por  $P_r$  e por  $M_r$  (a reta  $p_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $P_r$  e  $M_r$ ). Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $a_r$ , perpendicular a  $p_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta **a** em relação à reta **p**, pelo que está garantida a ortogonalidade da reta **a** em relação ao plano  $\rho$ . A reta **a** é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano  $\rho$ , pelo que a reta **a** já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a reta **a** é ortogonal ao plano  $\rho$ .

Sobre a reta  $a_r$ , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $F_r$ . O ponto  $F_r$  é, em rebatimento, um ponto **F** pertencente à reta **a** (o ponto **F** é o traço frontal da reta **a**). Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto **F** – o ponto **F** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (tem-se, imediatamente,  $F_2 \equiv F_r$ ). A reta **a** (que já definida por dois pontos – os pontos **P** e **F**) é ortogonal ao plano  $\rho$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano  $\rho$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Está cumprida a **Etapa 1** deste **2º método geral** – as retas **a** e **b**, porque são concorrentes (no ponto **P**), definem um plano, esse plano que é um plano ortogonal à aresta dos diedros (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta **a** e a reta **b**) é o ângulo formado entre os dois planos (os planos  $\alpha$  e  $\rho$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (as retas **a** e **b**) para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a reta **b**. Esta opção teve a ver com a economia de traçados que tal permite, como adiante se exporá. Nesse sentido, representou-se o plano  $v$ , horizontal (de nível), cujo traço frontal ( $f_v$ ) está coincidente com  $b_2$  (a projeção frontal da reta **b**), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a própria reta **b** – a reta **b** é uma reta que pertence aos dois planos (é reta de interseção entre os dois planos), pelo que é, imediatamente a charneira do rebatimento.

A reta **b** é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se imediatamente,  $b_r \equiv b_1$ . O ponto **P** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r' \equiv P_1$ . O ponto  $P_r'$  é o ponto **P** rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas **a** e **b**. Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta **a** em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento do ponto **F**, pertencente à reta **a** e determinado previamente.

O rebatimento do ponto **F** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $F_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto **F** ao plano  $v$  (a cota de **F** em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **F** em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **F**, até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , determinando  $F_r'$ . O ponto  $F_r'$  é o ponto **F** rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto **F** rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas **a** e **b**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenhou-se a reta  $a$  em rebatimento. A reta  $a_r'$  (a reta  $a$  rebatida) passa por  $P_r'$  e  $A_r'$  (está definida por dois pontos). Note que a reta  $a_r'$  é a reta  $a$  rebatida pelo seu segundo rebatimento – a reta  $a$  rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ . O ângulo as retas  $a_r'$  e  $b_r$  é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\rho$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $a_r'$  e  $b_r$ , com vértice em  $P_r'$ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ ). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $a$  e  $b$ , do plano  $\pi$ , do plano  $\varphi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e ao rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ ).

## 508.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\rho$  e  $\sigma$ , pelos respectivos traços, em função dos dados. O plano  $\rho$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal a  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os dois planos passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapla 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\rho$  e  $\sigma$  é a reta de interseção entre os dois planos, que é necessariamente uma reta fronto-horizontal – é a única «família» de retas que os dois planos têm em comum (a reta de interseção entre dois planos de rampa é necessariamente uma reta fronto-horizontal). A aresta do diedro está, assim, identificada (mas não determinada, pois não é necessária a sua determinação) – é uma reta fronto-horizontal.

**Etapla 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta fronto-horizontal é necessariamente um plano de perfil (duplamente projetante). Assim, representou-se um plano  $\pi$  (um plano de perfil qualquer), pelos seus traços, que é um plano ortogonal à aresta do diedro.

**Etapla 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. A reta  $i$  é a reta de interseção do plano  $\pi$  com o plano  $\rho$  – a reta  $i$  está definida por dois pontos (os pontos  $F$  e  $H$ , os seus traços nos planos de projeção). A reta  $i'$  é a reta de interseção do plano  $\pi$  com o plano  $\sigma$  – a reta  $i'$  está igualmente definida por dois pontos (os pontos  $F'$  e  $H'$ , os seus traços nos planos de projeção).

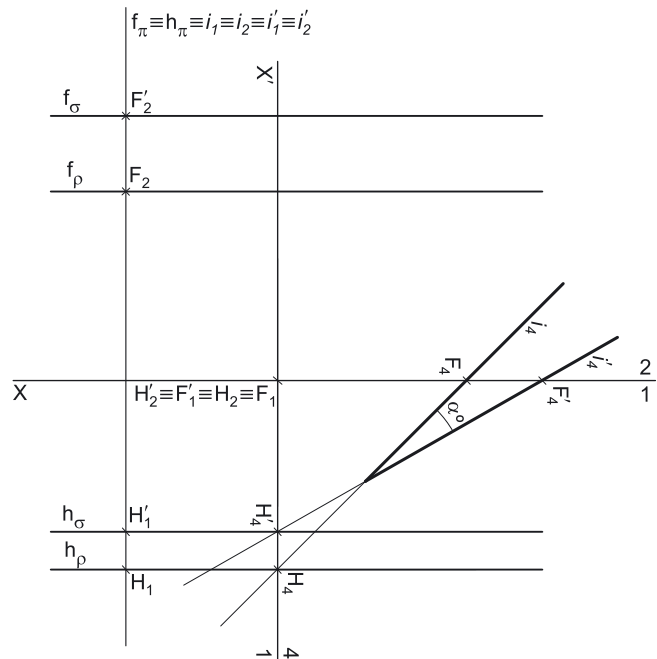
**Etapla 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre as retas  $i$  e  $i'$  é, então, o ângulo formado entre os planos  $\rho$  e  $\sigma$  – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio plano  $\pi$ .

Esse ângulo está contido no plano  $\pi$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\pi$  (o plano que contém o ângulo) num plano frontal (de frente).

Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\pi$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\pi$ , o eixo  $X'$  é paralelo a  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), ou seja, é perpendicular ao eixo  $X$ . As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

$F_4$  é a projeção do ponto  $F$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$  (que é 7 cm – a cota de  $F$ , que é a cota de  $f_p$ ).  $H_4$  é a projeção do ponto  $H$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) –  $H_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois o ponto  $H$  tem cota nula. A projeção da reta  $i$  no **plano 4** ( $i_4$ ) passa por  $F_4$  e  $H_4$  (está definida por dois pontos).

$F'_4$  é a projeção do ponto  $F'$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F'_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F'_2$  ao eixo  $X$  (que é 7 cm – a cota de  $F'$ , que é a cota de  $f_p$ ).  $H'_4$  é a projeção do ponto  $H'$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) –  $H'_4$  situa-se no eixo  $X'$ , pois o ponto  $H'$  tem cota nula. A projeção da reta  $i'$  no **plano 4** ( $i'_4$ ) passa por  $F'_4$  e  $H'_4$  (está definida por dois pontos).

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\pi$  é um plano frontal (de frente), paralelo ao **plano 4**, o ângulo entre as duas retas projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Assim, o ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre os planos  $\rho$  e  $\sigma$ ) é qualquer dos dois menores ângulos formados entre  $i_4$  e  $i'_4$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo só se poderia processar com o recurso a um processo geométrico auxiliar (como é o caso da mudança do diedro de projeção efetuada) mas que, na prática, tal não é necessário. Assim, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\pi$ , das retas  $i$  e  $i'$ , bem como, ainda, todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 509.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O  $\beta_{1/3}$  está definido por uma reta (o eixo  $X$ ) e pela sua orientação (faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção, atravessando os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros).

#### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano  $\delta$  e o  $\beta_{1/3}$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber:

1. identifica-se a aresta do diedro;
2. conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos);
3. determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados;
4. o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\delta$  e pelo  $\beta_{1/3}$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua passante, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapa 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber:

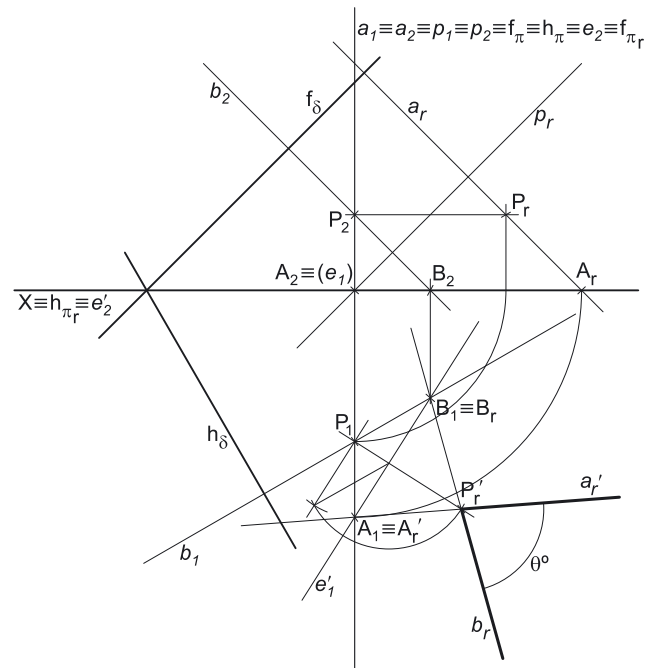
1. Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro);
2. o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Por um ponto  $P$ , qualquer, exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta  $a$ , ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ , e a reta  $b$ , ortogonal ao plano  $\delta$ . A reta  $a$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Crítério de Reversibilidade**. Também por isso, ao contrário do que acontece com a reta  $b$  (que é uma reta oblíqua), não está ainda garantida a ortogonalidade entre a reta  $a$  e o  $\beta_{1/3}$ .

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $a$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $a$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, para que a reta  $a$  seja ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ , a reta  $a$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do  $\beta_{1/3}$  (para além da «família» de retas fronto-horizontais, cuja ortogonalidade já está garantida). Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do  $\beta_{1/3}$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, recorreu-se a uma reta  $p$ , pertencente a  $\beta_{1/3}$ . A reta  $p$  é uma reta de perfil passante, que está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que não se identificou) e a sua direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção, sendo que atravessa os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar a reta  $p$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $a$ .

A reta  $p$  é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas  $a$  e  $p$ . Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil – nesse sentido conduziu-se, pelas duas retas o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_r$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se o ponto  $P$ . Em seguida, há que desenhar a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p_r$  passa pelo seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é um ponto fixo (pois é um ponto da charneira) mas que não se identificou – já temos um ponto para definir a reta  $p_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, o ângulo que a reta  $p$  faz com os planos de projeção é igual ao ângulo que a reta  $p$  faz com os traços do plano  $\pi$ . Assim, a reta  $p_r$  faz ângulos de  $45^\circ$  com os traços do plano  $\pi$  em rebatimento ( $f_{\pi_r}$  e  $h_{\pi_r}$ ), passando pelo quadrante em que se situa  $P_r$  (pois o ponto  $P$  é um ponto do  $1^\circ$  Diedro, que a reta  $p$  atravessa). Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $p_r$ , o que nos permitiu desenhar a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), que está, assim, definida por um ponto e uma direção.

Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $a_r$ , perpendicular a  $p_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $a$  em relação à reta  $p$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $a$  em relação a  $\beta_{1/3}$ . A reta  $a$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do  $\beta_{1/3}$ , pelo que a reta  $a$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do  $\beta_{1/3}$  – a reta  $a$  é ortogonal a  $\beta_{1/3}$ .

Sobre a reta  $a_r$  representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $A_r$ . O ponto  $A_r$  é, em rebatimento, um ponto  $A$  pertencente à reta  $a$  (o ponto  $A$  é o traço horizontal da reta  $a$ ). Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $A$ . A reta  $a$  (que já definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $A$ ) é ortogonal a  $\beta_{1/3}$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do  $\beta_{1/3}$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Está cumprida a **Etapa 1** deste **2º método geral** – as retas  $a$  e  $b$ , porque são concorrentes (no ponto  $P$ ), definem um plano, plano esse plano que é um plano ortogonal à aresta dos diedros (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta  $a$  e a reta  $b$ ) é o ângulo formado entre os dois planos (o plano  $\delta$  e o  $\beta_{1/3}$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (as retas  $a$  e  $b$ ) para o Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é o traço horizontal do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ . A reta  $e'$  (a charneira do rebatimento) está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o traço horizontal da reta  $a$ ) e o ponto  $B$  (o traço horizontal da reta  $b$ ).

Os pontos  $A$  e  $B$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $A_r' \equiv A_1$  e  $B_r' \equiv B_1$ . Note que o ponto  $A_r'$  é o ponto  $A$  rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto  $A$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos outro ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $P$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto  $P$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a **cota** do ponto  $P$  e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $P_1$ , determinando  $P_r'$ . O ponto  $P_r'$  é o ponto  $P$  rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $a_r'$  (a reta  $a$  rebatida) passa por  $A_r'$  e  $P_r'$  (está definida por dois pontos). A reta  $b_r'$  (a reta  $b$  rebatida) passa por  $B_r'$  e  $P_r'$  (está igualmente definida por dois pontos). Note que a reta  $a_r'$  é a reta  $a$  rebatida pelo seu segundo rebatimento – a reta  $a$  rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ .

O ângulo as retas  $a_r'$  e  $b_r'$  é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre o plano  $\delta$  e o  $\beta_{1/3}$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $a_r'$  e  $b_r'$ , com vértice em  $P_r'$ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $a$  e  $b$ , do plano  $\pi$ , e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e ao rebatimento do plano definido pelas retas  $a$  e  $b$ ).

## 510.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O  $\beta_{2/4}$  está definido por uma reta (o eixo  $X$ ) e pela sua orientação (faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção, atravessando os  $2^\circ$  e  $4^\circ$  Diedros).

**Resolução:**

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano  $\delta$  e o  $\beta_{2/4}$ , passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\delta$  e pelo  $\beta_{2/4}$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua passante, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapa 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Por um ponto  $P$ , qualquer, exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta  $a$ , ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ , e a reta  $b$ , ortogonal ao plano  $\delta$ . A reta  $a$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Também por isso, ao contrário do que acontece com a reta  $b$  (que é uma reta oblíqua), não está ainda garantida a ortogonalidade entre a reta  $a$  e o  $\beta_{2/4}$ .

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $a$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $a$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, para que a reta  $a$  seja ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ , a reta  $a$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do  $\beta_{2/4}$  (para além da «família» de retas fronto-horizontais, cuja ortogonalidade já está garantida). Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do  $\beta_{2/4}$ .

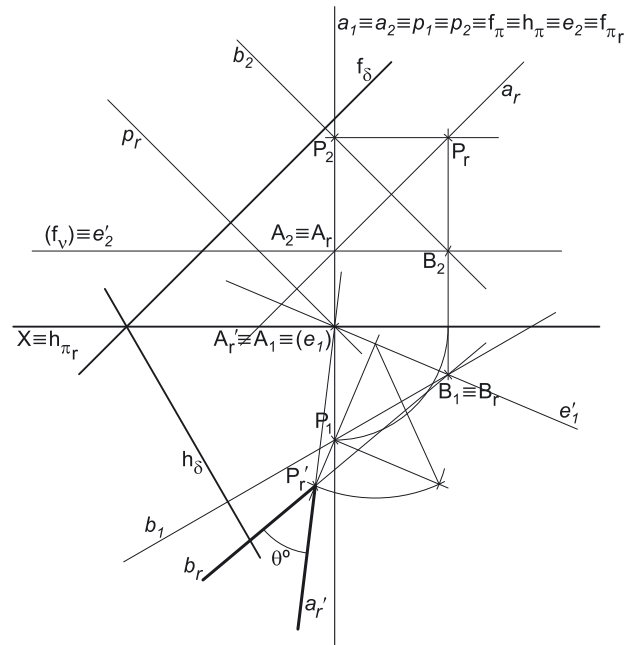
Assim, recorreu-se a uma reta  $p$ , pertencente ao  $\beta_{2/4}$ . A reta  $p$  é uma reta de perfil passante, que está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que não se identificou) e a sua direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção, sendo que atravessa os  $2^\circ$  e  $4^\circ$  Diedros). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar a reta  $p$  no mesmo plano de perfil que contém a reta  $a$ .

A reta  $p$  é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas  $a$  e  $p$ . Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil – nesse sentido conduziu-se, pelas duas retas o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se o ponto  $P$ . Em seguida, há que desenhar a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $p_r$  passa pelo seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é um ponto fixo (pois é um ponto da charneira) mas que não se identificou – já temos um ponto para definir a reta  $p_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, o ângulo que a reta  $p$  faz com os planos de projeção é igual ao ângulo que a reta  $p$  faz com os traços do plano  $\pi$ . Assim, a reta  $p_r$  faz ângulos de  $45^\circ$  com os traços do plano  $\pi$  em rebatimento ( $f_\pi$  e  $h_\pi$ ), **não passando** pelo quadrante em que se situa  $P_r$  (pois o ponto  $P$  é um ponto do  $1^\circ$  Diedro, que a reta  $p$  **não atravessa**). Já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $p_r$ , o que nos permitiu desenhar a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), que está, assim, definida por um ponto e uma direção.

Pelo ponto  $P_r$  conduziu-se a reta  $a_r$ , perpendicular a  $p_r$ . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta  $a$  em relação à reta  $p$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $a$  em relação ao  $\beta_{2/4}$ . A reta  $a$  é também ortogonal à «família» das retas de perfil do  $\beta_{2/4}$ , pelo que a reta  $a$  já é ortogonal a duas «famílias» de retas do  $\beta_{2/4}$  – a reta  $a$  é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ .

Sobre a reta  $a$ , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto  $A$ . O ponto  $A$  é, em rebatimento, um ponto  $A$  pertencente à reta  $a$  (o ponto  $A$  é o traço frontal da reta  $a$ ). Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto  $A$  – o ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (tem-se, mediamente,  $A_2 \equiv A_r$ ). A reta  $a$  (que já definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $A$ ) é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do  $\beta_{2/4}$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Está cumprida a **Etapa 1** deste **2º método geral** – as retas **a** e **b**, porque são concorrentes (no ponto **P**), definem um plano, plano esse plano que é um plano ortogonal à aresta dos diedros (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta **a** e a reta **b**) é o ângulo formado entre os dois planos (o plano  $\delta$  e o  $\beta_{2/4}$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (as retas **a** e **b**) para um plano horizontal (de nível)  $v$ , qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano  $v$ , horizontal (de nível), passando pelo ponto **A** (o ponto da reta **a** que foi previamente determinado). Esta opção teve a ver com a economia de traçados que tal permite, como adiante se exporá. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por **A**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **A**). O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal foi identificado entre parêntesis.

Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta **e'**), que é a reta de interseção entre os dois planos. A reta **e'** está definida por dois pontos – o ponto **A** (que é, na prática, o ponto de interseção da reta **a** com o plano  $v$ ) e o ponto **B** (que é o ponto de interseção da reta **b** com o plano  $v$ ). O ponto **B** foi determinado a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Note que, caso o plano  $v$  não contivesse o ponto **A**, seria necessário determinar, através do rebatimento (por exemplo), o ponto de interseção da reta **a** com o plano  $v$ , uma vez que, ao contrário da reta **b**, as projeções da reta **a** não verificam o **Crítério de Reversibilidade**.

Os pontos **A** e **B** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente **A**<sub>r</sub>'  $\equiv$  **A**<sub>1</sub> e **B**<sub>r</sub>'  $\equiv$  **B**<sub>1</sub>. O ponto **A**<sub>r</sub>' é o ponto **A** rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto **A** rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas **a** e **b**. Já temos, em rebatimento, um ponto para definir cada uma das duas retas em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento do ponto **P**, que é o vértice do ângulo (e, portanto, é um ponto que pertence às duas retas em simultâneo).

O rebatimento do ponto **P** (pelo rebatimento do plano definido pelas retas **a** e **b**) processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por **P**<sub>1</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto **P** ao plano  $v$  (a cota de **P** em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **P** em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **P**, até à perpendicular à charneira que passa por **P**<sub>1</sub>, determinando **P**<sub>r</sub>'. O ponto **P**<sub>r</sub>' é o ponto **P** rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas **a** e **b**.

Em seguida, desenhou-se a reta **a** em rebatimento. A reta **a**<sub>r</sub>' (a reta **a** rebatida) passa por **P**<sub>r</sub>' e **A**<sub>r</sub>' (está definida por dois pontos). Note que a reta **a**<sub>r</sub>' é a reta rebatida pelo seu segundo rebatimento – a reta **a** rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas **a** e **b**. Em seguida, desenhou-se a reta **b** em rebatimento. A reta **b**<sub>r</sub>' (a reta **b** rebatida) passa por **P**<sub>r</sub>' e **B**<sub>r</sub>' (está definida por dois pontos). O ângulo as retas **a**<sub>r</sub>' e **b**<sub>r</sub>' é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre o plano  $\delta$  e o  $\beta_{2/4}$ , é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas **a**<sub>r</sub>' e **b**<sub>r</sub>', com vértice em **P**<sub>r</sub>'. Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **a** e **b**, do plano  $\pi$ , do plano  $v$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e ao rebatimento do plano definido pelas retas **a** e **b**).

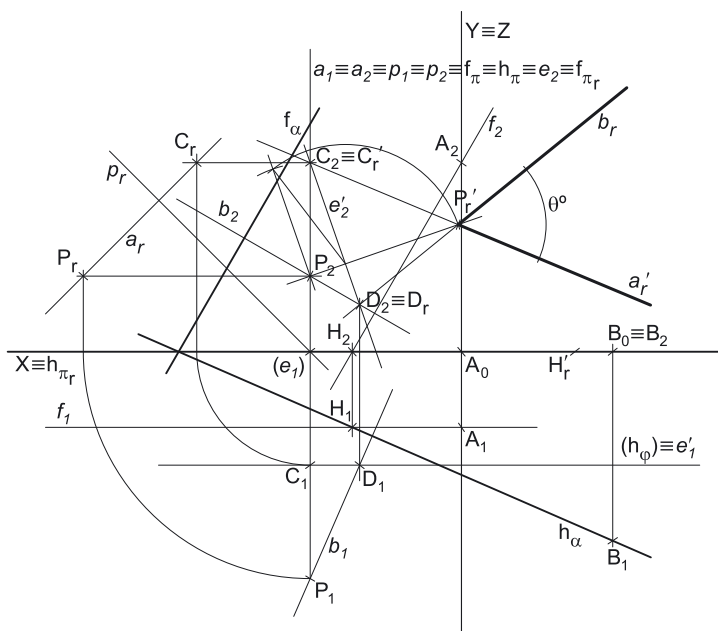
## 511.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O  $\beta_{1/3}$  está definido por uma reta (o eixo **X**) e pela sua orientação (faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projeção, atravessando os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros).

Antes de mais determinaram-se os traços do plano  $\alpha$ . Começamos pelo traço horizontal (**h** <sub>$\alpha$</sub> ), que é uma reta, e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto do traço horizontal – o ponto **B** (que é um ponto dado e tem cota nula). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definirmos **h** <sub>$\alpha$</sub> .

Os dados do plano são insuficientes para definirmos **h** <sub>$\alpha$</sub> , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta **f**, como reta auxiliar do plano. A reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e está definida por um ponto (o ponto **A**, outro ponto do plano  $\alpha$  que é dado no enunciado) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ , que também é dada no enunciado). Em seguida, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **f**. Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano  $\alpha$  – **h** <sub>$\alpha$</sub>  está definido por dois pontos (os pontos **B** e **H**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano é um ponto de  $f_\alpha$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_\alpha$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que é dada a direção das retas frontais (de frente) do plano  $\alpha$ , também já temos a direção que nos faltava para definir  $f_\alpha$  –  $f_\alpha$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ).

#### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano  $\alpha$  e o  $\beta_{1/3}$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\alpha$  e pelo  $\beta_{1/3}$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua passante, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapa 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Por um ponto **P**, qualquer, exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta **a**, ortogonal a  $\beta_{1/3}$ , e a reta **b**, ortogonal ao plano  $\alpha$ . A reta **a** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Também por isso, ao contrário do que acontece com a reta **b** (que é uma reta oblíqua), não está ainda garantida a ortogonalidade entre a reta **a** e o  $\beta_{1/3}$ .

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **a** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **a**, para além do ponto **P**;
2. por outro lado, para que a reta **a** seja ortogonal a  $\beta_{1/3}$ , a reta **a** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do  $\beta_{1/3}$  (para além da «família» de retas fronto-horizontais, cuja ortogonalidade já está garantida). Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do  $\beta_{1/3}$ .

Assim, recorreu-se a uma reta **p**, pertencente a  $\beta_{1/3}$ . A reta **p** é uma reta de perfil passante, que está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e a sua direção (faz ângulos de 45° com os planos de projeção, sendo que atravessa os 1ª e 3ª Diedros). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar a reta **p** no mesmo plano de perfil que contém a reta **a**.

A reta **p** é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas **a** e **p**. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil – nesse sentido conduziu-se, pelas duas retas o plano  $\pi$ , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). Rebateu-se o plano  $\pi$ , rebatendo-se o ponto **P**. Em seguida, há que desenhar a reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida), para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **p<sub>r</sub>** passa pelo seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que é um ponto fixo (pois é um ponto da charneira) mas que não se identificou – já temos um ponto para definir a reta **p<sub>r</sub>**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, o ângulo que a reta **p** faz com os planos de projeção é igual ao ângulo que a reta **p** faz com os traços do plano  $\pi$ . Assim, a reta **p<sub>r</sub>** faz ângulos de 45 com os traços do plano  $\pi$  em rebatimento ( $f_{\pi_r}$  e  $h_{\pi_r}$ ), passando pelo quadrante em que se situa **P<sub>r</sub>** (pois o ponto **P** é um ponto do 1ª Diedro, que a reta **p** atravessa). Já temos a direção que nos faltava para definir a reta **p<sub>r</sub>**, o que nos permitiu desenhar a reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida), que está, assim, definida por um ponto e uma direção.

Pelo ponto **P<sub>r</sub>** conduziu-se a reta **a<sub>r</sub>**, perpendicular a **p<sub>r</sub>**. Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta **a** em relação à reta **p**, pelo que está garantida a ortogonalidade da reta **a** em relação a  $\beta_{1/3}$ . A reta **a** é também ortogonal à «família» das retas de perfil do  $\beta_{1/3}$ , pelo que a reta **a** já é ortogonal a duas «famílias» de retas do  $\beta_{1/3}$  – a reta **a** é ortogonal a  $\beta_{1/3}$ .

Sobre a reta **a<sub>r</sub>**, representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto **C<sub>r</sub>**. O ponto **C<sub>r</sub>** é, em rebatimento, um ponto **C** pertencente à reta **a**. Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto **C**. A reta **a** (que já definida por dois pontos – os pontos **P** e **C**) é ortogonal a  $\beta_{1/3}$ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do  $\beta_{1/3}$  – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Está cumprida a **Etapa 1** deste **2º método geral** – as retas **a** e **b**, porque são concorrentes (no ponto **P**), definem um plano, plano esse plano que é um plano ortogonal à aresta dos diedros (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta **a** e a reta **b**) é o ângulo formado entre os dois planos (o plano  $\alpha$  e o  $\beta_{1/3}$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (as retas **a** e **b**) para um plano frontal (de frente)  $\varphi$ , qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano  $\varphi$ , frontal (de frente), passando pelo ponto **C** (o ponto da reta **a** que foi previamente determinado). Esta opção teve a ver com a economia de traçados que tal permite, como adiante se exporá. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\alpha$ ) passa necessariamente por **C**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **C**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal foi identificado entre parêntesis.

Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta **e'**), que é a reta de interseção entre os dois planos. A reta **e'** está definida por dois pontos – o ponto **C** (que é, na prática, o ponto de interseção da reta **a** com o plano  $\varphi$ ) e o ponto **D** (que é o ponto de interseção da reta **b** com o plano  $\varphi$ ). O ponto **D** foi determinado a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Note que, caso o plano  $\varphi$  não contivesse o ponto **C**, seria necessário determinar, através do rebatimento (por exemplo), o ponto de interseção da reta **a** com o plano  $\varphi$ , uma vez que, ao contrário da reta **b**, as projeções da reta **a** não verificam o **Crítério de Reversibilidade**.

Os pontos **C** e **D** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente **C**<sub>r</sub>'  $\equiv$  **C**<sub>2</sub> e **D**<sub>r</sub>'  $\equiv$  **D**<sub>2</sub>. O ponto **C**<sub>r</sub>' é o ponto **C** rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto **C** rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas **a** e **b**. Já temos, em rebatimento, um ponto para definir cada uma das duas retas em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento do ponto **P**, que é o vértice do ângulo (e, portanto, é um ponto que pertence às duas retas em simultâneo).

O rebatimento do ponto **P** (pelo rebatimento do plano definido pelas retas **a** e **b**) processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por **P**<sub>2</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto **P** ao plano  $\varphi$  (o afastamento de **P** em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **P** em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **P**, até à perpendicular à charneira que passa por **P**<sub>2</sub>, determinando **P**<sub>r</sub>'. O ponto **P**<sub>r</sub>' é o ponto **P** rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas **a** e **b**.

O ângulo as retas **a**<sub>r</sub>' e **b**<sub>r</sub>' é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre o plano  $\alpha$  e  $\beta_{1/3}$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas **a**<sub>r</sub>' e **b**<sub>r</sub>', com vértice em **P**<sub>r</sub>'. Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y  $\equiv$  Z** representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **a** e **b**, do plano  $\pi$ , do plano  $\varphi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e ao rebatimento do plano definido pelas retas **a** e **b**).

## 512.

### Dados:

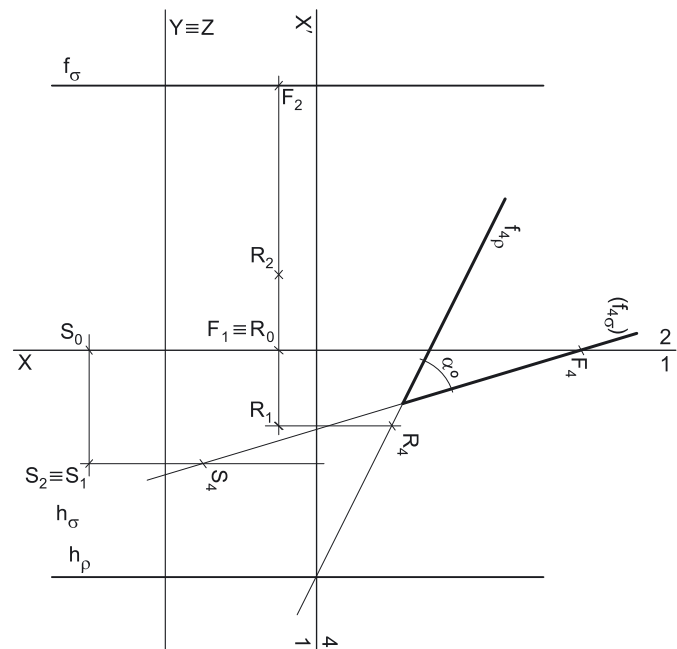
Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$  pelos seus traços, em função dos dados, bem como o plano  $\sigma$ . Este está representado pelo eixo **X** e pelas projeções do ponto **P** (o ponto que define o plano). O plano  $\rho$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal a  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os dois planos passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapla 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\rho$  e  $\sigma$  é a reta de interseção entre os dois planos, que é necessariamente uma reta fronto-horizontal – é a única «família» de retas que os dois planos têm em comum (a reta de interseção entre dois planos de rampa é necessariamente uma reta fronto-horizontal). A aresta do diedro está, assim, identificada (mas não determinada, pois não é necessária a sua determinação) – é uma reta fronto-horizontal.

**Etapla 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

À semelhança das situações dos exercícios 489. e 490., optou-se por uma resolução que alia uma grande eficácia a uma grande economia de traçados – o plano ortogonal à aresta do diedro que se conduziu é um novo plano de projeção (o **plano 4**), que substitui o Plano Frontal de Projeção. Na prática, esta resolução recorre a uma **mudança do diedro de projeção** para a resolução do problema.

Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal à aresta do diedro (uma reta fronto-horizontal, que é paralela ao eixo **X**), o eixo **X'** é perpendicular ao eixo **X** inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, há que determinar os traços dos dois planos (os planos  $\rho$  e  $\sigma$ ) no **plano 4**.

Para determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\rho$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definir  $f_{4\rho}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto **R** (o ponto que define o plano  $\rho$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**.

**R<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **R** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **R<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **R<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 2 cm – a cota de **R**). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4\rho}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X'**) e o ponto **R<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **R** no **plano 4**).

Determinou-se, em seguida, o novo traço frontal do plano  $\sigma$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**). Para determinar o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** ( $f_{4\sigma}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os únicos elementos conhecidos do plano  $\rho$  são o ponto **S** (o ponto que define o plano) e o seu traço frontal ( $f_{\sigma}$ ). Assim, comecemos por determinar a projeção do ponto **S** no **plano 4**. **S<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **S** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **S<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **S<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 3 cm – a cota de **S**). Já temos um ponto para definir  $f_{4\sigma}$  – o ponto **S<sub>4</sub>**. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nesse sentido, recorreu-se a um ponto **F**, do traço frontal do plano  $\sigma$  ( $f_{\sigma}$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto **F** no mesmo plano de perfil do ponto **R**. **F<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **F<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **F<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 7 cm – a cota de **F**, que é a cota de  $f_{\sigma}$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4\sigma}$ .

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  também é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** ( $f_{4\sigma}$ ) está definido por dois pontos – o ponto **S<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **S** no **plano 4**) e o ponto **F<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **F** no **plano 4**). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  está representado, apenas, pelo seu traço frontal (não se determinou o seu traço horizontal), pelo que o traço frontal do plano  $\sigma$  (o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** –  $f_{4\sigma}$ ) se identificou entre parêntesis.

**Etapa 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) é a reta de interseção do plano  $\rho$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro). O traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** ( $f_{4\sigma}$ ) é a reta de interseção do plano  $\sigma$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro).

**Etapa 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\sigma}$  é, então, o ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o plano  $\sigma$  – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio **plano 4**. O plano que contém o ângulo (o **plano 4**) é o novo Plano Frontal de Projeção, pelo que ângulo está em verdadeira grandeza no **plano 4** (em projeção frontal).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o plano  $\sigma$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\sigma}$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

#### Traçado:

Os dados (o traço horizontal do plano  $\rho$  e o traço frontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os restantes dados são pontos, cujas linhas de chamada se representam sempre a **leve**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo **X'** e dos restantes traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 513.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\rho$  pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\sigma$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **P** (o ponto que define o plano). O plano  $\rho$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal a  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os dois planos passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber:

1. Identifica-se a aresta do diedro;
2. conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos);
3. determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados;
4. o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapla 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\rho$  e  $\sigma$  é a reta de interseção entre os dois planos, que é necessariamente uma reta fronto-horizontal – é a única «família» de retas que os dois planos têm em comum (a reta de interseção entre dois planos de rampa é necessariamente uma reta fronto-horizontal). A aresta do diedro está, assim, identificada (mas não determinada, pois não é necessária a sua determinação) – é uma reta fronto-horizontal.

**Etapla 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro.

À semelhança das situações dos exercícios **489.** e **490.**, optou-se por uma resolução que alia uma grande eficácia a uma grande economia de traçados – o plano ortogonal à aresta do diedro que se conduziu é um novo plano de projeção (o **plano 4**), que substitui o Plano Frontal de Projeção. Na prática, esta resolução recorre a uma **mudança do diedro de projeção** para a resolução do problema.

Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal à aresta do diedro (uma reta fronto-horizontal, que é paralela ao eixo **X**), o eixo **X'** é perpendicular ao eixo **X** inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

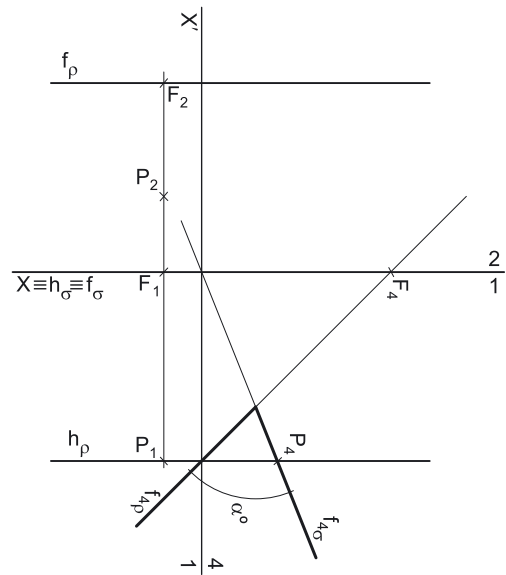
Em seguida, há que determinar os traços dos dois planos (os planos  $\rho$  e  $\sigma$ ) no **plano 4**.

Para determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** –  $f_{4\rho}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\rho$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definir  $f_{4\rho}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto **F**, do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto **F** no mesmo plano de perfil do ponto **P**.  $F_4$  é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_4$  ao eixo **X'** é igual à distância de  $F_2$  ao eixo **X** (que é 5 cm – a cota de **F**, que é a cota de  $f_p$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4\rho}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X'**) e o ponto  $F_4$  (a projeção do ponto **F** no **plano 4**).

Para determinar o novo traço frontal do plano  $\sigma$  (o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** –  $f_{4\sigma}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\sigma$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definir  $f_{4\sigma}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto **P** (o ponto que define o plano) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**.  $P_4$  é a projeção do ponto **P** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo **X'** é igual à distância de  $P_2$  ao eixo **X** (que é 2 cm – a cota de **P**). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4\sigma}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** ( $f_{4\sigma}$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X'**) e o ponto  $P_4$  (a projeção do ponto **P** no **plano 4**).

**Etapla 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) é a reta de interseção do plano  $\rho$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro). O traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** ( $f_{4\sigma}$ ) é a reta de interseção do plano  $\sigma$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro).

**Etapla 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\sigma}$  é, então, o ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o plano  $\sigma$  – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio **plano 4**. O plano que contém o ângulo (o **plano 4**) é o novo Plano Frontal de Projeção, pelo que o ângulo está em verdadeira grandeza no **plano 4** (em projeção frontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o plano  $\sigma$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\sigma}$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

#### Traçado:

Os dados (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $\sigma$ ). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X'$  e dos restantes traçados referentes à mudança do diedro de projecção efetuada).

## 514.

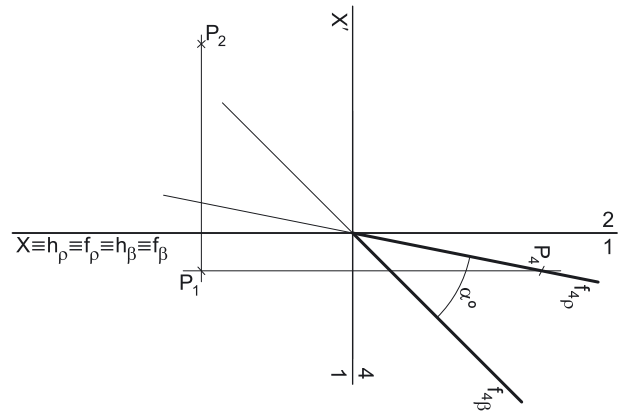
#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\rho$  está representado pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto  $P$  (o ponto que define o plano).

Com vista a uma melhor relação da resolução gráfica apresentada com este relatório, decidiu-se representar o  $\beta_{1/3}$  pelos seus traços – por uma questão de simplificação, considerou-se que o  $\beta_{1/3}$  é um plano  $\beta$ , passante. Nesse sentido, o plano  $\beta$  (o  $\beta_{1/3}$ ) foi representado pelos seus traços, que se situam no eixo  $X$ . Assim, o plano  $\beta$  (o  $\beta_{1/3}$ ) está definido por uma reta (o eixo  $X$ ) e pela sua orientação (faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos de projecção, atravessando os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros).

#### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os dois planos passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.



**Etapla 1.** Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano  $\rho$  e pelo  $\beta_{1/3}$  é a reta de interseção entre os dois planos, que é necessariamente uma reta fronto-horizontal – é o próprio eixo  $X$ . A aresta do diedro está, assim, identificada e também já determinada.

**Etapla 2.** Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro.

À semelhança das situações dos exercícios **489.** e **490.**, optou-se por uma resolução que alia uma grande eficácia a uma grande economia de traçados – o plano ortogonal à aresta do diedro que se conduziu é um novo plano de projecção (o **plano 4**), que substitui o Plano Frontal de Projecção. Na prática, esta resolução recorre a uma **mudança do diedro de projecção** para a resolução do problema.

Nesse sentido, será criado um novo diedro de projecção que tem, em comum com o diedro de projecção anterior, o Plano Horizontal de Projecção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projecção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projecção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projecção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projecção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projecção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projecção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal à aresta do diedro (uma reta fronto-horizontal, que é paralela ao eixo  $X$ ), o eixo  $X'$  é perpendicular ao eixo  $X$  inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projecção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, há que determinar os traços dos dois planos (o  $\beta_{1/3}$  e o plano  $\rho$ ) no **plano 4**.

Para determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** –  $f_{4\rho}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Os traços do plano  $\rho$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_{4\rho}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto  $P$  (o ponto que define o plano) e determinou-se a sua projecção no **plano 4**.  $P_4$  é a projecção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 5 cm – a cota de  $P$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4\rho}$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projecção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ) e o ponto  $P_4$  (a projecção do ponto  $P$  no **plano 4**).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para determinar o novo traço frontal do plano  $\beta$  (o traço do  $\beta_{1/3}$  no **plano 4** -  $f_{4\beta}$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do  $\beta_{1/3}$  são duas retas concorrentes num ponto do eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_{4\beta}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, o  $\beta_{1/3}$ , no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) é um plano de topo, pelo que o ângulo que o  $\beta_{1/3}$  faz com o Plano Horizontal de Projeção (um ângulo de  $45^\circ$ ) se projeta em verdadeira grandeza no ângulo que o seu traço frontal ( $f_{4\beta}$ ) faz com o eixo  $X'$ ). Assim, já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{4\beta}$  -  $f_{4\beta}$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X'$ ) e por uma direção (faz m ângulo de  $45^\circ$  com o eixo  $X'$ ).

Note que  $f_{4\beta}$  tem necessariamente de passar pelo quadrante onde se situa  $P_4$ , pois o ponto  $P$  é um ponto do  $1^\circ$  Diedro e o  $\beta_{1/3}$  atravessa o  $1^\circ$  Diedro.

**Etapas 3.** Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) é a reta de interseção do plano  $\rho$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro). O traço do  $\beta_{1/3}$  no **plano 4** ( $f_{4\beta}$ ) é a reta de interseção do plano  $\sigma$  com o **plano 4** (o plano ortogonal à aresta do diedro).

**Etapas 4.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\beta}$  é, então, o ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o  $\beta_{1/3}$  - esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio **plano 4**. O plano que contém o ângulo (o **plano 4**) é o novo Plano Frontal de Projeção, pelo que ângulo está em verdadeira grandeza no **plano 4** (em projeção frontal).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre o plano  $\rho$  e o  $\beta_{1/3}$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\beta}$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

**Traçado:**

Os dados (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício e é onde se situam os traços do plano  $\sigma$ ). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo  $X'$  e dos restantes traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).

## 515.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\rho$ , bem como o ponto  $P$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto  $P$  tem as suas projeções coincidentes, pois é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pontos do  $\beta_{2/4}$  têm coordenadas simétricas e projeções coincidentes). O plano  $\rho$  está definido pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços, pois é um plano passante) e pelo ponto  $M$  (um ponto exterior ao eixo  $X$ ), cujas projeções se determinaram - em função das suas coordenadas.

**Resolução:**

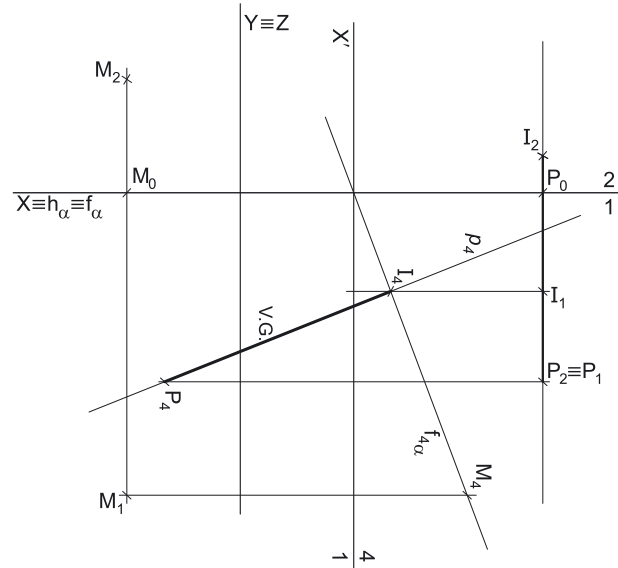
A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapas 1.** Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$ . A reta  $p$  é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta  $p$  ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano - a «família» das retas fronto-horizontais.

**Etapas 2.** Determina-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  - a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ ;
3. por fim, a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  não se pode processar de forma direta.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os traços do plano  $\rho$  são uma única reta, o que não nos permite garantir da ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  de uma forma direta (ao contrário do efetuado, por exemplo, com um plano de topo ou um plano oblíquo);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro, nesse diedro de projeção teremos dois traços do plano  $\rho$  (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o plano  $\rho$  seja um plano projetante. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  (é perpendicular ao eixo  $X$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção). Sublinha-se ainda que a posição escolhida para o eixo  $X'$  faz com que a reta  $p$  se transforme numa reta frontal (de frente) com **afastamento negativo** (pois a sua projeção horizontal fica acima do eixo  $X'$ ).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto  $P$  no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$ .  $P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (a cota de  $P$  é  $-5$ ). Sublinha-se que a cota do ponto  $P$  é negativa, pelo que  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) se situa 5 cm para baixo do eixo  $X'$ .

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, há que determinar a projeção no **plano 4** de um ponto do plano – o ponto  $M$ , por exemplo, que é o ponto que define o plano. Assim, determinou-se  $M_4$  (a projeção do ponto  $M$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $M_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $M_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de  $M$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por  $M_4$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto  $M_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $P_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, é possível, de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ , a partir da sua projeção no **plano 4** –  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), de forma direta, sobre a  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$ .

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $P$  e  $I$ ), já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  e já se determinou o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  (o ponto  $I$ ).

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ . A partir das projeções dos dois pontos, desenharam-se as projeções do segmento  $[PI]$ , que é o segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que, no novo diedro de projeção (formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo **plano 4**), o segmento  $[PI]$  está paralelo ao **plano 4**, pelo que se projeta em verdadeira grandeza nesse plano – a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\rho$  está no segmento  $[P_4I_4]$ , e foi devidamente assinalada no desenho.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ , que se situam no eixo  $X$ ) representaram-se a **médio**, que é a expressividade para o eixo  $X$  (a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do eixo  $X'$ , da reta  $p_4$ , do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência, e, ainda, do novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ ).

## 516.

### Dados:

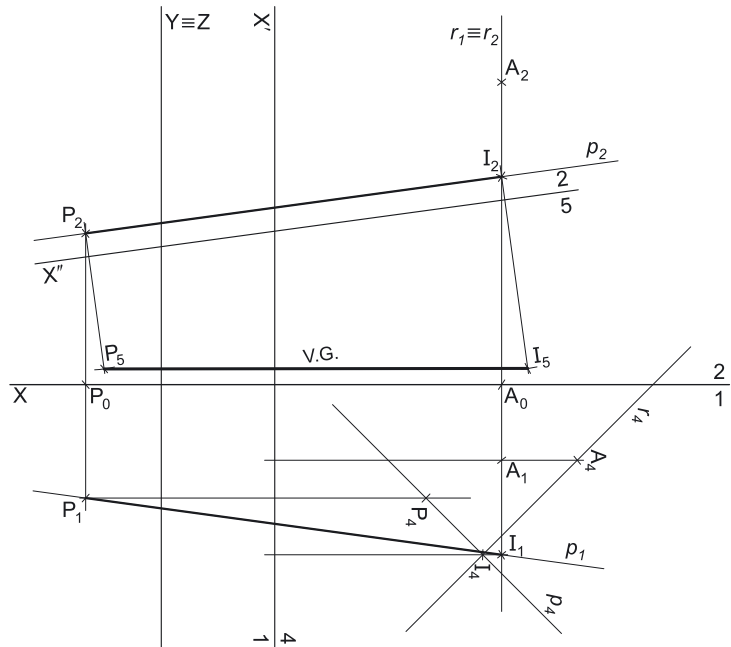
Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto  $P$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (é ortogonal a  $\beta_{1/3}$ , que é o Bissetor dos Diedros Ímpares).

### Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa sequencialmente em três etapas, a saber:

1. conduz-se, pelo ponto, uma reta perpendicular à reta dada;
2. determina-se o ponto de interseção entre as duas retas;
3. a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

**Etapa 1.** Pelo ponto  $P$  conduz-se uma reta perpendicular à reta  $r$  – a reta  $p$ . Uma vez que a reta  $r$  é uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, a **perpendicularidade** entre a reta  $p$  e a reta  $r$  **não é direta** em nenhum dos planos de projeção. Assim, as projeções da reta  $r$  (que não verificam o **Critério de Reversibilidade**) não são as mais favoráveis para concretizar o pretendido (conduzir uma reta perpendicular à reta  $r$ ), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser uma **mudança do diedro de projeção**, de forma a transformar a reta  $r$  numa reta paralela a um dos planos de projeção para, dessa forma, a perpendicularidade entre as duas retas ser direta num dos planos de projeção.



Optou-se por transformar a reta  $r$  numa reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta  $r$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $r$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$P_4$  é a projeção do ponto  $P$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – a cota de  $P$ ).  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 8 cm – a cota de  $A$ ).

Para definir  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto, que é  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**). Por outro lado, é-nos dada, no enunciado, a direção da reta  $r$  – a reta  $r$  é ortogonal a  $\beta_{1/3}$ . Assim, poder-se-ia representar o  $\beta_{1/3}$  no novo diedro de projeção e, assim, garantir a ortogonalidade da reta  $r$  em relação a  $\beta_{1/3}$ . Todavia, optou-se por uma situação mais simples, que em seguida se expõe. Essa situação assenta no facto de que o  $\beta_{1/3}$  é um plano passante que faz, com ambos os planos de projeção, ângulos de  $45^\circ$ , sendo que atravessa os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros.

Nesse sentido, e porque a reta  $r$  é ortogonal a  $\beta_{1/3}$ , a reta  $r$  faz um ângulo de  $45^\circ$  com o Plano Horizontal de Projeção (o plano que se manteve). Uma vez que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), o ângulo que a reta  $r$  faz com o Plano Horizontal de Projeção projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Assim,  $r_4$  passa por  $A_4$  e faz, com o eixo  $X'$ , um ângulo de  $45^\circ$ . Das duas hipóteses que existem para medir esse ângulo, uma delas fará com que a reta  $r$  seja paralela a  $\beta_{1/3}$  (a hipótese em que o traço frontal da reta  $r$  se situe no **SPFS** e o seu traço horizontal se situe no **SPHP**), enquanto a outra fará com que a reta  $r$  seja paralela a  $\beta_{1/3}$  (a hipótese em que o traço frontal da reta  $r$  se situe no **SPFS** e o seu traço horizontal se situe no **SPHA**). Das duas hipóteses atrás referida, a que a resolução apresenta é, precisamente, a que nos garante a ortogonalidade da reta  $r$  em relação a  $\beta_{1/3}$ .

Assim, desenhou-se a projeção da reta  $r$  no **plano 4** ( $r_4$ ), que está definida por um ponto (o ponto  $A_4$ ) e por uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com o eixo  $X'$ , com a direção acima referida).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $r$  é uma reta frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, a perpendicularidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, por  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**) conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $r_4$  (a projeção da reta  $r$  no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre as duas retas.

Por outro lado, e uma vez que a reta  $p$  é perpendicular à reta  $r$ , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção no **plano 4** ( $I_4$ ) –  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ) situa-se sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ). Em seguida, determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ) em função da sua cota (que se manteve). Por fim, desenharam-se as projeções frontal e horizontal da reta  $p$ , que está definida por dois pontos – os pontos  $P$  e  $I$ .

Está concluída a **Etapa 1** do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto **I**, já determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **P** à reta **r**. O segmento **[PI]** é, assim, o segmento representativo da distância do ponto **P** à reta **r**, pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento **[PI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta **[PI]** também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (nem ao **plano 1**, nem ao **plano 4**), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Para determinar a **verdadeira grandeza** do segmento **[PI]**, optou-se por se recorrer a outra mudança do diedro de projeção, que nos permita transformar o segmento de reta **[PI]** num segmento de reta horizontal (de nível). Para tal é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 5**), paralelo à reta **p** (a reta suporte do segmento). Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X''**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/2**. Como o **plano 5** é paralelo à reta **p**, o eixo **X''** é paralelo à projeção frontal da reta **p** (**p<sub>2</sub>**), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X''** (o novo eixo **X**).

**P<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **P** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **P<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **P<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 3 cm – o afastamento de **P**). **I<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **I** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **I<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **I<sub>1</sub>** ao eixo **X**.

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em **P<sub>5</sub>** e **I<sub>5</sub>** – o segmento de reta **[P<sub>5</sub>I<sub>5</sub>]** é a projeção do segmento de reta **[PI]** no **plano 5** e está em verdadeira grandeza, pois no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 5**), o segmento de reta **[PI]** está paralelo ao **plano 5**. **P<sub>5</sub>I<sub>5</sub>** é a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** à reta **r**, o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta **r**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **p**, dos traçados relativos às duas mudanças do diedro de projeção efetuadas – a necessária à determinação da perpendicularidade entre as duas retas e a necessária à determinação da verdadeira grandeza de **[PI]**).

## 517.

### Dados:

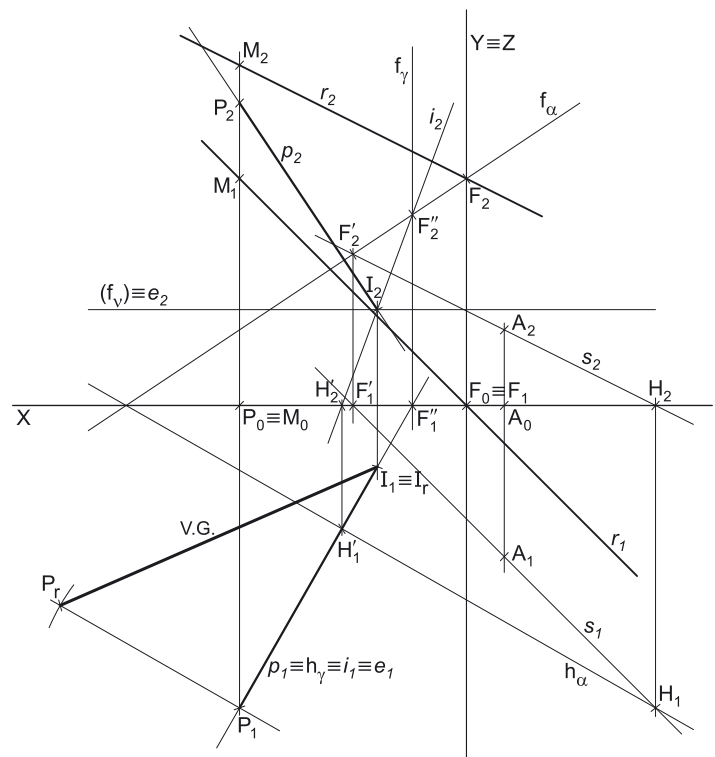
Em primeiro lugar, representaram-se a reta **r** e os pontos **A** e **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto **P** tem as suas projeções simétricas m relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**).

A reta **r** está definida por dois pontos – o ponto **M** e o ponto **F** (o seu traço frontal). O plano  $\alpha$  está representado pelas projeções da reta **r** e do ponto **A**.

### Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto **P** conduz-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\alpha$ . Para a reta **p** ser ortogonal ao plano  $\alpha$ , a reta **p** tem de verificar o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$  (tem de ser ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Acontece que, neste momento, só temos uma reta do plano  $\alpha$  – a reta  $r$ . A reta  $r$ , por outro lado, é uma reta oblíqua, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e a reta  $r$  não é direta em nenhuma das suas projeções. Assim, para garantir a ortogonalidade da reta  $p$  ao plano  $\alpha$ , necessitamos de duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  e, preferencialmente, uma reta horizontal (de nível) e uma reta frontal (de frente), para que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\alpha$  se processe de forma direta. Essas duas retas podem ser, por exemplo, os traços do plano  $\alpha$ . Assim, começou-se por determinar os traços do plano  $\alpha$ .

Começamos pelo traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $F$  é o traço frontal da reta  $r$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano (a reta  $r$  e o ponto  $A$ ) são insuficientes para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $s$ , como reta auxiliar do plano, passando pelo ponto  $A$ . A reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $r$ ). Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta  $s$ , o ponto  $F'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) –  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos (os pontos  $F$  e  $F'$ ).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da reta  $s$ , o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços do plano são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\alpha$  –  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos (o ponto  $H$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano)

Por fim, desenharam-se as projeções da reta  $p$ , a reta que passa pelo ponto  $P$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . A reta  $p$  é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\alpha$ , o que nos garante a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\alpha$ . Está, assim, concluída a **Etapa 1 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ . Nem a reta  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

- A.** Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\gamma$ , que é o plano projetante horizontal da reta  $p$ .  
**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano dado) – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos  $F''$  e  $H'$  (os seus traços).  
**C.** O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  – o ponto  $I$ .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  (o ponto  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ . A partir das projeções dos pontos  $P$  e  $I$  desenharam-se as projeções do segmento  $[PI]$ . O segmento  $[PI]$  é segmento representativo da distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ .

O segmento  $[PI]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se pelo **rebatimento** do plano projetante horizontal do segmento  $[PI]$  (o plano  $\gamma$ ) para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o ponto  $I$  (cujo traço frontal se desenhou imediatamente, passando por  $I_2$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), o que se processou de forma direta. A projeção frontal ( $e_2$ ) está coincidente com o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira ( $e_1$ ) está coincidente o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal.

O ponto  $I$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $I_r \equiv I_1$ . Falta-nos rebater o ponto  $P$ . O arco do rebatimento do ponto  $P$  está contido num plano vertical ortogonal à reta  $e$  (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto  $P$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim conduziu-se, por  $P_1$ , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $P$ . Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto  $P$  ao plano  $v$  (a cota do ponto  $P$  em relação ao plano  $v$ ), determinando-se  $P_r$ .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em  $P_r$  e  $I_r$  – o segmento de reta  $[P_r I_r]$  é o segmento de reta  $[PI]$  rebatido e situa-se no plano  $v$  (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza.  $P_r I_r$  é a verdadeira grandeza da distância do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$ , o que se identificou no desenho.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância (do segmento  $[PI]$ ), porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , do plano  $\gamma$ , da reta  $i$ , de todos os traçados necessários ao rebatimento do ponto  $P$  e do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 518.

**Dados:**

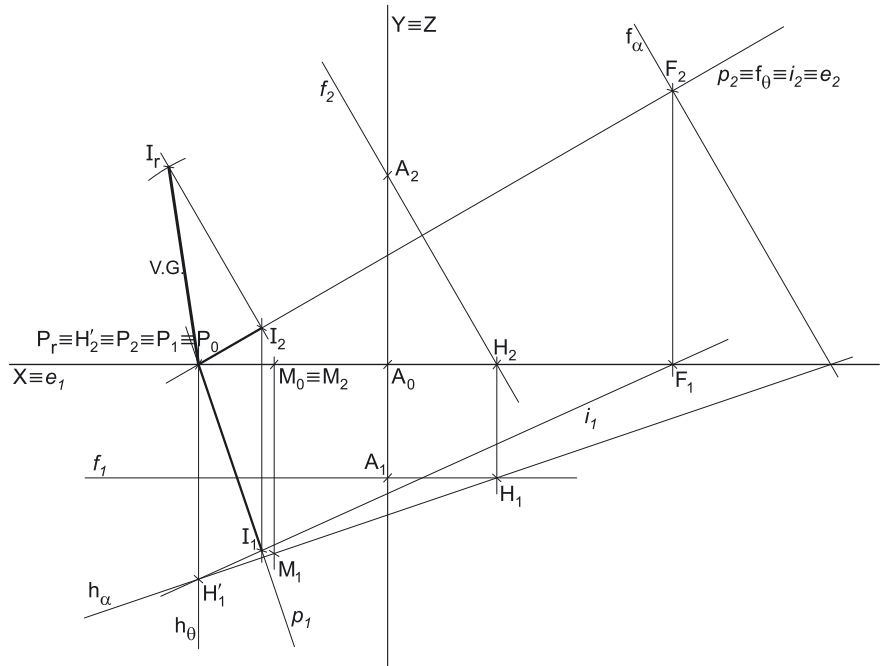
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **P**, **A** e **M**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto **M** é o ponto do plano  $\alpha$  a que o enunciado faz referência – o ponto do plano  $\alpha$  que se situa no Plano Horizontal de Projeção.

**Resolução:**

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

**Etapa 1.** Pelo ponto **P** conduz-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\alpha$ . Para a reta **p** ser ortogonal ao plano  $\alpha$ , a reta **p** tem de verificar o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$  (tem de ser ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ).

Acontece que, neste momento, não temos nenhuma reta do plano  $\alpha$ . Assim, para garantir a ortogonalidade da reta **p** ao plano  $\alpha$ , necessitamos de duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  e, preferencialmente, uma reta horizontal (de nível) e uma reta frontal (de frente), para que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\alpha$  se processe de forma direta. Essas duas retas podem ser, por exemplo, os traços do plano  $\alpha$ . Assim, começou-se por determinar os traços do plano  $\alpha$ .



Começamos pelo traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **M** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção e pertence ao plano  $\alpha$ , pelo que o ponto **M** é um ponto do traço horizontal do plano. Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano são insuficientes para definir  $h_\alpha$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta **f**, como reta auxiliar do plano, passando pelo ponto **A**. A reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e está definida por um ponto (o ponto **MA**, dado no enunciado) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ , também dada no enunciado). Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta **f**, o ponto **H**. Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano –  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos (o ponto **M** e o ponto **H**).

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos um ponto para definir o traço frontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal do plano é uma reta frontal (de frente) do plano e retas frontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço frontal do plano –  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ).

Por fim, desenharam-se as projeções da reta **p**, a reta que passa pelo ponto **P** e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . A reta **p** é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\alpha$ , o que nos garante a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\alpha$ . Está, assim, concluída a **Etapa 1 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 2.** Determinou-se o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\alpha$ . Nem a reta **p** nem o plano  $\alpha$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A.** Assim, conduziu-se, pela reta **p**, o plano  $\theta$ , que é o plano projetante horizontal da reta **p**.

**B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano dado) – a reta **i**. A reta **i** é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos **F** e **H** (os seus traços nos planos de projeção).

**C.** O ponto de concorrência das retas **p** e **i** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\alpha$  – o ponto **I**.

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\alpha$  (o ponto **I**), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

**Etapa 3.** A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **P** ao plano  $\alpha$ . A partir das projeções dos pontos **P** e **I** desenharam-se as projeções do segmento **[PI]**. O segmento **[PI]** é segmento representativo da distância do ponto **P** ao plano  $\alpha$ .

(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

Salienta-se que as três situações pendentes acima referidas têm a ver, respetivamente, com:

1. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, as projeções da reta  $p$  não verificam **Critério de Reversibilidade**;
2. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, os dois traços de um plano de rampa pertencem à mesma «família» de retas, o que não nos permite garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de uma forma direta (apesar de nem sequer se terem determinado os traços dos planos, que são retas fronto-horizontais – a reta  $p$  já é ortogonal à «família» das retas fronto-horizontais);
3. no diedro de projeção formado pelo Plano Horizontal de Projeção e pelo Plano Frontal de Projeção, nem a reta  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permite-nos resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção teremos os dois planos de rampa definidos por dois traços (que serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual os dois planos de rampa sejam planos projetantes (e, assim, o plano  $\alpha$  será um plano projetante). É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**), ortogonal aos dois planos, o que nos permite transformar os planos de rampa em planos de topo (projetantes frontais). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal aos planos de rampa, o eixo  $X'$  é perpendicular aos traços horizontais dos dois planos. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, os dois planos serão planos projetantes frontais (planos ortogonais ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, é necessário determinar os traços dos dois planos no **plano 4**. O traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** ( $f_{4\alpha}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto  $P$ , da reta  $a$  (que pertence ao plano  $\alpha$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por situar o ponto  $P$  no mesmo plano de perfil que contém o ponto  $B$ . Em seguida, determinou-se  $P_4$  (a projeção do ponto  $P$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $P$ , que é a cota da reta  $a$ ). Já temos um ponto para definir o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** – o ponto  $P_4$  (porque, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $f_{4\alpha}$ . No entanto, não temos qualquer outra informação sobre o plano  $\alpha$ , para além de ser um plano de rampa paralelo ao plano  $\theta$ .

Então, determinemos o traço do plano  $\theta$  no **plano 4**. O traço do plano  $\theta$  no **plano 4** ( $f_{4\theta}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se  $A_4$  (a projeção do ponto  $A$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $A$ ). Já temos um ponto para definir o traço do plano  $\theta$  no **plano 4**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $f_{4\theta}$ . Em seguida, determinou-se  $B_4$  (a projeção do ponto  $B$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  (que é 5 cm – a cota de  $B$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço do plano  $\theta$  no **plano 4** –  $f_{4\theta}$  passa por  $A_4$  e por  $B_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\theta}$  está definido por dois pontos – o ponto  $A_4$  e o ponto  $B_4$ . Tendo em conta que o plano  $\theta$ , no novo diedro de projeção, foi representado, apenas, pelo seu traço frontal ( $f_{4\theta}$ ), este identificou-se entre parêntesis.

Tendo em conta que os planos  $\alpha$  e  $\theta$  são paralelos, já temos a direção que nos faltava para definir o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** – a direção de  $f_{4\theta}$ . Assim, o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** ( $f_{4\alpha}$ ) está definido por um ponto (o ponto  $P_4$ ) e por uma direção (é paralelo a  $f_{4\theta}$ ). Tendo em conta que o plano  $\alpha$ , no novo diedro de projeção, foi representado, apenas, pelo seu traço frontal ( $f_{4\alpha}$ ), este identificou-se entre parêntesis.

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e os planos  $\rho$  e  $\sigma$  são dois planos de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os dois planos já é direta em projeção (os traços dos dois planos, no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  e  $f_{4\sigma}$  são duas retas frontais (de frente) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre a reta  $p$  e os novos traços frontais dos dois planos é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), qualquer, perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ) e a  $f_{4\sigma}$  (o novo traço frontal do plano  $\sigma$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas de ambos os planos, pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos. Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, os dois planos são planos projetantes frontais, é possível, de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$ , a partir da sua projeção no **plano 4**.

Assim,  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**) é o ponto de concorrência de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4\alpha}$  (o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4**). Em seguida, determinou-se  $I_1$  (a projeção horizontal do ponto  $I$ ), de forma direta, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar  $I_2$  (a projeção frontal do ponto  $I$ ), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $I_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $I_4$  ao eixo  $X'$ .

Neste momento temos todas as situações pendentes resolvidas – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $A$  e  $I$ ), já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação aos dois planos de rampa e já se determinou o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\alpha$  (o ponto  $I$ ).

Assim, com a determinação dos pontos de interseção da reta  $p$  com os dois planos (os pontos  $A$  e  $I$ ), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapas 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos **A** e **I** desenharam-se as projeções do segmento **[AI]**. O segmento **[AI]** é um segmento representativo da distância entre os dois planos e é um segmento de reta de perfil.

O segmento **[AI]** é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que o segmento **[AI]** se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4** – no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta **[AI]** é um segmento de reta frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4**. A verdadeira grandeza da distância entre os planos  $\alpha$  e  $\theta$  está no segmento **[A<sub>4</sub>I<sub>4</sub>]**, e foi devidamente assinalada no desenho.

**Traçado:**

Os dados (as projeções da reta **a**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das projeções da reta **p**, do eixo **X'**, da reta **p<sub>4</sub>**, de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, nomeadamente os traços dos dois planos no **plano 4**).

## 520.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as retas **r** e **s**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta **r** é uma reta paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que as suas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado). A reta **s**, sendo paralela à reta **r**, está definida por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (a direção da reta **r**).

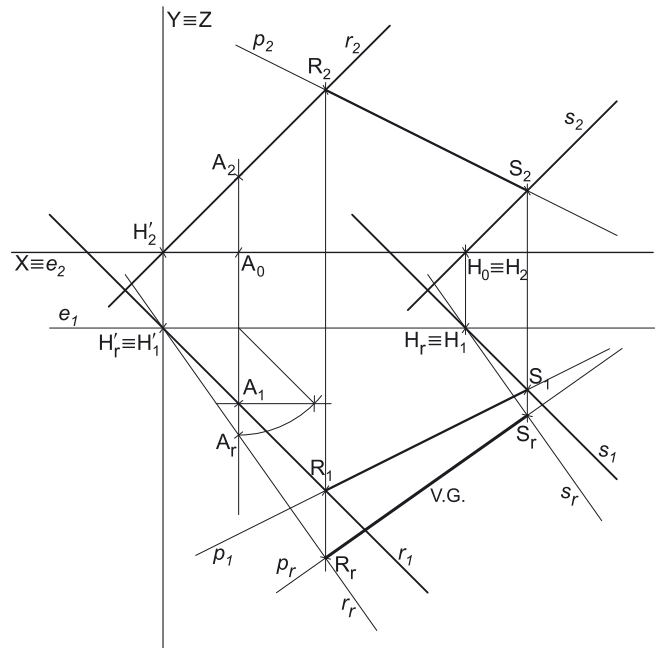
**Resolução:**

Este exercício é, na prática, uma variante das situações de **distância de um ponto a uma reta**. De facto, tendo em conta que a reta **r** é paralela à reta **s**, então todos os pontos da reta **r** estão à mesma distância da reta **s**. Nesse sentido, e porque é dado um ponto da reta **r** (o ponto **A**), o exercício poder-se-ia resumir à determinação da distância de um ponto (o ponto **A**) a uma reta (a reta **s**), o que consistiria na aplicação direta do **método geral da distância de pontos a retas**. No entanto, optou-se por resolver o exercício com o recurso ao **método direto**, o que nos permitirá a aplicação do que pode ser chamado de **método geral da distância entre duas retas paralelas**, a duas dimensões, após o rebatimento do plano definido pelas duas retas.

Assim, optou-se por se rebater o plano definido pelas duas retas para o Plano Horizontal de Projeção. Assim, determinou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção entre os dois planos (a charneira do rebatimento é, na prática, o traço horizontal do plano definido pelas duas retas). A charneira do rebatimento (reta **e**) fica definida por dois pontos – o ponto **H** (o traço horizontal da reta **s**) e o ponto **H'** (o traço horizontal da reta **r**). Note que a charneira do rebatimento (que é a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o Plano Horizontal de Projeção) é uma reta fronto-horizontal, pelo que se depreende que o plano definido pelas duas retas é necessariamente um plano de rampa.

O ponto **H'** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **H'<sub>r</sub> ≡ H'<sub>1</sub>**. Já temos um ponto para definir a reta **r** em rebatimento – o ponto **H'<sub>r</sub>**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta **r** em rebatimento. Recorreu-se a outro ponto da reta **r** – o ponto **A** (o ponto da reta **r** que é dado no enunciado). O rebatimento do ponto **A** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por **A<sub>1</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a cota do ponto **A** e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A**, até à perpendicular à charneira que passa por **A<sub>2</sub>**, determinando **A<sub>r</sub>**. Por fim, desenhou-se a reta **r<sub>r</sub>** (a reta **r** rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos **A<sub>r</sub>** e **H'<sub>r</sub>**.

O ponto **H** é outro ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente **H<sub>r</sub> ≡ H<sub>1</sub>**. Já temos um ponto para definir a reta **s** em rebatimento – o ponto **H<sub>r</sub>**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta **s** em rebatimento. A reta **s** é paralela à reta **r**, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **s** em rebatimento – a reta **s<sub>r</sub>** (a reta **s** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **H<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela à reta **r<sub>r</sub>**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, no rebatimento efetuado, procedeu-se à execução sequencial das três etapas que podem consistir um **método geral para a determinação da distância entre duas retas paralelas**: **1.** conduz-se uma reta qualquer, perpendicular às retas dadas; **2.** determinam-se os pontos de interseção da perpendicular com as duas retas dadas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre as duas retas dadas.

**Etapla 1.** Conduziu-se uma perpendicular às retas  $r_r$  e  $s_r$  – a reta  $p_r$ . Uma vez que o problema está a ser resolvido em verdadeira grandeza (no plano rebatido), a perpendicularidade entre as retas é direta e a reta  $p_r$  é necessariamente perpendicular às retas  $r_r$  e  $s_r$ , pois a reta  $p$  é efetivamente concorrente com as retas  $r$  e  $s$ .

**Etapla 2.** Determinam-se os pontos de concorrência da reta perpendicular com as duas retas dadas. O ponto de concorrência das retas  $p_r$  e  $r_r$  é o ponto  $R_r$ , que foi determinado imediatamente, em rebatimento. O ponto de concorrência das retas  $p_r$  e  $s_r$  é o ponto  $S_r$ , que foi determinado imediatamente, em rebatimento.

**Etapla 3.** A distância entre os dois pontos é a distância entre as duas retas dadas. O segmento  $[R_rS_r]$  é, assim, o segmento representativo da distância entre as retas  $r$  e  $s$ . Tendo em conta que o problema está a ser resolvido em rebatimento, o segmento  $[R_rS_r]$  está em verdadeira grandeza –  $R_rS_r$  é a verdadeira grandeza da distância entre as retas  $r$  e  $s$ .

Por fim, inverteu-se o rebatimento dos pontos  $R$  e  $S$ . Por  $R_r$  (o ponto  $R$  rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto  $R$  sobre as projeções homónimas da reta  $r$ . De forma semelhante, por  $S_r$  (o ponto  $S$  rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto  $S$  sobre as projeções homónimas da reta  $s$ . Por fim, desenharam-se as duas projeções da distância (do segmento  $[RS]$ ) e da reta  $p$  (a reta que é perpendicular às retas  $r$  e  $s$ ) – a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $R$  e  $S$ ).

**Traçado:**

Os dados (as projeções das retas  $r$  e  $s$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $p$  e dos traçados relativos ao rebatimento do plano definido pelas duas retas, entre os quais a charneira do rebatimento).

## 521.

**Dados:**

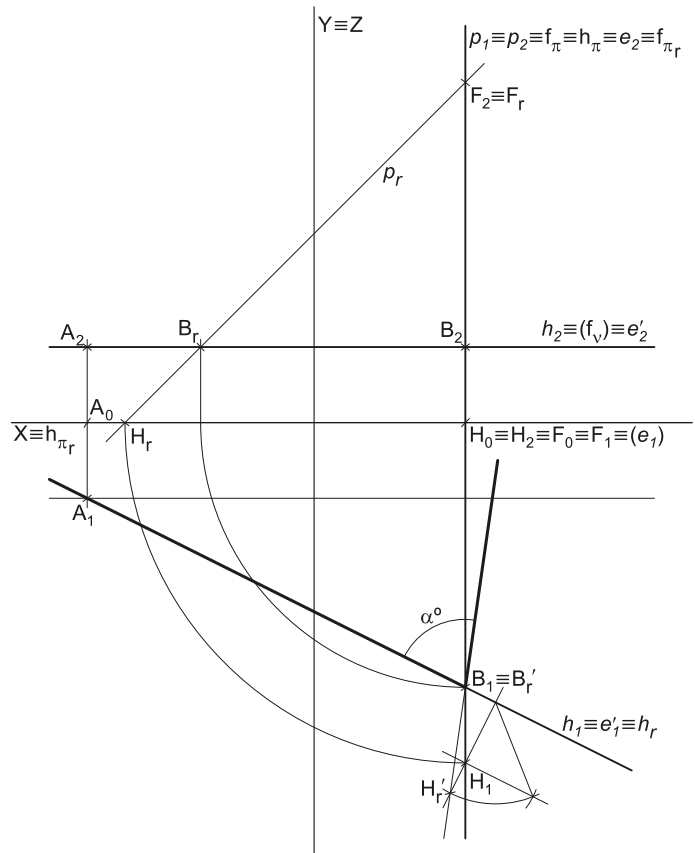
Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $p$  e o ponto  $A$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. A reta  $p$  está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projeção).

Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ), passando por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ). No entanto, não é possível desenhar a projeção horizontal da reta  $h$  ( $h_1$ ), porque não nos é dada a direção da reta nem nos é dado qualquer outro ponto da reta (para além do ponto  $A$ ). No entanto, o enunciado refere expressamente que as duas retas são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $B$ .

Foi possível, de forma direta, determinar a projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ), que é o ponto de concorrência das projeções frontais das duas retas ( $h_2$  e  $p_2$ ). No entanto, não é possível determinar a projeção horizontal do ponto  $B$  ( $B_1$ ), de forma direta, porque as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de Reversibilidade** (não é possível, de forma direta, determinar as projeções de quaisquer pontos pertencentes a uma reta de perfil, para além os pontos dados).

Dessa forma, é necessário recorrer a um processo geométrico auxiliar, para se determinar a projeção horizontal do ponto  $B$ . Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil. Nesse sentido, conduziu-se, pela reta  $p$  um plano de perfil (o plano  $\pi$ ), cujos traços se identificaram imediatamente. Optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ) foi o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ), o que se assinalou imediatamente. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$ .

O ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r \equiv F_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Em seguida, rebateu-se o ponto  $H$ , o que nos permitiu determinar  $H_r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p_r - p_r$  (a reta  $p$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $F_r$  e  $H_r$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se, em rebatimento, o ponto  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido), sobre a reta  $p_r$ . Invertendo-se o rebatimento, determinou-se a projeção horizontal do ponto  $B$  ( $B_1$ ), sobre a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ). Finalmente, já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $h$ , o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta  $h$  ( $h_1$ ) – a reta  $h$  está definida por dois pontos (os pontos  $A$  e  $B$ ).

### Resolução:

As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo**. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas e que tem vértice no ponto  $B$  (o ponto de concorrência das duas retas).

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as retas  $h$  e  $p$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano horizontal (de nível) que contém a reta  $h$ . Nesse sentido, identificou-se o plano horizontal (de nível)  $v$ , pelo seu traço frontal, que está coincidente com  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ), pois o plano  $v$  é projetante frontal. Note que o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ) se identificou entre parêntesis, pois o plano  $v$  não tem traço horizontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a própria reta  $h$  (a reta  $h$  é, na prática, a reta de interseção do plano  $v$  com o plano definido pelas retas  $h$  e  $p$ ).

Note que a opção de conduzir o plano  $v$  pela reta  $h$  teve a ver com economia de traçados. De facto, como acima se referiu, nesta situação a reta  $h$  é a própria charneira do rebatimento, pelo que não foi necessário determinar qualquer outra reta para além das já existentes no desenho.

A reta  $h$  (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si própria, pelo que se tem imediatamente  $h_r \equiv h_1$ . Por outro lado, também o ponto  $B$  é um ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $B_r' \equiv B_1$ . Note que o ponto  $B_r'$  é o ponto  $B$  no seu segundo rebatimento –  $B_r'$  é o ponto  $B$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $h$ . Já temos, em rebatimento, um ponto da reta  $p$  e a reta  $h$  em rebatimento. Falta-nos um ponto ou uma direção, para definirmos a reta  $p$  em rebatimento.

Já temos um outro ponto da reta  $p$ , que nos permite definir a reta  $p$  em rebatimento (no rebatimento do plano oblíquo definido pela reta  $p$  e pela reta  $h$ ) – o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $p$ ), por exemplo. Assim, efetuou-se o rebatimento do ponto  $H$ , o que se processou com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $H_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto  $H$  ao plano  $v$  (a cota de  $H$  em relação ao plano  $v$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $H$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $H$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $H_1$ , determinando  $H_r'$ . Note que o ponto  $H_r'$  é o ponto  $H$  no seu segundo rebatimento –  $H_r'$  é o ponto  $H$  rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $h$ .

Por fim, desenhou-se a reta  $p_r'$  (a reta  $p$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $B_r'$  e  $H_r'$ . Note que a reta  $p_r'$  é a reta  $p$  no seu segundo rebatimento –  $p_r'$  é a reta  $p$  rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $h$ .

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas  $p$  e  $h$  formam entre si está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $p_r'$  e  $h_r$ , com vértice em  $B_r'$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções das retas  $p$  e  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $\pi$ , de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , do plano  $v$  e, ainda, de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).

## 522.

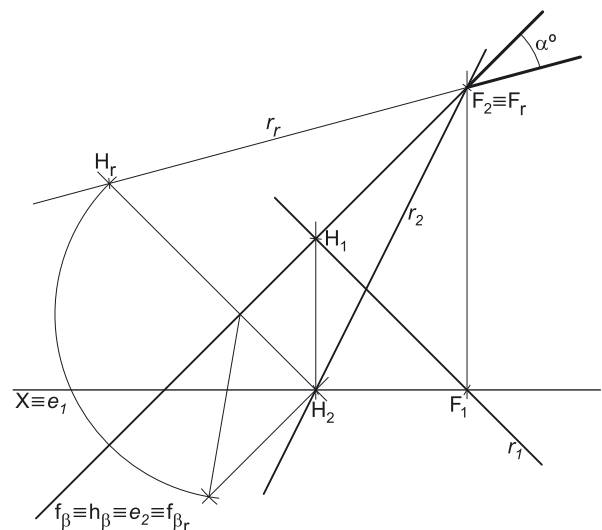
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\beta$ , pelos seus traços, e a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $\beta$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal a  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais a  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

As projeções da reta  $r$  foram determinadas a partir dos seus traços, que são dados no enunciado – a reta  $r$  pertence ao plano  $\beta$ , pois os seus traços estão sobre os traços homónimos do plano  $\beta$  (a reta  $r$  verifica a **condição para que uma reta pertença a um plano**, em relação ao plano  $\beta$ ).

### Resolução:

É pedido o ângulo que a reta  $r$  faz com o traço frontal do plano  $\beta$  ( $f_\beta$ ). As duas retas são **concorrentes** (no ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $r$ ) pelo que definem um plano – trata-se de um **plano oblíquo** (é o próprio plano  $\beta$ , ao qual as duas retas pertencem). É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano  $\beta$  (o plano definido pelas duas retas) e que tem vértice no ponto  $F$  (o ponto de concorrência das duas retas).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano que contém o ângulo (o plano  $\beta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\beta$  para o Plano Frontal de Projeção. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é o próprio traço frontal do plano ( $f_\beta$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, mediatamente,  $f_{\beta r} \equiv e_2 \equiv f_\beta$ .

O ponto  $F$  é um ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_r \equiv F_2$ . Já temos, em rebatimento, o traço frontal do plano ( $f_\beta$ ) e um ponto da reta  $r$  (em rebatimento). Falta-nos um ponto ou uma direção, para definirmos a reta  $r$  em rebatimento.

Assim, efetuou-se o rebatimento do ponto  $H$ , o que se processou com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $H_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se o afastamento do ponto  $H$  e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $H$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $H$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $H_2$ , determinando  $H_r$ .

Por fim, desenhou-se a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $F_r$  e  $H_r$ .

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas  $f_\beta$  e  $r$  formam entre si está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $f_{\beta r}$  e  $r_r$ , com vértice em  $F_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\alpha^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\beta$  e as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\beta$ ).

## 523.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $a$  e o ponto  $A$ , pelas respetivas projeções, bem como o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\theta$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

### Resolução:

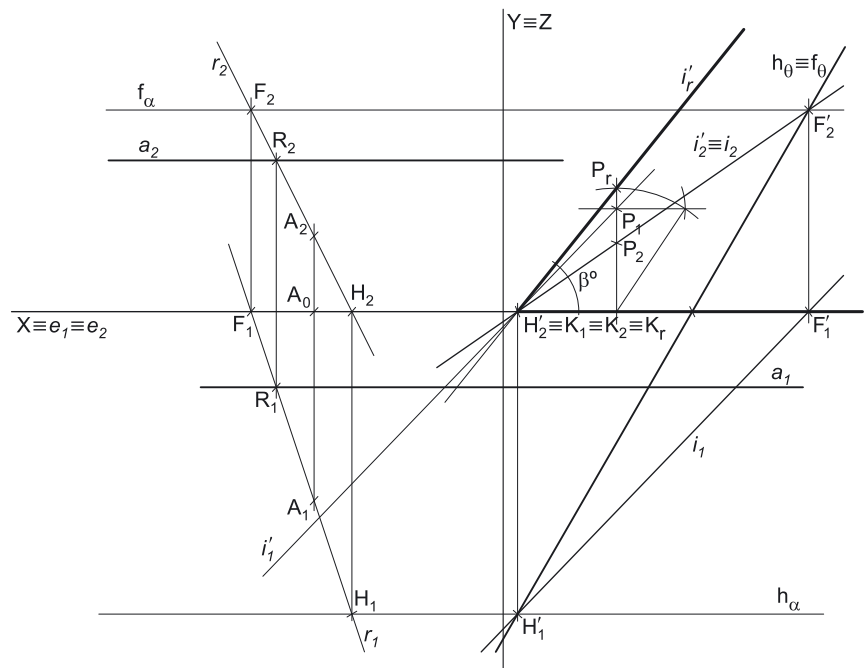
#### Determinação das projeções da reta $i$ :

Para determinarmos a reta  $i$  (a reta de interseção entre os dois planos), o processo mais simples consiste em determinar previamente os traços do plano  $\alpha$ .

Para determinarmos o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal do plano  $\alpha$  é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos uma direção para definir  $f_\alpha$  – falta-nos um ponto para definir  $f_\alpha$ . Os dados do plano são insuficientes para definirmos  $f_\alpha$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Nesse sentido, recorreu-se à reta  $r$ , como reta auxiliar do plano  $\alpha$ . A reta  $r$  é uma reta oblíqua do plano  $\alpha$ , que passa pelo ponto  $A$  (o ponto do plano  $\alpha$  que é dado no enunciado) e que é concorrente com a reta  $a$  (a reta do plano  $\alpha$  que é dada no enunciado). Note que as retas  $a$  e  $r$ , sendo complanares (pertencem, ambas, ao plano  $\alpha$ ) e não sendo paralelas (a reta  $a$  é fronto-horizontal e a reta  $r$  é oblíqua), são necessariamente concorrentes – o ponto de concorrência entre as duas retas é o ponto  $R$ . Assim, a reta  $r$  está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o ponto do plano  $\alpha$  que é dado no enunciado) e o ponto  $R$  (o seu ponto de concorrência com a reta  $a$ ). Em seguida, determinou-se o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) –  $f_\alpha$  está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Para determinarmos o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço horizontal do plano  $\alpha$  é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos uma direção para definir  $h_\alpha$  – falta-nos um ponto para definir  $h_\alpha$ . Determinou-se o ponto  $H$ , o traço horizontal da reta  $r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) –  $h_\alpha$  está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $i$ , que é a reta que pertence simultaneamente aos dois planos. Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $i$  o ponto  $F'$ , que se situa simultaneamente sobre  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) e sobre  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ), para garantir que a reta  $i$  pertence simultaneamente aos dois planos. Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta  $i$  o ponto  $H'$ , que se situa simultaneamente sobre  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) e sobre  $h_\theta$  (o traço horizontal do plano  $\theta$ ), para garantir que a reta  $i$  pertence simultaneamente aos dois planos.

Por fim, desenharam-se as projeções da reta  $i$ , que está, assim, definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H'$  (os seus traços nos planos de projeção).

#### Determinação do ângulo entre a reta $i$ e o eixo $X$ :

As duas retas (a reta  $i$  e o eixo  $X$ ) são não coplanares (são duas retas **enviesadas**), pelo que não definem plano algum. Dessa forma, as duas retas não formam nenhum ângulo entre si, de forma direta. No entanto, o ângulo que as duas retas formam entre si (de forma indireta) é igual ao ângulo formado por quaisquer duas retas **concorrentes**, paralelas às retas dadas.

Assim, conduziu-se, por um ponto qualquer do eixo  $X$  (o ponto  $K$ ), uma reta  $i'$ , paralela à reta  $i$  – o eixo  $X$  e a reta  $i'$  são concorrentes no ponto  $K$ . Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar a reta  $i'$ , de forma que a sua projeção frontal ( $i'_2$ ) esteja sobre a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ), mas essa situação foi arbitrária e não é vinculativa. As duas retas (o eixo  $X$  e a reta  $i'$ ) são **concorrentes** (no ponto  $K$ ), pelo que definem um plano – trata-se necessariamente de um **plano passante**. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas (o plano passante) e que tem vértice no ponto  $K$  (o ponto de concorrência das duas retas).

O plano que contém o ângulo (o plano passante que contém a reta  $i'$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (e reta  $e$ ), que é o próprio eixo  $X$  (a reta de interseção do plano passante com o Plano Horizontal de Projeção).

O eixo  $X$  é a própria charneira do rebatimento, pelo que roda sobre si próprio (é uma reta fixa). Por outro lado, também o ponto  $K$  é um ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $K_r \equiv K_1 \equiv K_2$ . Já temos, em rebatimento, o eixo  $X$  e um ponto da reta  $i'$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definirmos a reta  $i'$  em rebatimento. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer da reta  $i'$  (o ponto  $P$ , por exemplo) e efetuou-se o seu rebatimento.

O rebatimento do ponto  $P$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira (paralela ao eixo  $X$ ) mediu-se a **cota** do ponto  $S$  e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro no eixo  $X$  (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $P_1$ , determinando  $P_r$ .

Em seguida, desenhou-se a reta  $i'$  em rebatimento (a reta  $i'_r$ ), que passa por  $K_r$  e  $P_r$  (a reta  $i'_r$  está definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo que a reta  $i$  forma com o eixo  $X$  está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre o eixo  $X$  e a reta  $i'_r$ , com vértice em  $K_r$ . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\beta^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\theta$  e as projeções da reta  $a$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os traços do plano  $\alpha$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. A reta  $i$  constitui-se como um dado de forma indireta, pelo que se representou a **médio-leve**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta  $r$ , dos traçados relativos à determinação dos traços do plano  $\alpha$ , da reta  $i'$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).

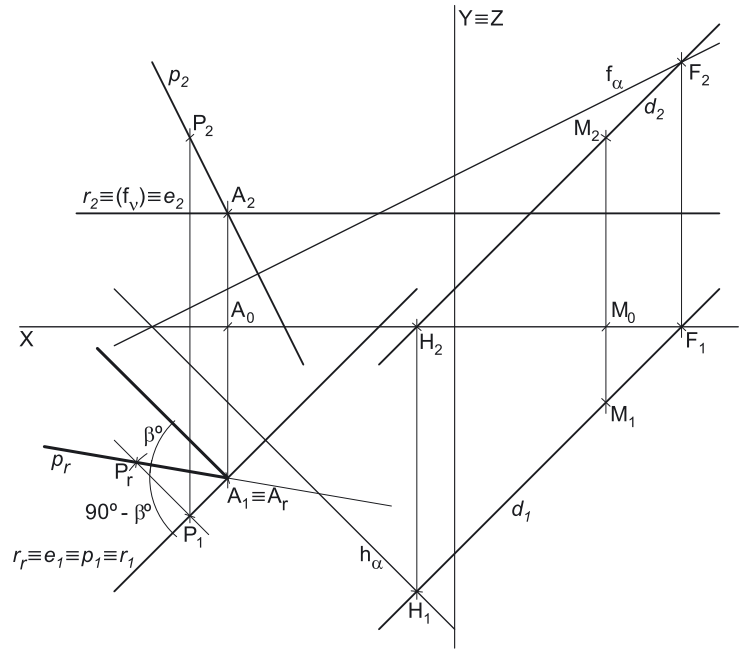
## 524.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $r$  e  $d$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $d$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\alpha$ . Começamos pelo traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da reta  $d$ , o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Uma vez que a reta  $d$  é uma reta de maior declive do plano  $\alpha$ , sabe-se que a reta  $d$  é perpendicular ao traço horizontal do plano (e a todas as retas horizontais do plano), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_\alpha$  –  $h_\alpha$  passa por  $H_1$  (a projeção horizontal do ponto  $H$ ) e é perpendicular a  $d_1$  (a projeção horizontal da reta  $d$ ). Assim,  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é perpendicular a  $d_1$ ).

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $d$ , o ponto  $F$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços do plano são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\alpha$  –  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos (o ponto  $F$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano)

**Resolução:**

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $r$  e o plano  $\alpha$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pela reta  $r$  conduziu-se um plano ortogonal ao plano  $\alpha$ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta  $r$  e uma reta ortogonal ao plano  $\alpha$  e concorrente com a reta  $r$  (a reta  $p$ ). Assim, pelo ponto  $A$  (o ponto da reta  $r$  que é dado no enunciado), da reta  $r$ , conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ . O plano definido pelas retas  $r$  e  $p$  é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Tendo em conta que nem as retas  $r$  e  $p$  nem o plano  $\alpha$  são projetantes, a determinação dos pontos de interseção das retas  $r$  e  $p$  com o plano  $\alpha$  (que nos permitiria determinar a reta de interseção entre os dois planos) teria de se processar com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Conclui-se, portanto, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.

Assim, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.

**Etapa 1.** Esta primeira etapa já foi executada – o plano definido pela reta  $r$  (a reta dada) e a reta  $p$  (a reta concorrente com a reta  $r$  e ortogonal ao plano  $\alpha$ ) é o plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ .

Note que as retas  $r$  e  $p$ , tendo as suas projeções horizontais coincidentes, estão contidas num mesmo plano projetante horizontal. Assim, o plano que contém o ângulo é necessariamente um plano projetante horizontal (um plano vertical) – o plano projetante horizontal das retas  $r$  e  $p$  (cujos traços não se determinaram).

**Etapa 2.** Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta  $r$  e a reta  $p$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (o plano projetante horizontal das duas retas) para o plano horizontal (de nível) que contém a reta  $r$ . Assim, identificou-se o plano  $v$  (pelo seu traço frontal, que está coincidente com a projeção frontal da reta  $r$ , pois é um plano projetante frontal), bem como a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria reta  $r$ . Note que a reta  $r$  é a reta de interseção entre o plano  $v$  e o plano definido pelas retas  $r$  e  $p$ .

A reta  $r$  é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se, imediatamente,  $r_r \equiv r_1$ . O ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$ . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $p$ , em rebatimento. Nesse sentido, recorreu-se ao rebatimento de um outro ponto da reta  $p$  – o ponto  $P$  (cujas projeções se determinaram imediatamente).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano ( $h_\beta$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **H** é o traço horizontal da reta  $r$ , pelo que já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços do plano são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\beta - h_\beta$  (o traço horizontal do plano  $\beta$ ) está definido por dois pontos (o ponto **H** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano)

#### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\alpha$  e  $\beta$  é a reta  $r$ , que é a reta de interseção entre os dois planos (a reta  $r$  pertence aos dois planos, pelo que é necessariamente a reta de interseção entre os dois planos). Assim, a aresta do diedro está identificada e está imediatamente determinada.

**Etapa 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua (a reta  $r$  é uma reta oblíqua) é necessariamente um plano oblíquo, que é um **plano não projetante**.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Por um ponto **P**, exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ , e a reta  $p'$ , ortogonal ao plano  $\beta$ . As duas retas, porque são concorrentes, definem um plano – esse plano é um plano ortogonal à aresta dos diedros (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta  $p$  e a reta  $p'$ ) é o ângulo formado entre os dois planos (os planos  $\alpha$  e  $\beta$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o Plano Frontal de Projeção. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos (o plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$  e o Plano Frontal de Projeção). A reta  $e$  (a charneira) está definida por dois pontos – o ponto **A** (que é o traço frontal da reta  $p$ ) e o ponto **B** (que é o traço frontal da reta  $p'$ ).

Os pontos **A** e **B** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2$  e  $B_r \equiv B_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos outro ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto **P**, que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto **P** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se o **afastamento** do ponto **P** e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **P** em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **P**, até à perpendicular à charneira que passa por  $P_2$ , determinando  $P_r$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $A_r$  e  $P_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) passa por  $B_r$  e  $P_r$  (está igualmente definida por dois pontos). Note que, nesta situação específica, a reta  $p'_r$  fica coincidente com  $p'_2$  (a projeção frontal da reta  $p'$ ), o que se trata de uma casualidade, em função dos dados do exercício.

O ângulo as retas  $p_r$  e  $p'_r$  é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $p_r$  e  $p'_r$ , com vértice em  $P_r$ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os traços dos planos  $\alpha$  e  $\beta$ , que são dados de uma forma indireta, representaram-se a **médio-leve**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$ ).

## 526.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos  $\alpha$  e  $\beta$  pelos respectivos traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes). O plano  $\beta$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

### Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$  passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos  $\alpha$  e  $\beta$  (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

**Etapa 2.** Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

**Etapa 1.** Por um ponto  $P$ , exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\alpha$ , e a reta  $p'$ , ortogonal ao plano  $\beta$ . As duas retas, porque são concorrentes, definem um plano – esse plano é um plano ortogonal à aresta dos diedros (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

Note que a reta  $p$  é necessariamente uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$ , pois é ortogonal a um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (o plano  $\alpha$ ). Por sua vez, a reta  $p'$  é uma reta paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pois é ortogonal a um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (o plano  $\beta$ ).

**Etapa 2.** O ângulo formado entre as duas retas (a reta  $p$  e a reta  $p'$ ) é o ângulo formado entre os dois planos (os planos  $\alpha$  e  $\beta$ ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para um plano frontal (de frente)  $\varphi$ , qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano frontal (de frente)  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal – o plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é a reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\varphi$  e o plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$ ). A reta  $e$  (a charneira) está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\varphi$ ) e o ponto  $B$  (o ponto de interseção da reta  $p'$  com o plano  $\varphi$ ). Os pontos  $A$  e  $B$  foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções horizontais, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

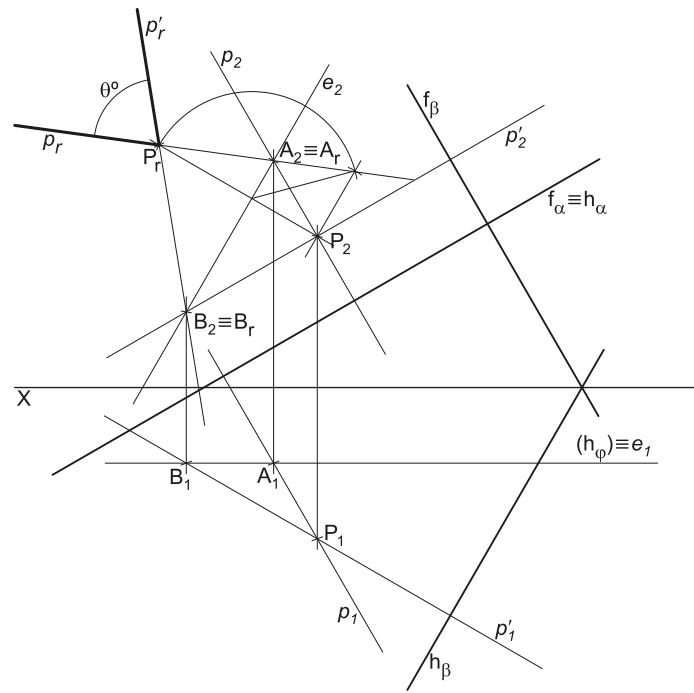
Os pontos  $A$  e  $B$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2$  e  $B_r \equiv B_2$ . Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos outro ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto  $P$ , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto  $P$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por  $P_2$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediou-se a distância do ponto  $P$  ao plano  $\varphi$  (o afastamento de  $P$  em relação ao plano  $\varphi$ ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto  $P$  em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro na charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $P$ , até à perpendicular à charneira que passa por  $P_2$ , determinando  $P_r$ .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $A_r$  e  $P_r$  (está definida por dois pontos). A reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) passa por  $B_r$  e  $P_r$  (está igualmente definida por dois pontos). O ângulo as retas  $p_r$  e  $p'_r$  é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$  é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas  $p_r$  e  $p'_r$ , com vértice em  $P_r$ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com  $\theta^\circ$ .

### Traçado:

Os dados (os traços dos planos  $\alpha$  e  $\beta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas  $p$  e  $p'$ , do plano  $\varphi$  e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas  $p$  e  $p'$ ).



# 18

## REPRESENTAÇÃO DOS SÓLIDOS III

527.

- a) Por **altura de uma pirâmide** entende-se a distância do vértice da pirâmide ao plano da base. No caso de uma pirâmide cuja base está contida num plano oblíquo, a altura dessa pirâmide é a distância do vértice da pirâmide ao plano oblíquo que contém a base da pirâmide.
- b) Por **altura de um prisma** entende-se a distância entre os planos que contêm as duas bases do prisma. No caso de um prisma cujas bases estão contidas em planos oblíquos, a altura desse prisma é a distância entre os dois planos oblíquos que contêm as bases do prisma.

528.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal a  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

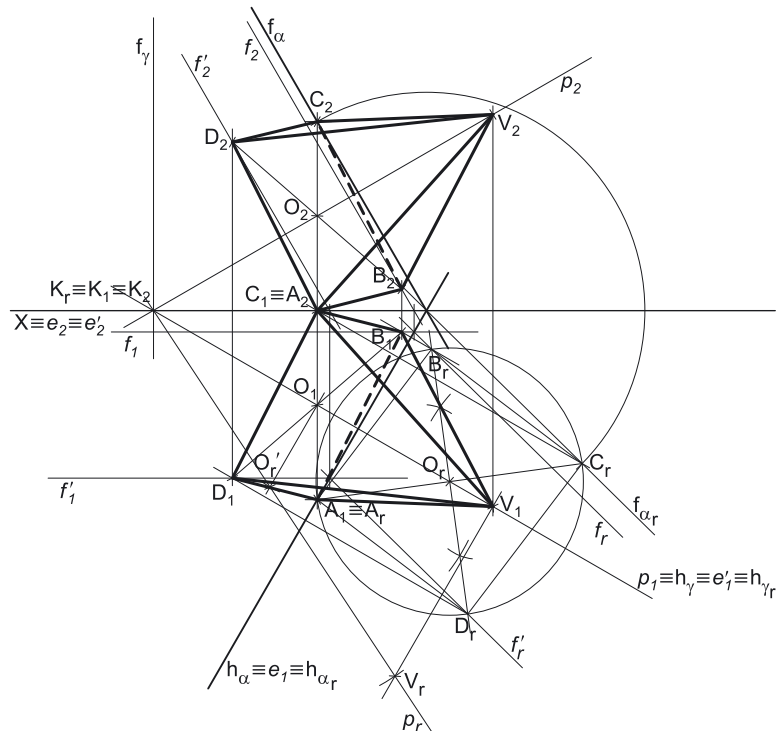
Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **C**, pertencentes ao plano  $\alpha$ . Os pontos **A** e **C**, para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **A** tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto **A** é o ponto de  $h_\alpha$  que tem 5 cm de afastamento ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula). O ponto **C** tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto **C** é o ponto de  $f_\alpha$  que se situa n'omo plano de perfil do ponto **A** (pois a diagonal **[AC]** é de perfil).

**Resolução:**

*Determinação das projeções da base da pirâmide:*

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  (o plano que contém o quadrado) para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$ . Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é um ponto da charneira e, por isso, é um ponto fixo). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto **C**, que é um ponto de  $f_\alpha$  e, simultaneamente, é um vértice do quadrado. Para rebater o ponto **C** conduziu-se, por  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **C**). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**), desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $C_1$ , determinando-se  $C_r$  (o ponto **C** rebatido). Em seguida, desenhou-se  $f_{\alpha r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), passando por  $C_r$  –  $f_{\alpha r}$  está definido por dois pontos (o ponto  $C_r$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano).

A partir dos pontos  $A_r$  e  $C_r$ , construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos  $B_r$  e  $D_r$  (os outros dois vértices do quadrado, em rebatimento). Note que, para tal, foi necessária a determinação do centro do quadrado em rebatimento (o ponto  $O_r$ ), bem como o desenho da circunferência circunscrita ao quadrado (em rebatimento). Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos pontos **B**, **D** e **O**.

A inversão do rebatimento do ponto **B** processou-se com o recurso à reta  $f$ , frontal (de frente), do plano  $\alpha$ , à qual o ponto **B** pertence. A reta  $f_r$  (a reta  $f$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $B_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $f_{\alpha r}$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $f$ . O traço horizontal da reta  $f$  (que não se identificou) é um ponto da charneira (que é  $h_\alpha$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Já temos um ponto para definir a reta  $f$  em projeções – o seu traço horizontal (que não se identificou). Já temos também a direção da reta  $f$  (que é a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $f$ .

Por fim, por  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ) é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**). A projeção frontal do ponto **B** ( $B_2$ ) situa-se sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento do ponto **D** e a determinação das suas projeções processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **B**, e também com o recurso a uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  – a reta  $f'$  foi a reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  a que se recorreu, para inverter o rebatimento do ponto **D**. Note que, também nesta situação, não se identificou o traço horizontal da reta  $f'$ .

A omissão da identificação dos traços horizontais das retas  $f$  e  $f'$  têm a ver, sobretudo, com a dificuldade em localizar as respetivas letras, de forma a permanecerem legíveis e, ainda, a permitir a correta legibilidade da resolução gráfica aqui apresentada.

Por fim, inverteu-se o rebatimento do ponto **O**, que é, necessariamente, um ponto da diagonal **[AC]**. Assim, por  $O_r$  (o ponto **O** rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**), sobre a projeção horizontal da diagonal **[AC]** –  $[A_1C_1]$ .

Tendo em conta que a diagonal **[AC]** é de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível, de forma direta, determinar a projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ), sobre a projeção frontal da diagonal **[AC]**. No entanto, sabe-se que o ponto **O** é o ponto em que as duas diagonais do quadrado se bissectam (no espaço, em projeções e em rebatimento). Assim, desenharam-se as duas projeções da diagonal **[BD]**, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ), no ponto de concorrência das projeções frontais das duas diagonais da figura.

A partir das projeções dos quatro pontos (os pontos **A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta  $p$ , a reta suporte do eixo da pirâmide.

A reta  $p$  é ortogonal a  $f_\alpha$ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_\alpha$  é direta em projeção frontal, pelo que  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ) é perpendicular a  $f_\alpha$ . A reta  $p$  é também ortogonal a  $h_\alpha$ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_\alpha$  é direta em projeção horizontal, pelo que  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ) é perpendicular a  $h_\alpha$ . Assim, a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ ). A reta  $p$  está, assim, definida por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (e ortogonal ao plano  $\alpha$ ).

Note que, **nesta situação particular**, a reta  $p$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pelo que a reta  $p$  é necessariamente uma reta do  $\beta_{1/3}$ . Assim, a reta  $p$  é uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo **X** num ponto (o ponto **K**, cujas projeções se determinaram imediatamente).

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento **[OV]** (o eixo da pirâmide) está contido na reta  $p$ , pelo que o ponto **V** é um ponto da reta  $p$ . Assim, a distância do ponto **V** ao plano  $\alpha$  mede-se sobre a reta  $p$ . A reta  $p$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento **[OV]** (o eixo da pirâmide), que está contido na reta  $p$ , não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da reta  $p$  para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano  $\gamma$  (o plano projetante horizontal da reta  $p$ ) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é  $h_\gamma$  – tem-se imediatamente  $h_\gamma \equiv e' \equiv h_{\gamma r}$ .

O ponto **K** (o ponto de concorrência da reta  $p$  com o eixo **X**) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente,  $K_r \equiv K_1 \equiv K_2$ . Já temos um ponto (em rebatimento) para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do ponto **O** – para tal conduziu-se, por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), sobre a qual se mediu a **cota** do ponto **O**, a partir de  $O_1$ , o que nos permitiu determinar  $O_r' - O_r'$  é o ponto **O** rebatido no seu segundo rebatimento (o ponto **O** rebatido pelo rebatimento do plano  $\gamma$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p_r$ . A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $O_r'$  e por  $K_r$  (está definida por dois pontos).

Sobre a reta  $p_r$ , a partir de  $O_r'$ , mediram-se os 8 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto **V** ao plano  $\alpha$ ) e determinou-se  $V_r$  (note que se garantiu que o ponto **V** se situa no  $1^a$  Diedro, para que a pirâmide se situe no espaço do  $1^o$  Diedro, como o enunciado refere expressamente). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto **V** e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta  $p$ .

### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide (os vértices **A**, **B**, **C** e **D**, da base, e o vértice **V**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABVCD]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide pertencem ao contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[BC]**, da base, é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal – a base **[ABCD]** e a face lateral **[BCV]**. Já as arestas laterais **[AV]** e **[DV]** são visíveis, porque se situam na parte visível do sólido – as faces laterais **[ABV]**, **[ADV]** e **[CDV]** são as faces visíveis da pirâmide, em projeção frontal

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[AVBCD]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>V<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide pertencem ao contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta **[AB]**, da base, é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – a base **[ABCD]** e a face lateral **[ABV]**. Já as arestas laterais **[CV]** e **[DV]** são visíveis, porque se situam na parte visível do sólido – as faces laterais **[ADV]**, **[CDV]** e **[BCV]** são as faces visíveis da pirâmide, em projeção horizontal

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Traçado:

Os dados os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado [ABCD], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado [ABCD]), bem como da reta  $p$ , do plano  $\gamma$  e de todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice  $V$ ).

## 529.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $O$ , pertencente ao plano  $\delta$ . O ponto  $O$ , para pertencer ao plano  $\delta$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano).

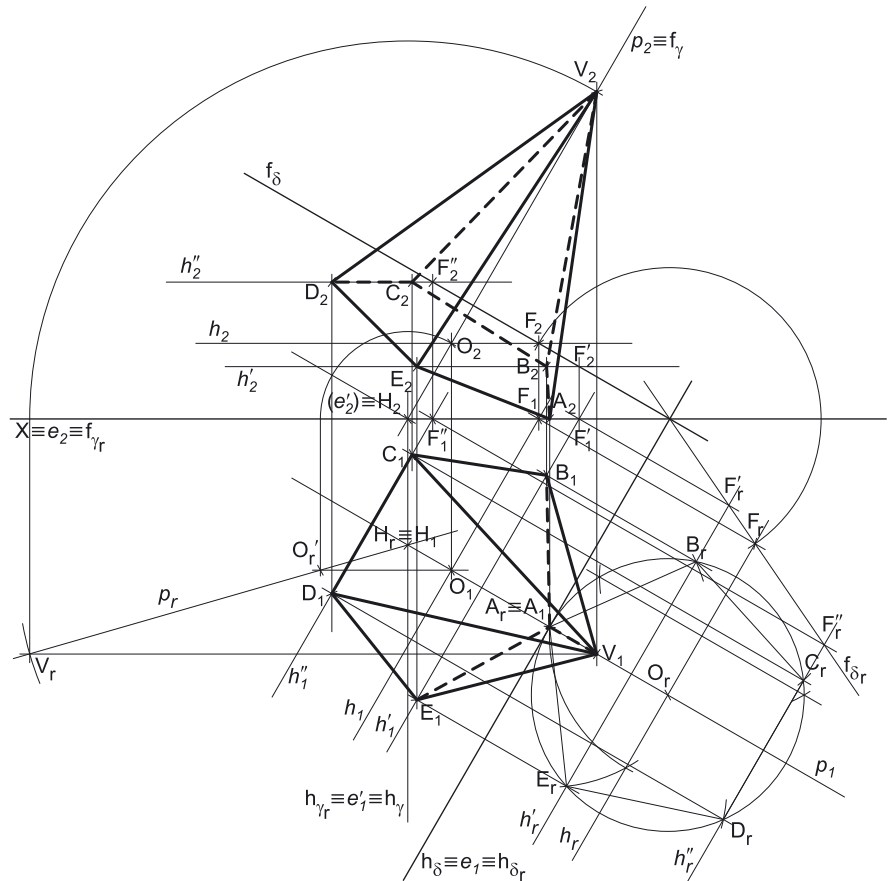
A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , com 2 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $O$ . A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ). O ponto  $O$  é o ponto da reta  $h$  que tem 5 cm de afastamento.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o pentágono [ABCDE] (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o pentágono [ABCDE] (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\delta$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\delta \equiv e_1 \equiv h_{\delta_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\delta$ ).



Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\delta_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que é um ponto da charneira (é um ponto fixo e não se identificou). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $h$ ), que é um ponto de  $f_\delta$ . Para rebater o ponto  $F$  conduziu-se, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é um ponto fixo) e com raio até  $A_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , determinando-se  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Em seguida, desenhou-se  $f_{\delta_r}$  (o traço frontal do plano  $\delta$  rebatido), que está definido por dois pontos – o ponto  $F_r$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

Para rebater o ponto  $O$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $O$  pertença – a reta  $h$ , neste caso. Para definirmos a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto  $F_r$ ), para definirmos a reta  $h_r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_r$ . A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) passa por  $F_r$  e é paralela a  $h_{\delta_r} - h_r$ , está definida por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\delta_r}$ ). Em seguida, conduziu-se, por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ), uma perpendicular à charneira (que é  $h_\delta$ ) e que corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal à charneira do rebatimento ( $h_\delta$ ) que contém o ponto  $O$  (bem como o arco do seu rebatimento) – o ponto  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido) é o ponto de interseção da reta  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $O_1$ .

Em rebatimento, já é possível construir o pentágono [ABCDE] em verdadeira grandeza (em rebatimento). O enunciado refere que um dos vértices do polígono tem cota nula, ou seja, situa-se no Plano Horizontal de Projeção. Esse vértice, porque pertence ao plano  $\delta$ , tem de se situar sobre  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ). Por outro lado, é referido, ainda, que a circunferência circunscrita ao pentágono é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que, nesse sentido, a circunferência tem de ser tangente ao traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ). Em função de tudo isso, a circunferência circunscrita ao pentágono é necessariamente tangente a  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ) no ponto  $A$  (o vértice da figura que tem cota nula).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$ , desenhou-se uma circunferência tangente a  $h_{\delta r}$ , que é a circunferência circunscrita ao polígono. O ponto em que a circunferência é tangente a  $h_{\delta r}$  é necessariamente o vértice da figura que tem cota nula – o vértice  $A$  ( $A_r$ , pois estamos em rebatimento). Em seguida, construiu-se o pentágono em verdadeira grandeza, inscrito na circunferência e a partir do vértice conhecido ( $A_r$ ), o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $B_r$ ,  $C_r$ ,  $D_r$  e  $E_r$  (cuja ordem foi arbitrária, mas sequencial). Note que o enunciado não especifica a ordem e posição dos restantes vértices do polígono.

O ponto  $A$  é um ponto da charneira (que é  $h_{\delta}$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_1 \equiv A_r$  ( $A_2$  situa-se no eixo  $X$ , pois  $A$  tem cota nula).

A inversão do rebatimento dos pontos  $B$  e  $E$  processou-se com o recurso à reta  $h'$ , horizontal (de nível), do plano  $\delta$ , à qual os dois pontos pertencem. A reta  $h'$  é a reta suporte da diagonal  $[BE]$  do pentágono. A reta  $h'_r$  (a reta  $h'$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $E_r$ ) e ainda por uma direção (é paralela a  $h_{\delta r}$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h'$ .

O ponto  $F'$  é o traço frontal da reta  $h'$  e é um ponto do traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_{\delta}$ ). Assim,  $F'_r$  é um ponto de  $f_{ur}$  e o ponto  $F'$  tem-se situar sobre  $f_{\delta}$ . Para se determinarem as projeções do ponto  $F'$  conduziu-se, por  $F'_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $F'$ ) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo  $X$  é  $F'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F'$ ), pois o ponto  $F'$  tem afastamento nulo. A projeção frontal do ponto  $F'$  ( $F'_2$ ) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_{\delta}$ ), pois o ponto  $F'$  é um ponto de  $f_{\delta}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $h'$  – a reta  $h'$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $F'$ ) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $h'$ .

Por fim, por  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta  $h'$ ) é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ). A projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ) situa-se sobre  $h'_2$  (a projeção frontal da reta  $h'$ ). De forma semelhante, por  $E_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta  $h'$ ) é  $E_1$  (a projeção horizontal do ponto  $E$ ). A projeção frontal do ponto  $E$  ( $E_2$ ) situa-se sobre  $h'_2$  (a projeção frontal da reta  $h'$ ).

A inversão do rebatimento dos pontos  $C$  e  $D$  e a determinação das respetivas projeções processou-se de forma idêntica à exposta para os pontos  $B$  e  $E$ . A reta  $h''$  é a reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$  que nos permitiu inverter o rebatimento dos pontos  $C$  e  $D$  (é a reta suporte do lado  $[CD]$  da figura). A reta  $h''$ , em projeções, está definida por um ponto (o ponto  $F''$ , o seu traço frontal) e por uma direção (é paralela à reta  $h$  e a  $h_{\delta}$ ).

A partir das projeções dos cinco pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ ), desenharam-se as projeções do pentágono  $[ABCDE]$ .

### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto  $O$  e é ortogonal ao plano  $\delta$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto  $O$  conduziram-se as projeções da reta  $p$ , a reta suporte do eixo da pirâmide.

A reta  $p$  é ortogonal a  $f_{\delta}$ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_{\delta}$  é direta em projeção frontal, pelo que  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ) é perpendicular a  $f_{\delta}$ . A reta  $p$  é também ortogonal a  $h_{\delta}$ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_{\delta}$  é direta em projeção horizontal, pelo que  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ) é perpendicular a  $h_{\delta}$ . Assim, a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\delta$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**). A reta  $p$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é ortogonal ao plano  $\delta$ ).

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) está contido na reta  $p$ , pelo que o ponto  $V$  é um ponto da reta  $p$ . Assim, a distância do ponto  $V$  ao plano  $\delta$  mede-se na reta  $p$ . A reta  $p$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante frontal da reta  $p$  para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano  $\gamma$  (o plano projetante frontal da reta  $p$ ) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é  $h_{\gamma}$  – tem-se imediatamente  $h_{\gamma} \equiv e'_1 \equiv h_{\gamma r}$ .

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto  $O$ , determinando  $O'_r$  –  $O'_r$  é o ponto  $O$  rebatido no seu segundo rebatimento ( $O$  rebatido pelo rebatimento do plano  $\theta$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao ponto  $H$ , o traço horizontal da reta  $p$ . Assim, determinou-se o traço horizontal da reta (o ponto  $H$ ) que é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_r \equiv H_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p_r$ . A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $O'_r$  e por  $H_r$  (está definida por dois pontos).

Sobre a reta  $p_r$ , a partir de  $O'_r$ , mediram-se os 8 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto  $V$  ao plano  $\delta$ ) e determinou-se  $V_r$  (note que se garantiu que o ponto  $V$  se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro, para que a pirâmide se situe no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro, como o enunciado refere expressamente). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $V$  e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta  $p$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos seis vértices da pirâmide (os vértices **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, da base, e o vértice **V**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[AEDV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>E<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **B** e **C**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[BC]** e **[CD]**, da base, e as arestas laterais **[BV]** e **[CV]**. Note que, em projeção frontal, apenas as faces laterais **[AEV]** e **[DEV]** são visíveis, pelo que a aresta lateral **[EV]** é **visível** em projeção frontal (separa duas faces visíveis, em projeção frontal). Em projeção frontal, a base **[ABCDE]** é invisível, bem como as faces laterais **[ABV]**, **[BCV]** e **[CDV]**.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[BCDEV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AE]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**. Em projeção horizontal, as faces laterais **[BCV]**, **[CDV]** e **[DEV]** são visíveis, pelo que as arestas **[CV]** e **[DV]** são igualmente **visíveis** em projeção horizontal (porque separam faces visíveis em projeção horizontal). Em projeção horizontal, a base **[ABCDE]** é invisível, bem como as faces laterais **[ABV]** e **[AEV]**.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O pentágono **[ABCDE]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\delta$  (que nos permitiram determinar as projeções do pentágono **[ABCDE]**), de todos os traçados referentes à construção do pentágono em verdadeira grandeza, bem como da reta **p**, do plano  $\gamma$  e de todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **V**).

## 530.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

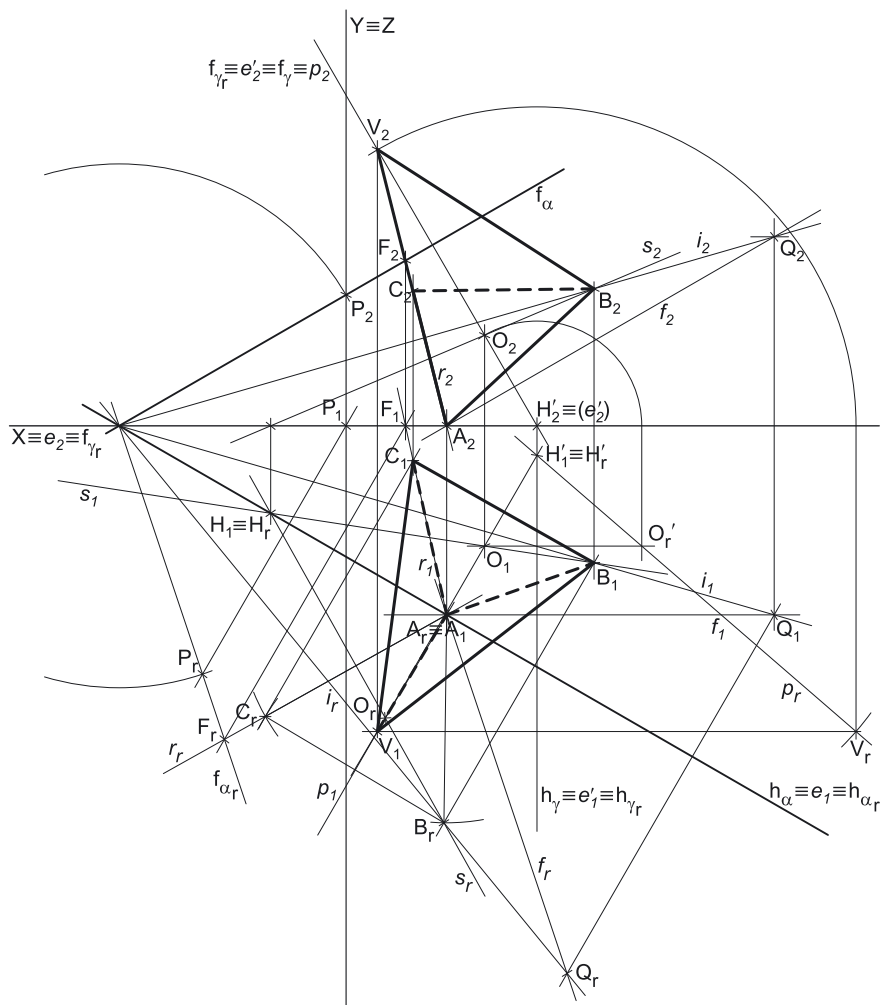
Em seguida determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **B**, pertencentes ao plano  $\alpha$ . Os pontos **A** e **B**, para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **A** tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto **A** é o ponto de  $h_\alpha$  que tem 5 cm de afastamento ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula). O ponto **C** tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto **C** é o ponto de  $f_\alpha$  que se situa noma plano de perfil do ponto **A** (pois a diagonal **[AC]** é de perfil).

Não existem dados suficientes para determinar as projeções do ponto **B** (não é dada nem a cota nem o afastamento do ponto), pelo que, em função dos dados (a distância de **A** e **B**, que é o comprimento do lado do triângulo), o ponto **B** só pode ser determinado em rebatimento.

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{h}_\alpha \equiv \mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{h}_{\alpha r}$  ( $\mathbf{e}_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $\mathbf{X}$ ). Em seguida identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $\mathbf{h}_\alpha$ ).

### Rebatimento do plano $\alpha$ :

O ponto  $\mathbf{A}$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $\mathbf{A}_r \equiv \mathbf{A}_1$ . Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $\mathbf{f}_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $\mathbf{f}_{\alpha r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos traços do plano, que é um ponto da charneira (é um ponto fixo e não se identificou). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater um ponto  $\mathbf{P}$ , qualquer, pertencente a  $\mathbf{f}_\alpha$ . Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se considerar que o ponto  $\mathbf{P}$  é o ponto de  $\mathbf{f}_\alpha$  que tem abcissa nula. Para rebater o ponto  $\mathbf{P}$  conduziu-se, por  $\mathbf{P}_1$  (a projeção horizontal do ponto  $\mathbf{P}$ ), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $\mathbf{P}$ ). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é um ponto fixo) e com raio até  $\mathbf{P}_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $\mathbf{P}_1$ , determinando-se  $\mathbf{P}_r$  (o ponto  $\mathbf{P}$  rebatido). Em seguida desenhou-se  $\mathbf{f}_{\alpha r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), que está definido por dois pontos – o ponto  $\mathbf{P}_r$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou).

### Construção do triângulo $[\mathbf{ABC}]$ em rebatimento (em verdadeira grandeza):

Em rebatimento, já é possível construir o triângulo  $[\mathbf{ABC}]$ , em verdadeira grandeza. No entanto, não temos qualquer elemento, em rebatimento, que nos permita efetuar essa construção, para além do ponto  $\mathbf{A}_r$  e da medida do lado do triângulo (que é dada no enunciado). Essa informação é claramente insuficiente para procedermos à construção do triângulo em rebatimento. No entanto, é referido, no enunciado, que o ponto  $\mathbf{B}$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$ . Uma vez que o ponto  $\mathbf{B}$  é um ponto do plano  $\alpha$  e também um ponto do  $\beta_{1/3}$ , conclui-se que o ponto  $\mathbf{B}$  é necessariamente um ponto da reta de interseção entre os dois planos (reta  $i$ ). Assim, há que, em primeiro lugar, determinar as projeções da reta  $i$  (a reta de interseção do plano  $\alpha$  com o  $\beta_{1/3}$ ).

Para definirmos a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano são concorrentes num ponto do eixo  $\mathbf{X}$  que é, necessariamente, um ponto que pertence tanto ao plano  $\alpha$  como ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $i$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano são insuficientes para definir a reta  $i$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $f$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  e está definida por um ponto (o ponto  $\mathbf{A}$  que é o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\alpha$  – é paralela a  $\mathbf{f}_\alpha$ ).

Por fim, determinou-se o ponto  $\mathbf{Q}$ , o traço da reta  $f$  no  $\beta_{1/3}$  – já temos o ponto que nos faltava, o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $i$ . A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $\mathbf{Q}$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\alpha$  (que não se identificou). Note que o ponto de concorrência da reta  $i$  com os dois traços do plano (um ponto do eixo  $\mathbf{X}$ ) é, afinal, o ponto de concorrência da reta  $i$  com o eixo  $\mathbf{X}$ , pois a reta  $i$  é uma reta passante.

Em seguida, há que transportar a reta  $i$  para o rebatimento efetuado (do plano  $\alpha$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $i_r$  (a reta  $i$  em rebatimento) – o ponto de concorrência da reta  $i$  com o eixo  $\mathbf{X}$  (que é um ponto da charneira e, por isso, roda sobre si próprio). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto que nos falta deverá ser o outro ponto que define a reta  $i$  – o ponto  $\mathbf{Q}$ . Nesse sentido, há que rebater o ponto  $\mathbf{Q}$ , o que se processa rebatendo uma reta a qual o ponto  $\mathbf{Q}$  pertença – a reta  $f$ .

Assim, desenhou-se a reta  $f_r$  de forma imediata, pois a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $\mathbf{A}_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $\mathbf{f}_\alpha$ ). Por fim, conduziu-se, por  $\mathbf{Q}_1$  (a projeção horizontal do ponto  $\mathbf{Q}$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $\mathbf{Q}_r$  (o ponto  $\mathbf{Q}$  rebatido), sobre  $f_r$  (a reta  $f$  rebatida). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i_r$  – a reta  $i_r$  está definida por dois pontos (o ponto  $\mathbf{Q}_r$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $\mathbf{X}$ , que é um ponto fixo).

Finalmente, é possível efetuar a construção do triângulo  $[\mathbf{ABC}]$  em rebatimento. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $\mathbf{A}_r$  e com 5,5 cm de raio (a medida do lado do triângulo), determinou-se o ponto  $\mathbf{B}_r$  sobre a reta  $i_r$ . Note que existem dois pontos da reta  $i_r$  que distam 5,5 cm do ponto  $\mathbf{A}_r$ , mas que apenas o ponto que a resolução apresenta nos garante que o ponto  $\mathbf{B}$  é o vértice mais à direita do triângulo (como o enunciado pede expressamente).

A partir dos pontos  $\mathbf{A}_r$  e  $\mathbf{B}_r$ , construiu-se o triângulo  $[\mathbf{ABC}]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos  $\mathbf{C}_r$  e  $\mathbf{O}_r$  (o ponto  $\mathbf{O}$  é o centro do triângulo). Note que se garantiu, mais uma vez, que o ponto  $\mathbf{B}$  é o vértice mais à direita do triângulo. Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos pontos  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{O}$ .

### Inversão do rebatimento do plano $\alpha$ e determinação das projeções da base da pirâmide:

A inversão do rebatimento do ponto  $\mathbf{C}$  processou-se com o recurso à reta  $r$ , oblíqua, do plano  $\alpha$ , à qual o ponto  $\mathbf{C}$  pertence (a reta  $r$  é a reta suporte do lado  $[\mathbf{AC}]$  do triângulo). A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – o ponto  $\mathbf{A}_r$  e o ponto  $\mathbf{C}_r$ . Em seguida determinaram-se as projeções da reta  $r$ . O ponto  $\mathbf{A}$  é o traço horizontal e as suas projeções já são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções – o ponto  $\mathbf{A}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto  $\mathbf{F}$  é o traço frontal da reta  $r$  e é um ponto do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $\mathbf{f}_\alpha$ ). Assim,  $\mathbf{F}_r$  é um ponto de  $\mathbf{f}_{\alpha r}$  e o ponto  $\mathbf{F}$  tem de situar sobre  $\mathbf{f}_\alpha$ . Para se determinarem as projeções do ponto  $\mathbf{F}$  conduziu-se, por  $\mathbf{F}_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo  $\mathbf{X}$  é  $\mathbf{F}_1$  (a projeção horizontal do ponto  $\mathbf{F}$ ) e a sua projeção frontal ( $\mathbf{F}_2$ ) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $\mathbf{f}_\alpha$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  – a reta  $r$  está, assim, definida por dois pontos (os pontos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{F}$ ).

Depois, por  $\mathbf{C}_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $\mathbf{r}_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $\mathbf{C}_1$  (a projeção horizontal do ponto  $\mathbf{C}$ ). A projeção frontal do ponto  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{C}_2$ ) situa-se sobre  $\mathbf{r}_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento do ponto **O** processou-se com o recurso à reta **s**, oblíqua, do plano  $\alpha$ , à qual o ponto **O** pertence (a reta **s** é a reta suporte do altura do triângulo relativa ao vértice **B**). A reta **s<sub>r</sub>** (a reta **s** rebatida) está definida por dois pontos – o ponto **O<sub>r</sub>** e o ponto **B<sub>r</sub>**. Em seguida determinaram-se as projeções da reta **s**. O ponto **B** é um ponto cujas projeções já são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta **s** em projeções – o ponto **B**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto **H** é o traço horizontal da reta **s** e é um ponto do traço horizontal do plano (**h<sub>α</sub>**), pelo que **H<sub>r</sub>** se situa sobre **h<sub>αr</sub>**. O ponto **H** é um ponto da charneira do rebatimento (o traço horizontal do plano  $\alpha$  – **h<sub>α</sub>**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **H<sub>1</sub> ≡ H<sub>r</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **s** – a reta **s** está, assim, definida por dois pontos (os pontos **B** e **H**).

Depois, por **O<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **s<sub>r</sub>** (a projeção horizontal da reta **s**) é **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**). A projeção frontal do ponto **O** (**O<sub>2</sub>**) situa-se sobre **s<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **s**).

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

#### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte do eixo da pirâmide.

A reta **p** é ortogonal a **f<sub>δ</sub>**, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta **p** e **f<sub>α</sub>** é direta em projeção frontal, pelo que **p<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **p**) é perpendicular a **f<sub>αr</sub>**. A reta **p** é também ortogonal a **h<sub>α</sub>**, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta **p** e **h<sub>α</sub>** é direta em projeção horizontal, pelo que **p<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **p**) é perpendicular a **h<sub>αr</sub>**. Assim, a reta **p** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**). A reta **p** está, assim, definida por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é ortogonal ao plano  $\alpha$ ).

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento **[OV]** (o eixo da pirâmide) está contido na reta **p**, pelo que o ponto **V** é um ponto da reta **p**. Assim, a distância do ponto **V** ao plano  $\delta$  mede-se na reta **p**. A reta **p** não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento **[OV]** (o eixo da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante frontal da reta **p** para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano  $\gamma$  (o plano projetante frontal da reta **p**) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é **h<sub>γ</sub>** – tem-se imediatamente **h<sub>γ</sub> ≡ e'<sub>1</sub> ≡ h<sub>γr</sub>**.

Em seguida efetuou-se o rebatimento do ponto **O**, determinando **O<sub>r</sub>' – O<sub>1</sub>'** é o ponto **O** rebatido no seu segundo rebatimento (**O** rebatido pelo rebatimento do plano  $\gamma$ ). Já temos um ponto para definir a reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao ponto **H'**, o traço horizontal da reta **p**. Assim, determinou-se o traço horizontal da reta (o ponto **H'**) que é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **H'<sub>r</sub> ≡ H'<sub>1</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **p<sub>r</sub>**. A reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida) passa por **O<sub>r</sub>'** e por **H'<sub>r</sub>** (está definida por dois pontos).

Sobre a reta **p<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>'**, mediram-se os 7,5 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto **V** ao plano  $\alpha$ ) e determinou-se **V<sub>r</sub>** (note que se garantiu que o ponto **V** se situa no **1<sup>o</sup> Diedro**, para que a pirâmide se situe no espaço do **1<sup>o</sup> Diedro**, como o enunciado refere expressamente). Em seguida inverteu-se o rebatimento do ponto **V** e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta **p**.

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide (os vértices **A**, **B** e **C**, da base, e o vértice **V**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABV]** (que é, afinal, a face lateral **[ABV]**), cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AC]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. Atendendo a que, **nesta situação particular**, a face lateral **[ACV]** da pirâmide é projetante frontal, as arestas **[CV]** e **[AC]**, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por uma aresta visível em projeção frontal – a aresta lateral **[AV]**. Note ainda que, em projeção frontal, apenas a face lateral **[ABV]** é visível. Em projeção frontal, a base **[ABC]** é invisível, bem como as faces laterais **[ACV]** e **[BCV]**.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[BCV]** (que é, afinal, a face lateral **[BCV]**), cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AC]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**. Note que, em projeção horizontal, apenas a face lateral **[BCV]** é visível. Em projeção horizontal, a base **[ABC]** é invisível, bem como as faces laterais **[ABV]** e **[ACV]**.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[ABC]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso da reta **f**, da reta **i** e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo **[ABC]**), bem como a reta **p**, o plano  $\gamma$  e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **V**).





(continuação da página anterior)

De acordo com o que o enunciado refere expressamente, o ponto **V** tem cota nula – nesse sentido, o ponto **V** é o traço horizontal da reta **p**, pelo que as suas projeções se determinaram imediatamente.

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide (os vértices **A**, **B** e **C**, da base, e o vértice **V**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BCV]** (que é, afinal, a face lateral **[BCV]**), cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AC]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**. Note que, em projeção frontal, apenas a face lateral **[BCV]** é visível. Em projeção frontal, a base **[ABC]** é invisível, bem como as faces laterais **[ABV]** e **[ACV]**.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ABCV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide pertencem ao contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta lateral **[BV]** é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** (que são as faces invisíveis em projeção horizontal). A face lateral **[ACV]** e a base **[ABC]** são visíveis, em projeção horizontal.

#### Traçado:

Os dados os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[ABC]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo **[ABC]**), bem como da reta **p**.

## 532.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

Em seguida determinaram-se as projeções do ponto **O**, pertencente ao plano  $\alpha$ . O ponto **A**, para pertencer ao plano  $\alpha$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano).

A reta **h** é a reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , com 4 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **O**. A reta **h** está definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). O ponto **O** é o ponto da reta **h** que tem 4 cm de afastamento.

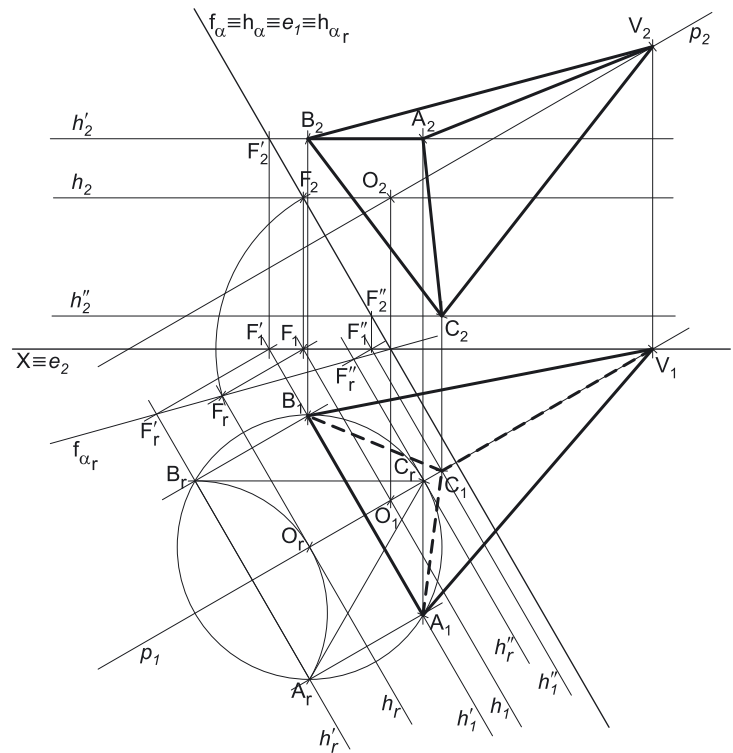
#### Resolução:

##### Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_{\alpha} \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_{\alpha}$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos traços do plano, que é um ponto da charneira (é um ponto fixo e não se identificou). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto **F** (o traço frontal da reta **h**), que é um ponto de  $f_{\alpha}$ . Para rebater o ponto **F** conduziu-se, por **F<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **F**), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do seu rebatimento). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é um ponto fixo) e com raio até **F<sub>2</sub>**, desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por **F<sub>1</sub>**, determinando-se **F<sub>r</sub>** (o ponto **F** rebatido). Em seguida desenhou-se  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), que está definido por dois pontos – o ponto **F<sub>r</sub>** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para rebater o ponto **O** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **O** pertença – a reta **h**, neste caso. Para definirmos a reta **h<sub>r</sub>** (a reta **h** rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto **F<sub>r</sub>**), para definirmos a reta **h<sub>r</sub>** – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir **h<sub>r</sub>**. A reta **h<sub>r</sub>** (a reta **h** rebatida) passa por **F<sub>r</sub>** e é paralela a **h<sub>αr</sub>** – **h<sub>r</sub>** está definida por um ponto (o ponto **F<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a **h<sub>αr</sub>**). Em seguida conduziu-se, por **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**), uma perpendicular à charneira (que é **h<sub>α</sub>**) e que corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal à charneira do rebatimento (**h<sub>α</sub>**) que contém o ponto **O** (bem como o arco do seu rebatimento) – o ponto **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** rebatido) é o ponto de interseção da reta **h<sub>r</sub>** com a perpendicular à charneira que passa por **O<sub>1</sub>**.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>r</sub>** e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao polígono, em rebatimento (em verdadeira grandeza) e efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo (em rebatimento), inscrito na circunferência. O lado **[AB]** é o lado de maior cota da figura, pois, de acordo com o enunciado, o vértice **C** é o vértice de menor cota do polígono. O lado **[AB]** é horizontal (de nível), pelo que, em rebatimento, é necessariamente paralelo à reta **h<sub>r</sub>** – este raciocínio permitiu-nos perceber a posição do polígono e efetuar a sua construção (em verdadeira grandeza).

Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos pontos **C** e **O**.

A inversão do rebatimento dos pontos **A** e **B** processou-se com o recurso à reta **h'**, horizontal (de nível), do plano  $\alpha$ , à qual aqueles pontos pertencem – a reta **h'** é a reta suporte do lado **[AB]** do triângulo. A reta **h'<sub>r</sub>** (a reta **h'** rebatida) está definida por dois pontos (os pontos **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**) e ainda por uma direção (é paralela a **h<sub>αr</sub>**). Em seguida determinaram-se as projeções da reta **h'**. O ponto **F'** é o traço frontal da reta **h'** e é um ponto do traço frontal do plano  $\alpha$  (**f<sub>α</sub>**). Assim, **F'<sub>r</sub>** é um ponto de **f<sub>αr</sub>** e o ponto **F'** tem-se situar sobre **f<sub>α</sub>**. Para se determinarem as projeções do ponto **F'** conduziu-se, por **F'<sub>r</sub>**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo **X** é **F'<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **F'**) e a sua projeção frontal (**F'<sub>2</sub>**) situa-se sobre o traço frontal do plano (**f<sub>α</sub>**). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **h'** – a reta **h'** está definida (em projeções) por um ponto (o ponto **F'**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ).

Por fim, por **A<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **h'<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **h'**) é **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**). A projeção frontal do ponto **A** (**A<sub>2</sub>**) situa-se sobre **h'<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **h'**). De forma semelhante, por **B<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **h'<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **h'**) é **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**). A projeção frontal do ponto **B** (**B<sub>2</sub>**) situa-se sobre **h'<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **h'**).

A inversão do rebatimento do ponto **C** e a determinação das suas projeções processou-se de forma idêntica à exposta para os pontos **A** e **B**, e também com o recurso a uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  – a reta **h''** foi a reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  a que se recorreu, para inverter o rebatimento do ponto **C**. O ponto **F''** é o traço frontal da reta **h''**.

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte do eixo da pirâmide.

A reta **p** é ortogonal a **f<sub>α</sub>**, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta **p** e **f<sub>α</sub>** é direta em projeção frontal, pelo que **p<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **p**) é perpendicular a **f<sub>α</sub>**. A reta **p** é também ortogonal a **h<sub>α</sub>**, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta **p** e **h<sub>α</sub>** é direta em projeção horizontal, pelo que **p<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **p**) é perpendicular a **h<sub>α</sub>**. Assim, a reta **p** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**). A reta **p** está, assim, definida por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é ortogonal ao plano  $\alpha$ ).

De acordo com o que o enunciado refere expressamente, o ponto **V** tem afastamento nulo – nesse sentido, o ponto **V** é o traço frontal da reta **p**, pelo que as suas projeções se determinaram imediatamente.

### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide (os vértices **A**, **B** e **C**, da base, e o vértice **V**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BCV]** (que é, afinal, a face lateral **[BCV]**), cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AC]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**. Note que, em projeção frontal, apenas a face lateral **[BCV]** é **invisível**. Em projeção frontal, a base **[ABC]** é **visível**, bem como as faces laterais **[ABV]** e **[ACV]**.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ABV]** (que é, afinal, a face lateral **[ABV]**), cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AC]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. Note que, em projeção horizontal, apenas a face lateral **[ABV]** é **visível**. Em projeção horizontal, a base **[ABC]** é **invisível**, bem como as faces laterais **[ACV]** e **[BCV]**.

### Traçado:

Os dados os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[ABC]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo **[ABC]**), da construção do triângulo **[ABC]** em rebatimento, bem como da reta **p**.



(continuação da página anterior)

Para rebater o ponto **O** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **O** pertença – a reta  $i$ , neste caso. Para definirmos a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto  $H_r$ ), para definirmos a reta  $i_r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto **F** (o traço frontal da reta  $i$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_r \equiv F_2$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i_r$ . A reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) está, assim, definida por dois pontos – os pontos  $H_r$  e  $F_r$ . Em seguida conduziu-se, por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**), uma perpendicular à charneira (que é  $f_{\alpha}$ ) e que corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal à charneira do rebatimento ( $f_{\alpha}$ ) que contém o ponto **O** (bem como o arco do seu rebatimento) – o ponto  $O_r$  (o ponto **O** rebatido) é o ponto de interseção da reta  $i_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $O_2$ .

Em rebatimento, já é possível construir o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao polígono e efetuou-se a construção do mesmo, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar os pontos  $B_r$ ,  $C_r$  e  $D_r$  (os outros três vértices do quadrado, em rebatimento). Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos pontos **B**, **C** e **D**.

### Inversão do rebatimento do plano $\alpha$ e determinação das projeções da base da pirâmide:

A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **D** processou-se com o recurso à reta  $r$ , do plano  $\alpha$ , à qual os dois pontos pertencem – a reta  $r$  é a reta suporte da diagonal **[BD]** do quadrado. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $B_r$  e  $D_r$ . Em seguida determinaram-se as projeções da reta  $r$ . A reta  $r$  passa necessariamente pelo ponto **O** (o centro do quadrado), cujas projeções já são conhecidas. Assim, já temos um ponto para definir a reta  $r$  (em projeções) – falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto  $H'$  é o traço horizontal da reta  $r$  e é um ponto do traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_{\alpha}$ ). Assim,  $H'_r$  é um ponto de  $h_{\alpha_r}$  e o ponto  $H'$  tem-se situar sobre  $h_{\alpha}$ . Para se determinarem as projeções do ponto  $H'$  conduziu-se, por  $H'_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo  $X$  é  $H'_2$  (a projeção frontal do ponto  $H'$ ) e a projeção horizontal ponto  $H'$  ( $H'_1$ ) situa-se sobre o traço horizontal do plano ( $h_{\alpha}$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  – a reta  $r$  está definida (em projeções) por dois pontos (o ponto **O** e o ponto  $H'$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta.

Por fim, por  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ) é  $B_2$  (a projeção frontal do ponto **B**). A projeção horizontal do ponto **B** ( $B_1$ ) situa-se sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ). De forma semelhante, por  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ) é  $D_2$  (a projeção frontal do ponto **D**). A projeção horizontal do ponto **D** ( $D_1$ ) situa-se sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

A inversão do rebatimento do ponto **C** processou-se com o recurso à reta  $s$ , do plano  $\alpha$ , à qual o ponto **C** pertence – a reta  $s$  é a reta suporte da diagonal **[AC]** do quadrado. A reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $C_r$ . Em seguida determinaram-se as projeções da reta  $s$ . A reta  $s$  passa necessariamente pelo ponto **O**, cujas projeções já são conhecidas. Assim, já temos um ponto para definir a reta  $s$  (em projeções) – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $s$  passa necessariamente pelo ponto **O** (o centro do quadrado), cujas projeções também já são conhecidas, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $s$  (em projeções), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $s$ .

Por fim, por  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ) é  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**). A projeção horizontal do ponto **C** ( $C_1$ ) situa-se sobre  $s_1$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ).

A partir das projeções dos quatro vértices do quadrado (os pontos **A**, **B**, **C** e **D**) e, ainda, das projeções do vértice **V**, da pirâmide, os seus contornos aparentes.

### Determinação das projeções da pirâmide:

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BVDA]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>A<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de maior afastamento da pirâmide, é visível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. Em projeção frontal, a base **[ABCD]** é visível, bem como as faces laterais **[CDV]** e **[BCV]**. Já as faces laterais **[ABV]** e **[ADV]** são invisíveis, em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[AVBCD]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>V<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide pertencem ao contorno aparente horizontal. No entanto, as arestas laterais **[DV]** e **[CV]** são invisíveis, pois separam (cada uma delas) duas faces invisíveis em projeção horizontal – a aresta lateral **[DV]** separa as faces laterais **[ADV]** e **[CDV]** e a aresta lateral **[CV]** separa as faces laterais **[CDV]** e **[BCV]**. Já a aresta **[AB]**, da base, é visível, porque se situa na parte visível do sólido (os vértices **A** e **B** são os vértices de maior cota da pirâmide). A base **[ABCD]** e a face lateral **[ABV]** são as faces visíveis da pirâmide, em projeção horizontal.

### Traçado:

Os dados os traços do plano  $\alpha$  representaram-se a médio, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a forte, pois são o pedido. O quadrado **[ABCD]**, em rebatimento, representou-se a leve, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a leve, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado **[ABCD]**), bem como da reta  $f$  e da reta  $p$ .



## 534.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados – a reta  $r$  está definida por dois pontos (os pontos  $O$  e  $A$ ).

**Resolução:**

*Determinação dos traços do plano que contém a base inferior do prisma:*

Em primeiro lugar, há que determinar os traços do plano  $\psi$ . Começemos pelo traço frontal do plano ( $f_\psi$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $A$  é, imediatamente, o traço frontal da reta  $r$  (é o ponto da reta  $r$  que tem afastamento nulo), pelo que já temos um ponto para definir o traço frontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Uma vez que a reta  $r$  é uma reta de maior inclinação do plano  $\psi$ , sabe-se que a reta  $r$  é perpendicular ao traço frontal do plano (e a todas as retas frontais do plano), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $f_\psi - f_\psi$ , passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ) e é perpendicular a  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ). Assim,  $f_\psi$  (o traço frontal do plano  $\psi$ ) está definido por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (é perpendicular a  $r_2$ ).

Em seguida determinou-se o traço horizontal do plano ( $h_\psi$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da reta  $r$ , o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços do plano são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\psi - h_\psi$  (o traço horizontal do plano  $\psi$ ) está definido por dois pontos (o ponto  $H$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano)

*Determinação das projeções da base inferior do prisma:*

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $\psi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

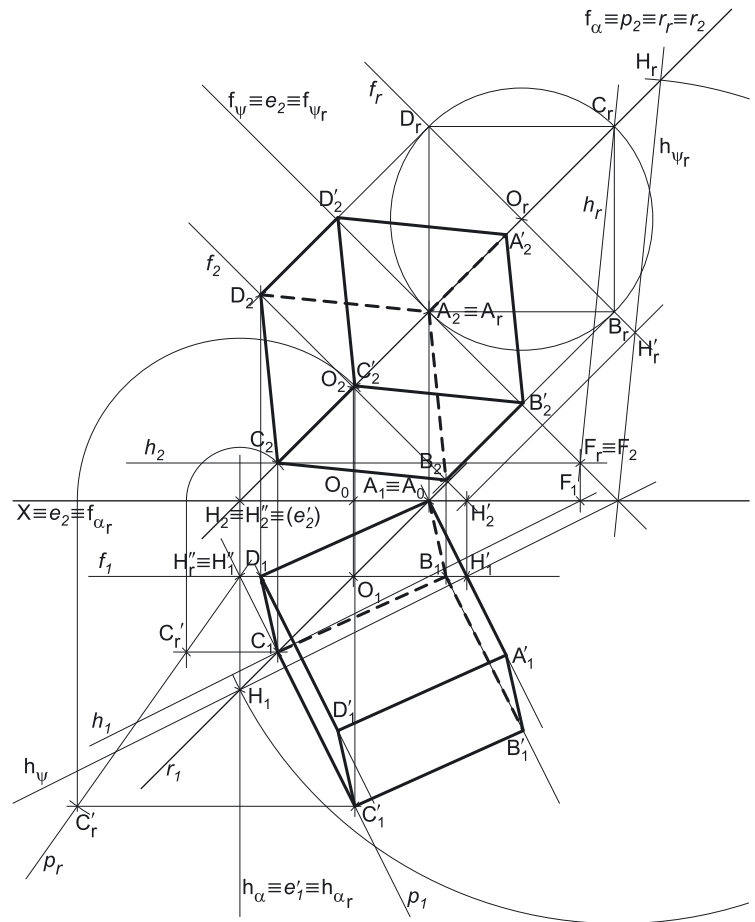
Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\psi$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $f_\psi \equiv e_2 \equiv f_{\psi r}$  ( $e_1$ , a projeção horizontal da charneira), situa-se no eixo  $X$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a  $f_\psi$ ).

O ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2$ . Em seguida, rebateu-se o traço horizontal do plano  $\psi$  ( $h_\psi$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $h_{\psi r}$  (o traço horizontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos traços do plano (que é um ponto da charneira e, por isso é fixo – roda sobre si próprio). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $r$ ), que é um ponto de  $h_\psi$ . Para rebater o ponto  $H$  conduziu-se, por  $H_2$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $H$ ). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano  $\psi$  e com raio até  $H_1$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $H_2$ , determinando-se  $H_r$  (o ponto  $H$  rebatido). Em seguida desenhou-se  $h_{\psi r}$  (o traço horizontal do plano  $\psi$  rebatido), passando por  $H_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $h_{\psi r}$  está definido por dois pontos).

Em seguida desenhou-se a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), que está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $H_r$ ). Uma vez que a reta  $r$  é perpendicular ao traço frontal do plano  $\psi$  ( $f_\psi$ ), a reta  $r_r$  fica coincidente com  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

Em seguida há que rebater o ponto  $O$ , o que se processa rebatendo uma reta a que o ponto  $O$  pertença. O ponto  $O$  pertence à reta  $r$ , mas, uma vez que a reta  $r_r$  é perpendicular a  $f_\psi$  (o traço frontal do plano  $\psi$ ), a utilidade da reta  $r$  para rebater o ponto  $O$  é nula. Assim, há que recorrer a outra reta do plano  $\psi$  a que o ponto  $O$  pertença. Nesse sentido, recorreu-se a uma reta frontal (de frente), passando pelo ponto  $O$  – a reta  $f$ , que está definida por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\psi$  – é paralela a  $f_\psi$ ).

Agora, há que rebater a reta  $f$  e, para tal, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos uma direção para definir a reta  $f_r$ , que é a direção das retas frontais do plano –  $f_r$  (a reta  $f$  rebatida) é necessariamente paralela a  $f_{\psi r}$ . Falta-nos um ponto, para definir  $f_r$ . Nesse sentido, seguida determinou-se o ponto  $H'$ , o traço horizontal da reta  $f$ , que se situa sobre  $h_\psi$  (o traço horizontal do plano  $\psi$ ) e efetuou-se o seu rebatimento. Para tal conduziu-se, por  $H'_2$  (a projeção frontal do ponto  $H'$ ), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $H'_r$  (o ponto  $H$  rebatido) sobre  $h_{\psi r}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $f_r - f_r$ , está, assim, definida por um ponto (o ponto  $H'_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $f_{\psi r}$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Uma vez que o ponto **O** é, na prática, o ponto de concorrência das retas **r** e **f**, o ponto **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** rebatido) é o ponto de concorrência das retas **r<sub>r</sub>** e **f<sub>r</sub>** (as retas **r** e **f** rebatidas). Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>r</sub>** e com raio até **A<sub>r</sub>**, desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado (em verdadeira grandeza) e efetuou-se a construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu determinar os pontos **B<sub>r</sub>**, **C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>** (os outros três vértices do quadrado, em rebatimento). Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\psi$ , determinando-se as projeções dos pontos **B**, **C** e **D**.

*Inversão do rebatimento do plano  $\psi$  e determinação das projeções da base inferior do prisma:*

A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **D** processou-se com o recurso à reta **f**, a reta frontal (de frente) do plano  $\psi$  que nos permitiu rebater o ponto **O** e à qual os dois pontos pertencem – a reta **f** é a reta suporte da diagonal **[BD]** do quadrado e as suas projeções já são conhecidas.

Assim, por **B<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **f<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **f**) é **B<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **B**). A projeção horizontal do ponto **B** (**B<sub>1</sub>**) situa-se sobre **f<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **f**). De forma semelhante, por **D<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **f<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **f**) é **D<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **D**). A projeção horizontal do ponto **D** (**D<sub>1</sub>**) situa-se sobre **f<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **f**).

A inversão do rebatimento do ponto **C** processou-se com o recurso à reta **h**, uma reta horizontal (de nível) do plano  $\psi$ , à qual o ponto **C** pertence. A reta **h<sub>r</sub>** (a reta **h** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **C<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a **h<sub>ψr</sub>**). Em seguida determinaram-se as projeções da reta **h**, para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\psi$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta **h** – falta-nos um ponto para definir a reta **h** (em projeções).

O ponto **F** é o traço frontal da reta **h** e é um ponto do traço frontal do plano  $\psi$  (**f<sub>ψ</sub>**). Assim, **F<sub>r</sub>** é um ponto de **f<sub>ψr</sub>**, pelo que o ponto **F** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **F<sub>2</sub> ≡ F<sub>r</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **h** em projeções – a reta **h** está, assim, definida por um ponto (o ponto **F**) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\psi$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta **h**.

Note que o ponto **C** é, na prática, o ponto de concorrência das retas **r** e **h** – **C<sub>r</sub>** é o ponto de concorrência das retas **r<sub>r</sub>** e **h<sub>r</sub>**. Assim, as projeções do ponto **C** determinaram-se de forma direta.

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

*Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:*

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\psi$ . Consideremos a aresta lateral **[CC']**, por exemplo, considerando, nesse caso, que o ponto **C'** é o extremo superior da aresta lateral do prisma que tem um extremo em **C**. Nesse sentido, pelas projeções do ponto **C** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte da aresta lateral **[CC']**.

A reta **p** é ortogonal a **f<sub>ψ</sub>**, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta **p** e **f<sub>ψ</sub>** é direta em projeção frontal, pelo que **p<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **p**) é perpendicular a **f<sub>ψ</sub>**. A reta **p** é também ortogonal a **h<sub>ψ</sub>**, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta **p** e **h<sub>ψ</sub>** é direta em projeção horizontal, pelo que **p<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **p**) é perpendicular a **h<sub>ψ</sub>**. Assim, a reta **p** é ortogonal ao plano  $\psi$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\psi$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**).

A altura do prisma é a distância entre os planos das bases, que é medida numa reta ortogonal aos planos das bases (trata-se da **distância entre dois planos paralelos**). O segmento **[CC']** (a aresta lateral **[CC']**) está contido na reta **p**, pelo que o ponto **C'** é um ponto da reta **p**. Assim, a distância do ponto **C'** ao ponto **C** é a distância do ponto **C'** ao plano  $\psi$  e corresponde à distância entre os planos das duas bases, que se pode medir na reta **p**. A reta **p** não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento **[CC']** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante frontal da reta **p** para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano  $\alpha$  (o plano projetante frontal da reta **p**) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta **e'**), que é **h<sub>α</sub>** – tem-se imediatamente **h<sub>α</sub> ≡ e'<sub>1</sub> ≡ h<sub>αr</sub>**.

Em seguida efetuou-se o rebatimento do ponto **C**, determinando **C<sub>r</sub>'** – **C<sub>r</sub>'** é o ponto **C** rebatido no seu segundo rebatimento (**C** rebatido pelo rebatimento do plano  $\alpha$ ). Já temos um ponto para definir a reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao ponto **H''**, o traço horizontal da reta **p**. Assim, determinou-se o traço horizontal da reta (o ponto **H''**) que é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **H''<sub>r</sub> ≡ H''<sub>1</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **p<sub>r</sub>**. A reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida) passa por **C<sub>r</sub>'** e por **H''<sub>r</sub>** (está definida por dois pontos).

Sobre a reta **p<sub>r</sub>**, a partir de **C<sub>r</sub>'**, mediram-se os 5 cm (a altura do prisma, que é a distância do ponto **C'** ao plano  $\psi$ ) e determinou-se **C'<sub>r</sub>**. Em seguida inverteu-se o rebatimento do ponto **C'** e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta **p**.

Em seguida procedeu-se à determinação das projeções dos restantes vértices da base superior do sólido, tendo-se em conta que as arestas laterais do prisma são todas paralelas entre si (e ortogonais aos planos das bases) e, ainda, que as arestas da base superior são paralelas às arestas correspondentes da base inferior.

Assim, pelas projeções do ponto **B** (um dos vértices da base inferior, consecutivo a **C**) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral **[BB']** (que não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações) – o ponto **B'** é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **B** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto **C'** conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta **[C'B']** da base superior (que também não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice **B'**, da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

De forma idêntica, pelas projeções do ponto **D** (o outro vértice da base inferior que é consecutivo a **C**) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral **[DD']** (que, mais uma vez, não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações) – o ponto **D'** é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **D** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto **C'** conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta **[C'D']** da base superior (que também não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice **D'**, da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

Por fim, pelas projeções do ponto **A** (um dos vértices da base inferior consecutivo a **D**) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral **[AA']** (que, de novo, não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações) – o ponto **A'** é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **A** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto **D'** conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta **[D'A']** da base superior (que também não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice **A'**, da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

#### Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos oito vértices do prisma (os vértices **A, B, C e D**, da base inferior, e os vértices **A', B', C' e D'**, da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BCDD'A'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice **A** e o vértice **C'**. O vértice **A**, por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base inferior, e a aresta lateral **[AA']**. O vértice **C'**, por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[B'C']** e **[C'D']**, da base superior, e a aresta lateral **[CC']**. Note que, em projeção frontal, a base superior (a base **[A'B'C'D']**) é visível, bem como as faces laterais **[BB'C'C]** e **[CC'D'D]**. A base inferior (a base **[ABCD]**) e as faces laterais **[AA'B'B]** e **[AA'D'D]** são invisíveis, em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[AA'B'C'D]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – o vértice **B** e o vértice **D'**. O vértice **B**, por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base inferior, e a aresta lateral **[BB']**. O vértice **D'**, por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[C'D']** e **[A'D']**, da base superior, e a aresta lateral **[DD']**. Note que, em projeção horizontal, a base superior (a base **[A'B'C'D']**) é visível, bem como as faces laterais **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]**. A base inferior (a base **[ABCD]**) e as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]** são invisíveis, em projeção horizontal.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta **r**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\psi$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado **[ABCD]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\psi$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado **[ABCD]**), o plano  $\alpha$  e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **C'**), bem como todos os traçados que nos permitiram determinar os restantes vértices da base superior do sólido.

## 535.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\lambda$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida determinaram-se as projeções dos pontos **R** e **S**, pertencentes ao plano  $\lambda$ . Os pontos **R** e **S**, para pertencerem ao plano  $\lambda$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **R** tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_\lambda$  (o traço horizontal do plano  $\lambda$ ) – o ponto **R** é o ponto de  $h_\lambda$  que tem 4 cm de afastamento ( $h_\lambda$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

A reta **h** é a reta horizontal (de nível) do plano  $\lambda$ , com 3 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **S**. A reta **h** está definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\lambda$ ). O ponto **S** é o ponto da reta **h** que tem 3 cm de afastamento.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da base inferior do prisma:

O plano que contém o triângulo **[RST]** (o plano  $\lambda$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[RST]** (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\lambda$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\lambda \equiv e_j \equiv h_{\lambda_r}$  ( $e_j$ , a projeção frontal da charneira), situa-se no eixo **X**. Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_{\lambda_r}$ ).

O ponto **R** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $R_r \equiv R_1$ . Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\lambda$  ( $f_\lambda$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\lambda_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos traços do plano (que é um ponto da charneira e, por isso é fixo – roda sobre si próprio). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto **F** (o traço frontal da reta **h**), que é um ponto de  $f_\lambda$ . Para rebater o ponto **F** conduziu-se, por **F**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **F**). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano  $\lambda$  e com raio até **F**, desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por **F**, determinando-se **F<sub>r</sub>** (o ponto **F** rebatido). Em seguida desenhou-se  $f_{\lambda_r}$  (o traço frontal do plano  $\lambda$  rebatido), passando por **F<sub>r</sub>** e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $f_{\lambda_r}$  está definido por dois pontos).

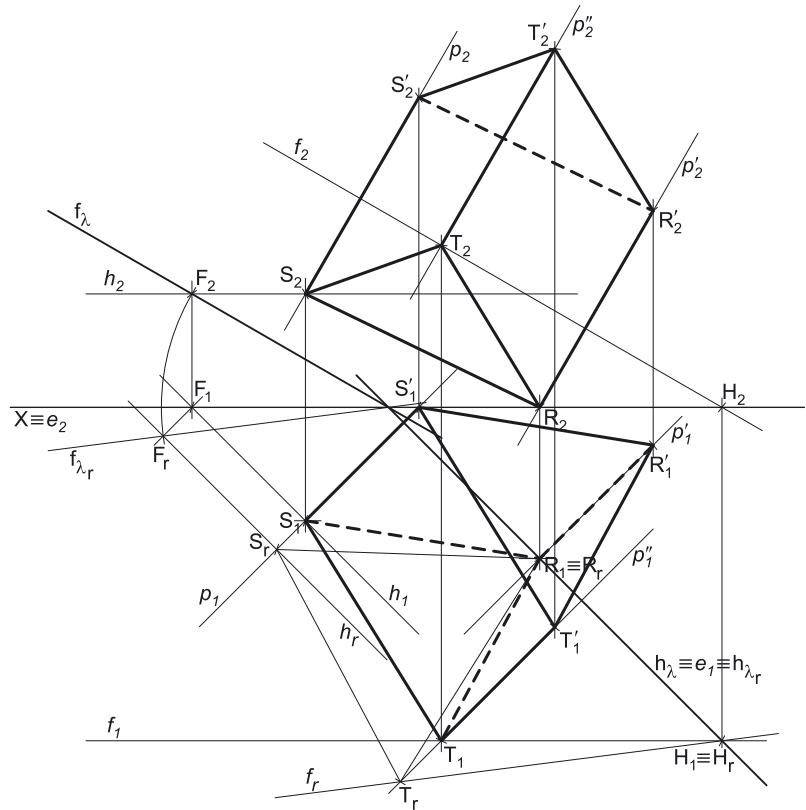
Em seguida há que rebater o ponto **S**, o que se processa rebatendo uma reta a que o ponto **S** pertença – a reta **h** neste caso. Para definir a reta  $h_r$  (a reta **h** rebatida) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $h_r$  – o ponto **F<sub>r</sub>**. Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta  $h_r$ . A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\lambda$ , pelo que é paralela ao traço horizontal do plano ( $h_\lambda$ ), o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $h_r$ , que é a direção das retas horizontais do plano –  $h_r$  (a reta **h** rebatida) é necessariamente paralela a  $h_{\lambda_r}$ . A reta  $h_r$  está, assim, definida por um ponto (o ponto **F<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a  $h_{\lambda_r}$ ).

Em seguida, conduziu-se, por **S<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **S**), uma perpendicular à charneira (que é  $h_r$ ) e que corresponde ao plano ortogonal à charneira do rebatimento que contém o arco do rebatimento do ponto **S** – o ponto **S<sub>r</sub>** (o ponto **S** rebatido) é o ponto de interseção da reta  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por **S<sub>1</sub>**.

A partir dos pontos **R<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, construiu-se o triângulo **[RST]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o terceiro vértice do polígono (em rebatimento) – o ponto **T<sub>r</sub>**. Note que se garantiu que o triângulo se situa no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro (para que o prisma se situe no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro). Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\lambda$ , determinando-se as projeções do ponto **T**.

#### Inversão do rebatimento do plano $\lambda$ e determinação das projeções da base inferior do prisma:

A inversão do rebatimento do ponto **T** processou-se com o recurso à reta **f**, uma reta frontal (de frente) do plano  $\lambda$ , à qual o ponto **T** pertence. A reta **f<sub>r</sub>** (a reta **f** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **T<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a  $f_{\lambda_r}$ ). Em seguida determinaram-se as projeções da reta **f**, para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\lambda$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta **f** – falta-nos um ponto para definir a reta **f** (em projeções).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **H** é o traço horizontal da reta **f** e é um ponto do traço horizontal do plano  $\lambda$  ( $h_\lambda$ ). Assim,  $H_f$  é um ponto de  $h_{\lambda, f}$ , pelo que o ponto **H** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_1 \equiv H_f$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **f** em projeções – a reta **f** está, assim, definida por um ponto (o ponto **H**) e uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\lambda$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta **f**.

Por fim, pelo ponto **T<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento). O ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f_1$  (a projeção horizontal da reta **f**) é **T<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **T**) – a projeção frontal do ponto **T** (**T<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta **f**).

A partir das projeções dos três pontos (**R**, **S** e **T**), desenharam-se as projeções do triângulo [**RST**].

#### Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\lambda$ . Tendo em conta que o enunciado refere, expressamente, que o vértice **S'** (o extremo superior da aresta lateral [**SS'**]) é um ponto do Plano Frontal de Projeção, considerou-se a aresta lateral [**SS'**]. Assim, pelas projeções do ponto **S** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte da aresta lateral [**SS'**].

A reta **p** é ortogonal a  $f_\lambda$ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta **p** e  $f_\lambda$  é direta em projeção frontal, pelo que  $p_2$  (a projeção frontal da reta **p**) é perpendicular a  $f_\lambda$ . A reta **p** é também ortogonal a  $h_\lambda$ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta **p** e  $h_\lambda$  é direta em projeção horizontal, pelo que  $p_1$  (a projeção horizontal da reta **p**) é perpendicular a  $h_\lambda$ . Assim, a reta **p** é ortogonal ao plano  $\lambda$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\lambda$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**).

O ponto **S'** é, então o traço frontal da reta **p** (o ponto de interseção da reta **p** com o Plano Frontal de Projeção), pelo que as suas projeções se determinaram de forma direta. Em seguida procedeu-se à determinação das projeções dos restantes vértices da base superior do sólido, tendo-se em conta que as arestas laterais do prisma são todas paralelas entre si (e ortogonais aos planos das bases) e, ainda, que as arestas da base superior são paralelas às arestas correspondentes da base inferior.

Assim, pelas projeções do ponto **R** (outro dos vértices da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral [**RR'**] (a reta  $p'$ ) – o ponto **R'** é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **R** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto **S'** conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta [**R'S'**] da base superior (que não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice **R'**, da base superior, é o ponto de concorrência da reta  $p'$  com a reta suporte da aresta [**R'S'**].

De forma idêntica, pelas projeções do ponto **T** (o outro vértice da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral [**TT'**] (a reta  $p''$ ) – o ponto **T'** é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **T** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto **S'** conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta [**S'T'**] da base superior (que não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice **T'**, da base superior, é o ponto de concorrência da reta  $p''$  com a reta suporte da aresta [**S'T'**].

#### Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos seis vértices do prisma (os vértices **R**, **S** e **T**, da base inferior, e os vértices **R'**, **S'** e **T'**, da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada [**RSS'T'R'**], cuja projeção frontal é o polígono [**R<sub>2</sub>S<sub>2</sub>S'<sub>2</sub>T'<sub>2</sub>R'<sub>2</sub>**]. Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **T**. O vértice **T**, por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [**RT**] e [**ST**], da base inferior, bem como a aresta lateral [**TT'**]. Note que, em projeção frontal, a base superior (a base [**R'S'T'**]) é **invisível**, bem como a face lateral [**RR'S'S**]. Nesse sentido, a aresta [**R'S'**] da base superior é invisível (em projeção frontal), pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal. A base inferior (a base [**RST**]) e as faces laterais [**RR'T'T**] e [**SS'T'T**] são **visíveis**, em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada [**STT'R'S'**], cuja projeção horizontal é o polígono [**S<sub>1</sub>T<sub>1</sub>T'<sub>1</sub>R'<sub>1</sub>S'<sub>1</sub>**]. Em projeção horizontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **R**. O vértice **R**, por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [**RS**] e [**RT**], da base inferior, e a aresta lateral [**RR'**]. Note que, em projeção horizontal, a base superior (a base [**R'S'T'**]) é **visível**, bem como a face lateral [**SS'T'T**]. Nesse sentido, a aresta [**S'T'**] da base superior é visível (em projeção horizontal), pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal. A base inferior (a base [**RST**]) e as faces laterais [**RR'S'S**] e [**RR'T'T**] são **invisíveis**, em projeção horizontal.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\lambda$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo [**RST**], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\lambda$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo [**RST**]), bem como todos os traçados que nos permitiram determinar os vértices da base superior do sólido (nomeadamente as retas  $p$ ,  $p'$  e  $p''$ ).

## 536.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\gamma$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais a  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

Em seguida determinaram-se as projeções do ponto **O**, pertencente ao plano  $\gamma$  – o ponto **O** tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** em relação ao plano  $\gamma$  (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\gamma$ ).

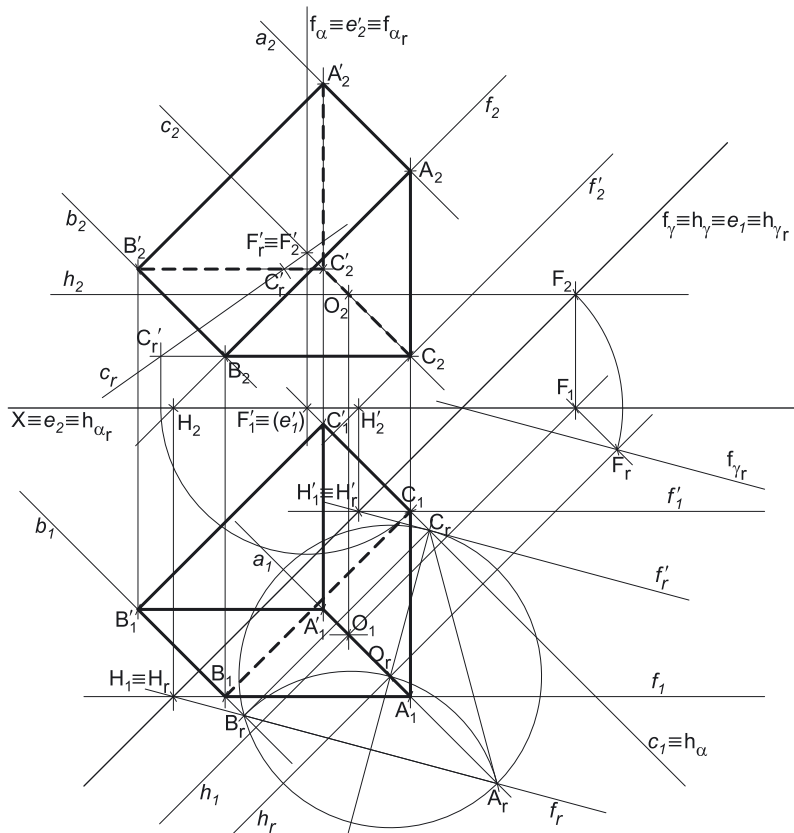
A reta **h** é a reta horizontal (de nível) do plano  $\gamma$ , com 3 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **O**. A reta **h** está definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\gamma$ ). O ponto **O** é o ponto da reta **h** que tem 6 cm de afastamento.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da base inferior do prisma:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Frontal Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{h}_\gamma \equiv \mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{h}_\gamma$  ( $\mathbf{e}_2$ , a projeção frontal da charneira), situa-se no eixo **X**. Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $\mathbf{h}_\gamma$ ).



Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\gamma$  ( $\mathbf{f}_\gamma$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $\mathbf{f}_{\gamma_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos traços do plano (que é um ponto da charneira e, por isso é fixo – roda sobre si próprio). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto **F** (o traço frontal da reta **h**), que é um ponto de  $\mathbf{f}_\gamma$ . Para rebater o ponto **F** conduziu-se, por  $\mathbf{F}_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **F**). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano  $\gamma$  e com raio até  $\mathbf{F}_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $\mathbf{F}_1$ , determinando-se  $\mathbf{F}_r$  (o ponto **F** rebatido). Em seguida desenhou-se  $\mathbf{f}_{\gamma_r}$  (o traço frontal do plano  $\gamma$  rebatido), passando por  $\mathbf{F}_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $\mathbf{f}_{\gamma_r}$  está definido por dois pontos).

Em seguida há que rebater o ponto **O**, o que se processa rebatendo uma reta a que o ponto **O** pertença – a reta **h** neste caso. Para definir a reta  $\mathbf{h}_r$  (a reta **h** rebatida) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $\mathbf{h}_r$  – o ponto  $\mathbf{F}_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta  $\mathbf{h}_r$ . A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\gamma$ , pelo que é paralela ao traço horizontal do plano ( $\mathbf{h}_\gamma$ ), o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $\mathbf{h}_r$ , que é a direção das retas horizontais do plano –  $\mathbf{h}_r$  (a reta **h** rebatida) é necessariamente paralela a  $\mathbf{h}_{\gamma_r}$ . A reta  $\mathbf{h}_r$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $\mathbf{F}_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $\mathbf{h}_{\gamma_r}$ ).

Em seguida, conduziu-se, por  $\mathbf{O}_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**), uma perpendicular à charneira (que é  $\mathbf{h}_\gamma$ ) e que corresponde ao plano ortogonal à charneira do rebatimento que contém o arco do rebatimento do ponto **O** – o ponto  $\mathbf{O}_r$  (o ponto **O** rebatido) é o ponto de interseção da reta  $\mathbf{h}_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $\mathbf{O}_1$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $\mathbf{O}_r$  e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao triângulo (em verdadeira grandeza) e efetuou-se a construção da figura, inscrita na circunferência e respeitando os dados. Uma vez que o enunciado refere, expressamente, que o lado **[AB]**, do triângulo, é frontal (de frente), sabe-se que esse lado é paralelo a  $\mathbf{f}_\gamma$  (o traço frontal do plano  $\gamma$ ).

Assim, construiu-se o triângulo **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>C<sub>r</sub>]** em verdadeira grandeza, garantindo-se que o lado **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** é paralelo a  $\mathbf{f}_{\gamma_r}$  e que **A<sub>r</sub>** é o vértice de maior cota do polígono. Note que existem duas hipóteses para construir o triângulo (inscrito na circunferência) de forma que o lado **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** seja paralelo a  $\mathbf{f}_{\gamma_r}$ , mas só a situação apresentada na resolução garante, **em simultâneo**, que o ponto **A** é o vértice de maior cota do triângulo (na outra situação, existiriam dois vértices de maior cota).

Após a determinação dos pontos **A<sub>r</sub>**, **B<sub>r</sub>**, e **C<sub>r</sub>** (os três vértices do triângulo, em rebatimento), determinaram-se as projeções do triângulo, invertendo-se o rebatimento do plano  $\gamma$  (e determinando-se as projeções dos pontos **A**, **B** e **C**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Inversão do rebatimento do plano  $\gamma$  e determinação das projeções da base inferior do prisma:*

A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **D** processou-se com o recurso à reta  $f$ , a reta frontal (de frente) do plano  $\gamma$  que é a reta suporte do lado **[AB]**. A reta  $f_r$  (a reta  $f$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $B_r$ ) e, ainda, por uma direção (é paralela a  $f_r$ ). Em seguida determinaram-se as projeções da reta  $f$ , para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\gamma$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta  $f$  – falta-nos um ponto para definir a reta  $f$  (em projeções).

O ponto **H** é o traço horizontal da reta  $f$  e é um ponto do traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), pelo que  $H_r$  é um ponto de  $h_{r\gamma}$ . O ponto **H** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_1 \equiv H_r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $f$  em projeções – a reta  $f$  está, assim, definida por um ponto (o ponto **H**) e uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\gamma$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $f$ .

Por fim, por  $A_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f_r$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ) é  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**). A projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ) situa-se sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). De forma semelhante, por  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f_r$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ) é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**). A projeção frontal do ponto **B** ( $B_2$ ) situa-se sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ).

A inversão do rebatimento do ponto **C** e a determinação das suas projeções processou-se de forma idêntica à exposta para os pontos **A** e **B**, e também, com o recurso a uma reta frontal (de frente) do plano  $\gamma$  – a reta  $f'$  foi a reta frontal (de frente) do plano  $\gamma$  a que se recorreu, para inverter o rebatimento do ponto **C**. O ponto **H'** é o traço horizontal da reta  $f'$ , que se situa igualmente na charneira.

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**. Note que, **nesta situação particular** (em função dos dados do exercício), o lado **[AC]** do triângulo é necessariamente de perfil, enquanto o seu lado **[BC]** é necessariamente horizontal (de nível).

*Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:*

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\gamma$ . Consideremos a aresta lateral **[CC']**, por exemplo, considerando, nesse caso, que o ponto **C'** é o extremo superior da aresta lateral do prisma que tem um extremo em **C**. Nesse sentido, pelas projeções do ponto **C** conduziram-se as projeções da reta  $c$ , a reta suporte da aresta lateral **[CC']**.

A reta  $c$  é ortogonal a  $f_\gamma$ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta  $c$  e  $f_\gamma$  é direta em projeção frontal, pelo que  $c_2$  (a projeção frontal da reta  $c$ ) é perpendicular a  $f_\gamma$ . A reta  $c$  é também ortogonal a  $h_\gamma$ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta  $c$  e  $h_\gamma$  é direta em projeção horizontal, pelo que  $c_1$  (a projeção horizontal da reta  $c$ ) é perpendicular a  $h_\gamma$ . Assim, a reta  $c$  é ortogonal ao plano  $\gamma$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\gamma$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**).

A altura do prisma é a distância entre os planos das bases, que é medida numa reta ortogonal aos planos das bases (trata-se da **distância entre dois planos paralelos**). O segmento **[CC']** (a aresta lateral **[CC']**) está contido na reta  $c$ , pelo que o ponto **C'** é um ponto da reta  $c$ . Assim, a distância do ponto **C'** ao ponto **C** é a distância do ponto **C'** ao plano  $\gamma$  e corresponde à distância entre os planos das duas bases, que se pode medir na reta  $c$ . A reta  $c$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento **[CC']** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da reta  $c$  para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano  $\alpha$  (o plano projetante horizontal da reta  $c$ ) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é  $f_\alpha$  – tem-se imediatamente  $f_\alpha \equiv e'_2 \equiv f_{\alpha r}$ .

Em seguida efetuou-se o rebatimento do ponto **C**, determinando  $C'_r - C'_r$  é o ponto **C** rebatido no seu segundo rebatimento (**C** rebatido pelo rebatimento do plano  $\alpha$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $c_r$  (a reta  $c$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao ponto **F'**, o traço frontal da reta  $c$ . Assim, determinou-se o traço frontal da reta (o ponto **F'**) que é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F'_r \equiv F'_2$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $c_r$ . A reta  $c_r$  (a reta  $c$  rebatida) passa por  $C'_r$  e por  $F'_r$  (está definida por dois pontos).

Sobre a reta  $c_r$ , a partir de  $C'_r$ , mediram-se os 4 cm (a altura do prisma, que é a distância do ponto **C'** ao plano  $\gamma$ ) e determinou-se  $C'_r$ . Em seguida inverteu-se o rebatimento do ponto **C'** e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta  $p$ . Note que se garantiu que o ponto **C'** se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro, porque, caso se tivessem medido os 4 cm noutra sentido, o ponto **C'** teria cota negativa e o prisma não se situaria no espaço do  $1^\circ$  Diedro.

Em seguida procedeu-se à determinação das projeções dos restantes vértices da base superior do sólido, tendo-se em conta que as arestas laterais do prisma são todas paralelas entre si (e ortogonais aos planos das bases) e, ainda, que as arestas da base superior são paralelas às arestas correspondentes da base inferior.

Assim, pelas projeções do ponto **A** (um dos vértices da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral **[AA']** (a reta  $a$ ) – o ponto **A'** é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **A** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto **C'** conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta **[A'C']** da base superior (que é de perfil). O vértice **A'**, da base superior, é o ponto de concorrência da reta  $a$  com a reta suporte da aresta **[A'C']**.

De forma idêntica, pelas projeções do ponto **B** (o terceiro vértice da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral **[BB']** (a reta  $b$ ) – o ponto **B'** é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **B** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto **C'** conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta **[B'C']** da base superior (que é horizontal). O vértice **B'**, da base superior, é o ponto de concorrência da reta  $b$  com a reta suporte da aresta **[B'C']**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos seis vértices do prisma (os vértices **A**, **B** e **C**, da base inferior, e os vértices **A'**, **B'** e **C'**, da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[AA'B'BC]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **C'**. O vértice **C'**, por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'C']** e **[B'C']**, da base superior, e a aresta lateral **[CC']**. Note que, em projeção frontal, a base inferior (a base **[A'B'C']**) é **visível**, bem como a face lateral **[AA'B'B]**, pelo que a aresta **[AB]**, da base inferior, é visível em projeção frontal (pois separa duas faces visíveis em projeção frontal). A base superior e as faces laterais **[AA'C'C]** e **[BB'C'C]** são **invisíveis**, em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ABB'C'C]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **A'**. O vértice **A'**, por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']** e **[A'C']**, da base superior, e a aresta lateral **[AA']**. Note que, em projeção horizontal, a base superior (a base **[A'B'C']**) é **visível**, bem como as faces laterais **[AA'B'B]** e **[AA'C'C]**. A base inferior (a base **[ABC]**) e a face lateral **[BB'C'C]** são **invisíveis**, em projeção horizontal, pelo que a aresta **[BC]**, da base inferior, é invisível em projeção horizontal (pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal).

## Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\gamma$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[ABC]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo **[ABC]**), das retas **a**, **b** e **c**, do plano  $\alpha$  e de todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **C'**), bem como todos os traçados que nos permitiram determinar os restantes vértices da base superior do sólido.

## 537.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelos seus traços, bem como o ponto **B'**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida determinaram-se as projeções do ponto **A**, pertencente ao plano  $\delta$  – o ponto **A** tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** em relação ao plano  $\delta$  (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\delta$ ).

A reta **h** é a reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , com 3 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **A**. A reta **h** está definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ). O ponto **A** é o ponto da reta **h** que tem 6 cm de afastamento.

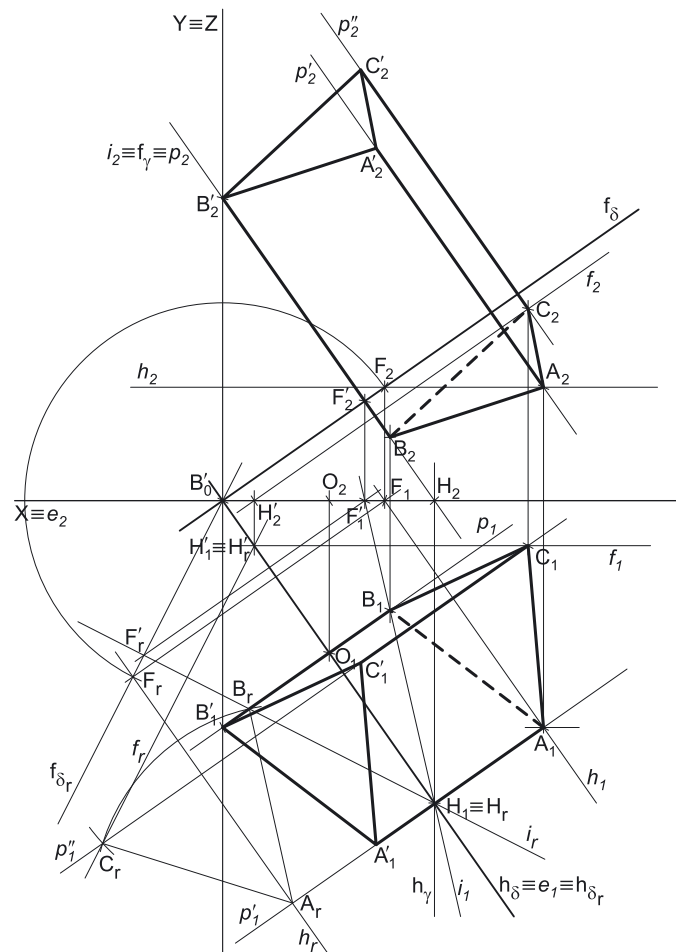
### Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, o único dado, no enunciado, respeitante ao triângulo **[ABC]**, é o vértice **A** – não é possível a construção do triângulo **[ABC]**, apenas a partir do vértice **A**, por falta de dados (não nos é dado o lado do triângulo, nem o centro da circunferência circunscrita à figura nem qualquer outro vértice do triângulo). Assim, é necessário determinar qualquer outro elemento do triângulo, para que seja possível prosseguir com a resolução.

### Determinação dos elementos necessários à construção da base inferior do prisma:

Os dados do enunciado referem-se, ainda, a um vértice da base superior (o vértice **B'**), estando igualmente expresso que se trata de um **prisma regular**. Nesse sentido, **as arestas laterais prisma são ortogonais aos planos das bases** (bem como o eixo do prisma). Nesse sentido, o vértice **B** da base **[ABC]** (o vértice inferior da aresta lateral **[BB']**) é necessariamente o ponto do plano  $\delta$  (o plano que contém a base **[ABC]**) e, ainda, um ponto da reta suporte da aresta lateral **[BB']**. Assim, o ponto **B** é o ponto de interseção da reta suporte da aresta lateral **[BB']** do prisma com o plano  $\delta$  (o plano que contém a base **[ABC]** do sólido).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, pelo ponto  $B'$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\delta$ . A reta  $p$ , para ser ortogonal ao plano  $\delta$ , tem de ser ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$ , retas essas que podem ser os traços do plano (os traços do plano são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ ). A reta  $p$  é ortogonal a  $f_\delta$ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_\delta$  é direta em projeção frontal, pelo que  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ) é perpendicular a  $f_\delta$ . A reta  $p$  é também ortogonal a  $h_\delta$ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_\delta$  é direta em projeção horizontal, pelo que  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ) é perpendicular a  $h_\delta$ . Assim, a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\delta$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**).

Há, agora, que determinar o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$ , que será o vértice  $B$  da base inferior do prisma. Tendo em conta que nem a reta  $p$  nem o plano  $\delta$  são projetantes, é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas. **1.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **2.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **3.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

1. Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\gamma$ , que é o plano projetante frontal da reta  $p$ .
2. Em seguida determinou-se a reta de interseção entre os dois planos – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\delta$  (o plano dado) e está definida por dois pontos – os pontos  $F'$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projeção).
3. O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\delta$  – o ponto  $B$ . O ponto  $B$  é, assim, outro vértice do triângulo  $[ABC]$ , pelo que já é possível prosseguir com a construção do triângulo. Como atrás se havia referido, o plano que contém o triângulo (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

#### Determinação das projeções da base inferior do prisma:

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\delta$  para o Plano Frontal Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\delta \equiv e_1 \equiv h_{\delta_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira), situa-se no eixo  $X$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\delta$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\delta_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos traços do plano (que é um ponto da charneira e, por isso é fixo – roda sobre si próprio). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $h$ ), que é um ponto de  $f_\delta$ . Para rebater o ponto  $F$  conduziu-se, por  $F_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano  $\delta$  e com raio até  $F_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , determinando-se  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Em seguida desenhou-se  $f_{\delta_r}$  (o traço frontal do plano  $\delta$  rebatido), passando por  $F_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $f_{\delta_r}$  está definido por dois pontos).

Em seguida, há que rebater o ponto  $A$ , o que se processa rebatendo uma reta a que o ponto  $A$  pertença – a reta  $h$  neste caso. Para definir a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $h_r$  – o ponto  $F_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta  $h_r$ . A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\gamma$ , pelo que é paralela ao traço horizontal do plano ( $h_\gamma$ ), o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $h_r$ , que é a direção das retas horizontais do plano –  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) é necessariamente paralela a  $h_{\delta_r}$ . A reta  $h_r$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\delta_r}$ ).

Depois, conduziu-se, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), uma perpendicular à charneira (que é  $h_\delta$ ) e que corresponde ao plano ortogonal à charneira do rebatimento que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$  – o ponto  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido) é o ponto de interseção da reta  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ .

Há, ainda, que rebater o ponto  $B$ , o que se processa rebatendo uma reta a que o ponto  $B$  pertença – a reta  $i$ , por exemplo (a reta  $i$  e uma reta do plano  $\delta$  à qual o ponto  $B$  pertence). Para definir a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $i$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_r \equiv H_1$ . Já temos um ponto para definir a reta  $i_r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, optou-se por rebater o ponto  $F'$ , o seu traço frontal, que é um ponto de  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ). Assim, por  $F'_1$  (a projeção frontal do ponto  $F'$ ), conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $F'_r$  (o ponto  $F'$  rebatido) sobre  $f_{\delta_r}$  (o traço frontal do plano  $\delta$  em rebatimento). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i_r$  – a reta  $i_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $H_r$  e  $F'_r$ ).

Depois, conduziu-se, por  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ), uma perpendicular à charneira (que é  $h_\delta$ ) e que corresponde ao plano ortogonal à charneira do rebatimento que contém o arco do rebatimento do ponto  $B$  – o ponto  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido) é o ponto de interseção da reta  $i_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ .

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o terceiro vértice do polígono, em rebatimento – o ponto  $C_r$ . Note que se garantiu que o triângulo se situa, na totalidade, no espaço do  $1^a$  Diedro. Em seguida, há que inverter o rebatimento do plano  $\delta$ , de forma a se determinarem as projeções do ponto  $C$ .

#### Inversão do rebatimento do plano $\gamma$ e determinação das projeções da base inferior do prisma:

A inversão do rebatimento do ponto  $C$  processou-se com o recurso à reta  $f$ , uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$  que. A reta  $f_r$  (a reta  $f$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $C_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $f_{\delta_r}$ ). Em seguida determinaram-se as projeções da reta  $f$ , para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta  $f$  – falta-nos um ponto para definir a reta  $f$  (em projeções).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto  $H'$  é o traço horizontal da reta  $f$  e é um ponto do traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), pelo que  $H'_r$  é um ponto de  $h_\delta$ . O ponto  $H'$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H'_1 \equiv H'_r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $f$  em projeções – a reta  $f$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $H'$ ) e uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $f$ .

Por fim, por  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ). A projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ) situa-se sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ).

A partir das projeções dos três pontos ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ), desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .

*Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:*

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que todas as arestas laterais do sólido são **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\delta$ , à semelhança do referido para a aresta lateral  $[BB']$  (que está contida na reta  $p$ ).

Nesse sentido, a determinação das projeções dos restantes vértices da base superior do sólido teve em conta que as arestas laterais do prisma são todas paralelas entre si (e ortogonais aos planos das bases) e, ainda, que as arestas da base superior são paralelas às arestas correspondentes da base inferior.

Assim, pelas projeções do ponto  $A$  (um dos vértices da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[AA']$  (a reta  $p'$ ) – o ponto  $A'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $A$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $B'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[A'B']$  da base superior (que não se identificou). O vértice  $A'$ , da base superior, é o ponto de concorrência da reta  $p'$  com a reta suporte da aresta  $[A'B']$ .

De forma idêntica, pelas projeções do ponto  $C$  (o terceiro vértice da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[CC']$  (a reta  $p''$ ) – o ponto  $C'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $C$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $B'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[B'C']$  da base superior (que não se identificou). O vértice  $C'$ , da base superior, é o ponto de concorrência da reta  $p''$  com a reta suporte da aresta  $[B'C']$ .

*Determinação das projeções do prisma:*

A partir das projeções dos seis vértices do prisma (os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , da base inferior, e os vértices  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABB'C'C]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2B'_2C'_2C_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice  $A'$ . O vértice  $A'$ , por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'C']$  e  $[A'B']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[AA']$ . Note que, em projeção frontal, a base inferior (a base  $[ABC]$ ) é **invisível**, bem como a face lateral  $[BB'C'C]$ , pelo que a aresta  $[BC]$ , da base inferior, é invisível em projeção frontal (pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal). A base superior (a base  $[A'B'C']$ ) e as faces laterais  $[AA'C'C]$  e  $[AA'B'B]$  são **visíveis**, em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[AA'B'BC]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1A'_1B'_1B_1C_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice  $C'$ . O vértice  $C'$ , por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'C']$  e  $[B'C']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[CC']$ . Note que, em projeção horizontal, a base superior (a base  $[A'B'C']$ ) é **visível**, bem como as faces laterais  $[AA'C'C]$  e  $[BB'C'C]$ . A base inferior (a base  $[ABC]$ ) e a face lateral  $[AA'B'B]$  são **invisíveis**, em projeção horizontal, pelo que a aresta  $[AB]$ , da base inferior, é invisível em projeção horizontal (pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal).

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\delta$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\delta$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo  $[ABC]$ ), das retas  $p$ ,  $p'$  e  $p''$ , do plano  $\gamma$  e de todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice  $C'$ ), bem como todos os traçados que nos permitiram determinar os restantes vértices da base superior do sólido.

## 538.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

**Resolução:***Determinação dos traços do plano que contém o quadrado [ABCD]:*

Em primeiro lugar, há que determinar os traços do plano que contém a base inferior do prisma, que não são dados – salienta-se que se considerou ser o plano  $\alpha$ , pelo facto de o enunciado ser omissivo. Sabe-se, apenas, que o prisma é um **prisma regular**, pelo que o seu **eixo é ortogonal aos planos** que contém as bases. Nesse sentido, sabe-se imediatamente que o plano  $\alpha$  é ortogonal à reta  $r$ . Por outro lado, uma vez que o ponto  $O$  é o centro da base, o ponto  $O$  é, imediatamente, um ponto do plano  $\alpha$ .

Assim, há que determinar os traços do plano que é ortogonal à reta  $r$  e que passa pelo ponto  $O$ . O plano  $\alpha$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $r$ . Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $O$ , o ponto  $O$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , ou seja, o ponto  $O$  tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\alpha$ . Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $O$ , uma reta que pertença ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $r$ . Ora, as únicas situações em que a ortogonalidade entre retas é direta em projeções, são as situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção.

Assim, conduziu-se, pelo ponto  $O$ , uma reta horizontal (de nível)  $h$ , ortogonal à reta  $r$  – uma vez que a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta  $h$  e a reta  $r$  é direta em projeção horizontal, ou seja,  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e é perpendicular a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

Para definir o plano  $\alpha$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\alpha$  – uma reta que seja concorrente com a reta  $h$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $r$ . Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , pois é a única situação em que é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $r$  e uma reta **concorrente** com a reta  $h$ . Essa reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  pode ser, por exemplo, o próprio traço frontal do plano –  $f_\alpha$ . Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $h$  (o ponto  $F$ ) e desenhou-se  $f_\alpha$ , ortogonal à reta  $r$ . O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é uma reta frontal (paralela ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a ortogonalidade entre  $f_\alpha$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal. Assim, por  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ), conduziu-se  $f_\alpha$ , perpendicular a  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

O plano  $\alpha$  está definido por duas retas concorrentes ortogonais à reta  $r$  – a reta  $h$  e  $f_\alpha$  (o seu traço frontal), concorrentes no ponto  $F$ . Já se garantiu a ortogonalidade do plano  $\alpha$  em relação à reta  $r$ . Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo à reta  $h$ , pois retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal do plano com cota nula).

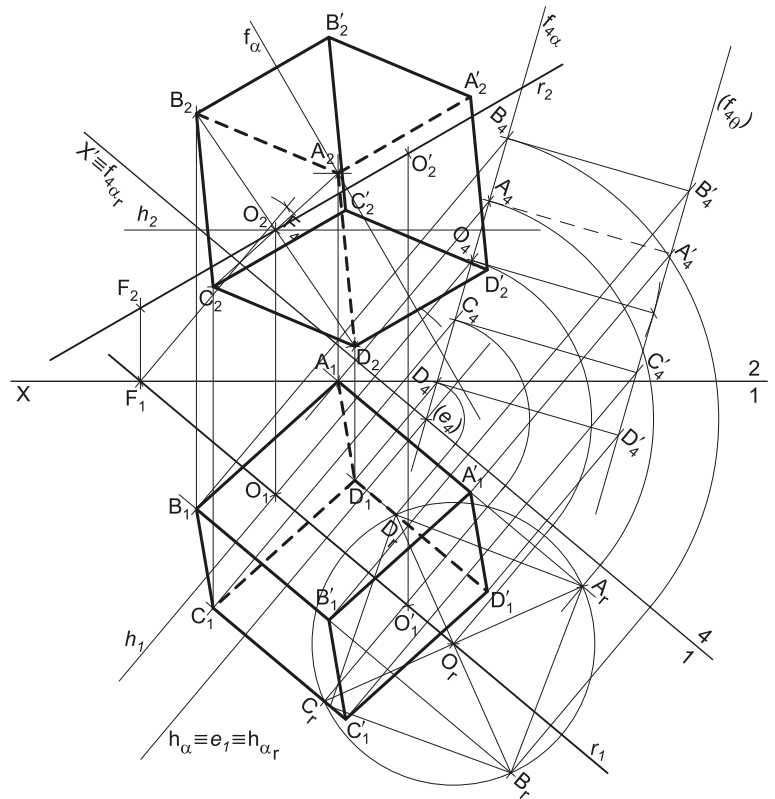
O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, é o plano que é ortogonal à reta  $r$  e que contém o ponto  $O$ . Assim, o plano  $\alpha$  é o plano que contém a base inferior do prisma.

*Determinação das projeções da base inferior do prisma:*

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $A$ , pertencentes ao plano  $\alpha$ , em função dos dados. O ponto  $A$ , para pertencer ao plano  $\alpha$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). O ponto  $A$  tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto  $A$  é o ponto de  $f_\alpha$  que tem 5,5 cm de cota ( $f_\alpha$  é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo).

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado [ABCD] (a face inferior do cubo) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Embora se pudesse ter optado por rebater o plano  $\alpha$  diretamente (à semelhança das situações anteriores), nesta situação optou-se por uma situação diferente – optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante e, em seguida, rebater o plano  $\alpha$  **como um plano projetante**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\alpha$ , o que nos permite transformar o plano oblíquo num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **O** e **A** no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\alpha$ . **O<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **O** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **O<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **O<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 4 cm – a cota de **O**). **A<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **A<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 5,5 cm – a cota de **A**).

O novo traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha_4}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, pelo que o novo traço frontal do plano  $\alpha$  (o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4**) tem necessariamente de passar por **O<sub>4</sub>** e **A<sub>4</sub>** (as novas projeções frontais dos pontos **O** e **A**, respetivamente). Assim,  $f_{\alpha_4}$  está definido, na prática, por três pontos – o ponto **O<sub>4</sub>**, o ponto **A<sub>4</sub>** e, ainda, o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção, como um plano projetante. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_1$ , a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo **X'**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

Procedeu-se ao rebatimento dos pontos **O** e **A**, desenhando as projeções frontais (no **plano 4**) dos arcos dos respetivos rebatimentos (em verdadeira grandeza), e transportando os respetivos afastamentos em relação ao **plano 4** (que se mantiveram), o que nos permitiu determinar **O<sub>r</sub>** e **A<sub>r</sub>**.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>r</sub>** e com raio até **A<sub>r</sub>**, desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado (em verdadeira grandeza) e efetuou-se a construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono (em rebatimento) – os pontos **B<sub>r</sub>**, **C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**. Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos **B**, **C** e **D** (no novo diedro de projeção). Assim, **B<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{\alpha_4}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal. De forma semelhante, **C<sub>4</sub>** e **D<sub>4</sub>** são as projeções dos pontos **C** e **D** no **plano 4** (respetivamente) e situam-se necessariamente sobre  $f_{\alpha_4}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **B**, **C** e **D**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram). **B<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **B** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **B<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **B<sub>4</sub>** ao eixo **X'**. **C<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **C** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **C<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **C<sub>4</sub>** ao eixo **X'**. **D<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **D** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **D<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **D<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado [**ABCD**].

### Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:

Em seguida, representou-se (no novo diedro de projeção) o plano  $\theta$ , que é o plano paralelo ao plano  $\alpha$  e que contém a base superior do prisma (o quadrado [**A'B'C'D'**]). A distância entre os dois planos é a altura do prisma (que é 5 cm) e mede-se ortogonalmente aos dois planos. Assim, desenhou-se uma paralela a  $f_{\alpha_4}$ , situada 5 cm para cima de  $f_{\alpha_4}$ , que é  $f_{\theta_4}$  (o traço, no **plano 4**, do plano  $\theta$ ). O plano  $\theta$  é, assim, o plano paralelo ao plano  $\alpha$  e que contém a base superior do prisma (a base [**A'B'C'D'**]). Note que o plano  $\theta$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço no **plano 4**), razão pela qual o traço do plano  $\theta$  no **plano 4** se identificou entre parêntesis.

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\alpha$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano de topo, a ortogonalidade de qualquer reta em relação ao plano  $\alpha$  é direta. Assim, qualquer aresta lateral do sólido tem a sua projeção no **plano 4** perpendicular a  $f_{\alpha_4}$  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a uma reta do plano  $\alpha$  – o seu novo traço frontal) e tem, também, a sua projeção horizontal perpendicular a  $h_\alpha$  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a outra reta do plano  $\alpha$  – o seu traço horizontal).

Assim, pelas projeções dos vértices do quadrado [**ABCD**] (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das arestas laterais do prisma (ortogonais ao plano  $\alpha$ ), o que nos permitiu determinar as duas projeções do sólido, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Note que os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'** (os vértices da base superior) foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções frontais (no **plano 4**), pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\theta$  é também um plano projetante frontal.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos vértices da face superior do sólido (o quadrado [**A'B'C'D'**]). Tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

$A'_2$  é a projeção frontal do ponto  $A'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $A'_4$  ao eixo  $X'$ .  
 $B'_2$  é a projeção frontal do ponto  $B'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B'_4$  ao eixo  $X'$ .  
 $C'_2$  é a projeção frontal do ponto  $C'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $C'_4$  ao eixo  $X'$ .  
 $D'_2$  é a projeção frontal do ponto  $D'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D'_4$  ao eixo  $X'$ .

#### Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos oito vértices do sólido (os vértices  $A, B, C$  e  $D$ , da face inferior, e os vértices  $A', B', C'$  e  $D'$ , da face superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[BCDD'A'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2A'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice  $A$  e o vértice  $C'$ . O vértice  $A$ , por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[AA']$ . O vértice  $C'$ , por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$  e  $[C'D']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[CC']$ . Note que, em projeção frontal, as faces visíveis são a base superior (a base  $[A'B'C'D']$ ), bem como as faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$ . As faces invisíveis, em projeção frontal, são a base inferior (a base  $[ABCD]$ ) e as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$ .

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[AA'D'C'CB]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1A'_1D'_1C'_1C_1B_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – o vértice  $D$  e o vértice  $B'$ . O vértice  $D$ , por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AD]$  e  $[CD]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[DD']$ . O vértice  $B'$ , por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[BB']$ . Note que, em projeção horizontal, as faces visíveis são a base superior (a base  $[A'B'C'D']$ ), bem como as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ . As faces invisíveis, em projeção horizontal, são a base inferior (a base  $[ABCD]$ ) e as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado  $[ABCD]$ ) e, ainda, da projeção do prisma no plano 4.

## 539.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $A$  e  $B$ , pertencentes ao plano  $\alpha$ . Os pontos  $A$  e  $B$ , para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

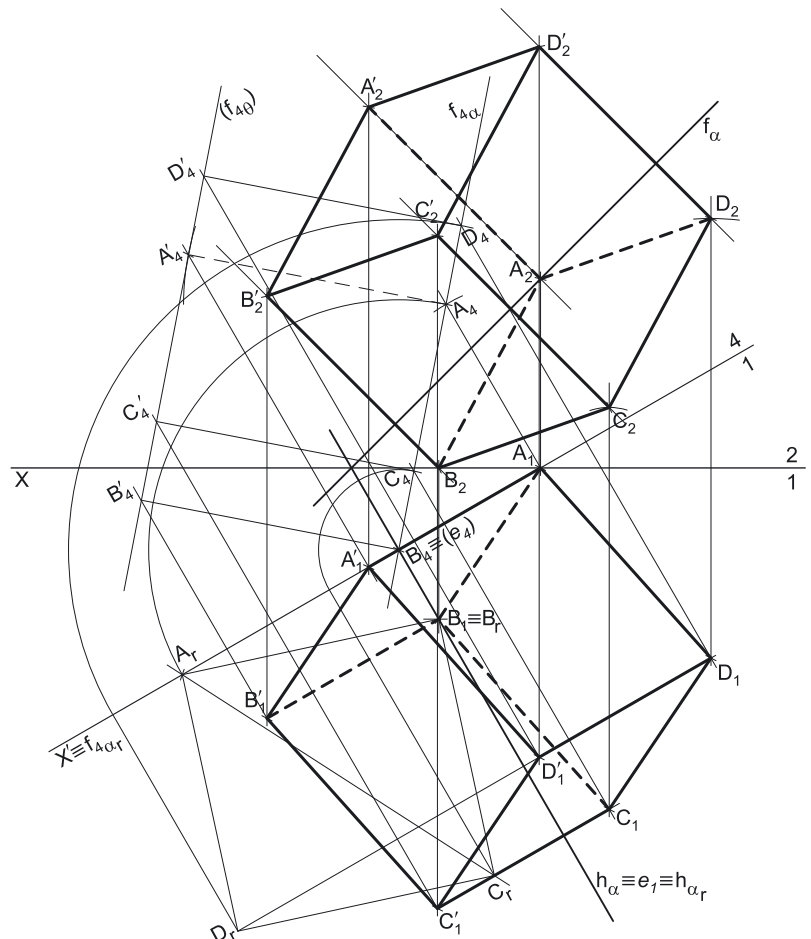
O ponto  $A$  tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto  $A$  é o ponto de  $f_\alpha$  que tem 5 cm de cota ( $f_\alpha$  é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). O ponto  $B$  tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto  $B$  é o ponto de  $h_\alpha$  que tem 4 cm de afastamento ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

### Resolução:

#### Determinação das projeções da face inferior do cubo:

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  (a face inferior do cubo) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Embora se pudesse ter optado por rebater o plano  $\alpha$  diretamente (à semelhança de outras situações anteriores), nesta situação optou-se por uma situação idêntica à utilizada na resolução do exercício anterior – optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante e, em seguida, rebater o plano  $\alpha$  como um plano projetante.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\alpha$ , o que nos permite transformar o plano oblíquo num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por conduzir o novo eixo **X** (o eixo **X'**) pela projeção horizontal do ponto **A**, o que faz com que este ponto, no novo diedro de projeção, continue a ter afastamento nulo. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **B** no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\alpha$ . **A<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **A<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 5 cm – a cota de **A**). **B<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve (e é nula) – **B<sub>4</sub>** situa-se no eixo **X'**, pois, no novo diedro de projeção, o ponto **B** continua a ter cota nula.

O novo traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha_4}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, pelo que o novo traço frontal do plano  $\alpha$  (o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4**) tem necessariamente de passar por **A<sub>4</sub>** e **B<sub>4</sub>** (as novas projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). Assim,  $f_{\alpha_4}$  está definido por dois pontos – o ponto **A<sub>4</sub>** e o ponto **B<sub>4</sub>** (**B<sub>4</sub>** é, na prática, o ponto de concorrência dos dois traços do plano).

Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção, como um plano projetante. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_1$  a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo **X'**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

O ponto **B** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **B<sub>r</sub>**  $\equiv$  **B<sub>1</sub>**. Em seguida, rebateu-se o ponto **A**, desenhando o arco do seu rebatimento em verdadeira grandeza (que está contido no **plano 4** pois, no novo diedro de projeção, o ponto **A** situa-se no **plano 4**), o que nos permitiu determinar **A<sub>r</sub>**. Note que o ponto **A**, no seu rebatimento, manteve o seu afastamento em relação ao **plano 4**.

A partir dos pontos **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**, construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os outros dois vértices do polígono (em rebatimento) – os pontos **C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**. Note que se garantiu que o quadrado se situa no espaço do  $1^a$  Diedro (para que o cubo se situe no espaço do  $1^a$  Diedro). Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos **C** e **D** (no novo diedro de projeção). Assim, **C<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **C** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{\alpha_4}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal. De forma semelhante, **D<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **D** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{\alpha_4}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **C** e **D**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram). **C<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **C** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **C<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **C<sub>4</sub>** ao eixo **X'**. **D<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **D** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **D<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **D<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

### Determinação das projeções dos vértices da face superior do cubo:

Em seguida, representou-se (no novo diedro de projeção) o plano  $\theta$ , que é o plano paralelo ao plano  $\alpha$  e que contém a face superior do cubo (o quadrado **[A'B'C'D']**). A distância entre os dois planos mede-se ortogonalmente aos dois planos e é igual à aresta do cubo.

O cubo é um **poliedro regular** com a forma aparente de um **prisma quadrangular regular**, pelo que as arestas do sólido (que não estão contidas no plano  $\alpha$  nem lhe são paralelas) são necessariamente **ortogonais** ao plano  $\alpha$ . Qualquer dessas arestas está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\alpha$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano de topo, a ortogonalidade de qualquer reta em relação ao plano  $\alpha$  é direta. Assim, qualquer aresta do cubo que seja ortogonal ao plano  $\alpha$  tem a sua nova projeção frontal perpendicular a  $f_{\alpha_4}$  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a uma reta do plano  $\alpha$  – o seu novo traço frontal) e tem, também, a sua projeção horizontal perpendicular a  $h_\alpha$  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a outra reta do plano  $\alpha$  – o seu traço horizontal).

Assim, conduziu-se a projeção (no **plano 4**) da reta suporte da aresta **[AA']** do cubo, passando por **A<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **A** no **plano 4**) e perpendicular a  $f_{\alpha_4}$  (pois a aresta **[AA']** é ortogonal ao plano  $\alpha$  e a perpendicularidade é direta, em projeção frontal). Sobre a reta suporte da projeção (no **plano 4**) da aresta **[AA']**, há que medir a aresta do cubo (que é a medida do lado do quadrado **[ABCD]**, que já é conhecida, em rebatimento). Assim, com o compasso, mediu-se um dos lados do quadrado **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>C<sub>r</sub>D<sub>r</sub>]** (que estão em verdadeira grandeza) e transportou-se essa medida para a reta suporte do segmento **[A<sub>4</sub>A'<sub>4</sub>]**, a partir de **A<sub>4</sub>**, o que nos permitiu determinar **A'<sub>4</sub>** (a projeção, no **plano 4**, do vértice **A** do cubo). Por fim, por **A'<sub>4</sub>** conduziu-se uma paralela a  $f_{\alpha_4}$ , que é  $f_{\alpha_0}$  (o traço, no **plano 4**, do plano  $\theta$ ). O plano  $\theta$  é, assim, o plano paralelo ao plano  $\alpha$  e que contém a face superior do cubo (a face **[A'B'C'D']**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que o plano  $\theta$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço no **plano 4**), razão pela qual o traço do plano  $\theta$  no **plano 4** se identificou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções dos restantes vértices da face  $[ABCD]$  (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das arestas do cubo que são paralelas à aresta  $[AA']$ , o que nos permitiu determinar as duas projeções do cubo, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Note que os pontos  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções frontais (no **plano 4**), pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\theta$  é também um plano projetante frontal.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos vértices da face superior do sólido (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ). Tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ , precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

$A'_2$  é a projeção frontal do ponto  $A'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $A'_4$  ao eixo  $X'$ .  
 $B'_2$  é a projeção frontal do ponto  $B'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B'_4$  ao eixo  $X'$ .  
 $C'_2$  é a projeção frontal do ponto  $C'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $C'_4$  ao eixo  $X'$ .  
 $D'_2$  é a projeção frontal do ponto  $D'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D'_4$  ao eixo  $X'$ .

#### Determinação das projeções do cubo:

A partir das projeções dos oito vértices do cubo (os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , da face inferior, e os vértices  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ , da face superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[BCDD'A'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2A'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice  $A$  e o vértice  $C'$ . O vértice  $A$ , por ser o vértice de **menor afastamento** do cubo, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$  e  $[AA']$ . O vértice  $C'$ , por ser o vértice de **maior afastamento** do cubo, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$ ,  $[C'D']$  e  $[CC']$ . Note que, em projeção frontal, as faces visíveis são as faces  $[A'B'C'D']$ ,  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$ . As faces invisíveis, em projeção frontal, são as faces  $[ABCD]$ ,  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$ .

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[AA'B'C'D]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1A'_1B'_1C'_1D_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – o vértice  $B$  e o vértice  $D'$ . O vértice  $B$ , por ser o vértice de **menor cota** do cubo, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$  e  $[BB']$ . O vértice  $D'$ , por ser o vértice de **maior cota** do cubo, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[C'D']$ ,  $[A'D']$  e  $[DD']$ . Note que, em projeção horizontal, as faces visíveis são as faces  $[A'B'C'D']$ ,  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$ . As faces invisíveis, em projeção horizontal, são as faces  $[ABCD]$ ,  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do cubo (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado  $[ABCD]$ ) e, ainda, da projeção do cubo no **plano 4**.

## 540.

Por **altura de uma pirâmide** entende-se a distância do vértice da pirâmide ao plano da base. No caso de uma pirâmide cuja base está contida num plano de rampa, a altura dessa pirâmide é a distância do vértice da pirâmide ao plano de rampa que contém a base da pirâmide.

## 541.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **T**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ .

O ponto **T** é um ponto com cota nula, pelo que já temos um ponto para definir  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com cota nula, pelo que já temos a direção para definir  $h_p - h_p$  está definido por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

O ponto **R** é um ponto com afastamento nulo, pelo que já temos um ponto para definir  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com afastamento nulo, pelo que já temos a direção para definir  $f_p - f_p$  está definido por um ponto (o ponto **R**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

### Resolução:

#### Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o quadrado **[RSTU]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[RSTU]** (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{p_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a  $h_p$ ).

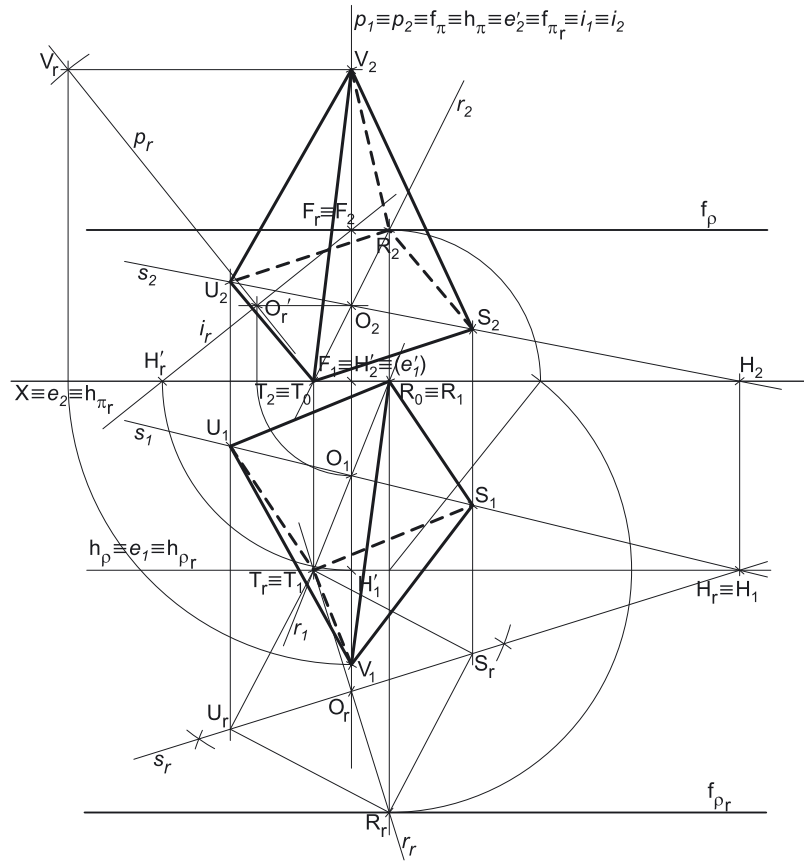
Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos uma direção para definir  $f_{p_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir  $f_{p_r}$ . Nesse sentido, há que rebater o ponto **R**, que é um ponto de  $f_p$  e, simultaneamente, é um vértice do quadrado. O rebatimento do ponto **R** tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziu-se, por **R<sub>1</sub>**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **R**). Com o compasso, fazendo centro em **R<sub>1</sub>** e com raio até **R<sub>2</sub>**, transportou-se a cota do ponto **R** para o eixo **X**, o que nos permitiu desenhar o triângulo do rebatimento do ponto **R** em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **R** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por **R<sub>1</sub>**, onde se situa **R<sub>r</sub>** (o ponto **R** rebatido). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{p_r}$ . Nesse sentido desenhou-se  $f_{p_r}$ , passando por **R<sub>r</sub>** e paralelo ao eixo **X** –  $f_{p_r}$  está definido por um ponto (o ponto **R<sub>r</sub>**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

O ponto **T** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **T<sub>r</sub> ≡ T<sub>1</sub>**. A partir dos pontos **R<sub>r</sub>** e **T<sub>r</sub>**, construiu-se o quadrado **[RSTU]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos **S<sub>r</sub>**, **U<sub>r</sub>** e **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** é o centro do quadrado). Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$ , determinando-se as projeções dos pontos **S**, **U** e **O**.

A inversão do rebatimento do ponto **O** processa-se com o recurso à reta  $r$ , oblíqua, do plano  $\rho$ , à qual o ponto **O** pertence – a reta  $r$  é a reta suporte da diagonal **[RT]** do quadrado. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – o ponto **R<sub>r</sub>** e o ponto **T<sub>r</sub>**. Tendo em conta que já são conhecidas as projeções dos dois pontos que definem a reta  $r$  (os pontos **R** e **T**), as projeções da reta  $r$  desenharam-se imediatamente.

Em seguida, por **O<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**). A projeção frontal do ponto **O** (**O<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

A inversão do rebatimento dos pontos **S** e **U** e a determinação das respetivas projeções processou-se com o recurso a uma outra reta oblíqua do plano  $\rho$ , à qual os dois pontos pertencem – a reta  $s$ , que é a reta suporte da diagonal **[SU]** do quadrado. A reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos **S<sub>r</sub>** e **U<sub>r</sub>**). Para definir a reta  $s$  em projeções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $s$  passa necessariamente pelo ponto **O**, cujas projeções já são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $s$  (em projeções). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta  $s$ , que é um ponto de  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto **H<sub>r</sub>** situa-se sobre  $h_{p_r}$  e, porque é um ponto da charneira, o ponto **H** roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **H<sub>r</sub> ≡ H<sub>1</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $s$ , em projeções – a reta  $s$  está definida por dois pontos (os pontos **O** e **H**), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $s$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, por  $S_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $s_1$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ) é  $S_1$  (a projeção horizontal do ponto  $S$ ). A projeção frontal do ponto  $S$  ( $S_2$ ) situa-se sobre  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ). De forma semelhante, por  $U_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $s_1$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ) é  $U_1$  (a projeção horizontal do ponto  $U$ ). A projeção frontal do ponto  $U$  ( $U_2$ ) situa-se sobre  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ).

A partir das projeções dos quatro pontos ( $R$ ,  $S$ ,  $T$  e  $U$ ), desenharam-se as projeções do quadrado  $[RSTU]$ .

#### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto  $O$  e é ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto  $O$  conduziram-se as projeções da reta  $p$ , a reta suporte do eixo da pirâmide – a reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta  $p$  não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$ .

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) está contido na reta  $p$ , pelo que o ponto  $V$  é um ponto da reta  $p$ . Assim, a distância do ponto  $V$  ao plano  $\rho$  mede-se na reta  $p$ . A reta  $p$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante da reta  $p$  (um plano de perfil) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano  $\pi$  (o plano projetante da reta  $p$ ) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é  $f_\pi$  – tem-se imediatamente  $f_\pi \equiv e'_2 \equiv f_{\pi r}$ .

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto  $O$ , determinando  $O_r' - O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido no seu segundo rebatimento (o ponto  $O$  rebatido pelo rebatimento do plano  $\pi$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção é a direção ortogonal ao plano  $\rho$ , que só fica garantida através da ortogonalidade da reta  $p$  a uma outra reta do plano  $\rho$ . Nesse sentido, recorreu-se à reta  $i$ , que é uma reta de perfil do plano  $\rho$  (a reta  $i$  é a reta de interseção do plano  $\pi$  com o plano  $\rho$ ). A reta  $i$  está definida por dois pontos – os seus traços nos planos de projeção (os pontos  $F$  e  $H'$ ). Para se garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ , é necessário garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $i$  (para que se verifique o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**). Tendo em conta que se trata de duas retas de perfil (cujas projeções não verifica o **Critério de Reversibilidade**), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano  $\pi$ , já iniciado.

Efetuemos o rebatimento da reta  $i$ . O ponto  $F$  é um ponto da charneira (A reta  $e'$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_r \equiv F_2$ . Rebateu-se o ponto  $H'$  (o traço horizontal da reta  $i$ ), determinando-se  $H'_r$ . A reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) passa por  $F_r$  e por  $H'_r$  (e tem ainda de passar por  $O_r'$ , pois o ponto  $O$  também pertence à reta  $i$ ). Em seguida, desenhou-se a reta  $p_r$ , passando por  $O_r'$  e perpendicular à reta  $i_r$  – está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $i$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . Note que o ponto  $O$  é, na prática, o ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$ , o que se pode comprovar em rebatimento.

Sobre a reta  $p_r$ , a partir de  $O_r'$ , mediram-se os 8 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto  $V$  ao plano  $\rho$ ) e determinou-se  $V_r$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $V$  e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta  $p$ .

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide (os vértices  $R$ ,  $S$ ,  $T$  e  $U$ , da base, e o vértice  $V$ ), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[STUV]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[S_2T_2U_2V_2]$ . Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice  $R$ . Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[RS]$  e  $[RU]$ , da base, e a aresta lateral  $[RV]$ . Em projeção frontal, as faces laterais  $[STV]$  e  $[TUV]$  são visíveis, pelo que a aresta lateral  $[TV]$  é igualmente **visível** em projeção frontal (porque separa duas faces visíveis em projeção frontal). Em projeção frontal, a base  $[RSTU]$  é invisível, bem como as faces laterais  $[RSV]$  e  $[RUV]$ .

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[RSVU]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[R_1S_1V_1U_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice  $T$ . Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[ST]$  e  $[TU]$ , da base, e a aresta lateral  $[TV]$ . Em projeção horizontal, as faces laterais  $[RSV]$  e  $[RUV]$  são visíveis, pelo que a aresta lateral  $[RV]$  é igualmente **visível** em projeção horizontal (porque separa duas faces visíveis em projeção horizontal). Em projeção horizontal, a base  $[RSTU]$  é invisível, bem como as faces laterais  $[STV]$  e  $[TUV]$ .

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[RSTU]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado  $[RSTU]$ ), bem como o plano  $\pi$  e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\pi$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice  $V$ ).

## 542.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\rho$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

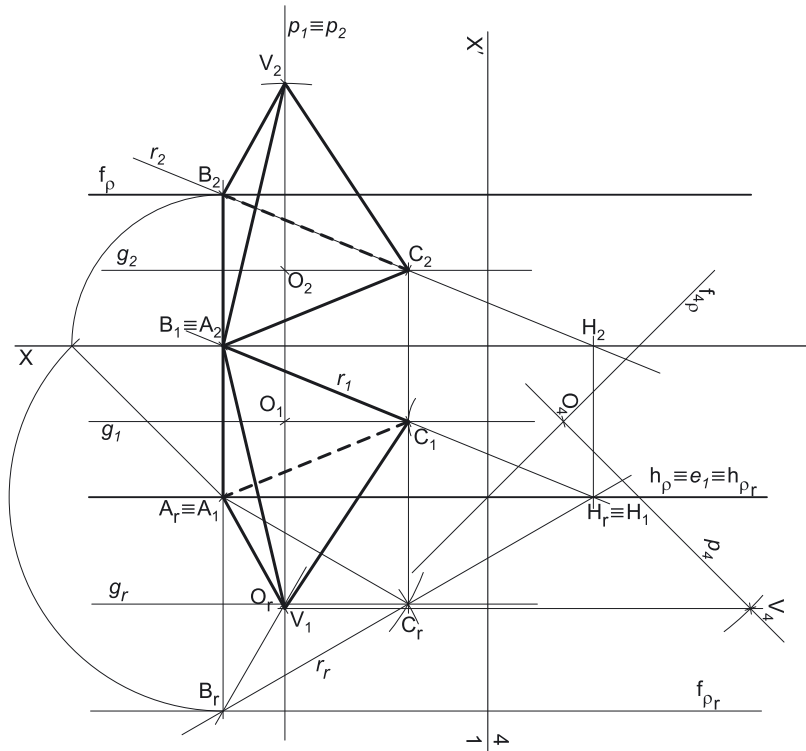
Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $A$  e  $B$ , pertencentes ao plano  $\rho$ . Os pontos  $A$  e  $B$ , para pertencerem ao plano  $\rho$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto  $A$  tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ), pois  $h_p$  é uma reta horizontal (uma reta fronto-horizontal) do plano, com cota nula. O ponto  $B$  tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ), pois  $f_p$  é uma reta frontal (uma reta fronto-horizontal) do plano, com afastamento nulo. Tendo em conta que o segmento  $[AB]$  é de perfil, as projeções dos dois pontos situam-se na mesma linha de chamada.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_r \equiv h_{pr}$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a  $h_p$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos uma direção para definir  $f_{pr}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir  $f_{pr}$ . Nesse sentido, há que rebater o ponto  $B$ , que é um ponto de  $f_p$  e, simultaneamente, é um vértice do triângulo. O rebatimento do ponto  $B$  tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziu-se, por  $B_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $B$ ). Com o compasso, fazendo centro em  $B_1$  e com raio até  $B_2$ , transportou-se a cota do ponto  $B$  para o eixo  $X$ , o que nos permitiu desenhar o triângulo do rebatimento do ponto  $B$  em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $B$  em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $B_1$ , onde se situa  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{pr}$ . Nesse sentido desenhou-se  $f_{pr}$ , passando por  $B_r$  e paralelo ao eixo  $X - f_{pr}$  está definido por um ponto (o ponto  $B_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

O ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$ . A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos  $C_r$  e  $O_r$  (o ponto  $O$  é o centro do triângulo). Note que se garantiu que o ponto  $C$  é o vértice de menor abcissa do triângulo, conforme o enunciado pede expressamente. Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$ , determinando-se as projeções dos pontos  $C$  e  $O$ .

A inversão do rebatimento do ponto  $C$  processa-se com o recurso à reta  $r$ , oblíqua, do plano  $\rho$ , à qual o ponto  $C$  pertence – a reta  $r$  é a reta suporte do lado  $[BC]$  do triângulo. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – o ponto  $C_r$  e o ponto  $B_r$ . É necessário, agora, determinar as projeções da reta  $r$ , para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Tendo em conta que já são conhecidas as projeções do ponto  $B$ , já temos um ponto para definir a reta  $r$  (em projeções). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H$ , o traço horizontal da reta  $r$ , que é um ponto de  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto  $H_r$  situa-se sobre  $h_{pr}$  e, porque é um ponto da charneira, o ponto  $H$  roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_r \equiv H_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$ , em projeções – a reta  $r$  está definida por dois pontos (os pontos  $B$  e  $H$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $s$ .

Em seguida, por  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ). A projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

A inversão do rebatimento do ponto  $O$  e a determinação das suas projeções processou-se com o recurso a uma outra reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto  $O$  pertence – a reta  $g$ , fronto-horizontal, que passa necessariamente pelo ponto  $C$ . Assim, a reta  $g_r$  (a reta  $g$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $O_r$  e  $C_r$ ) e, ainda, pela sua direção (é fronto-horizontal). Para definir a reta  $g$  em projeções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $g$  passa necessariamente pelo ponto  $C$ , cujas projeções já são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $g$  (em projeções). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $g$  é uma reta fronto-horizontal, pelo que também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $g$ , em projeções – a reta  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $C$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $g$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, por  $O$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $g_1$  (a projeção horizontal da reta  $g$ ) é  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ). A projeção frontal do ponto  $O$  ( $O_2$ ) situa-se sobre  $g_2$  (a projeção frontal da reta  $g$ ).

A partir das projeções dos três pontos ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ), desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .

#### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto  $O$  e é ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto  $O$  conduziram-se as projeções da reta  $p$ , a reta suporte do eixo da pirâmide – a reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta  $p$  não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$ .

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) está contido na reta  $p$ , pelo que o ponto  $V$  é um ponto da reta  $p$ . Assim, a distância do ponto  $V$  ao plano  $\rho$  mede-se na reta  $p$ . A reta  $p$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Note que, neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ ;
3. por fim, a reta  $p$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento  $[OV]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção os dois traços do plano  $\rho$  serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual a reta  $p$  seja paralela a um dos planos de projeção. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$  (e necessariamente paralelo à reta  $p$ ), o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal) e a reta  $p$  numa reta frontal (de frente). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ) – note que o eixo  $X'$  é paralelo a  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ), pelo que, no novo diedro de projeção, a reta  $p$  será uma reta frontal (de frente). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, é necessário determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**). O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, é necessário o recurso a um ponto do plano  $\rho$  – o ponto  $O$ , por exemplo (que é um ponto da reta  $p$ ). Assim, determinou-se  $O_4$  (a projeção do ponto  $O$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $O_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $O_2$  ao eixo  $X$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$  passa por  $O_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto  $O_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $O_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por outro lado, a reta  $p$ , no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) é uma reta frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, o segmento de reta  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) já se projeta em verdadeira grandeza, em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, sobre a reta  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), a partir de  $O_4$ , mediram-se os 7 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto  $V$  ao plano  $\rho$ ) e determinou-se  $V_4$  (a projeção do ponto  $V$  no **plano 4**). Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada e determinaram-se as projeções do ponto  $V$ , no diedro de projeção inicial.

$V_1$  (a projeção horizontal do ponto  $V$ ) determinou-se diretamente ainda no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ).  $V_2$  (a projeção frontal do ponto  $V$ ) determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $V_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $V_4$  ao eixo  $X'$ .

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide (os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , da base, e o vértice  $V$ ), desenharam-se os seus contornos aparentes.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABVC]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[BC]**, da base, é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal – a base **[ABC]** e a face lateral **[BCV]**. Em projeção frontal, as faces laterais **[ABV]** e **[ACV]** são visíveis. Em projeção frontal, a base **[ABC]** é invisível, bem como a face lateral **[BCV]**.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ABCV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta **[AC]**, da base, é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – a base **[ABC]** e a face lateral **[ACV]**. Em projeção horizontal, as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** são visíveis. Em projeção horizontal, a base **[ABC]** é invisível, bem como a face lateral **[ACV]**.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[ABC]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo **[ABC]**), bem como da reta  $\rho$  e de todos os traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **V**).

## 543.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\rho$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

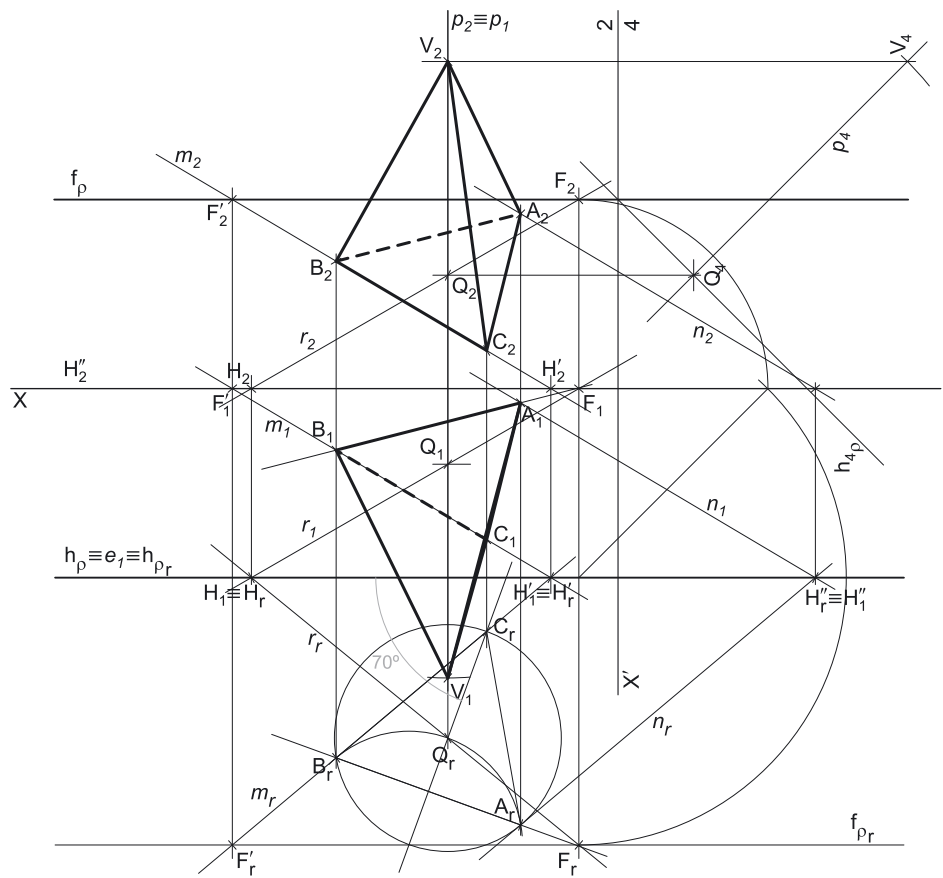
Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **Q**, pertencente ao plano  $\rho$ . O ponto **Q**, para pertencer ao plano  $\rho$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Nesse sentido, recorreu-se a uma reta **r**, oblíqua, pertencente ao plano – a reta **r** está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H**, os seus traços nos planos de projeção). O ponto **Q** é, assim, o ponto da reta **r** que tem 2 cm de afastamento.

Note que é dado o **ângulo** que um dos lados do triângulo faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

### Resolução:

*Determinação das projeções da base da pirâmide:*

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado referido do triângulo faz com o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio triângulo, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do triângulo (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{h}_\rho \equiv \mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{h}_{\rho r}$  ( $\mathbf{e}_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ), e identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a  $\mathbf{h}_\rho$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $\mathbf{f}_\rho$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos uma direção para definir  $\mathbf{f}_{\rho r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir  $\mathbf{f}_{\rho r}$ . Nesse sentido, há que rebater o ponto  $\mathbf{F}$  (o traço frontal da reta  $r$ ), que é um ponto de  $\mathbf{f}_\rho$ . O rebatimento do ponto  $\mathbf{F}$  tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziu-se, por  $\mathbf{F}_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $\mathbf{F}$ ). Com o compasso, fazendo centro em  $\mathbf{F}_1$  e com raio até  $\mathbf{F}_2$ , transportou-se a cota do ponto  $\mathbf{F}$  para o eixo  $X$ , o que nos permitiu desenhar o triângulo do rebatimento do ponto  $\mathbf{F}$  em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $\mathbf{F}$  em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $\mathbf{F}_1$ , onde se situa  $\mathbf{F}_r$  (o ponto  $\mathbf{F}$  rebatido). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $\mathbf{f}_{\rho r}$ . Nesse sentido desenhou-se  $\mathbf{f}_{\rho r}$ , passando por  $\mathbf{F}_r$  e paralelo ao eixo  $X$  –  $\mathbf{f}_{\rho r}$  está definido por um ponto (o ponto  $\mathbf{B}_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizonta).

Em seguida, há que rebater o ponto  $\mathbf{Q}$ , o que se processa rebatendo uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto  $\mathbf{Q}$  pertença – a reta  $r$ , neste caso. Para definir a reta  $r$  em rebatimento (a reta  $r_r$ ) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $r_r$  – o ponto  $\mathbf{F}_r$  (o seu traço frontal rebatido). Faça-nos outro ponto ou uma direção. O ponto  $\mathbf{H}$  (o traço horizontal da reta  $r$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $\mathbf{H}_r \equiv \mathbf{H}_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r_r$  – a reta  $r_r$  passa por  $\mathbf{F}_r$  e  $\mathbf{H}_r$  (está definida por dois pontos).

Em seguida, por  $\mathbf{Q}_1$  (a projeção horizontal do ponto  $\mathbf{Q}$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $\mathbf{Q}_r$  (o ponto  $\mathbf{Q}$  rebatido), sobre a reta  $r_r$ . Com o compasso, fazendo centro em  $\mathbf{Q}_r$  e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao triângulo (em verdadeira grandeza) e efetuou-se a construção da figura, inscrita na circunferência.

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado referido no enunciado faz com  $\mathbf{h}_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Uma vez que o enunciado é omissivo no que respeita à posição dos vértices na figura, considerou-se que o lado  $[\mathbf{AB}]$  do triângulo é o lado que contém os vértices de maior cota – é o ângulo que o segmento  $[\mathbf{A}_r\mathbf{B}_r]$  faz com  $\mathbf{h}_{\rho r}$ . Assim, a construção do triângulo garantiu que o segmento  $[\mathbf{A}_r\mathbf{B}_r]$  faz, com  $\mathbf{h}_{\rho r}$ , um ângulo de  $20^\circ$ , de abertura para a direita. Nesse sentido, a construção do triângulo iniciou-se com o desenho do diâmetro inicial da circunferência (que é necessariamente perpendicular a  $[\mathbf{A}_r\mathbf{B}_r]$ ) – esse diâmetro tem de fazer, com  $\mathbf{h}_{\rho r}$ , um ângulo de  $70^\circ$  de abertura para a esquerda, para nos garantir a posição final do triângulo. A construção da figura em rebatimento permitiu-nos determinar (em rebatimento) os vértices do polígono – os pontos  $\mathbf{A}_r$ ,  $\mathbf{B}_r$  e  $\mathbf{C}_r$ .

Para determinar as projeções dos três vértices do triângulo (e da própria figura), inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$ , o que se processa com o recuso a reta do plano às quais os pontos pertencem.

A inversão do rebatimento dos pontos  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  processa-se com o recurso à reta  $m$ , oblíqua, do plano  $\rho$ , à qual aqueles dois pertencem – a reta  $m$  é a reta suporte do lado  $[\mathbf{BC}]$  do triângulo. A reta  $m_r$  (a reta  $m$  rebatida) está definida por dois pontos – o ponto  $\mathbf{B}_r$  e o ponto  $\mathbf{C}_r$ . É necessário, agora, determinar as projeções da reta  $m$ , para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $\mathbf{H}'$ , o traço horizontal da reta  $m$ , que é um ponto de  $\mathbf{h}_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto  $\mathbf{H}'_r$  situa-se sobre  $\mathbf{h}_{\rho r}$  e, porque é um ponto da charneira, o ponto  $\mathbf{H}'_r$  roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $\mathbf{H}'_r \equiv \mathbf{H}'_1$ . Já temos um ponto para definir a reta  $m$  (em projeções). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $\mathbf{F}'$ , o traço frontal da reta  $m$ , que é um ponto de  $\mathbf{f}_\rho$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ), pelo que o ponto  $\mathbf{F}'_r$  se situa sobre  $\mathbf{f}_{\rho r}$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $\mathbf{F}'$  conduzindo, por  $\mathbf{F}'_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $\mathbf{F}$  ( $\mathbf{F}'_2$  situa-se necessariamente sobre  $\mathbf{f}_{\rho r}$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $m$  em projeções (o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $m$ ).

Em seguida, por  $\mathbf{B}_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $m_1$  (a projeção horizontal da reta  $m$ ) é  $\mathbf{B}_1$  (a projeção horizontal do ponto  $\mathbf{B}$ ). A projeção frontal do ponto  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B}_2$ ) situa-se sobre  $m_2$  (a projeção frontal da reta  $m$ ). De forma semelhante, por  $\mathbf{C}_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $m_1$  (a projeção horizontal da reta  $m$ ) é  $\mathbf{C}_1$  (a projeção horizontal do ponto  $\mathbf{C}$ ). A projeção frontal do ponto  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{C}_2$ ) situa-se sobre  $m_2$  (a projeção frontal da reta  $m$ ).

A inversão do rebatimento do ponto  $\mathbf{A}$  e a determinação das suas projeções processou-se com o recurso a uma outra reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto  $\mathbf{A}$  pertence – a reta  $n$ , oblíqua, paralela à reta  $m$ . Assim, a reta  $n_r$  (a reta  $n$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $\mathbf{A}_r$ ) e pela sua direção (é paralela à reta  $m_r$ ). Para definir a reta  $n$  em projeções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $n$  é paralela à reta  $r$ , pelo que as duas retas têm a mesma direção – já temos uma direção para definir a reta  $n$  (em projeções). Falta-nos um ponto para definir a reta. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $\mathbf{H}''$ , o traço horizontal da reta  $n$ , que é um ponto de  $\mathbf{h}_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto  $\mathbf{H}''_r$  situa-se sobre  $\mathbf{h}_{\rho r}$  e, porque é um ponto da charneira, o ponto  $\mathbf{H}''_r$  roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $\mathbf{H}''_r \equiv \mathbf{H}''_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $n$ , em projeções – a reta  $n$  está definida por um ponto (o ponto  $\mathbf{H}''$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $m$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $n$ .

Em seguida, por  $\mathbf{A}_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $n_1$  (a projeção horizontal da reta  $n$ ) é  $\mathbf{A}_1$  (a projeção horizontal do ponto  $\mathbf{A}$ ). A projeção frontal do ponto  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A}_2$ ) situa-se sobre  $n_2$  (a projeção frontal da reta  $n$ ).

A partir das projeções dos três pontos ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ ), desenharam-se as projeções do triângulo  $[\mathbf{ABC}]$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte do eixo da pirâmide – a reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta **p** não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$ .

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento **[OV]** (o eixo da pirâmide) está contido na reta **p**, pelo que o ponto **V** é um ponto da reta **p**. Assim, a distância do ponto **V** ao plano  $\rho$  mede-se na reta **p**. A reta **p** não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento **[OV]** (o eixo da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Note que, neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **p** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **p**, para além do ponto **P**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  – a reta **p** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ ;
3. por fim, a reta **p** não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento **[OV]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta **p** verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção os dois traços do plano  $\rho$  serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual a reta **p** seja paralela a um dos planos de projeção. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$  (e necessariamente paralelo à reta **p**), o que nos permite transformar o plano de rampa num plano vertical (projetante horizontal) e a reta **p** numa reta frontal (de frente). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ) – note que o eixo **X'** é paralelo a **p<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **p**), pelo que, no novo diedro de projeção, a reta **p** será uma reta horizontal (de nível). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, é necessário determinar o novo traço horizontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**). O novo traço horizontal do plano  $\rho$  (**h<sub>4p</sub>**) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço horizontal do plano  $\rho$  (**h<sub>4p</sub>**) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, é necessário o recurso a um ponto do plano  $\rho$  – o ponto **Q**, por exemplo (que é um ponto da reta **p**). Assim, determinou-se **Q<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **Q** no **plano 4**), em função do seu afastamento, que se manteve – a distância de **Q<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **Q<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 2 cm – o afastamento de **Q**). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço horizontal do plano  $\rho$  – **h<sub>4p</sub>**, passa por **Q<sub>4</sub>** pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal. Assim, **h<sub>4p</sub>** está definido por dois pontos – o ponto **Q<sub>4</sub>** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X'**).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta horizontal (de nível) e o plano  $\rho$  é um plano vertical, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que **h<sub>4p</sub>** é uma reta horizontal (de nível) do plano (com cota nula) e que a reta **p** é, também ela, uma reta horizontal (de nível), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção horizontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por **Q<sub>4</sub>** conduziu-se **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a **h<sub>4p</sub>** (o novo traço horizontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta **p** já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por outro lado, a reta **p**, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) é uma reta horizontal (de nível), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, o segmento de reta **[OV]** (o eixo da pirâmide) já se projeta em verdadeira grandeza, em projeção horizontal (no **plano 4**). Dessa forma, sobre a reta **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**), a partir de **Q<sub>4</sub>**, mediram-se os 8 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto **V** ao plano  $\rho$ ) e determinou-se **V<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **V** no **plano 4**). Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada e determinaram-se as projeções do ponto **V**, no diedro de projeção inicial.

**V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **V**) determinou-se diretamente ainda no diedro de projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**, sobre **p<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **p**). **V<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **V**) determinou-se em função do seu afastamento, que se manteve – a distância de **V<sub>1</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **V<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

## Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide (os vértices **A**, **B** e **C**, da base, e o vértice **V**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[AVBC]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>V<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[AB]**, da base, é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal – a base **[ABC]** e a face lateral **[ABV]**. Em projeção frontal, as faces laterais **[ACV]** e **[BCV]** são visíveis. Em projeção frontal, a base **[ABC]** é invisível, bem como a face lateral **[ABV]**.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ABCV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta **[BC]**, da base, é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – a base **[ABC]** e a face lateral **[BCV]**. Em projeção horizontal, as faces laterais **[ABV]** e **[ACV]** são visíveis. Em projeção horizontal, a base **[ABC]** é invisível, bem como a face lateral **[BCV]**.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[ABC]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo **[ABC]**), bem como da reta **p** e de todos os traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **V**).

## 544.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **O** e **A**, pertencentes ao plano  $\rho$ . Os pontos **O** e **A**, para pertencerem ao plano  $\rho$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **A** tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ), pois  $h_p$  é uma reta horizontal (uma reta fronto-horizontal) do plano, com cota nula.). Nesse sentido, determinaram-se as projeções do ponto **A**, em função da sua abcissa.

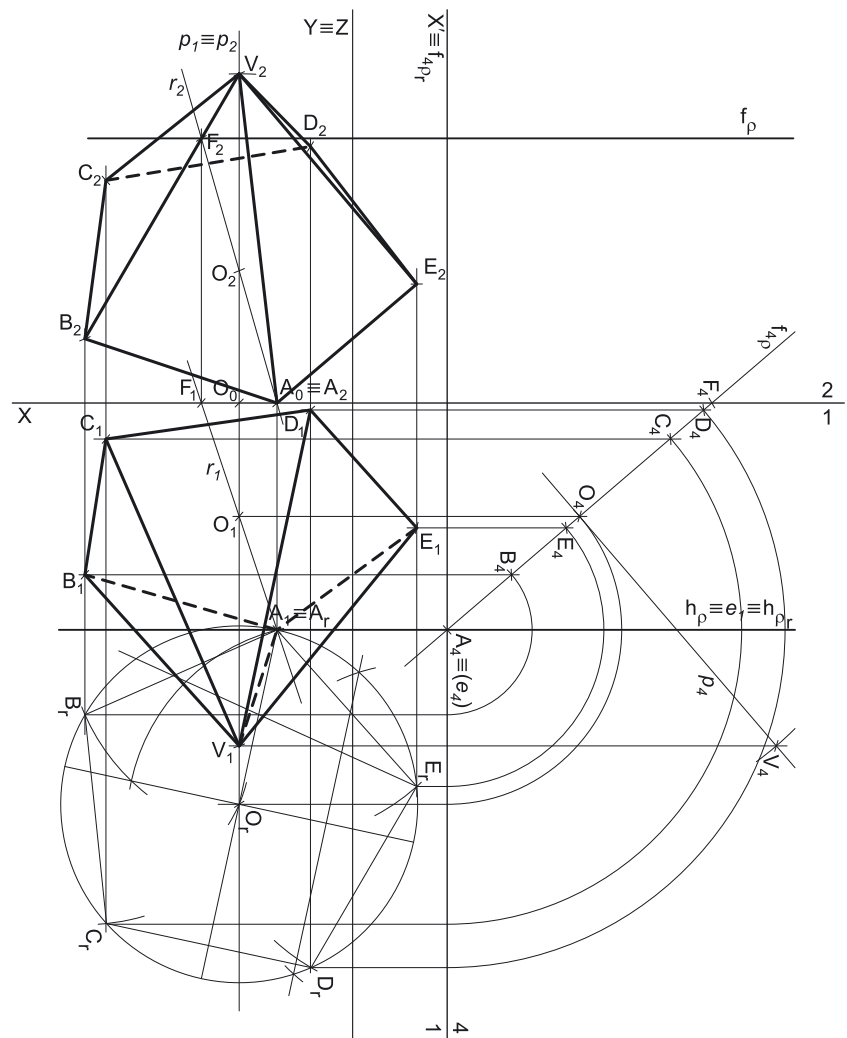
Os dados permitiram-nos, ainda, determinar **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**), em função das coordenadas fornecidas. Em seguida, recorreu-se a uma reta **r**, oblíqua, pertencente ao plano  $\rho$ . Por uma questão de economia de traçados, optou-se por conduzir a reta **r** também pelo ponto **A** (que, nesta circunstância, é o traço horizontal da reta **r**). Assim, a reta **r** está definida por dois pontos (os pontos **F** e **A**, os seus traços nos planos de projeção), o que nos permitiu desenhar **r<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **r**) e, consequentemente, determinar **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**), sobre **r<sub>2</sub>**.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o pentágono **[ABCDE]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o pentágono **[ABCDE]** (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Embora se pudesse ter optado por rebater o plano  $\rho$  diretamente (à semelhança das situações anteriores), neste caso optou-se por uma situação diferente – optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante e, em seguida, rebater o plano  $\rho$  como um plano projetante.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto **F** (o traço frontal da reta **r**) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**. Assim,  $F_4$  é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $F_4$  ao eixo **X'** é igual à distância de  $F_2$  ao eixo **X** (que é 7 cm – a cota de **F**, que é a cota de  $f_\rho$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**) tem necessariamente de passar por  $F_4$  (a nova projeção frontal do ponto **F**). Assim,  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto  $F_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X'**).

Por fim, determinaram-se as projeções dos pontos **O** e **A** no **plano 4** ( $O_4$  e  $A_4$ , respetivamente) – uma vez que o plano  $\tau$ , no novo diedro de projeção, é um plano projetante frontal,  $O_4$  e  $A_4$  situam-se sobre  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ), nas respetivas linhas de chamada (que são perpendicular ao eixo **X'**).

Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, como um plano projetante (um plano de topo). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\rho \equiv e_r \equiv h_{pr}$  ( $e_4$ , a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo **X'**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$ . Em seguida, rebateu-se o ponto **O**, desenhando a projeção frontal (no **plano 4**) do arco do seu rebatimento, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $O_r$  (que, no seu rebatimento, manteve o seu afastamento, em relação ao **plano 4**).

Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono (em verdadeira grandeza) e efetuou-se a construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $B_r$ ,  $C_r$ ,  $D_r$  e  $E_r$ .

Para determinar as projeções do pentágono, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos **B**, **C**, **D** e **E** (no novo diedro de projeção). Assim,  $B_4$  é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. De forma semelhante,  $C_4$ ,  $D_4$  e  $E_4$  são as projeções dos pontos **C**, **D** e **E** no **plano 4** (respetivamente) e situam-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **B**, **C**, **D** e **E**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).  $B_2$  é a projeção frontal do ponto **B** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $B_4$  ao eixo **X'**.  $C_2$  é a projeção frontal do ponto **C** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $C_4$  ao eixo **X'**.  $D_2$  é a projeção frontal do ponto **D** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $D_4$  ao eixo **X'**.  $E_2$  é a projeção frontal do ponto **E** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $E_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $E_4$  ao eixo **X'**.

A partir das projeções dos cinco pontos (**A**, **B**, **C**, **D** e **E**), desenharam-se as projeções do pentágono [ABCDE].

### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte do eixo da pirâmide – a reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta **p** não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$ .

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento [OV] (o eixo da pirâmide) está contido na reta **p**, pelo que o ponto **V** é um ponto da reta **p**. Assim, a distância do ponto **V** ao plano  $\rho$  mede-se na reta **p**. A reta **p** não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento [OV] (o eixo da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

No entanto, já se recorreu a um processo geométrico auxiliar para determinar as projeções do pentágono da base da pirâmide. De facto, no diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4p}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $O_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4p}$ , (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por outro lado, a reta  $p$ , no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) é uma reta frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, o segmento de reta  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) já se projeta em verdadeira grandeza, em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, sobre a reta  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), a partir de  $O_4$ , mediram-se os 8 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto  $V$  ao plano  $\rho$ ) e determinou-se  $V_4$  (a projeção do ponto  $V$  no **plano 4**). Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada e determinaram-se as projeções do ponto  $V$ , no diedro de projeção inicial.

$V_1$  (a projeção horizontal do ponto  $V$ ) determinou-se diretamente ainda no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ).  $V_2$  (a projeção frontal do ponto  $V$ ) determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $V_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $V_4$  ao eixo  $X'$ .

### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos seis vértices da pirâmide (os vértices **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, da base, e o vértice **V**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABCVDE]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2V_2D_2E_2]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta  $[CD]$ , da base, é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal – a base  $[ABCDE]$  e a face lateral  $[CDV]$ . Em projeção frontal, as faces laterais  $[ABV]$ ,  $[BCV]$ ,  $[AEV]$  e  $[DEV]$  são visíveis – nesse sentido, as arestas laterais  $[BV]$ ,  $[AV]$  e  $[EV]$  são visíveis, pois situam-se na parte visível da superfície do sólido (são arestas que separam faces visíveis, em projeção frontal). Em projeção frontal, a base  $[ABCDE]$  é invisível, bem como a face lateral  $[CDV]$ .

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[BCDEV]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1E_1V_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AE]$ , da base, e a aresta lateral  $[AV]$ . Em projeção horizontal, as faces laterais  $[BCV]$ ,  $[CDV]$  e  $[DEV]$  são visíveis, pelo que as arestas  $[CV]$  e  $[DV]$  são igualmente **visíveis** em projeção horizontal (porque separam faces visíveis em projeção horizontal). Em projeção horizontal, a base  $[ABCDE]$  é invisível, bem como as faces laterais  $[ABV]$  e  $[AEV]$ .

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O pentágono  $[ABCDE]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do pentágono  $[ABCDE]$ ), da reta  $p$  e, ainda, da projeção da reta  $p$  no **plano 4**.

## 545.

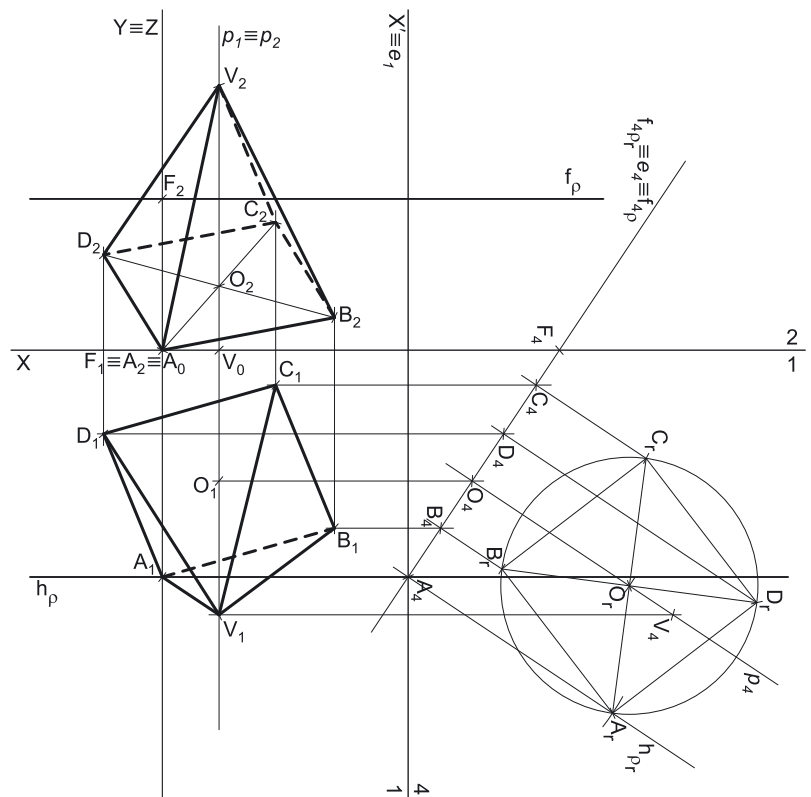
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto  $V$ , pelas suas projeções, bem como o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. O ponto  $V$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

Os dados permitiram-nos, ainda, determinar as projeções do ponto  $A$ , pertencente ao plano  $\rho$  – o ponto  $A$ , para pertencer ao plano  $\rho$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). O ponto  $A$  tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ), pois  $h_p$  é uma reta horizontal (uma reta fronto-horizontal) do plano, com cota nula.). Nesse sentido, determinaram-se as projeções do ponto  $A$ , em função da sua abcissa.

### Resolução:

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por outro lado, o único dado, no enunciado, respeitante ao quadrado **[ABCD]**, é o vértice **A** – não é possível a construção do quadrado **[ABCD]**, apenas a partir do vértice **A**, por falta de dados (não nos é dado o lado do quadrado, nem o centro da circunferência circunscrita à figura nem qualquer outro vértice do quadrado). Assim, é necessário determinar qualquer outro elemento do quadrado, para que seja possível prosseguir com a resolução.

Os dados do enunciado referem-se ao vértice da pirâmide (o vértice **V**), estando igualmente expresso que se trata de uma **pirâmide regular**. Nesse sentido, **o eixo da pirâmide é ortogonal ao plano da base**. Nesse sentido, o centro da base (o ponto **O**) é necessariamente o ponto do plano  $\rho$  (o plano que contém a base) e, ainda, um ponto da reta suporte do eixo da pirâmide. Assim, o ponto **O** é o ponto de interseção da reta suporte do eixo da pirâmide com o plano  $\rho$ . (o plano que contém a base do sólido).

Assim, pelo ponto **V** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\rho$ , que é a reta suporte do eixo da pirâmide – a reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **CrITÉRIO de Reversibilidade**, pelo que a reta **p** não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$ . Em seguida, há que determinar as projeções do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  – o ponto **O**.

Neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **p** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **p**, para além do ponto **P**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  – a reta **p** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ ;
3. por fim, a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  (o ponto **O**) não se pode processar de forma direta, pois nem a reta **p** nem o plano  $\rho$  são projetantes..

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta **p** verificarão o **CrITÉRIO de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção será possível garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  de forma direta e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o plano  $\rho$  seja um plano projetante (pelo que a determinação do ponto de interseção entre a reta **p** e o plano  $\rho$  terá determinação direta). É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção do ponto **V** no novo plano de projeção (o **plano 4**), bem como o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ). **V<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **V** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **V<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **V<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 7 cm – a cota de **V**).

O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto **F**, qualquer, do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ). Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se recorrer a um ponto **F** com abcissa nula.

Em seguida, determinou-se **F<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **F** no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de **F<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **F<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 4 cm – a cota de **F**, que é a cota de  $f_\rho$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4\rho}$ , passa por **F<sub>4</sub>** pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos – o ponto **F<sub>4</sub>** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X'**).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta **p** é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por **V<sub>4</sub>** conduziu-se **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta **p** já verificam o **CrITÉRIO de Reversibilidade**.

Por fim, uma vez que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, é possível, de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$ , a partir da sua projeção no **plano 4** – **O<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **O** no **plano 4**) é o ponto de concorrência de **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**) com  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Em seguida, determinou-se **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**), de forma direta, sobre **p<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **p**). Invertendo a mudança do diedro de projeção efetuada, foi possível determinar **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**), em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **O<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **O<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **O** é, assim, o centro do quadrado **[ABCD]**, pelo que já é possível prosseguir com a construção do quadrado. Como atrás se havia referido, o plano que contém o triângulo (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

#### Determinação das projeções da base da pirâmide:

Embora se pudesse ter optado por rebater o plano  $\rho$  diretamente (à semelhança das situações anteriores), neste caso optou-se por uma situação diferente, a partir da mudança do diedro de projeção já efetuada. Essa situação consiste no rebatimento do plano  $\rho$  para o **plano 4** – essa situação corresponde, no novo diedro de projeção, ao rebatimento de um plano de topo (o plano  $\rho$ ) para o Plano Frontal de Projeção (o **plano 4**).

Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o novo traço frontal do plano ( $f_{4\rho}$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $f_{4\rho} \equiv e_4 \equiv f_{4\rho\rho}$  ( $e_4$ , a projeção horizontal da charneira – a projeção da charneira no **plano 1**) situa-se no eixo  $X'$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos de topo (ortogonais a  $f_{4\rho}$ ). O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{\rho}$ ) é perpendicular a  $f_{4\rho}$ , pelo que, em rebatimento,  $h_{\rho}$  fica perpendicular a  $f_{4\rho}$ . Em seguida, procedeu-se ao rebatimento dos pontos **A** e **O**, o que se processa em função dos respetivos afastamentos (os afastamentos que estão referenciados ao **plano 4**).

Para rebater o ponto **O** conduziu-se, por  $O_4$  (a projeção do ponto **O** no **plano 4**), uma perpendicular à charneira (uma perpendicular a  $f_{4\rho}$ ), que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento (nesta situação, essa perpendicular à charneira coincide com  $p_4$ , a projeção da reta  $p$  no **plano 4**). Em seguida, sobre essa perpendicular à charneira mediu-se o afastamento do ponto **O** em relação ao **plano 4** (a distância de  $O_1$  ao eixo  $X'$ ), o que nos permitiu determinar  $O_r$ .

O rebatimento do ponto **A** processou-se de forma idêntica à atrás exposta para o ponto **O**. Por  $A_4$  conduziu-se uma perpendicular à charneira ( $f_{4\rho}$ ), que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A** – neste caso, essa perpendicular à charneira é  $h_{\rho}$ . Sobre a perpendicular à charneira, pediu-se o afastamento do ponto **A** em relação ao **plano 4** – assim,  $A_r$  é o ponto de  $h_{\rho}$ , cuja distância a  $f_{4\rho}$  é igual à distância de  $A_1$  ao eixo  $X'$  (e que é o afastamento do ponto **A**, em relação ao **plano 4**).

Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado (em verdadeira grandeza) e efetuou-se a construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono, em rebatimento – os pontos **B<sub>r</sub>**, **C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**. Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$ , determinando-se as projeções dos pontos **B**, **C** e **D** (no novo diedro de projeção).

Assim, por  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira ( $f_{4\rho}$ ), que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **B**, e determinou-se  $B_4$ , sobre  $f_{4\rho}$  –  $B_4$  é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Por  $B_4$  conduziu-se a linha de chamada (perpendicular ao eixo  $X'$ ), na qual se representou o afastamento do ponto **B** em relação ao **plano 4**, o que nos permitiu determinar  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**). Note que a distância de  $B_1$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_r$  a  $f_{4\rho}$ , pois o rebatimento do plano  $\rho$  para o **plano 4** se processou em função dos afastamentos dos pontos (m relação ao **plano 4**).

De forma semelhante,  $C_4$  e  $D_4$  são as projeções dos pontos **C** e **D** no **plano 4** (respetivamente) e situam-se nas perpendiculares à charneira ( $f_{4\rho}$ ) que passam por  $C_r$  e  $D_r$ , respetivamente –  $C_4$  e  $D_4$  situam-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Por  $C_4$  e por  $D_4$  conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo  $X'$ ), nas quais se representaram os afastamentos dos dois pontos em relação ao **plano 4**, o que nos permitiu determinar  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**) e  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto **D**). Note que a distância de  $C_1$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $C_r$  a  $f_{4\rho}$ , pois o rebatimento do plano  $\rho$  para o **plano 4** se processou em função dos afastamentos dos pontos (m relação ao **plano 4**). De forma semelhante, a distância de  $D_1$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $D_r$  a  $f_{4\rho}$ , pois o rebatimento do plano  $\rho$  para o **plano 4** se processou em função dos afastamentos dos pontos (m relação ao **plano 4**).

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **B**, **C** e **D**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).  $B_2$  é a projeção frontal do ponto **B** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$ .  $C_2$  é a projeção frontal do ponto **C** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $C_4$  ao eixo  $X'$ .  $D_2$  é a projeção frontal do ponto **D** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D_4$  ao eixo  $X'$ .

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide (os vértices **A**, **B**, **C** e **D**, da base, e o vértice **V**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABVD]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. Em projeção frontal, as faces laterais **[ABV]** e **[ADV]** são visíveis, pelo que a aresta lateral **[AV]** é igualmente **visível** em projeção frontal (porque separa duas faces visíveis em projeção frontal). Em projeção frontal, a base **[ABCD]** é invisível, bem como as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]**.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[AVBCD]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>V<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta **[AB]**, da base, é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – a base **[ABCD]** e a face lateral **[ABV]**. Em projeção horizontal, as faces laterais **[BCV]**, **[CDV]** e **[ADV]** são visíveis – nesse sentido, as arestas laterais **[CV]** e **[DV]** são visíveis, pois situam-se na parte visível da superfície do sólido (são arestas que separam faces visíveis, em projeção horizontal). Em projeção horizontal, a base **[ABCD]** é invisível, bem como a face lateral **[ABV]**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Traçado:

Os dados (os traços do plano  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $p$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado  $[ABCD]$ ), da reta  $p$  e, ainda, da projeção da reta  $p$  no **plano 4**.

## 546.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano  $p$  está definido por um ponto (o ponto  $A$ ) e pela sua orientação (é dado o diedro que o plano  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção).

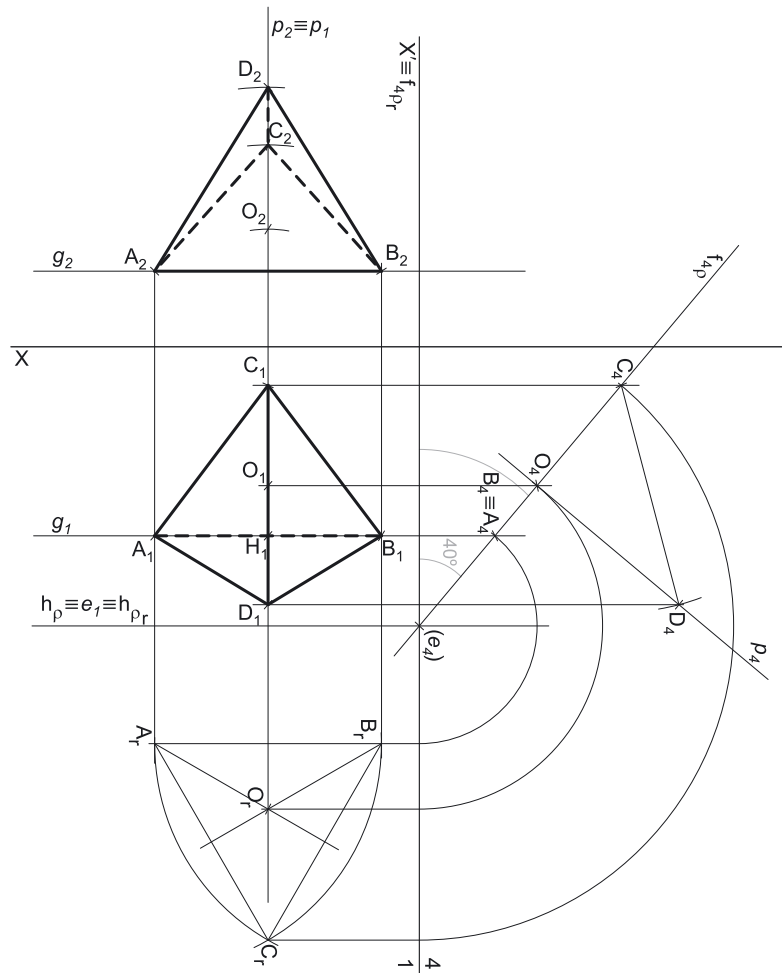
Os dados permitiram-nos, ainda, determinar as projeções do ponto  $B$ . Para tal conduziu-se, pelas projeções do ponto  $A$ , as projeções homónimas da reta  $g$ , a reta fronto-horizontal que é a reta suporte do lado  $[AB]$  do triângulo. A reta  $g$  é fronto-horizontal (é paralela a ambos os planos de projeção), pelo que o lado  $[AB]$  se projeta em verdadeira grandeza em ambos os planos de projeção. Nesse sentido, sobre qualquer das projeções da reta  $g$ , e a partir da projeção correspondente do ponto  $A$ , mediram-se os 6 cm (o comprimento do lado do triângulo) e determinaram-se as projeções do ponto  $B$ , sobre as projeções homónimas da reta  $g$ . Note que se garantiu que o ponto  $B$  se situa à direita do ponto  $A$ , como o enunciado refere expressamente.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do triângulo $[ABC]$ :

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $p$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  (a face inferior do tetraedro) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Note que se poderia ter optado pelo rebatimento do plano  $p$  (à semelhança das situações anteriores), para o que seria necessário, antes de mais, a determinação dos seus traços nos planos de projeção. Assim, neste caso optou-se por uma situação diferente – optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $p$  num plano projetante e, em seguida, rebater o plano  $p$  **como um plano projetante**.



Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $p$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $p$ , o eixo  $X'$  é perpendicular às retas horizontais do plano  $p$  (que são retas fronto-horizontais), pelo que o eixo  $X'$  é perpendicular a  $g_1$  (a projeção horizontal da reta  $g$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $p$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $p$  no **plano 4** ( $f_{4p}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto  $A$  (o ponto que define o plano  $p$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**. Assim,  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $A$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $p$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $p$  no **plano 4** ( $f_{4p}$ ) tem necessariamente de passar por  $A_4$  (a nova projeção frontal do ponto  $A$ ). Já temos um ponto para definir  $f_{4p}$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto  $B$  tem utilidade nula, pois a reta  $g$ , no novo diedro de projeção, é uma reta projetante frontal –  $B_4$  (a projeção do ponto  $B$  no **plano 4**) está coincidente com  $A_4$ , facto que se assinalou em seguida.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

É dado o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção (um ângulo de  $40^\circ$ ) e tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano de topo, o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção projeta-se em verdadeira grandeza no ângulo que o seu traço frontal ( $f_{4\rho}$ ) faz com o eixo  $X'$ . Nesse sentido, já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Assim,  $f_{4\rho}$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**) passa por  $A_4$  e faz, com o eixo  $X'$ , um ângulo de  $40^\circ$  –  $f_{4\rho}$  está definido por um ponto (o ponto  $A_4$ ) e por uma direção (o ângulo que faz com o eixo  $X'$ ).

Note que, das duas hipóteses que existem para marcar o ângulo de  $40^\circ$  a partir de  $A_4$ , aquela que a resolução apresenta é a que nos garante que o traço frontal do plano  $\rho$  (no diedro de projeção inicial) tem cota positiva. Note, ainda, que não se determinou o traço frontal do plano  $\rho$ , por este não ser necessário à resolução do exercício, mas ainda assim se garantiu que tem cota positiva.

Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que é concorrente com  $f_{4\rho}$  no eixo  $X'$  e é paralelo ao eixo  $X$  inicial. O plano  $\rho$ , no diedro de projeção inicial, está assim definido por duas retas paralelas – a reta  $g$  e o seu traço horizontal ( $h_\rho$ ). Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), como um plano projetante (um plano de topo). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\rho \equiv e_r \equiv h_{pr}$  ( $e_r$ , a projeção da charneira no **plano 4, é um ponto no eixo  $X'$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).**

Em seguida, rebateram-se os pontos **A** e **B**, desenhando a projeção frontal (no **plano 4**) dos arcos dos respetivos rebatimentos (que estão coincidentes, em projeção frontal), em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $A_r$  e  $B_r$  (que, nos seus rebatimentos, mantiveram os respetivos afastamentos, em relação ao **plano 4**).

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos  $C_r$  (o terceiro vértice do triângulo) e  $O_r$  (o centro do triângulo). Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos **C** e **O** (no novo diedro de projeção). Assim,  $C_4$  é a projeção do ponto **C** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. De forma semelhante,  $O_4$  é a projeção do ponto **O** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Note que os pontos **C** e **O**, na inversão dos respetivos rebatimentos, mantiveram os seus afastamentos (em relação ao **plano 4**).

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **C** e **O**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).  $C_2$  é a projeção frontal do ponto **C** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $C_4$  ao eixo  $X'$ .  $O_2$  é a projeção frontal do ponto **O** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $O_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $O_4$  ao eixo  $X'$ .

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]** (no diedro de projeção inicial).

#### Determinação das projeções do quarto vértice do tetraedro (o vértice **D**):

O sólido pedido é um **poliedro regular**, que toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**. Nesse sentido, o eixo do sólido (relativo à face **[ABC]**) é necessariamente **ortogonal** ao plano que contém aquela face (o plano  $\rho$ ). Esse eixo do sólido está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções homónimas da reta  $p$ , a reta suporte do eixo do tetraedro (relativo à face **[ABC]**) – a reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta  $p$  não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$ .

Por outro lado, não é conhecida a altura de um tetraedro, mas sabe-se que as suas arestas são todas iguais (têm o mesmo comprimento, pois trata-se de um poliedro regular). O ponto **D** (o quarto vértice do sólido) é, assim, um ponto da reta  $p$  tal que a sua distância a qualquer dos outros três vértices do sólido é 6 cm (o comprimento do lado do triângulo). Acontece que nenhuma das arestas que convergem no ponto **D** (as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]**) é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que nenhuma dessas arestas se projeta em verdadeira grandeza (estão deformadas em ambas as projeções), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que as arestas **[AD]** e **[BD]** estão necessariamente contidas em retas oblíquas e que a aresta **[CD]** está necessariamente contida numa reta de perfil.

No entanto, já se recorreu a um processo geométrico auxiliar para determinar as projeções do triângulo **[ABC]**. De facto, no diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente), tal como a aresta **[CD]**. Nesse diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4\rho}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $O_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por outro lado, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a aresta **[CD]** é, também ela, frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, o segmento de reta **[CD]** (a aresta **[CD]** do sólido) já se projeta em verdadeira grandeza, em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, com o compasso, fazendo centro em  $C_4$  (a projeção do ponto **C** no **plano 4**) e com 6 cm de raio (a medida do lado do triângulo **[ABC]**), determinou-se  $D_4$  (a projeção do vértice **D** no **plano 4**) sobre a reta  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**). Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada e determinaram-se as projeções do ponto **D**, no diedro de projeção inicial.

$D_1$  (a projeção horizontal do ponto **D**) determinou-se diretamente ainda no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ).  $D_2$  (a projeção frontal do ponto **D**) determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D_4$  ao eixo  $X'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções do tetraedro:

A partir das projeções dos quatro vértices do sólido (os vértices **A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABD]** (que é, afinal, a face **[ABD]**), cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AC]**, **[BC]** e **[AD]**. Note que, em projeção frontal, apenas a face **[ABD]** é visível. Em projeção frontal, as restantes faces são invisíveis (as faces **[ABC]**, **[BCD]** e **[ACD]**).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ACBD]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>B<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Todos os vértices do tetraedro integram o contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta **[AB]** é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – as faces **[ABC]** e **[ABD]** (que são as faces invisíveis em projeção horizontal). As faces **[ACD]** e **[BCD]** são as faces visíveis, em projeção horizontal.

## Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os dados referem-se a um único ponto, cuja linha de chamada se representa necessariamente a **leve**. O traço horizontal do plano, no contexto do exercício, é uma linha meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As duas projeções do tetraedro (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[ABC]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo **[ABC]**), da reta **p** e, ainda, da projeção da reta **p** no **plano 4**.

## 547.

Por **altura de um prisma** entende-se a distância entre os planos que contêm as duas bases do prisma. No caso de um prisma cujas bases estão contidas em planos de rampa, a altura desse prisma é a distância entre os dois planos de rampa que contêm as bases do prisma.

## 548.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ .

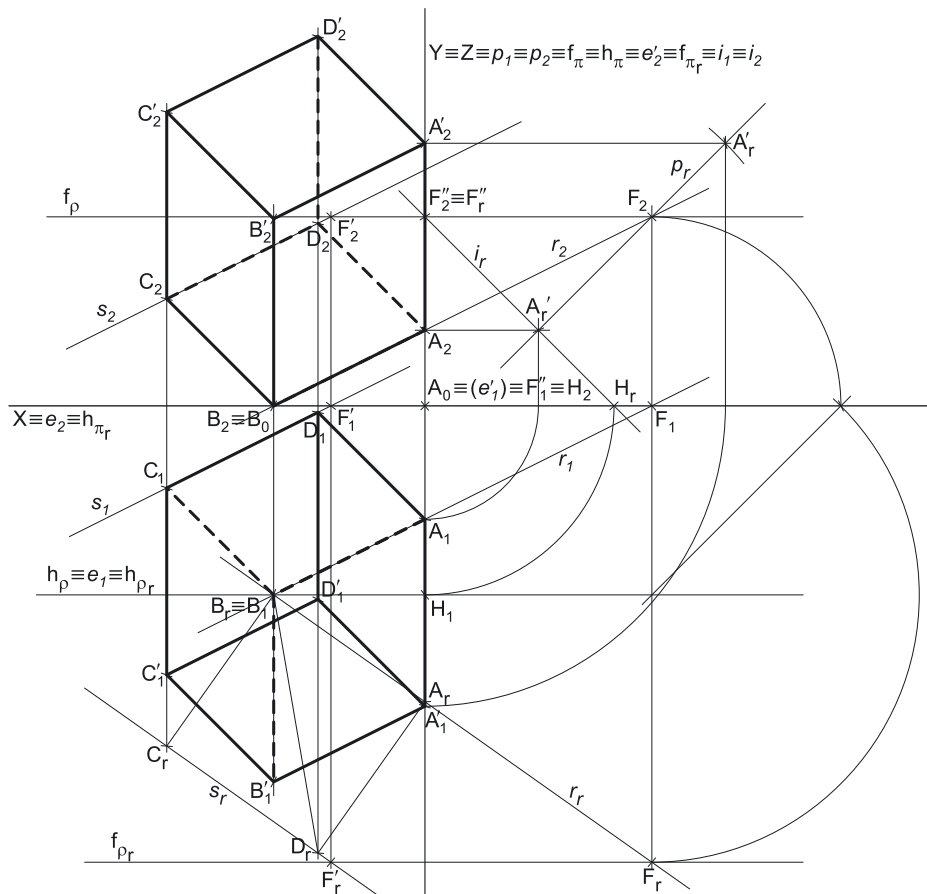
O ponto **B** é um ponto com cota nula, pelo que já temos um ponto para definir  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com cota nula, pelo que já temos a direção para definir  $h_p - h_p$  está definido por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

Em seguida, desenharam-se as projeções da reta **r**, a reta que passa pelos pontos **A** e **B** e determinou-se o seu traço frontal, o ponto **F**. Note que o ponto **B** é, na prática, o traço horizontal da reta **r**. O ponto **F** é um ponto com afastamento nulo, pelo que já temos um ponto para definir  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com afastamento nulo, pelo que já temos a direção para definir  $f_p - f_p$  está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

### Resolução:

#### Determinação das projeções da base inferior do prisma:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{h}_\rho \equiv \mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{h}_{\rho_r}$  ( $\mathbf{e}_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a  $\mathbf{h}_\rho$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $\mathbf{f}_\rho$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos uma direção para definir  $\mathbf{f}_{\rho_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir  $\mathbf{f}_{\rho_r}$ . Nesse sentido, há que rebater o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $r$ ), que é um ponto de  $\mathbf{f}_\rho$ . O rebatimento do ponto  $F$  tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziu-se, por  $F_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ). Com o compasso, fazendo centro em  $F_1$  e com raio até  $F_2$ , transportou-se a cota do ponto  $F$  para o eixo  $X$ , o que nos permitiu desenhar o triângulo do rebatimento do ponto  $F$  em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $F$  em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , onde se situa  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $\mathbf{f}_{\rho_r}$ . Nesse sentido desenhou-se  $\mathbf{f}_{\rho_r}$ , passando por  $F_r$  e paralelo ao eixo  $X$  –  $\mathbf{f}_{\rho_r}$  está definido por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizantal).

Em seguida, há que rebater os pontos  $A$  e  $B$ . O ponto  $B$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $B_r \equiv B_1$ . Para rebater o ponto  $A$  é necessário rebater uma reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto  $A$  pertença – a reta  $r$ , neste caso. Já temos um ponto para definir a reta  $r_r$  (a reta  $r$  em rebatimento) – o ponto  $B_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta  $r$  em rebatimento. Tendo em conta que o ponto  $F$  é o traço frontal da reta  $r$ , a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $B_r$  e por  $F_r$  (está definida por dois pontos). Em seguida, por  $A_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $A_r$  sobre a reta  $r_r$ .

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o quadrado  $[ABCD]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos  $C_r$  e  $D_r$  (os outros dois vértices do quadrado, em rebatimento). Note que se garantiu que o quadrado se situa no espaço do  $1^a$  Diedro, para que o prisma se situa igualmente no espaço do  $1^a$  Diedro, como o enunciado pede expressamente. Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$ , determinando-se as projeções dos pontos  $C$  e  $D$ .

A inversão do rebatimento dos pontos  $C$  e  $D$  e a determinação das respetivas projeções processou-se com o recurso a uma outra reta oblíqua do plano  $\rho$ , à qual os dois pontos pertencem – a reta  $s$ , que é a reta suporte do lado  $[CD]$  do quadrado. A reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $C_r$  e  $D_r$ ). Para definir a reta  $s$  em projeções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $s$  é necessariamente paralela à reta  $r$  (que é a reta suporte do lado  $[AB]$  do quadrado), pelo que já temos uma direção para definir a reta  $s$  em projeções. Falta-nos um ponto para definir a reta  $s$  (em projeções). Nesse sentido, determinou-se o ponto  $F'$ , o traço frontal da reta  $s$ , que é um ponto de  $\mathbf{f}_\rho$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto  $F'_r$  situa-se sobre  $\mathbf{f}_{\rho_r}$  – é o ponto de concorrência da reta  $r_r$  com  $\mathbf{f}_{\rho_r}$ . Conduzindo, por  $F'_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal a charneira que contém o arco do seu rebatimento), determinaram-se as projeções do ponto  $F'$  –  $F'_2$  situa-se sobre  $\mathbf{f}_\rho$  e  $F'_1$  situa-se no eixo  $X$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $s$  em projeções – a reta  $s$ , em projeções, está definida por um ponto (o ponto  $F'$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $r$ ), o que nos permitiu desenhar as suas projeções.

Em seguida, por  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $s_r$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ). A projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ) situa-se sobre  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ). De forma semelhante, por  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $s_r$  (a projeção horizontal da reta  $s$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto  $D$ ). A projeção frontal do ponto  $D$  ( $D_2$ ) situa-se sobre  $s_2$  (a projeção frontal da reta  $s$ ).

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do quadrado  $[ABCD]$ .

#### Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\rho$ . Consideremos a aresta lateral  $[AA']$  – pelas projeções do ponto  $A$  conduziram-se as projeções da reta  $p$ , a reta suporte da aresta lateral  $[AA']$ . A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta  $p$  não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$ .

A altura do prisma é a distância entre os planos das bases, que é medida numa reta ortogonal aos planos das bases (trata-se a **distância entre dois planos paralelos**). O segmento  $[AA']$  (a aresta lateral  $[AA']$ ) está contido na reta  $p$ , pelo que o ponto  $A'$  é um ponto da reta  $p$ . Assim, a distância do ponto  $A'$  ao ponto  $A$  é a distância do ponto  $A'$  ao plano  $\rho$  e corresponde à distância entre os planos das duas bases, que se mede na reta  $p$ . A reta  $p$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento  $[AA']$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante da reta  $p$  (um plano de perfil) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano  $\pi$  (o plano projetante da reta  $p$ ) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é  $\mathbf{f}_\pi$  – tem-se imediatamente  $\mathbf{f}_\pi \equiv \mathbf{e}'_2 \equiv \mathbf{f}_{\pi_r}$ .

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto  $A$ , determinando  $A'_r - A'_r$  é o ponto  $A$  rebatido no seu segundo rebatimento (o ponto  $A$  rebatido pelo rebatimento do plano  $\pi$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção é a direção ortogonal ao plano  $\rho$ , que só fica garantida através da ortogonalidade da reta  $p$  a uma outra reta do plano  $\rho$ . Nesse sentido, recorreu-se à reta  $i$ , que é uma reta de perfil do plano  $\rho$  (a reta  $i$  é a reta de interseção do plano  $\pi$  com o plano  $\rho$ ). A reta  $i$  está definida por dois pontos – os seus traços nos planos de projeção (os pontos  $F'$  e  $H$ ). Para se garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ , é necessário garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $i$  (para que se verifique o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**). Tendo em conta que se trata de duas retas de perfil (cujas projeções não verifica o **Critério de Reversibilidade**), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano  $\pi$ , já iniciado.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Efetuem o rebatimento da reta  $i$ . O ponto  $F''$  é um ponto da charneira (a reta  $e'$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F''_r \equiv F''_2$ . Rebateu-se o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $i$ ), determinando-se  $H_r$ . A reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) passa por  $F''_r$  e por  $H_r$  (e tem ainda de passar por  $A'_r$ , pois o ponto  $A$  também pertence à reta  $i$ ). Em seguida, desenhou-se a reta  $p_r$ , passando por  $A'_r$  e perpendicular a  $i_r$ , – está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $i$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . Note que o ponto  $A$  é, na prática, o ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$ , o que se pode comprovar em rebatimento.

Sobre a reta  $p_r$ , a partir de  $A'_r$ , mediram-se os 7 cm (a altura do prisma, que é a distância do ponto  $A'$  ao plano  $\rho$ ) e determinou-se  $A'_r$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $A'$  e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta  $p$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação das projeções dos restantes vértices da base superior do sólido, tendo-se em conta que as arestas laterais do prisma são todas paralelas entre si (estão contidas em retas de perfil ortogonais aos planos das bases) e, ainda, que as arestas da base superior são paralelas às arestas correspondentes da base inferior.

Assim, pelas projeções do ponto  $B$  (um dos vértices da base inferior, consecutivo a  $A$ ) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[BB']$  (que é de perfil e não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações) – o ponto  $B'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $B$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $A'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[A'B']$  da base superior (que também não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice  $B'$ , da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

De forma idêntica, pelas projeções do ponto  $D$  (o outro vértice da base inferior que é consecutivo a  $A$ ) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[DD']$  (que é de perfil e, mais uma vez, não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações) – o ponto  $D'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $D$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $A'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[A'D']$  da base superior (que também não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice  $D'$ , da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

Por fim, pelas projeções do ponto  $C$  (um dos vértices da base inferior consecutivo a  $D$ ) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[CC']$  (que é de perfil e, de novo, não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações) – o ponto  $C'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $C$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $D'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[C'D']$  da base superior (que também não se identificou, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice  $C'$ , da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

### Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos oito vértices do prisma (os vértices  $A, B, C$  e  $D$  da base inferior, e os vértices  $A', B', C'$  e  $D'$ , da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABCC'D'A']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2C'_2D'_2A'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice  $D$  e o vértice  $B'$ . O vértice  $D$ , por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AD]$  e  $[CD]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[DD']$ . O vértice  $B'$ , por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[BB']$ . Note que, em projeção frontal, a base superior (a base  $[A'B'C'D']$ ) é visível, bem como as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ . A base inferior (a base  $[ABCD]$ ) e as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  são invisíveis.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[AA'B'C'D]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1A'_1B'_1C'_1C_1D_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – o vértice  $D'$  e o vértice  $B$ . O vértice  $B$ , por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[BB']$ . O vértice  $D'$ , por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'D']$  e  $[C'D']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[DD']$ . Note que, em projeção horizontal, a base superior (a base  $[A'B'C'D']$ ) é visível, bem como as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$ . A base inferior (a base  $[ABCD]$ ) e as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$  são invisíveis.

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado  $[ABCD]$ ), da reta  $p$ , do plano  $\pi$  e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\pi$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice  $A'$ ), bem como todos os traçados que nos permitiram determinar os restantes vértices da base superior do sólido.

## 549.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **S**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ .

Em seguida, desenharam-se as projeções da reta  $r$ , a reta que passa pelos pontos **R** e **S** e determinaram-se os seus traços nos planos de projeção – os pontos **F** e **H**. O ponto **F** é um ponto com afastamento nulo, pelo que já temos um ponto para definir  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com afastamento nulo, pelo que já temos a direção para definir  $f_p - f_p$  está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**). O ponto **H** é um ponto com cota nula, pelo que já temos um ponto para definir  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com cota nula, pelo que já temos a direção para definir  $h_p - h_p$  está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

**Resolução:***Determinação das projeções da base inferior do prisma:*

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Note que se poderia ter optado pelo rebatimento do plano  $\rho$  (à semelhança de outras situações anteriores), mas, neste caso, optou-se por uma situação diferente – optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante e, em seguida, rebater o plano  $\rho$  como um plano projetante.

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

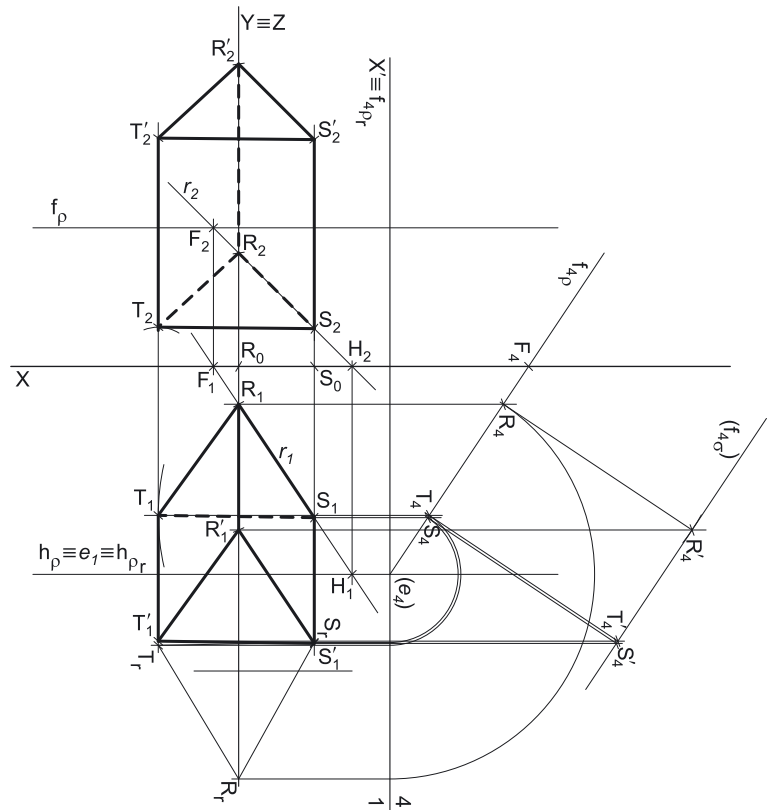
- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4p}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4p}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto **F** (o traço frontal da reta  $r$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**. Assim, **F<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **F<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **F<sub>2</sub>** ao eixo **X**. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4p}$ ) tem necessariamente de passar por **F<sub>4</sub>** (a nova projeção frontal do ponto **F**), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4p} - f_{4p}$  está definido por dois pontos (o ponto **F<sub>4</sub>** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo **X'**).

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, as novas projeções frontais dos pontos **R** e **S** (**R<sub>4</sub>** e **S<sub>4</sub>**, respetivamente) têm de se situar sobre  $f_{4p}$ . Nesse sentido, desenharam-se as linhas de chamada daqueles dois pontos (perpendiculares ao eixo **X'**) e determinaram-se as suas novas projeções frontais (**R<sub>4</sub>** e **S<sub>4</sub>**), sobre  $f_{4p}$ .

Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), como um plano projetante (um plano de topo). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{p_r}$  (**e<sub>4</sub>**, a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo **X'**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, rebateram-se os pontos **R** e **S**, desenhando a projeção frontal (no **plano 4**) dos arcos dos respetivos rebatimentos (que estão coincidentes, em projeção frontal), em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar **R<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>** (que, nos seus rebatimentos, mantiveram os respetivos afastamentos, em relação ao **plano 4**).

A partir dos pontos **R<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, construiu-se o triângulo **[RST]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o ponto **T<sub>r</sub>** (o terceiro vértice do triângulo). Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$  (como plano de topo), determinando-se as projeções do ponto **T** (no novo diedro de projeção). Assim, **T<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **T** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre **f<sub>4, $\rho$</sub>** , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Note que o ponto **T**, na inversão do seu rebatimento, manteve o seu afastamento (em relação ao **plano 4**).

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinou-se a projeção frontal do ponto **T**, precisamente a partir da sua cota (que se manteve). **T<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **T** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **T<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **T<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

A partir das projeções dos três pontos (**R**, **S** e **T**), desenharam-se as projeções do triângulo **[RST]** (no diedro de projeção inicial).

### Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:

Em seguida, representou-se (no novo diedro de projeção) o plano  $\sigma$ , que é o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a base superior do prisma (o triângulo **[R'S'T']**). A distância entre os dois planos é a altura do prisma (que é 7 cm) e mede-se ortogonalmente aos dois planos. Assim, desenhou-se uma paralela a **f<sub>4, $\rho$</sub>** , situada 7 cm para cima de **f<sub>4, $\rho$</sub>** , que é **f<sub>4, $\sigma$</sub>**  (o traço, no **plano 4**, do plano  $\sigma$ ). O plano  $\sigma$  é, assim, o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a base superior do prisma (a base **[R'S'T']**). Note que o plano  $\sigma$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço no **plano 4**), razão pela qual o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** se identificou entre parêntesis).

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\rho$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano de topo, a ortogonalidade de qualquer reta em relação ao plano  $\rho$  é direta. Assim, qualquer aresta lateral do sólido tem a sua projeção no **plano 4** perpendicular a **f<sub>4, $\rho$</sub>**  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a uma reta do plano  $\rho$  – o seu novo traço frontal) e tem, também, a sua projeção horizontal perpendicular a **h <sub>$\rho$</sub>**  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a outra reta do plano  $\rho$  – o seu traço horizontal).

Assim, pelas projeções dos vértices do triângulo **[RST]** (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das arestas laterais do prisma (ortogonais ao plano  $\rho$ ), o que nos permitiu determinar as duas projeções do sólido, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Note que os pontos **R'**, **S'** e **T'** (os vértices da base superior) foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções frontais (no **plano 4**), pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  é também um plano projetante frontal.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos vértices da face superior do sólido (o triângulo **[R'S'T']**). Tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **R'**, **S'** e **T'**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

**R'<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **R'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **R'<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **R'<sub>4</sub>** ao eixo **X'**. **S'<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **S'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **S'<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **S'<sub>4</sub>** ao eixo **X'**. **T'<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **T'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **T'<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **T'<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

### Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos seis vértices do prisma (os vértices **R**, **S** e **T** da base inferior, e os vértices **R'**, **S'** e **T'**, da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[STT'R'S']**, cuja projeção frontal é o polígono **[S<sub>2</sub>T<sub>2</sub>T'<sub>2</sub>R'<sub>2</sub>S'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **R**. O vértice **R**, por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[RS]** e **[RT]**, da base inferior, e a aresta lateral **[RR']**. Em projeção frontal, a aresta **[S'T']** da base superior é visível, pois separa duas faces visíveis, em projeção frontal – a base superior **[R'S'T']** e a face lateral **[SS'T'T]**. Note que, em projeção frontal, a base inferior (a base **[RST]**) e as faces laterais **[RR'S'S]** e **[RR'T'T]** são invisíveis.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[RSS'T'T]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[R<sub>1</sub>S<sub>1</sub>S'<sub>1</sub>T'<sub>1</sub>T<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **R'**. O vértice **R'**, por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[R'S']** e **[R'T']**, da base superior, e a aresta lateral **[RR']**. Note que, em projeção horizontal, a base superior (a base **[R'S'T']**) é visível, bem como as faces laterais **[RR'S'S]** e **[RR'T'T]**. A base inferior (a base **[RST]**) e a face lateral **[SS'T'T]** são invisíveis, pelo que a aresta **[ST]**, da base inferior, é invisível (é a aresta que separa aquelas duas faces, que são invisíveis em projeção horizontal).

### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[RST]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo **[RST]**) e, ainda, da projeção do prisma no **plano 4**.

## 550.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\rho$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação a eixo  $X$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $A$ , pertencente ao plano  $\rho$  – o ponto  $A$  tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). O ponto  $A$  tem cota nula, pelo que o ponto  $A$  é, necessariamente, um ponto do traço horizontal do plano ( $h_p$ ), o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $A$ , de forma direta.

Note que é dado o **ângulo** que o lado  $[AB]$  do retângulo faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

Por fim, atendendo a que a diagonal  $[AC]$  do retângulo é de perfil, sabe-se que as projeções dos dois pontos partilham a mesma linha de chamada. Sabe-se, ainda, que a circunferência circunscrita ao retângulo é tangente a ambos os planos de projeção – uma vez que o ponto  $A$  tem cota nula, a circunferência é tangente ao Plano Horizontal de Projeção (é tangente a  $h_p$ ) no ponto  $A$ . Ora, uma vez que a diagonal  $[AC]$  é de perfil, a diagonal  $[AC]$  é necessariamente o diâmetro da circunferência que contém os dois pontos de tangência – a circunferência terá, necessariamente, de ser tangente ao Plano Frontal de Projeção (tangente a  $f_p$ ) no ponto  $C$  (o outro extremo desse diâmetro). Este raciocínio permitiu-nos concluir que o ponto  $C$  é necessariamente um ponto do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $C$  (que tem afastamento nulo).

**Resolução:***Determinação das projeções da base inferior do prisma:*

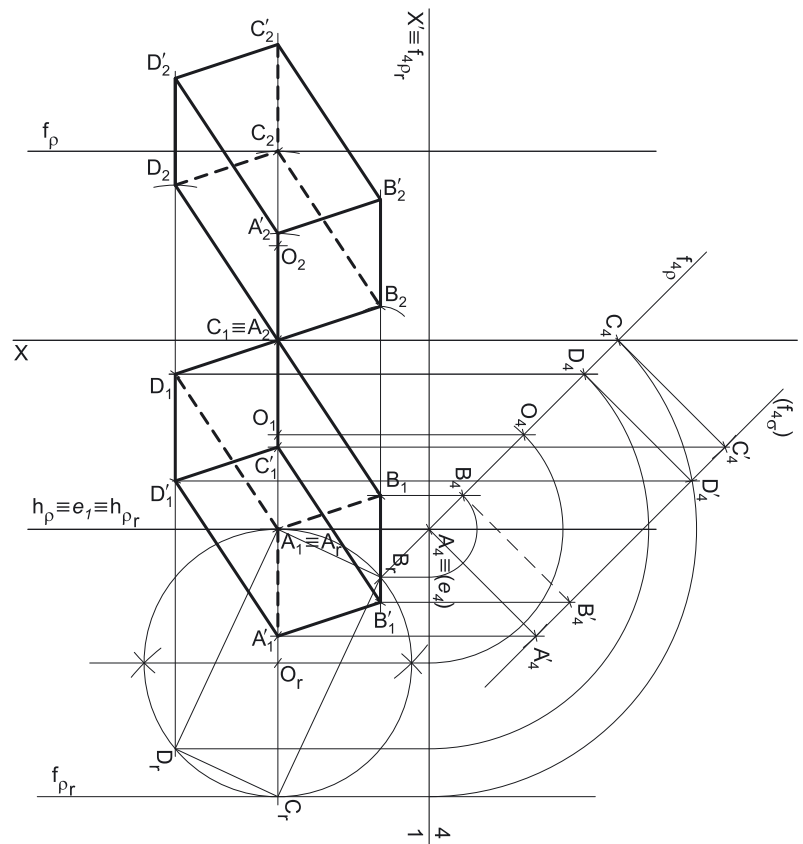
O plano que contém o retângulo  $[ABCD]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o retângulo  $[ABCD]$  (a face inferior do paralelepípedo) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do retângulo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado referido do retângulo faz com o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio retângulo, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do retângulo (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

Note que se poderia ter optado pelo rebatimento do plano  $\rho$  (à semelhança de outras situações anteriores), mas, neste caso, optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante e, em seguida, rebater o plano  $\rho$  **como um plano projetante**.

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto qualquer, de  $f_p$  (o ponto **C**, neste caso) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**. Assim,  $C_4$  é a projeção do ponto **C** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $C_2$  ao eixo  $X$  (que é 5 cm – a cota de **C**, que é a cota de  $f_p$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) tem necessariamente de passar por  $C_4$  (a nova projeção frontal do ponto **F**), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4\rho}$  –  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos (o ponto  $C_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X'$ ).

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, a nova projeção frontal do ponto **A** ( $A_4$ ) tem de se situar sobre  $f_{4\rho}$ , o que nos permitiu determinar  $A_4$  (a projeção do ponto **A** no **plano 4**), que se situa no eixo  $X'$  (pois **A** em cota nula).

Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), como um plano projetante (um plano de topo). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{pr}$  ( $e_4$ , a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo  $X'$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ . Em seguida, rebateu-se o ponto **C**, desenhando a projeção frontal (no **plano 4**) do arco do seu rebatimento, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $C_r$  (que, no seu rebatimento, manteve o seu afastamento em relação ao **plano 4**). Por uma questão de rigor, optou-se por desenhar  $f_{pr}$ , que é o traço frontal (inicial) do plano  $\rho$ , rebatido –  $f_{pr}$  passa por  $C_r$  (o ponto **C** rebatido) e é paralelo a  $h_{pr}$  (e paralelo ao eixo  $X$  inicial).

A partir dos pontos  $A_r$  e  $C_r$ , determinou-se o ponto médio do segmento  $[A_r C_r]$  (o ponto  $O_r$ ), que é o centro da circunferência circunscrita ao retângulo. Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$  e  $C_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao retângulo e efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, em verdadeira grandeza. Note que é possível comprovar que a circunferência é tangente aos traços do plano  $\rho$  em rebatimento ( $h_{pr}$  e  $f_{pr}$ ).

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) – é o ângulo que o segmento  $[A_r B_r]$  faz com  $h_{pr}$ . Assim, por  $A_r$  conduziu-se uma reta fazendo, com  $h_{pr}$ , um ângulo de  $25^\circ$ . Note que é dado que o vértice **B** do retângulo se situa à direita do vértice **A**, pelo que o ângulo tem de ter abertura para o lado direito. Assim, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $25^\circ$  a partir de  $A_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante o que o enunciado pede expressamente. O ponto  $B_r$  (o ponto **B** rebatido) é o ponto em que a reta suporte do segmento  $[A_r B_r]$  intersesta a circunferência circunscrita ao retângulo.

A partir do ponto  $B_r$ , foi possível concluir a construção do retângulo  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os seu quarto vértice em rebatimento – o ponto  $D_r$ .

Para determinar as projeções do retângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos **B** e **D** (no novo diedro de projeção). Assim,  $B_4$  é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. De forma semelhante,  $D_4$  é a projeção do ponto **D** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Note que os pontos **B** e **D**, na inversão do seu rebatimento, mantiveram os seus afastamentos em relação ao **plano 4**.

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **B** e **D**, precisamente a partir das suas cotas (que se mantiveram).  $B_2$  é a projeção frontal do ponto **B** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$ .  $D_2$  é a projeção frontal do ponto **D** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D_4$  ao eixo  $X'$ .

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do retângulo  $[ABCD]$  (no diedro de projeção inicial).

### Determinação das projeções dos vértices da face superior do paralelepípedo:

Em seguida, representou-se (no novo diedro de projeção) o plano  $\sigma$ , que é o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a face superior do paralelepípedo (o retângulo  $[A'B'C'D']$ ). A distância entre os dois planos é a altura do paralelepípedo (que é 4 cm) e mede-se ortogonalmente aos dois planos. Assim, desenhou-se uma paralela a  $f_{4\rho}$ , situada 4 cm para cima de  $f_{4\rho}$ , que é  $f_{4\sigma}$  (o traço, no **plano 4**, do plano  $\sigma$ ). O plano  $\sigma$  é, assim, o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a face superior do paralelepípedo (a face  $[A'B'C'D']$ ). Note que o plano  $\sigma$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço no **plano 4**), razão pela qual o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** se identificou entre parêntesis.

O paralelepípedo pedido é, na prática, um **prisma reto**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos que contêm as duas faces referidas. Qualquer aresta lateral do paralelepípedo está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\rho$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano de topo, a ortogonalidade de qualquer reta em relação ao plano  $\rho$  é direta. Assim, qualquer aresta lateral do sólido tem a sua projeção no **plano 4** perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a uma reta do plano  $\rho$  – o seu novo traço frontal) e tem, também, a sua projeção horizontal perpendicular a  $h_p$  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a outra reta do plano  $\rho$  – o seu traço horizontal).

Assim, pelas projeções dos vértices do retângulo  $[ABCD]$  (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das arestas laterais do paralelepípedo (ortogonais ao plano  $\rho$ ), o que nos permitiu determinar as duas projeções do sólido, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Note que os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  (os vértices da face superior) foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções frontais (no **plano 4**), pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  é também um plano projetante frontal.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos vértices da face superior do sólido (o retângulo  $[A'B'C'D']$ ). Tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ , precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

$A'_2$  é a projeção frontal do ponto  $A'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $A'_4$  ao eixo  $X'$ .  
 $B'_2$  é a projeção frontal do ponto  $B'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B'_4$  ao eixo  $X'$ .  
 $C'_2$  é a projeção frontal do ponto  $C'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $C'_4$  ao eixo  $X'$ .  
 $D'_2$  é a projeção frontal do ponto  $D'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D'_4$  ao eixo  $X'$ .

**Determinação das projeções do paralelepípedo:**

A partir das projeções dos oito vértices do paralelepípedo (os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  da face inferior, e os vértices  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  da face superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABB'C'D'D]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2B'_2C'_2D'_2D_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice  $C$  e o vértice  $A'$ . O vértice  $C$ , por ser o vértice de **menor afastamento** do paralelepípedo, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[BC]$  e  $[CD]$ , da face inferior, e a aresta  $[CC']$ . O vértice  $A'$ , por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$ , da face superior, e a aresta  $[AA']$ . Note que, em projeção frontal, a face superior (a face  $[A'B'C'D']$ ) é visível, bem como as faces  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$ . A face inferior (a face  $[ABCD]$ ) e as faces  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  são invisíveis.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[BCDD'A'B']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1D'_1A'_1B'_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – o vértice  $C'$  e o vértice  $A$ . O vértice  $A$ , por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$ , da face inferior, e a aresta  $[AA']$ . O vértice  $C'$ , por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$  e  $[C'D']$ , da face superior, e a aresta  $[CC']$ . Note que, em projeção horizontal, a face superior (a face  $[A'B'C'D']$ ) é visível, bem como as faces  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$ . A face inferior (a face  $[ABCD]$ ) e as faces  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$  são invisíveis.

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do paralelepípedo (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O retângulo  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do retângulo  $[ABCD]$ ) e, ainda, da projeção do paralelepípedo no **plano 4**.

**551.**

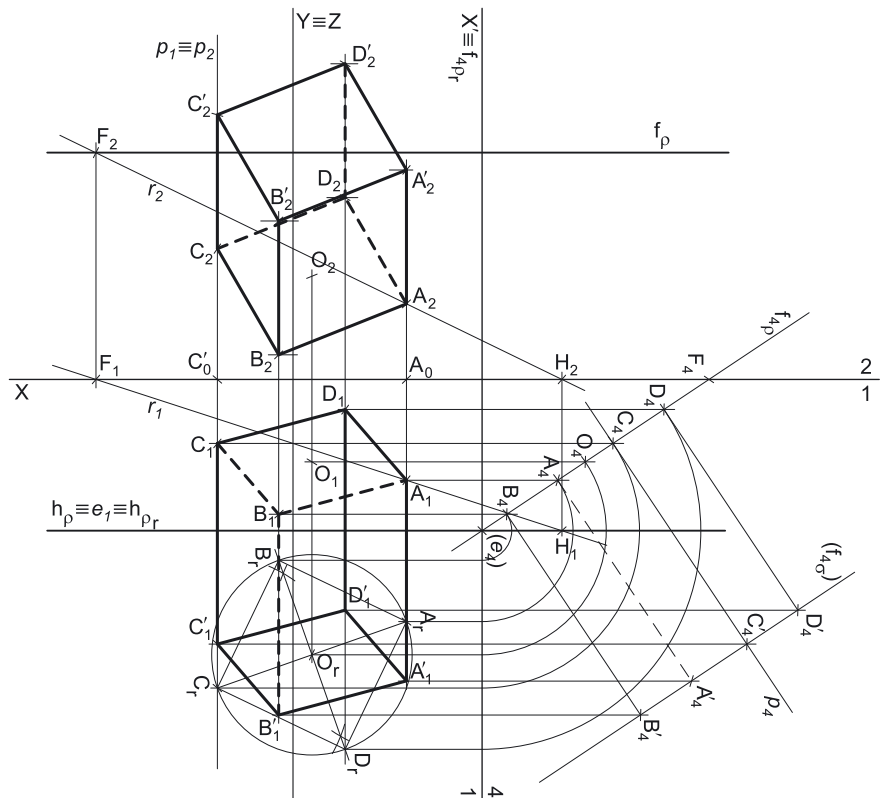
**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelos seus traços, bem como o ponto  $C'$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto  $C'$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

Os dados permitiram-nos, ainda, determinar  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), em função das coordenadas fornecidas. O ponto  $A$ , porque pertence ao plano  $\rho$ , tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano (para que se verifique a **condição para que um ponto pertença a m plano**). Assim, recorreu-se a uma reta  $r$ , oblíqua, pertencente ao plano  $\rho$ , cuja projeção horizontal ( $r_1$ ) passe pela projeção horizontal do ponto  $A$  ( $A_1$ ). A reta  $r$  está definida pro dois pontos (os pontos  $F$  e  $H$ , os seus traços nos planos de projeção), o que nos permitiu desenhar  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ) e, conseqüentemente, determinar  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ), sobre  $r_2$ .

**Resolução:**

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por outro lado, o único dado, no enunciado, respeitante ao quadrado **[ABCD]**, é o vértice **A** (cuja projeção frontal ainda não foi determinada) – não é possível a construção do quadrado **[ABCD]**, apenas a partir do vértice **A**, por falta de dados (não nos é dado o lado do quadrado, nem o centro da circunferência circunscrita à figura nem qualquer outro vértice do quadrado). Assim, é necessário determinar qualquer outro elemento do quadrado, para que seja possível prosseguir com a resolução.

### Determinação dos elementos necessários para a construção da base inferior do prisma:

Os dados do enunciado referem-se, ainda, a um vértice da base superior (o vértice **C'**), estando igualmente expresso que se trata de um **prisma regular**. Nesse sentido, **as arestas laterais prisma são ortogonais aos planos das bases** (bem como o eixo do prisma). Nesse sentido, o vértice **C** da base **[ABCD]** (o vértice inferior da aresta lateral **[CC']**) é necessariamente o ponto do plano  $\rho$  (o plano que contém a base **[ABCD]**) e, ainda, um ponto da reta suporte da aresta lateral **[CC']**. Assim, o ponto **C** é o ponto de interseção da reta suporte da aresta lateral **[CC']** do prisma com o plano  $\rho$  (o plano que contém a base **[ABCD]** do sólido).

Assim, pelo ponto **C'** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano  $\rho$  (que é a reta suporte da aresta lateral **[CC']**). A reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, pelo que a reta **p** não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$ . Em seguida, há que determinar o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$ , que será o vértice **C** da base inferior do prisma. Tendo em conta que nem a reta **p** nem o plano  $\rho$  são projetantes, é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.

Note que, neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **p** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **p**, para além do ponto **P**;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  – a reta **p** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ ;
3. por fim, nem o plano  $\rho$  nem a reta **p** são projetantes, pelo que a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  não é direta.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta **p** verificarão o **Crítério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção, será possível garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$  (pois os dois traços do plano  $\rho$  serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o plano  $\rho$  seja um plano projetante, pelo que a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$  seja direta. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, é necessário determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**). O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4p}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4p}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, é necessário o recurso a um ponto do plano  $\rho$  – o ponto **F** (que é o traço frontal da reta **r**). Assim, determinou-se **F<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **F** no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de **F<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **F<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 6 cm – a cota de **F**, que é a cota de **f<sub>p</sub>**). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  – **f<sub>4p</sub>**, passa por **F<sub>4</sub>** pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim, **f<sub>4p</sub>** está definido por dois pontos – o ponto **F<sub>4</sub>** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X'**).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **A** e do ponto **C'** no **plano 4**. O ponto **A** é um ponto do plano  $\rho$  (que, no novo diedro de projeção, é um plano projetante frontal), pelo que **A<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **A** no **plano 4**) se situa necessariamente sobre **f<sub>4p</sub>**. **C'<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **C'** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **C'<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **C'<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 7 cm – a cota de **C'**).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que **f<sub>4p</sub>** é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta **p** é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por **C'<sub>4</sub>** conduziu-se **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a **f<sub>4p</sub>** (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta **p** já verificam o **Crítério de Reversibilidade**.

Por outro lado, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, pelo que a determinação do ponto de interseção entre a reta **p** e o plano  $\rho$  se processa diretamente, a partir da sua projeção frontal (no **plano 4**). Assim, determinou-se **C<sub>4</sub>** (a projeção, no **plano 4**, do ponto **C**) – o ponto **C** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\rho$ . Nesse sentido, **C<sub>4</sub>** é o ponto de interseção de **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**) com **f<sub>4p</sub>** (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ) – **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**) situa-se sobre **p<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **p**). Por fim, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada e determinou-se **C<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **C**, no diedro de projeção inicial), em função da sua cota, que se manteve – a distância de **C<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **C<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

O ponto **C**, assim, determinado, é um outro vértice do quadrado **[ABCD]** – é o vértice oposto a **A**. Já temos elementos suficientes do quadrado **[ABCD]** (dois vértices opostos) para prosseguir com a resolução do exercício.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação das projeções da base inferior do prisma:*

Assim, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, como um plano projetante (um plano de topo). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_l \equiv h_{pr}$  ( $e_4$ , a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo  $X'$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

Em seguida, rebateram-se os pontos **A** e **C**, desenhando as projeções frontais (no **plano 4**) dos arcos dos respetivos rebatimentos, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $A_r$  e  $C_r$  (os dois pontos, no seu rebatimento, mantiveram os respetivos afastamentos em relação ao **plano 4**).

A partir dos pontos  $A_r$  e  $C_r$ , construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos  $B_r$  e  $D_r$  (os outros dois vértices do quadrado, em rebatimento). Note que, para tal, foi necessária a determinação do centro do quadrado em rebatimento (o ponto  $O_r$ ), bem como o desenho da circunferência circunscrita ao quadrado (em rebatimento).

Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos **B**, **D** e **O** (no novo diedro de projeção). Assim,  $B_4$  é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. De forma semelhante,  $D_4$  e  $O_4$  são as projeções dos pontos **D** e **O** no **plano 4** (respetivamente) e situam-se igualmente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Tenha em conta que, na inversão do rebatimento efetuada, os três pontos mantêm os respetivos afastamentos (em relação ao **plano 4**).

Em seguida, atendendo a que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **B**, **D** e **O**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).  $B_2$  é a projeção frontal do ponto **B** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$ .  $D_2$  é a projeção frontal do ponto **D** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D_4$  ao eixo  $X'$ .  $O_2$  é a projeção frontal do ponto **O** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $O_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $O_4$  ao eixo  $X'$ .

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

*Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:*

Em seguida, representou-se (no novo diedro de projeção) o plano  $\sigma$ , que é o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a base superior do prisma (o quadrado **[A'B'C'D']**). É necessário ter em conta que o plano  $\sigma$  (o plano que contém a base superior do sólido), no novo diedro de projeção, é também um plano projetante frontal e contém o ponto  $C'$  (que é um vértice da base superior). Assim, por  $C'_4$  conduziu-se uma paralela a  $f_{4\rho}$ , que é  $f_{4\sigma}$  (o traço, no **plano 4**, do plano  $\sigma$ ). O plano  $\sigma$  é, assim, o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a base superior do prisma (a base **[A'B'C'D']**). Note que o plano  $\sigma$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço no **plano 4**), razão pela qual o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** se identificou entre parêntesis).

Todas as arestas laterais de qualquer prisma são paralelas entre si. A aresta lateral **[CC']** está contida na reta  $p$ . Assim, pelas projeções dos vértices do quadrado **[ABCD]** (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das arestas laterais do paralelepípedo (paralelas à reta  $p$ ), o que nos permitiu determinar as duas projeções do sólido, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Note que os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $D'$  (os outros três vértices da base superior) foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções frontais (no **plano 4**), pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  é também um plano projetante frontal.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos vértices da base superior do sólido (o quadrado **[A'B'C'D']**). Tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $D'$ , precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

$A'_2$  é a projeção frontal do ponto  $A'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $A'_4$  ao eixo  $X'$ .  $B'_2$  é a projeção frontal do ponto  $B'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B'_4$  ao eixo  $X'$ .  $D'_2$  é a projeção frontal do ponto  $D'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D'_4$  ao eixo  $X'$ .

*Determinação das projeções do prisma:*

A partir das projeções dos oito vértices do prisma (os vértices **A**, **B**, **C** e **D** da base inferior, e os vértices  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ , da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABCC'D'A']**, cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2C'_2D'_2A'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice **D** e o vértice  $B'$ . O vértice **D**, por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AD]** e **[CD]**, da base inferior, e a aresta lateral **[DD']**. O vértice  $B'$ , por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']** e **[B'C']**, da base superior, e a aresta lateral **[BB']**. Note que, em projeção frontal, a base superior (a base **[A'B'C'D']**) é visível, bem como as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]**. A base inferior (a base **[ABCD]**) e as faces laterais **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]** são invisíveis (em projeção frontal).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[AA'B'C'D]**, cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1A'_1B'_1C'_1D_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – o vértice  $D'$  e o vértice **B**. O vértice **B**, por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base inferior, e a aresta lateral **[BB']**. O vértice  $D'$ , por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'D']** e **[C'D']**, da base superior, e a aresta lateral **[DD']**. Note que, em projeção horizontal, a base superior (a base **[A'B'C'D']**) é visível, bem como as faces laterais **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]**. A base inferior (a base **[ABCD]**) e as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]** são invisíveis (em projeção horizontal).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Traçado:

Os dados (os traços do plano  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $p$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado  $[ABCD]$ ), da reta  $p$  e, ainda, da projeção do prisma no **plano 4**.

## 552.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $p$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $p$  está definida por um ponto (o ponto  $O$ ) e pela sua direção (a direção dada no enunciado).

O plano que contém a base inferior do prisma contém o ponto  $O$  (o centro da base), pelo que esse plano está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e pela sua orientação (é ortogonal à reta  $p$ ).

### Resolução:

O plano que contém o pentágono  $[ABCDE]$  (o plano ortogonal à reta  $p$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o pentágono  $[ABCDE]$  (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, antes do recurso ao processo geométrico auxiliar, é necessário determinar os traços do plano.

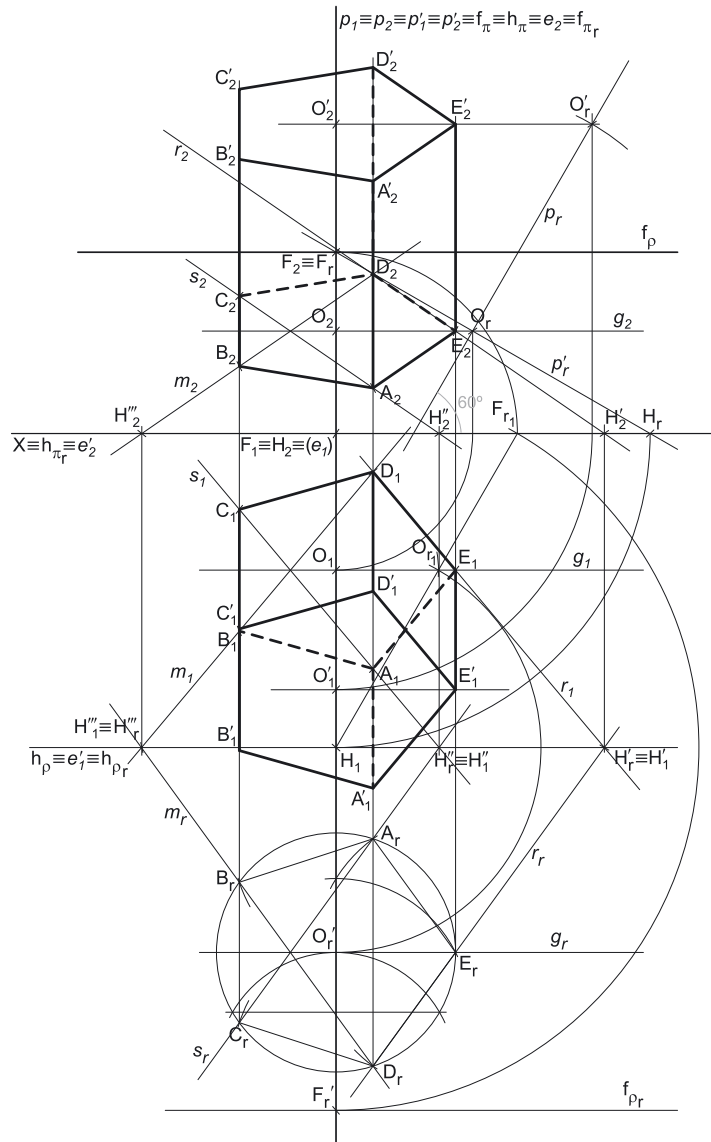
#### Determinação dos traços do plano $p$ :

O plano que contém a base inferior do prisma é um plano ortogonal à reta  $p$  e que contém o ponto  $O$  – esse plano tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $p$ , ou seja, o plano tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares a reta  $p$  (o plano tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta  $p$ ).

Por outro lado, para que o plano contenha o ponto  $O$ , o ponto  $O$  tem de pertencer ao plano, ou seja, o ponto  $O$  tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $O$ , uma reta que pertença ao plano – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $p$ . Por outro lado, essa reta deverá ser uma reta paralela a um dos planos de projeção, para que a ortogonalidade entre as duas retas seja direta em projeções. Ora, a única «família» de retas que é paralela a um dos planos de projeção e é simultaneamente ortogonal a uma **reta de perfil** é a «família» das **retas fronto-horizontais**.

Assim, pelo ponto  $O$  conduziu-se uma reta  $g$ , fronto-horizontal. A reta  $g$ , porque é uma reta fronto-horizontal, é necessariamente uma reta ortogonal à reta  $p$ . Atendendo a que o plano contém a «família» das retas fronto-horizontais, o plano pretendido é necessariamente um **plano de rampa**. Uma vez que o enunciado é omissivo no que respeita à identificação do plano, considerou-se, aqui, tratar-se do plano  $p$ . Para definir o plano  $p$  (o plano que contém a base inferior do prisma) é necessário recorrer a outra reta do plano – uma reta que seja **concorrente** com a reta  $g$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $p$ .

Necessitamos de uma outra «família» de retas do plano, que seja ortogonal à reta  $p$ . Essa outra «família» de retas deverá ser a «família» de retas de perfil que o plano contém. Assim, recorreu-se a uma reta  $p'$ , de perfil, que é concorrente com a reta  $g$  no ponto  $O$ . A reta  $p'$  está definida por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é ortogonal à reta  $p$ ). O plano definido pelas retas  $g$  e  $p'$  é o plano ortogonal à reta  $p$  que contém o ponto  $O$  – o plano  $p$  (o plano que contém a base inferior do prisma).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No entanto, as projeções das retas de perfil não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções das duas retas não nos garantem a efetiva ortogonalidade entre ambas. Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, para que possamos garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil que contém as duas retas – o plano  $\pi$ .

Nesse sentido, identificou-se o plano  $\pi$  e rebateu-se o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira do rebatimento foi  $f_{\pi}$ ), o que nos permitiu determinar  $O_r$  (o ponto **O** rebatido). Em rebatimento, foi possível desenhar a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) – já temos um ponto para definir a reta  $p_r$  (o ponto  $O_r$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. É dado o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção, que é um ângulo de  $60^\circ$  – esse ângulo está contido no plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção e que contém a reta  $p$ , que é o próprio plano  $\pi$ . Assim, o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção é o ângulo que a reta  $p$  faz com  $h_{\pi}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ , que é a reta de interseção do plano  $\pi$  com o Plano Horizontal de Projeção). Esse ângulo está contido no plano  $\pi$  e, em rebatimento, está em verdadeira grandeza no ângulo formado entre a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) e  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  rebatido).

Nesse sentido, desenhou-se  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), passando por  $O_r$  (o ponto **O** rebatido) e fazendo, com  $h_{\pi_r}$  (que se situa no eixo **X**), um ângulo de  $60^\circ$ . Das duas hipóteses que existem para medir esse ângulo, a que a resolução apresenta é a que nos garante que o traço frontal da reta  $p$  tem cota negativa (para que se situe no **SPFI**, como o enunciado pede expressamente). Note que, na outra hipótese, o traço frontal da reta  $p$  teria cota positiva. Note, ainda, que não se determinou o traço frontal da reta  $p$ , por tal não ser necessário mas, ainda assim, se garantiu o pretendido no enunciado. Assim, a reta  $p_r$  está definida por um ponto (o ponto  $O_r$ ) e por uma direção (faz ângulo de  $60^\circ$  com  $h_{\pi_r}$ , com a direção acima referida).

Por fim, desenhou-se a reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida), passando por  $O_r$  e perpendicular à reta  $p_r$  – a reta  $p'_r$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $O_r$ ) e por uma direção (é perpendicular a  $p_r$ ). Já se garantiu a ortogonalidade entre as retas  $p$  e  $p'$ . O plano  $\rho$  (o plano de rampa que contém a base inferior do prisma) está totalmente definido, pelas retas  $g$  e  $p'$  – o plano é ortogonal à reta  $p$ , pois contém duas retas concorrentes que são ortogonais à reta  $p$  (as retas  $g$  e  $p'$ ).

Em seguida, determinaram-se os traços da reta  $p'$  em rebatimento – os pontos  $H_r$  e  $F_r$ . Para se determinarem os traços do plano  $\rho$  (o plano que contém a base inferior do prisma) inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$  e determinaram-se as projeções dos pontos **H** e **F**. Por fim, pelos traços da reta  $p'$  conduziram-se os traços homônimos do plano  $\rho$ , de rampa (que são retas fronto-horizontais – paralelas à reta  $g$ ). O traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{\rho}$ ) é uma reta que está definida por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (a direção da reta  $g$ ). O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{\rho}$ ) é uma reta que está definida por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (a direção da reta  $g$ ).

O plano  $\rho$ , definido pelos seus traços, contém o ponto **O** e é ortogonal à reta  $p$  – o plano  $\rho$  é o plano que contém o pentágono **[ABCDE]** (a base inferior do prisma).

*Rebatimento do plano  $\rho$  e construção, em verdadeira grandeza, do pentágono da base inferior do prisma:*

Como anteriormente se referiu, o plano que contém o pentágono **[ABCDE]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o pentágono **[ABCDE]** (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_{\rho} \equiv e'_1 \equiv h_{\rho_r}$  ( $e'_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a  $h_{\rho}$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{\rho}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos uma direção para definir  $f_{\rho_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir  $f_{\rho_r}$ . Nesse sentido, há que rebater o ponto **F** (o traço frontal da reta  $p'$ ), que é um ponto de  $f_{\rho}$ . O rebatimento do ponto **F** tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziu-se, por  $F_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **F**). Com o compasso, fazendo centro em  $F_1$  e com raio até  $F_2$ , transportou-se a cota do ponto **F** para o eixo **X**, determinando  $F_{r1}$  (o ponto **F** rebatido pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Horizontal de Projeção) – este procedimento permitiu-nos desenhar o triângulo do rebatimento do ponto **F** em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio até  $F_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **F** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , onde se situa  $F'_r$  (o ponto **F** rebatido). Note que o ponto  $F'_r$  é o ponto **F** no seu segundo rebatimento – o ponto **F** rebatido pelo rebatimento do plano  $\rho$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{\rho_r}$ . Nesse sentido desenhou-se  $f_{\rho_r}$ , passando por  $F'_r$  e paralelo ao eixo **X** –  $f_{\rho_r}$  está definido por um ponto (o ponto  $F'_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizantal).

Em seguida, há que rebater o ponto **O**. O ponto **O** é um ponto da reta  $p'$ , que, sendo de perfil e ortogonal à charneira, não nos permite, através do seu rebatimento, rebater o ponto **O**. Assim, optou-se por rebater o ponto **O** pelo triângulo do seu rebatimento, à semelhança do efetuado para o ponto **F**.

Assim conduziu-se, por  $O_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **O**) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a cota do ponto **O**, o que nos permitiu determinar  $O_{r1}$  (o ponto **O** rebatido pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Horizontal de Projeção) – este procedimento permitiu-nos desenhar o triângulo do rebatimento do ponto **O** em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio até  $O_{r1}$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **O** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $O_1$ , onde se situa  $O'_r$  (o ponto **O** rebatido). Note que o ponto  $O'_r$  é o ponto **O** no seu segundo rebatimento – o ponto **O** rebatido pelo rebatimento do plano  $\rho$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O'_r$  e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao polígono e efetuou-se a construção do pentágono, inscrito na circunferência, de acordo com os dados. Atendendo a que a face mais à esquerda do prisma (a face lateral **[BB'C'C]**) está contida num plano projetante, e porque as arestas laterais do prisma estão contidas em retas de perfil, esse plano projetante tem de ser um plano de perfil. Assim, sabe-se que o lado **[BC]** do pentágono é necessariamente de perfil, o que nos permitiu perceber a posição do polígono na circunferência. Por outro lado, atendendo a que o vértice **A** é o vértice de menor cota da figura (o vértice mais próximo de  $h_{\rho}$ ), foi possível, também, perceber a ordem pretendida para os vértices da figura. Em função do exposto, construiu-se o pentágono em verdadeira grandeza, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar os seus vértices, em rebatimento – os pontos **A<sub>r</sub>**, **B<sub>r</sub>**, **C<sub>r</sub>**, **D<sub>r</sub>** e **E<sub>r</sub>**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Inversão do rebatimento do plano $\rho$ e determinação das projeções da base inferior do prisma:

A inversão do rebatimento do ponto **E** e a determinação das respetivas projeções processou-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto **E** pertence – a reta **g** (a reta fronto-horizontal que passa pelo ponto **O**). Assim, começou-se por desenhar a reta **g<sub>r</sub>** (A reta **g** rebatida), que passa pelo ponto **O<sub>r</sub>** e é paralela ao eixo **X** (e aos traços do plano  $\rho$  em rebatimento) – a reta **g<sub>r</sub>** está, assim, definida por um ponto (o ponto **O<sub>r</sub>**) e pela sua direção (é fronto-horizontal). O ponto **E<sub>r</sub>** situa-se necessariamente sobre a reta **g<sub>r</sub>**, pelo que o ponto **E** é um ponto da reta **g**. Nesse sentido, por **E<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **g<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **g**) é **E<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **E**). A projeção frontal do ponto **E** (**E<sub>2</sub>**) situa-se sobre **g<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **g**).

A inversão do rebatimento do ponto **D** e a determinação das suas projeções processou-se com o recurso a uma outra reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto **D** pertence – a reta **r**, que é a reta suporte do lado **[DE]** do pentágono. A reta **r<sub>r</sub>** (a reta **r** rebatida) está definida por dois pontos (os pontos **D<sub>r</sub>** e **E<sub>r</sub>**). Para definir a reta **r** (em projeções) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. As projeções do ponto **E** já são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta **r** (em projeções). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **H'**, o traço horizontal da reta **r**, que é um ponto de **h<sub>p</sub>** (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto **H'<sub>r</sub>** situa-se sobre **h<sub>pr</sub>** – é o ponto de concorrência da reta **r<sub>r</sub>** com **h<sub>pr</sub>**. O ponto **H'** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **H'<sub>1</sub> ≡ H'<sub>r</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **r** (em projeções) – a reta **r** está, assim, definida por dois pontos (os pontos **E** e **H'**), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta **r**.

Em seguida, por **D<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **r<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **r**) é **D<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **D**). A projeção frontal do ponto **D** (**D<sub>2</sub>**) situa-se sobre **r<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **r**).

A inversão do rebatimento dos pontos **A** e **C** e a determinação das respetivas projeções processou-se com o recurso a uma outra reta oblíqua do plano  $\rho$ , à qual os dois pontos pertencem – a reta **s**, que é a reta suporte da diagonal **[AC]** do pentágono. A reta **s<sub>r</sub>** (a reta **s** rebatida) está definida por dois pontos (os pontos **A<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**) e, ainda, por uma direção (é paralela à reta **r<sub>r</sub>**). Para definir a reta **s** em projeções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **s** é necessariamente paralela à reta **r** (que é a reta suporte do lado **[DE]** do quadrado), pelo que já temos uma direção para definir a reta **s** em projeções. Falta-nos um ponto para definir a reta **s** (em projeções). Nesse sentido, determinou-se o ponto **H''**, o traço horizontal da reta **s**, que é um ponto de **h<sub>p</sub>** (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto **H''<sub>r</sub>** situa-se sobre **h<sub>pr</sub>** – é o ponto de concorrência da reta **s<sub>r</sub>** com **h<sub>pr</sub>**. O ponto **H''** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **H''<sub>1</sub> ≡ H''<sub>r</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **s** (em projeções) – a reta **s** (em projeções) está, assim, definida por um ponto (o ponto **H''**) e por uma direção (é paralela à reta **r**), o que nos permitiu desenhar as suas projeções.

Em seguida, por **A<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **s<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **s**) é **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**). A projeção frontal do ponto **A** (**A<sub>2</sub>**) situa-se sobre **s<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **s**). De forma semelhante, por **C<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **s<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **s**) é **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** (**C<sub>2</sub>**) situa-se sobre **s<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **s**).

A inversão do rebatimento do ponto **B** e a determinação das suas projeções processou-se com o recurso a uma outra reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto **B** pertence – a reta **m**, que é a reta suporte da diagonal **[BD]** do pentágono. A reta **m<sub>r</sub>** (a reta **m** rebatida) está definida por dois pontos (os pontos **B<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**). Para definir a reta **m** (em projeções) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. As projeções do ponto **D** já são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta **m** (em projeções). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **H'''**, o traço horizontal da reta **m**, que é um ponto de **h<sub>p</sub>** (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto **H'''<sub>r</sub>** situa-se sobre **h<sub>pr</sub>** – é o ponto de concorrência da reta **m<sub>r</sub>** com **h<sub>pr</sub>**. O ponto **H'''** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **H'''<sub>1</sub> ≡ H'''<sub>r</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **m** (em projeções) – a reta **m** está, assim, definida por dois pontos (os pontos **D** e **H'''**), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta **m**.

Em seguida, por **B<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **m<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **m**) é **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**). A projeção frontal do ponto **B** (**B<sub>2</sub>**) situa-se sobre **m<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **m**).

A partir das projeções dos cinco pontos (**A**, **B**, **C**, **D** e **E**), desenharam-se as projeções do pentágono **[ABCDE]**.

## Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases, tal como o seu eixo. Acontece que no enunciado do exercício é-nos dada a reta suporte do eixo do sólido (a reta **p**), tendo sido o plano  $\rho$  determinado a partir da ortogonalidade do plano em relação à reta **p**. Consideremos, assim, o eixo do sólido, o segmento **[OO']**, que é um segmento da reta **p**. A reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. No entanto, a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$  foi garantida através da determinação dos traços do plano  $\rho$ .

A altura do prisma é a distância entre os planos das bases, que é medida numa reta ortogonal aos planos das bases (trata-se a **distância entre dois planos paralelos**). O segmento **[OO']** (o eixo do prisma) está contido na reta **p**, pelo que o ponto **O'** é um ponto da reta **p**. Assim, a distância do ponto **O'** ao ponto **O** é a distância do ponto **O'** ao plano  $\rho$  e corresponde à distância entre os planos das duas bases, que se mede na reta **p**. A reta **p** não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento **[OO']** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Acontece que o exercício começou, precisamente, pelo recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento da reta **p**, através do rebatimento do plano de perfil que a contém. Assim, já temos a reta **p** rebatida (a reta **p<sub>r</sub>**). Assim, sobre a reta **p<sub>r</sub>**, a partir de **O'<sub>r</sub>**, mediram-se os 7 cm (a altura do prisma, que é a distância do ponto **O'** ao plano  $\rho$ ) e determinou-se **O'<sub>r</sub>**. Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto **O'** e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta **p**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A partir da determinação das projeções do centro da base superior (o ponto  $O'$ ), determinaram-se as projeções de todos os vértices da base superior. Começou-se por se determinar as projeções do ponto  $E'$ , por ser aquele que tem determinação mais imediata. Como mais atrás se referiu, o ponto  $O$  (o centro da base inferior) e o ponto  $E$  (o vértice mais à direita da base inferior) situam-se na mesma reta fronto-horizontal (a reta  $g$ ). Assim, o ponto  $O'$  (o centro da base superior) e o ponto  $E'$  (o vértice mais à direita da base superior) situam-se igualmente numa mesma reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto  $O'$  conduziram-se paralelas ao eixo  $X$  (que correspondem à projeções de uma reta fronto-horizontal que não se identificou) e determinaram-se as projeções do ponto  $E'$ , sobre as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[EE']$  (que é uma reta de perfil e cujas projeções também não se identificaram).

Em seguida, procedeu-se à determinação das projeções dos restantes vértices da base superior do sólido, tendo-se em conta que as arestas laterais do prisma são todas paralelas entre si (estão contidas em retas de perfil ortogonais aos planos das bases) e, ainda, que as arestas da base superior são paralelas às arestas correspondentes da base inferior.

Assim, pelas projeções do ponto  $D$  (um dos vértices da base inferior, consecutivo a  $E$ ) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[DD']$  (que é de perfil e não se identificou) – o ponto  $D'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $D$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $E'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[D'E']$  da base superior (que também não se identificou). O vértice  $D'$ , da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

De forma idêntica, pelas projeções do ponto  $A$  (o outro vértices da base inferior que é consecutivo a  $E$ ) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[AA']$  (que é de perfil e não se identificou) – o ponto  $A'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $A$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $E'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[A'E']$  da base superior (que também não se identificou). O vértice  $A'$ , da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

De forma semelhante, pelas projeções do ponto  $B$  (o outro vértices da base inferior que é consecutivo a  $A$ ) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[BB']$  (que é de perfil e não se identificou) – o ponto  $B'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $B$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $A'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[A'B']$  da base superior (que também não se identificou). O vértice  $B'$ , da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

Por fim, pelas projeções do ponto  $C$  (o outro vértice da base inferior que é consecutivo a  $D$ ) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[CC']$  (que é de perfil e, de novo, não se identificou) – o ponto  $C'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $C$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $D'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[C'D']$  da base superior (que também não se identificou). O vértice  $C'$ , da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

#### Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos dez vértices do prisma (os vértices  $A, B, C, D$  e  $E$  da base inferior, e os vértices  $A', B', C', D'$  e  $E'$ , da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABB'C'D'E'E]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2B'_2C'_2D'_2E'_2E_2]$ . Em projeção frontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $C, D$  e  $A'$ . O vértice  $A'$ , por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível** em projeção frontal, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[A'E']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[AA']$ . Os vértices  $C$  e  $D$ , por serem o vértice de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis** em projeção frontal, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[BC]$ ,  $[CD]$  e  $[DE]$ , da base inferior, e as arestas laterais  $[CC']$  e  $[DD']$ . No entanto, a aresta  $[BC]$  (da base inferior) e a aresta lateral  $[CC']$ , apesar de serem invisíveis em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis (as arestas  $[BB']$  e  $[B'C']$ ), pelo que não existe qualquer invisibilidade a assinalar, no que se refere àquelas arestas. Note que, em projeção frontal, a base superior (a base  $[A'B'C'D'E']$ ) é visível, bem como as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'E'E]$ . A base inferior (a base  $[ABCDE]$ ) e as faces laterais  $[CC'D'D]$  e  $[DD'E'E]$  são invisíveis, bem como a face lateral  $[BB'C'C]$  (que é projetante – é de perfil).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[CDEE'A'B'C']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[C_1D_1E_1E'_1A'_1B'_1C'_1]$ . Em projeção horizontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices  $A, B$  e  $D'$ . O vértice  $D'$ , por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível** em projeção horizontal, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[C'D']$  e  $[D'E']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[DD']$ . Os vértices  $A$  e  $B$ , por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis** em projeção horizontal, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AE]$ ,  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base inferior, e as arestas laterais  $[AA']$  e  $[BB']$ . No entanto, a aresta  $[BC]$  (da base inferior) e a aresta lateral  $[BB']$ , apesar de serem invisíveis em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis (as arestas  $[CC']$  e  $[B'C']$ ), pelo que não existe qualquer invisibilidade a assinalar, no que se refere àquelas arestas. Note que, em projeção horizontal, a base superior (a base  $[A'B'C'D'E']$ ) é visível, bem como as faces laterais  $[CC'D'D]$  e  $[DD'E'E]$ . A base inferior (a base  $[ABCDE]$ ) e as faces laterais  $[AA'E'E]$  e  $[AA'B'B]$  são invisíveis, bem como a face lateral  $[BB'C'C]$  (que é projetante – é de perfil).

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $p$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O pentágono  $[ABCDE]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  (para a determinação dos traços do plano  $p$  e para a determinação, em verdadeira grandeza, da altura do prisma), de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do pentágono  $[ABCDE]$ ), bem como de todos os traçados que nos permitiram determinar os restantes vértices da base superior do sólido.



## 553.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**.

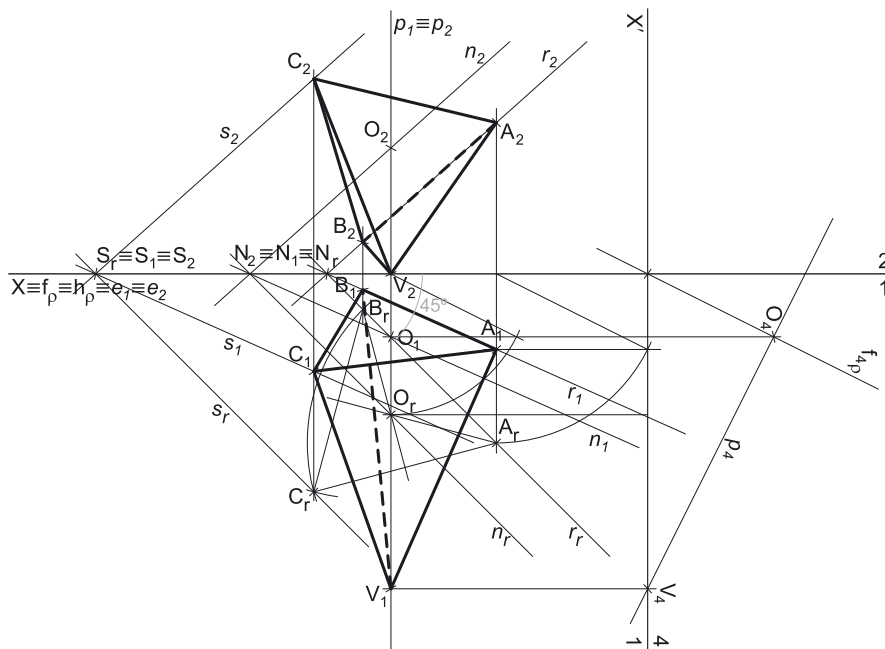
Note que é dado o **ângulo** que o lado **[AB]** do triângulo faz com o eixo **X**, mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, o ângulo que o lado **[AB]** faz com o eixo **X** é um **ângulo real** e não um **ângulo em projeções** – o ângulo entre o lado **[AB]** e o eixo **X** está contido no plano  $\rho$ . Nesse sentido, o plano que contém o ângulo (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



Optemos por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente  $X \equiv f_\rho \equiv h_\rho \equiv e_1 \equiv e_2$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

Efetuu-se o rebatimento do ponto **A**. O rebatimento do ponto **A** tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziram-se, por **A<sub>1</sub>**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira, e a partir de **A<sub>1</sub>**, mediu-se a cota do ponto **A**, o que nos permitiu construir o triângulo do rebatimento do ponto **A**, em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento (no eixo **X**) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por **A<sub>1</sub>**, onde se situa **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido).

É dado que o lado **[AB]** do triângulo faz um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo **X** e, em função dos dados, deduz-se que esse ângulo tem abertura para a direita (para que o ponto **B** se situe à esquerda de **A** e com cota inferior a **A**). Assim, por **A<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta fazendo um ângulo de  $45^\circ$  (a.d.) com o eixo **X** (a reta  $r_r$ ), que é, em rebatimento, a reta suporte do lado **[AB]** do triângulo. Sobre a reta  $r_r$ , e a partir de **A<sub>r</sub>**, mediram-se os 5 cm (a medida do lado do triângulo), o que nos permitiu determinar **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido), sobre a reta  $r_r$ . Em seguida, a partir dos pontos **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**, efetuou-se a construção do triângulo, o que nos permitiu determinar os pontos **C<sub>r</sub>** (o terceiro vértice da figura, em rebatimento) e **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** é o centro do triângulo). Note que se garantiu, na construção do triângulo, que a figura se situa, na totalidade, no espaço do  $1^\circ$  Diedro.

A inversão do rebatimento do ponto **B** processa-se com o recurso à reta  $r_r$ , oblíqua, do plano  $\rho$ , à qual o ponto **B** pertence – a reta  $r_r$  é a reta suporte do lado **[AB]** do quadrado. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – o ponto **A<sub>r</sub>** e o ponto **B<sub>r</sub>**. A reta  $r$  é uma reta passante (concorrente com o eixo **X**), pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (o ponto **N**) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $N_r \equiv N_1 \equiv N_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $r$  em projeções. O ponto **A** (cujas projeções já são conhecidas) é um ponto da reta  $r$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  – a reta  $r$  está definida por dois pontos (o ponto **A** e o ponto **N**), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $r$ .

Em seguida, por **B<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**). A projeção frontal do ponto **B** (**B<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento do ponto **C** processou-se com o recurso à reta **s**, outra reta oblíqua do plano  $\rho$ , à qual o ponto **C** pertence – a reta **s** é a reta paralela à reta **r** e que passa pelo ponto **C**. A reta **s<sub>r</sub>** (a reta **s** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **C<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela à reta **r**). Há, agora, que determinar as projeções da reta **s**. A reta **s** é uma reta passante, pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (o ponto **S**) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **S<sub>r</sub> ≡ S<sub>1</sub> ≡ S<sub>2</sub>**. Já temos um ponto para definir a reta **s** em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta **s** em projeções. A reta **s** é uma reta paralela à reta **r**, cujas projeções já são conhecidas, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **s** em projeções – a direção da reta **r**. Assim, desenharam-se as projeções da reta **s** – a reta **s** está definida por um ponto (o ponto **S**) e por uma direção (é paralela à reta **r**).

Em seguida, pelo ponto **C<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **s<sub>r</sub>** (a projeção horizontal da reta **s**) é **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** (**C<sub>2</sub>**) situa-se sobre **s<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **s**).

A determinação das projeções do ponto **O** processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **C**. A reta **n** é a reta paralela às retas **r** e **s** que passa pelo ponto **O** – a reta **n** é, também ela, uma reta passante (note que, ao contrário das situações anteriores, não se identificou o seu ponto de concorrência com o eixo **X**). Assim, as projeções da reta **n** determinaram-se de forma semelhante à exposta para as projeções da reta **m** (a reta **n**, em projeções, está definida por um ponto e uma direção). As projeções do ponto **O** determinaram-se sobre as projeções homónimas da reta **n**, sobre a perpendicular à charneira que passa por **O<sub>r</sub>**.

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo [**ABC**].

#### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte do eixo da pirâmide – a reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta **p** não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$ .

Tendo em conta que o vértice da pirâmide tem cota nula (é dado no enunciado), o vértice da pirâmide (o ponto **V**) é o traço horizontal da reta **p**. Tendo em conta que as projeções da reta **p** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, não é possível determinar qualquer outro ponto da reta **p** de forma direta, sem o recurso a procedimentos auxiliares. Nesse sentido, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Poder-se-ia recorrer a um rebatimento, mas optou-se pelo recurso a uma **mudança do diedro de projeção**. Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo à reta **p** (e necessariamente ortogonal ao plano  $\rho$ ), o que nos permite transformar a reta **p** numa reta frontal (de frente) e o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à reta **p**, o eixo **X'** é paralelo a **p<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **p**) e perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  (**h<sub>p</sub>**). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, é necessário determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**). O novo traço frontal do plano  $\rho$  (**f<sub>4p</sub>**) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  (**f<sub>4p</sub>**) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, e necessário o recurso a um ponto do plano  $\rho$  – o ponto **O**, por exemplo (que é um ponto da reta **p**). Assim, determinou-se **O<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **O** no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de **O<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **O<sub>2</sub>** ao eixo **X**. Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  – **f<sub>4p</sub>**, passa por **O<sub>4</sub>** pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim, **f<sub>4p</sub>** está definido por dois pontos – o ponto **O<sub>4</sub>** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X'**).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que **f<sub>4p</sub>** é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta **p** é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por **O<sub>4</sub>** conduziu-se **p<sub>4</sub>** (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a **f<sub>4p</sub>** (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta **p** já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Em seguida, determinou-se o ponto da reta **p** que tem cota nula (o ponto **V**), que é o traço horizontal da reta **p**. **V<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **V**) situa-se sobre **p<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **p**). **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **V**) situa-se no eixo **X**, pois a sua cota (que é nula) se manteve.

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide (os vértices **A**, **B** e **C**, da base, e o vértice **V**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[AVBC]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2V_2B_2C_2]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta  $[AB]$ , da base, é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal – a base  $[ABC]$  e a face lateral  $[ABV]$ . Em projeção frontal, as faces laterais  $[ACV]$  e  $[BCV]$  são visíveis. Em projeção frontal, a base  $[ABC]$  é invisível, bem como a face lateral  $[ABV]$ .

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[ABCV]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1B_1C_1V_1]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta lateral  $[BV]$  é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais  $[ABV]$  e  $[BCV]$  (note que **B** e **V** são os vértices de **menor cota** da pirâmide). Em projeção horizontal, a base  $[ABC]$  é visível, bem como a face lateral  $[ACV]$ .

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam traços do plano  $\rho$ ). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo  $[ABC]$ ), bem como da reta  $p$  e de todos os traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **V**).

## 554.

### Dados:

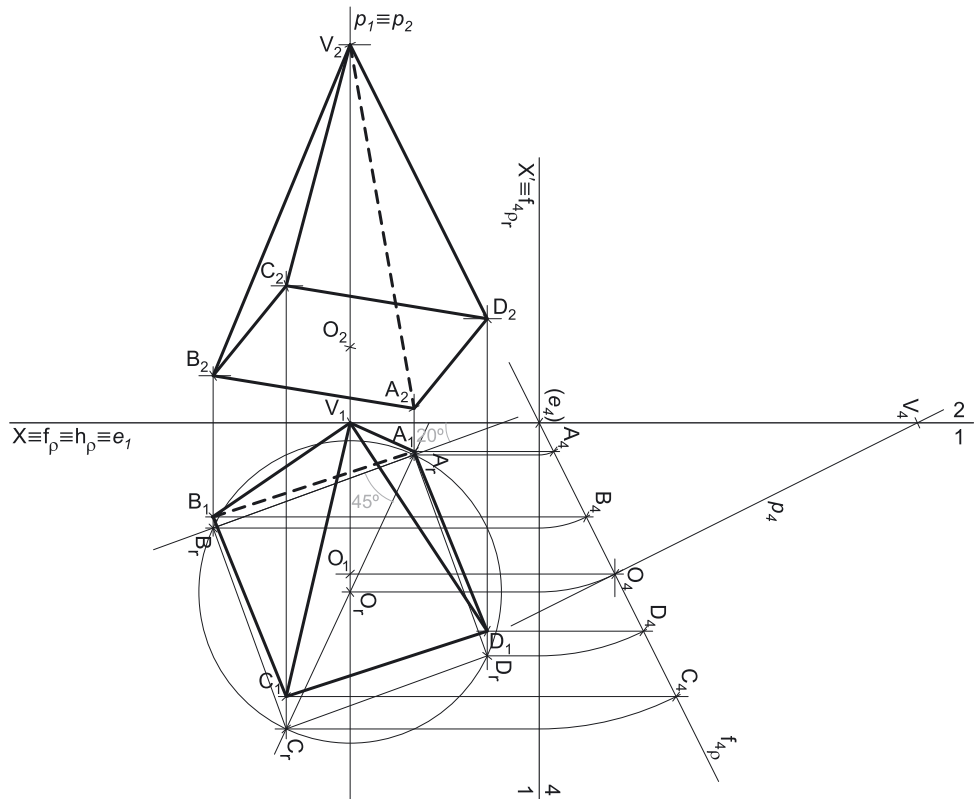
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **O**.

Note que é dado o **ângulo** que o lado  $[AB]$  do quadrado faz com o eixo **X**, mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

### Resolução:

*Determinação das projeções da base da pirâmide:*

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado  $[AB]$  do quadrado faz com o eixo **X** **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.



Embora se pudesse ter optado por rebater o plano  $\rho$  diretamente (à semelhança da situação do exercício anterior), neste caso optou-se por uma situação diferente – optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante e, em seguida, rebater o plano  $\rho$  como um plano projetante.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano passante num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$ , pelo que é perpendicular ao eixo  $X$  (onde se situa  $h_p$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4p}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto  $O$  (o ponto dado que define o plano  $\rho$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**. Assim,  $O_4$  é a projeção do ponto  $O$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $O_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $O_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $O$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**) tem necessariamente de passar por  $O_4$  (a nova projeção frontal do ponto  $O$ ). Assim,  $f_{4p}$  está definido por dois pontos – o ponto  $O_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).

Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, como um plano projetante (um plano de topo). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o próprio eixo  $X$  (que é onde se situa o traço horizontal do plano, que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $X \equiv e_1 \equiv h_p$  ( $e_4$ , a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo  $X'$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

Em seguida, rebateu-se o ponto  $O$ , desenhando a projeção frontal (no **plano 4**) do arco do seu rebatimento, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $O_r$  (que, no seu rebatimento, manteve o seu afastamento, em relação ao **plano 4**).

Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 3,5 cm de aio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado, em verdadeira grandeza (em rebatimento). Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com o eixo  $X$  – é o ângulo que o segmento  $[A_r B_r]$  faz com o eixo  $X$ . No entanto, não temos nenhum dos extremos do lado  $[AB]$  do quadrado, nem em projeções nem em rebatimento. Todavia, o lado  $[AB]$  faz ângulos de  $45^\circ$  com as diagonais do quadrado. Ora, esse raciocínio permitiu-nos determinar o ângulo que uma das diagonais do quadrado (a diagonal  $[AC]$ ) faz com o eixo  $X$  – é um ângulo de  $65^\circ$  ( $20^\circ + 45^\circ = 65^\circ$ ).

Por outro lado, é referido (no enunciado) que o vértice  $A$  do quadrado é o vértice de menor afastamento do polígono e que se situa à direita de  $B$ , o que nos permite inferir que o lado  $[AB]$  faz, com o eixo  $X$ , um ângulo de abertura para a esquerda. O ângulo que a diagonal  $[AC]$  faz com o eixo  $X$  tem de ser, assim, um ângulo de  $65^\circ$  de abertura para a esquerda (o que nos garante, dessa forma, que o ponto  $A$  é o vértice de menor afastamento e também o vértice de menor cota do quadrado). Nesse sentido, por  $O_r$  conduziu-se uma reta fazendo, com o eixo  $X$ , um ângulo de  $65^\circ$  de abertura para a esquerda e efetuou-se a construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu determinar os quatro vértices do polígono, em rebatimento – os pontos  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$  e  $D_r$ .

Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  (no novo diedro de projeção). Assim,  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4p}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. De forma semelhante,  $B_4$ ,  $C_4$  e  $D_4$  são as projeções dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  no **plano 4** (respetivamente) e situam-se necessariamente sobre  $f_{4p}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Note que os quatro pontos, na inversão do seu rebatimento, mantiveram os respetivos afastamentos em relação ao **plano 4** (pois os arcos do rebatimento estão contidos em planos frontais – planos paralelos ao **plano 4**).

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , precisamente a partir das suas cotas (que se mantiveram).  $A_2$  é a projeção frontal do ponto  $A$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$ .  $B_2$  é a projeção frontal do ponto  $B$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$ .  $C_2$  é a projeção frontal do ponto  $C$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $C_4$  ao eixo  $X'$ .  $D_2$  é a projeção frontal do ponto  $D$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D_4$  ao eixo  $X'$ .

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do quadrado  $[ABCD]$  (no diedro de projeção inicial).

#### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto  $O$  e é ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto  $O$  conduziram-se as projeções da reta  $p$ , a reta suporte do eixo da pirâmide – a reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta  $p$  não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$ . Por outro lado, ainda, e uma vez que as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de Reversibilidade**, não é possível determinar qualquer outro ponto da reta  $p$  de forma direta. Por tudo isso, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

No entanto, antes de mais, e porque o ponto  $V$  tem afastamento nulo, é possível, de forma imediata, determinar a projeção horizontal do ponto  $V$  ( $V_1$ ), que se situa no eixo  $X$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Sublinha-se que já se recorreu a um processo geométrico auxiliar para determinar as projeções do quadrado da base da pirâmide. De facto, no diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4p}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta **p** é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $O_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4p}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta **p** já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por outro lado, a reta **p**, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) é uma reta frontal (de frente), pelo que as suas projeções já verificam o **Critério d Reversibilidade**. Assim, e porque na mudança do diedro de projeção efetuada se mantêm as projeções horizontais, é possível determinar  $V_4$  (a projeção do ponto **V** no **plano 4**), sobre  $p_4$  (a projeção da reta **p** no **plano 4**), a partir da sua projeção horizontal ( $V_1$ ), que se mantém. Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada e determinaram-se as projeções do ponto **V**, no diedro de projeção inicial –  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**) determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $V_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $V_4$  ao eixo  $X'$ .

### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide (os vértices **A, B, C e D**, da base, e o vértice **V**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABVD]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. Em projeção frontal, as faces laterais **[ADV]** e **[ABV]** são invisíveis, pelo que a aresta lateral **[AV]** é igualmente **invisível** em projeção frontal (porque separa duas faces invisíveis em projeção frontal). Em projeção frontal, a base **[ABCD]** é visível, bem como as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]**.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[AVBCD]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>V<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[AB]**, da base, é invisível em projeção horizontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – a base **[ABCD]** e a face lateral **[ABV]**. Em projeção frontal, as faces laterais **[ADV]**, **[CDV]** e **[BCV]** são visíveis – nesse sentido, as arestas laterais **[DV]** e **[CV]** são visíveis, pois situam-se na parte visível da superfície do sólido (são arestas que separam faces visíveis, em projeção horizontal). Em projeção horizontal, a base **[ABCD]** é invisível, bem como a face lateral **[ABV]**.

### Traçado:

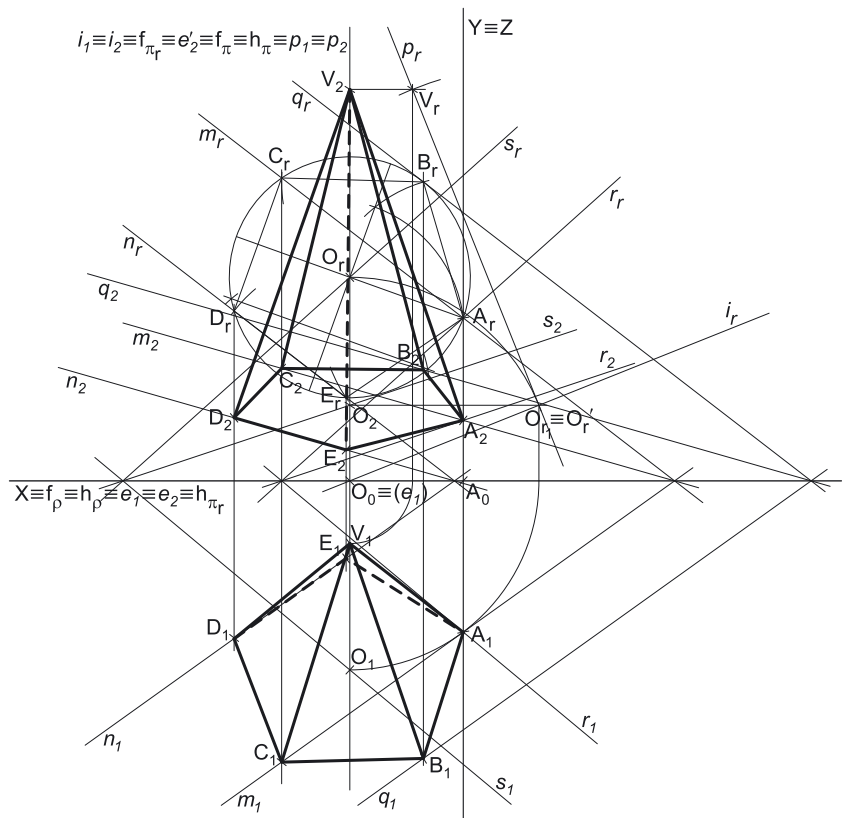
O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam traços do plano  $\rho$ ). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado **[ABCD]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do pentágono **[ABCD]**), da reta **p** e, ainda, da projeção da reta **p** no **plano 4**.

## 555.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **O**. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção horizontal do ponto **A** (**A<sub>1</sub>**), em função das coordenadas fornecidas.

Em seguida, determinou-se a projeção horizontal do ponto **A**, pertencente ao plano  $\rho$  – o ponto **A**, para pertencer ao plano  $\rho$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Nesse sentido, recorreu-se à reta **r**, pertencente ao plano  $\rho$ , cuja projeção horizontal ( $r_1$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **A** (**A<sub>2</sub>**). A reta **r** é uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , pelo que é necessariamente uma reta passante. Assim, já temos um ponto para definir a reta **r** – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano são insuficientes para definir a reta **r**, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\rho$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, recorreu-se à reta  $s$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $s$  passa pelo ponto  $O$  e tem a sua projeção horizontal ( $s_1$ ), paralela à projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ). A reta  $s$ , sendo uma reta oblíqua pertencente a um plano passante, é necessariamente uma reta passante (uma reta concorrente com o eixo  $X$  que não se identificou). Nesse sentido, a reta  $s$  está definida por dois pontos – o ponto  $O$  (o ponto dado no enunciado e que define o plano  $\rho$ ) e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ .

A reta  $s$  e a reta  $r$ , sendo complanares (porque estão ambas contidas no plano  $\rho$ ) e não sendo concorrentes (as suas projeções horizontais não são concorrentes entre si), são necessariamente duas retas paralelas, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s$  – a reta  $s$  está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que não se identificou) e por uma direção (a direção da reta  $r$ ), o que nos permitiu desenhar a projeção frontal da reta  $s$ . Por fim, determinou-se  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ), sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

Note que não se recorreu a uma reta auxiliar que passasse pelo ponto  $A$  e pelo ponto  $O$  de forma direta (e que seria a resolução mais óbvia), porque essa reta, sendo igualmente uma reta passante (concorrente com o eixo  $X$ ), teria o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  situado muito para fora dos limites da folha de papel.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o pentágono  $[ABCDE]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o pentágono  $[ABCDE]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do pentágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optemos por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que se situa no eixo  $X$ , pelo que se tem imediatamente  $X \equiv f_p \equiv h_p \equiv e_1 \equiv e_2$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

Efetuuou-se o rebatimento do ponto  $O$ . O rebatimento do ponto  $O$  tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziram-se, por  $O_2$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$ ) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira, e a partir de  $O_2$ , mediu-se o afastamento do ponto  $O$ , o que nos permitiu construir o triângulo do rebatimento do ponto  $O$ , em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento (no eixo  $X$ ) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $O$  em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $O_2$ , onde se situa  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido).

Para rebater o ponto  $A$  recorreu-se ao rebatimento de uma reta do plano à qual o ponto  $A$  pertença – a reta  $r$ , neste caso (a reta  $r$  é a reta que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $A$ ). Assim, para definirmos a reta  $r$  em rebatimento (a reta  $r_r$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência da reta  $r$  com o eixo  $X$  (que não se identificou) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Já temos um ponto para definir a reta  $r_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano são insuficientes para definir a reta  $r$  em rebatimento, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $s$ , como reta auxiliar do plano.

A reta  $s$ , em rebatimento, está definida por dois pontos – o ponto  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido) e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  (que é um ponto da charneira e, por isso, é um ponto fixo). Este raciocínio permitiu-nos desenhar a reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida). Uma vez que as retas  $r$  e  $s$  são paralelas, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$  em rebatimento (a reta  $r_r$ ). A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é um ponto fixo) e por uma direção (é paralela à reta  $s_r$ ).

O ponto  $A$  é um ponto da reta  $r$  pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido) está sobre  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), na perpendicular à charneira que passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a  $f_p$  (um plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto  $A$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido) e com raio até  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido), desenhou-se, em rebatimento (em verdadeira grandeza) a circunferência circunscrita ao pentágono e efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu determinar os pontos  $B_r$ ,  $C_r$ ,  $D_r$  e  $E_r$  (os restantes vértices da figura, em rebatimento).

A inversão do rebatimento do ponto  $C$  processou-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto  $C$  pertence. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $m$ , uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , passando pelo ponto  $C$  (a reta  $m$  é a reta suporte da diagonal  $[AC]$  do pentágono). A reta  $m_r$  (a reta  $m$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $C_r$ . Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $m$ .

A reta  $m$  passa pelo ponto  $A$ , cujas projeções são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $m$  em projeções – o ponto  $A$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $m$  é necessariamente uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto (que não se identificou) – o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  é um ponto da charneira do rebatimento, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $m$  em projeções – o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $m$ , que está definida por dois pontos – o ponto  $A$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  (que não se identificou). Por fim, pelo ponto  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto  $C$ , sobre as projeções homónimas da reta  $m$ .

A inversão do rebatimento dos pontos  $D$  e  $E$  processou-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual aqueles pontos pertencem – a reta  $n$ , que é a reta suporte do lado  $[DE]$  do pentágono. A reta  $n_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $D_r$  e  $E_r$ ) e é necessariamente paralela à reta  $m_r$ . Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $n$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A reta  $n$  é necessariamente uma reta passante – é uma reta concorrente com o eixo  $X$  num ponto (que não se identificou). O ponto de concorrência da reta  $n$  com o eixo  $X$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $n$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $n$  é paralela à reta  $m$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $n$  – a direção da reta  $m$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $n$ , que está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ) e uma direção (a direção da reta  $m$ ).

Em seguida, pelo ponto  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto  $D$ , sobre as projeções homónimas da reta  $n$ . De forma semelhante, pelo ponto  $E_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto  $E$ , sobre as projeções homónimas da reta  $n$ .

A inversão do rebatimento do ponto  $B$  processou-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto  $B$  pertence – a reta  $q$ , paralela às retas  $m$  e  $n$ . A reta  $q_r$  está definida por um ponto (o ponto  $B_r$ ) e por uma direção (é paralela às retas  $m_r$  e  $n_r$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $q$ .

A reta  $q$  é necessariamente uma reta passante – é uma reta concorrente com o eixo  $X$  num ponto (que não se identificou). O ponto de concorrência da reta  $q$  com o eixo  $X$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $q$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $q$  é paralela às retas  $m$  e  $n$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $q$  – a direção das retas  $m$  e  $n$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $q$ , que está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ) e uma direção (a direção das retas  $m$  e  $n$ ).

Em seguida, pelo ponto  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as projeções do ponto  $B$ , sobre as projeções homónimas da reta  $q$ .

A partir das projeções dos cinco pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ ), desenharam-se as projeções do pentágono  $[ABCDE]$ .

### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto  $O$  e é ortogonal ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto  $O$  conduziram-se as projeções da reta  $p$ , a reta suporte do eixo da pirâmide – a reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta  $p$  não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$ .

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) está contido na reta  $p$ , pelo que o ponto  $V$  é um ponto da reta  $p$ . Assim, a distância do ponto  $V$  ao plano  $\rho$  mede-se na reta  $p$ . A reta  $p$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante da reta  $p$  (um plano de perfil) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano  $\pi$  (o plano projetante da reta  $p$ ) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é  $f_\pi$  – tem-se imediatamente  $f_\pi \equiv e'_2 \equiv f_{\pi_r}$ .

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto  $O$ , determinando  $O_r' - O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido no seu segundo rebatimento (o ponto  $O$  rebatido pelo rebatimento do plano  $\pi$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção é a direção ortogonal ao plano  $\rho$ , que só fica garantida através da ortogonalidade da reta  $p$  a uma outra reta do plano  $\rho$ . Nesse sentido, recorreu-se à reta  $i$ , que é uma reta de perfil do plano  $\rho$  (a reta  $i$  é a reta de interseção do plano  $\pi$  com o plano  $\rho$ ) – a reta  $i$  é, assim, uma **reta de perfil passante**. A reta  $i$  está definida por dois pontos – o seu ponto de concorrência como eixo  $X$  (que não se identificou) e o próprio ponto  $O$  (que é um ponto que pertence aos dois planos). Para se garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ , é necessário garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $i$  (para que se verifique o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**). Tendo em conta que se trata de duas retas de perfil (cujas projeções não verifica o **Critério de Reversibilidade**), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano  $\pi$ , já iniciado.

Efetuem o rebatimento da reta  $i$ . O ponto de concorrência da reta  $i$  com o eixo  $X$  é um ponto da charneira (a reta  $e'$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Já temos um ponto para definir a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção – o ponto que nos falta é o ponto  $O_r'$ , pois o ponto  $O$  pertence aos dois planos. A reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) está, assim, definida por dois pontos. Em seguida, desenhou-se a reta  $p_r$ , passando por  $O_r'$  e perpendicular à reta  $i_r$  – está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação à reta  $i$ , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . Note que o ponto  $O$  é, na prática, o ponto de concorrência das retas  $p$  e  $i$ , o que se pode comprovar em rebatimento.

Sobre a reta  $p_r$ , a partir de  $O_r'$ , mediram-se os 9 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto  $V$  ao plano  $\rho$ ) e determinou-se  $V_r$  (note que se garantiu que o ponto  $V$  se situa no  $1^a$  Diedro, para que a pirâmide se situe no espaço do  $1^a$  Diedro, como o enunciado refere expressamente). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $V$  e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta  $p$ .

### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos seis vértices da pirâmide (os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ , da base, e o vértice  $V$ ), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[AVDE]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2V_2D_2E_2]$ . Em projeção frontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – o vértice  $B$  e o vértice  $C$ . Estes dois vértices, por serem os dois vértices de **maior afastamento** da pirâmide, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$  e  $[CD]$ , da base, e as arestas laterais  $[BV]$  e  $[CV]$ . Em projeção frontal, as faces laterais  $[AEV]$  e  $[DEV]$  são invisíveis, pelo que a aresta lateral  $[EV]$  é igualmente **invisível** em projeção frontal (porque separa duas faces invisíveis em projeção frontal). Em projeção frontal, a base  $[ABCDE]$  é visível, bem como as faces laterais  $[ABV]$ ,  $[BCV]$  e  $[CDV]$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ABCDV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **E**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AE]** e **[DE]**, da base, e a aresta lateral **[EV]**. Em projeção horizontal, as faces laterais **[ABV]**, **[BCV]** e **[CDV]** são visíveis, pelo que as arestas **[BV]** e **[CV]** são igualmente **visíveis** em projeção horizontal (porque separam faces visíveis em projeção horizontal). Em projeção horizontal, a base **[ABCDE]** é invisível, bem como as faces laterais **[AEV]** e **[DEV]**.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam traços do plano  $\rho$ ). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O pentágono **[ABCDE]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do pentágono **[ABCDE]**), bem como o plano  $\pi$  e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\pi$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **V**).

## 556.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **V** e a reta **p**, pelas respetivas projeções, bem como o plano  $\rho$ , pelos seus traços (que estão no eixo **X**), em função dos dados. O plano  $\rho$  está definido por uma reta (o eixo **X**, onde se situam os seus traços) e pela sua orientação (é ortogonal à reta **p**).

#### Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano ortogonal à reta **p**) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

No entanto, não temos qualquer elemento que nos permita a construção da base da pirâmide, nem sequer o plano  $\rho$  está completamente definido. Assim, antes do recurso ao processo geométrico auxiliar para a construção da base da pirâmide em verdadeira grandeza, é necessário definir completamente o plano  $\rho$  e, ainda, determinar quaisquer elementos da base da pirâmide, que nos permitam a sua construção.

#### Determinação dos elementos necessários à construção da base da pirâmide

O plano que contém a base da pirâmide é um plano ortogonal à reta **p** e que passa pelo eixo **X** – esse plano tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta **p**, ou seja, o plano tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares a reta **p** (o plano tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta **p**).

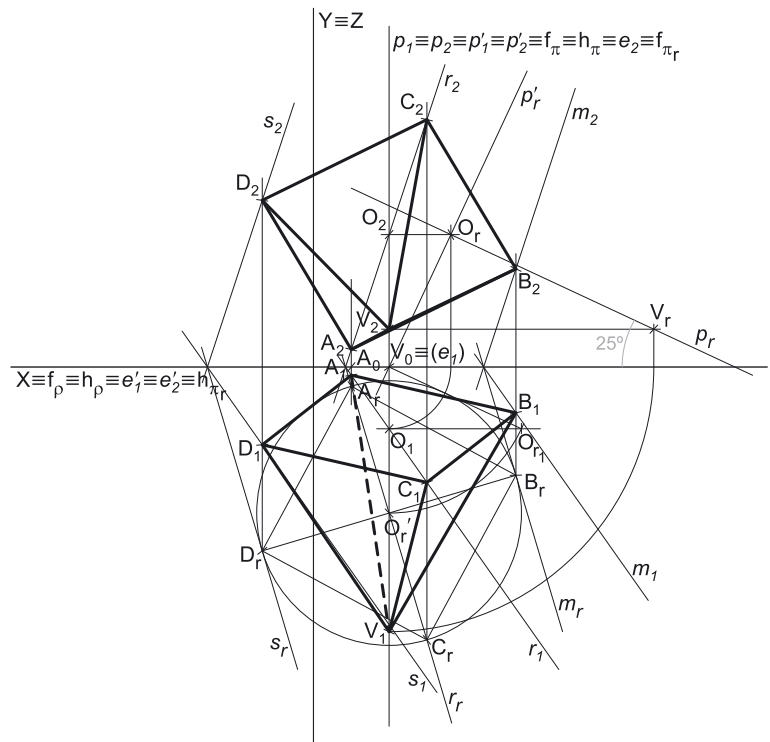
Por outro lado, atendendo a que a reta **p** é a reta que contém o eixo da pirâmide, o centro da base (o ponto **O**) é necessariamente um ponto da reta **p** (porque o ponto **O** é um dos extremos do eixo do sólido). Por outro lado, atendendo a que a base da pirâmide está contida no plano  $\rho$ , o ponto **O** (o centro da base) é necessariamente um ponto do plano  $\rho$ . Assim, o ponto **O** é necessariamente o ponto de interseção da reta **p** (a reta que contém o eixo do sólido) com o plano  $\rho$  (o plano que contém a base da pirâmide).

Há, então, que resolver as duas situações atrás referidas:

1. em primeiro lugar, tem de ser garantida a ortogonalidade do plano  $\rho$  em relação a reta **p**;
2. em segundo lugar, há que determinar o ponto de interseção da reta **p** com o plano  $\pi$  (que é o centro da base).

Analisemos a **primeira situação**. O plano  $\rho$  já contém o eixo **X**, que é uma reta fronto-horizontal, pelo que o plano  $\rho$  já contém a «família» das retas fronto-horizontais (que é uma «família» de retas ortogonais à reta **p**). Para definir o plano  $\rho$  (o plano que contém a base da pirâmide) é necessário recorrer a outra reta do plano – uma reta que seja **concorrente** com o eixo **X** e que seja igualmente ortogonal à reta **p** (outra «família» de retas que nos permita garantir a ortogonalidade do plano em relação à reta **p**).

Necessitamos, assim, de uma outra «família» de retas do plano  $\rho$  que seja ortogonais à reta **p**. Essa outra «família» de retas deverá ser a «família» de retas de perfil que o plano contém. Assim, recorreu-se a uma reta **p'**, de perfil, passante, que é necessariamente concorrente com o eixo **X**. A reta **p'** está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (é ortogonal à reta **p**). O plano definido pela reta **p'** e pelo eixo **X** é o plano ortogonal à reta **p** que contém a base da pirâmide (o plano  $\rho$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No entanto, as projeções das retas de perfil não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções das duas retas não nos garantem a efetiva ortogonalidade entre ambas. Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, para que possamos garantir a ortogonalidade entre as duas retas.

Analisemos, agora, a **segunda situação**. Nem o plano  $\rho$  nem a reta  $p$  são projetantes, pelo que a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  tem de se processar necessariamente com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A**. conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B**. determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C**. o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

**A**. Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , o plano  $\pi$ , de perfil, que é o plano projetante da reta  $p$ .

**B**. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\pi$  com o plano  $\rho$ . A reta  $p'$  (a reta do plano  $\rho$  a que se recorreu para se garantir a ortogonalidade do plano em relação à reta  $p$ ) é, imediatamente, a reta de interseção do plano  $\pi$  com o plano  $\rho$ .

**C**. O ponto de concorrência das retas  $p$  e  $p'$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  – o ponto **O**. Tendo em conta que as duas retas (as retas  $p$  e  $p'$  são, ambas, retas de perfil (cuja projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), a determinação do ponto de concorrência das duas retas não se pode processar de forma imediata, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil que contém as duas retas – o plano  $\pi$ . Nesse sentido, optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção e identificou-se a charneira do rebatimento (que foi  $f_\pi$ ), o que nos permitiu determinar  $V_r$  (o ponto **V** rebatido). Em rebatimento, foi possível desenhar a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) – já temos um ponto para definir a reta  $p_r$  (o ponto  $V_r$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. É dado o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção, que é um ângulo de  $25^\circ$  – esse ângulo está contido no plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção e que contém a reta  $p$ , que é o próprio plano  $\pi$ . Assim, o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção é o ângulo que a reta  $p$  faz com  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ , que é a reta de interseção do plano  $\pi$  com o Plano Horizontal de Projeção). Esse ângulo está contido no plano  $\pi$  e, em rebatimento, está em verdadeira grandeza no ângulo formado entre a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) e  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  rebatido).

Nesse sentido, desenhou-se  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), passando por  $V_r$  (o ponto **V** rebatido) e fazendo, com  $h_{\pi_r}$  (que se situa no eixo **X**), um ângulo de  $25^\circ$ . Das duas hipóteses que existem para medir esse ângulo, a que a resolução apresenta é a que nos garante que a pirâmide se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado pede expressamente. Assim, a reta  $p_r$  está definida por um ponto (o ponto  $V_r$ ) e por uma direção (faz ângulo de  $25^\circ$  com  $h_{\pi_r}$ ).

Por fim, desenhou-se a reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida), passando pelo seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que não se identificou mas que é um ponto da charneira e, por isso, é um ponto fixo) e perpendicular à reta  $p_r$  – a reta  $p'_r$  está, assim, definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e por uma direção (é perpendicular a  $p_r$ ). Já se garantiu a ortogonalidade entre as retas  $p$  e  $p'$ . O plano  $\rho$  (o plano passante rampa que contém a base da pirâmide) está totalmente definido, pela reta  $p'$  e pelo eixo **X** – o plano é ortogonal à reta  $p$ , pois contém duas retas concorrentes que são ortogonais à reta  $p$  (a reta  $p'$  e o eixo **X**). Está garantida a ortogonalidade do plano  $\rho$  em relação à reta  $p$ . Falta, apenas, determinar o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ , que é o ponto de concorrência das duas retas.

Assim, determinou-se o ponto  $O_r$ , que é o ponto de concorrência das retas  $p_r$  e  $p'_r$  – o ponto **O**, é, em rebatimento, o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções do ponto **O**, o que nos permitiu concluir a última etapa do **método geral da interseção entre retas e planos**.

O plano  $\rho$ , definido pelo eixo **X** e pelo ponto **O**, é ortogonal à reta  $p$  – o plano  $\rho$  está definido por uma reta (o eixo **X**) e por um ponto exterior à reta (o ponto **O**). O plano  $\rho$  é o plano que contém o quadrado **[ABCD]** (a base da pirâmide). Já temos um elemento que nos permite prosseguir com a construção da base da pirâmide – o seu centro (o ponto **O**).

### Determinação das projeções da base da pirâmide:

Como atrás se referiu, o plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optemos por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente  $X \equiv f_\rho \equiv h_\rho \equiv e_1 \equiv e_2$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

Efetou-se o rebatimento do ponto **O**. O rebatimento do ponto **O** tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziram-se, por  $O_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O**) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira, e a partir de  $O_1$ , mediu-se a cota do ponto **O**, o que nos permitiu construir o triângulo do rebatimento do ponto **O**, em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento (no eixo **X**) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **O** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $O_1$ , onde se situa  $O'_1$  (o ponto **O** rebatido) – note que  $O'_1$  é o ponto **O** rebatido no seu segundo rebatimento (o ponto **O** rebatido pelo rebatimento do plano  $\rho$ ).

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O'_1$  (o ponto **O** rebatido) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se, em rebatimento (em verdadeira grandeza) a circunferência circunscrita ao quadrado e efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, inscrita na circunferência. Tendo em conta que nos é dada a abscissa do ponto **A**, foi possível conduzir uma perpendicular à charneira com essa abscissa – essa perpendicular à charneira corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**. Essa perpendicular à charneira corta a circunferência em dois pontos – desses dois pontos, aquele que se situa mais próximo do eixo **X** é o ponto  $A_r$  (o ponto **A** rebatido), pois o enunciado refere, expressamente, que o ponto **A** é o vértice de menor cota da base da pirâmide.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, a construção do quadrado processou-se a partir de  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido), o que nos permitiu determinar os pontos  $B_r$ ,  $C_r$  e  $D_r$  (os restantes vértices da figura, em rebatimento). Em seguida, foi necessário inverter o rebatimento do plano  $\rho$ , de forma a se determinarem as projeções dos quatro vértices do quadrado.

A inversão do rebatimento dos pontos  $A$  e  $C$  processou-se com o recurso à reta  $r$ , oblíqua, do plano  $\rho$ , à qual aqueles dois pontos pertencem – a reta  $r$  é a reta suporte da diagonal  $[AC]$  do quadrado. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – o ponto  $A_r$  e o ponto  $C_r$ . Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ .

A reta  $r$  passa pelo ponto  $O$  (o ponto  $O$  é um ponto da diagonal  $[AC]$ ), cujas projeções são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções – o ponto  $O$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $r$  é necessariamente uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto (que não se identificou) – o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  é um ponto da charneira do rebatimento, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $r$ , que está definida por dois pontos – o ponto  $O$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  (que não se identificou).

Por fim, pelo ponto  $A_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto  $A$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ . De forma semelhante, pelo ponto  $C_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto  $C$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ .

A inversão do rebatimento do ponto  $D$  processou-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto  $D$  pertence – a reta  $s$ , que é uma reta paralela à reta  $r$ . A reta  $s_r$  está definida por um ponto (o ponto  $D_r$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $r_r$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $s$ .

A reta  $s$  é necessariamente uma reta passante – é uma reta concorrente com o eixo  $X$  num ponto (que não se identificou). O ponto de concorrência da reta  $s$  com o eixo  $X$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $s$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $s$  é paralela à reta  $r$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s$  em projeções – a direção da reta  $r$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $s$ , que está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ) e uma direção (a direção da reta  $r$ ).

Em seguida, pelo ponto  $D_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto  $D$ , sobre as projeções homónimas da reta  $s$ .

À semelhança do exposto para o ponto  $D$ , a inversão do rebatimento do ponto  $B$  processou-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto  $B$  pertence – a reta  $m$ , que é uma reta paralela às retas  $r$  e  $s$ . A reta  $m_r$  está definida por um ponto (o ponto  $B_r$ ) e por uma direção (é paralela às retas  $r_r$  e  $s_r$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $m$ .

A reta  $m$  é necessariamente uma reta passante – é uma reta concorrente com o eixo  $X$  num ponto (que não se identificou). O ponto de concorrência da reta  $m$  com o eixo  $X$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $m$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $m$  é paralela às retas  $r$  e  $s$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $m$  em projeções – a direção das retas  $r$  e  $s$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $m$ , que está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ) e uma direção (a direção das retas  $r$  e  $s$ ).

Em seguida, pelo ponto  $B_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto  $B$ , sobre as projeções homónimas da reta  $m$ .

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do quadrado  $[ABCD]$ .

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide (os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , da base, e o vértice  $V$ ), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABCD]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2D_2]$ . Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice  $V$ . Este vértice, por ser os dois vértices de maior afastamento da pirâmide, é visível, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas laterais  $[AV]$ ,  $[BV]$ ,  $[CV]$  e  $[DV]$ . Em projeção frontal, as quatro faces laterais da pirâmide são visíveis. Pelo contrário, a base é a única face da pirâmide que é invisível em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[ABVD]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1B_1V_1D_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice  $C$ . Este vértice, por ser o vértice de maior cota da pirâmide, é visível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[BC]$  e  $[CD]$ , da base, e a aresta lateral  $[CV]$ . Em projeção horizontal, as faces laterais  $[ABV]$  e  $[ADV]$  são invisíveis, pelo que a aresta lateral  $[AV]$  é igualmente invisível em projeção horizontal (porque separa duas faces invisíveis em projeção horizontal). Em projeção horizontal, a base  $[ABCD]$  é visível, bem como as faces laterais  $[BCV]$  e  $[CDV]$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $p$ ) representaram-se a médio, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício e é onde se situam traços do plano  $\rho$ ). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a forte, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a leve, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a leve, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso do plano  $\pi$ , de todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\pi$  (que nos permitiram determinar as projeções do ponto  $O$ ), bem como de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado  $[ABCD]$ ).

## 557.

### Dados:

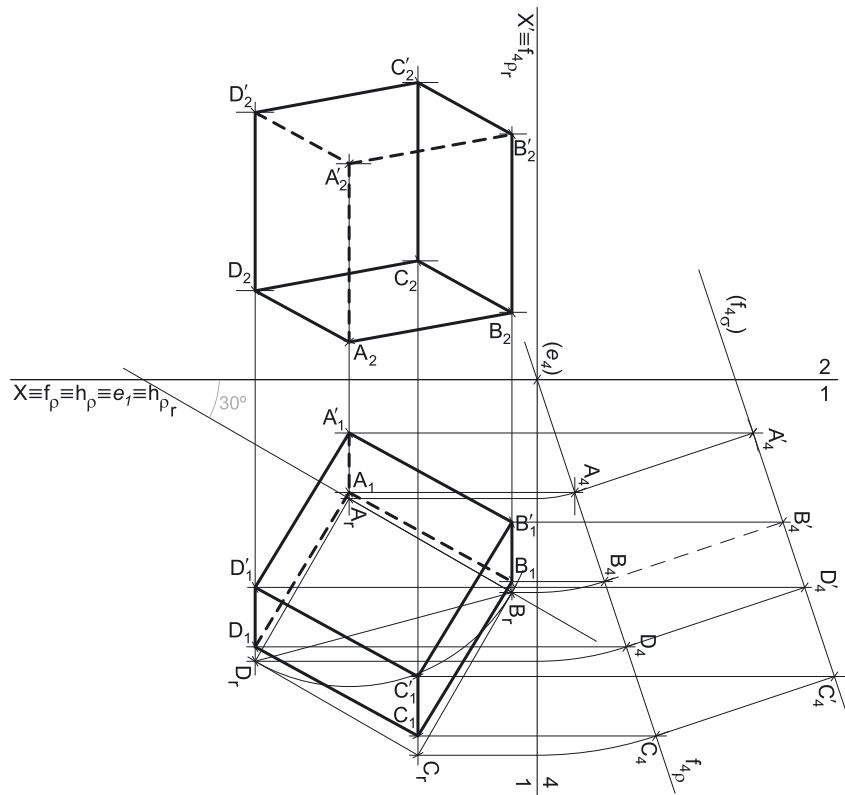
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**.

Note que é dado o **ângulo** que o lado **[AB]** do quadrado faz com o eixo **X**, mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado **[AB]** do quadrado faz com o eixo **X** **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do triângulo (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.



Note que se poderia ter optado pelo rebatimento do plano  $\rho$ , mas, neste caso, optou-se por uma situação diferente – optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante e, em seguida, rebater o plano  $\rho$  **como um plano projetante**.

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano passante num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que se situa no eixo **X**. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto **A** (o ponto que define o plano) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**. Assim, **A<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **A<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 1 cm – a cota de **A**). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) tem necessariamente de passar por **A<sub>4</sub>** (a nova projeção frontal do ponto **A**), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4\rho}$  –  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos (o ponto **A<sub>4</sub>** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo **X'**).

Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), como um plano projetante (um plano de topo). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\rho \equiv e_4$  ( $e_4$ , a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo **X'**). Depois, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

Efetou-se o rebatimento do ponto **A**, desenhando a projeção frontal (no **plano 4**) do arco do seu rebatimento, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar **A<sub>r</sub>** (que, no seu rebatimento, manteve o seu afastamento em relação ao **plano 4**).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com o eixo  $X$  – é o ângulo que o segmento  $[A_r B_r]$  faz com o eixo  $X$ . Nesse sentido, por  $A_r$  conduziu-se uma reta fazendo, com o eixo  $X$ , um ângulo de  $30^\circ$ . Tendo em conta que, no enunciado, é referido que o vértice  $B$  se situa à direita do vértice  $A$  e que tem afastamento superior a  $A$ , depreende-se que o ângulo tem abertura para a direita (para que se possa garantir o que o enunciado pede). Em seguida, sobre a reta suporte do segmento  $[A_r B_r]$  mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo), a partir de  $A_r$ , e determinou-se  $B_r$ . A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o quadrado  $[ABCD]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos  $C_r$  e  $D_r$  (os outros dois vértices do quadrado, em rebatimento).

Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  (no novo diedro de projeção). Assim,  $B_4$ ,  $C_4$  e  $D_4$  são as projeções dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  no **plano 4** e situam-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Note que os três pontos, na inversão do seu rebatimento, mantiveram os respetivos afastamentos (em relação ao **plano 4**).

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$ , precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).  $B_2$  é a projeção frontal do ponto  $B$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$ .  $C_2$  é a projeção frontal do ponto  $C$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $C_4$  ao eixo  $X'$ .  $D_2$  é a projeção frontal do ponto  $D$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D_4$  ao eixo  $X'$ .

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do quadrado  $[ABCD]$  (no diedro de projeção inicial).

#### Determinação das projeções dos vértices da face superior do cubo:

Em seguida, representou-se (no novo diedro de projeção) o plano  $\sigma$ , que é o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a face superior do cubo (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ). A distância entre os dois planos mede-se ortogonalmente aos dois planos e é igual à aresta do cubo (que é 5 cm). Assim, desenhou-se uma paralela a  $f_{4\rho}$ , situada 5 cm (a medida da aresta do cubo) para cima de  $f_{4\rho}$ , que é  $f_{4\sigma}$  (o traço, no **plano 4**, do plano  $\sigma$ ). O plano  $\sigma$  é, assim, o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a face superior do cubo (a face  $[A'B'C'D']$ ). Note que o plano  $\sigma$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço no **plano 4**), razão pela qual o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** se identificou entre parêntesis.

O cubo é, na prática, um **prisma quadrangular reto** (cujas faces laterais são quadrados) pelo que as arestas do sólido que não estão contidas no plano  $\rho$  nem no plano  $\sigma$  são necessariamente **ortogonais** àqueles dois planos. Qualquer dessas arestas está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\rho$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano de topo, a ortogonalidade de qualquer reta em relação ao plano  $\rho$  é direta. Assim, qualquer dessas arestas tem a sua projeção no **plano 4** perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a uma reta do plano  $\rho$  – o seu novo traço frontal) e tem, também, a sua projeção horizontal perpendicular a  $h_\rho$  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a outra reta do plano  $\rho$  – o seu traço horizontal).

Assim, pelas projeções dos vértices do quadrado  $[ABCD]$  (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das arestas ortogonais ao plano  $\rho$ , o que nos permitiu determinar as duas projeções do cubo, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Note que os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  (os vértices da face superior) foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções frontais (no **plano 4**), pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  é também um plano projetante frontal.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos vértices da face superior do sólido (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ). Tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ , precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

$A'_2$  é a projeção frontal do ponto  $A'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $A'_4$  ao eixo  $X'$ .  $B'_2$  é a projeção frontal do ponto  $B'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B'_4$  ao eixo  $X'$ .  $C'_2$  é a projeção frontal do ponto  $C'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $C'_4$  ao eixo  $X'$ .  $D'_2$  é a projeção frontal do ponto  $D'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D'_4$  ao eixo  $X'$ .

#### Determinação das projeções do cubo:

A partir das projeções dos oito vértices do cubo (os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , da face inferior, e os vértices  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ , da face superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABB'C'D'D]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2B'_2C'_2D'_2D_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice  $C$  e o vértice  $A'$ . O vértice  $A'$ , por ser o vértice de **menor afastamento** do cubo, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$ ,  $[A'D']$  e  $[AA']$ . O vértice  $C$ , por ser o vértice de **maior afastamento** do cubo, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[BC]$ ,  $[CD]$  e  $[CC]$ . Note que, em projeção frontal, a face superior (a face  $[A'B'C'D']$ ) é invisível, bem como as faces  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$ . A face inferior (a face  $[ABCD]$ ) e as faces  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  são visíveis (em projeção frontal).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[BCDD'A'B']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1D'_1A'_1B'_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – o vértice  $C'$  e o vértice  $A$ . O vértice  $A$ , por ser o vértice de **menor cota** do cubo, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$  e  $[AA']$ . O vértice  $C'$ , por ser o vértice de **maior cota** do cubo, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$ ,  $[C'D']$  e  $[CC']$ . Note que, em projeção horizontal, a face superior (a face  $[A'B'C'D']$ ) é visível, bem como as faces  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$ . A face inferior (a face  $[ABCD]$ ) e as faces  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$  são invisíveis (em projeção horizontal).

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ ). As duas projeções do cubo (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado  $[ABCD]$ ) e, ainda, da projeção do cubo no **plano 4**.



## 558.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**.

Note que é dado o **ângulo** que o lado **[AB]** do triângulo faz com o eixo **X**, mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da base do prisma:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Por outro lado, o **ângulo** que o lado **[AB]** do triângulo faz com o eixo **X** **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio triângulo, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do triângulo (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

Optemos por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente  $X \equiv f_p \equiv h_p \equiv e_1 \equiv e_2$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

Efetou-se o rebatimento do ponto **A**. O rebatimento do ponto **A** tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziram-se, por **A<sub>2</sub>**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **A**) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira, e a partir de **A<sub>2</sub>**, mediu-se o afastamento do ponto **A**, o que nos permitiu construir o triângulo do rebatimento do ponto **A**, em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento (no eixo **X**) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por **A<sub>2</sub>**, onde se situa **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido).

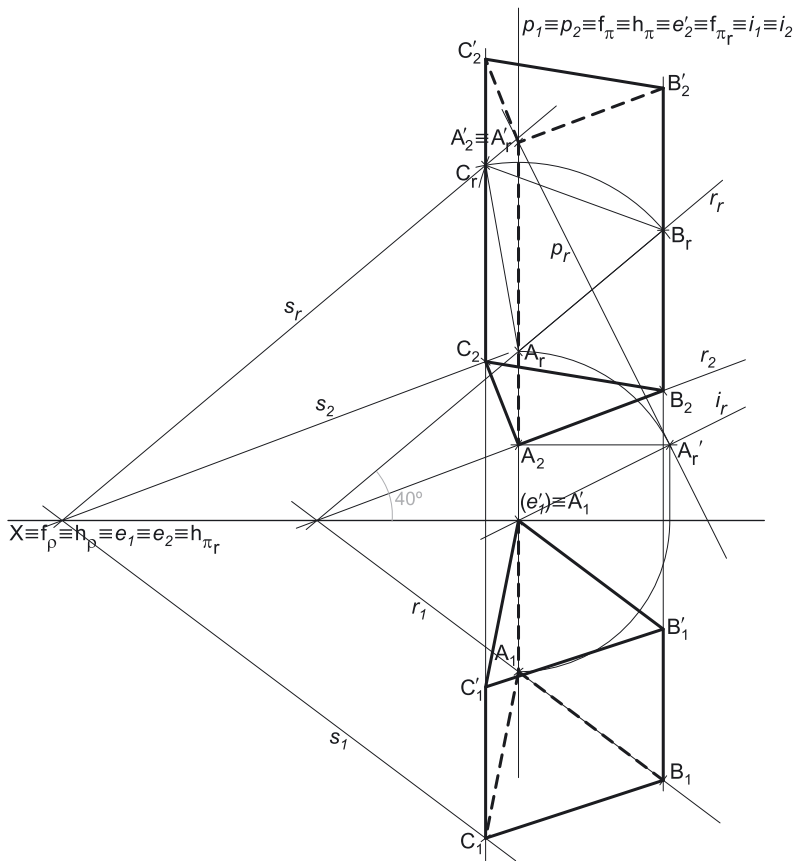
Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado **[AB]** faz com o eixo **X** – é o ângulo que o segmento **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** faz com o eixo **X**. Nesse sentido, por **A<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta fazendo, com o eixo **X**, um ângulo de 40°, de abertura para a direita. Em seguida, sobre a reta suporte do segmento **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** mediram-se os 5 cm (o lado do triângulo), a partir de **A<sub>r</sub>**, e determinou-se **B<sub>r</sub>**. Note que é dado que o vértice **B**, do triângulo, tem afastamento superior a **A** e isso mesmo se garantiu em rebatimento. A partir dos pontos **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**, construiu-se o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o ponto **C<sub>r</sub>** (o terceiro vértice do triângulo, em rebatimento).

Tenha em conta que, na construção do triângulo, se garantiu que o prisma se situa no 1ª Diedro. De facto, existem duas hipóteses para construir o triângulo a partir de **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**, mas apenas aquela que a resolução apresenta garante que o prisma se situe no 1ª Diedro – na outra hipótese, tendo em conta que o vértice **A'** da base superior tem afastamento nulo, o vértice **C'** da base superior situar-se-ia necessariamente no 2ª Diedro.

A inversão do rebatimento do ponto **B** processou-se com o recurso à reta **r**, oblíqua, do plano  $\rho$ , à qual o ponto **B** pertence – a reta **r** é a reta suporte do lado **[AB]** do triângulo. A reta **r<sub>r</sub>** (a reta **r** rebatida) está definida por dois pontos – o ponto **A<sub>r</sub>** e o ponto **B<sub>r</sub>**. Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **r**.

A reta **r** passa pelo ponto **A** (o ponto **A** é um extremo do lado **[AB]**), cujas projeções são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta **r** em projeções – o ponto **A**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **r** é necessariamente uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo **X** num ponto (que não se identificou) – o seu ponto de concorrência com o eixo **X** é um ponto da charneira do rebatimento, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **r** em projeções – o seu ponto de concorrência com o eixo **X**. Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta **r**, que está definida por dois pontos – o ponto **A** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que não se identificou).

Por fim, pelo ponto **B<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto **B**, sobre as projeções homónimas da reta **r**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento do ponto **C** processou-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **C** pertence – a reta **s**, que é uma reta paralela à reta **r**. A reta **s<sub>r</sub>** está definida por um ponto (o ponto **C<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela à reta **r<sub>r</sub>**). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **s**.

A reta **s** é necessariamente uma reta passante – é uma reta concorrente com o eixo **X** num ponto (que não se identificou). O ponto de concorrência da reta **s** com o eixo **X** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que já temos um ponto para definir a reta **n** em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **s** é paralela à reta **r**, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **s** em projeções – a direção da reta **r**. Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta **s**, que está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e uma direção (a direção da reta **r**).

Em seguida, pelo ponto **C<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto **C**, sobre as projeções homónimas da reta **s**.

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo [**ABC**].

#### Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\rho$ . Tendo em conta que, no enunciado, é referido que o ponto **A'** (o extremo superior da aresta lateral [**AA'**]) tem afastamento nulo, o ponto **A'** é o traço frontal da reta suporte da aresta [**AA'**]. Assim, pelas projeções do ponto **A** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte da aresta lateral [**AA'**]. A reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta **p** não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\rho$ .

Tendo em conta que o ponto **A'** é o traço frontal da reta **p** e, exatamente porque as projeções da reta **p** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, não é possível determinar qualquer outro ponto da reta **p** de forma direta, sem o recurso a procedimentos auxiliares. Nesse sentido, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante da reta **p** (um plano de perfil) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano  $\pi$  (o plano projetante da reta **p**) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é  $f_{\pi}$  – tem-se imediatamente  $f_{\pi} \equiv e'_2 \equiv f_{\pi r}$ .

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **A**, determinando **A'<sub>r</sub>** – **A'<sub>r</sub>** é o ponto **A** rebatido no seu segundo rebatimento (**A** rebatido pelo rebatimento do plano  $\pi$ ). Já temos um ponto para definir a reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção é a direção ortogonal ao plano  $\rho$ , que só fica garantida através da ortogonalidade da reta **p** a uma outra reta do plano  $\rho$ . Nesse sentido, recorreu-se à reta **i**, que é uma reta de perfil do plano  $\rho$  (a reta **i** é a reta de interseção do plano  $\pi$  com o plano  $\rho$ ). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **A** (que é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos e, por isso, pertence à reta de interseção entre os dois planos) e pelo seu ponto de concorrência com o eixo **X** (porque a reta **i** é necessariamente uma reta passante). Para se garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$ , é necessário garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação à reta **i** (para que se verifique o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**). Tendo em conta que se trata de duas retas de perfil (cujas projeções não verifica o **Critério de Reversibilidade**), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano  $\pi$ , já iniciado.

Efetuemos o rebatimento da reta **i**. O ponto de concorrência da reta **i** com o eixo **X** (que não se identificou) é um ponto da charneira (a reta **e'**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). A reta **i<sub>r</sub>** (a reta **i** rebatida) passa pelo seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que não se identificou) e por **A'<sub>r</sub>**. Em seguida, desenhou-se a reta **p<sub>r</sub>**, passando por **A'<sub>r</sub>** e perpendicular a **i<sub>r</sub>** – está garantida a ortogonalidade da reta **p** em relação à reta **i**, pelo que está garantida a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano  $\rho$ . Note que o ponto **A** é, na prática, o ponto de concorrência das retas **p** e **i**, o que se pode comprovar em rebatimento.

Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta **p**, que é o ponto **A'<sub>r</sub>** – **A'<sub>r</sub>** é o ponto de concorrência da reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida) com  $f_{\pi r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  em rebatimento). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto **A'** e determinaram-se as suas projeções. O ponto **A'** é um ponto da charneira (que é  $f_{\pi}$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A'_2 \equiv A'_r$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação das projeções dos restantes vértices da base superior do sólido, na qual se teve em conta que as arestas laterais do prisma são todas paralelas entre si (estão contidas em retas de perfil ortogonais aos planos das bases) e, ainda, que as arestas da base superior são paralelas às arestas correspondentes da base inferior.

Assim, pelas projeções do ponto **B** (um outro vértice da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral [**BB'**] (que é de perfil e não se identificou) – o ponto **B'** é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **B** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto **A'** conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta [**A'B'**] (que também não se identificou). O vértice **B'**, da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

De forma idêntica, pelas projeções do ponto **C** (o terceiro vértice da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral [**CC'**] (que é de perfil e, mais uma vez, não se identificou) – o ponto **C'** é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **C** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto **A'** conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta [**A'C'**] da base superior (que também não se identificou). O vértice **C'**, da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

#### Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos seis vértices do prisma (os vértices **A**, **B** e **C** da base inferior, e os vértices **A'**, **B'** e **C'**, da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABB'C'C]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2B'_2C'_2C_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice  $A'$ . O vértice  $A'$ , por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[A'C']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[AA']$ . Por outro lado, a aresta  $[BC]$  da base inferior, é visível, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal – a base  $[ABC]$  e a face lateral  $[BB'C'C]$ . Note que, em projeção frontal, a base superior (a base  $[A'B'C']$ ) é invisível, bem como as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'C'C]$ .

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[BCC'A'B']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1C'_1A'_1B'_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice  $A$ . O vértice  $A$ , por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AC]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[AA']$ . Por outro lado, a aresta  $[B'C']$  da base superior é visível, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal – a base  $[A'B'C']$  e a face lateral  $[BB'C'C]$ . Note que, em projeção horizontal, a base inferior (a base  $[ABC]$ ) é invisível, bem como as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'C'C]$ .

### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ ). As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo  $[ABC]$ ), bem como o plano  $\pi$  e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\pi$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice  $A'$ ), bem como todos os traçados que nos permitiram determinar os restantes vértices da base de maior afastamento do sólido.

## 559.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $O$  e  $A'$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. O plano  $\rho$  está representado pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto  $O$  (o ponto que define o plano).

### Resolução:

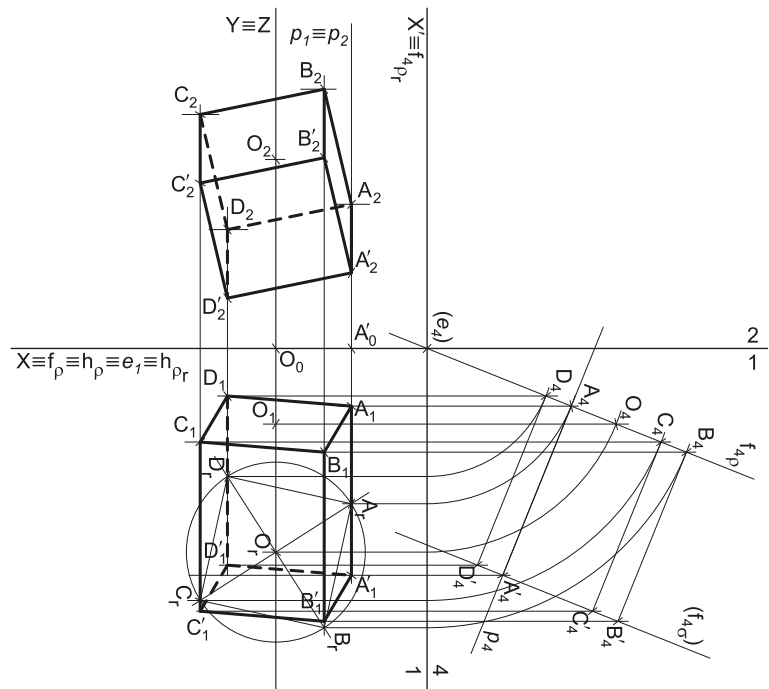
O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  (a base de menor afastamento do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (o quadrado apresenta deformação em ambas as projeções), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, o único dado, no enunciado, respeitante ao quadrado  $[ABCD]$ , é o ponto  $O$  (o centro do quadrado) – não é possível a construção do quadrado  $[ABCD]$ , apenas a partir do ponto  $O$ , por falta de dados (não nos é dado o lado do quadrado, nem o raio da circunferência circunscrita à figura nem qualquer vértice do quadrado). Assim, é necessário determinar qualquer outro elemento do quadrado  $[ABCD]$ , para que seja possível prosseguir com a resolução.

### Determinação dos elementos necessários para a construção da base de menor afastamento do prisma:

Os dados do enunciado referem-se, ainda, ao extremo de maior afastamento da aresta  $[AA']$ , que é necessariamente um vértice da base de maior afastamento do sólido (o vértice  $A'$ ), estando igualmente expresso que se trata de um **prisma regular**. Nesse sentido, **as arestas laterais prisma são ortogonais aos planos das bases** (bem como o eixo do prisma). Nesse sentido, o vértice  $A$  da base  $[ABCD]$  (o extremo de menor afastamento da aresta lateral  $[AA']$ ) é necessariamente o ponto do plano  $\rho$  (o plano que contém a base  $[ABCD]$ ) e, ainda, um ponto da reta suporte da aresta lateral  $[AA']$ . Assim, o ponto  $A$  é o ponto de interseção da reta suporte da aresta lateral  $[AA']$  do prisma com o plano  $\rho$  (o plano que contém a base  $[ABCD]$  do sólido).

Assim, pelo ponto  $A'$  conduziu-se uma reta  $p$ , ortogonal ao plano  $\rho$  (que é a reta suporte da aresta lateral  $[AA']$ ). A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta  $p$  não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$ . Em seguida, há que determinar o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ , que será o vértice  $A$  da base de menor afastamento do prisma. Tendo em conta que nem a reta  $p$  nem o plano  $\rho$  são projetantes, é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que, neste momento, temos três situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta  $p$  esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta  $p$ , para além do ponto  $P$ ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  – a reta  $p$  tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano  $\rho$ ;
3. por fim, nem o plano  $\rho$  nem a reta  $p$  são projetantes, pelo que a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  não é direta.

Nesse sentido, o recurso a uma **mudança do diedro de projeção** permitir-nos-á resolver as três situações pendentes de uma só vez. De facto, ao criarmos um novo diedro de projeção, por um lado as projeções da reta  $p$  verificarão o **Critério de Reversibilidade**, por outro lado, nesse diedro de projeção, será possível garantir a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$  (pois os dois traços do plano  $\rho$  serão necessariamente duas retas de duas «famílias» de retas diferentes) e, por fim, é possível criar um novo diedro de projeção no qual o plano  $\rho$  seja um plano projetante, pelo que a determinação do ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$  seja direta. É este raciocínio que justifica o recurso à **mudança do diedro de projeção**.

Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), que se situa no eixo  $X$ . As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, é necessário determinar o novo traço frontal do plano  $\rho$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**). O novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4p}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4p}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, é necessário o recurso a um ponto do plano  $\rho$  – o ponto  $O$  (que é o ponto dado no enunciado e que define o plano  $\rho$ ). Assim, determinou-se  $O_4$  (a projeção do ponto  $O$  no **plano 4**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $O_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $O_2$  ao eixo  $X$  (que é 5 cm – a cota de  $O$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  –  $f_{4p}$ , passa por  $O_4$  pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Assim,  $f_{4p}$  está definido por dois pontos – o ponto  $O_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X'$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $A'$  no **plano 4**.  $A'_4$  é a projeção do ponto  $A'$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A'_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A'_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $A'$ ).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o plano  $\rho$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  já é direta (os traços do plano  $\rho$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4p}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $A'_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4p}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do plano  $\rho$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao plano  $\rho$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Por outro lado, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, pelo que a determinação do ponto de interseção entre a reta  $p$  e o plano  $\rho$  se processa diretamente, a partir da sua projeção frontal (no **plano 4**). Assim, determinou-se  $A_4$  (a projeção, no **plano 4**, do ponto  $A$ ) – o ponto  $A$  é o ponto de interseção da reta  $p$  com o plano  $\rho$ . Nesse sentido,  $A_4$  é o ponto de interseção de  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**) com  $f_{4p}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ) –  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) situa-se sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Por fim, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada e determinou-se  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ , no diedro de projeção inicial), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  é igual a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$ .

O ponto  $A$ , assim, determinado, é um vértice do quadrado  $[ABCD]$ . Já temos elementos suficientes do quadrado  $[ABCD]$  (o centro da circunferência inscrita à figura e um dos seus vértices) para prosseguir com a resolução do exercício.

#### *Determinação das projeções da base inferior do prisma:*

Assim, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, como um plano projetante (um plano de topo). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1$  ( $e_4$ , a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo  $X'$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

Em seguida, rebateram-se os pontos  $O$  e  $A$ , desenhando as projeções frontais (no **plano 4**) dos arcos dos respetivos rebatimentos, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $O_r$  e  $A_r$  (os dois pontos, no seu rebatimento, mantiveram os respetivos afastamentos em relação ao **plano 4**).

Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido) e com raio até  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido), desenhou-se a circunferência inscrita ao quadrado e efetuaram-se os traçados necessários à construção do polígono, inscrito da circunferência (e a partir de um vértice conhecido). Essa construção permitiu-nos determinar os pontos  $B_r$ ,  $C_r$  e  $D_r$  (os outros três vértices do quadrado, em rebatimento). Note que o enunciado é omissivo no que respeita à ordem dos vértices (que, contudo, tem de ser sequencial), pelo que o facto de se ter considerado  $B$  como o vértice de maior cota do polígono foi um facto aleatório.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos **B**, **C** e **D** (no novo diedro de projeção). Assim,  $B_4$  é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. De forma semelhante,  $C_4$  e  $D_4$  são as projeções dos pontos **C** e **D** no **plano 4** (respetivamente) e situam-se igualmente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Tenha em conta que, na inversão do rebatimento efetuada, os três pontos mantêm os respetivos afastamentos (em relação ao **plano 4**).

Em seguida, atendendo a que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **B**, **C** e **D**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).  $B_2$  é a projeção frontal do ponto **B** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $B_4$  ao eixo **X'**.  $C_2$  é a projeção frontal do ponto **C** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $C_4$  ao eixo **X'**.  $D_2$  é a projeção frontal do ponto **D** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $D_4$  ao eixo **X'**.

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

### Determinação das projeções dos vértices da base de maior afastamento do prisma:

Em seguida, representou-se (no novo diedro de projeção) o plano  $\sigma$ , que é o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a base de maior afastamento do prisma (o quadrado **[A'B'C'D']**). É necessário ter em conta que o plano  $\sigma$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido), no novo diedro de projeção, é também um plano projetante frontal e contém o ponto **A'** (que é um vértice da base de maior afastamento). Assim, por  $A'_4$  conduziu-se uma paralela a  $f_{4\sigma}$ , que é  $f_{4\sigma}$  (o traço, no **plano 4**, do plano  $\sigma$ ). O plano  $\sigma$  é, assim, o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a base de maior afastamento do prisma (a base **[A'B'C'D']**). Note que o plano  $\sigma$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço no **plano 4**), razão pela qual o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** se identificou entre parêntesis.

Todas as arestas laterais de qualquer prisma são paralelas entre si. A aresta lateral **[AA']** está contida na reta  $p$ . Assim, pelas projeções dos restantes vértices do quadrado **[ABCD]** (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das arestas laterais do prisma (paralelas à reta  $p$ ), o que nos permitiu determinar as duas projeções do sólido, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Note que os pontos **B'**, **C'** e **D'** (os outros três vértices da base superior) foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções frontais (no **plano 4**), pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  é também um plano projetante frontal.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos vértices da base superior do sólido (o quadrado **[A'B'C'D']**). Tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **B'**, **C'** e **D'**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

$B'_2$  é a projeção frontal do ponto **B'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B'_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $B'_4$  ao eixo **X'**.  $C'_2$  é a projeção frontal do ponto **C'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C'_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $C'_4$  ao eixo **X'**.  $D'_2$  é a projeção frontal do ponto **D'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D'_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $D'_4$  ao eixo **X'**.

### Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos oito vértices do prisma (os vértices **A**, **B**, **C** e **D** da base de menor afastamento, e os vértices **A'**, **B'**, **C'** e **D'**, da base de maior afastamento), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABCC'D'A']**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice **D** e o vértice **B'**. O vértice **D**, por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AD]** e **[CD]**, da base de menor afastamento, e a aresta lateral **[DD']**. O vértice **B'**, por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']** e **[B'C']**, da base de maior afastamento, e a aresta lateral **[BB']**. Note que, em projeção frontal, a base de maior afastamento (a base **[A'B'C'D']**) é visível, bem como as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]**. A base de menor afastamento (a base **[ABCD]**) e as faces laterais **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]** são invisíveis (em projeção frontal).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[AA'B'C'D]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – o vértice **D'** e o vértice **B**. O vértice **B**, por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base de menor afastamento, e a aresta lateral **[BB']**. O vértice **D'**, por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'D']** e **[C'D']**, da base de maior afastamento, e a aresta lateral **[DD']**. Note que, em projeção horizontal, a base de maior afastamento (a base **[A'B'C'D']**) é invisível, bem como as faces laterais **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]**. A base de menor afastamento (a base **[ABCD]**) e as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]** são visíveis (em projeção horizontal).

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ ). As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado **[ABCD]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado **[ABCD]**), da reta  $p$  e, ainda, da projeção do prisma no **plano 4**.



## 560.

**Dados:**

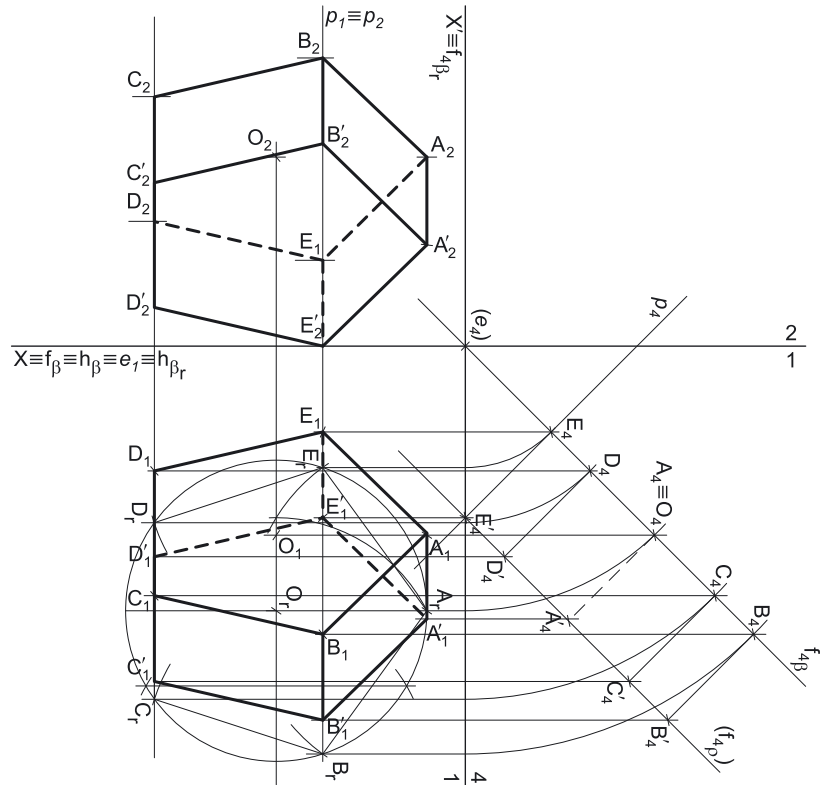
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O** (o centro da circunferência circunscrita ao pentágono) pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **O** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**).

O plano  $\beta_{1/3}$  está definido por uma reta (o eixo **X**) e pela orientação – o  $\beta_{1/3}$  faz diedros de  $45^\circ$  com os planos de projeção e atravessa os  $1^a$  e  $3^a$  Diedros. À partida, não há qualquer necessidade de identificar os traços do  $\beta_{1/3}$  (que se situam no eixo **X**).

**Resolução:***Determinação das projeções da base superior do prisma:*

O plano que contém o pentágono **[ABCDE]** (o  $\beta_{1/3}$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o pentágono **[ABCDE]** (a base de superior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (o pentágono apresenta deformação em ambas as projeções), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Note que se poderia ter optado pelo rebatimento do  $\beta_{1/3}$ , mas se optou por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o  $\beta_{1/3}$  num plano projetante e, em seguida, rebater o  $\beta_{1/3}$  como um plano projetante.



Optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ , o que nos permite transformar o  $\beta_{1/3}$  num plano de topo (projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano (que se situa no eixo **X** – o eixo **X'** é perpendicular ao eixo **X** inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, é necessário determinar o novo traço frontal do  $\beta_{1/3}$  (o traço do  $\beta_{1/3}$  no **plano 4**). Para tal começou-se por indicar os traços do  $\beta_{1/3}$  (que se situam no eixo **X** inicial) – tem-se imediatamente  $X \equiv f_\beta \equiv h_\beta$ . Note que se considerou que o plano  $\beta$  é o  $\beta_{1/3}$ , por uma questão de simplificação das notações a utilizar.

O novo traço frontal do  $\beta_{1/3}$  ( $f_{4\beta}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do  $\beta_{1/3}$  ( $f_{4\beta}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção.

É conhecido o ângulo que o  $\beta_{1/3}$  faz com o Plano Horizontal de Projeção (um ângulo de  $45^\circ$ ) e tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o  $\beta_{1/3}$  é um plano de topo, o ângulo que o  $\beta_{1/3}$  faz com o Plano Horizontal de Projeção projeta-se em verdadeira grandeza no ângulo que o seu novo traço frontal ( $f_{4\beta}$ ) faz com o eixo **X'**. Nesse sentido, já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{4\beta}$  (o novo traço frontal do  $\beta_{1/3}$ ). Assim,  $f_{4\beta}$  (o traço do  $\beta_{1/3}$  no **plano 4**) passa pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano e faz, com o eixo **X'**, um ângulo de  $45^\circ$  –  $f_{4\beta}$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços) e por uma direção (o ângulo que faz com o eixo **X'**). Note que, das duas hipóteses que existem para marcar o ângulo de  $45^\circ$ , aquela que a resolução apresenta é a que nos garante que o  $\beta_{1/3}$  atravessa os  $1^a$  e  $3^a$  Diedros.

Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do  $\beta_{1/3}$  para o Plano Horizontal de Projeção, como um plano projetante (um plano de topo). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\beta \equiv e_1$  ( $e_1$ , a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo **X'**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

Em seguida, rebateu-se o ponto **O**, desenhando a projeção frontal (no **plano 4**) do arco do seu rebatimento, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar **O<sub>r</sub>** (o pontos **O**, no seu rebatimento, manteve o seu afastamento em relação ao **plano 4**).

Com o compasso, fazendo centro em **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** rebatido) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono e efetuaram-se os traçados necessários à construção do polígono, inscrito da circunferência e atendendo aos dados – o lado mais à esquerda do pentágono é de perfil. A construção efetuada permitiu-nos determinar os pontos **A<sub>r</sub>**, **B<sub>r</sub>**, **C<sub>r</sub>**, **D<sub>r</sub>** e **E<sub>r</sub>** (os vértices do pentágono, em rebatimento). Note que o enunciado é omissivo no que respeita à ordem dos vértices (que, contudo, tem de ser sequencial), pelo que os vértices foram identificados aleatoriamente, mas de forma sequencial.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para determinar as projeções do pentágono, inverteu-se o rebatimento do  $\beta_{1/3}$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos **A, B, C, D e E** (no novo diedro de projeção). Assim,  $A_4$  é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4p}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $p$  é um plano projetante frontal. De forma semelhante,  $B_4, C_4, D_4$  e  $E_4$  são as projeções dos pontos **B, C, D e E** no **plano 4** (respetivamente) e situam-se igualmente sobre  $f_{4p}$ , pois, no novo diedro de projeção, o  $\beta_{1/3}$  é um plano projetante frontal. Tenha em conta que, na inversão do rebatimento efetuada, os cinco pontos mantêm os respetivos afastamentos (em relação ao **plano 4**).

Em seguida, atendendo a que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **B, C e D**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).  $A_2, B_2, C_2, D_2$  e  $E_2$  são as projeções frontais dos pontos **A, B, C, D e E** (respetivamente) e determinaram-se em função das respetivas cotas, que se mantiveram. Assim, a distância de  $A_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$ , como a distância de  $B_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$  e assim sucessivamente, para os restantes três vértices do pentágono. Note que todos os vértices do pentágono se situam no  $\beta_{1/3}$ , pelo que todos eles têm necessariamente as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**.

A partir das projeções dos cinco pontos (**A, B, C, D e E**), desenharam-se as projeções do pentágono [**ABCDE**].

### Determinação das projeções dos vértices da base inferior do prisma:

É referido, no enunciado, que o prisma tem um único vértice com cota nula – esse vértice tem de ser um vértice da base inferior do sólido, pois na base superior (o pentágono [**ABCDE**]) não existe qualquer vértice com cota nula. Por outro lado, é referido, também, que o prisma se situa no espaço da  $1^a$  Diedro, pelo que o vértice do prisma que tem cota nula é necessariamente o vértice de menor cota do sólido. Assim, esse vértice será o vértice de menor cota da base [**A'B'C'D'E'**]. O vértice de menor cota da base [**A'B'C'D'E'**] corresponde necessariamente ao vértice de menor cota da base [**ABCDE**], que é o vértice **E**. Assim, o vértice **E'** (da base [**A'B'C'D'E'**]) é o vértice do pentágono que tem cota nula.

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $p$ . Assim, pelas projeções do ponto **E** conduziram-se as projeções da reta  $p$ , a reta suporte da aresta lateral [**EE'**] – o ponto **E'** é o traço horizontal da reta  $p$ . A reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções (no diedro de projeção inicial) não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta  $p$  não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o plano  $p$ .

No entanto, antes de mais, e porque o ponto **E'** tem cota nula, é possível, de forma imediata, determinar a projeção frontal do ponto **E'** ( $E'_2$ ), que se situa no eixo **X**.

Por outro lado, tendo em conta que já se recorreu a um processo geométrico auxiliar para determinar as projeções do pentágono [**ABCDE**], no diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente) e o  $\beta_{1/3}$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta  $p$  e o  $\beta_{1/3}$  já é direta (os traços do  $\beta_{1/3}$ , no novo diedro de projeção, são duas retas que pertencem a «famílias» de retas diferentes). Assim, uma vez que  $f_{4p}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta  $p$  é, também ela, uma reta frontal (de frente), a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $E_4$  conduziu-se  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), perpendicular a  $f_{4p}$  (o novo traço frontal do  $\beta_{1/3}$ ). Já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação a outra «família» de retas do  $\beta_{1/3}$ , pelo que já se garantiu a ortogonalidade da reta  $p$  em relação ao  $\beta_{1/3}$ . Note que, no novo diedro de projeção, as projeções da reta  $p$  já verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Assim, e porque na mudança do diedro de projeção efetuada se mantêm as cotas, é possível determinar  $E'_4$  (a projeção do ponto **E'** no **plano 4**), sobre  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**), no eixo  $X'$  (pois o ponto **E'**, no novo diedro de projeção, continua a ter cota nula). Em seguida, determinou-se  $E'_1$  (a projeção horizontal do ponto **E'**), sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ).

Em seguida, representou-se (no novo diedro de projeção) o plano  $p$ , que é o plano paralelo ao  $\beta_{1/3}$  e que contém a base inferior do prisma (o pentágono [**A'B'C'D'E'**]). É necessário ter em conta que o plano  $p$  (o plano que contém a base inferior do sólido), no novo diedro de projeção, é também um plano projetante frontal e contém o ponto **E'** (que é um vértice da base inferior). Assim, por  $E'_4$  conduziu-se uma paralela a  $f_{4p}$ , que é  $f_{4p}$  (o traço, no **plano 4**, do plano  $p$ ). O plano  $p$  é, assim, o plano paralelo ao  $\beta_{1/3}$  e que contém a base inferior do prisma (a base [**A'B'C'D'E'**]). Note que o plano  $p$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço no **plano 4**), razão pela qual o traço do plano  $p$  no **plano 4** se identificou entre parêntesis.

Todas as arestas laterais de qualquer prisma são paralelas entre si. A aresta lateral [**EE'**] está contida na reta  $p$ . Assim, pelas projeções dos restantes vértices do pentágono [**ABCDE**] (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (paralelas à reta  $p$ ), o que nos permitiu determinar as duas projeções do sólido, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Note que os pontos **A', B', C' e D'** (os outros quatro vértices da base inferior) foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções frontais (no **plano 4**), pois, no novo diedro de projeção, o plano  $p$  é também um plano projetante frontal.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos vértices da base inferior do sólido (o pentágono [**A'B'C'D'E'**]). Tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **A', B', C' e D'**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

$A'_2$  é a projeção frontal do ponto **A'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A'_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $A'_4$  ao eixo  $X'$ .  $B'_2$  é a projeção frontal do ponto **B'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B'_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $B'_4$  ao eixo  $X'$ .  $C'_2$  é a projeção frontal do ponto **C'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C'_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $C'_4$  ao eixo  $X'$ .  $D'_2$  é a projeção frontal do ponto **D'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D'_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $D'_4$  ao eixo  $X'$ .

### Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos dez vértices do prisma (os vértices **A, B, C, D e E** da base superior, e os vértices **A', B', C', D' e E'**, da base inferior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABCC'D'E'A']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2D_2D'_2E'_2A'_2]$ . Em projeção frontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $D$ ,  $E$  e  $B'$ . O vértice  $B'$ , por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível** em projeção frontal, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[BB']$ . Os vértices  $D$  e  $E$ , por serem o vértice de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis** em projeção frontal, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[CD]$ ,  $[DE]$  e  $[AE]$ , da base superior, e as arestas laterais  $[DD']$  e  $[EE']$ . No entanto, a aresta  $[CD]$  (da base superior) e a aresta lateral  $[DD']$ , apesar de serem invisíveis em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis (as arestas  $[CC']$  e  $[C'D']$ ), pelo que não existe qualquer invisibilidade a assinalar, no que se refere àquelas arestas. Note que, em projeção frontal, a base inferior (a base  $[A'B'C'D'E']$ ) é visível, bem como as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ . A base superior (a base  $[ABCDE]$ ) e as faces laterais  $[AA'E'E]$  e  $[DD'E'E]$  são invisíveis, bem como a face lateral  $[CC'D'D]$  (que é projetante – é de perfil).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[AEDCC'B'A']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1E_1D_1C_1C'_1B'_1A'_1]$ . Em projeção horizontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices  $B$ ,  $D'$  e  $E'$ . O vértice  $B$ , por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível** em projeção horizontal, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base superior, e a aresta lateral  $[BB']$ . Os vértices  $D'$  e  $E'$ , por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis** em projeção horizontal, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[C'D']$ ,  $[D'E']$  e  $[A'E']$ , da base inferior, e as arestas laterais  $[DD']$  e  $[EE']$ . No entanto, a aresta  $[C'D']$  (da base inferior) e a aresta lateral  $[DD']$ , apesar de serem invisíveis em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis (as arestas  $[CC']$  e  $[CD]$ ), pelo que não existe qualquer invisibilidade a assinalar, no que se refere àquelas arestas. Note que, em projeção horizontal, a base superior (a base  $[A'B'C'D'E']$ ) é visível, bem como as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ . A base inferior (a base  $[ABCDE]$ ) e as faces laterais  $[AA'E'E]$  e  $[DD'E'E]$  são invisíveis, bem como a face lateral  $[CC'D'D]$  (que é projetante – é de perfil).

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O pentágono  $[ABCDE]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do  $\beta_{1/3}$  (que nos permitiram determinar as projeções do pentágono  $[ABCDE]$ ), da reta  $p$  e, ainda, da projeção do prisma no **plano 4**.

## 561.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\gamma$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $P$  e  $Q$ , pertencentes ao plano  $\gamma$ . Os dois pontos, para pertencerem ao plano  $\gamma$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano  $\gamma$ ).

O ponto  $P$  tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ) – o ponto  $P$  é o ponto de  $h_\gamma$  que tem 3 cm de afastamento ( $h_\gamma$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano  $\gamma$ , com 4 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $Q$ . A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\gamma$ ). O ponto  $Q$  é o ponto da reta  $h$  que tem 2 cm de afastamento.

#### Resolução:

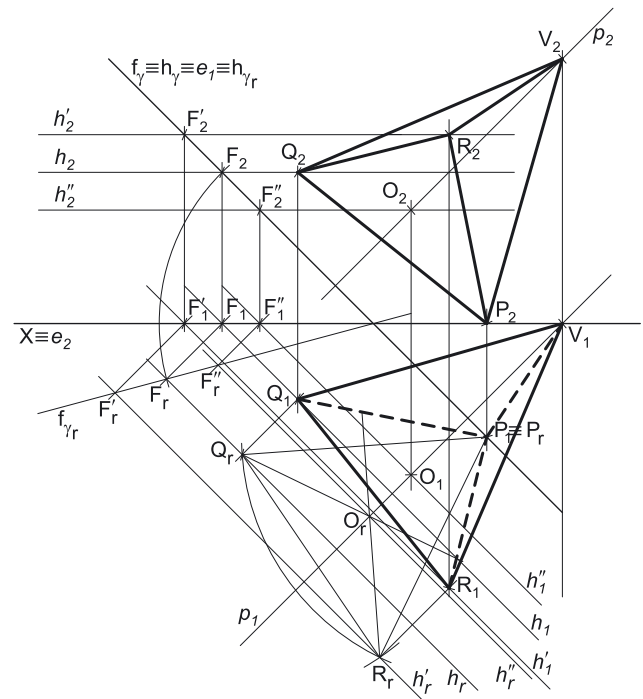
##### Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o triângulo  $[PQR]$  (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[PQR]$  (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\gamma \equiv e_1 \equiv h_{\gamma r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\gamma$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\gamma r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos traços do plano, que é um ponto da charneira (é um ponto fixo e não se identificou). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $h$ ), que é um ponto de  $f_\gamma$ . Para rebater o ponto  $F$  conduziu-se, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do seu rebatimento). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é um ponto fixo) e com raio até  $F_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , determinando-se  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Em seguida, desenhou-se  $f_{\gamma r}$  (o traço frontal do plano  $\gamma$  rebatido), que está definido por dois pontos – o ponto  $F_r$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O ponto **P** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $P_r \equiv P_1$ . Para rebater o ponto **Q** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **Q** pertença – a reta **h**, neste caso. Para definirmos a reta  $h_r$  (a reta **h** rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto  $F_r$ ), para definirmos a reta  $h_r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **h** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\gamma$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_r$ . A reta  $h_r$  (a reta **h** rebatida) passa por  $F_r$  e é paralela a  $h_{\gamma_r}$  –  $h_r$  está definida por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\gamma_r}$ ). Em seguida, conduziu-se, por  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**), uma perpendicular à charneira (que é  $h_{\gamma}$ ) e que corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal à charneira do rebatimento ( $h_{\gamma}$ ) que contém o ponto **Q** (bem como o arco do seu rebatimento) – o ponto  $Q_r$  (o ponto **Q** rebatido) é o ponto de interseção da reta  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $Q_1$ .

A partir dos pontos  $P_r$  e  $Q_r$ , construiu-se o triângulo **[PQR]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos  $R_r$  e  $O_r$  (o ponto **O** é o centro do triângulo). Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos pontos **R** e **O**.

A inversão do rebatimento do ponto **R** processou-se com o recurso à reta  $h'_r$ , horizontal (de nível), do plano  $\gamma$ , à qual o ponto **R** pertence. A reta  $h'_r$  (a reta **h'** rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $R_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\gamma_r}$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h'_r$ . O ponto  $F'_r$  é o traço frontal da reta  $h'_r$  e é um ponto do traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_{\gamma}$ ). Assim,  $F'_r$  é um ponto de  $f_{\gamma_r}$  e o ponto **F'** tem-se situar sobre  $f_{\gamma}$ . Para se determinarem as projeções do ponto **F'** conduziu-se, por  $F'_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo **X** é  $F'_1$  (a projeção horizontal do ponto **F'**) e a sua projeção frontal ( $F'_2$ ) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_{\gamma}$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $h'$  – a reta  $h'$  está definida (em projeções) por um ponto (o ponto **F'**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\gamma$ ).

Por fim, por  $R_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta **h'**) é  $R_1$  (a projeção horizontal do ponto **R**). A projeção frontal do ponto **R** ( $R_2$ ) situa-se sobre  $h'_2$  (a projeção frontal da reta **h'**).

A inversão do rebatimento do ponto **O** e a determinação das suas projeções processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **R**, e também, com o recurso a uma reta horizontal (de nível) do plano  $\gamma$  – a reta  $h''$  foi a reta horizontal (de nível) do plano  $\gamma$  a que se recorreu, para inverter o rebatimento do ponto **O**. O ponto  $F''$  é o traço frontal da reta  $h''$ .

A partir das projeções dos três pontos (**P**, **Q** e **R**), desenharam-se as projeções do triângulo **[PQR]**.

### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano  $\gamma$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte do eixo da pirâmide.

A reta **p** é ortogonal a  $f_{\gamma}$ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta **p** e  $f_{\gamma}$  é direta em projeção frontal, pelo que  $p_2$  (a projeção frontal da reta **p**) é perpendicular a  $f_{\gamma}$ . A reta **p** é também ortogonal a  $h_{\gamma}$ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta **p** e  $h_{\gamma}$  é direta em projeção horizontal, pelo que  $p_1$  (a projeção horizontal da reta **p**) é perpendicular a  $h_{\gamma}$ . Assim, a reta **p** é ortogonal ao plano  $\gamma$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\gamma$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**). A reta **p** está, assim, definida por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é ortogonal ao plano  $\gamma$ ).

De acordo com o que o enunciado refere expressamente, o ponto **V** tem afastamento nulo – nesse sentido, o ponto **V** é o traço frontal da reta **p**, pelo que as suas projeções se determinaram imediatamente.

### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide (os vértices **P**, **Q** e **R**, da base, e o vértice **V**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[PQV]** (que é, afinal, a face lateral **[PQV]**), cuja projeção frontal é o polígono **[P<sub>2</sub>Q<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **R**. Este vértice, por ser o vértice de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[PR]** e **[QR]**, da base, e a aresta lateral **[RV]**. Note que, em projeção frontal, apenas a face lateral **[PQV]** é **invisível**. Em projeção frontal, a base **[PQR]** é **visível**, bem como as faces laterais **[PRV]** e **[QRV]**.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[QRV]** (que é, afinal, a face lateral **[QRV]**), cuja projeção frontal é o polígono **[Q<sub>1</sub>R<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **P**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[PR]** e **[PQ]**, da base, e a aresta lateral **[PV]**. Note que, em projeção horizontal, apenas a face lateral **[QRV]** é **visível**. Em projeção horizontal, a base **[PQR]** é **invisível**, bem como as faces laterais **[PQV]** e **[PRV]**.

### Traçado:

Os dados os traços do plano  $\gamma$  representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[PQR]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo **[PQR]**), bem como da reta **p**.

562.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

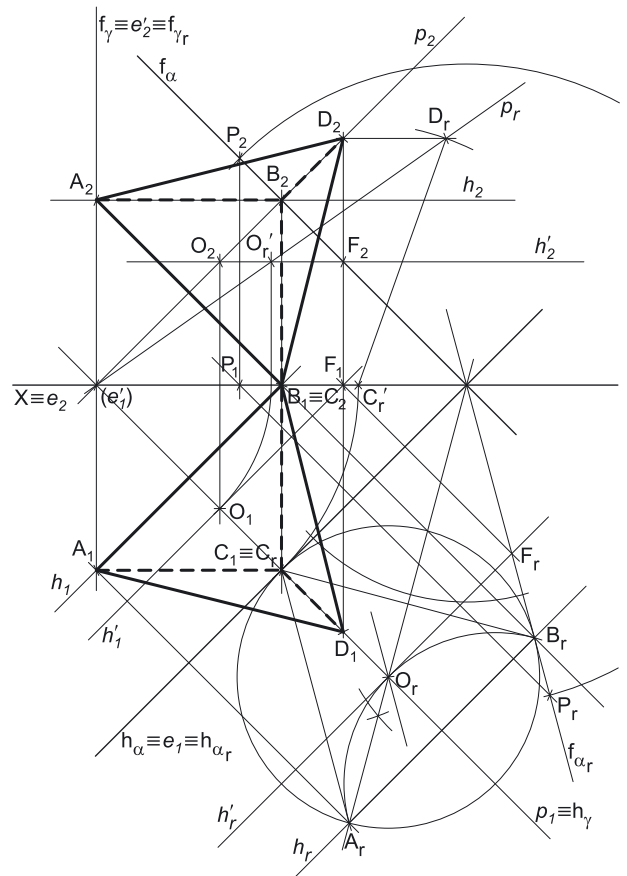
Tendo em conta que não é dada nenhuma das coordenadas do ponto  $O$  (o centro da circunferência em que o triângulo se inscreve) nem qualquer elemento do triângulo  $[ABC]$ , não é possível representar qualquer elemento da figura em projeções. De facto, as únicas informações que podemos extrair a partir do enunciado são: em primeiro lugar, que a circunferência circunscrita ao triângulo é tangente aos dois planos de projeção (mas ainda assim não pode ser desenhada, porque não se projeta em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de projeção); em segundo lugar, e decorrente da situação anterior, infere-se que o centro da circunferência (o ponto  $O$ ) dista 4 cm de cada um dos dois traços do plano. No entanto, nenhuma dessas duas distâncias é qualquer das coordenadas do ponto  $O$  nem se projeta em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de projeção. Assim, a resolução do exercício tem de prosseguir em qualquer outro elementos que não os traços do plano  $\alpha$ .

Resolução:

Rebatimento do plano  $\alpha$  e construção do triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  (a face do tetraedro) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (o triângulo apresenta deformação em ambas as projeções), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).



Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos traços do plano, que é um ponto da charneira (é um ponto fixo e não se identificou). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater um ponto  $P$ , qualquer, pertencente a  $f_\alpha$ . Para rebater o ponto  $P$  conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $P$ ). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é um ponto fixo) e com raio até  $P_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $P_1$ , determinando-se  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido). Em seguida, desenhou-se  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), que está definido por dois pontos – o ponto  $P_r$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou).

Em rebatimento, já é possível construir o triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza. No entanto, e como anteriormente se referiu, não temos qualquer elemento, em rebatimento, que nos permita efetuar essa construção. No entanto, sabe-se que o ponto  $O$  (o centro da circunferência circunscrita ao triângulo) dista 4 cm de ambos os traços do plano, pelo que o ponto  $O_r$  (ponto  $O$  rebatido) tem necessariamente de se situar na bissetriz do ângulo formado entre os traços do plano em rebatimento ( $f_{\alpha_r}$  e  $h_{\alpha_r}$ ). Assim, Em primeiro lugar, efetuaram-se os traçados necessários à determinação da bissetriz do ângulo entre  $f_{\alpha_r}$  e  $h_{\alpha_r}$  e, em seguida, determinou-se o ponto dessa bissetriz que dista 4 cm de  $h_{\alpha_r}$  – esse ponto é o ponto  $O_r$ , que dista, igualmente, 4 cm de  $f_{\alpha_r}$ .

Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao triângulo, em rebatimento (em verdadeira grandeza), que é tangente aos dois traços do plano (em rebatimento). Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo  $[ABC]$  em rebatimento, em função dos dados do enunciado. O ponto  $C$  é um ponto com cota nula, pelo que o ponto  $C_r$  (o ponto  $C$  rebatido) é o ponto em que a circunferência é tangente a  $h_{\alpha_r}$  (o traço horizontal do plano rebatido). Em função disso, construiu-se o triângulo e conclui-se que, tal como o enunciado refere, o lado  $[AB]$ , da figura, é horizontal (de nível), pois é paralelo a  $h_{\alpha_r}$ . Note que, em função da posição específica do triângulo e das medidas referidas no enunciado, o ponto  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido) situa-se necessariamente sobre  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido).

Inversão do rebatimento do plano  $\alpha$  e determinação das projeções do triângulo  $[ABC]$ :

Em seguida, procedeu-se à inversão do rebatimento do plano  $\alpha$ , de forma a determinarem-se as projeções dos três vértices do triângulo e do ponto  $O$ . O ponto  $C$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $C_1 \equiv C_2$ .

A inversão do rebatimento dos pontos  $A$  e  $B$  processou-se com o recurso a uma reta do plano  $\alpha$ , à qual os dois pontos pertencem – a reta  $h$ , horizontal de nível, que é a reta suporte do lado  $[AB]$  do triângulo. A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) está definida por dois pontos (o ponto  $A_r$  e o ponto  $B_r$ ) e, ainda, por uma direção (é uma reta horizontal do plano, pelo que é paralela a  $h_{\alpha_r}$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h$ , para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta  $h$  – a direção das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$  (que é a direção de  $h_\alpha$ ). Falta-nos um ponto para definir a reta  $h$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **B** é, na prática, o traço frontal da reta **h** e é um ponto do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ). Assim, **B<sub>r</sub>** é situa-se sobre  $f_{\alpha_r}$  e o ponto **B** tem-se situar sobre  $f_\alpha$ . Para se determinarem as projeções do ponto **B** conduziu-se, por **B<sub>r</sub>**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo **X** é **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**) e a sua projeção frontal (**B<sub>2</sub>**) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **h** – a reta **h** está, assim, definida por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (é paralela a  $h_\alpha$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta **h**.

Depois, por **A<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_1$  (a projeção horizontal da reta **h**) é **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**). A projeção frontal do ponto **A** (**A<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta **h**).

A inversão do rebatimento do ponto **O** processou-se com o recurso à reta **h'**, a reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  à qual o ponto **O** pertence. A reta **h<sub>r</sub>** (a reta **h** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **O<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha_r}$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **h'**, de forma semelhante à exposta para a reta **h** – a reta **h'**, em projeção, fica definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (é paralela à reta **h** e a  $h_\alpha$ ). Por fim, por **O<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta **h'**) é **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**). A projeção frontal do ponto **O** (**O<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $h'_2$  (a projeção frontal da reta **h'**).

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo [**ABC**].

**Determinação das projeções do quarto vértice do tetraedro (o vértice **D**):**

O sólido pedido é um **poliedro regular**, que toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**. Nesse sentido, o eixo do sólido (relativo à face [**ABC**]) é necessariamente **ortogonal** ao plano que contém aquela face (o plano  $\alpha$ ). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta **p**, a reta ortogonal a plano  $\alpha$  que contém o eixo do sólido relativo à face [**ABC**]. A reta **p** passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte do eixo do sólido relativo à face [**ABC**].

A reta **p** é ortogonal a  $f_\alpha$ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta **p** e  $f_\alpha$  é direta em projeção frontal, pelo que  $p_2$  (a projeção frontal da reta **p**) é perpendicular a  $f_\alpha$ . A reta **p** é também ortogonal a  $h_\alpha$ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta **p** e  $h_\alpha$  é direta em projeção horizontal, pelo que  $p_1$  (a projeção horizontal da reta **p**) é perpendicular a  $h_\alpha$ . Assim, a reta **p** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ ). A reta **p** está, assim, definida por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é ortogonal ao plano  $\alpha$ ).

Note que, **nesta situação particular**, a reta **p** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pelo que a reta **p** é necessariamente uma reta do  $\beta_{1/3}$ . Assim, a reta **p** é uma reta passante, pelo que é concorrente com o eixo **X** num ponto (que não se identificou).

Por outro lado, não é conhecida a altura de um tetraedro, mas sabe-se que as suas arestas são todas iguais (têm o mesmo comprimento, pois trata-se de um poliedro regular). O ponto **D** (o quarto vértice do sólido) é, assim, um ponto da reta **p** tal que a sua distância a qualquer dos outros três vértices do sólido é 6 cm (o comprimento do lado do triângulo). Acontece que nenhuma das arestas que convergem no ponto **D** (as arestas [**AD**], [**BD**] e [**CD**]) é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que nenhuma dessas arestas se projeta em verdadeira grandeza (estão deformadas em ambas as projeções), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Note que as arestas [**AD**], [**BD**] e [**CD**] estão necessariamente contidas em retas oblíquas, mas que a aresta [**CD**] tem necessariamente a sua projeção horizontal sobre a projeção horizontal da reta **p** ( $p_1$ ). Assim, a aresta [**CD**] e a reta **p** estão contidas num mesmo plano projetante horizontal. Assim, o processo geométrico auxiliar a utilizar deve possibilitar-nos representar a aresta [**CD**] em verdadeira grandeza, bem como a reta **p** (pois o ponto **D** é um ponto da reta **p**).

Assim, optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da reta **p** (que é, também, o plano projetante horizontal da aresta [**CD**]) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano  $\gamma$  (o plano projetante horizontal da reta **p**) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta **e'**), que é  $f_\gamma$  – tem-se imediatamente  $f_\gamma \equiv e'_2 \equiv f_{\gamma_r}$ .

O ponto de concorrência da reta **p** com o eixo **X** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Já temos um ponto (em rebatimento) para definir a reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do ponto **O**, o que nos permitiu determinar **O<sub>r</sub>'** – **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido no seu segundo rebatimento (o ponto **O** rebatido pelo rebatimento do plano  $\gamma$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **p<sub>r</sub>**. A reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida) está definida por dois pontos (o ponto **O<sub>r</sub>'** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou).

De qualquer forma, não é possível medir o que quer que seja sobre a reta **p<sub>r</sub>**, porque não é conhecida a altura de um tetraedro. Assim, rebateu-se também o ponto **C**, o que nos permitiu determinar **C<sub>r</sub>** (o ponto **C** rebatido). Neste momento, em rebatimento, já é possível representar o segmento de reta [**CD**] (a aresta [**CD**] do sólido) em verdadeira grandeza. Dessa forma, com o compasso, fazendo centro em **C<sub>r</sub>** (o ponto **C** rebatido) e com raio igual à medida do lado do triângulo [**ABC**] (que já foi determinado em rebatimento), determinou-se **D<sub>r</sub>** (o vértice **D** rebatido) sobre a reta **p<sub>r</sub>** (a reta **p** rebatida). Em seguida, inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções do ponto **D**, sobre as projeções homónimas da reta **p**.

**Determinação das projeções do tetraedro:**

A partir das projeções dos quatro vértices do sólido (os vértices **A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada [**ACD**] (que é, afinal, a face [**ACD**]), cuja projeção frontal é o polígono [**A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>**]. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **B**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** do sólido, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [**AB**], [**BC**] e [**BD**]. Note que, em projeção frontal, apenas a face [**ACD**] é visível. Em projeção frontal, as restantes faces (as faces [**ABC**], [**ABD**] e [**BCD**]) são invisíveis.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[ABD]$  (que é, afinal, a face  $[ABD]$ ), cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1B_1D_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice  $C$ . Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** do tetraedro, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AC]$ ,  $[BC]$  e  $[CD]$ . Note que, em projeção horizontal, apenas a face  $[ABD]$  é visível. Em projeção horizontal, as restantes faces (as faces  $[ABC]$ ,  $[BCD]$  e  $[ACD]$ ) são invisíveis.

#### Traçado:

Os dados (os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do tetraedro (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo  $[ABC]$ ), bem como a reta  $p$ , o plano  $\gamma$  e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice  $D$ ).

## 563.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $O$ , pertencente ao plano  $\alpha$ . O ponto  $O$ , para pertencer ao plano  $\alpha$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano).

A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , com 4 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $O$ . A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\gamma$ ). O ponto  $O$  é o ponto da reta  $h$  que tem 4 cm de afastamento.

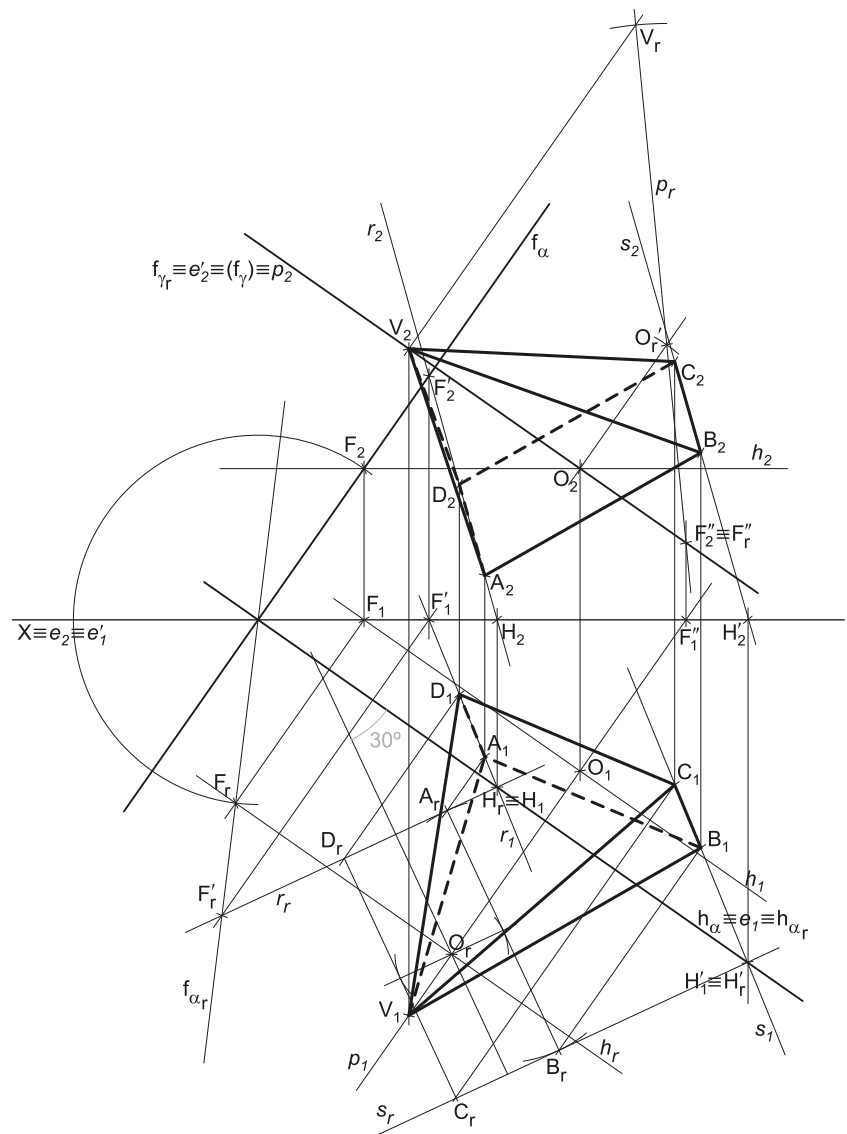
Note que é dado o **ângulo** que o lado  $[AB]$  do retângulo faz com  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\alpha$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o retângulo  $[ABCD]$  (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o retângulo  $[ABCD]$  (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado  $[AB]$  do retângulo faz com o traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\alpha$  e, uma vez que o plano  $\alpha$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio retângulo, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do retângulo (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  (o plano que contém o retângulo) para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é um ponto da charneira e, por isso, é um ponto fixo). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto  $F$ , que é o traço frontal da reta  $h$ . Para rebater o ponto  $F$  conduziu-se, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ), desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , determinando-se  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Em seguida, desenhou-se  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), passando por  $F_r - f_{\alpha_r}$  está definido por dois pontos (o ponto  $F_r$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano).

Para rebater o ponto  $O$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $O$  pertença – a reta  $h$ , neste caso. Para definirmos a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto  $F_r$ ), para definirmos a reta  $h_r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_r$ . A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) passa por  $F_r$  e é paralela a  $h_{\alpha_r} - h_r$  está definida por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha_r}$ ). Em seguida, conduziu-se, por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ), uma perpendicular à charneira (que é  $h_\alpha$ ) e que corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal à charneira do rebatimento ( $h_\alpha$ ) que contém o ponto  $O$  (bem como o arco do seu rebatimento) – o ponto  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido) é o ponto de interseção da reta  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $O_1$ .

Em seguida, construiu-se o retângulo  $[ABCD]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento) atendendo aos dados. Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – é o ângulo que o segmento  $[A_r B_r]$  faz com  $h_{\alpha_r}$ . No entanto, não temos nenhum dos extremos do lado  $[AB]$  do retângulo, nem em projeções nem em rebatimento. Todavia, o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) é igual ao ângulo que a mediana correspondente do retângulo faz com  $h_\alpha$ . Nesse sentido, por  $O_r$  conduziu-se uma reta fazendo, com  $h_{\alpha_r}$ , um ângulo de  $30^\circ$ . Note que é dado que o vértice  $A$  do retângulo tem afastamento inferior a  $O$  e é o vértice de menor cota do retângulo. Assim, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $30^\circ$  a partir de  $O_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante o que o enunciado pede expressamente.

Sobre a reta suporte da mediana do quadrado, mediram-se 3,5 cm para cada lado de  $O_r$  (perfazendo 7 cm, que é o comprimento do lado  $[AB]$ ), obtendo um segmento de reta do qual o ponto  $O_r$  é o ponto médio – esse segmento de reta é a mediana maior do retângulo. Este procedimento permitiu-nos em seguida, e ainda em rebatimento, desenhar os lados (perpendiculares à mediana) e, assim, concluir a construção do retângulo em rebatimento, de acordo com os dados. Para determinar as projeções do retângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

A inversão do rebatimento dos pontos  $A$  e  $D$  processou-se com o recurso à reta  $r$ , do plano  $\alpha$ , à qual os dois pontos pertencem – a reta  $r$  é a reta suporte do lado  $[AD]$  do retângulo. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $D_r$ . Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . O ponto  $H$  é o traço horizontal da reta  $r$  e é um ponto do traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), pelo que  $H_r$  é um ponto de  $h_{\alpha_r}$ . Tendo em conta que o ponto  $H$  se situa na charneira do rebatimento, o ponto  $H$  roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que se tem imediatamente  $H_1 \equiv H_r$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  (em projeções) – falta-nos outro ponto ou uma direção. O ponto  $F'$  é o traço frontal da reta  $r$  e é um ponto do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ). Assim,  $F'_r$  é um ponto de  $f_{\alpha_r}$  e o ponto  $F'$  tem-se situar sobre  $f_\alpha$ . Para se determinarem as projeções do ponto  $F'$  conduziu-se, por  $F'_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo  $X$  é  $F'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F'$ ) e a sua projeção frontal ( $F'_2$ ) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  – a reta  $r$  está definida (em projeções) por dois pontos (o ponto  $F'$  e o ponto  $H$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta.

Por fim, por  $A_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ). A projeção frontal do ponto  $A$  ( $A_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ). De forma semelhante, por  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto  $D$ ). A projeção frontal do ponto  $D$  ( $D_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

A inversão do rebatimento dos pontos  $B$  e  $C$  processou-se com o recurso à reta  $s$ , do plano  $\alpha$ , à qual os dois pontos pertencem – a reta  $s$  é a reta suporte do lado  $[BC]$  do retângulo. A reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $B_r$  e  $C_r$ . Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $s$ . O ponto  $H'$  é o traço horizontal da reta  $s$  e é um ponto do traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), pelo que  $H'_r$  é um ponto de  $h_{\alpha_r}$ . Tendo em conta que o ponto  $H'$  se situa na charneira do rebatimento, o ponto  $H'$  roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que se tem imediatamente  $H'_1 \equiv H'_r$ . Já temos um ponto para definir a reta  $s$  (em projeções) – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $s$  é necessariamente paralela à reta  $r$  (são, ambas, retas suporte de dois lados paralelos da figura), pelo que têm a mesma direção – já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s$ . A reta  $s$  está definida (em projeções) por um ponto (o ponto  $H'$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $r$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta.

Por fim, conduzindo, por  $B_r$  e  $C_r$ , as perpendiculares à charneira que por eles passam (e que correspondem aos planos ortogonais à charneira que contém os respetivos arcos do rebatimento), determinaram-se as projeções dos dois pontos, sobre as projeções homónimas da reta  $s$ , à semelhança do exposto acima para os pontos  $A$  e  $D$ .

A partir das projeções dos quatro pontos (os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do retângulo  $[ABCD]$ .

### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide reta**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto  $O$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto  $O$  conduziram-se as projeções da reta  $p$ , a reta suporte do eixo da pirâmide.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $p$  é ortogonal a  $f_\alpha$ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_\alpha$  é direta em projeção frontal, pelo que  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ) é perpendicular a  $f_\alpha$ . A reta  $p$  é também ortogonal a  $h_\alpha$ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_\alpha$  é direta em projeção horizontal, pelo que  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ) é perpendicular a  $h_\alpha$ . Assim, a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ ). A reta  $p$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (e ortogonal ao plano  $\alpha$ ).

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) está contido na reta  $p$ , pelo que o ponto  $V$  é um ponto da reta  $p$ . Assim, a distância do ponto  $V$  ao plano  $\alpha$  mede-se sobre a reta  $p$ . A reta  $p$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide), que está contido na reta  $p$ , não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante frontal da reta  $p$  para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano  $\gamma$  (o plano projetante frontal da reta  $p$ ) pelo seu traço frontal e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é  $f_\gamma$  – tem-se imediatamente  $f_\gamma \equiv e'_2 \equiv f_{\gamma'}$ . Atendendo a que o plano  $\gamma$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal, este identificou-se entre parêntesis.

O ponto  $F''$  (o traço frontal da reta  $p$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente,  $F''_r \equiv F''_2$ . Já temos um ponto (em rebatimento) para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do ponto  $O$  – para tal conduziu-se, por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), sobre a qual se mediu o **afastamento** do ponto  $O$ , a partir de  $O_2$ , o que nos permitiu determinar  $O_r' - O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido no seu segundo rebatimento (o ponto  $O$  rebatido pelo rebatimento do plano  $\gamma$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p_r$ . A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $O_r'$  e por  $F''_r$  (está definida por dois pontos).

Sobre a reta  $p_r$ , a partir de  $O_r'$ , mediram-se os 8,5 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto  $V$  ao plano  $\alpha$ ) e determinou-se  $V_r$  (note que se garantiu que o ponto  $V$  se situa no  $1^a$  Diedro, para que a pirâmide se situe no espaço do  $1^a$  Diedro, como o enunciado refere expressamente). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $V$  e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta  $p$ .

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide (os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , da base, e o vértice  $V$ ), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABCV]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2V_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice  $D$ . Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AD]$  e  $[CD]$ , da base, e a aresta lateral  $[DV]$ . As faces laterais  $[ABV]$  e  $[BCV]$  são as faces **visíveis** da pirâmide, em projeção frontal. Em projeção frontal, a base  $[ABCD]$  é **invisível**, bem como as faces laterais  $[ADV]$  e  $[CDV]$ .

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[BCDV]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1V_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice  $A$ . Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AD]$  e  $[AB]$ , da base, e a aresta lateral  $[AV]$ . As faces laterais  $[BCV]$  e  $[CDV]$  são as faces **visíveis** da pirâmide, em projeção horizontal. Em projeção horizontal, a base  $[ABCD]$  é **invisível**, bem como as faces laterais  $[ABV]$  e  $[ADV]$ .

#### Traçado:

Os dados os traços do plano  $\alpha$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O retângulo  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do retângulo  $[ABCD]$ ), bem como da reta  $p$ , do plano  $\gamma$  e de todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice  $V$ ).

## 564.

### Dados:

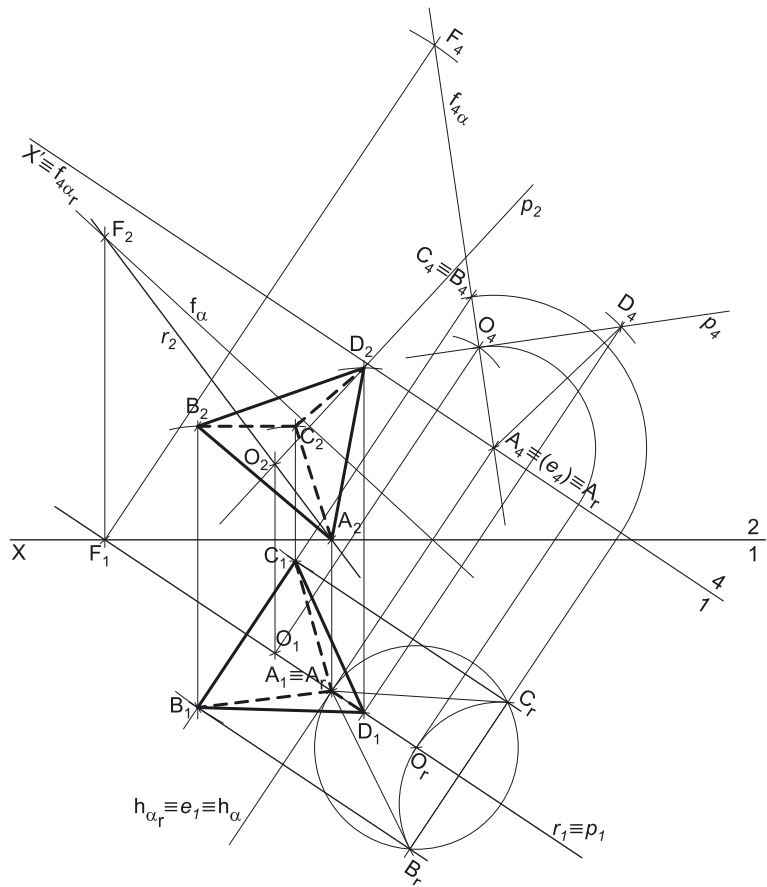
Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados – a reta  $r$  está definida por dois pontos (os pontos  $O$  e  $A$ ).

### Resolução:

#### Determinação dos traços do plano que contém o triângulo $[ABC]$ :

Em primeiro lugar, há que determinar os traços do plano  $\alpha$ . Começamos pelo traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $A$  é, imediatamente, o traço horizontal da reta  $r$  (é o ponto da reta  $r$  que tem cota nula), pelo que já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Uma vez que a reta  $r$  é uma reta de maior declive do plano  $\alpha$ , sabe-se que a reta  $r$  é perpendicular ao traço horizontal do plano (e a todas as retas horizontais do plano), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_\alpha$  –  $h_\alpha$  passa por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) e é perpendicular a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ). Assim,  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) está definido por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (é perpendicular a  $r_1$ ).

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $r$ , o ponto  $F$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços do plano são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\alpha$  –  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos (o ponto  $F$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano)



#### Determinação das projeções do triângulo $[ABC]$ :

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  (a face do tetraedro) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (o triângulo apresenta deformação em ambas as projeções), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Embora se pudesse ter optado por rebater o plano  $\alpha$  diretamente, optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante e, em seguida, rebater o plano  $\alpha$  como um plano projetante.

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o plano 2), por um outro plano de projeção (o plano 4) ortogonal ao plano  $\alpha$ , o que nos permite transformar o plano oblíquo num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o plano 1) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se mantém o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o plano 4);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao plano 4).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do plano 1 (o plano de projeção que se manteve) com o plano 4 (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com 1/4. Como o plano 4 é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos  $O$  e  $A$  no novo plano de projeção (o plano 4), bem como o novo traço frontal do plano  $\alpha$ .  $O_4$  é a projeção do ponto  $O$  no plano 4 e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $O_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $O_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $O$ ).  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no plano 4 e determinou-se em função da sua cota, que é nula e se manteve –  $A_4$  situa-se no eixo  $X'$  pois, no novo diedro de projeção, o ponto  $A$  continua a ter cota nula (as cotas mantêm-se).

O novo traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha_4}$ ) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\alpha$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, pelo que o novo traço frontal do plano  $\alpha$  (o traço do plano  $\alpha$  no plano 4) tem necessariamente de passar por  $O_4$  e  $A_4$  (as novas projeções frontais dos pontos  $O$  e  $A$ , respetivamente). Assim,  $f_{\alpha_4}$  está definido por dois pontos – o ponto  $O_4$  e o ponto  $A_4$  ( $A_4$  é, na prática, o ponto de concorrência dos dois traços do plano).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção, como um plano projetante. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{h}_\alpha \equiv \mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{h}_{\alpha_r}$  ( $\mathbf{e}_4$ , a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo  $\mathbf{X}'$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $\mathbf{A}_r \equiv \mathbf{A}_1$ . Rebateu-se o ponto **O**, desenhando a projeção frontal (no **plano 4**) do arco do seu rebatimento (em verdadeira grandeza), e transportando o seu afastamento em relação ao **plano 4** (que se manteve), o que nos permitiu determinar  $\mathbf{O}_r$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $\mathbf{O}_r$  e com raio até  $\mathbf{A}_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao triângulo (em verdadeira grandeza) e efetuou-se a construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono (em rebatimento) – os pontos  $\mathbf{B}_r$  e  $\mathbf{C}_r$ . Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos **B** e **C** (no novo diedro de projeção). Assim,  $\mathbf{B}_4$  é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $\mathbf{f}_{4_\alpha}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal. De forma semelhante,  $\mathbf{C}_4$  é a projeção do ponto **C** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $\mathbf{f}_{4_\alpha}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **B** e **C**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).  $\mathbf{B}_2$  é a projeção frontal do ponto **B** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $\mathbf{B}_2$  ao eixo  $\mathbf{X}$  é igual à distância de  $\mathbf{B}_4$  ao eixo  $\mathbf{X}'$ .  $\mathbf{C}_2$  é a projeção frontal do ponto **C** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $\mathbf{C}_2$  ao eixo  $\mathbf{X}$  é igual à distância de  $\mathbf{C}_4$  ao eixo  $\mathbf{X}'$ . Note que os pontos **B** e **C** têm a mesma cota, pois o lado **[BC]** do triângulo é necessariamente horizontal (é paralelo a  $\mathbf{h}_{\alpha_r}$ , o que se constata em rebatimento).

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

#### Determinação das projeções do quarto vértice do tetraedro (o vértice **D**):

O sólido pedido é um **poliedro regular**, que toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**. Nesse sentido, o eixo do sólido (relativo à face **[ABC]**) é necessariamente **ortogonal** ao plano que contém aquela face (o plano  $\alpha$ ). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta **p**, a reta ortogonal a plano  $\alpha$  que contém o eixo do sólido relativo à face **[ABC]**. A reta **p** passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte do eixo do sólido (relativo à face **[ABC]**).

A reta **p** é ortogonal a  $\mathbf{f}_{\alpha}$ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta **p** e  $\mathbf{f}_{\alpha}$  é direta em projeção frontal, pelo que  $\mathbf{p}_2$  (a projeção frontal da reta **p**) é perpendicular a  $\mathbf{f}_{\alpha}$ . A reta **p** é também ortogonal a  $\mathbf{h}_{\alpha}$ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta **p** e  $\mathbf{h}_{\alpha}$  é direta em projeção horizontal, pelo que  $\mathbf{p}_1$  (a projeção horizontal da reta **p**) é perpendicular a  $\mathbf{h}_{\alpha}$ . Assim, a reta **p** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ ). A reta **p** está, assim, definida por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (e ortogonal ao plano  $\alpha$ ).

Por outro lado, não é conhecida a altura de um tetraedro, mas sabe-se que as suas arestas são todas iguais (têm o mesmo comprimento, pois trata-se de um poliedro regular). O ponto **D** (o quarto vértice do sólido) é, assim, um ponto da reta **p** tal que a sua distância a qualquer dos outros três vértices do sólido é igual ao comprimento do lado do triângulo (que já foi determinado em rebatimento). Acontece que nenhuma das arestas que convergem no ponto **D** (as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]**) é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que nenhuma dessas arestas se projeta em verdadeira grandeza (estão deformadas em ambas as projeções), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Note que as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]** estão necessariamente contidas em retas oblíquas, mas que a aresta **[AD]** tem necessariamente a sua projeção horizontal sobre a projeção horizontal da reta **p** ( $\mathbf{p}_1$ ).

Há a referir que já se recorreu a um processo geométrico auxiliar para determinar as projeções do triângulo **[ABC]**. De facto, no diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta **p** é uma reta frontal (de frente), tal como a aresta **[AD]**. Nesse diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano de topo, pelo que a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano  $\alpha$  é igualmente direta. Assim, uma vez que  $\mathbf{f}_{4_\alpha}$  é uma reta frontal (de frente) do plano (com afastamento nulo) e que a reta **p** é, também ela, uma reta frontal (de frente), no novo diedro de projeção, a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Nesse sentido, por  $\mathbf{O}_4$  conduziu-se  $\mathbf{p}_4$  (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a  $\mathbf{f}_{4_\alpha}$  (o novo traço frontal do plano  $\alpha$ ).

Por outro lado, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a aresta **[AD]** é, também ela, frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, o segmento de reta **[AD]** (a aresta **[AD]** do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza, em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, com o compasso, fazendo centro em  $\mathbf{A}_4$  (a projeção do ponto **A** no **plano 4**) e com raio igual à medida do lado do triângulo **[ABC]** (que foi determinada em rebatimento), determinou-se  $\mathbf{D}_4$  (a projeção do vértice **D** no **plano 4**) sobre a reta  $\mathbf{p}_4$  (a projeção da reta **p** no **plano 4**). Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada e determinaram-se as projeções do ponto **D**, no diedro de projeção inicial.

$\mathbf{D}_1$  (a projeção horizontal do ponto **D**) determinou-se diretamente ainda no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, sobre  $\mathbf{p}_1$  (a projeção horizontal da reta **p**).  $\mathbf{D}_2$  (a projeção frontal do ponto **D**) determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $\mathbf{D}_2$  ao eixo  $\mathbf{X}$  é igual à distância de  $\mathbf{D}_4$  ao eixo  $\mathbf{X}'$ . Note que  $\mathbf{D}_2$  (a projeção frontal do ponto **D**) se situa necessariamente sobre  $\mathbf{p}_2$  (a projeção frontal da reta **p**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções do tetraedro:

A partir das projeções dos quatro vértices do sólido (os vértices **A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABD]** (que é, afinal, a face **[ABD]**), cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** do sólido, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AC]**, **[BC]** e **[CD]**. Note que, em projeção frontal, apenas a face **[ABD]** é visível. Em projeção frontal, as restantes faces (as faces **[ABC]**, **[ACD]** e **[BCD]**) são invisíveis.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[BCD]** (que é, afinal, a face **[BCD]**), cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** do tetraedro, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]**, **[AC]** e **[AD]**. Note que, em projeção horizontal, apenas a face **[BCD]** é visível. Em projeção horizontal, as restantes faces (as faces **[ABC]**, **[ABD]** e **[ACD]**) são invisíveis.

## Traçado:

Os dados (as projeções da reta **r**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$ , no contexto do exercício, são auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As duas projeções do tetraedro (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[ABC]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo **[ABC]**) e, ainda, da projeção da reta **p** no plano **4**.

## 565.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ .

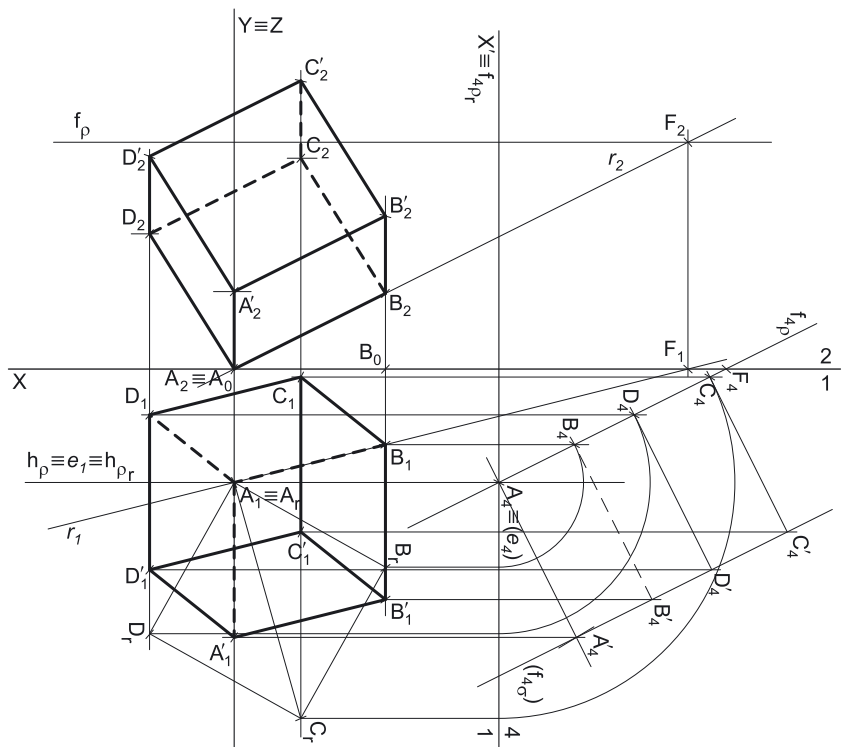
O ponto **A** é um ponto com cota nula, pelo que o ponto **A** é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano  $\rho$  (**h<sub>p</sub>**), pelo que já temos um ponto para definir **h<sub>p</sub>** (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com cota nula, pelo que já temos a direção para definir **h<sub>p</sub>** – **h<sub>p</sub>** está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

Em seguida, desenharam-se as projeções da reta **r**, a reta que passa pelos pontos **A** e **B** e determinou-se o seu traço frontal – o ponto **F** (note que o ponto **A** é, imediatamente, o traço horizontal da reta **r**). O ponto **F** é um ponto com afastamento nulo, pelo que já temos um ponto para definir **f<sub>p</sub>** (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com afastamento nulo, pelo que já temos a direção para definir **f<sub>p</sub>** – **f<sub>p</sub>** está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

### Resolução:

#### Determinação das projeções da face inferior do cubo:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** (a face inferior do cubo) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que se poderia ter optado pelo rebatimento do plano  $\rho$ , mas, neste caso, optou-se por uma situação diferente – optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante e, em seguida, rebater o plano  $\rho$  **como um plano projetante**.

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os dois traços do plano são concorrentes no eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definirmos o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se ao ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $r$ ) e determinou-se a sua projeção no **plano 4**. Assim,  $F_4$  é a projeção do ponto  $F$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) tem necessariamente de passar por  $F_4$  (a nova projeção frontal do ponto  $F$ ), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{4\rho}$  –  $f_{4\rho}$  está definido por dois pontos (o ponto  $F_4$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X'$ ).

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, as novas projeções frontais dos pontos  $A$  e  $B$  ( $A_4$  e  $B_4$ , respetivamente) têm de se situar sobre  $f_{4\rho}$ . Nesse sentido, desenharam-se as linhas de chamada daqueles dois pontos (perpendiculares ao eixo  $X'$ ) e determinaram-se as suas novas projeções frontais ( $A_4$  e  $B_4$ ), sobre  $f_{4\rho}$ . Note que  $A_4$  se situa no eixo  $X'$ , pois o ponto  $A$  tem cota nula e, na mudança do diedro de projeção efetuada, mantiveram-se as cotas – no novo diedro de projeção, o ponto  $A$  continua a ter cota nula.

Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), como um plano projetante (um plano de topo). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\rho \equiv e_f \equiv h_{\rho_r}$  ( $e_4$ , a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo  $X'$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

O ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ . Em seguida, rebateu-se o ponto  $B$ , desenhando a projeção frontal (no **plano 4**) do arco do seu rebatimento, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $B_r$  (que, no seu rebatimento, manteve o seu afastamento em relação ao **plano 4**).

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o quadrado  $[ABCD]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos  $C_r$  e  $D_r$  (os outros dois vértices do quadrado). Note que se garantiu que o quadrado se situa no  $1^a$  Diedro, para que o cubo se situe no  $0^a$  Diedro (como o enunciado pede expressamente). Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos  $C$  e  $D$  (no novo diedro de projeção). Assim,  $C_4$  e  $D_4$  são as projeções dos pontos  $C$  e  $D$  no **plano 4** e situam-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Note que os dois pontos, na inversão do seu rebatimento, mantiveram os respetivos afastamentos (em relação ao **plano 4**).

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos  $C$  e  $D$ , precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).  $C_2$  é a projeção frontal do ponto  $C$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $C_4$  ao eixo  $X'$ .  $D_2$  é a projeção frontal do ponto  $D$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $D_4$  ao eixo  $X'$ .

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do quadrado  $[ABCD]$  (no diedro de projeção inicial).

#### Determinação das projeções dos vértices da face superior do cubo:

Em seguida, representou-se (no novo diedro de projeção) o plano  $\sigma$ , que é o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a face superior do cubo (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ). A distância entre os dois planos mede-se ortogonalmente aos planos e é igual à aresta do cubo.

O cubo é um **poliedro regular** com a forma aparente de um **prisma quadrangular regular**, pelo que as arestas do sólido (que não estão contidas no plano  $\rho$  nem lhe são paralelas) são necessariamente **ortogonais** ao plano  $\rho$ . Qualquer dessas arestas está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\rho$  (que é necessariamente uma reta de perfil). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano de topo, a ortogonalidade de qualquer reta em relação ao plano  $\rho$  é direta. Assim, qualquer aresta do cubo que seja ortogonal ao plano  $\rho$  tem a sua nova projeção frontal perpendicular a  $f_{4\rho}$ , (o que nos garante a ortogonalidade em relação a uma reta do plano  $\rho$  – o seu novo traço frontal) e tem, também, a sua projeção horizontal perpendicular a  $h_\rho$ , (o que nos garante a ortogonalidade em relação a outra reta do plano  $\rho$  – o seu traço horizontal).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, conduziu-se a projeção (no **plano 4**) da reta suporte da aresta  $[AA']$  do cubo, passando por  $A_4$  (a projeção do ponto **A** no **plano 4**) e perpendicular a  $f_{4\rho}$  (pois a aresta  $[AA']$  é ortogonal ao plano  $\rho$  e a perpendicularidade é direta, em projeção frontal). Sobre a reta suporte da projeção (no **plano 4**) da aresta  $[AA']$ , há que medir a aresta do cubo (que é a medida do lado do quadrado  $[ABCD]$ , que já é conhecida, em rebatimento). Assim, com o compasso, mediu-se um dos lados do quadrado  $[A_4B_4C_4D_4]$  (que estão em verdadeira grandeza) e transportou-se essa medida para a reta suporte do segmento  $[A_4A'_4]$ , a partir de  $A_4$ , o que nos permitiu determinar  $A'_4$  (a projeção, no **plano 4**, do vértice **A** do cubo). Por fim, por  $A'_4$  conduziu-se uma paralela a  $f_{4\rho}$ , que é  $f_{4\sigma}$  (o traço, no **plano 4**, do plano  $\sigma$ ). O plano  $\sigma$  é, assim, o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a face superior do cubo (a face  $[A'B'C'D']$ ).

Note que o plano  $\sigma$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço no **plano 4**), razão pela qual o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** se identificou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções dos restantes vértices da face  $[ABCD]$  (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das arestas do cubo que são paralelas à aresta  $[AA']$ , o que nos permitiu determinar as duas projeções do cubo, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Note que os pontos **B'**, **C'** e **D'** foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções frontais (no **plano 4**), pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  é também um plano projetante frontal.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos vértices da face superior do sólido (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ). Tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

$A'_2$  é a projeção frontal do ponto **A'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A'_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $A'_4$  ao eixo  $X'$ .  $B'_2$  é a projeção frontal do ponto **B'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B'_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $B'_4$  ao eixo  $X'$ .  $C'_2$  é a projeção frontal do ponto **C'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C'_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $C'_4$  ao eixo  $X'$ .  $D'_2$  é a projeção frontal do ponto **D'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D'_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $D'_4$  ao eixo  $X'$ .

*Determinação das projeções do cubo:*

A partir das projeções dos oito vértices do cubo (os vértices **A**, **B**, **C** e **D**, da face inferior, e os vértices **A'**, **B'**, **C'** e **D'**, da face superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABB'C'D'D]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2B'_2C'_2D'_2D_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice **C** e o vértice **A'**. O vértice **A**, por ser o vértice de **menor afastamento** do cubo, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$  e  $[AA']$ . O vértice **C'**, por ser o vértice de **maior afastamento** do cubo, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$ ,  $[C'D']$  e  $[CC']$ . Note que, em projeção frontal, a face superior (a face  $[A'B'C'D']$ ) é visível, bem como as faces  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$ . A face inferior (a face  $[ABCD]$ ) e as faces  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  são invisíveis.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[BCDD'A'B']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1D'_1A'_1B'_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – o vértice **C'** e o vértice **A**. O vértice **A**, por ser o vértice de **menor cota** do cubo, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$  e  $[AA']$ . O vértice **C'**, por ser o vértice de **maior cota** do cubo, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$ ,  $[C'D']$  e  $[CC']$ . Note que, em projeção horizontal, a face superior (a face  $[A'B'C'D']$ ) é visível, bem como as faces  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$ . A face inferior (a face  $[ABCD]$ ) e as faces  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$  são invisíveis.

**Traçado:**

Os dados (os traços do plano  $\rho$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do cubo (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado  $[ABCD]$ ) e, ainda, da projeção do cubo no **plano 4**.

## 566.

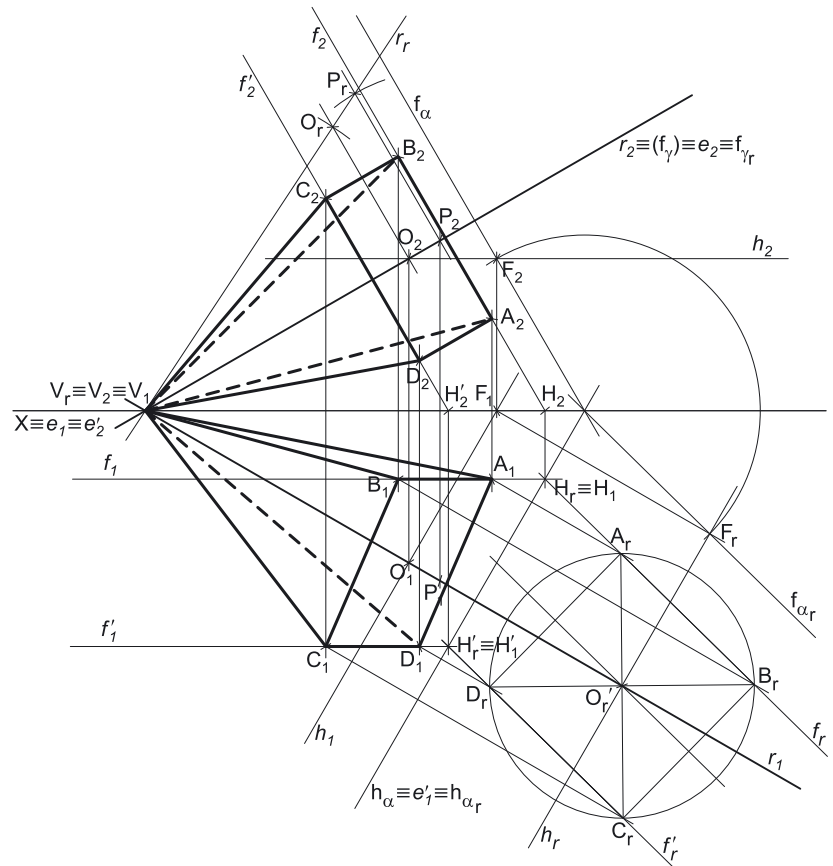
**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é uma reta do  $\beta_{1/3}$  (retas do  $\beta_{1/3}$  têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). Os dados permitiram-nos, ainda, determinar as projeções do ponto  $V$  (o vértice da pirâmide), que é o ponto de concorrência da reta  $r$  com o eixo  $X$  ( $V$  é um ponto do eixo  $X$  e pertence à reta  $r$ , que é a reta suporte do eixo da pirâmide).

**Resolução:***Determinação do plano que contém a base da pirâmide:*

Em primeiro lugar, há que determinar os traços do plano que contém a base da pirâmide e que não são dados. Sabe-se, apenas, que a pirâmide é uma **pirâmide regular**, pelo que o seu **eixo é ortogonal ao plano** que contém a base. Nesse sentido, sabe-se imediatamente que o plano  $\alpha$  é ortogonal à reta  $r$ , o que não é suficiente para determinarmos os traços do plano, pois não temos mais nenhum dado do plano  $\alpha$ .

No entanto, sabe-se que a altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) está contido na reta  $p$ , pelo que o ponto  $O$  é um ponto da reta  $r$ . Assim, a distância do ponto  $V$  ao plano  $\alpha$  mede-se sobre a reta  $r$ . A reta  $r$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide), que está contido na reta  $r$ , não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



Optou-se pelo rebatimento do plano projetante frontal da reta  $r$  para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano  $\gamma$  (o plano projetante frontal da reta  $r$ ) pelo seu traço frontal e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é  $f_\gamma$  – tem-se imediatamente  $f_\gamma \equiv e_2 \equiv f_{\gamma r}$ .

O ponto  $V$  (o vértice da pirâmide, que é, na prática, o traço horizontal da reta  $r$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente,  $V_r \equiv V_2 \equiv V_1$ . Já temos um ponto (em rebatimento) para definir a reta  $r_r$  (a reta  $r$  em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento de um outro ponto qualquer da reta  $r$  – o ponto  $P$ , marcado arbitrariamente sobre a reta  $r$ . Para se rebater o ponto  $P$  conduziu-se, por  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), sobre a qual se mediu o **afastamento** do ponto  $P$ , a partir de  $P_2$ , o que nos permitiu determinar  $P_r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r_r$ . A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $P_r$  e por  $V_r$  (está definida por dois pontos).

Sobre a reta  $r_r$ , a partir de  $V_r$ , mediram-se os 9 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto  $V$  ao plano  $\alpha$ ) e determinou-se  $O_r$  (note que se garantiu que o ponto  $O$  se situa no  $1^a$  Diedro, para que a pirâmide se situe no espaço do  $1^a$  Diedro, como o enunciado refere expressamente). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $O$  e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta  $r$ . O ponto  $O$  é, afinal, o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\alpha$ , pelo que o ponto  $O$  é necessariamente um ponto do plano  $\alpha$ .

Por fim, determinaram-se os traços do plano  $\alpha$  – o plano ortogonal à reta  $r$  que passa pelo ponto  $O$ . O plano  $\alpha$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $r$ . Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $O$ , o ponto  $O$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , ou seja, o ponto  $O$  tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\alpha$ . Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $O$ , uma reta que pertença ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $r$ . Ora, as únicas situações em que a ortogonalidade entre retas é direta em projeções, são as situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção.

Assim, conduziu-se, pelo ponto  $O$ , uma reta horizontal (de nível)  $h$ , ortogonal à reta  $r$  – uma vez que a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta  $h$  e a reta  $r$  é direta em projeção horizontal, ou seja,  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e é perpendicular a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para definir o plano  $\alpha$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\alpha$  – uma reta que seja concorrente com a reta  $h$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $r$ . Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , pois é a única situação em que é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $r$  e uma reta **concorrente** com a reta  $h$ . Essa reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  pode ser, por exemplo, o próprio traço frontal do plano –  $f_{\alpha}$ . Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $h$  (o ponto  $F$ ) e desenhou-se  $f_{\alpha}$ , ortogonal à reta  $r$ . O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha}$ ) é uma reta frontal (paralela ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a ortogonalidade entre  $f_{\alpha}$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal. Assim, por  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ), conduziu-se  $f_{\alpha}$ , perpendicular a  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

O plano  $\alpha$  está definido por duas retas concorrentes ortogonais à reta  $r$  – a reta  $h$  e  $f_{\alpha}$  (o seu traço frontal), concorrentes no ponto  $F$ . Já se garantiu a ortogonalidade do plano  $\alpha$  em relação à reta  $r$ . Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_{\alpha}$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo à reta  $h$ , pois retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal do plano com cota nula).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, é o plano que é ortogonal à reta  $r$  e que contém o ponto  $O$ . Assim, o plano  $\alpha$  é o plano que contém a base da pirâmide.

### Determinação as projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  (o plano que contém o quadrado) para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_{\alpha} \equiv e' \equiv h_{\alpha r}$  ( $e'_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_{\alpha}$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é um ponto da charneira e, por isso, é um ponto fixo). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $h$ ), que é um ponto de  $f_{\alpha}$ . Para rebater o ponto  $F$  conduziu-se, por  $F_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ), desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $HF_1$ , determinando-se  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Em seguida, desenhou-se  $f_{\alpha r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), passando por  $F_r - f_{\alpha r}$  está definido por dois pontos (o ponto  $F_r$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano).

Para rebater o ponto  $O$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $O$  pertença – a reta  $h$ , neste caso. Para definirmos a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto  $F_r$ ), para definirmos a reta  $h_r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_r$ . A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) passa por  $F_r$  e é paralela a  $h_{\alpha r} - h_r$  está definida por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha r}$ ). Em seguida, conduziu-se, por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ), uma perpendicular à charneira (que é  $h_{\alpha}$ ) e que corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal à charneira do rebatimento ( $h_{\alpha}$ ) que contém o ponto  $O$  (bem como o arco do seu rebatimento) – o ponto  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido) é o ponto de interseção da reta  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $O_1$ .

Em rebatimento, já é possível construir o quadrado  $[ABCD]$  em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao polígono e efetuou-se a construção do mesmo, inscrito na circunferência, de acordo com os dados – o lado  $[AB]$  é frontal (de frente), pelo que, em rebatimento, é paralelo a  $f_{\alpha r}$ . Assim, dois dos lados do quadrado, em rebatimento, são paralelos a  $f_{\alpha r}$  (o quadrado tem dois lados frontais). Note que se respeitou o que o enunciado pede expressamente – que o lado  $[AB]$  seja o lado de menor afastamento do quadrado (o lado mais próximo do traço frontal do plano).

A construção do quadrado permitiu-nos determinar os pontos  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$  e  $D_r$  (os quatro vértices do quadrado, em rebatimento). Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos quatro pontos.

### Determinação das projeções da pirâmide:

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABCVD]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2V_2D_2]$ . Todos os vértices da pirâmide pertencem ao contorno aparente frontal. No entanto, as arestas laterais  $[AV]$  e  $[BV]$  são **invisíveis**, pois separam (cada uma delas) duas faces invisíveis em projeção frontal – a aresta lateral  $[AV]$  separa as faces laterais  $[ADV]$  e  $[ABV]$  e a aresta lateral  $[BV]$  separa as faces laterais  $[BCV]$  e  $[ABV]$ . A base  $[ABCD]$  e a face lateral  $[CDV]$  são as faces visíveis da pirâmide, em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[AVCD]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1V_1C_1D_1]$ . Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice  $B$ . Este vértice, por ser o vértice de **maior cota** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base, e a aresta lateral  $[BV]$ . Em projeção horizontal, a base  $[ABCD]$  é **visível**, bem como as faces laterais  $[ABV]$  e  $[BCV]$ . Por isso mesmo, a aresta lateral  $[DV]$  é invisível, em projeção horizontal (porque separa duas faces invisíveis em projeção horizontal). Já as faces laterais  $[CDV]$  e  $[ADV]$  são **invisíveis**, em projeção horizontal.

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do ponto  $O$ ), da reta  $h$  (que nos permitiu determinar os traços do plano  $\alpha$ ) e, ainda, de todos os traçados referentes do rebatimento ao plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado  $[ABCD]$ ), bem como, ainda, da própria construção do quadrado em verdadeira grandeza.

## 567.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. Note que o ângulo a que o enunciado se refere (o ângulo que entre os dois traços do plano) não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\delta$ .

Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**, o que significa que se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si, no espaço**, antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – não se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem entre si, **na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **A**, pertencente ao plano  $\delta$ . O ponto **A**, para pertencer ao plano  $\delta$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, como o ponto **A** tem afastamento nulo, é um ponto de  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ) – o ponto **A** é, assim, o ponto de  $f_\delta$  que tem 4 cm de cota ( $f_\delta$  é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo).

Por fim, sabendo que o lado **[AB]** do quadrado é de perfil e que **B** tem cota nula, foi possível, ainda, determinar a projeção frontal do ponto **B** (**B<sub>2</sub>**), no eixo **X** e na linha de chamada do ponto **A**.

**Resolução:***Determinação das projeções da base da pirâmide:*

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\delta$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Note que não seria possível rebater o plano  $\delta$  para o Plano Horizontal de Projeção, pois não é conhecido o seu traço horizontal ( $h_\delta$ ) que, nesse caso, seria a charneira. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $f_\delta \equiv e_2 \equiv f_{\delta r}$  ( $e_1$ , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a  $f_\delta$ ).

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2$ .

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano  $\delta$  está em verdadeira grandeza, nomeadamente o próprio ângulo que os traços do plano fazem **entre si**. Assim, em rebatimento, já é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si**, o que nos permitiu desenhar  $h_{\delta r}$  (fazendo um ângulo de  $45^\circ$  com  $f_{\delta r}$ , como o enunciado refere).

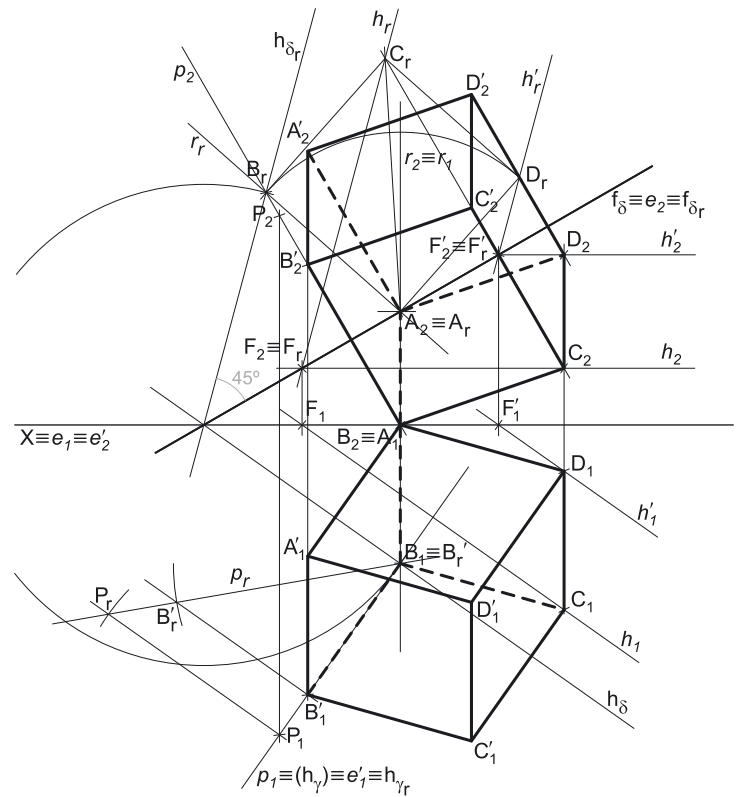
Por outro lado, o ponto **B** é um ponto de  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ), pois o ponto **B** tem cota nula. Assim, conduzindo, por **B<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **B**) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), determinou-se **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido), sobre  $h_{\delta r}$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ , m rebatimento).

Por fim, foi possível construir o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza, em rebatimento. A partir dos pontos **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**, construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os outros dois vértices do polígono, em rebatimento (os pontos **C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**). Note que, na construção do quadrado em rebatimento, se garantiu que o quadrado se situa, na sua totalidade, no espaço do 1<sup>a</sup> Diedro, para que o prisma se situa no 1<sup>a</sup> Diedro, como o enunciado refere expressamente.

A inversão do rebatimento do ponto **B** permitir-nos-á desenhar o traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ), pois o ponto **B** é um ponto do traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ). Para inverter o rebatimento do ponto **B**, sendo conhecida a sua projeção frontal (**B<sub>2</sub>**), desenhou-se a sua linha de chamada, perpendicular ao eixo **X**.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é o ponto de  $h_\delta$  que é fixo, pois situa-se na charneira), e com raio até **B<sub>r</sub>**, desenhou-se um arco (de transporte) até à linha de chamada do ponto **B**, onde se situa **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**). Este procedimento permitiu-nos, também, desenhar o traço horizontal do plano  $\delta$  –  $h_\delta$  passa por **B<sub>1</sub>** e é concorrente com  $f_\delta$  no eixo **X**. Nesse sentido,  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ) está definido por dois pontos – o ponto **B** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\delta$ .

Em seguida, há que inverter o rebatimento dos pontos **C** e **D**, de forma a se desenharem as projeções do quadrado **[ABCD]**. A inversão do rebatimento do ponto **C** processou-se com o recurso à reta **h**, horizontal (de nível), do plano  $\delta$ , à qual o ponto **C** pertence. A reta **h<sub>r</sub>** (a reta **h** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **C<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a  $h_\delta$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **h**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para se definir a reta  $h$  (em projeções), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $F$  é o traço frontal da reta  $h$  e é um ponto do traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_{\delta}$ ). Assim,  $F_r$  situa-se sobre  $f_{\delta r}$  e, porque é um ponto da charneira, o ponto  $F$  roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_2 \equiv F_r$ . Já temos um ponto para definir a reta  $h$  em projeções. Fala-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal do plano  $\delta$ , pelo que é paralela ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento). Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $h$  – a reta  $h$  está, então, definida por um ponto (o ponto  $F$ ) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $h$ .

Por fim, por  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ) é  $C_2$  (a projeção frontal do ponto  $C$ ). A projeção horizontal do ponto  $C$  ( $C_1$ ) situa-se sobre  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ).

A inversão do rebatimento do ponto  $D$  e a determinação das suas projeções processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto  $C$ . A reta  $h'$  é a reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$  que nos permitiu inverter o rebatimento do ponto  $D$ . A reta  $h'$ , em projeções, está definida por um ponto (o ponto  $F'$ , o seu traço frontal) e por uma direção (é paralela à reta  $h$  e a  $h_3$ ).

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do quadrado  $[ABCD]$ .

### Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\delta$ . Consideremos a aresta lateral  $[BB']$ , por exemplo, considerando, nesse caso, que o ponto  $B'$  é o extremo superior da aresta lateral do prisma que tem um extremo em  $B$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto  $B$  conduziram-se as projeções da reta  $p$ , a reta suporte da aresta lateral  $[BB']$ .

A reta  $p$  é ortogonal a  $f_{\delta}$ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_{\delta}$  é direta em projeção frontal, pelo que  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ) é perpendicular a  $f_{\delta}$ . A reta  $p$  é também ortogonal a  $h_{\delta}$ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_{\delta}$  é direta em projeção horizontal, pelo que  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ) é perpendicular a  $h_{\delta}$ . Assim, a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\delta$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\delta$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**).

A altura do prisma é a distância entre os planos das bases, que é medida numa reta ortogonal aos planos das bases (trata-se da **distância entre dois planos paralelos**). O segmento  $[BB']$  (a aresta lateral  $[BB']$ ) está contido na reta  $p$ , pelo que o ponto  $B'$  é um ponto da reta  $p$ . Assim, a distância do ponto  $B'$  ao ponto  $B$  é a distância do ponto  $B'$  ao plano  $\delta$  e corresponde à distância entre os planos das bases, que se pode medir na reta  $p$ . A reta  $p$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento  $[BB']$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da reta  $p$  para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano  $\gamma$  (o plano projetante horizontal da reta  $p$ ) pelo seu traço horizontal e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é  $h_{\gamma}$  – tem-se imediatamente  $h_{\gamma} \equiv e' \equiv h_{\gamma r}$ . Atendendo a que o plano  $\gamma$  foi representado, apenas, pelo seu traço horizontal, este identificou-se entre parêntesis.

O ponto  $B$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente,  $B_r' \equiv B_1$  (note que o ponto  $B$  é, na realidade, o traço horizontal da reta  $p$ ). Tenha em conta que  $B_r'$  é o ponto  $B$  rebatido no seu segundo rebatimento (o ponto  $B$  rebatido pelo rebatimento do plano  $\gamma$ ). Já temos um ponto (em rebatimento) para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto  $P$ , qualquer, da reta  $p$ , e efetuou-se o seu rebatimento – para tal conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), sobre a qual se mediu a **cota** do ponto  $P$ , a partir de  $P_1$ , o que nos permitiu determinar  $P_r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p_r$ . A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $B_r'$  e por  $P_r$  (está definida por dois pontos).

Sobre a reta  $p_r$ , a partir de  $B_r'$ , mediram-se os 6 cm (a altura do prisma, que é a distância do ponto  $B'$  ao plano  $\delta$ ) e determinou-se o ponto  $B_r'$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $B'$  e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta  $p$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação das projeções dos restantes vértices da base superior do sólido, na qual se teve em conta que as arestas laterais do prisma são todas paralelas entre si (e ortogonais aos planos das bases) e, ainda, que as arestas da base superior são paralelas às arestas correspondentes da base inferior.

Assim, pelas projeções do ponto  $C$  (um dos vértices da base inferior, consecutivo a  $B$ ) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[CC']$  (que não se identificou) – o ponto  $C'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $C$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $B'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[B'C']$  da base superior (que também não se identificou). O vértice  $C'$ , da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

De forma idêntica, pelas projeções do ponto  $A$  (o outro vértice da base inferior que é consecutivo a  $B$ ) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[AA']$  (que, mais uma vez, não se identificou) – o ponto  $A'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $A$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $B'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[A'B']$  da base superior (que é uma reta de perfil e que também não se identificou). O vértice  $A'$ , da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

Por fim, pelas projeções do ponto  $D$  (o último dos vértices da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[DD']$  (que, de novo, não se identificou) – o ponto  $D'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $D$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $C'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[C'D']$  da base superior (que é de perfil e que também não se identificou). O vértice  $D'$ , da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos oito vértices do prisma (os vértices **A**, **B**, **C** e **D**, da base inferior, e os vértices **A'**, **B'**, **C'** e **D'**, da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BCDD'A'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice **A** e o vértice **C'**. O vértice **A**, por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base inferior, e a aresta lateral **[AA']**. O vértice **C'**, por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[B'C']** e **[C'D']**, da base superior, e a aresta lateral **[CC']**. Note que, em projeção frontal, a base superior (a base **[A'B'C'D']**) é visível, bem como as faces laterais **[BB'C'C]** e **[CC'D'D]**. A base inferior (a base **[ABCD]**) e as faces laterais **[AA'B'B]** e **[AA'D'D]** são invisíveis, em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[AA'B'C'D]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – o vértice **B** e o vértice **D'**. O vértice **B**, por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base inferior, e a aresta lateral **[BB']**. O vértice **D'**, por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[C'D']** e **[A'D']**, da base superior, e a aresta lateral **[DD']**. Note que, em projeção horizontal, a base superior (a base **[A'B'C'D']**) é visível, bem como as faces laterais **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]**. A base inferior (a base **[ABCD]**) e as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]** são invisíveis, em projeção horizontal.

#### Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano  $\delta$ ) representou-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O traço horizontal do plano  $\delta$ , no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado **[ABCD]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\delta$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado **[ABCD]**), o plano  $\gamma$  e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **B'**), bem como todos os traçados que nos permitiram determinar os restantes vértices da base superior do sólido.

## 568.

#### Dados:

Em primeiro lugar, identificaram-se os traços do plano  $\rho$ , que se situam no eixo **X** – o plano  $\rho$  está definido por uma reta (o eixo **X**) e pela sua orientação (é dado o diedro que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção).

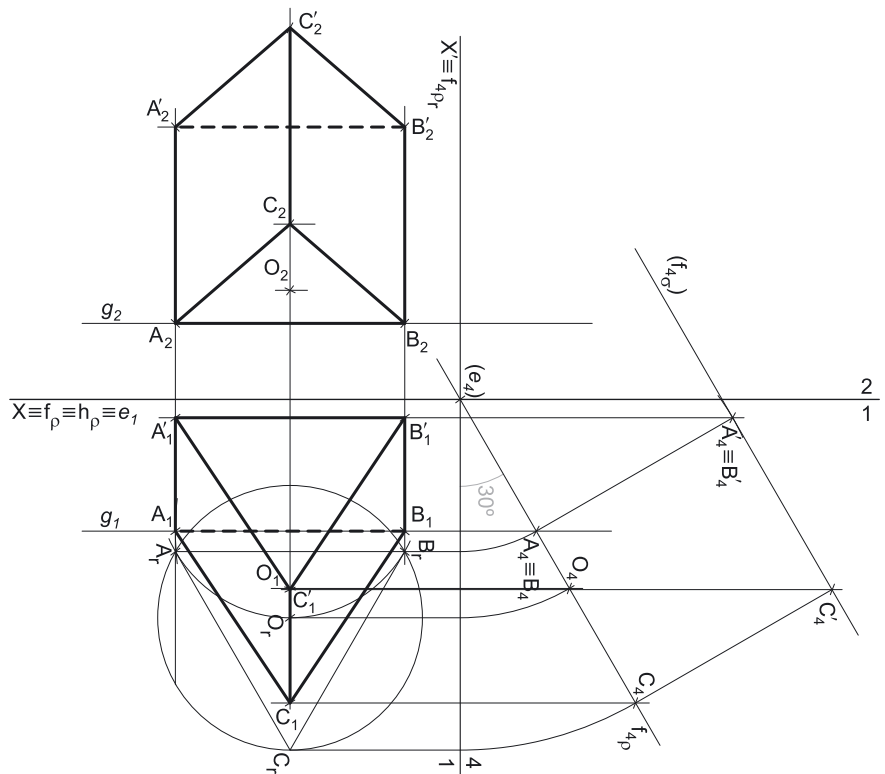
Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção horizontal do ponto **O**, em função do afastamento que é dado.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do triângulo **[ABC]**:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** (a face inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Note que se poderia ter optado pelo rebatimento do plano  $\rho$ , para o que seria necessário, antes de mais, a determinação de mais um elemento do plano  $\rho$  (o ponto **O**, por exemplo), pois a orientação do plano, apenas, não nos permite prosseguir com o rebatimento, de uma forma direta. Assim, neste caso optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante e, em seguida, rebater o plano  $\rho$  como um plano projetante.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano passante num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal plano  $\rho$  (que se situa no eixo  $X$ ), pelo que o eixo  $X'$  é perpendicular ao eixo  $X$  inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano são duas retas do plano que são necessariamente concorrentes num ponto do eixo  $X'$ , pelo que já temos um ponto para definir o novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ) – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que não se identificou). Já temos um ponto para definir  $f_{4\rho}$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

É dado o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção (um ângulo de  $30^\circ$ ) e tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano de topo, o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção projeta-se em verdadeira grandeza no ângulo que o seu traço frontal ( $f_{4\rho}$ ) faz com o eixo  $X'$ . Nesse sentido, já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Assim,  $f_{4\rho}$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**) passa pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano e faz, com o eixo  $X'$ , um ângulo de  $30^\circ$  –  $f_{4\rho}$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços) e por uma direção (o ângulo que faz com o eixo  $X'$ ). Note que, das duas hipóteses que existem para marcar o ângulo de  $30^\circ$ , aquela que a resolução apresenta é a que nos garante que o plano  $\rho$  atravessa os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros, como o enunciado refere expressamente.

Por fim, determinou-se  $O_4$  (a projeção do ponto  $O$  no **plano 4**), na nova linha de chamada (perpendicular ao eixo  $X'$ ) e sobre  $f_{4\rho}$  (pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal). Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), como um plano projetante (um plano de topo). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1$  ( $e_4$ , a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo  $X'$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

Em seguida, rebateu-se o ponto  $O$ , desenhando a projeção frontal (no **plano 4**) do arco do seu rebatimento, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $O_f$  (tenha em conta que, no seu rebatimento, o ponto  $O$  manteve o seu afastamento em relação ao **plano 4**).

Em rebatimento, já é possível construir o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_f$  e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao polígono e efetuou-se a construção do mesmo, inscrito na circunferência, de acordo com os dados – o lado  $[AB]$  é fronto-horizontal, pelo que, em rebatimento, é paralelo ao eixo  $X$ . Por outro lado, atendendo a que o ponto  $C$  é o vértice de maior cota do triângulo, o lado  $[AB]$  é o lado mais próximo do eixo  $X$  (para ser o lado de menor cota do triângulo), o que se verifica também em rebatimento – o lado  $[A, B_r]$  (o lado  $[AB]$  em rebatimento) continua a ser o lado mais próximo do eixo  $X$ .

Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  (no novo diedro de projeção). Assim,  $A_4$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Tendo em conta que os pontos  $A$  e  $B$  se situam na mesma reta fronto-horizontal (que, no novo diedro de projeção, é projetante em relação ao **plano 4**), as projeções dos dois pontos no **plano 4** estão coincidentes – tem-se, imediatamente,  $B_4 \equiv A_4$ . De forma semelhante, a referida para o ponto  $A$ ,  $C_4$  é a projeção do ponto  $C$  no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Note que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , na inversão dos respetivos rebatimentos, mantiveram os seus afastamentos (em relação ao **plano 4**).

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).  $A_2$  é a projeção frontal do ponto  $A$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$ .  $B_2$  é a projeção frontal do ponto  $B$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$ .  $C_2$  é a projeção frontal do ponto  $C$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $C_4$  ao eixo  $X'$ .

A partir das projeções dos três pontos ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ), desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$  (no diedro de projeção inicial).

### Determinação das projeções dos vértices da face superior do prisma:

Em seguida, representou-se (no novo diedro de projeção) o plano  $\sigma$ , que é o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a base superior do prisma (o triângulo  $[A'B'C']$ ). A distância entre os dois planos é a altura do prisma (que é 6 cm) e mede-se ortogonalmente aos dois planos. Assim, desenhou-se uma paralela a  $f_{4\rho}$ , situada 6 cm para cima de  $f_{4\rho}$ , que é  $f_{4\sigma}$  (o traço, no **plano 4**, do plano  $\sigma$ ). O plano  $\sigma$  é, assim, o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a base superior do prisma (a base  $[A'B'C']$ ). Note que o plano  $\sigma$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço no **plano 4**), razão pela qual o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** se identificou entre parêntesis.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos que contêm as duas bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\rho$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano de topo, a ortogonalidade de qualquer reta em relação ao plano  $\rho$  é direta. Assim, qualquer aresta lateral do sólido tem a sua projeção no **plano 4** perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a uma reta do plano  $\rho$  – o seu novo traço frontal) e tem, também, a sua projeção horizontal perpendicular a  $h_\rho$  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a outra reta do plano  $\rho$  – o seu traço horizontal).

Assim, pelas projeções dos vértices do triângulo  $[ABC]$  (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das arestas laterais do prisma (ortogonais ao plano  $\rho$ ), o que nos permitiu determinar as duas projeções do sólido, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Note que os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  (os vértices da base superior) foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções frontais (no **plano 4**), pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  é também um plano projetante frontal.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos vértices da base superior do sólido (o triângulo  $[A'B'C']$ ). Tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

$A'_2$  é a projeção frontal do ponto  $A'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $A'_4$  ao eixo  $X'$ .  
 $B'_2$  é a projeção frontal do ponto  $B'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $B'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B'_4$  ao eixo  $X'$ .  
 $C'_2$  é a projeção frontal do ponto  $C'$  e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C'_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $C'_4$  ao eixo  $X'$ .

#### Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos seis vértices do prisma (os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  da base inferior, e os vértices  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABB'C'A']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2B'_2C'_2A'_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice  $C$ . O vértice  $C$ , por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AC]$  e  $[BC]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[CC']$ . Em projeção frontal, a aresta  $[B'C']$  da base superior é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal – a base superior (a base  $[A'B'C']$ ) e a face lateral  $[AA'B'B]$ . Em projeção frontal, a base inferior (a base  $[ABC]$ ) é visível, bem como as faces laterais  $[AA'C'C]$  e  $[BB'C'C]$ .

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[AA'B'BC]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1A'_1B'_1B_1C_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice  $C'$ . O vértice  $C'$ , por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[CC']$ . Em projeção horizontal, a aresta  $[AB]$  da base inferior é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – a base inferior (a base  $[ABC]$ ) e a face lateral  $[AA'B'B]$ . Em projeção horizontal, a base superior (a base  $[A'B'C']$ ) é visível, bem como as faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[AA'C'C]$ .

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam os traços do plano  $\rho$ ). As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo  $[ABC]$ ) e, ainda, da projeção do prisma no **plano 4**.

## 569.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção frontal da reta  $h$  ( $h_2$ ), que é a reta suporte da diagonal  $[AC]$  do quadrado  $[ABCD]$  – a reta  $h$  tem 5,5 cm de cota, pois a reta  $h$  contém o ponto  $A$ , que tem 5,5 cm de cota.

Tendo em conta que a reta  $r$  é a reta suporte do eixo do sólido, o ponto  $O$  (o centro da base  $[ABCD]$  do prisma) é necessariamente um ponto da reta  $r$ . Por outro lado, o centro do quadrado  $[ABCD]$  (o ponto  $O$ ) é, necessariamente, um ponto da diagonal  $[AC]$  do quadrado, pelo que o ponto  $O$  é, também, um ponto da reta  $h$  (a reta suporte da diagonal  $[AC]$ ). Assim, a partir da sua projeção frontal, determinaram-se as projeções do ponto  $O$ , que é o ponto de concorrência das retas  $h$  e  $r$ .

### Resolução:

*Determinação dos traços do plano que contém o quadrado  $[ABCD]$ :*

Em primeiro lugar, há que determinar os traços do plano que contém a base inferior do prisma, que não são dados – salienta-se que se considerou ser o plano  $\alpha$ , pelo facto de o enunciado ser omissivo. Sabe-se, apenas, que o prisma é um **prisma regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal aos planos que contêm as bases. Nesse sentido, sabe-se imediatamente que o plano  $\alpha$  é ortogonal à reta  $r$ . Por outro lado, uma vez que o ponto  $O$  é o centro da base, o ponto  $O$  é, imediatamente, um ponto do plano  $\alpha$ .

Assim, há que determinar os traços do plano que é ortogonal à reta  $r$  e que passa pelo ponto  $O$ . O plano  $\alpha$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $r$ . Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $O$ , o ponto  $O$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , ou seja, o ponto  $O$  tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\alpha$ . Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $O$ , uma reta que pertença ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $r$ . Ora, as únicas situações em que a ortogonalidade entre retas é direta em projeções, são as situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção.

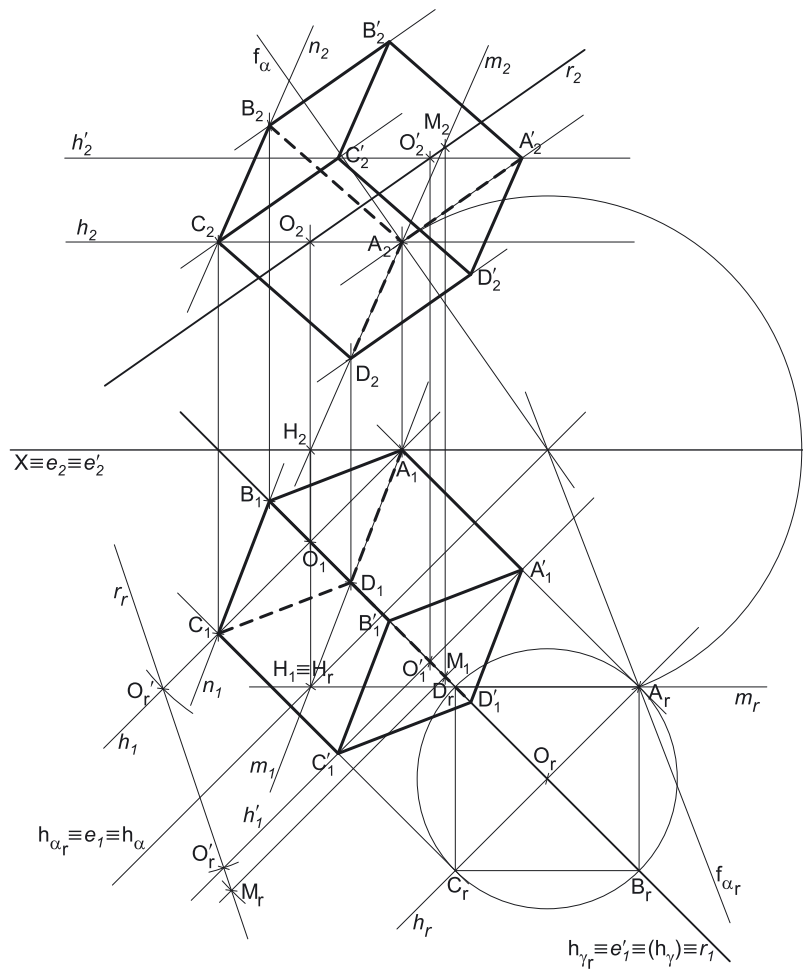
Por outro lado, já temos a projeção frontal de uma reta horizontal (de nível) que passa pelo ponto  $O$  e que é, necessariamente, uma reta do plano  $\alpha$  (porque é a reta suporte de uma diagonal do quadrado). Assim, a reta  $h$  tem de ser ortogonal à reta  $r$  – uma vez que a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta  $h$  e a reta  $r$  é direta em projeção horizontal, ou seja,  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e é perpendicular a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

É referido, no enunciado, que o ponto  $A$  (um dos extremos da diagonal  $[AC]$ ) é um ponto do Plano Frontal de Projeção. Assim, o ponto  $A$  é, necessariamente, o traço frontal da reta  $h$ , pelo que as suas projeções se determinaram imediatamente.

Para definir o plano  $\alpha$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\alpha$  – uma reta que seja concorrente com a reta  $h$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $r$ . Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , pois é a única situação em é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $r$  e uma reta **concorrente** com a reta  $h$ . Essa reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  pode ser, por exemplo, o próprio traço frontal do plano –  $f_{\alpha}$ . Assim, pelo ponto  $A$  (que é o traço frontal da reta  $h$ , conduziu-se  $f_{\alpha}$ , ortogonal à reta  $r$ . O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha}$ ) é uma reta frontal (paralela ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a ortogonalidade entre  $f_{\alpha}$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal. Assim, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ), conduziu-se  $f_{\alpha}$ , perpendicular a  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

O plano  $\alpha$  está definido por duas retas concorrentes ortogonais à reta  $r$  – a reta  $h$  e  $f_{\alpha}$  (o seu traço frontal), concorrentes no ponto  $A$ . Já se garantiu a ortogonalidade do plano  $\alpha$  em relação à reta  $r$ . Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_{\alpha}$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo à reta  $h$ , pois retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal do plano com cota nula).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, é o plano que é ortogonal à reta  $r$  e que contém o ponto  $O$ . Assim, o plano  $\alpha$  é o plano que contém a base inferior do prisma.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação das projeções da base inferior do prisma:*

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado [ABCD] (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira), situa-se no eixo X. Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos traços do plano (que é um ponto da charneira e, por isso é fixo – roda sobre si próprio). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto A (o traço frontal da reta  $h$ ), que é um ponto de  $f_\alpha$ . Para rebater o ponto A conduziu-se, por  $A_1$ , (a projeção horizontal do ponto A), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do seu rebatimento). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano  $\alpha$  e com raio até  $A_2$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , determinando-se  $A_r$  (o ponto A rebatido). Em seguida, desenhou-se  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), passando por  $A_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano ( $f_{\alpha_r}$  está definido por dois pontos).

Em seguida, há que rebater o ponto O, o que se processa rebatendo uma reta a que o ponto O pertença – a reta  $h$ , neste caso.

Para rebater a reta  $h$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) – o ponto  $A_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $h_r$ . A reta  $h$  é uma reta horizontal do plano  $\alpha$ , pelo que é paralela ao traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ), o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento). Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $h_r$ , que é a direção das retas horizontais do plano –  $h_r$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $A_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha_r}$ ).

Em seguida, conduziu-se, por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto O), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira do rebatimento que contém o ponto O, bem como o arco do seu rebatimento) e determinou-se o ponto  $O_r$  (o ponto O rebatido), que é o ponto de interseção da reta  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $O_1$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado (em verdadeira grandeza) e efetuou-se a construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu determinar os pontos  $B_r$ ,  $C_r$  e  $D_r$  (os outros três vértices do quadrado, em rebatimento). Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos pontos B, C e D.

*Inversão do rebatimento do plano  $\alpha$  e determinação das projeções da base inferior do prisma:*

A inversão do rebatimento do ponto C processou-se com o recurso à reta  $h$ , a reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  que nos permitiu rebater o ponto O e à qual o ponto C pertence – a reta  $h$  é a reta suporte da diagonal [AC] do quadrado e as suas projeções já são conhecidas.

Assim, por  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_r$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto C). A projeção frontal do ponto C ( $C_2$ ) situa-se sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ).

A inversão do rebatimento do ponto D processou-se com o recurso a uma reta  $m$ , do plano  $\alpha$ , à qual o ponto D pertence – a reta suporte do lado [AD] do quadrado. A reta  $m_r$  (a reta  $m$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $D_r$ . Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $m$ , tendo em conta que para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $m$  (em projeções) – o ponto A (cuja projeções já são conhecidas). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta  $m$  (em projeções). Nesse sentido, determinou-se, em rebatimento, o traço horizontal da reta  $m$  – o ponto H (que é um ponto de  $h_\alpha$ ). Assim,  $H_r$  é um ponto de  $h_{\alpha_r}$ , pelo que o ponto H é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_1 \equiv H_r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $m$  em projeções – a reta  $m$  está, assim, definida por dois pontos (os pontos A e H), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $m$ .

Em seguida, por  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $m_r$  (a projeção horizontal da reta  $m$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto D). A projeção frontal do ponto D ( $D_2$ ) situa-se sobre  $m_2$  (a projeção frontal da reta  $m$ ).

A inversão do rebatimento do ponto B processou-se com o recurso a uma reta  $n$ , do plano  $\alpha$ , à qual o ponto B pertence – a reta suporte do lado [BC] do quadrado. A reta  $n_r$  (a reta  $n$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $B_r$  e  $C_r$ . Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $n$ , tendo em conta que para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $n$  (em projeções) – o ponto C (cuja projeções já são conhecidas). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta  $n$  (em projeções). Por outro lado, a reta  $n$  é necessariamente paralela à reta  $m$  (são duas retas suporte de dois lados paralelos do quadrado), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $n$  em projeções – a reta  $n$  está, assim, definida por um ponto (o ponto C) e uma direção (é paralela à reta  $m$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $n$ .

Em seguida, por  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $n_r$  (a projeção horizontal da reta  $n$ ) é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto B). A projeção frontal do ponto B ( $B_2$ ) situa-se sobre  $n_2$  (a projeção frontal da reta  $n$ ).

Note que a inversão do rebatimento dos pontos B e D se poderia ter processado com o recurso, por exemplo, a retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ . No entanto, a situação atrás exposta permitiu-nos inverter o rebatimento dos dois pontos com uma maior economia de traçado.

A partir das projeções dos quatro pontos (A, B, C e D), desenharam-se as projeções do quadrado [ABCD].

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que o eixo do sólido (bem como as suas arestas laterais) é necessariamente **ortogonal** aos planos das bases. A reta  $r$  já é a reta suporte do eixo do prisma.

A altura do prisma é a distância entre os planos das bases, que é medida numa reta ortogonal aos planos das bases (trata-se da **distância entre dois planos paralelos**). O segmento  $[OO']$  (o eixo do sólido) está contido na reta  $r$ , pelo que o ponto  $O'$  (o centro da base superior) é um ponto da reta  $r$ . Assim, a distância do ponto  $O'$  ao ponto  $O$  (a distância entre os centros das duas bases) é a distância do ponto  $O'$  ao plano  $\alpha$  e corresponde à distância entre os planos das duas bases, que se pode medir na reta  $r$ . A reta  $r$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento  $[OO']$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da reta  $r$  para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano  $\gamma$  (o plano projetante horizontal da reta  $r$ ) pelo seu traço horizontal e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é  $h_\gamma$  – tem-se imediatamente  $h_\gamma \equiv e'_\gamma \equiv h_{\gamma r}$ . Atendendo a que o plano  $\gamma$  foi representado, apenas, pelo seu traço horizontal, este identificou-se entre parêntesis.

Em seguida, rebateu-se o ponto  $O$  (o centro da base inferior do prisma) – para tal conduziu-se, por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), sobre a qual se mediu a **cota** do ponto  $O$ , a partir de  $O_1$ , o que nos permitiu determinar  $O_r'$ . Tenha em conta que  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido no seu segundo rebatimento (o ponto  $O$  rebatido pelo rebatimento do plano  $\gamma$ ). Já temos um ponto (em rebatimento) para definir a reta  $r_r$  (a reta  $r$  em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto  $M$ , qualquer, da reta  $r$ , e efetuou-se o seu rebatimento – para tal conduziu-se, por  $M_1$  (a projeção horizontal do ponto  $M$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), sobre a qual se mediu a **cota** do ponto  $M$ , a partir de  $M_1$ , o que nos permitiu determinar  $M_r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r_r$ . A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $O_r'$  e por  $M_r$  (está definida por dois pontos).

Sobre a reta  $r_r$ , a partir de  $O_r'$ , mediram-se os 5 cm (a altura do prisma, que é a distância do ponto  $O'$  ao plano  $\alpha$ ) e determinou-se o ponto  $O_r'$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $O'$  e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta  $r$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação das projeções dos vértices da base superior do sólido, na qual se teve em conta que as arestas laterais do prisma são todas paralelas entre si (e ortogonais aos planos das bases) e, ainda, que as arestas da base superior são paralelas às arestas correspondentes da base inferior.

Assim, pelas projeções dos pontos  $A$  e  $C$  (os dois extremos de uma diagonal da base inferior) conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (as arestas  $[AA']$  e  $[CC']$ ) – note que não se identificaram estas retas, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações. Em seguida, pelas projeções do ponto  $O'$ , conduziram-se as projeções homónimas de uma reta  $h'$ , paralela à reta  $h$  – a reta  $h'$  é, neste contexto, a reta suporte da diagonal  $[A'C']$  da base superior e, por isso mesmo, é necessariamente paralela à reta  $h$  (que é a reta suporte da diagonal  $[AC]$  da base inferior). O vértice  $A'$ , da base superior, é o ponto de concorrência da reta  $h'$  com a reta suporte da aresta  $[AA']$ . De forma semelhante, o vértice  $C'$ , da base superior, é o ponto de concorrência da reta  $h'$  com a reta suporte da aresta  $[CC']$ .

Em seguida, pelas projeções do ponto  $D$  (outro vértice da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[DD']$  (que, mais uma vez, não se identificou) – o ponto  $D'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $D$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $C'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[C'D']$  da base superior (que também não se identificou). O vértice  $D'$ , da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

Por fim, pelas projeções do ponto  $B$  (o último vértice da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral  $[BB']$  (que, de novo, não se identificou) – o ponto  $B'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice  $B$  da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $A'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta  $[A'B']$  da base superior (que também não se identificou). O vértice  $B'$ , da base superior, é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

## Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos oito vértices do sólido (os vértices  $A, B, C$  e  $D$ , da face inferior, e os vértices  $A', B', C'$  e  $D'$ , da face superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[BCDD'A'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2A'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice  $A$  e o vértice  $C'$ . O vértice  $A$ , por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[AA']$ . O vértice  $C'$ , por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$  e  $[C'D']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[CC']$ . Note que, em projeção frontal, as faces visíveis são a base superior (a base  $[A'B'C'D']$ ), bem como as faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$ . As faces invisíveis, em projeção frontal, são a base inferior (a base  $[ABCD]$ ) e as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$ .

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[AA'D'C'CB]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1A'_1D'_1C'_1C_1B_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – o vértice  $D$  e o vértice  $B'$ . O vértice  $D$ , por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AD]$  e  $[CD]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[DD']$ . O vértice  $B'$ , por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[BB']$ . Note que, em projeção horizontal, as faces visíveis são a base superior (a base  $[A'B'C'D']$ ), bem como as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ . As faces invisíveis, em projeção horizontal, são a base inferior (a base  $[ABCD]$ ) e as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano  $\alpha$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso da reta  $h$ , de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado  $[ABCD]$ ), o plano  $\gamma$  e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do ponto  $O'$ ), bem como todos os traçados que nos permitiram determinar os restantes vértices da base superior do sólido.

## 570.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. Note que o ângulo  $a$  que o enunciado se refere (o ângulo que entre os dois traços do plano) não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\alpha$ .

Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**, o que significa que se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si, no espaço**, antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – não se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem entre si, **na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $A$ , pertencente ao plano  $\alpha$ . O ponto  $A$ , para pertencer ao plano  $\alpha$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, como o ponto  $A$  tem cota nula, é um ponto de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto  $A$  é, assim, o ponto de  $h_\alpha$  que tem 4 cm de afastamento ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

### Resolução:

#### Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Note que não seria possível rebater o plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, pois não é conhecido o seu traço frontal ( $f_\alpha$ ) que, nesse caso, seria a charneira. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

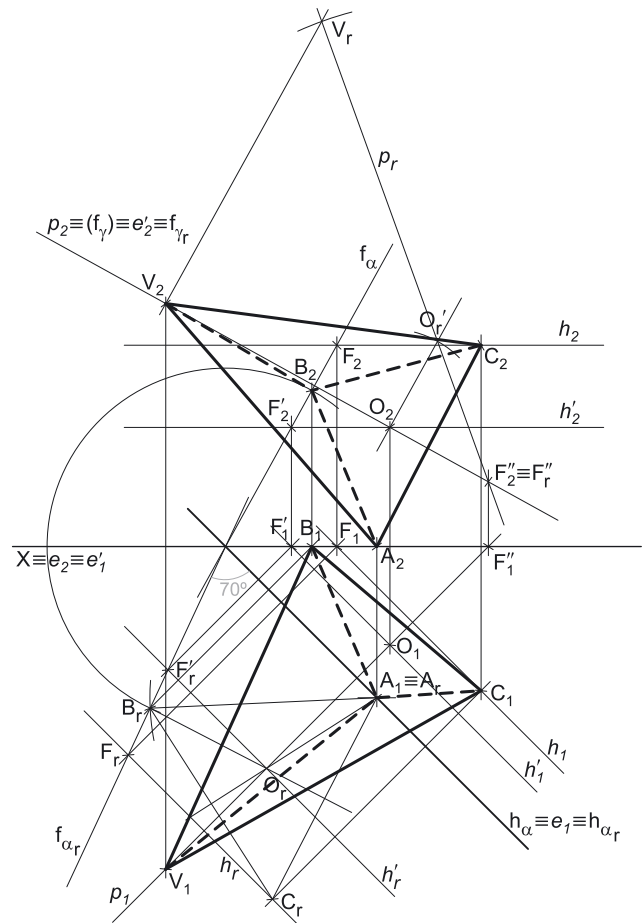
O ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$ .

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano  $\alpha$  está em verdadeira grandeza, nomeadamente o próprio ângulo que os traços do plano fazem **entre si**. Assim, em rebatimento, já é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si**, o que nos permitiu desenhar  $f_{\alpha_r}$  (fazendo um ângulo de  $70^\circ$  com  $h_{\alpha_r}$ , como o enunciado refere).

Por outro lado, também já é possível construir o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza, em rebatimento. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido) e com 6 cm de raio (o comprimento do lado do triângulo), determinou-se o ponto  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido) sobre  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido). Note que o ponto  $B$  tem afastamento nulo (é dado no enunciado), pelo que o ponto  $B$  é necessariamente um ponto de  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ).

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o triângulo  $[ABC]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o terceiro vértice do polígono, em rebatimento (o ponto  $C_r$ ), bem como o ponto  $O_r$  (o centro do triângulo, em rebatimento). Note que, na construção do triângulo em rebatimento, se garantiu que o triângulo se situa, na sua totalidade, no espaço do  $1^\circ$  Diedro, para que a pirâmide se situa no  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

A inversão do rebatimento do ponto  $B$  permitir-nos-á desenhar o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), pois o ponto  $B$  é um ponto do traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). Para inverter o rebatimento do ponto  $B$  conduziu-se, por  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal a charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $B$ ) – o ponto de interseção dessa perpendicular à charneira com o eixo  $X$  é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ), pois o ponto  $B$  tem afastamento nulo. A partir de  $B_1$ , desenhou-se a linha de chamada do ponto  $B$ , perpendicular ao eixo  $X$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é o ponto de  $f_\alpha$  que é fixo, pois situa-se na charneira), e com raio até  $B_r$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à linha de chamada do ponto  $B$ , onde se situa  $B_2$  (a projeção frontal do ponto  $B$ ). Este procedimento permitiu-nos, também, desenhar o traço frontal do plano  $\alpha - f_\alpha$  passa por  $B_2$  e é concorrente com  $h_\alpha$  no eixo  $X$ . Nesse sentido,  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $B$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\alpha$ .

A inversão do rebatimento do ponto  $C$  processou-se com o recurso à reta  $h$ , horizontal (de nível), do plano  $\alpha$ , à qual o ponto  $C$  pertence. A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $C_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_\alpha$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h$ , para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

O ponto  $F$  é o traço frontal da reta  $h$  e é um ponto do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ). Assim,  $F_r$  é um ponto de  $f_{\alpha r}$  e o ponto  $F$  tem de se situar sobre  $f_\alpha$ . Para se determinarem as projeções do ponto  $F$  conduziu-se, por  $F_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo  $X$  é  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ), pois o ponto  $F$  tem afastamento nulo. A projeção frontal do ponto  $F$  ( $F_2$ ) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), pois o ponto  $F$  é um ponto de  $f_\alpha$ . Já temos um ponto para definir a reta  $h$  em projeções. Fala-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal do plano  $\alpha$ , pelo que é paralela ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento). Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $h$  – a reta  $h$  está, então, definida por um ponto (o ponto  $F$ ) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $h$ .

Por fim, por  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ). A projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ) situa-se sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ).

A inversão do rebatimento do ponto  $O$  e a determinação das suas projeções processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto  $C$ . A reta  $h'$  é a reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  que nos permitiu inverter o rebatimento do ponto  $O$ . A reta  $h'_r$ , em projeções, está definida por um ponto (o ponto  $F'$ , o seu traço frontal) e por uma direção (é paralela à reta  $h$  e a  $h_\alpha$ ).

A partir das projeções dos três pontos ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ), desenharam-se as projeções do triângulo  $[ABC]$ .

### Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto  $O$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto  $O$  conduziram-se as projeções da reta  $p$ , a reta suporte do eixo da pirâmide.

A reta  $p$  é ortogonal a  $f_\alpha$ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $f_\alpha$  é direta em projeção frontal, pelo que  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ) é perpendicular a  $f_\alpha$ . A reta  $p$  é também ortogonal a  $h_\alpha$ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta  $p$  e  $h_\alpha$  é direta em projeção horizontal, pelo que  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ) é perpendicular a  $h_\alpha$ . Assim, a reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano  $\alpha$  (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**). A reta  $p$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é ortogonal ao plano  $\alpha$ ).

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) está contido na reta  $p$ , pelo que o ponto  $V$  é um ponto da reta  $p$ . Assim, a distância do ponto  $V$  ao plano  $\delta$  mede-se na reta  $p$ . A reta  $p$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante frontal da reta  $p$  para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano  $\gamma$  (o plano projetante frontal da reta  $p$ ) pelo seu traço frontal e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é  $f_\gamma$  – tem-se imediatamente  $f_\gamma \equiv e'_2 \equiv f_{\gamma r}$ . Atendendo a que o plano  $\gamma$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal, este identificou-se entre parêntesis.

O ponto  $F''$  (o traço frontal da reta  $p$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente,  $F''_r \equiv F''_2$ . Já temos um ponto (em rebatimento) para definir a reta  $p_r$  (a reta  $p$  em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do ponto  $O$  – para tal conduziu-se, por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), sobre a qual se mediu o **afastamento** do ponto  $O$ , a partir de  $O_2$ , o que nos permitiu determinar  $O'_r - O'_2$  é o ponto  $O$  rebatido no seu segundo rebatimento (o ponto  $O$  rebatido pelo rebatimento do plano  $\gamma$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $p_r$ . A reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) passa por  $O'_r$  e por  $F''_r$  (está definida por dois pontos).

Sobre a reta  $p_r$ , a partir de  $O'_r$ , mediram-se os 9 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto  $V$  ao plano  $\alpha$ ) e determinou-se  $V_r$  (note que se garantiu que o ponto  $V$  se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro, para que a pirâmide se situe no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro, como o enunciado refere expressamente). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $V$  e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta  $p$ .

### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide (os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , da base, e o vértice  $V$ ), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ACV]$  (que é, afinal, a face lateral  $[ACV]$ ), cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2C_2V_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice  $B$ . Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base, e a aresta lateral  $[BV]$ . Note que, em projeção frontal, apenas a face lateral  $[ACV]$  é visível. Em projeção frontal, a base  $[ABC]$  é invisível, bem como as faces laterais  $[ABV]$  e  $[BCV]$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente horizontal é a linha fechada [BCV] (que é, afinal, a face lateral [BCV]), cuja projeção horizontal é o polígono [B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice A. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [AB] e [AC], da base, e a aresta lateral [AV]. Note que, em projeção horizontal, apenas a face lateral [BCV] é visível. Em projeção horizontal, a base [ABC] é invisível, bem como as faces laterais [ABV] e [ACV].

#### Traçado:

Os dados (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) representou-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo [ABC], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo [ABC]), bem como a reta  $\rho$ , o plano  $\gamma$  e, ainda, todos os traçados relativos ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do vértice V).

## 571.

#### Dados:

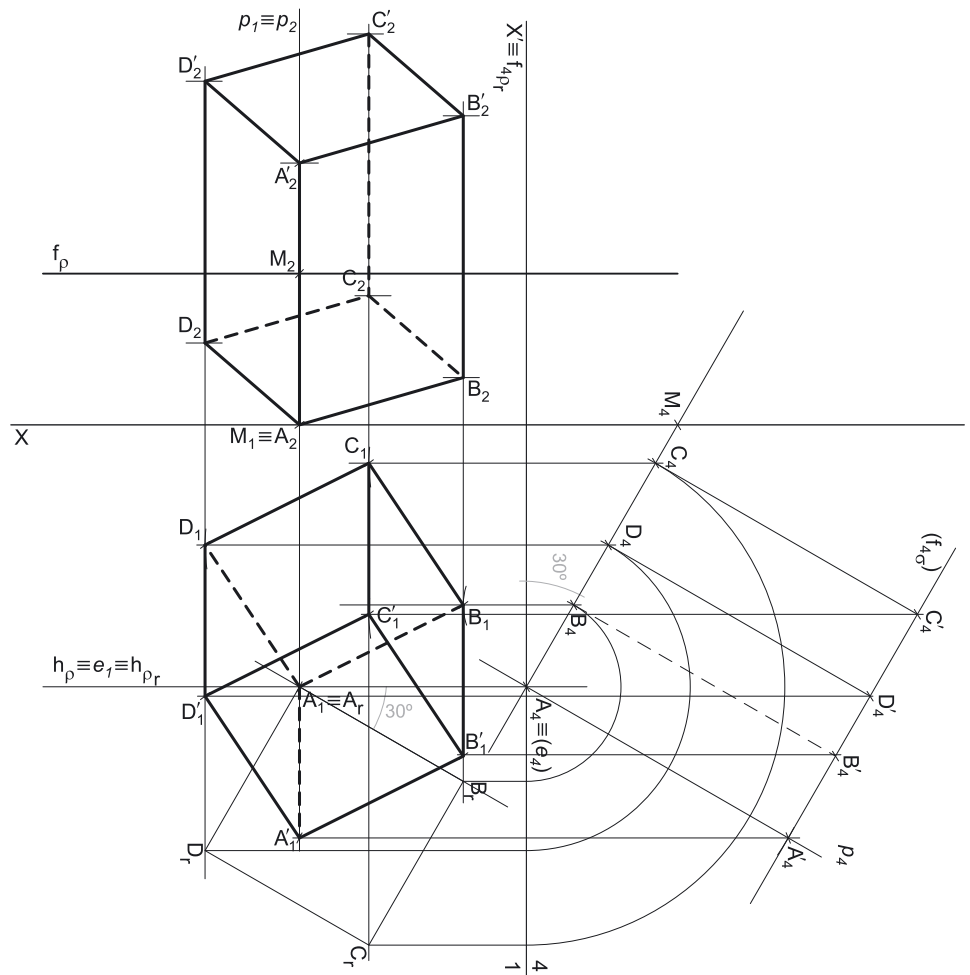
Em primeiro lugar, representou-se o traço frontal do plano  $\rho$ , em função dos dados. O plano  $\rho$  está definido por uma reta (o seu traço frontal –  $f_p$ ) e pela sua orientação (é dado o diedro que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção).

Note que é dado o **ângulo** que o lado [AB] do retângulo faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**. Além do mais, tendo em conta que  $h_p$  não foi dado nem sequer ainda foi determinado, esse ângulo, mesmo que fosse um ângulo em projeções (que não é), não poderia ainda ser marcado.

#### Resolução:

*Rebatimento do plano  $\rho$  e construção do quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza:*

O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo [ABC] (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Por outro lado, também o **ângulo** que o lado [AB] do retângulo faz com o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.



Note que se poderia ter optado pelo rebatimento do plano  $\rho$ , para o que seria conveniente (mas não absolutamente necessária), antes de mais, a determinação do seu traço horizontal. Assim, neste caso optou-se por uma situação diferente – optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante e, em seguida, rebater o plano  $\rho$  **como um plano projetante**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) ortogonal ao plano  $\rho$ , o que nos permite transformar o plano de rampa num plano de topo (um plano projetante frontal). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular às retas horizontais do plano  $\rho$  (que são retas fronto-horizontais), pelo que o eixo **X'** é perpendicular ao eixo **X** inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Note que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  será um plano projetante frontal (um plano ortogonal ao novo Plano Frontal de Projeção).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto **M**, qualquer, de  $f_{\rho}$ , e determinou-se a sua projeção no **plano 4**. Assim,  $M_4$  é a projeção do ponto **M** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $M_4$  ao eixo **X'** é igual à distância de  $M_2$  ao eixo **X** (que é 4 cm – a cota de **M**, que é a cota de  $f_{\rho}$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) tem necessariamente de passar por  $M_4$  (a nova projeção frontal do ponto **M**). Já temos um ponto para definir  $f_{4\rho}$  – falta-nos outro ponto ou uma direção.

É dado o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção (um ângulo de  $30^\circ$ ) e tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano de topo, o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção projeta-se em verdadeira grandeza no ângulo que o seu traço frontal ( $f_{4\rho}$ ) faz com o eixo **X'**. Nesse sentido, já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{4\rho}$  (o novo traço frontal do plano  $\rho$ ). Assim,  $f_{4\rho}$  (o traço do plano  $\rho$  no **plano 4**) passa por  $M_4$  e faz, com o eixo **X'**, um ângulo de  $30^\circ$  –  $f_{4\rho}$  está definido por um ponto (o ponto  $M_4$ ) e por uma direção (o ângulo que faz com o eixo **X'**).

Note que, das duas hipóteses que existem para marcar o ângulo de  $30^\circ$  a partir de  $M_4$ , aquela que a resolução apresenta é a que nos garante que o traço horizontal do plano  $\rho$  tem afastamento positivo (conforme o enunciado pede expressamente).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{\rho}$ ), porque é absolutamente necessário para se determinarem as projeções do ponto **A** (que é um ponto com cota nula e pertencente ao plano  $\rho$ ). Assim, para definir  $h_{\rho}$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ), que é uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço horizontal do plano ( $h_{\rho}$ ) é uma reta fronto-horizonta do plano (com cota nula), pelo que é necessariamente paralelo ao eixo **X** inicial – já temos uma direção para definir  $h_{\rho}$ . Falta-nos um ponto para definir  $h_{\rho}$ . Os dois traços do plano são concorrentes no eixo **X'**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definirmos o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{\rho}$ ) –  $h_{\rho}$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo **X'**) e por uma direção (é fronto-horizonta – é paralelo ao eixo **X**).

Finalmente, foi possível determinar as projeções do ponto **A** (o vértice inferior do quadrado), que é um ponto de  $h_{\rho}$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Por uma questão de economia de traçados, situou-se o ponto **A** no plano de perfil que passa pelo ponto **M** (o ponto que nos permitiu determinar  $f_{4\rho}$ ).

Em seguida, procedeu-se ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), como um plano projetante (um plano de topo). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_{\rho} \equiv e_1 \equiv h_{\rho r}$  ( $e_4$ , a projeção da charneira no **plano 4**, é um ponto no eixo **X'**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (paralelos ao **plano 4**).

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ . Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado **[AB]** faz com  $h_{\rho}$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) – é o ângulo que o segmento **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** faz com  $h_{\rho r}$ . Nesse sentido, por  $A_r$  conduziu-se uma reta fazendo, com  $h_{\rho r}$ , um ângulo de  $30^\circ$ . Note que é dado que o vértice **B** do quadrado se situa à direita do ponto **A** e que o quadrado se situa no  $1^\circ$  Diedro (para que o prisma se situe no  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente). Assim, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $30^\circ$  a partir de  $A_r$ , aquela que a resolução apresenta (que tem abertura para a direita) é a única que nos garante o exposto.

Sobre a reta suporte do segmento **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** mediram-se os 5 cm (o lado do quadrado) a partir de  $A_r$  e determinou-se  $B_r$ . A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos  $C_r$  e  $D_r$  (os outros dois vértices do quadrado).

### Inversão do rebatimento do plano $\rho$ e determinação das projeções do quadrado **[ABCD]**:

Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$  (como plano de topo), determinando-se as projeções dos pontos **C** e **D** (no novo diedro de projeção). Assim,  $C_4$  é a projeção do ponto **C** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. De forma semelhante,  $D_4$  é a projeção do ponto **D** no **plano 4** e situa-se necessariamente sobre  $f_{4\rho}$ , pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal. Note que os pontos **C** e **D**, na inversão dos respetivos rebatimentos, mantiveram os seus afastamentos (em relação ao **plano 4**).

Em seguida, tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **C** e **D**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).  $C_2$  é a projeção frontal do ponto **C** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $C_4$  ao eixo **X'**.  $D_2$  é a projeção frontal do ponto **D** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $D_2$  ao eixo **X** é igual à distância de  $D_4$  ao eixo **X'**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]** (no diedro de projeção inicial).

*Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:*

Em seguida, representou-se (no novo diedro de projeção) o plano  $\sigma$ , que é o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a base superior do prisma (o quadrado **[A'B'C'D']**). A distância entre os dois planos é a altura do prisma (que é 8 cm) e mede-se ortogonalmente aos dois planos. Assim, desenhou-se uma paralela a  $f_{4\rho}$ , situada 8 cm para cima de  $f_{4\rho}$ , que é  $f_{4\sigma}$  (o traço, no **plano 4**, do plano  $\sigma$ ). O plano  $\sigma$  é, assim, o plano paralelo ao plano  $\rho$  e que contém a base superior do prisma (a base **[A'B'C'D']**). Note que o plano  $\sigma$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço no **plano 4**), razão pela qual o traço do plano  $\sigma$  no **plano 4** se identificou entre parêntesis.

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano  $\rho$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano de topo, a ortogonalidade de qualquer reta em relação ao plano  $\rho$  é direta. Assim, qualquer aresta lateral do sólido tem a sua projeção no **plano 4** perpendicular a  $f_{4\rho}$  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a uma reta do plano  $\rho$  – o seu novo traço frontal) e tem, também, a sua projeção horizontal perpendicular a  $h_p$  (o que nos garante a ortogonalidade em relação a outra reta do plano  $\rho$  – o seu traço horizontal).

Assim, pelas projeções dos vértices do quadrado **[BCD]** (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das arestas laterais do prisma (ortogonais ao plano  $\rho$ ), o que nos permitiu determinar as duas projeções do sólido, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Note que os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'** (os vértices da base superior) foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções frontais (no **plano 4**), pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\sigma$  é também um plano projetante frontal.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos vértices da face superior do sólido (o quadrado **[A'B'C'D']**). Tendo em conta que, na mudança do diedro de projeção efetuada, **se mantiveram as cotas**, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**, precisamente a partir das respetivas cotas (que se mantiveram).

**A'<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **A'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **A'<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **A'<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.  
**B'<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **B'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **B'<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **B'<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.  
**C'<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **C'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **C'<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **C'<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.  
**D'<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **D'** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **D'<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **D'<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

*Determinação das projeções do prisma:*

A partir das projeções dos oito vértices do prisma (os vértices **A**, **B**, **C** e **D**, da base inferior, e os vértices **A'**, **B'**, **C'** e **D'**, da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABB'C'D'D]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice **C** e o vértice **A'**. O vértice **C**, por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base inferior, e a aresta lateral **[CC']**. O vértice **A'**, por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']** e **[A'D']**, da base superior, e a aresta lateral **[AA']**. Note que, em projeção frontal, a base superior (a base **[A'B'C'D']**) é visível, bem como as faces laterais **[AA'B'B]** e **[AA'D'D]**. A base inferior (a base **[ABCD]**) e as faces laterais **[BB'C'C]** e **[CC'D'D]** são invisíveis.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[BCDD'A'B']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – o vértice **C'** e o vértice **A**. O vértice **A**, por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base inferior, e a aresta lateral **[AA']**. O vértice **C'**, por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[B'C']** e **[C'D']**, da base superior, e a aresta lateral **[CC']**. Note que, em projeção horizontal, a base superior (a base **[A'B'C'D']**) é visível, bem como as faces laterais **[BB'C'C]** e **[CC'D'D]**. A base inferior (a base **[ABCD]**) e as faces laterais **[AA'B'B]** e **[AA'D'D]** são invisíveis.

**Traçado:**

Os dados (o traço frontal do plano  $\rho$ ) representou-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O traço horizontal do plano  $\rho$ , no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O quadrado **[ABCD]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado **[ABCD]**) e, ainda, da projeção do prisma no **plano 4**.

## 572.

### Dados:

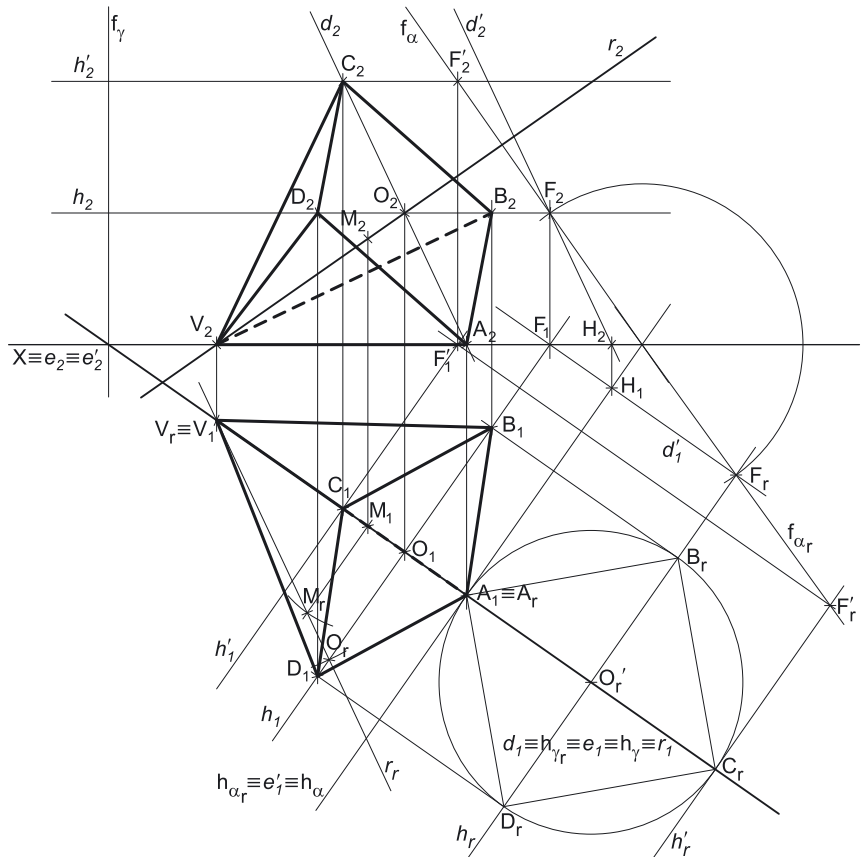
Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  é paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pelo que as suas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

### Resolução:

#### Determinação do plano que contém a base da pirâmide:

Em primeiro lugar, há que determinar os traços do plano que contém a base da pirâmide e que não são dados. Sabe-se, apenas, que a pirâmide é uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo é **ortogonal ao plano** que contém a base. Nesse sentido, sabe-se imediatamente que o plano  $\alpha$  é ortogonal à reta  $r$ , o que não é suficiente para determinarmos os traços do plano, pois não temos mais nenhum dado do plano  $\alpha$ .

No entanto, sabe-se que a altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide) está contido na reta  $r$ , pelo que o ponto  $O$  é um ponto da reta  $r$ . Assim, a distância do ponto  $V$  ao plano  $\alpha$  mede-se sobre a reta  $r$ . A reta  $r$  não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento  $[OV]$  (o eixo da pirâmide), que está contido na reta  $r$ , não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



Optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da reta  $r$  para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano  $\gamma$  (o plano projetante horizontal da reta  $r$ ) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é  $h_\gamma$  – tem-se imediatamente  $h_\gamma \equiv e_1 \equiv h_r$ .

O ponto  $V$  (o vértice da pirâmide, que é, na prática, o traço horizontal da reta  $r$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente,  $V_r \equiv V_1$ . Já temos um ponto (em rebatimento) para definir a reta  $r_r$  (a reta  $r$  em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento de um outro ponto qualquer da reta  $r$  – o ponto  $M$ , marcado arbitrariamente sobre a reta  $r$ . Para se rebater o ponto  $M$  conduziu-se, por  $M_1$  (a projeção horizontal do ponto  $M$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), sobre a qual se mediu a cota do ponto  $M$ , a partir de  $M_1$ , o que nos permitiu determinar  $M_r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r_r$ . A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $M_r$  e por  $V_r$  (está definida por dois pontos).

Sobre a reta  $r_r$ , a partir de  $V_r$ , mediram-se os 7 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto  $V$  ao plano  $\alpha$ ) e determinou-se  $O_r$  (note que se garantiu que o ponto  $O$  se situa no  $1^a$  Diedro, para que a pirâmide se situe no espaço do  $1^a$  Diedro, como o enunciado refere expressamente). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $O$  e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta  $r$ . O ponto  $O$  é, afinal, o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\alpha$ , pelo que o ponto  $O$  é necessariamente um ponto do plano  $\alpha$ .

Por fim, determinaram-se os traços do plano  $\alpha$  – o plano ortogonal à reta  $r$  que passa pelo ponto  $O$ . O plano  $\alpha$  tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta  $r$ . Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto  $O$ , o ponto  $O$  tem de pertencer ao plano  $\alpha$ , ou seja, o ponto  $O$  tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\alpha$ . Assim, em primeiro lugar há que conduzir, pelo ponto  $O$ , uma reta que pertença ao plano  $\alpha$  – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta  $r$ . Ora, as únicas situações em que a ortogonalidade entre retas é direta em projeções, são as situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção.

Assim, conduziu-se, pelo ponto  $O$ , uma reta horizontal (de nível)  $h$ , ortogonal à reta  $r$  – uma vez que a reta  $h$  é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta  $h$  e a reta  $r$  é direta em projeção horizontal, ou seja,  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e é perpendicular a  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ).

Para definir o plano  $\alpha$ , é necessário recorrer a outra reta do plano  $\alpha$  – uma reta que seja concorrente com a reta  $h$  e que seja igualmente ortogonal à reta  $r$ . Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$ , pois é a única situação em que é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta  $r$  e uma reta **concorrente** com a reta  $h$ . Essa reta frontal (de frente) do plano  $\alpha$  pode ser, por exemplo, o próprio traço frontal do plano –  $f_\alpha$ . Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $h$  (o ponto  $F$ ) e desenhou-se  $f_\alpha$ , ortogonal à reta  $r$ . O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) é uma reta frontal (paralela ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a ortogonalidade entre  $f_\alpha$  e a reta  $r$  é direta em projeção frontal. Assim, por  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ), conduziu-se  $f_\alpha$ , perpendicular a  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O plano  $\alpha$  está definido por duas retas concorrentes ortogonais à reta  $r$  – a reta  $h$  e  $f_\alpha$  (o seu traço frontal), concorrentes no ponto  $F$ . Já se garantiu a ortogonalidade do plano  $\alpha$  em relação à reta  $r$ . Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo à reta  $h$ , pois retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal do plano com cota nula).

O plano  $\alpha$ , definido pelos seus traços, é o plano que é ortogonal à reta  $r$  e que contém o ponto  $O$ . Assim, o plano  $\alpha$  é o plano que contém a base da pirâmide.

*Determinação dos elementos necessários à construção da base da pirâmide:*

Faltam-nos elementos para a construção do quadrado  $[ABCD]$  da base, pois, até ao momento, apenas temos o seu centro (o ponto  $O$ ) – não temos qualquer dado direto nem sobre um vértice do polígono, nem sobre a circunferência circunscrita ao polígono, por exemplo. No entanto, o enunciado refere, expressamente, que a diagonal  $[AC]$  do quadrado está contida numa reta de maior declive do plano  $\alpha$ . Tendo em conta que o ponto  $O$  é necessariamente um ponto da diagonal  $[AC]$ , há que conduzir, pelo ponto  $O$ , uma reta de maior declive do plano  $\alpha$ .

Assim, por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) conduziu-se  $d_1$  (a projeção horizontal da reta  $d$ ), perpendicular a  $h_\alpha$  (a reta  $d$  é uma reta de maior declive do plano  $\alpha$ , pelo que a sua projeção horizontal ( $d_1$ ) é perpendicular ao traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ). Nesta situação particular,  $d_1$  (a projeção horizontal da reta  $d$ ) fica coincidente com  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ), bem como com o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), etc.

Para definirmos a reta  $d$ , são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $d$  passa pelo ponto  $O$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $d$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $d$  pertence ao plano  $\alpha$ , pelo que tem de ter os seus traços sobre os traços homónimos do plano  $\alpha$  (**condição para que uma reta pertença a um plano**). Traço frontal da reta  $d$  situa-se claramente fora dos limites do papel, mas não o seu traço horizontal, que tem de se situar sobre  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ).

Por outro lado, é expressamente referido no enunciado que a aresta lateral  $[AV]$  tem cota nula. Assim, o ponto  $A$ , tem cota nula porque é um extremo da aresta  $[AV]$ . O ponto  $A$  é também um dos vértices da base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ), pelo que o ponto  $A$  pertence ao plano  $\alpha$ . Assim, o ponto  $A$  é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). Por fim, o ponto  $A$  é ainda um ponto da reta  $d$  (um extremo da diagonal  $[AC]$ , que está contida na reta  $d$ ). Desta forma, o ponto  $A$  é necessariamente o ponto da reta  $d$  que tem cota nula – o ponto  $A$  é o traço horizontal da reta  $d$ . Nesse sentido, determinaram-se as projeções do ponto  $A$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $d$ . A reta  $d$  está, assim, definida por dois pontos (o ponto  $O$  e o ponto  $A$ ), o que nos permitiu desenhar a sua projeção frontal ( $d_2$ ).

*Determinação das projeções da base da pirâmide:*

Já temos os elementos necessários para se proceder à construção do quadrado  $[ABCD]$  – o seu centro (o ponto  $O$ ) e um dos seus vértices (o ponto  $A$ ). No entanto, o plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  (o plano que contém o quadrado) para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e'_1 \equiv h_{\alpha_r}$  ( $e'_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

O ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$ . Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é um ponto da charneira e, por isso, é um ponto fixo). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $h$ ), que é um ponto de  $f_\alpha$ . Para rebater o ponto  $F$  conduziu-se, por  $F_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ), desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , determinando-se  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Em seguida, desenhou-se  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), passando por  $F_r - f_{\alpha_r}$  está definido por dois pontos (o ponto  $F_r$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano).

Para rebater o ponto  $O$  é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto  $O$  pertença – a reta  $h$ , neste caso. Para definirmos a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto (o ponto  $F_r$ ), para definirmos a reta  $h_r$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_r$ . A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) passa por  $F_r$  e é paralela a  $h_{\alpha_r} - h_r$  está definida por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha_r}$ ). Em seguida, conduziu-se, por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ), uma perpendicular à charneira (que é  $h_\alpha$ ) e que corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal à charneira do rebatimento ( $h_\alpha$ ) que contém o ponto  $O$  (bem como o arco do seu rebatimento) – o ponto  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido) é o ponto de interseção da reta  $h_r$  com a perpendicular à charneira que passa por  $O_1$ .

Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado (em verdadeira grandeza) e efetuou-se a construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu determinar os pontos  $B_r$ ,  $C_r$  e  $D_r$  (os outros três vértices do quadrado, em rebatimento). Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

*Inversão do rebatimento do plano  $\alpha$  e determinação das projeções da base da pirâmide:*

A inversão do rebatimento dos pontos  $B$  e  $D$  processou-se com o recurso à reta  $h$ , a reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  que nos permitiu rebater o ponto  $O$  e à qual os dois pontos pertencem – a reta  $h$  é a reta suporte da diagonal  $[BD]$  do quadrado e as suas projeções já são conhecidas.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, por  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ). A projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ) situa-se sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ). De forma semelhante, por  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto  $D$ ). A projeção frontal do ponto  $D$  ( $D_2$ ) situa-se sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ).

A inversão do rebatimento do ponto  $C$  processou-se com o recurso à reta  $h'$ , a reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , à qual o ponto  $C$  pertence. A reta  $h'_r$  (a reta  $h'$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $C_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha r}$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h'$ , tendo em conta que para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , pelo que já temos uma direção para definir a reta  $h'$  – falta-nos um ponto para definir a reta  $h'$  (em projeções).

O ponto  $F'$  é o traço frontal da reta  $h'$  e é um ponto do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha}$ ). Assim,  $F'_r$  é um ponto de  $f_{\alpha r}$  e o ponto  $F'$  tem de se situar sobre  $f_{\alpha}$ . Para se determinarem as projeções do ponto  $F'$  conduziu-se, por  $F'_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $F'$ ) – o ponto de interseção dessa perpendicular com o eixo  $X$  é  $F'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F'$ ), pois o ponto  $F'$  tem afastamento nulo. A projeção frontal do ponto  $F'$  ( $F'_2$ ) situa-se sobre o traço frontal do plano ( $f_{\alpha}$ ), pois o ponto  $F'$  é um ponto de  $f_{\alpha}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $h'$  – a reta  $h'$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $F'$ ) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta  $h'$ .

Por fim, por  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h'_1$  (a projeção horizontal da reta  $h'$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ). A projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ) situa-se sobre  $h'_2$  (a projeção frontal da reta  $h'$ ).

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide (os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , da base, e o vértice  $V$ ), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[ABCV]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2V_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice  $D$ . Este vértice, por ser o vértice de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AD]$  e  $[CD]$ , da base, e a aresta lateral  $[DV]$ . Em projeção frontal, a base  $[ABCD]$  é **visível**, bem como as faces laterais  $[ADV]$  e  $[CDV]$ . Já as faces laterais  $[ABV]$  e  $[BCV]$  são **invisíveis**, em projeção frontal. Nesse sentido, a aresta lateral  $[BV]$  é invisível em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[BADV]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1A_1D_1V_1]$ . Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice  $C$ . Este vértice, por ser o vértice de **maior cota** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[BC]$  e  $[CD]$ , da base, e a aresta lateral  $[CV]$ . Em projeção horizontal, a base  $[ABCD]$  é **visível**, bem como as faces laterais  $[BCV]$  e  $[CDV]$ . Já as faces laterais  $[ABV]$  e  $[ADV]$  são **invisíveis**, em projeção horizontal. Nesse sentido, a aresta lateral  $[AV]$  é invisível em projeção horizontal. Note que parte da projeção horizontal desta aresta está oculta por uma aresta que é visível (a aresta lateral  $[CV]$ ), pelo que a invisibilidade da aresta  $[AV]$  (em projeção horizontal) é apenas parcial.

#### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. Os traços do plano  $\alpha$ , no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. O quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\gamma$  (que nos permitiram determinar as projeções do ponto  $D$ ), da reta  $h$  (que nos permitiu determinar os traços do plano  $\alpha$ ), da reta  $d$  (que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $A$ ) e, ainda, de todos os traçados referentes do rebatimento ao plano  $\alpha$  (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado  $[ABCD]$ ), bem como, ainda, da própria construção do quadrado em verdadeira grandeza.

## 19

## PLANOS TANGENTES ÀS SUPERFÍCIES CÔNICA E CILÍNDRICA

## 573.

Por **reta tangente a uma superfície num ponto** entende-se toda a reta que é tangente, nesse ponto, a qualquer curva que passe por esse ponto e que esteja contida na superfície.

## 574.

Por **plano tangente a uma superfície num ponto** entende-se o lugar geométrico das retas tangentes à superfície nesse ponto.

## 575.

Se o plano  $\theta$  é tangente a uma superfície cônica num ponto **P**, sabe-se que:

1. o plano  $\theta$  é tangente à superfície ao longo da geratriz que contém o ponto **P** (a **geratriz de contacto** ou **geratriz de tangência**);
2. o plano  $\theta$  contém necessariamente o **vértice da superfície** (pois qualquer geratriz contém o vértice da superfície);
3. o plano  $\theta$  é tangente à diretriz da superfície num ponto e corta o plano da diretriz segundo uma reta tangente à diretriz.

## 576.

**Dados:**

A geratriz ao longo da qual um dado plano é tangente a uma superfície cônica chama-se **geratriz de contacto** ou **geratriz de tangência**.

## 577.

**Dados:**

A afirmação é **verdadeira**. De facto, qualquer plano tangente a uma superfície cônica é tangente à superfície ao longo de uma geratriz – qualquer plano tangente a uma superfície cônica contém, assim, uma geratriz da superfície (a geratriz de contacto ou de tangência). Uma vez que todas as geratrizes contêm o vértice da superfície, então qualquer plano tangente a uma superfície cônica contém necessariamente o vértice da superfície (pois o vértice da superfície é um ponto da geratriz de contacto, ou de tangência, que, por sua vez, está contida no plano).

O vértice da superfície verifica, assim, a **condição para que um ponto pertença a um plano** – o vértice pertence a uma reta que pertence ao plano (essa reta é a geratriz de contacto).

## 578.

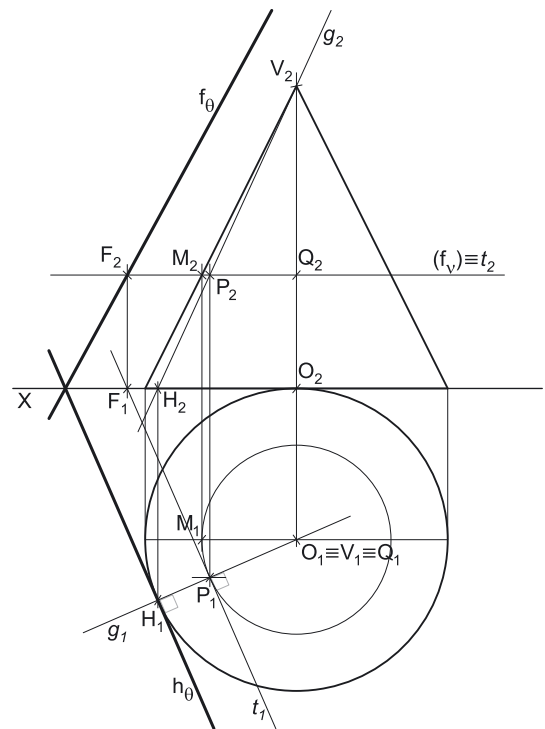
**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o cone pelas suas projeções, em função dos dados. Trata-se de um cone de revolução, cuja base é horizontal, pelo que o ponto **O** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice do cone) se situam necessariamente na mesma reta projetante horizontal, pois o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta vertical). Por outro lado, uma vez que o cone tem 8 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que a base tem cota nula (está contida no Plano Horizontal de Projeção), o vértice do cone tem 8 cm de cota ( $8 + 0 = 8$ ).

*Determinação das projeções do ponto P:*

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **P**, pertencente à superfície lateral do cone e com as coordenadas pretendidas. Atendendo a que a base do cone está contida num plano horizontal (o Plano Horizontal de Projeção), determinou-se previamente o lugar geométrico dos pontos da superfície lateral do cone que têm 3 cm de cota (a cota do ponto **P**). Esse lugar geométrico é a circunferência resultante da interseção da superfície lateral do sólido com um plano horizontal (de nível  $v$ , com 3 cm de cota). Assim, representou-se o plano  $v$ , pelo seu traço frontal, que se identificou entre parêntesis, pois o plano  $v$  não tem traço horizontal. Em seguida, determinou-se o ponto **Q**, o ponto de interseção do plano  $v$  com o eixo do cone – o ponto **Q** é o centro dessa circunferência e as suas projeções determinaram-se de forma direta, pois trata-se da interseção entre uma reta projetante horizontal (a reta que contém o eixo do cone) e um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).

O raio da circunferência determinou-se com o recurso ao ponto de interseção do plano  $v$  com uma geratriz qualquer do cone – o ponto **M** (que é o ponto em que o plano  $v$  corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cone). O ponto **M** determinou-se a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Em seguida, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência (com centro em **Q**<sub>1</sub> e raio **Q**<sub>1</sub>**M**<sub>1</sub>). O ponto **P** é o ponto dessa circunferência que tem 5 cm de afastamento e que se situa à esquerda do eixo do sólido (como o enunciado pede expressamente).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Resolução:

Pretende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cone no ponto **P**.

Qualquer plano tangente a uma superfície cônica num ponto é tangente à superfície ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da geratriz **g**, que contém o ponto **P** – a geratriz **g** está definida por dois pontos (o ponto **V** e o ponto **P**). Note que se determinou ainda o ponto **H** (o traço horizontal da geratriz), que é um ponto da base e é, também, um ponto que define a reta **g**. A geratriz **g** já é uma reta do plano  $\theta$  (o plano tangente pretendido). Já temos uma reta do plano  $\theta$  (a reta **g**), mas uma única reta é insuficiente para definirmos o plano.

Assim, recorreu-se a uma outra reta do plano  $\theta$  – a reta **t**, que é uma reta tangente à superfície lateral do cone no ponto **P**. A reta **t** é, na prática, a reta de interseção do plano  $v$  (o plano que nos permitiu determinar as projeções do ponto **P**) com o plano tangente pretendido. A reta **t**, sendo tangente a essa circunferência no ponto **P**, é necessariamente perpendicular ao raio da circunferência no ponto **P** (o raio **[QP]**), o que se verifica em projeção horizontal. A reta **t** está, assim, definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (é perpendicular ao raio **[QP]**). Já temos outra reta do plano  $\theta$ . Note que a reta **t** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$ .

O plano  $\theta$  está, agora, definido por duas retas – as retas **t** e **g**. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . O traço horizontal do plano  $\theta$  (**h<sub>0</sub>**) passa pelo ponto **H** (o traço horizontal da geratriz **g**) e é paralelo à reta **t** (que é uma reta horizontal do plano  $\theta$ ). Note que **h<sub>0</sub>** é tangente à base do cone (que pode ser considerada a diretriz da superfície) no ponto **H** (o ponto da geratriz **g** que se situa na base). O traço horizontal do plano (**h<sub>0</sub>**) está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é paralelo à reta **t** e, portanto, perpendicular ao raio **[OH]**).

Em seguida, determinou-se o ponto **F**, o traço frontal da reta **t**. O traço frontal do plano  $\theta$  (**f<sub>0</sub>**) passa pelo ponto **F** e é concorrente com **h<sub>0</sub>** no eixo **X – f<sub>0</sub>** está, assim, definido por dois pontos (o ponto **F** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\theta$ ).

## Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cone no ponto **P** (os traços do plano  $\theta$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $v$ , da circunferência necessária à determinação das projeções do ponto **P**, da geratriz **g** e da reta **t**).

## 579.

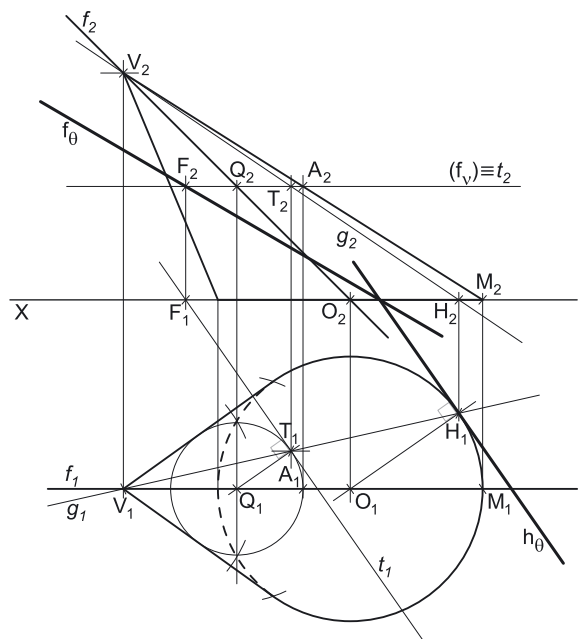
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o cone pelas suas projeções, em função dos dados. A reta **f** é a reta frontal (de frente) que contém o eixo do sólido. Assim, o ponto **O** (o centro da base do cone) é o traço horizontal da reta **f**, pois é o ponto de interseção de **f** com o plano da base (o Plano Horizontal de Projeção). Por fim, atendendo a que o cone tem 6 cm de altura e que a altura de um cone é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base (o Plano Horizontal de Projeção), que tem cota nula, o vértice do cone tem 6 cm de cota ( $0 + 6 = 6$ ) – o vértice **V**, do cone, é o ponto da reta **f** que tem 6 cm de cota (que é a distância do ponto **V** ao Plano Horizontal de Projeção).

### Determinação das projeções do ponto **T**:

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **T**, pertencente à superfície lateral do cone e com as coordenadas pretendidas. Atendendo a que a base do cone está contida num plano horizontal (o Plano Horizontal de Projeção), determinou-se previamente o lugar geométrico dos pontos da superfície lateral do cone que têm 3 cm de cota (a cota do ponto **T**). Esse lugar geométrico é a circunferência resultante da interseção da superfície lateral do sólido com um plano horizontal (de nível)  $v$ , com 3 cm de cota. Assim, representou-se o plano  $v$ , pelo seu traço frontal, que se identificou entre parêntesis, pois o plano  $v$  não tem traço horizontal. Em seguida, determinou-se o ponto **Q**, o ponto de interseção do plano  $v$  com o eixo do cone – o ponto **Q** é o centro dessa circunferência e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **f**) e um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).

O raio da circunferência determinou-se com o recurso ao ponto de interseção do plano  $v$  com uma geratriz qualquer do cone – o ponto **A** (que é o ponto em que o plano  $v$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone). Esta geratriz está definida por dois pontos – o ponto **V** (o vértice do cone) e o ponto **M** (o ponto de menor abcissa da base do cone). O ponto **A** determinou-se a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Em seguida, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência (com centro em **Q<sub>1</sub>** e raio **Q<sub>1</sub>A<sub>1</sub>**). O ponto **T** é o ponto dessa circunferência que tem 4 cm de afastamento e que é visível em projeção horizontal (tem de se situar na parte visível da superfície lateral do cone, em projeção horizontal). Sublinha-se que o outro ponto da circunferência que tem 4 cm de afastamento é necessariamente invisível em projeção horizontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cone no ponto **T**.

Qualquer plano tangente a uma superfície cônica num ponto é tangente à superfície ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da geratriz **g**, que contém o ponto **T** – a geratriz **g** está definida por dois pontos (o ponto **V** e o ponto **T**). Note que se determinou ainda o ponto **H** (o traço horizontal da geratriz), que é um ponto da base e é, também, um ponto que define a reta **g**. A geratriz **g** já é uma reta do plano  $\theta$  (o plano tangente pretendido). Já temos uma reta do plano  $\theta$  (a reta **g**), mas uma única reta é insuficiente para definirmos o plano.

Assim, recorreu-se a uma outra reta do plano  $\theta$  – a reta **t**, que é uma reta tangente à superfície lateral do cone no ponto **T**. A reta **t** é, na prática, a reta de interseção do plano  $\nu$  (o plano que nos permitiu determinar as projeções do ponto **T**) com o plano tangente pretendido. A reta **t**, sendo tangente a essa circunferência no ponto **T**, é necessariamente perpendicular ao raio da circunferência no ponto **T** (o raio **[QT]**), o que se verifica em projeção horizontal. A reta **t** está, assim, definida por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (é perpendicular ao raio **[QT]**). Já temos outra reta do plano  $\theta$ . Note que a reta **t** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$ .

O plano  $\theta$  está, agora, definido por duas retas – as retas **t** e **g**. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . O traço horizontal do plano  $\theta$  (**h<sub>θ</sub>**) passa pelo ponto **H** (o traço horizontal da geratriz **g**) e é paralelo à reta **t** (que é uma reta horizontal do plano  $\theta$ ). Note que **h<sub>θ</sub>** é tangente à base do cone (que pode ser considerada a diretriz da superfície) no ponto **H** (o ponto da geratriz **g** que se situa na base). O traço horizontal do plano (**h<sub>θ</sub>**) está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é paralelo à reta **t** e, portanto, perpendicular ao raio **[OH]**).

Em seguida, determinou-se o ponto **F**, o traço frontal da reta **t**. O traço frontal do plano  $\theta$  (**f<sub>θ</sub>**) passa pelo ponto **F** e é concorrente com **h<sub>θ</sub>** no eixo **X – f<sub>θ</sub>** está, assim, definido por dois pontos (o ponto **F** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\theta$ ).

### Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cone no ponto **T** (os traços do plano  $\theta$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\nu$ , da circunferência necessária à determinação das projeções do ponto **T**, da geratriz **g** e da reta **t**).

## 580.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o cone pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano  $\nu$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone. O plano  $\nu$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou entre parêntesis).

O plano  $\nu$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (**f<sub>ν</sub>**) passa necessariamente por **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**).

Em seguida, desenharam-se as projeções da geratriz **g**, que está definida por dois pontos – o ponto **V** (o vértice do cone) e o ponto **A** (o ponto de maior afastamento da base do cone), o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **P** – o ponto **P** é o ponto de geratriz **g** que tem 4 cm de cota.

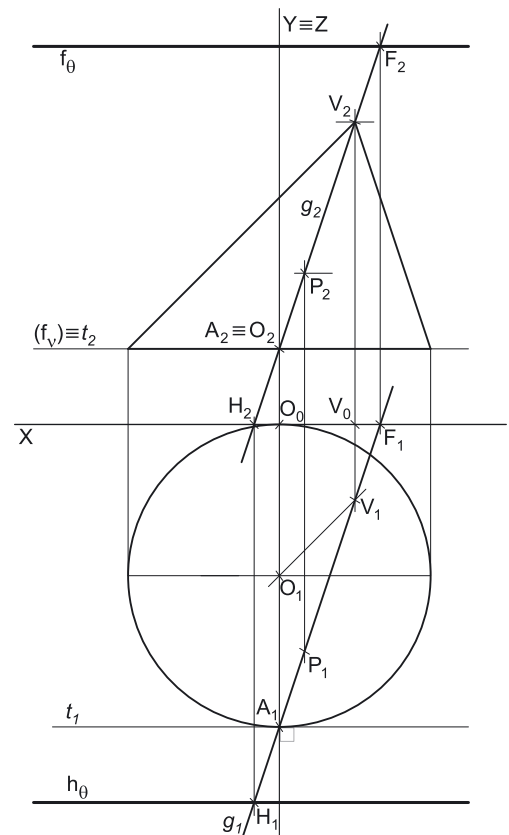
### Resolução:

Pretende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cone no ponto **P**.

Qualquer plano tangente a uma superfície cônica num ponto é tangente à superfície ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, a geratriz **g** (a geratriz que contém o ponto **P**) é, imediatamente, a geratriz de contacto (ou de tangência). A geratriz **g** já é uma reta do plano  $\theta$  (o plano tangente pretendido).

Recorreu-se a uma outra reta do plano  $\theta$  – a reta **t**, que é uma reta tangente à superfície lateral do cone no ponto **A** (o ponto da geratriz do cone que se situa na base). A reta **t** é, na prática, a reta de interseção do plano tangente pretendido com o plano que contém a base do sólido (o plano  $\nu$ ). A reta **t** está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é perpendicular ao raio da base no ponto **A** – é perpendicular ao segmento **[OA]**). Tendo em conta que o segmento **[OA]** é um segmento de reta de topo, a reta **t** é necessariamente uma reta fronto-horizontal. A reta **t** está, assim, definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é perpendicular ao raio **[OA]**). Já temos outra reta do plano  $\theta$  – a reta **t** (que é, simultaneamente uma reta horizontal e uma reta frontal do plano  $\theta$ ).

O plano  $\theta$  está definido por uma reta oblíqua (a geratriz **g**) e uma reta fronto-horizontal (a reta **t**), pelo que o plano  $\theta$  é, assim, um plano de rampa. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Para tal determinou-se o traço frontal da geratriz **g** – o ponto **F**. O traço frontal do plano  $\theta$  (**f<sub>θ</sub>**) passa pelo ponto **F** (o traço frontal da geratriz **g**) e é paralelo à reta **t** (que é uma reta fronto-horizontal do plano  $\theta$ ). O traço frontal do plano (**f<sub>θ</sub>**) está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **g**. O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto **H** (o traço horizontal da geratriz **g**) e é paralelo à reta **t** (que é uma reta fronto-horizontal do plano  $\theta$ ). O traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ) está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

### Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). A geratriz **g**, sendo dada, representou-se igualmente a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cone no ponto **P** (os traços do plano  $\theta$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares – caso do plano  $\nu$ , do eixo **Y = Z** (que é uma linha de referência), e da reta **t**.

## 581.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o cone pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou entre parêntesis).

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente por **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**).

Trata-se de um cone de revolução, cuja base é frontal (de frente), pelo que o ponto **O** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice do cone) se situam necessariamente na mesma reta projetante frontal, pois o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta de topo). A base do cone é visível em projeção frontal, pelo que o vértice do cone tem afastamento inferior à base. Por outro lado, o cone tem 6 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base), pelo que a distância do vértice do cone (o ponto **V**) à base do cone (o plano  $\varphi$ ) é 6 cm. Uma vez que o plano  $\varphi$  tem 7 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**), o ponto **V** (o vértice do cone) tem 1 cm de afastamento ( $7 - 6 = 1$ ).

### Determinação das projeções do ponto **T**:

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **T**, pertencente à superfície lateral do cone e com as coordenadas pretendidas. Atendendo a que a base do cone está contida num plano frontal (o plano  $\varphi$ ), determinou-se previamente o lugar geométrico dos pontos da superfície lateral do cone que têm 5 cm de afastamento (o afastamento do ponto **T**). Esse lugar geométrico é a circunferência resultante da interseção da superfície lateral do sólido com um plano frontal (de frente)  $\varphi'$ , com 5 cm de afastamento. Assim, representou-se o plano  $\varphi'$ , pelo seu traço horizontal, que se identificou entre parêntesis, pois o plano  $\varphi$  não tem traço frontal. Em seguida, determinou-se o ponto **Q**, o ponto de interseção do plano  $\varphi$  com o eixo do cone – o ponto **Q** é o centro dessa circunferência e as suas projeções determinaram-se de forma direta, pois trata-se da interseção entre uma reta projetante frontal (a reta que contém o eixo do cone) e um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

O raio da circunferência determinou-se com o recurso ao ponto de interseção do plano  $\varphi$  com uma geratriz qualquer do cone – o ponto **M** (que é o ponto em que o plano  $\varphi$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone). O ponto **M** determinou-se a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da circunferência (com centro em **Q**<sub>2</sub> e raio **Q**<sub>2</sub>**M**<sub>2</sub>). O ponto **T** é o ponto dessa circunferência que tem 2 cm de cota. Note que o ponto **T** se situa necessariamente no plano de perfil que contém o eixo do cone.

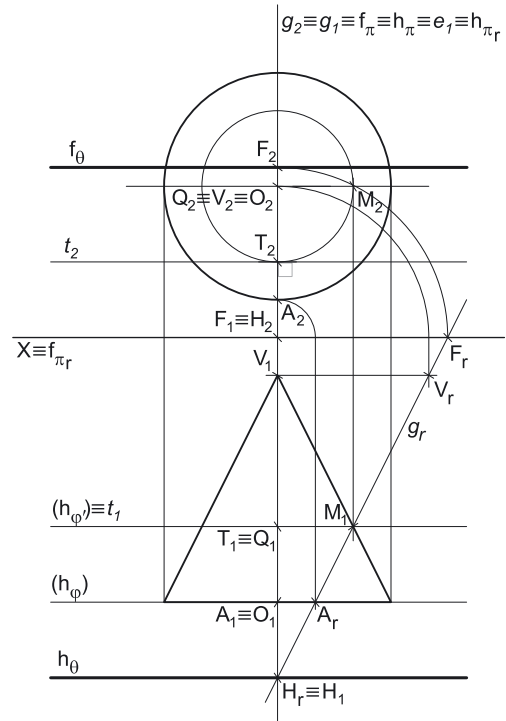
### Resolução:

Pretende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cone no ponto **T**.

Qualquer plano tangente a uma superfície cônica num ponto é tangente à superfície ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da geratriz **g**, que contém o ponto **T** – a geratriz **g** está definida por dois pontos (o ponto **V** e o ponto **T**). Tenha em conta que a geratriz **g** é necessariamente uma geratriz de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Apesar disso, foi possível determinar um outro ponto da geratriz **g**, de forma imediata – o ponto **A**, que é o ponto da geratriz **g** que se situa na base do cone. De facto, apesar de as projeções da geratriz **g** não verificarem o **Critério de Reversibilidade**, é possível garantir que o ponto **A** é um ponto da geratriz. Assim, na prática, temos três pontos da geratriz **g** – os pontos **V**, **T** e **A**.

Assim, a geratriz **g** já é uma reta do plano  $\theta$  (o plano tangente pretendido). Já temos uma reta do plano  $\theta$  (a reta **g**), mas uma única reta é insuficiente para definirmos o plano.

Assim, recorreu-se a uma outra reta do plano  $\theta$  – a reta **t**, que é uma reta tangente à superfície lateral do cone no ponto **T**. A reta **t** é, na prática, a reta de interseção do plano  $\varphi'$  (o plano que contém a circunferência que nos permitiu determinar as projeções do ponto **T**) com o plano tangente pretendido. A reta **t**, sendo tangente a essa circunferência no ponto **T**, é necessariamente perpendicular ao raio dessa circunferência no ponto **T** (o raio [**QT**]), o que se verifica em projeção frontal. A reta **t** está, assim, definida por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (é perpendicular ao raio [**QT**]). Já temos outra reta do plano  $\theta$ . Note que a reta **t** é necessariamente uma reta fronto-horizontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano  $\theta$  está, agora, definido por duas retas – as retas  $t$  e  $g$ . O plano  $\theta$  está definido por uma reta de perfil (a geratriz  $g$ ) e uma reta fronto-horizontal (a reta  $t$ ), pelo que o plano  $\theta$  é, assim, um plano de rampa.

Em seguida, há que determinar os traços do plano  $\theta$ , para o que é necessário a determinação dos traços da geratriz  $g$  nos planos de projeção. Tendo em conta que as projeções da geratriz  $g$  não verificam o **CrITÉRIO de Reversibilidade** (por se tratar de uma reta de perfil), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil para o Plano Horizontal de Projeção. Assim, identificou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a geratriz  $g$ ) pelos seus traços, de forma imediata, bem como a charneira do rebatimento, que foi o traço horizontal do plano ( $f_\pi$ ).

Em seguida, rebateram-se os pontos  $V$  e  $A$ , o que nos permitiu determinar  $V_r$  (o ponto  $V$  rebatido) e  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido). Pelos pontos  $A_r$  e  $V_r$  conduziu-se  $g_r$  (a geratriz  $g$ , rebatida). Por fim, determinaram-se os seus traços em rebatimento, que se situam sobre os traços homónimos do plano  $\pi$  (em rebatimento) –  $H_r$  situa-se sobre  $h_\pi$  e  $F_r$  situa-se sobre  $f_\pi$ . Por fim, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$  e determinaram-se as projeções dos traços da reta  $p$ . O ponto  $H$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $H_1 \equiv H_r$ .

Por fim, desenharam-se os traços do plano  $\theta$ . O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) passa pelo ponto  $F$  (o traço frontal da geratriz  $g$ ) e é paralelo à reta  $t$  (que é uma reta fronto-horizontal do plano  $\theta$ ) –  $f_\theta$  está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto  $H$  (o traço horizontal da geratriz  $g$ ) e é paralelo à reta  $t$  (que é uma reta fronto-horizontal do plano  $\theta$ ) –  $h_\theta$  está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cone no ponto  $T$  (os traços do plano  $\theta$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , da circunferência necessária à determinação das projeções do ponto  $T$ , da geratriz  $g$ , da reta  $t$  e, ainda, de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ ).

## 582.

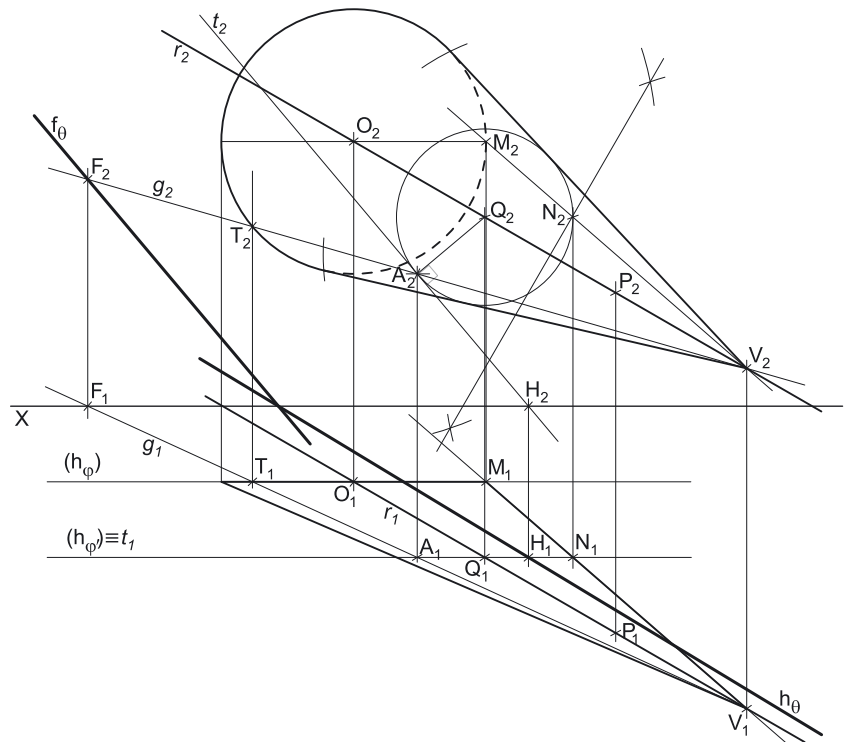
#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o cone pelas suas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  é a reta que contém o eixo do sólido – a reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). O plano  $\varphi$  é o plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento que contém a base do cone. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. O ponto  $O$  (o centro da base do cone) é o ponto de interseção da reta  $r$  (a reta suporte do eixo do sólido) com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base do cone) – o ponto  $O$  foi determinado diretamente a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Por fim, atendendo a que o cone tem 6 cm de altura e que a altura de um cone é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base (o plano  $\varphi$ ), que tem 2 cm de afastamento, o vértice do cone tem 8 cm de afastamento ( $2 + 6 = 8$ ) – o vértice  $V$ , do cone, é o ponto da reta  $r$  que tem 8 cm de afastamento.

#### Determinação das projeções do ponto $A$ :

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $A$ , pertencente à superfície lateral do cone e com as coordenadas pretendidas. Atendendo a que a base do cone está contida num plano frontal (de frente), determinou-se previamente o lugar geométrico dos pontos da superfície lateral do cone que têm 4 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $A$ ). Esse lugar geométrico é a circunferência resultante da interseção da superfície lateral do sólido com um plano frontal (de frente)  $\varphi'$ , com 4 cm de afastamento. Assim, representou-se o plano  $\varphi'$ , pelo seu traço horizontal, que se identificou entre parêntesis, pois o plano  $\varphi'$  não tem traço frontal. Em seguida, determinou-se o ponto  $Q$ , o ponto de interseção do plano  $\varphi'$  com o eixo do cone – o ponto  $Q$  é o centro dessa circunferência e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $r$ ) e um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O raio da circunferência determinou-se com o recurso ao ponto de interseção do plano  $\varphi'$  com uma geratriz qualquer do cone – o ponto **N** (que é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone). Esta geratriz está definida por dois pontos – o ponto **V** (o vértice do cone) e o ponto **M** (o ponto de menor abcissa da base do cone). Note que a geratriz **[MV]** não estava representada em projeção frontal, pelo que foi necessário determinar a sua projeção frontal, para se determinarem, em seguida, as projeções do ponto **N**. O ponto **N** determinou-se a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da circunferência (com centro em  $Q_2$  e raio  $\overline{Q_2N_2}$ ). O ponto **A** é o ponto dessa circunferência que tem 3,5 cm de cota e que é visível em projeção frontal (tem de se situar na parte visível da superfície lateral do cone, em projeção frontal). Sublinha-se que o outro ponto da circunferência que tem 3,5 cm de cota é necessariamente invisível em projeção frontal.

## Resolução:

Pretende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cone no ponto **A**.

Qualquer plano tangente a uma superfície cônica num ponto é tangente à superfície ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da geratriz **g**, que contém o ponto **A** – a geratriz **g** está definida por dois pontos (o ponto **V** e o ponto **A**). Note que se determinou ainda o ponto **T**, que é o ponto da geratriz **g** que se situa na base do cone (e é, também, um ponto que define a reta **g**). A geratriz **g** já é uma reta do plano  $\theta$  (o plano tangente pretendido). Já temos uma reta do plano  $\theta$  (a reta **g**), mas uma única reta é insuficiente para definirmos o plano.

Assim, recorreu-se a uma outra reta do plano  $\theta$  – a reta **t**, que é uma reta tangente à superfície lateral do cone no ponto **A**. A reta **t** é, na prática, a reta de interseção do plano  $\varphi'$  (o plano que nos permitiu determinar as projeções do ponto **A**) com o plano tangente pretendido. A reta **t**, sendo tangente a essa circunferência no ponto **A**, é necessariamente perpendicular ao raio da circunferência no ponto **A** (o raio **[QA]**), o que se verifica em projeção frontal. A reta **t** está, assim, definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é perpendicular ao raio **[QA]**). Já temos outra reta do plano  $\theta$ . Note que a reta **t** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$ .

O plano  $\theta$  está, agora, definido por duas retas – as retas **t** e **g**. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ , para o que foi necessário determinar o traço frontal da geratriz **g** (o ponto **F**). O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) passa pelo ponto **F** (o traço frontal da geratriz **g**) e é paralelo à reta **t** (que é uma reta frontal do plano  $\theta$ ). O traço frontal do plano ( $f_\theta$ ) está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é paralelo à reta **t**).

Em seguida, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **t**. O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto **H** e é concorrente com  $f_\theta$  no eixo **X** –  $h_\theta$  está, assim, definido por dois pontos (o ponto **H** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\theta$ ).

## Traçado:

Os dados (as projeções da reta **r** e do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cone no ponto **A** (os traços do plano  $\theta$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , da circunferência necessária à determinação das projeções do ponto **A**, da projeção frontal da geratriz **[MV]**, da geratriz **g** e da reta **t**).

## 583.

O método geral para a determinação dos planos tangentes a uma superfície cônica, passando por um ponto exterior executa-se sequencialmente em cinco etapas:

1. Conduzir, pelo ponto dado e pelo vértice da superfície, uma reta – a reta **i** (que é a reta de interseção entre os dois planos tangentes).
2. Determinar o ponto de interseção da reta **i** com o plano da base – o ponto **I**.
3. Conduzir, pelo ponto **I**, as retas tangentes à diretriz da superfície (ou base do cone) – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos planos tangentes com o plano da diretriz ou da base).
4. Determinar as geratrizes de contacto (ou geratrizes de tangência) – as geratrizes **g** e **g'**.
5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas:
  - o plano  $\theta$  está definido pelas retas **i**, **t** e **g**;
  - o plano  $\theta'$  está definido pelas retas **i**, **t'** e **g'**.

## 584.

**Dados:**

esentaram-se o ponto **P** e o cone, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Trata-se de um cone de revolução, cuja base é horizontal, pelo que o ponto **O** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice do cone) se situam necessariamente na mesma reta projetante horizontal, pois o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta vertical). Por outro lado, uma vez que o cone tem 7 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que a base tem cota nula (está contida no Plano Horizontal de Projeção), o vértice do cone tem 8 cm de cota ( $7 + 0 = 7$ ).

**Resolução:**

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que contêm o ponto **P**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado (o ponto **P**) e pelo vértice do cone, uma reta (reta **i**). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta **i**, a reta que passa pelo ponto **V** (o vértice do cone) e pelo ponto **P** (o ponto dado) – a reta **i** está, assim, definida por dois pontos (os pontos **V** e **P**). A reta **i** é a reta de interseção entre os dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta **i** com o plano da base, que é o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **I**, o ponto de interseção da reta **i** com o plano que contém a base do cone (o Plano Horizontal de Projeção). Neste caso, o ponto **I** é, imediatamente, o traço horizontal da reta **i** (o ponto **H**), facto que se assinalou convenientemente no desenho.

3. Conduzir, pelo ponto **I**, as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da diretriz da superfície (ou base do cone). Tendo em conta que a base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção, as retas tangentes à base do cone são, imediatamente, os traços horizontais dos dois planos tangentes –  $h_0$  e  $h_{0'}$ . Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas  $h_0$  e  $h_{0'}$  são tangentes à base do cone, respetivamente (**T** e **T'** são os pontos de tangência). As retas  $h_0$  e  $h_{0'}$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (ponto esse que, neste caso, é **I**, a projeção horizontal do ponto **I**). Atendendo a que o ponto **I** é o traço horizontal da reta **i**, a reta  $h_0$  está definida por dois pontos – os pontos **T** e **H**. De forma semelhante, a reta  $h_{0'}$  está também definida por dois pontos – os pontos **T'** e **H**.

Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes **g** e **g'**. Nesse sentido, desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz **g** está definida por dois pontos – os pontos **V** e **T**. A geratriz **g'** está igualmente definida por dois pontos – os pontos **V** e **T'**.

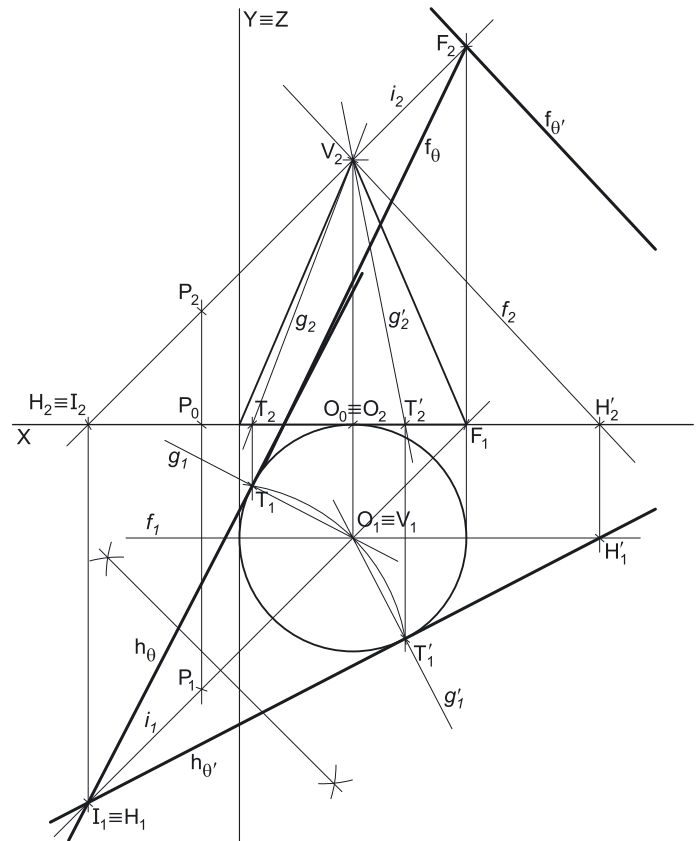
5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas **i**,  $h_0$  e **g** e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas **i**,  $h_{0'}$  e **g'**. Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Tendo em conta que os traços horizontais dos dois planos já foram determinados, há, agora, que determinar os traços frontais dos dois planos tangentes, para o que foi necessário determinar previamente o traço frontal da reta **i** – o ponto **F**.

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_0$ ), que é concorrente com  $h_0$  no eixo **X** e passa pelo ponto **F** (o traço frontal da reta **i**). O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_0$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X**) e o ponto **F**.

Por fim, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{0'}$ ), que é concorrente com  $h_{0'}$  no eixo **X**. No entanto, este ponto situa-se fisicamente fora dos limites do papel, tal como o traço frontal da reta **g'**. Assim, para definirmos  $f_{0'}$  (o traço frontal do plano  $\theta'$ ) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção e temos, apenas, um único ponto (o ponto **F**) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Face ao exposto, conclui-se que os dados do plano (as retas **i**, **g'** e  $h_{0'}$ ) são insuficientes para determinar o elemento em falta, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\theta'$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se à reta **f**, como reta auxiliar do plano. A reta **f** é a reta frontal (de frente) do plano  $\theta'$  que passa pelo ponto **V** (o vértice do cone) e está definida por dois pontos – o ponto **V** e o ponto **H'** (o seu traço horizontal, que se situa sobre  $h_{0'}$ ). Atendendo a que retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{0'}$  –  $f_{0'}$  está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano – é paralelo a reta **f**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $i$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'**, da reta  $f$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 585.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P** e o cone, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que contém o ponto **P**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado (o ponto **P**) e pelo vértice do cone, uma reta (reta  $i$ ). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $i$ , a reta que passa pelo ponto **V** (o vértice do cone) e pelo ponto **P** (o ponto dado) – a reta  $i$  está, assim, definida por dois pontos (os pontos **V** e **P**). A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone. Note que o ponto **V** e o ponto **P** têm o mesmo afastamento, pelo que a reta  $i$  é necessariamente uma reta frontal (de frente).

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base, que é o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **I**, o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano que contém a base do cone (o Plano Horizontal de Projeção). Neste caso, o ponto **I** é, imediatamente, o traço horizontal da reta  $i$  (o ponto **H**), facto que se assinalou convenientemente no desenho.

3. Conduzir, pelo ponto **I**, as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da diretriz da superfície (ou base do cone). Tendo em conta que a base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção, as retas tangentes à base do cone são, imediatamente, os traços horizontais dos dois planos tangentes –  $h_0$  e  $h_{0'}$ . Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas  $h_0$  e  $h_{0'}$  são tangentes à base do cone, respetivamente (**T** e **T'** são os pontos de tangência). As retas  $h_0$  e  $h_{0'}$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (ponto esse que, neste caso, é **I**, a projeção horizontal do ponto **I**). Atendendo a que o ponto **I** é o traço horizontal da reta  $i$ , a reta  $h_0$  está definida por dois pontos – os pontos **T** e **H**. De forma semelhante, a reta  $h_{0'}$  está também definida por dois pontos – os pontos **T'** e **H**.

Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos **V** e **T**. A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos **V** e **T'**.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $h_0$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $h_{0'}$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

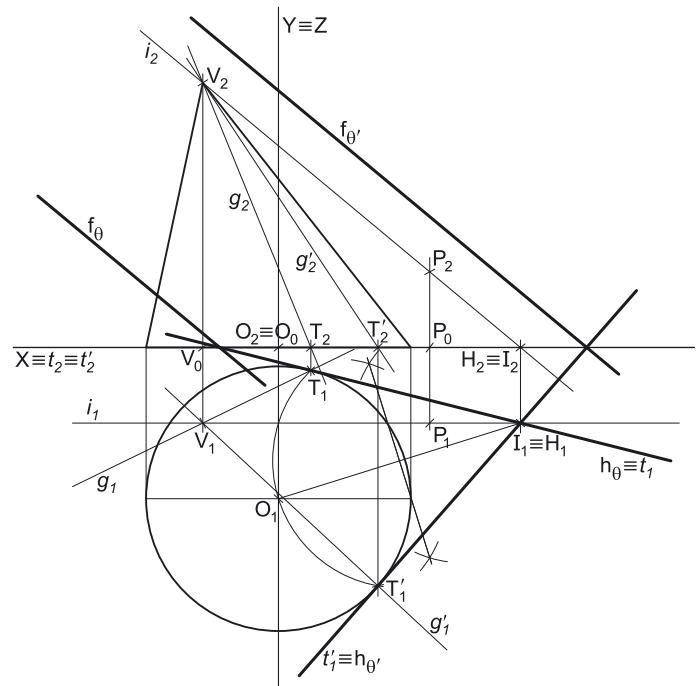
Tendo em conta que os traços horizontais dos dois planos já foram determinados, há, agora, que determinar os traços frontais dos dois planos tangentes. Nesse sentido, sublinha-se que a reta  $i$  é uma reta frontal (de frente) comum aos dois planos, ou seja, os dois planos tangentes têm, em comum, a “família” das retas frontais (de frente), representada, no desenho, pela reta  $i$ .

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que é concorrente com  $h_0$  no eixo **X** e que é paralelo à reta  $i$  – o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo **X**) e por uma direção (é paralelo à reta  $i$ ).

De forma semelhante, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), que é concorrente com  $h_{0'}$  no eixo **X** e que é paralelo à reta  $i$  – o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) está igualmente definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo **X**) e por uma direção (é paralelo à reta  $i$ ).

## Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $i$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).



## 586.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **G** e cone, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou entre parêntesis).

O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**).

**Resolução:**

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que contêm o ponto **G**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado (o ponto **G**) e pelo vértice do cone, uma reta (reta  $i$ ). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $i$ , a reta que passa pelo ponto **V** (o vértice do cone) e pelo ponto **G** (o ponto dado) – a reta  $i$  está definida por dois pontos (os pontos **V** e **G**). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base (o plano  $v$ ) – o ponto **I**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **I**, o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano  $v$  (o plano que contém a base do cone). O ponto **I** (o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano  $v$ ) determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois trata-se da interseção entre uma reta **não projetante** (a reta  $i$ ) com um **plano projetante frontal** (o plano  $v$ ).

3. Conduzir, pelo ponto **I**, as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da diretriz da superfície (ou base do cone). Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base, respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é **I**, a projeção horizontal do ponto **I**). A reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) que está definida por dois pontos – os pontos **T** e **I**. A reta  $t'$  é outra reta horizontal (de nível) que está igualmente definida por dois pontos – os pontos **T'** e **I**.

Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos **V** e **T**. A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos **V** e **T'**.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t'$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

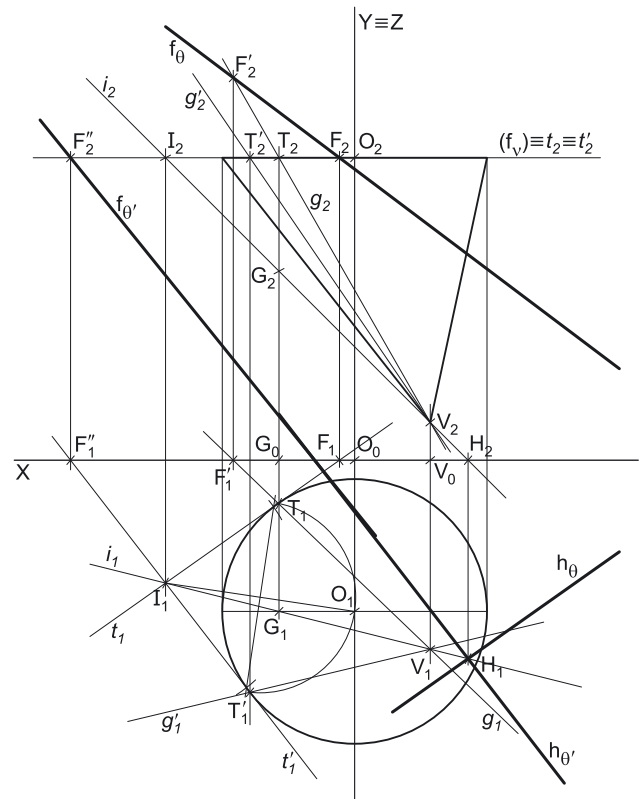
Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da reta  $i$  – o ponto **H**. Note que o traço frontal da reta  $i$  se situa necessariamente fora dos limites do papel.

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . A reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto **H** e é paralelo à reta  $t$  – está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (a direção da reta  $t$ ).

O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é concorrente com o traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ) no eixo **X** – no entanto, esse ponto também se situa fora dos limites do papel. Apesar disso, temos mais duas retas do plano  $\theta$  – a reta  $t$  e a reta  $g$ . Assim, determinaram-se os traços frontais das duas retas – o ponto **F** (o traço frontal da reta  $t$ ) e o ponto **F'** (o traço frontal da geratriz  $g$ ). Já temos dois pontos para definir o traço frontal do plano  $\theta$  –  $f_\theta$  está, assim, definido por dois pontos (os pontos **F** e **F'**).

Por fim, determinaram-se os traços do plano  $\theta'$ . A reta  $t'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta'$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Assim, o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ) passa pelo ponto **H** e é paralelo à reta  $t'$  – está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (a direção da reta  $t'$ ).

O traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) é necessariamente concorrente com o traço horizontal do plano ( $h_{\theta'}$ ) no eixo **X**, pelo que já temos um ponto para definir  $h_{\theta'}$ . Faltava-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $t'$  (outra reta que define o plano  $\theta'$ ) – o ponto **F''**. Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\theta'$  –  $f_{\theta'}$  está definido por dois pontos (o ponto **F''** e o ponto de concorrência dos traços do plano, que se situa no eixo **X**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $v$ , da reta  $i$ , das retas  $t$  e  $t'$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 587.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **A** e cone, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou entre parêntesis).

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente por  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**).

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que contém o ponto **A**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado (o ponto **A**) e pelo vértice do cone, uma reta (a reta  $i$ ). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $i$ , a reta que passa pelo ponto **V** (o vértice do cone) e pelo ponto **A** (o ponto dado) – a reta  $i$  está definida por dois pontos (os pontos **V** e **A**). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

Note que o ponto **V** e o ponto **A** têm o mesmo afastamento e, também, a mesma cota, pelo que a reta  $i$  é necessariamente uma reta fronto-horizontal. Tendo em conta que a reta  $i$  (fronto-horizontal) é a reta de interseção entre os dois planos tangentes, conclui-se que os dois planos têm, em comum, a “família” das retas fronto-horizontais (a reta de interseção entre dois planos secantes é necessariamente uma reta da única “família” de retas que os dois planos têm em comum). Os dois planos contêm, assim, a “família” das retas fronto-horizontais.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base (o plano  $\varphi$ ) – o ponto **I**. Acontece que a reta  $i$  é paralela ao plano da base (o plano  $\varphi$ ), pelo que, **de uma forma prática**, não é possível determinar (na folha de papel) o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano  $\varphi$ . No entanto, **de uma forma conceptual**, podemos considerar que a reta  $i$  intersesta o plano  $\varphi$  num ponto do infinito (um ponto situado a distância infinita). Assim, considerou-se que o ponto **I** já foi determinado – situa-se **no infinito** (é um **ponto impróprio**).

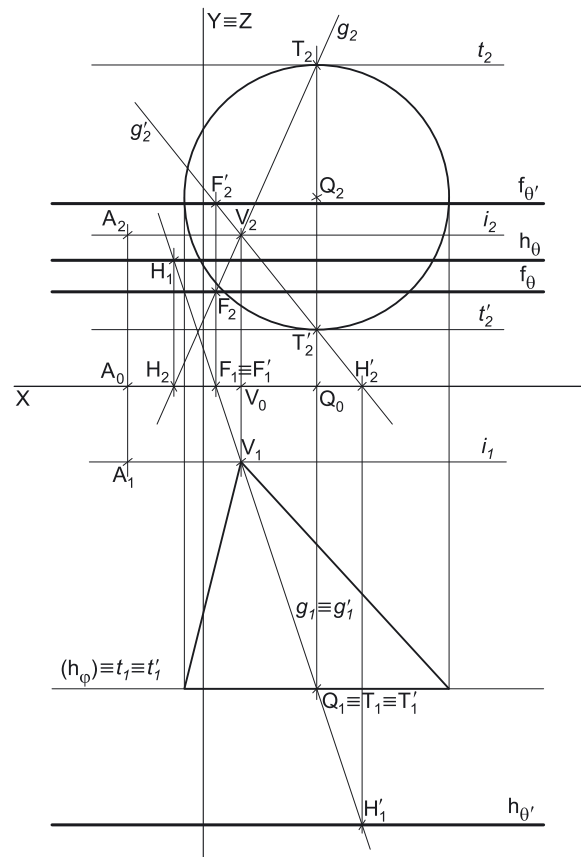
3. Conduzir, pelo ponto **I**, as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da diretriz da superfície (ou base do cone). Nesse sentido, pelo ponto **I** (que se situa no infinito), conduziram-se as retas tangentes à base do cone (as retas  $t$  e  $t'$ ) – estas duas retas são concorrentes entre si no ponto **I**, que se situa no infinito, ou seja, são concorrentes num ponto do infinito. Assim, as retas  $t$  e  $t'$  são necessariamente **paralelas entre si** (retas paralelas são retas concorrentes num ponto do infinito).

Por outro lado, as retas  $t$  e  $t'$  são também concorrentes com a reta  $i$  nesse mesmo ponto (o ponto **I**), que se situa no infinito. Dessa forma, conclui-se que as três retas (as retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$ ) são necessariamente paralelas entre si. Em função de tudo o que atrás se expôs, determinaram-se as retas  $t$  e  $t'$ , determinando, previamente, os pontos **T** e **T'** (os pontos de tangência), que são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base, respetivamente. As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é  $i_2$ , a projeção frontal da reta  $i$ ).

A reta  $t$  é uma reta fronto-horizontal que está definida por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (é paralela à reta  $i$  – é fronto-horizontal). A reta  $t'$  é outra reta fronto-horizontal, que está igualmente definida por um ponto (o ponto **T'**) e por uma direção (é também paralela à reta  $i$  – é fronto-horizontal).

Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes. Sublinha-se que é possível concluir, nesta etapa, que os dois planos tangentes são necessariamente **planos de rampa**, pois cada um deles está definido por duas retas fronto-horizontais, com cotas e afastamento distintos.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos **V** e **T**. A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos **V** e **T'**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i'$ ,  $t'$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Nesse sentido, determinaram-se os traços da geratriz  $g$  – os pontos  $F$  e  $H$ . Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ , que é um plano de rampa. Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) é uma reta fronto-horizontal (paralelo às retas  $i$  e  $t$ ) e passa pelo ponto  $H - h_\theta$  está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). Por sua vez, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é outra reta fronto-horizontal (paralelo às retas  $i$  e  $t$ ) e passa pelo ponto  $F - f_\theta$  está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Por fim, determinaram-se os traços da geratriz  $g'$  – os pontos  $F'$  e  $H'$ . Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta'$ , que outro um plano de rampa. Assim, o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ) é uma reta fronto-horizontal (paralelo às retas  $i'$  e  $t'$ ) e passa pelo ponto  $H' - h_{\theta'}$  está definido por um ponto (o ponto  $H'$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). Por sua vez, o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) é outra reta fronto-horizontal (também paralelo às retas  $i'$  e  $t'$ ) e passa pelo ponto  $F' - f_{\theta'}$  está definido por um ponto (o ponto  $F'$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\theta$ , da reta  $i$ , das retas  $t$  e  $t'$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 588.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto  $P$  e cone, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

#### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que contêm o ponto  $P$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, passando por um ponto exterior**.

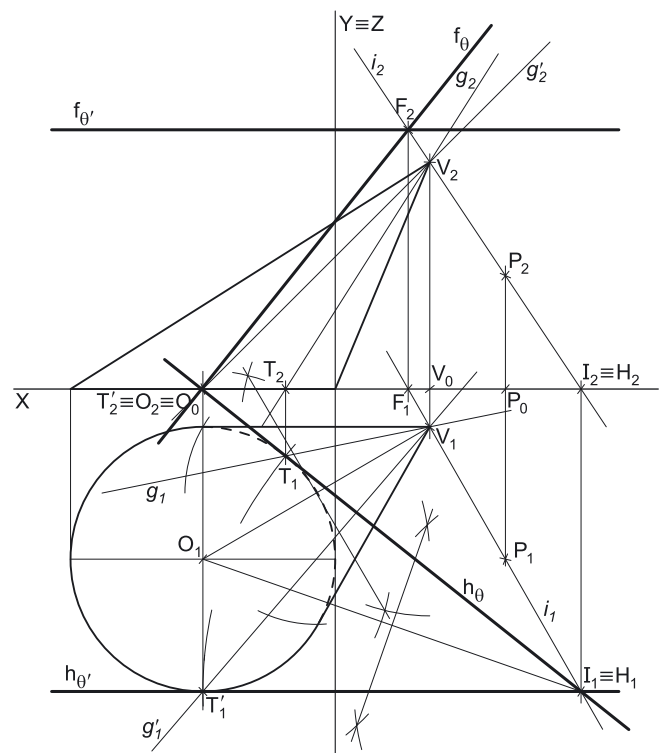
1. Conduzir, pelo ponto dado (o ponto  $P$ ) e pelo vértice do cone, uma reta (a reta  $i$ ). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $i$ , a reta que passa pelo ponto  $V$  (o vértice do cone) e pelo ponto  $P$  (o ponto dado) – a reta  $i$  está definida por dois pontos (os pontos  $V$  e  $P$ ). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base, que é o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano que contém a base do cone (o Plano Horizontal de Projeção). Neste caso, o ponto  $I$  é, imediatamente, o traço horizontal da reta  $i$  (o ponto  $H$ ), facto que se assinalou convenientemente no desenho.

3. Conduzir, pelo ponto  $I$ , as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da diretriz da superfície (ou base do cone). Tendo em conta que a base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção, as retas tangentes à base do cone são, imediatamente, os traços horizontais dos dois planos tangentes –  $h_\theta$  e  $h_{\theta'}$ . Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $h_\theta$  e  $h_{\theta'}$  são tangentes à base do cone, respetivamente ( $T$  e  $T'$  são os pontos de tangência). As retas  $h_\theta$  e  $h_{\theta'}$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (ponto esse que, neste caso, é  $I_1$ , a projeção horizontal do ponto  $I$ ). Atendendo a que o ponto  $I$  é o traço horizontal da reta  $i$ , a reta  $h_\theta$  está definida por dois pontos – os pontos  $T$  e  $H$ . De forma semelhante, a reta  $h_{\theta'}$  está também definida por dois pontos – os pontos  $T'$  e  $H$ .

Sublinha-se que o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ) é uma reta fronto-horizontal, o que nos permite concluir que o plano  $\theta'$  é um plano de rampa (contém a reta  $i$ , que é uma reta oblíqua, e contém a “família” das retas fronto-horizontais). Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T$ . A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T'$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $h_0$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $h_0'$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Tendo em conta que os traços horizontais dos dois planos já foram determinados, há, agora, que determinar os traços frontais dos dois planos tangentes, para o que foi necessário determinar previamente o traço frontal da reta  $i$  – o ponto  $F$ .

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que é concorrente com  $h_0$  no eixo  $X$  e passa pelo ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $i$ ). O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X$ ) e o ponto  $F$ .

Por fim, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), que é fronto-horizontal (o plano  $\theta'$  é um plano de rampa) e que passa pelo ponto  $F$ . Assim, desenhou-se  $f_{\theta'}$  (o traço frontal do plano  $\theta'$ ), que está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

### Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $i$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 589.

O método geral para a determinação dos planos tangentes a uma superfície cônica, paralelos a uma reta dada executa-se sequencialmente em cinco etapas:

1. Conduzir, pelo vértice da superfície, uma reta paralela à reta dada – a reta  $i$  (que é a reta de interseção entre os dois planos tangentes).
2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base – o ponto  $I$ .
3. Conduzir, pelo ponto  $I$ , as retas tangentes à diretriz da superfície (ou base do cone) – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos planos tangentes com o plano da diretriz ou da base).
4. Determinar as geratrizes de contacto (ou geratrizes de tangência) – as geratrizes  $g$  e  $g'$ .
5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas:
  - o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t$  e  $g$ ;
  - o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t'$  e  $g'$ .

## 590.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cone bem como a reta  $r$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

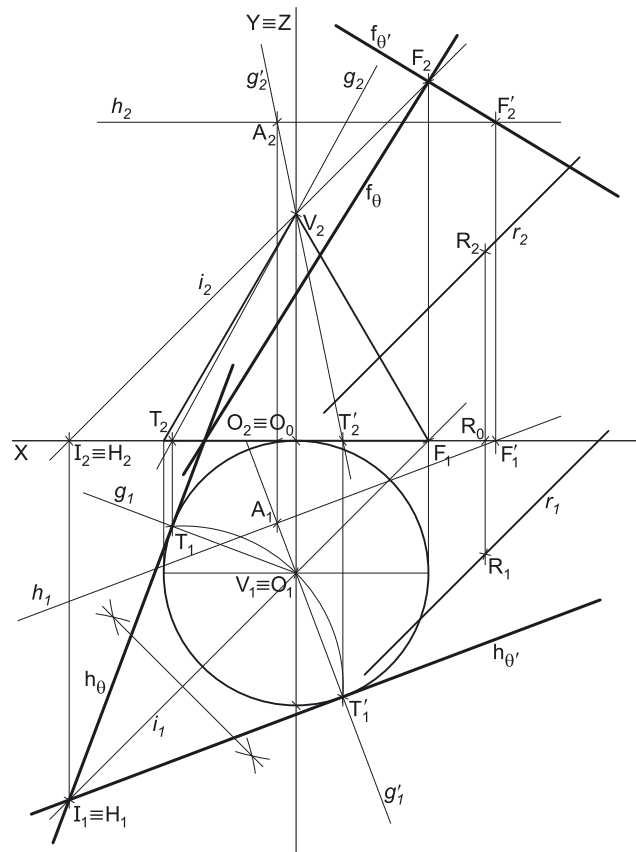
Trata-se de um cone de revolução, cuja base é horizontal, pelo que o ponto  $O$  (o centro da base) e o ponto  $V$  (o vértice do cone) se situam necessariamente na mesma reta projetante horizontal, pois o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta vertical). Por outro lado, uma vez que o cone tem 6 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que a base tem cota nula (está contida no Plano Horizontal de Projeção), o vértice do cone tem 6 cm de cota ( $6 + 0 = 6$ ).

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que são paralelos à reta  $r$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, pelo vértice do cone, uma reta paralela à reta dada (a reta  $i$ ). A reta  $i$  é a reta paralela à reta  $r$  e que passa pelo ponto  $V$ . A reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $V$ ) e uma direção (é paralela à reta  $r$ ). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da diretriz (ou plano da base), que é o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano que contém a base do cone (o Plano Horizontal de Projeção). Neste caso, o ponto  $I$  é, imediatamente, o traço horizontal da reta  $i$  (o ponto  $H$ ), facto que se assinalou convenientemente no desenho.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

3. Conduzir, pelo ponto **I**, as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da diretriz da superfície (ou base do cone). Tendo em conta que a base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção, as retas tangentes à base do cone são, imediatamente, os traços horizontais dos dois planos tangentes –  $h_\theta$  e  $h_{\theta'}$ . Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas  $h_\theta$  e  $h_{\theta'}$  são tangentes à base do cone, respetivamente (**T** e **T'** são os pontos de tangência). As retas  $h_\theta$  e  $h_{\theta'}$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (ponto esse que, neste caso, é **I**, a projeção horizontal do ponto **I**). Atendendo a que o ponto **I** é o traço horizontal da reta  $i$ , a reta  $h_\theta$  está definida por dois pontos – os pontos **T** e **H**. De forma semelhante, a reta  $h_{\theta'}$  está também definida por dois pontos – os pontos **T'** e **H**.

Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos **V** e **T**. A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos **V** e **T'**.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $h_\theta$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $h_{\theta'}$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Tendo em conta que os traços horizontais dos dois planos já foram determinados, há, agora, que determinar os traços frontais dos dois planos tangentes, para o que foi necessário determinar previamente o traço frontal da reta  $i$  – o ponto **F**.

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que é concorrente com  $h_\theta$  no eixo **X** e passa pelo ponto **F** (o traço frontal da reta  $i$ ). O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X**) e o ponto **F**.

Por fim, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), que é concorrente com  $h_{\theta'}$  no eixo **X**. No entanto, este ponto situa-se fisicamente fora dos limites do papel, tal como o traço frontal da reta  $g'$ . Assim, para definirmos  $f_{\theta'}$  (o traço frontal do plano  $\theta'$ ) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção e temos, apenas, um único ponto (o ponto **F**) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Face ao exposto, conclui-se que os dados do plano (as retas  $i$ ,  $g'$  e  $h_{\theta'}$ ) são insuficientes para determinar o elemento em falta, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\theta'$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se à reta  $h$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $h$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta'$ , que é concorrente com a reta  $g'$  num ponto **A**. A reta  $h$  está, assim, definida por um ponto (o ponto **A** e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\theta'$  – é paralela a  $h_{\theta'}$ ). Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta  $h$ , o ponto **F'** – já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $f_{\theta'}$  (o traço frontal do plano  $\theta'$ ). Assim,  $f_{\theta'}$  está definido por dois pontos – o ponto **F** e o ponto **F'**.

### Traçado:

Os dados (as projeções do cone e da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $i$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'**, da reta  $h$  ou, ainda, do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

## 591.

### Dados:

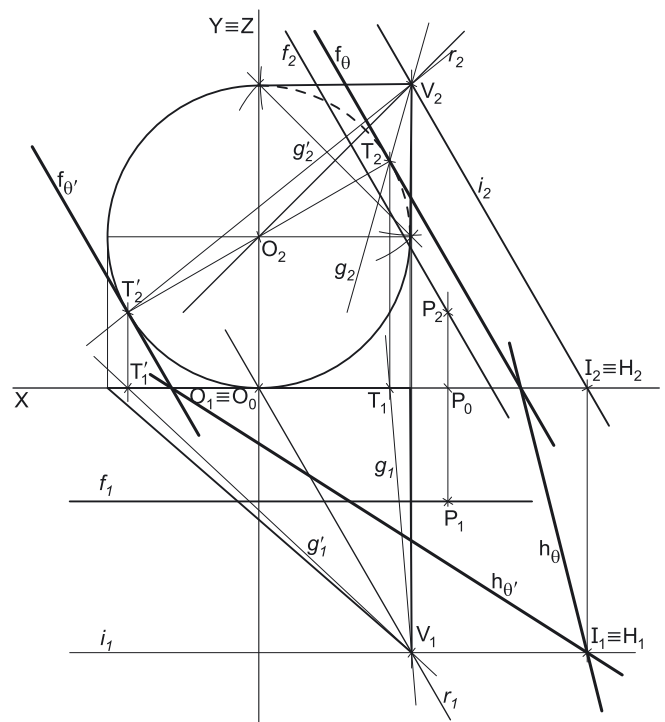
Em primeiro lugar, representaram-se o cone bem como a reta  $f$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

A base do cone é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base do cone te, necessariamente 4 cm de raio (o raio da base é igual à cota do ponto **O**). Na prática, a base do cone é tangente ao eixo **X**. Por outro lado, uma vez que o cone tem 7 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que a base tem afastamento nulo (está contida no Plano Frontal de Projeção), o vértice do cone tem 7 cm de afastamento ( $7 + 0 = 7$ ). O ponto **V** é, assim, o ponto da reta  $r$  que tem 7 cm de afastamento.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que são paralelos à reta  $f$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, pelo vértice do cone, uma reta paralela à reta dada (a reta  $i$ ). A reta  $i$  é a reta paralela à reta  $f$  e que passa pelo ponto **V**. A reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto **V**) e uma direção (é paralela à reta  $f$ ). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da diretriz (ou plano da base), que é o Plano Frontal de Projeção. Acontece que a reta  $i$  é paralela ao plano da base (o Plano Frontal de Projeção), pelo que, **de uma forma prática**, não é possível determinar (na folha de papel) o ponto de interseção da reta  $i$  com o Plano Frontal de Projeção (o traço frontal da reta  $i$ ). No entanto, **de uma forma conceptual**, podemos considerar que a reta  $i$  interseca o Plano Frontal de Projeção num ponto do infinito (um ponto situado a distância infinita). Assim, considerou-se que o ponto  $I$  já foi determinado – situa-se **no infinito** (é um **ponto impróprio**).

3. Conduzir, pelo ponto  $I$ , as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base do cone. Nesse sentido, pelo ponto  $I$  (que se situa no infinito), conduziram-se as retas tangentes à base do cone (as retas  $t$  e  $t'$ ) – estas duas retas são concorrentes entre si no ponto  $I$ , que se situa no infinito, ou seja, são concorrentes num ponto do infinito. Assim, as retas  $t$  e  $t'$  são necessariamente **paralelas entre si** (retas paralelas são retas concorrentes num ponto do infinito).

Por outro lado, as retas  $t$  e  $t'$  são também concorrentes com a reta  $i$  nesse mesmo ponto (o ponto  $I$ ), que se situa no infinito. Dessa forma, conclui-se que as três retas (as retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$ ) são necessariamente paralelas entre si. Tendo em conta que a base do cone está contida no Plano Frontal de Projeção, as retas tangentes à base do cone (as retas  $t$  e  $t'$ ) são, imediatamente, os traços frontais dos dois planos tangentes –  $f_0$  e  $f_0'$ . Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $f_0$  e  $f_0'$  são tangentes à base do cone, respetivamente ( $T$  e  $T'$  são os pontos de tangência). As retas  $f_0$  e  $f_0'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é  $i_2$ , a projeção frontal da reta  $i$ ).

Assim, a reta  $f_0$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $i$ ). De forma semelhante, a reta  $f_0'$  está também definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $i$ ). Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T$ . A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T'$ .

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $f_0$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $f_0'$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Tendo em conta que os traços frontais dos dois planos já foram determinados, há, agora, que determinar os traços horizontais dos dois planos tangentes, para o que foi necessário determinar previamente o traço horizontal da reta  $i$  – o ponto  $H$ .

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_0$ ), que é concorrente com  $f_0$  no eixo  $X$  e passa pelo ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $i$ ). O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_0$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X$ ) e o ponto  $H$ .

Por fim, determinou-se o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_0'$ ), que é concorrente com  $f_0'$  no eixo  $X$  e passa também pelo ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $i$ ). O traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_0'$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X$ ) e o ponto  $H$ .

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cone e da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $i$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 592.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o cone bem como a reta  $h$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou entre parêntesis).

O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ).

Trata-se de um cone de revolução, cuja base é horizontal, pelo que o ponto  $O$  (o centro da base) e o ponto  $V$  (o vértice do cone) se situam necessariamente na mesma reta projetante horizontal, pois o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta vertical). O vértice do cone é invisível em projeção horizontal, pelo que a base do cone tem cota superior ao vértice. Por outro lado, o cone tem 6 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base), pelo que a distância do vértice do cone (o ponto  $V$ ) à base do cone (o plano  $v$ ) é 6 cm. Uma vez que o plano  $v$  tem 9 cm de cota (a cota do ponto  $O$ ), o ponto  $V$  (o vértice do cone) tem 3 cm de cota ( $9 - 6 = 3$ ).

**Resolução:**

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que são paralelos à reta  $h$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, pelo vértice do cone, uma reta paralela à reta dada (a reta  $h$ ). A reta  $i$  é a reta paralela à reta  $h$  e que passa pelo ponto  $V$ . A reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $V$ ) e uma direção (é paralela à reta  $h$ ). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base (o plano  $v$ ). Acontece que a reta  $i$  é paralela ao plano da base (o plano  $v$ ), pelo que, **de uma forma prática**, não é possível determinar (na folha de papel) o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano  $v$ . No entanto, **de uma forma conceptual**, podemos considerar que a reta  $i$  intersesta o plano  $v$  num ponto do infinito (um ponto situado a distância infinita). Assim, considerou-se que o ponto  $I$  já foi determinado – situa-se **no infinito** (é um **ponto impróprio**).

3. Conduzir, pelo ponto  $I$ , as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da diretriz da base do cone. Nesse sentido, pelo ponto  $I$  (que se situa no infinito), conduziram-se as retas tangentes à base do cone (as retas  $t$  e  $t'$ ) – estas duas retas são concorrentes entre si no ponto  $I$ , que se situa no infinito, ou seja, são concorrentes num ponto do infinito. Assim, as retas  $t$  e  $t'$  são necessariamente **paralelas entre si** (retas paralelas são retas concorrentes num ponto do infinito).

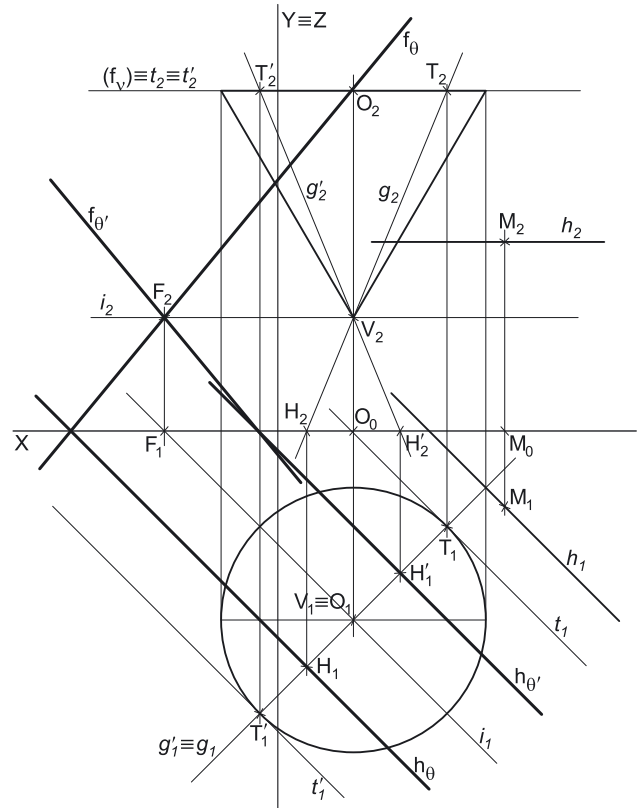
Por outro lado, as retas  $t$  e  $t'$  são também concorrentes com a reta  $i$  nesse mesmo ponto (o ponto  $I$ ), que se situa no infinito. Dessa forma, conclui-se que as três retas (as retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$ ) são necessariamente paralelas entre si. Em função de tudo o que atrás se expôs, determinaram-se as retas  $t$  e  $t'$ , determinando, previamente, os pontos  $T$  e  $T'$  (os pontos de tangência), que são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base, respetivamente. As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é  $i_1$ , a projeção horizontal da reta  $i$ ).

A reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) que está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $i$ ). A reta  $t'$  é outra reta horizontal (de nível), que está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (é também paralela à reta  $i$ ). Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Desenham-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T$ . A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T'$ .

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t'$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Determinemos os traços do plano  $\theta$ . Para se determinar o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Assim, determinou-se o traço horizontal da geratriz  $g$  – o ponto  $H$ . Já temos um ponto para definir  $h_\theta$  – o ponto  $H$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $h_\theta$ . A reta  $t$  e a reta  $i$  são duas retas horizontais (de nível) do plano  $\theta$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_\theta$ . O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) está, assim, definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\theta$  – a direção das retas  $i$  e  $t$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para se determinar o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **F**, o traço frontal da reta  $i$ . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços de um plano são duas retas desse plano que são concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\theta$  –  $f_\theta$  está definido por dois pontos (o ponto **F** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano).

Determinemos, agora, os traços do plano  $\theta'$ . Para se determinar o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Assim, determinou-se o traço horizontal da geratriz  $g'$  – o ponto **H'**. Já temos um ponto para definir  $h_{\theta'}$  – o ponto **H'**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir  $h_{\theta'}$ . A reta  $t'$  e a reta  $i$  são duas retas horizontais (de nível) do plano  $\theta'$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $h_{\theta'}$ . O traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ) está, assim, definido por um ponto (o ponto **H'**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\theta'$  – a direção das retas  $i$  e  $t'$ ).

Para se determinar o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) – o ponto **F** (o traço frontal da reta  $i$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços de um plano são duas retas desse plano que são concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{\theta'}$  –  $f_{\theta'}$  está definido por dois pontos (o ponto **F** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano).

### Traçado:

Os dados (as projeções do cone e da reta  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $i$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

## 593.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cone bem como a reta  $m$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou entre parêntesis).

O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**).

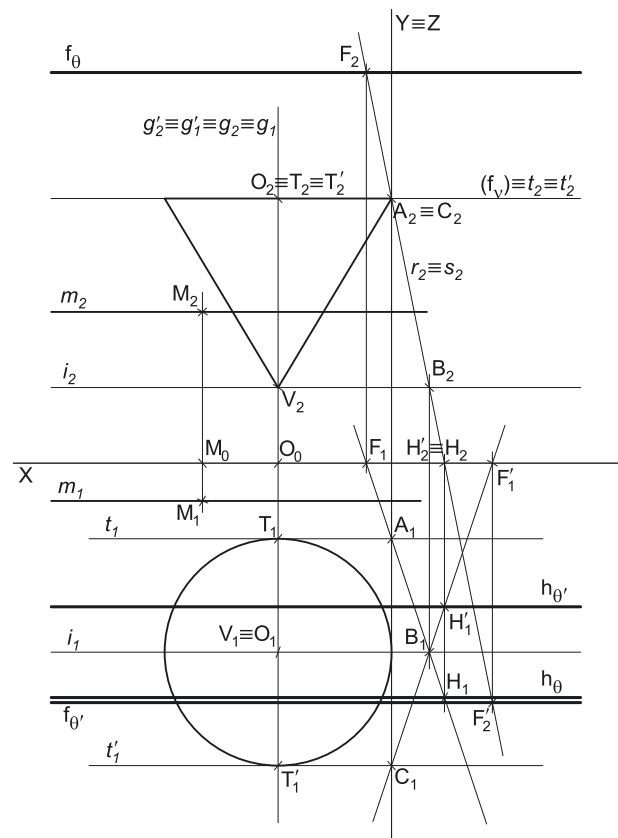
Trata-se de um cone de revolução, cuja base é horizontal, pelo que o ponto **O** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice do cone) se situam necessariamente na mesma reta projetante horizontal, pois o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta vertical). O vértice do cone é invisível em projeção horizontal, pelo que o vértice do cone tem cota inferior à base. Por outro lado, o cone tem 5 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base), pelo que a distância do vértice do cone (o ponto **V**) à base do cone (o plano  $v$ ) é 5 cm. Uma vez que o plano  $v$  tem 7 cm de cota (a cota do ponto **O**), o ponto **V** (o vértice do cone) tem 2 cm de cota ( $7 - 5 = 2$ ).

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que são paralelos à reta  $m$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, pelo vértice do cone, uma reta paralela à reta dada (a reta  $h$ ). A reta  $i$  é a reta paralela à reta  $m$  e que passa pelo ponto **V**. A reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto **V**) e uma direção (é paralela à reta  $m$  – é fronto-horizontal). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base (o plano  $v$ ). Acontece que a reta  $i$  é paralela ao plano da base (o plano  $v$ ), pelo que, **de uma forma prática**, não é possível determinar (na folha de papel) o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano  $v$ . No entanto, **de uma forma conceptual**, podemos considerar que a reta  $i$  interseca o plano  $v$  num ponto do infinito (um ponto situado a distância infinita). Assim, considerou-se que o ponto **I** já foi determinado – situa-se **no infinito** (é um ponto impróprio).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

3. Conduzir, pelo ponto  $I$ , as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base do cone. Nesse sentido, pelo ponto  $I$  (que se situa no infinito), conduziram-se as retas tangentes à base do cone (as retas  $t$  e  $t'$ ) – estas duas retas são concorrentes entre si no ponto  $I$ , que se situa no infinito, ou seja, são concorrentes num ponto do infinito. Assim, as retas  $t$  e  $t'$  são necessariamente **paralelas entre si** (retas paralelas são retas concorrentes num ponto do infinito).

Por outro lado, as retas  $t$  e  $t'$  são também concorrentes com a reta  $i$  nesse mesmo ponto (o ponto  $I$ ), que se situa no infinito. Dessa forma, conclui-se que as três retas (as retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$ ) são necessariamente paralelas entre si. Em função de tudo o que atrás se expôs, determinaram-se as retas  $t$  e  $t'$ , determinando, previamente, os pontos  $T$  e  $T'$  (os pontos de tangência), que são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base, respetivamente. As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é  $i$ , a projeção horizontal da reta  $\hat{i}$ ).

A reta  $t$  é uma reta fronto-horizontal que está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $i$  – é fronto-horizontal). A reta  $t'$  é outra reta fronto-horizontal, que está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (é também paralela à reta  $i$  – é fronto-horizontal).

Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes. Sublinha-se que é possível concluir, nesta etapa, que os dois planos tangentes são necessariamente **planos de rampa**, pois cada um deles está definido por duas retas fronto-horizontais, com cotas e afastamento distintos.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T$ . A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T'$ . Note que ambas as geratrizes estão contidas em retas de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t'$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

#### Determinação dos traços do plano $\theta$ :

Para se determinar o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Uma vez que se trata de um plano de rampa, sabe-se imediatamente que o seu traço horizontal ( $h_\theta$ ) é uma reta fronto-horizontal (paralelo às retas  $i$  e  $t$ ), pelo que já temos uma direção para definir  $h_\theta$ . Falta-nos um ponto para definir  $h_\theta$ . Esse ponto poderá ser, nesta situação, o traço horizontal da geratriz  $g$ , que está contida numa reta de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), pelo que a determinação do seu traço horizontal não se processa de forma direta. Nesse sentido, a determinação do traço horizontal da geratriz  $g$  implicaria o recurso a um processo geométrico auxiliar (por exemplo), como o do rebatimento do plano de perfil. No entanto, optou-se por uma outra situação, mais prática e económica em termos de traçado.

Nesse sentido, sem o recurso a um processo geométrico auxiliar, conclui-se que os dados do plano (as retas  $i$ ,  $g$  e  $t$ ) são insuficientes para determinar o ponto que nos falta, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\theta$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se à reta  $r$ , como reta auxiliar do plano. A reta  $r$  é uma reta oblíqua do plano  $\theta$  e está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o ponto de concorrência da reta  $r$  com a reta  $t$ ) e o ponto  $B$  (o ponto de concorrência da reta  $r$  com a reta  $i$ ). Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta  $r$ , o ponto  $H$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\theta$  –  $h_\theta$  está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal – é paralelo às retas  $i$  e  $t$ ).

Para se determinar o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos uma direção para definir  $f_\theta$ . Falta-nos um ponto para definir  $f_\theta$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $r$  (que é a reta auxiliar do plano  $\theta$  a que se recorreu). Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ). Assim, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e uma direção (é fronto-horizontal – é paralelo às retas  $i$  e  $t$ ).

#### Determinação dos traços do plano $\theta'$ :

Para se determinar o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Uma vez que se trata de um plano de rampa, sabe-se imediatamente que o seu traço horizontal ( $h_{\theta'}$ ) é uma reta fronto-horizontal (paralelo às retas  $i$  e  $t'$ ), pelo que já temos uma direção para definir  $h_{\theta'}$ . Falta-nos um ponto para definir  $h_{\theta'}$ . Esse ponto poderá ser, nesta situação, o traço horizontal da geratriz  $g'$ , que está contida numa reta de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), pelo que a determinação do seu traço horizontal não se processa de forma direta. Nesse sentido, a determinação do traço horizontal da geratriz  $g'$  implicaria o recurso a um processo geométrico auxiliar (por exemplo), como o do rebatimento do plano de perfil. No entanto, optou-se por uma outra situação, mais prática e económica em termos de traçado.

Nesse sentido, sem o recurso a um processo geométrico auxiliar, conclui-se que os dados do plano (as retas  $i$ ,  $g'$  e  $t'$ ) são insuficientes para determinar o ponto que nos falta, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\theta'$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se à reta  $s$ , como reta auxiliar do plano. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar a reta  $s$ , com a sua projeção frontal ( $s_2$ ) coincidente com a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ). A reta  $s$  é uma reta oblíqua do plano  $\theta'$  e está definida por dois pontos – o ponto  $C$  (o ponto de concorrência da reta  $s$  com a reta  $t'$ ) e o ponto  $B$  (o ponto de concorrência da reta  $s$  com a reta  $i$ ). Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta  $s$ , o ponto  $H'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_{\theta'}$  –  $h_{\theta'}$  está definido por um ponto (o ponto  $H'$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal – é paralelo às retas  $i$  e  $t'$ ).

Para se determinar o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos uma direção para definir  $f_{\theta'}$ . Falta-nos um ponto para definir  $f_{\theta'}$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $F'$ , o traço frontal da reta  $s$  (que é a reta auxiliar do plano  $\theta'$  a que se recorreu). Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ). Assim, o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) está definido por um ponto (o ponto  $F'$ ) e uma direção (é fronto-horizontal – é paralelo às retas  $i$  e  $t'$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Traçado:

Os dados (as projeções do cone e da reta  $m$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $i$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$ , das retas  $t$  e  $t'$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 594.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto  $O$ , bem como as retas  $p$  e  $f$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Note que foi possível representar a reta  $p$  (a reta de perfil que contém o eixo do cone) pelas suas projeções de forma direta, apesar de as suas projeções não verificarem o **Critério de Reversibilidade**.

Representou-se, também, o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou entre parêntesis). O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ).

Note que não é dado qualquer ponto da reta  $f$ , o que não nos permite saber a posição exata da reta. De qualquer forma, sublinha-se que isso é perfeitamente irrelevante para a resolução do exercício. De facto, a resolução do exercício baseia-se na **direção da reta** e não na sua posição específica no referencial. Assim, representou-se uma reta  $f$ , qualquer, com a direção dada no enunciado – independentemente da posição escolhida para esta reta (respeitando a direção dada no enunciado), a resolução do exercício será exatamente a mesma.

### Determinação das projeções do cone:

Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar as duas projeções da base do cone, que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal, pois o plano que a contém (o plano  $v$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção.

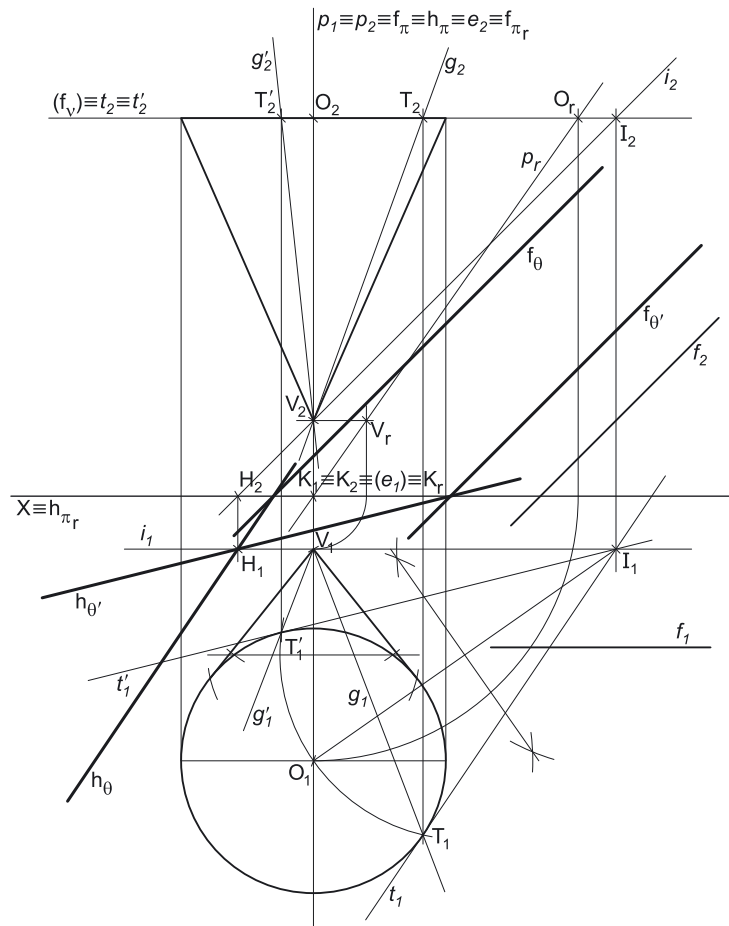
A reta  $p$  (a reta suporte do eixo do cone) é uma reta de perfil passante, pelo que a reta  $p$  é necessariamente concorrente com o eixo  $X$  num ponto – o ponto  $K$ , cujas projeções se identificaram imediatamente. A reta  $p$  está, assim, definida pelos pontos  $O$  (o centro da base) e  $K$  (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ ), mas as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que não é possível, de forma direta, determinar as projeções de quaisquer outros pontos da reta  $p$ , sem o recurso a procedimentos auxiliares (nomeadamente o recurso a um processo geométrico auxiliar).

Por outro lado, uma vez que o cone tem 8 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que a base tem 10 cm de cota (a cota do ponto  $O$ ) e é visível em projeção horizontal, o vértice do cone tem 2 cm de cota ( $10 - 8 = 2$ ). Este raciocínio permitiu-nos determinar a projeção frontal do ponto  $V$  ( $V_2$ ), sobre a projeção frontal da reta  $p$  ( $p_2$ ), que é a reta suporte do eixo do sólido. Em seguida, foi possível concluir o desenho da projeção frontal do cone, desenhando o seu contorno aparente frontal.

No entanto, atendendo a que as projeções da reta  $p$  não verificam o **Critério de Reversibilidade**, não é possível determinar a projeção horizontal do ponto  $V$  ( $V_1$ ), sem o recurso, por exemplo, a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, optou-se por se recorrer ao rebatimento do plano de perfil, pelo que se identificaram os traços do plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a reta  $p$ ). Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento (que foi  $f_\pi$ ).

Em seguida, rebateram-se os pontos  $O$  e  $K$  (os pontos que definem a reta  $p$ ), o que nos permitiu determinar  $O_r$  e  $K_r$  (os pontos  $O$  e  $K$  rebatidos, respetivamente). O ponto  $K$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $K_r \equiv K_2 \equiv K_1$ . Por fim, desenhou-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida) que passa por  $O_r$  e por  $K_r$  (a reta  $p_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $O_r$  e  $K_r$ ).

Depois, transportou-se o ponto  $V$  para o rebatimento, em função da sua cota (que se manteve), o que nos permitiu determinar  $V_r$  (o ponto  $V$  rebatido), sobre a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Por fim, inverteu-se o rebatimento e determinou-se a projeção horizontal do ponto  $V$  ( $V_1$ ), sobre a projeção horizontal da reta  $p$  ( $p_1$ ), o que nos permitiu, finalmente, desenhar a projeção horizontal do cone.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que são paralelos à reta  $f$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, pelo vértice do cone, uma reta paralela à reta dada (a reta  $i$ ). A reta  $i$  é a reta paralela à reta  $f$  e que passa pelo ponto  $V$ . A reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $V$ ) e uma direção (é paralela à reta  $f$ ). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base, que é o plano  $v$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano que contém a base do cone (o plano  $v$ ). O ponto  $I$  teve determinação direta, a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ), pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $i$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).

3. Conduzir, pelo ponto  $I$ , as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base do cone). Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base, respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é  $I_1$ , a projeção horizontal do ponto  $I$ ). A reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) que está definida por dois pontos – os pontos  $T$  e  $I$ . A reta  $t'$  é outra reta horizontal (de nível) que está igualmente definida por dois pontos – os pontos  $T'$  e  $I$ .

Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T$ . A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T'$ .

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t'$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da reta  $i$  – o ponto  $H$ .

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Começamos pelo traço horizontal ( $h_\theta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $h_\theta$  – o ponto  $H$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Já temos a direção que nos faltava. Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto  $H$  e é paralelo à reta  $t$  – está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (a direção da reta  $t$ ).

O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é concorrente com  $h_\theta$  no eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_\theta$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $i$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$  e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Já temos a direção que nos faltava. Assim, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X$ ) e por uma direção (é paralelo à reta  $i$ ).

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta'$ . Começamos pelo traço horizontal ( $h_{\theta'}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $h_{\theta'}$  – o ponto  $H$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $t'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta'$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Já temos a direção que nos faltava. Assim, o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ) passa pelo ponto  $H$  e é paralelo à reta  $t'$  – está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (a direção da reta  $t'$ ).

O traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) é concorrente com  $h_{\theta'}$  no eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_{\theta'}$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $i$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta'$  e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Já temos a direção que nos faltava. Assim, o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X$ ) e por uma direção (é paralelo à reta  $i$ ).

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cone e da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares – caso do plano  $v$ , da reta  $p$ , do plano  $\pi$ , de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  (que nos permitiram determinar a projeção horizontal do vértice e do cone), da reta  $i$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$  e da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$ .

## 595.

Se o plano  $\theta$  é tangente a uma superfície cilíndrica num ponto  $P$ , sabe-se que:

- o plano  $\theta$  é tangente a superfície ao longo da geratriz que contém o ponto  $P$  (a **geratriz de contacto** ou **geratriz de tangência**);
- o plano  $\theta$  contém necessariamente a **"família" das retas das geratrizes da superfície** (pois contém uma geratriz da superfície);
- o plano  $\theta$  é tangente a diretriz da superfície num ponto e corta o plano da diretriz segundo uma reta tangente à diretriz.

## 596.

A geratriz ao longo da qual um dado plano é tangente a uma superfície cilíndrica chama-se **geratriz de contacto** ou **geratriz de tangência**.

## 597.

A afirmação é **verdadeira**. De facto, qualquer plano tangente a uma superfície cilíndrica é tangente à superfície ao longo de uma geratriz – qualquer plano tangente a uma superfície cilíndrica contém, assim, a “família” das retas das geratrizes da superfície. A “família” de retas das geratrizes da superfície é a mesma “família” de retas à qual o eixo da superfície pertence, pois também o eixo é paralelo às geratrizes da superfície. Por outro lado, há salientar que o eixo da superfície nunca pertence a qualquer plano tangente à superfície – para que o eixo pertencesse ao plano, o plano teria de cortar a superfície e, assim, não seria tangente à superfície (seria secante à superfície).

Face ao exposto, conclui-se que qualquer plano tangente a uma superfície cilíndrica verifica o **Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação ao eixo da superfície (para que um plano seja paralelo a uma reta, tem de conter a “família” de retas à qual essa reta pertence).

## 598.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o cilindro pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do sólido. O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou entre parêntesis).

O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ).

### Determinação das projeções do ponto $P$ :

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $P$ , pertencente à superfície lateral do cilindro e com as coordenadas pretendidas. Atendendo a que as bases do cilindro são horizontais, determinou-se previamente o lugar geométrico dos pontos da superfície lateral do cilindro que têm 2 cm de cota (a cota do ponto  $P$ ). Esse lugar geométrico é a circunferência resultante da interseção da superfície lateral do sólido com um plano horizontal (de nível)  $v'$ , com 2 cm de cota. Assim, representou-se o plano  $v'$ , pelo seu traço frontal, que se identificou entre parêntesis, pois o plano  $v'$  não tem traço horizontal. Em seguida, determinou-se o ponto  $Q$ , o ponto de interseção do plano  $v'$  com o eixo do cilindro – o ponto  $Q$  é o centro dessa circunferência e as suas projeções determinaram-se de forma direta, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta que contém o eixo do cilindro) e um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ).

O circunferência resultante da interseção entre o plano  $v'$  e a superfície lateral do cilindro tem necessariamente o mesmo raio das bases do sólido. Assim, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência (com centro em  $Q_1$  e 3,5 cm de raio. O ponto  $P$  é o ponto dessa circunferência que tem 3 cm de afastamento e que é visível em projeção horizontal. Note que o outro ponto dessa circunferência que também tem 3 cm de afastamento é necessariamente invisível em projeção horizontal.

### Resolução:

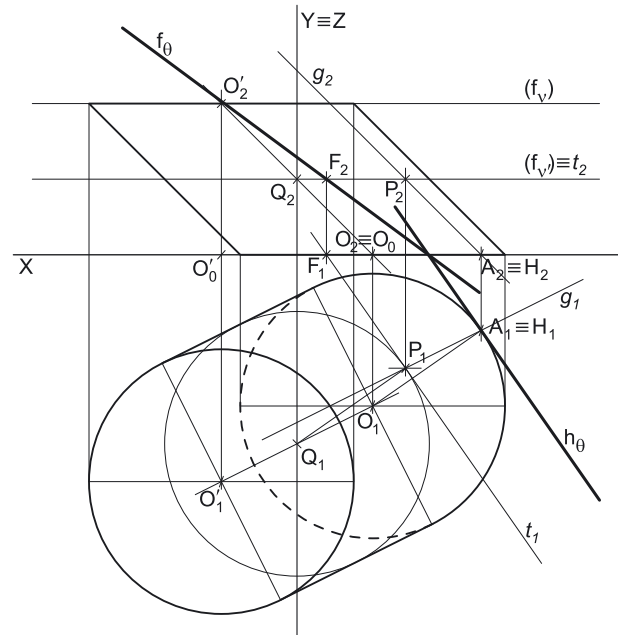
Pretende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cilindro no ponto  $P$ . Qualquer plano tangente a uma superfície cilíndrica num ponto é tangente à superfície ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da geratriz  $g$ , a geratriz que contém o ponto  $P$ . A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (é paralela às restantes geratrizes do cilindro). No entanto, optou-se por se determinar um outro ponto da geratriz  $g$  – o ponto  $A$  (o ponto da geratriz  $g$  que se situa na base inferior do sólido). Assim, a geratriz  $g$  está definida, na prática, por dois pontos (os pontos  $P$  e  $A$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro).

A geratriz  $g$  já é uma reta do plano  $\theta$  (o plano tangente pretendido).

Recorreu-se a uma outra reta do plano  $\theta$  – a reta  $t$ , que é uma reta tangente à superfície lateral do cilindro no ponto  $P$  (a reta  $t$  é, na prática, a reta de interseção do plano  $v'$  com o plano tangente pretendido). Note que a reta  $t$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (é perpendicular ao raio  $[QP]$  da circunferência). Já temos outra reta do plano  $\theta$ . Salienta-se que a reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$ . Note que a reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$  e que é concorrente com a geratriz  $g$  no ponto  $P$ .

O plano  $\theta$  está, agora, definido por duas retas – as retas  $t$  e  $g$ . Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Para tal determinou-se o traço horizontal da geratriz  $g$  (o ponto  $H$ ), que é, imediatamente, o próprio ponto  $A$ . O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto  $H$  (o traço horizontal da geratriz  $g$ ) e é paralelo à reta  $t$  (que é uma reta horizontal do plano  $\theta$ ). Note que  $h_\theta$  é tangente à base inferior do cilindro no ponto  $H$  (porque essa base se situa no Plano Horizontal de Projeção). O traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é paralelo à reta  $t$  e, portanto, perpendicular ao raio  $[OA]$  da base inferior do cilindro).

Em seguida, determinou-se o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $t$ . O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) passa pelo ponto  $F$  e é concorrente com  $h_\theta$  no eixo  $X - f_\theta$  está, assim, definido por dois pontos (o ponto  $F$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\theta$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Traçado:**

Os dados (as projeções do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cilindro no ponto **P** (os traços do plano  $\theta$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $v$ , do plano  $v'$ , da geratriz  $g$ , da reta  $t$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 599.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o cilindro pelas suas projeções, em função dos dados. Representaram-se, também, os planos  $v$  e  $v'$  (os planos horizontais que contêm as bases do sólido) pelos seus traços frontais. Os planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases) não têm traço horizontal, pelo que se representaram, apenas, pelos respectivos traços frontais (que se identificaram entre parêntesis).

O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**). Por outro lado, atendendo a que a altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases, sabe-se que os planos  $v$  e  $v'$  distam 6 cm (a altura do cilindro). Assim, uma vez que o plano  $v$  tem 2 cm de cota (a cota do ponto **O**), o plano  $v'$  tem 8 cm de cota ( $2 + 6 = 8$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **M**, pertencente à superfície lateral do cilindro. Uma vez que a superfície cilíndrica que limita lateralmente o cilindro é uma **superfície projetante horizontal**, determinou-se de forma imediata a projeção horizontal do ponto **M** ( $M_1$ ), em função do seu afastamento, sobre a circunferência que delimita a projeção horizontal do cilindro (e que corresponde ao seu contorno aparente). Note que se atendeu, ainda, ao que o enunciado pede expressamente – que o ponto **M** se situe à esquerda do eixo do sólido. Em seguida, determinou-se a projeção frontal do ponto **M** ( $M_2$ ), em função da sua cota.

**Resolução:**

Pretende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cilindro no ponto **M**.

Qualquer plano tangente a uma superfície cilíndrica num ponto é tangente à superfície ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da geratriz  $g$ , a geratriz que contém o ponto **M** e que é uma reta projetante horizontal. A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto **M**) e pela sua direção (é projetante horizontal – é uma reta vertical). No entanto, optou-se por se determinar um outro ponto da geratriz  $g$  – o ponto **A** (o ponto da geratriz  $g$  que se situa na base inferior do sólido). Assim, a geratriz  $g$  está definida, na prática, por dois pontos (os pontos **M** e **A**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro).

A geratriz  $g$  já é uma reta do plano  $\theta$  (o plano tangente pretendido).

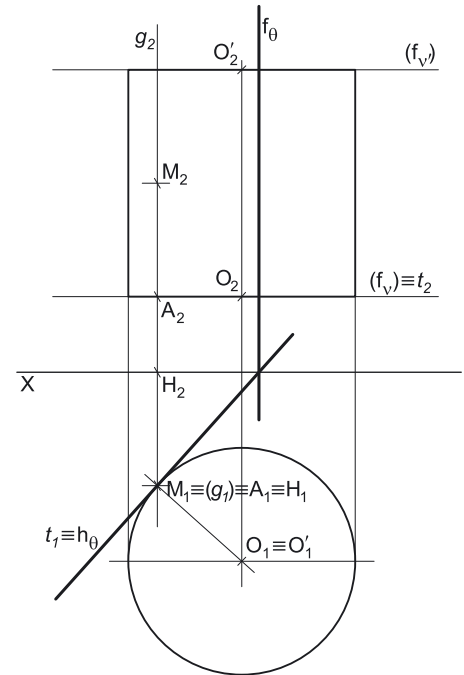
Recorreu-se a uma outra reta do plano  $\theta$  – a reta  $t$ , que é uma reta tangente à superfície lateral do cilindro no ponto **A**. Note que a reta  $t$  é, na prática, a reta de interseção do plano tangente pretendido com o plano da base inferior do cilindro (o plano  $v$ ). Note que a reta  $t$  está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é perpendicular ao raio  $[OA]$  da circunferência que delimita a base inferior do sólido). Já temos outra reta do plano  $\theta$  – a reta  $t$ . Salienta-se que a reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$  e que é concorrente com a geratriz  $g$  no ponto **A**.

O plano  $\theta$  está, agora, definido por duas retas – as retas  $t$  e  $g$ . Tendo em conta que a geratriz  $g$  é uma reta projetante horizontal, o plano  $\theta$  será, necessariamente, um **plano projetante horizontal** (um **plano vertical**). Assim, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Para tal determinou-se o traço horizontal da geratriz  $g$  (o ponto **H**). O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto **H** (o traço horizontal da geratriz  $g$ ) e é paralelo à reta  $t$  (que é uma reta horizontal do plano  $\theta$ ). Note que se tem  $h_\theta \equiv t_1$ , porque o plano  $\theta$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que é concorrente com  $h_\theta$  no eixo **X** e é paralelo à geratriz  $g$  –  $f_\theta$  está, assim, definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\theta$ ) e por uma direção (é uma reta vertical).

**Traçado:**

Os dados (as projeções do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cilindro no ponto **M** (os traços do plano  $\theta$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos  $v$  e  $v'$ , da geratriz  $g$  e da reta  $t$ ).



## 600.

### Dados:

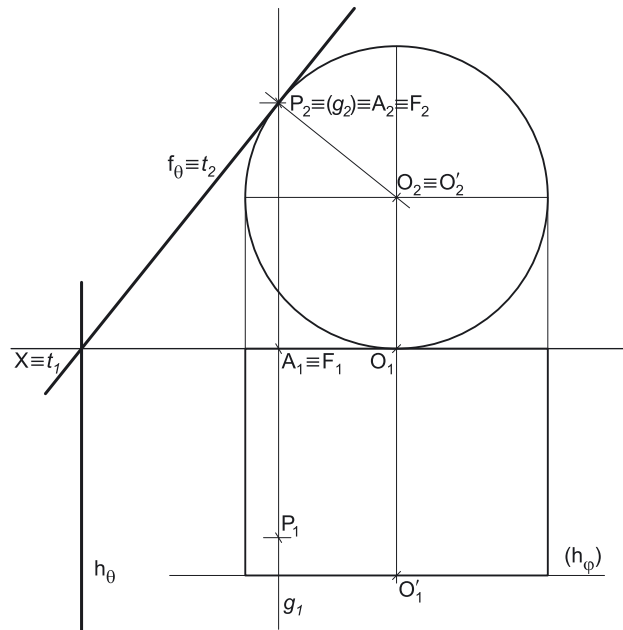
Em primeiro lugar, representou-se o cilindro pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço frontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou entre parêntesis).

Atendendo a que a altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases, sabe-se que o plano  $\varphi$  dista 6 cm (a altura do cilindro) do Plano Frontal de projeção (o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro). Assim, uma vez que o Plano Frontal de Projeção tem afastamento nulo, o plano  $\varphi$  tem 6 cm de afastamento ( $0 + 6 = 6$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **P**, pertencente à superfície lateral do cilindro. Uma vez que a superfície cilíndrica que limita lateralmente o cilindro é uma **superfície projetante frontal**, determinou-se de forma imediata a projeção frontal do ponto **P** ( $P_2$ ), em função da sua cota (6,5 cm), sobre a circunferência que delimita a projeção frontal do cilindro (e que corresponde ao seu contorno aparente). Note que se atendeu, ainda, ao que o enunciado pede expressamente – que o ponto **P** se situe à esquerda do eixo do sólido. Em seguida, determinou-se a projeção horizontal do ponto **P** ( $P_1$ ), em função do seu afastamento.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cilindro no ponto **P**.



Qualquer plano tangente a uma superfície cilíndrica num ponto é tangente à superfície ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da geratriz **g**, a geratriz que contém o ponto **P** e que é uma reta projetante frontal. A geratriz **g** está definida por um ponto (o ponto **P**) e pela sua direção (é projetante frontal – é uma reta de topo). No entanto, optou-se por se determinar um outro ponto da geratriz **g** – o ponto **A** (o ponto da geratriz **g** que se situa na base de menor afastamento do sólido). Assim, a geratriz **g** está definida, na prática, por dois pontos (os pontos **P** e **A**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro).

A geratriz **g** já é uma reta do plano  $\theta$  (o plano tangente pretendido).

Recorreu-se a uma outra reta do plano  $\theta$  – a reta **t**, que é uma reta tangente à superfície lateral do cilindro no ponto **A**. Note que a reta **t** é, na prática, a reta de interseção do plano tangente pretendido com o plano da base de menor afastamento do cilindro (o Plano Frontal de Projeção). Note que a reta **t** está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é perpendicular ao raio **[OA]** da circunferência que delimita a base de menor afastamento do sólido). Já temos outra reta do plano  $\theta$  – a reta **t**. Salienta-se que a reta **t** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$  e que é concorrente com a geratriz **g** no ponto **A**.

O plano  $\theta$  está, agora, definido por duas retas – as retas **t** e **g**. Tendo em conta que a geratriz **g** é uma reta projetante frontal, o plano  $\theta$  será, necessariamente, um **plano projetante frontal** (um **plano de topo**). Assim, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Para tal determinou-se o traço frontal da geratriz **g** (o ponto **F**), que é o próprio ponto **A** (nesta situação). O traço frontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto **F** (o traço frontal da geratriz **g**) e é paralelo à reta **t** (que é uma reta frontal do plano  $\theta$ ). Note que se tem  $f_\theta \equiv t_2$ , porque o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), que é concorrente com  $f_\theta$  no eixo **X** e é paralelo à geratriz **g** –  $h_\theta$  está, assim, definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\theta$ ) e por uma direção (é uma reta de topo).

### Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cilindro no ponto **P** (os traços do plano  $\theta$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\varphi$ , da geratriz **g** e da reta **t**).

## 601.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o cilindro pelas suas projeções, em função dos dados. Representaram-se, também, os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , os planos frontais (de frente) que contêm as duas bases do sólido. Os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  não têm traço frontal, pelo que se representaram, apenas, pelos respetivos traços horizontais (que se identificaram entre parêntesis).

O plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro) é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ). O plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro) é também um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ) passa necessariamente por  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ ).

**Resolução:**

Pretende-se determinar os traços do plano que é tangente à superfície lateral ao longo da geratriz que contém os pontos de menor cota das duas bases (a geratriz  $g$ ). Nesse sentido, identificaram-se os pontos de menor cota de ambas as bases e desenharam-se as projeções da geratriz  $g$ . O ponto  $T$  é o ponto de menor cota da base de maior afastamento e o ponto  $T'$  é o ponto de menor cota da base de menor afastamento. A geratriz  $g$  está, assim, definida por dois pontos (os pontos  $T$  e  $T'$ ) e, ainda, pela sua direção (é paralela ao eixo do sólido e às restantes geratrizes, nomeadamente às geratrizes dos contornos aparentes)

A geratriz  $g$  já é uma reta do plano  $\theta$  (o plano tangente pretendido).

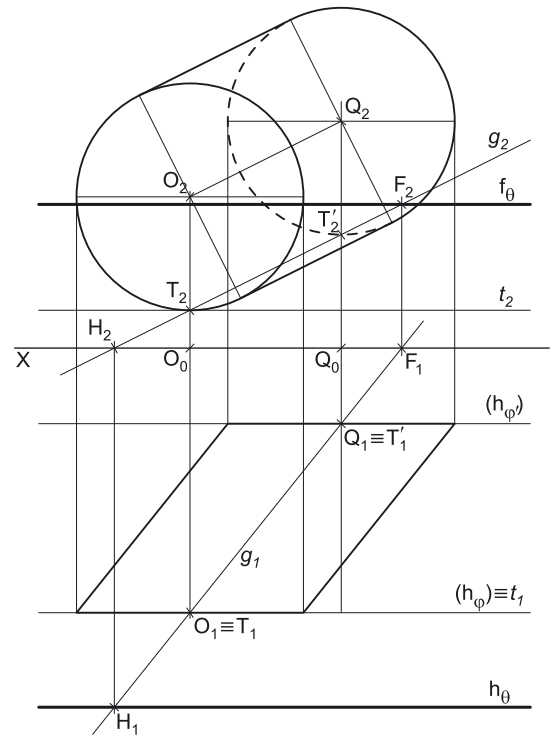
Recorreu-se a uma outra reta do plano  $\theta$  – a reta  $t$ , que é uma reta tangente à superfície lateral do cilindro no ponto  $T$  (o ponto de menor cota da base de maior afastamento). A reta  $t$  é, na prática, a reta de interseção do plano  $\varphi$  com o plano tangente pretendido. Note que a reta  $t$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (é perpendicular ao raio  $[OT]$  da circunferência que delimita a base de maior afastamento). Já temos outra reta do plano  $\theta$ . Saliencia-se que a reta  $t$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$ . **Nesta situação particular**, a reta  $t$  é uma **reta fronto-horizontal**. Assim, a reta  $t$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $\theta$  e que é concorrente com a geratriz  $g$  no ponto  $T$ .

O plano  $\theta$  está, agora, definido por duas retas concorrentes – as retas  $t$  e  $g$ . O plano  $\theta$  é necessariamente um **plano de rampa**, pois está definido por uma reta oblíqua (a geratriz  $g$ ) e uma reta fronto-horizontal (a reta  $t$ ). Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Para tal determinaram-se os traços da geratriz  $g$  – os pontos  $F$  (o seu traço frontal) e o ponto  $H$  (o seu traço horizontal).

O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto  $H$  (o traço horizontal da geratriz  $g$ ) e é fronto-horizontal (é paralelo à reta  $t$ ). Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) passa pelo ponto  $F$  e é também fronto-horizontal (é paralelo à reta  $t$ ). Assim, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está igualmente definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

**Traçado:**

Os dados (as projeções do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cilindro (os traços do plano  $\theta$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , da geratriz  $g$  e da reta  $t$ ).





## 602.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $r$ , pelas suas projeções. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

### Determinação das projeções do cilindro:

Tendo em conta que as bases do sólido têm 3 cm de raio e que a base de maior afastamento é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, o centro da base de maior afastamento (o ponto  $O$ ) tem necessariamente 3 cm de cota. Assim, determinaram-se as projeções do ponto  $O$ , que é o ponto da reta  $r$  que tem 3 cm de cota. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do cilindro. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou entre parêntesis). O plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro) é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ).

Em seguida, representou-se o plano  $\varphi'$ , o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro. Atendendo a que a altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases, o afastamento do plano  $\varphi'$  é 4 cm inferior ao afastamento do plano  $\varphi$  (o plano  $\varphi'$  está 4 cm mais próximo do Plano Frontal de Projeção, do que o plano  $\varphi$ ). Depois, determinou-se o ponto  $O'$ , que é o centro da base de menor afastamento do sólido – o ponto  $O'$  é o ponto de interseção da reta  $r$  (a reta suporte do eixo do sólido) com o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro). O ponto  $O'$  determinou-se de forma direta, a partir da sua projeções horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $r$ ) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

Por fim, a partir de todos os procedimentos expostos, desenharam-se as projeções das duas bases, e concluiu-se o desenho das duas projeções do sólido, a partir do desenho dos seus contornos aparentes (o contorno aparente horizontal e o contorno aparente frontal), assinalando-se convenientemente as invisibilidades existentes.

### Determinação das projeções do ponto P:

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $P$ , pertencente à superfície lateral do cilindro e com as coordenadas pretendidas. Atendendo a que as bases do cilindro são frontais (de frente), determinou-se previamente o lugar geométrico dos pontos da superfície lateral do cilindro que têm 5 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $P$ ). Esse lugar geométrico é a circunferência resultante da interseção da superfície lateral do sólido com um plano frontal (de frente)  $\varphi''$ , com 5 cm de afastamento. Assim, representou-se o plano  $\varphi''$ , pelo seu traço horizontal, que se identificou entre parêntesis, pois o plano  $\varphi''$  não tem traço frontal. Em seguida, determinou-se o ponto  $A$ , o ponto de interseção do plano  $\varphi''$  com o eixo do cilindro – o ponto  $A$  é o centro dessa circunferência e as suas projeções determinaram-se de forma direta, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $r$ ) e um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi''$ ).

O raio da circunferência determinou-se com o recurso ao ponto de interseção do plano  $\varphi''$  com uma geratriz qualquer do cilindro – o ponto  $M$  (que é o ponto em que o plano  $\varphi''$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cilindro). Esta geratriz está definida por dois pontos – o ponto  $G$  (o ponto mais à direita da base de menor afastamento do cilindro) e o ponto  $G'$  (o ponto mais à direita da base de maior afastamento do cilindro). O ponto  $M$  determinou-se a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi''$  é um plano projetante horizontal. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da circunferência (com centro em  $A_2$  e raio  $A_2M_2$ ). Note que o raio dessa circunferência é igual ao raio das bases (que é 3 cm), pelo que a determinação do ponto  $M$  não foi fundamental.

O ponto  $P$  é o ponto dessa circunferência que tem 2 cm de cota. Salienta-se que o ponto  $P$  é o **único** ponto dessa circunferência que tem 2 cm de cota (o ponto  $P$  é o ponto de menor cota dessa circunferência).

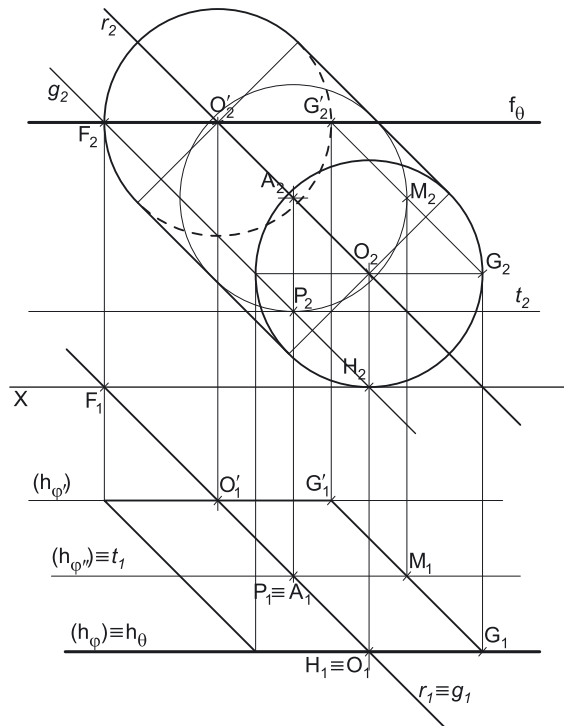
### Resolução:

Pretende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cilindro no ponto  $P$ . Qualquer plano tangente a uma superfície cilíndrica num ponto é tangente à superfície ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da geratriz  $g$ , a geratriz que contém o ponto  $P$ . A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (é paralela às restantes geratrizes do cilindro).

A geratriz  $g$  já é uma reta do plano  $\theta$  (o plano tangente pretendido).

Recorreu-se a uma outra reta do plano  $\theta$  – a reta  $t$ , que é uma reta tangente à superfície lateral do cilindro no ponto  $P$  (a reta  $t$  é, na prática, a reta de interseção do plano  $\varphi''$  com o plano tangente pretendido). Note que a reta  $t$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (é perpendicular ao raio  $[AP]$  da circunferência). Já temos outra reta do plano  $\theta$ . **Nesta situação particular**, a reta  $t$  é uma **reta fronto-horizontal**. Assim, a reta  $t$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $\theta$  e que é concorrente com a geratriz  $g$  no ponto  $P$ .

O plano  $\theta$  está, agora, definido por duas retas concorrentes – as retas  $t$  e  $g$ . O plano  $\theta$  é necessariamente um **plano de rampa**, pois está definido por uma reta oblíqua (a geratriz  $g$ ) e uma reta fronto-horizontal (a reta  $t$ ). Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Para tal determinaram-se os traços da geratriz  $g$  – os pontos  $F$  (o seu traço frontal) e o ponto  $H$  (o seu traço horizontal). Note que, **nesta situação particular**, o ponto  $H$  é, imediatamente, o ponto da geratriz  $g$  que pertence à base de maior afastamento do cilindro.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto **H** (o traço horizontal da geratriz  $g$ ) e é fronto-horizontal (é paralelo à reta  $t$ ). Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal). O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) passa pelo ponto **F** e é também fronto-horizontal (é paralelo à reta  $t$ ). Assim, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está igualmente definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Salienta-se que, **nesta situação particular**, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) está coincidente com o traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$  e do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cilindro no ponto **P** (os traços do plano  $\theta$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos  $\varphi$ ,  $\varphi'$  e  $\varphi''$ , da geratriz  $g$  e da reta  $t$ ).

## 603.

O método geral para a determinação dos planos tangentes a uma superfície cilíndrica, passando por um ponto exterior executa-se sequencialmente em cinco etapas:

1. Conduzir, pelo ponto dado, uma reta paralela à reta dada – a reta  $i$  (que é a reta de interseção entre os dois planos tangentes).
2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base (de referência) – o ponto **I**.
3. Conduzir, pelo ponto **I**, as retas tangentes à base (de referência) – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos planos tangentes com o plano da base de referência).
4. Determinar as geratrizes de contacto (ou geratrizes de tangência) – as geratrizes  $g$  e  $g'$ .
5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas:
  - o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t$  e  $g$ ;
  - o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t'$  e  $g'$ .

## 604.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro bem como o ponto **A**, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

O cilindro tem 7 cm de altura (que é a distância entre os planos das duas bases) e a base inferior tem cota nula (está contida no Plano Horizontal de Projeção), pelo que a base superior tem 7 cm de cota ( $0 + 7 = 7$ ). Assim, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal, em função da sua cota (que é 7 cm). O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).

### Resolução:

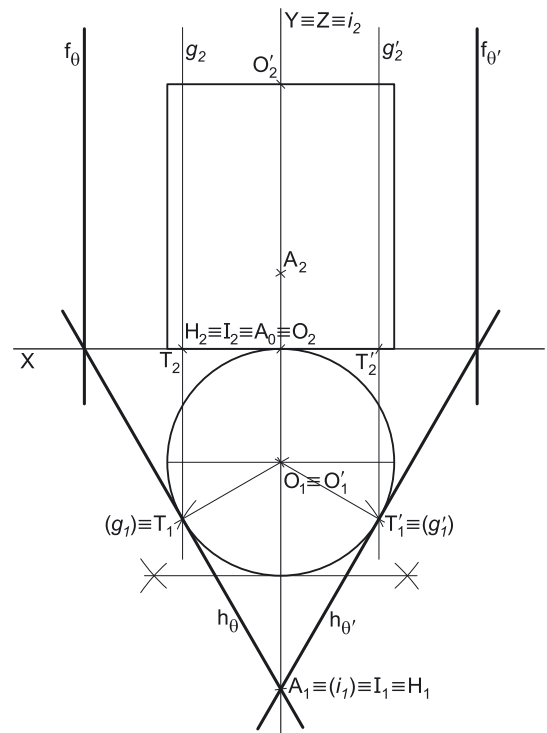
Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que passam pelo ponto **A**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado, uma reta paralela às geratrizes do cilindro (a reta  $i$ ). A reta  $i$  é a reta paralela às geratrizes do cilindro e que passa pelo ponto **A**. Tendo em conta que as geratrizes do cilindro estão contidas em retas verticais (projetante horizontais), a reta  $i$  é necessariamente uma reta vertical (uma reta projetante horizontal). A reta  $i$  está, assim, definida por um ponto (o ponto **A**) e uma direção (é uma reta vertical).

A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cilindro.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base de referência – o ponto **I**. Considerou-se, como base de referência, a base inferior do cilindro, que é o Plano Horizontal de Projeção. Assim, determinou-se o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano que contém a base de referência do cilindro (o Plano Horizontal de Projeção) – esse ponto (o ponto **I**) é, imediatamente, o traço horizontal da reta  $i$  (o ponto **H**), o que se assinalou convenientemente no desenho.

3. Conduzir, pelo ponto **I**, as retas tangentes à base de referência do cilindro – as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base (de referência). Tendo em conta que a base de referência do cilindro está contida no Plano Horizontal de Projeção, as retas tangentes à base (de referência) do cilindro são, imediatamente, os traços horizontais dos dois planos tangentes –  $h_\theta$  e  $h_{\theta'}$ . Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas  $h_\theta$  e  $h_{\theta'}$  são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $h_\theta$  e  $h_{\theta'}$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é **I**, a projeção horizontal do ponto **A**). A reta  $h_\theta$  está definida por dois pontos – os pontos **T** e **I**. A reta  $h_{\theta'}$  está definida por dois pontos – os pontos **T'** e **I**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz  $g'$  está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro).

Salienta-se que ambas as geratrizes são retas verticais (retas projetantes horizontais).

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $h_\theta$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $h_{\theta'}$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Tendo em conta que os traços horizontais dos dois planos já foram determinados, há, agora, que determinar os traços frontais dos dois planos tangentes.

Assim, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta$  são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_\theta$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Sabe-se que retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal do plano com afastamento nulo. Sabe-se, ainda, que a geratriz  $g$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$  (uma reta vertical é um caso particular das retas frontais), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $f_\theta$ . O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com  $h_\theta$ ) e por uma direção (é uma reta vertical).

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta'$  são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_{\theta'}$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Sabe-se que retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal do plano com afastamento nulo. Sabe-se, ainda, que a geratriz  $g'$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta'$  (uma reta vertical é um caso particular das retas frontais), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{\theta'}$ . O traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com  $h_{\theta'}$ ) e por uma direção (é uma reta vertical).

### Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $i$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$  e da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$ ).

## 605.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro bem como o ponto  $G$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representaram-se, também, os planos  $v$  e  $v'$ , os planos horizontais (de nível) que contêm as duas bases do sólido. Os planos  $v$  e  $v'$  não têm traço horizontal, pelo que se representaram, apenas, pelos respetivos traços frontais (que se identificaram entre parêntesis).

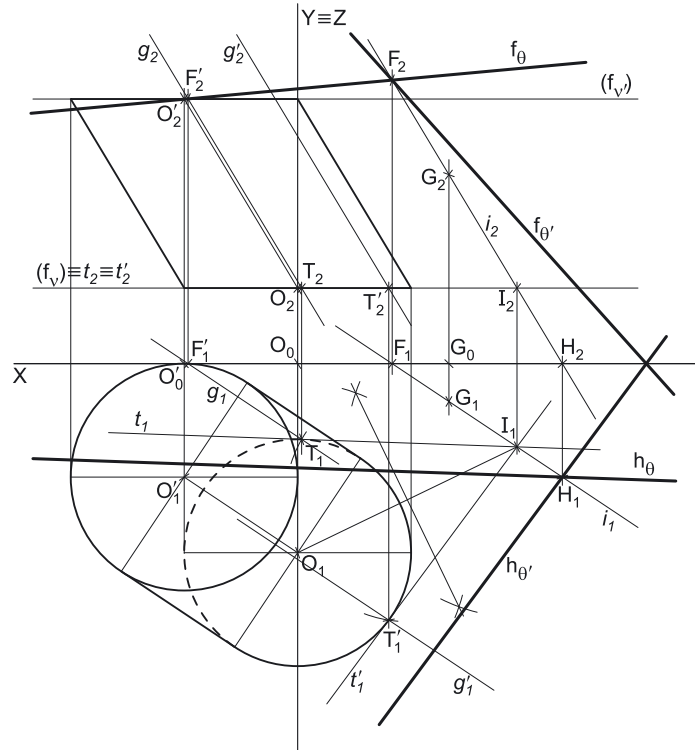
O plano  $v$  (o plano que contém a base inferior do cilindro) é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ). O plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do cilindro) é também um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ) passa necessariamente por  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ).

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que passam pelo ponto  $G$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado, uma reta paralela às geratrizes do cilindro (a reta  $i$ ). A reta  $i$  é a reta paralela às geratrizes do cilindro que passa pelo ponto  $G$ . A reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $G$ ) e uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cilindro.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base de referência – o ponto  $I$ . Considerou-se, como base de referência, a base inferior do cilindro. O ponto  $I$  determinou-se a partir da sua projeção frontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $i$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

3. Conduzir, pelo ponto **I** as retas tangentes à base de referência do cilindro – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência do cilindro). Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas **t** e **t'** são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas **t** e **t'** determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é **I**, a projeção horizontal do ponto **I**). A reta **t** é uma reta horizontal (de nível) que está definida por dois pontos – os pontos **T** e **I**. A reta **t'** é outra reta horizontal (de nível) que está igualmente definida por dois pontos – os pontos **T'** e **I**.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes **g** e **g'**. Desenham-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz **g** está definida por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz **g'** está igualmente definida por um ponto (o ponto **T'**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro).

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas **i**, **t** e **g** e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas **i**, **t'** e **g'**. Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **i** – os pontos **F** e **H**.

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Começamos pelo traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $h_\theta$  – o ponto **H** (o traço horizontal da reta **i**). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **t** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Já temos a direção que nos faltava para definir  $h_\theta$ . Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto **H** e é paralelo à reta **t** – está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (a direção da reta **t**).

Para desenharmos o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que é outra reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_\theta$  – o ponto **F** (o traço frontal da reta **i**). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços do plano são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\theta$ . Assim, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano e ponto **F**.

Por fim, determinaram-se os traços do plano  $\theta'$ . Começamos pelo traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $h_{\theta'}$  – o ponto **H** (o traço horizontal da reta **i**). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta **t'** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta'$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Já temos a direção que nos faltava para definir  $h_{\theta'}$ . Assim, o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ) passa pelo ponto **H** e é paralelo à reta **t'** – está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (a direção da reta **t'**).

Para desenharmos o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), que é outra reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\theta'}$  – o ponto **F** (o traço frontal da reta **i**). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços do plano são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X**, mas o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\theta'$  fica fora dos limites do papel. Assim, uma vez que a geratriz **g'** é outra reta do plano  $\theta'$ , determinou-se o seu traço frontal – o ponto **F'**. Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{\theta'}$ . Assim, o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) está definido por dois pontos – os pontos **F** e **F'**.

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos  $v$  e  $v'$ , da reta **i**, das retas **t** e **t'**, das geratrizes **g** e **g'**, da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

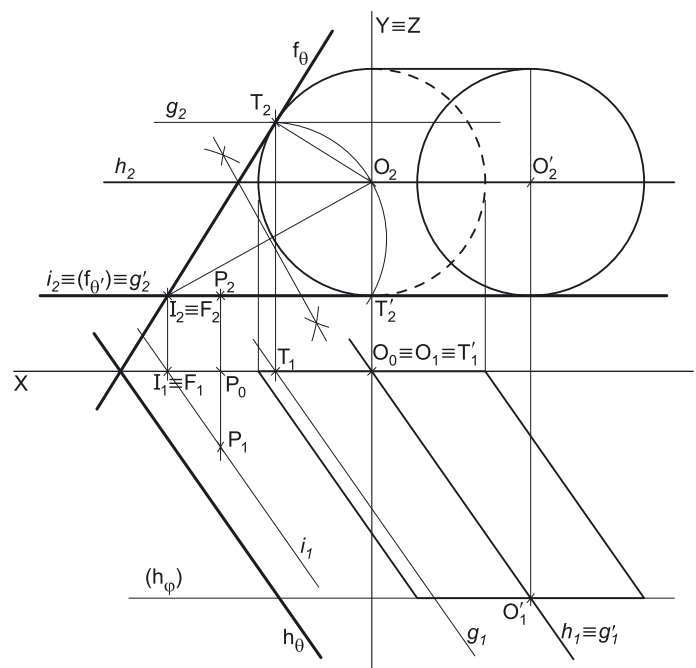
## 606.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **P**, bem como a reta **h**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, desenharam-se as projeções do cilindro.

O cilindro tem 6 cm de altura (que é a distância entre os planos das duas bases) e a base de menor afastamento tem afastamento nulo (está contida no Plano Frontal de Projeção), pelo que a base de maior afastamento tem 6 cm de afastamento ( $0 + 6 = 6$ ). Assim, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal, em função do seu afastamento (que é 6 cm). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).

Em seguida, determinou-se o ponto **O'**, o centro da base de maior afastamento do sólido. O ponto **O'** é o ponto de interseção da reta **h** (a reta suporte do eixo do sólido) com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro) – o ponto **O'** teve determinação direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. Por fim desenharam-se as projeções do cilindro, a partir dos seus contornos aparentes.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que passam pelo ponto **P**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado, uma reta paralela às geratrizes do cilindro (a reta **i**). A reta **i** é a reta paralela às geratrizes do cilindro (e à reta **h**, que é a reta suporte do eixo) e que passa pelo ponto **P**. A reta **i** está definida por um ponto (o ponto **P**) e uma direção (a direção das geratrizes do cilindro e da reta **h**). A reta **i** é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cilindro.

2. Determinar o ponto de interseção da reta **i** com o plano da base de referência – o ponto **I**. Considerou-se, como base de referência, a base de menor afastamento do cilindro, que é o Plano Frontal de Projeção. Assim, determinou-se o ponto de interseção da reta **i** com o plano que contém a base de referência do cilindro (o Plano Frontal de Projeção) – esse ponto (o ponto **I**) é, imediatamente, o traço frontal da reta **i** (o ponto **F**), o que se assinalou convenientemente no desenho.

3. Conduzir, pelo ponto **I**, as retas tangentes à base de referência do cilindro – as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base (de referência). Tendo em conta que a base de referência do cilindro está contida no Plano Frontal de Projeção, as retas tangentes à base (de referência) do cilindro são, imediatamente, os traços frontais dos dois planos tangentes – **f<sub>θ</sub>** e **f<sub>θ'</sub>**. Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas **f<sub>θ</sub>** e **f<sub>θ'</sub>** são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas **f<sub>θ</sub>** e **f<sub>θ'</sub>** determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é **I<sub>2</sub>**, a projeção frontal do ponto **I**). A reta **f<sub>θ</sub>** está definida por dois pontos – os pontos **T** e **I**. A reta **f<sub>θ'</sub>** está definida por dois pontos – os pontos **T'** e **I**.

Salienta-se que o traço frontal do plano  $\theta'$  (**f<sub>θ'</sub>**) é necessariamente paralelo ao eixo **X**, pois os pontos **I** e **T'** têm a mesma cota (o ponto **T'** é o ponto de menor cota da base de referência do cilindro). Assim, **nesta situação particular**, **f<sub>θ'</sub>** é necessariamente uma reta fronto-horizontal.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes **g** e **g'**. Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz **g** está definida por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz **g'** está igualmente definida por um ponto (o ponto **T'**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro)

Note que a geratriz **g'** é a geratriz de menor cota do cilindro e é, ainda, uma geratriz do contorno aparente frontal do sólido.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas **i**, **f<sub>θ</sub>** e **g** e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas **i**, **f<sub>θ'</sub>** e **g'**. Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Tendo em conta que os traços frontais dos dois planos já foram determinados, há, agora, que determinar os traços frontais dos dois planos tangentes.

O plano  $\theta'$  está definido por três retas horizontais (de nível) – as retas **i** e **g'** (que são duas retas horizontais paralelas) e o seu traço frontal (**f<sub>θ'</sub>**), que é uma reta fronto-horizontal concorrente com as retas **i** e **g'**. Assim, o plano  $\theta'$  é necessariamente um plano horizontal (de nível), pois contém duas “famílias” de retas horizontais (de nível). Assim, o plano  $\theta'$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal foi identificado entre parêntesis.

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano  $\theta$  (**h<sub>θ</sub>**), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos um ponto para definir **h<sub>θ</sub>** – o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\theta$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. As retas **i** e **g** são duas retas horizontais (de nível) do plano  $\theta$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir **h<sub>θ</sub>**. O traço horizontal do plano  $\theta$  (**h<sub>θ</sub>**) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas **i** e **g**, que é a direção das retas horizontais do plano).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta **h** e do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\varphi$ , da reta **i**, das geratrizes **g** e **g'**, da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

## 607.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro bem como o ponto  $M$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. Representaram-se, também, os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , os planos frontais (de frente) que contêm as duas bases do sólido. Os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  não têm traço frontal, pelo que se representaram, apenas, pelos respectivos traços horizontais (que se identificaram entre parêntesis).

O plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro) é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ). O plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro) é também um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ) passa necessariamente por  $O'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O'$ ).

**Resolução:**

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que passam pelo ponto  $M$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado, uma reta paralela às geratrizes do cilindro (a reta  $i$ ). A reta  $i$  é a reta paralela às geratrizes do cilindro que passa pelo ponto  $M$ . A reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $M$ ) e uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cilindro.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base de referência – o ponto  $I$ . Considerou-se, como base de referência, a base de menor afastamento do cilindro (que está contida no plano  $\varphi$ ). O ponto  $I$  determinou-se a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $i$ ) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ).

3. Conduzir, pelo ponto  $I$  as retas tangentes à base de referência do cilindro – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência do cilindro). Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é  $I_2$ , a projeção frontal do ponto  $I$ ). A reta  $t$  é uma reta frontal (de frente) que está definida por dois pontos – os pontos  $T$  e  $I$ . A reta  $t'$  é outra reta frontal (de frente) que está igualmente definida por dois pontos – os pontos  $T'$  e  $I$ .

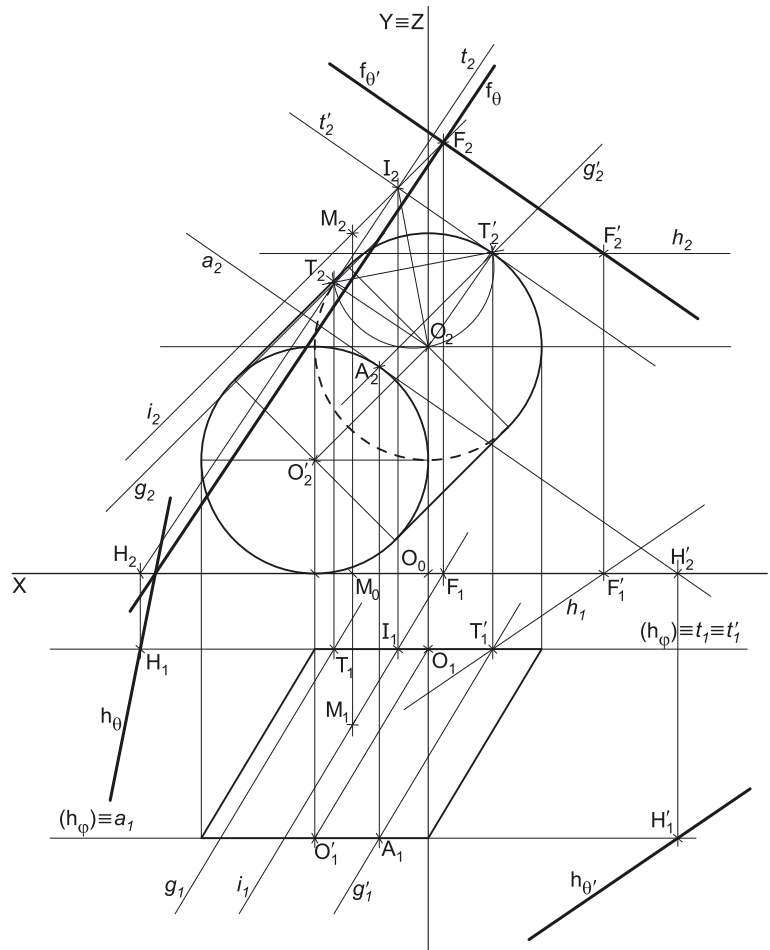
4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Desenham-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz  $g'$  está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro)

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t'$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $i$  – o ponto  $F$ . Salienta-se que o traço horizontal da reta  $i$  se situa fora dos limites do papel.

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Começamos pelo traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_\theta$  – o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $i$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $t$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$  e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Já temos a direção que nos faltava para definir  $f_\theta$ . Assim, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) passa pelo ponto  $F$  e é paralelo à reta  $t$  – está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (a direção da reta  $t$ ).

Para desenharmos o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), que é outra reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano são duas retas concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $h_\theta$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\theta$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Assim, determinou-se o traço horizontal da reta  $t$  – o ponto  $H$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\theta$  – o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) está definido por dois pontos (o ponto de concorrência dos dois traços do plano e ponto  $H$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por fim, determinaram-se os traços do plano  $\theta'$ . Começamos pelo traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\theta'}$  – o ponto **F** (o traço frontal da reta  $i$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $t'$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta'$  e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{\theta'}$ . Assim, o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) passa pelo ponto **F** e é paralelo à reta  $t'$  – está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (a direção da reta  $t'$ ).

Para desenharmos o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ), que é outra reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X**, mas o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\theta$  situa-se fora dos limites do papel. Por outro lado, também os traços horizontais das retas  $i$ ,  $t'$  e  $g'$  se situam fora dos limites do papel. Assim, conclui-se que os dados do plano  $\theta'$  (as retas  $i$ ,  $t'$ ,  $g'$  e  $f_{\theta'}$ ) são insuficientes para definir  $h_{\theta'}$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se à reta  $a$ , como reta auxiliar do plano  $\theta'$ . A reta  $a$  é a reta de interseção do plano  $\theta'$  com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro) e está, assim, definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é tangente à base de maior afastamento do sólido, pelo que é paralela à reta  $t'$  e a  $f_{\theta'}$ ). Note, nesse sentido, que a reta  $a$  é outra reta frontal (de frente) do plano  $\theta'$ . Sublinha-se que a reta  $a$  é concorrente com a geratriz  $g'$  no ponto **A** (o ponto da geratriz  $g'$  que se situa na base de maior afastamento do sólido). Em seguida, determinou-se o ponto **H'**, o traço horizontal da reta  $a$ . Já temos um ponto para definir  $h_{\theta'}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Mais uma vez se conclui que os dados do plano  $\theta'$  (as retas  $i$ ,  $t'$ ,  $g'$ ,  $f_{\theta'}$  e  $a$ ) são insuficientes para definir  $h_{\theta'}$ , pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta  $h$ , como reta auxiliar do plano  $\theta'$ . A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano  $\theta'$  que passa pelo ponto **T'** – tendo em conta que a reta  $h$  pertence ao plano  $\theta'$ , o seu traço frontal (o ponto **F'**) situa-se sobre  $f_{\theta'}$ . A reta  $h$  está, assim, definida por dois pontos – os pontos **T'** e **F'**.

A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta'$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Já temos a direção que nos faltava para definir  $h_{\theta'}$ . Assim, o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ) passa pelo ponto **H'** e é paralelo à reta  $h$  – está definido por um ponto (o ponto **H'**) e por uma direção (a direção da reta  $h$ ).

### Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , da reta  $i$ , das retas  $t$  e  $t'$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , das retas  $a$  e  $h$ , da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

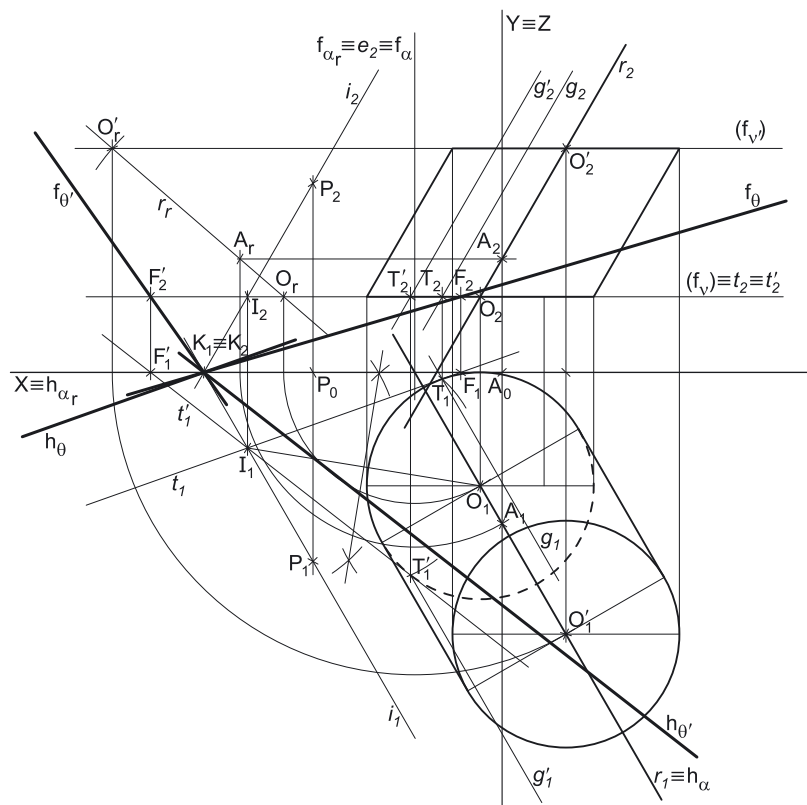
## 608.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta  $r$  e o ponto **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  é a reta que contém o eixo do sólido – as projeções da reta  $r$  fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{21/3}$  (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passante cujas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado). O ponto **P** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**).

### Determinação das projeções do cilindro:

Tendo em conta que as bases do sólido têm 3 cm de raio e que a base inferior é tangente ao Plano Frontal de Projeção, o centro da base inferior (o ponto **O**) tem necessariamente 3 cm de afastamento. Assim, determinaram-se as projeções do ponto **O**, que é o ponto da reta  $r$  que tem 3 cm de afastamento. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base inferior do cilindro. O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou entre parêntesis). O plano  $v$  (o plano que contém a base inferior do cilindro) é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

É dado, no enunciado, que o eixo do cilindro (o segmento de reta  $[OO']$ , sendo  $O'$  o centro da base superior do sólido) mede 6 cm – o segmento de reta  $[OO']$  está contido na reta  $r$ , que não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento de reta  $[OO']$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da reta  $r$  (o plano  $\alpha$ ), cujos traços determinaram imediatamente – o plano  $\alpha$  é o plano vertical que contém a reta  $r$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que foi o seu traço frontal ( $f_\alpha$ ).

Em seguida, rebateram-se os pontos  $O$  e  $A$  (o ponto  $A$  é o ponto da reta  $r$  que é dado no enunciado) o que nos permitiu determinar  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido) e  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido). Em seguida, desenharam-se a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $O_r$  e  $A_r$ . Em rebatimento, o segmento  $[OO']$  já está em verdadeira grandeza, pelo que, sobre a reta  $r_r$ , e a partir de  $O_r$ , mediram-se os 6 cm (o comprimento do eixo do sólido) e determinou-se  $O'_r$  (o ponto  $O'$  rebatido), sobre a reta  $r_r$ . Por fim, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $O'$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ .

Em seguida, representou-se o plano  $v'$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do cilindro. O plano  $v'$  não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou entre parêntesis). O plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do cilindro) é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ) passa necessariamente por  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ).

Por fim desenharam-se as projeções do cilindro, a partir dos seus contornos aparentes.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que passam pelo ponto  $P$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado, uma reta paralela às geratrizes do cilindro (a reta  $i$ ). A reta  $i$  é a reta paralela às geratrizes do cilindro (e à reta  $r$ ) que passa pelo ponto  $P$ . A reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e uma direção (a direção das geratrizes do cilindro e da reta  $r$ ). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cilindro.

Note que, **nesta situação particular** (em que a reta  $r$  é paralela ao  $\beta_{1/3}$  e que o ponto  $P$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$ ), a reta  $i$  é necessariamente uma reta do  $\beta_{1/3}$ . A reta  $i$  é, assim, uma reta passante, que é concorrente com o eixo  $X$  num ponto – o ponto  $K$  (cujas projeções se identificaram imediatamente).

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base de referência – o ponto  $I$ . Considerou-se, como base de referência, a base inferior do cilindro (que está contida no plano  $v$ ). O ponto  $I$  determinou-se a partir da sua projeção frontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $i$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).

3. Conduzir, pelo ponto  $I$  as retas tangentes à base de referência do cilindro – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência do cilindro). Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é  $I_1$ , a projeção horizontal do ponto  $I$ ). A reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) que está definida por dois pontos – os pontos  $T$  e  $I$ . A reta  $t'$  é outra reta horizontal (de nível) que está igualmente definida por dois pontos – os pontos  $T'$  e  $I$ .

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz  $g'$  está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro).

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t'$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Note que o ponto  $K$  (o ponto de concorrência da reta  $i$  com o eixo  $X$ ) é necessariamente um ponto de cada um dos dois planos tangentes (a reta  $i$  pertence aos dois planos tangentes) – o ponto  $K$  é, assim, o ponto de concorrência dos traços do plano  $\theta$  (é o ponto do plano  $\theta$  que se situa no eixo  $X$ ) e é, também, o ponto de concorrência dos traços do plano  $\theta'$  (é o ponto do plano  $\theta'$  que se situa no eixo  $X$ ).

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Começamos pelo traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $h_\theta$  – o ponto  $K$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Já temos a direção que nos faltava para definir  $h_\theta$ . Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto  $K$  e é paralelo à reta  $t$  – está definido por um ponto (o ponto  $K$ ) e por uma direção (a direção da reta  $t$ ).

Para desenharmos o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que é outra reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano são duas retas concorrentes no ponto  $K$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_\theta$  – o ponto  $K$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $t$  – o ponto  $F$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\theta$  – o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está definido por dois pontos (o ponto  $K$  e o ponto  $F$ ).

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta'$ . Começamos pelo traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $h_{\theta'}$  – o ponto  $K$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $t'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta'$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Já temos a direção que nos faltava para definir  $h_{\theta'}$ . Assim, o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ) passa pelo ponto  $K$  e é paralelo à reta  $t'$  – está definido por um ponto (o ponto  $K$ ) e por uma direção (a direção da reta  $t'$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para desenharmos o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), que é outra reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano são duas retas concorrentes no ponto **K**, pelo que já temos um ponto para definir  $f_{\theta'}$  – o ponto **K**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Assim, determinou-se o traço frontal da reta  $t'$  – o ponto **F'**. Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{\theta'}$  – o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) está definido por dois pontos (o ponto **K** e o ponto **F'**).

### Traçado:

Os dados (as projeções da reta  $r$  e do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares – caso dos planos  $v$  e  $v'$ , do plano  $\alpha$ , de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  e à reta  $r$  (que nos permitiram determinar as projeções do sólido), da reta  $i$ , das retas  $t$  e  $t'$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo **Y = Z**, que é uma linha de referência).

## 609.

O método geral para a determinação dos planos tangentes a uma superfície cilíndrica, paralelos a uma reta dada executa-se sequencialmente em cinco etapas:

1. Conduzir, por um ponto exterior, duas retas concorrentes – uma reta paralela à reta dada e uma reta paralela às geratrizes do cilindro (o que nos permite definir um plano  $\theta$ , que tem a orientação dos planos tangentes).
2. Determinar a reta de interseção desse plano com o plano da base (de referência) – a reta  $i$ .
3. Conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos planos tangentes com o plano da base de referência).
4. Determinar as geratrizes de contacto (ou de tangência) – as geratrizes  $g$  e  $g'$ .
5. Os planos tangentes,  $\theta'$  e  $\theta''$ , ficam definidos, cada um deles, por duas retas e pela sua orientação (são, ambos, paralelos ao plano  $\theta$ ):
  - o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $t$  e  $g$  e é paralelo ao plano  $\theta$ ;
  - o plano  $\theta''$  está definido pelas retas  $t'$  e  $g'$  e é paralelo ao plano  $\theta$ .

## 610.

Qualquer plano tangente a uma superfície cilíndrica contém, necessariamente, a “família” de retas das geratrizes do cilindro. Assim, os dois planos tangentes à superfície, exatamente por serem tangentes à superfície, têm necessariamente uma “família” de retas em comum – a “família” de retas das geratrizes do cilindro. Por outro lado, qualquer plano paralelo a uma reta dada, contém a “família” de retas a que a reta dada pertence (para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos e retas**). Assim, os planos tangentes, porque são paralelos a uma reta dada, contêm, ambos, a “família” de retas a que a reta dada pertence – têm outra “família” de retas em comum.

Assim, os dois planos já têm duas “famílias” de retas em comum, pelo que são paralelos – verificam o **Critério de paralelismo entre planos**.

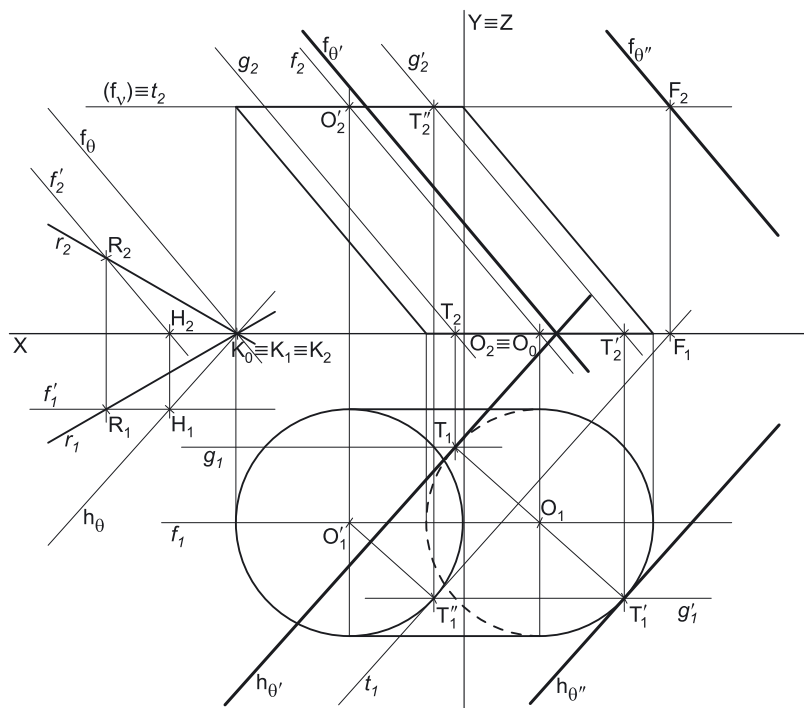
## 611.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro, bem como a reta  $r$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é uma reta do  $\beta_{1/3}$  (retas do  $\beta_{1/3}$  têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**). O ponto **K**, representado pelas suas projeções, é o ponto em que a reta  $r$  é concorrente com o eixo **X**.

Em seguida, desenharam-se as projeções da reta  $f$ , a reta suporte do eixo do cilindro – a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto **O**, o centro da base inferior) e por uma direção (a direção dada no enunciado, que é a direção das geratrizes e, também, a direção do eixo do cilindro).

O cilindro tem 6 cm de altura (que é a distância entre os planos das duas bases) e a base inferior tem cota nula (está contida no Plano Horizontal de Projeção), pelo que a base superior tem 6 cm de cota ( $0 + 6 = 6$ ). Assim, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal, em função da sua cota (que é 6 cm). O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se o ponto  $O'$ , o centro da base superior do sólido. O ponto  $O'$  é o ponto de interseção da reta  $f$  (a reta suporte do eixo do sólido) com o plano  $v$  (o plano que contém a base superior do cilindro) – o ponto  $O'$  teve determinação direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Por fim, desenharam-se as projeções do cilindro, a partir dos seus contornos aparentes.

#### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que são paralelos à reta  $r$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, por um ponto exterior, duas retas concorrentes – uma reta paralela à reta dada e uma reta paralela às geratrizes do cilindro (essas duas retas definem um plano – o plano  $\theta$ ). Com vista a uma maior economia de traçados, optou-se por se situar o ponto  $R$  (o ponto exterior) na própria reta  $r$ . A reta  $r$  é, assim, a reta paralela a si própria. Pelo ponto  $R$  conduziu-se, ainda a reta  $f'$ , paralela às geratrizes do cilindro (e à reta  $f$ ). O plano definido pelas retas  $r$  e  $f'$  (o plano  $\theta$ ) tem a **orientação** dos planos tangentes.

2. Determina-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano definido pelas retas  $r$  e  $f'$ ) com o plano da base de referência do cilindro (a reta  $i$ ); Considerou-se, como base de referência do sólido, a sua base inferior – a base que está contida no Plano Horizontal de Projeção. Assim, a reta de interseção do plano  $\theta$  com o Plano Horizontal de Projeção é o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), que está definido por dois pontos – o ponto  $K$  e o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $f'$ ).

Determinou-se, ainda, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que está definido por um ponto (o ponto  $K$ ) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano – é paralelo à reta  $f$ ).

3. Conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência). Assim, determinaram-se as retas tangentes à base de referência do cilindro que são paralelas a  $h_\theta$  – essas retas são, imediatamente, os traços horizontais dos planos tangentes ( $h_{\theta'}$  e  $h_{\theta''}$ ), pois a base de referência está contida no Plano Horizontal de Projeção.

Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $h_{\theta'}$  e  $h_{\theta''}$  são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $h_{\theta'}$  e  $h_{\theta''}$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é  $h_\theta$  – o traço horizontal do plano  $\theta$ ). A reta  $h_{\theta'}$  é uma reta horizontal (de nível) que está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_\theta$  e perpendicular ao raio  $[OT]$  da base inferior). A reta  $h_{\theta''}$  é outra reta horizontal (de nível) que está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_\theta$  e perpendicular ao raio  $[OT']$  da base inferior). Já temos uma reta de cada um dos dois planos tangentes – o plano  $\theta'$  está definido pelo seu traço horizontal ( $h_{\theta'}$ ) e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ) e o plano  $\theta''$  está definido pelo seu traço horizontal ( $h_{\theta''}$ ) e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ).

4. Determinar as geratrizes de contacto ou de tangência (as geratrizes  $g$  e  $g'$ ). Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz  $g'$  está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). Neste momento já temos duas retas de cada um dos dois planos tangentes.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido pela sua orientação e por duas retas: o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $h_{\theta'}$  e  $g$  e é paralelo ao plano  $\theta$ ; o plano  $\theta''$  está definido pelas retas  $h_{\theta''}$  e  $g'$  e é também paralelo ao plano  $\theta$ .

Tendo em conta que os traços horizontais dos dois planos já foram determinados, analisemos a determinação dos traços frontais de cada um dos dois planos tangentes. Cada um dos traços frontais de um plano é uma reta e para definirmos uma reta (qualquer reta) são sempre necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Por outro lado, é necessário ter em consideração que os planos  $\theta'$  e  $\theta''$  são paralelos ao plano  $\theta$ , cujos traços foram previamente determinados.

Começamos por determinar o traço frontal do plano  $\theta'$ . O traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) é concorrente com  $h_{\theta'}$  (o traço horizontal do plano  $\theta'$ ) no eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $f_{\theta'}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Tendo em conta que a geratriz  $g$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta'$ , já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{\theta'}$  –  $f_{\theta'}$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos traços do plano) e pela sua direção (é paralelo à geratriz  $g$  e a  $f_\theta$ ).

Determinemos, em seguida, o traço frontal do plano  $\theta''$ . Retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Tendo em conta que a geratriz  $g'$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta''$ , já temos uma direção para definir  $f_{\theta''}$  – falta-nos um ponto para definir  $f_{\theta''}$ . O traço frontal do plano  $\theta''$  ( $f_{\theta''}$ ) é concorrente com  $h_{\theta''}$  (o traço horizontal do plano  $\theta''$ ) no eixo  $X$ , ponto esse que se situa fora dos limites do papel. Continua a faltar-nos um ponto, para definirmos  $f_{\theta''}$ . Por outro lado, a reta  $g'$  não tem traço frontal (porque é uma reta frontal), pelo que se conclui que os dados do plano  $\theta''$  (as retas  $g'$  e  $h_{\theta''}$ ) são insuficientes para definir  $f_{\theta''}$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se à reta  $t$ , como reta auxiliar do plano  $\theta''$ . A reta  $t$  é a reta de interseção do plano  $\theta''$  com o plano  $v$  (o plano que contém a base superior do cilindro) e está, assim, definida por um ponto (o ponto  $T''$ ) e por uma direção (é tangente à base superior do sólido, pelo que é paralela a  $h_{\theta''}$ ). Note, nesse sentido, que a reta  $t$  é outra reta horizontal (de nível) do plano  $\theta''$ . Sublinha-se que a reta  $t$  é concorrente com a geratriz  $g'$  no ponto  $T''$  (o ponto da geratriz  $g'$  que se situa na base superior do sólido). Em seguida, determinou-se o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $t$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{\theta''}$  –  $f_{\theta''}$  está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e pela sua direção (é paralelo à geratriz  $g'$  e a  $f_\theta$ ).

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro e da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta'$  e  $\theta''$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $v$ , da reta  $f'$ , dos traços do plano  $\theta$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da reta  $t$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$ , ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 612.

### Dados:

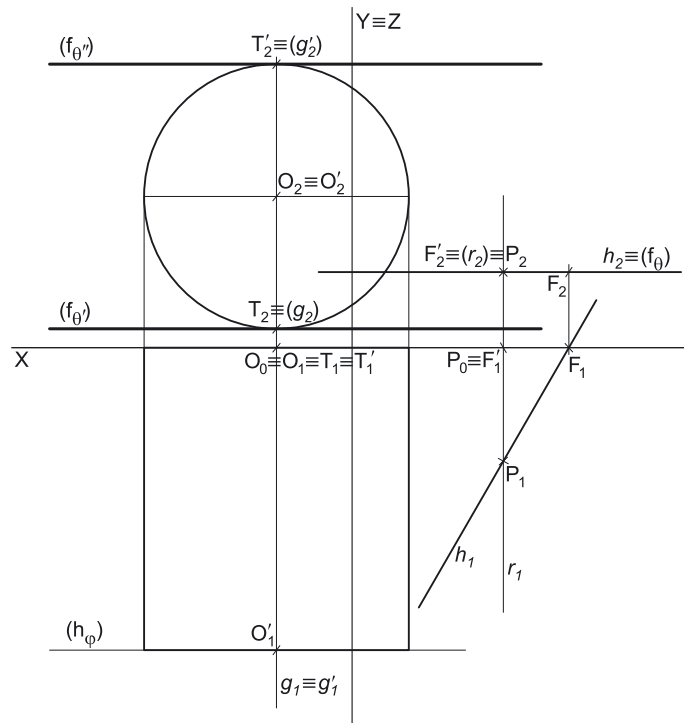
Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro bem como a reta  $h$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados.

O cilindro tem 8 cm de altura (que é a distância entre os planos das duas bases) e a base de menor afastamento tem afastamento nulo (está contida no Plano Frontal de Projeção), pelo que a base de maior afastamento tem 8 cm de afastamento ( $0 + 8 = 8$ ). Assim, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal, em função do seu afastamento (que é 8 cm). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).

### Resolução:

Preende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que são paralelos à reta  $h$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, por um ponto exterior, duas retas concorrentes – uma reta paralela à reta dada e uma reta paralela às geratrizes do cilindro (essas duas retas definem um plano – o plano  $\theta$ ). Com vista a uma maior economia de traçados, optou-se por se considerar o ponto  $P$  (o ponto que define a reta  $h$  e que é dado no enunciado) como o ponto exterior. A reta  $h$  é, assim, a reta paralela a si própria. Pelo ponto  $P$  conduziu-se, ainda a reta  $r$ , paralela às geratrizes do cilindro – a reta  $r$  é uma reta de topo (uma reta projetante frontal). O plano definido pelas retas  $h$  e  $r$  (o plano  $\theta$ ) tem a **orientação** dos planos tangentes.



Uma vez que as retas  $h$  e  $r$  são duas retas horizontais (uma reta de topo é um caso particular das retas horizontais), conclui-se imediatamente que o plano por elas definido é necessariamente um plano horizontal (de nível). Note, nesse sentido, que  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ) é uma reta fronto-horizontal.

2. Determina-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano definido pelas retas  $h$  e  $r$ ) com o plano da base de referência do cilindro (a reta  $i$ ); Considerou-se, como base de referência do sólido, a sua base de menor afastamento – a base que está contida no Plano Frontal de Projeção. Assim, a reta de interseção do plano  $\theta$  com o Plano Frontal de Projeção é o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que está definido por dois pontos – o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $h$ ) e o ponto  $F'$  (o traço frontal da reta  $r$ ).

3. Conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência). Assim, determinaram-se as retas tangentes à base de referência do cilindro que são paralelas a  $f_\theta$  – essas retas são, imediatamente, os traços frontais dos planos tangentes ( $f_\theta$  e  $f_\theta'$ ), pois a base de referência está contida no Plano Frontal de Projeção.

Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $f_\theta$  e  $f_\theta'$  são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $f_\theta$  e  $f_\theta'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é  $f_\theta$  – o traço frontal do plano  $\theta$ ). A reta  $f_\theta'$  é uma reta fronto-horizontal que está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). A reta  $f_\theta$  é outra reta fronto-horizontal que está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). Já temos uma reta de cada um dos dois planos tangentes – o plano  $\theta'$  está definido pelo seu traço frontal ( $f_\theta$ ) e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$  – é um plano horizontal) e o plano  $\theta''$  está igualmente definido pelo seu traço frontal ( $h_\theta$ ) e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$  – é outro plano horizontal).

4. Determinar as geratrizes de contacto ou de tangência (as geratrizes  $g$  e  $g'$ ). Desenham-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz  $g'$  está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). Neste momento já temos duas retas de cada um dos dois planos tangentes.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido pela sua orientação e por duas retas: o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $h_\theta$  e  $g$  e é paralelo ao plano  $\theta$ ; o plano  $\theta''$  está definido pelas retas  $h_\theta$  e  $g'$  e é também paralelo ao plano  $\theta$ .

Tendo em conta que os dois planos tangentes são planos horizontais (de nível), que não têm traço horizontal, e atendendo, ainda, a que os seus traços frontais já foram determinados, identificaram-se os traços frontais dos dois planos com o recurso a parêntesis.

### Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro e da reta  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços frontais dos planos  $\theta'$  e  $\theta''$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano  $\varphi$ , da reta  $r$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 613.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro bem como a reta  $f$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $M$ ) e por uma direção (a direção dada no enunciado). Representaram-se, também, os planos  $v$  e  $v'$ , os planos horizontais (de nível) que contêm as duas bases do sólido. Os planos  $v$  e  $v'$  não têm traço horizontal, pelo que se representaram, apenas, pelos respetivos traços frontais (que se identificaram entre parêntesis).

O plano  $v$  (o plano que contém a base inferior do cilindro) é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal  $(f_v)$  passa necessariamente por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ). O plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do cilindro) é também um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal  $(f_{v'})$  passa necessariamente por  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ).

**Resolução:**

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que são paralelos à reta  $f$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, por um ponto exterior, duas retas concorrentes – uma reta paralela à reta dada e uma reta paralela às geratrizes do cilindro (essas duas retas definem um plano – o plano  $\theta$ ). Com vista a uma maior economia de traçados, optou-se por se considerar o ponto  $M$  (o ponto que define a reta  $f$ ) como o ponto exterior. A reta  $f$  é, assim, a reta paralela a si própria. Pelo ponto  $M$  conduziu-se, ainda a reta  $r$ , paralela às geratrizes (e ao eixo) do cilindro. O plano definido pelas retas  $f$  e  $r$  (o plano  $\theta$ ) tem a **orientação** dos planos tangentes.

2. Determina-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano definido pelas retas  $f$  e  $r$ ) com o plano da base de referência do cilindro (a reta  $i$ ); Considerou-se, como base de referência do sólido, a sua base inferior – a base que está contida no plano  $v$ . Assim, a reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o ponto de interseção da reta  $f$  com o plano  $v$ ) e o ponto  $B$  (o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $v$ ).

Note que os pontos  $A$  e  $B$  se determinaram de forma direta, a partir das respetivas projeções frontais, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

3. Conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência). Assim, determinaram-se as retas tangentes à base de referência do cilindro que são paralelas à reta  $i$ . Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é  $i_1$ , a projeção horizontal da reta  $i$ ). A reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) que está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $i$  e perpendicular ao raio  $[OT]$  da base inferior). A reta  $t'$  é outra reta horizontal (de nível) que está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $i$  e perpendicular ao raio  $[OT']$  da base inferior).

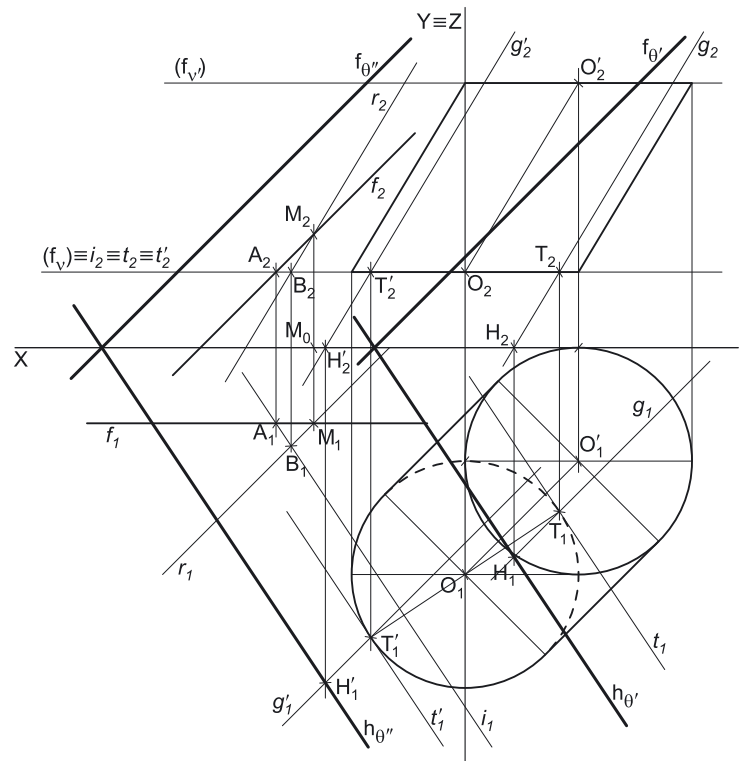
Já temos uma reta de cada um dos dois planos tangentes – o plano  $\theta'$  está definido pela reta  $t$  e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ) e o plano  $\theta''$  está definido pela reta  $t'$  e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ).

4. Determinar as geratrizes de contacto ou de tangência (as geratrizes  $g$  e  $g'$ ). Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz  $g'$  está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). Neste momento já temos duas retas de cada um dos dois planos tangentes.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido pela sua orientação e por duas retas: o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $t$  e  $g$  e é paralelo ao plano  $\theta$ ; o plano  $\theta''$  está definido pelas retas  $t'$  e  $g'$  e é também paralelo ao plano  $\theta$ .

Analisemos a determinação dos traços de cada um dos dois planos tangentes.

Começamos por determinar o traço horizontal do plano  $\theta'$ , que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H$ , o traço horizontal da geratriz  $g$ . Já temos um ponto para definir  $h_{\theta'}$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Tendo em conta que a reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta'$ , já temos a direção que nos faltava para definir  $h_{\theta'}$  –  $h_{\theta'}$  está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e pela sua direção (é paralela à reta  $t$  e também à reta  $i$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Determinemos, agora, o traço frontal do plano  $\theta'$ , que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta'$  são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que os planos  $\theta'$  e  $\theta$  têm a mesma orientação (são planos paralelos), os dois planos têm, em comum, todas as “famílias” de retas. Assim, as retas frontais (de frente) do plano  $\theta'$  são paralelas às retas frontais (de frente) do plano  $\theta$  e já é conhecida a direção das retas frontais (de frente) do plano  $\theta$  – a direção da reta  $f$ . Dessa forma, já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{\theta'}$  –  $f_{\theta'}$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\theta'$  – é paralelo à reta  $f$ ).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano  $\theta'$ , que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H'$ , o traço horizontal da geratriz  $g'$ . Já temos um ponto para definir  $h_{\theta'}$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Tendo em conta que a reta  $t'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta'$ , já temos a direção que nos faltava para definir  $h_{\theta'}$  –  $h_{\theta'}$  está definido por um ponto (o ponto  $H'$ ) e pela sua direção (é paralelo à reta  $t'$  e também à reta  $i$ ).

Determinemos, agora, o traço frontal do plano  $\theta''$ , que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta''$  são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\theta''$  ( $f_{\theta''}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que os planos  $\theta''$  e  $\theta$  têm a mesma orientação (são planos paralelos), os dois planos têm, em comum, todas as “famílias” de retas. Assim, as retas frontais (de frente) do plano  $\theta''$  são paralelas às retas frontais (de frente) do plano  $\theta$  e já é conhecida a direção das retas frontais (de frente) do plano  $\theta$  – a direção da reta  $f$ . Dessa forma, já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{\theta''}$  –  $f_{\theta''}$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\theta''$  – é paralelo à reta  $f$ ).

### Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro e da reta  $f$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta'$  e  $\theta''$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos  $v$  e  $v'$ , da reta  $r$ , da reta  $i$ , das retas  $t$  e  $t'$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 614.

### Dados:

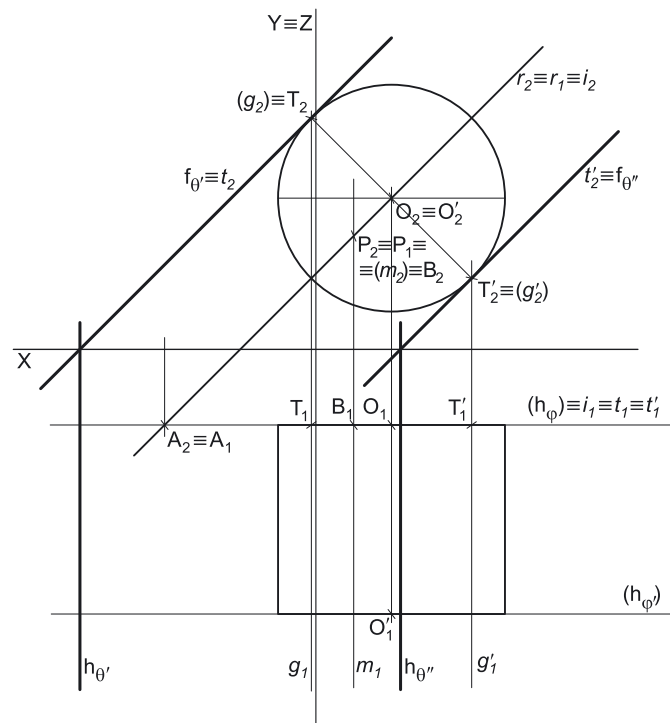
Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro bem como a reta  $r$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $r$  tem as suas projeções coincidentes, pois é uma reta do  $\beta_{2/4}$  (retas do  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções coincidentes). Representou-se, também, o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou com o recurso a parêntesis). O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi}$ ) passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ).

O cilindro tem 5 cm de altura (que é a distância entre os planos das duas bases) e a base inferior 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $O$ ), pelo que a base de maior afastamento tem 7 cm de afastamento ( $2 + 5 = 7$ ). Assim, representou-se o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal, em função do seu afastamento (que é 7 cm). O plano  $\varphi'$  não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que são paralelos à reta  $r$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, por um ponto exterior, duas retas concorrentes – uma reta paralela à reta dada e uma reta paralela às geratrizes do cilindro (essas duas retas definem um plano – o plano  $\theta$ ). Com vista a uma maior economia de traçados, optou-se por se situar o ponto  $P$  (o ponto exterior) na própria reta  $r$ . A reta  $r$  é, assim, a reta paralela a si própria. Pelo ponto  $P$  conduziu-se, ainda a reta  $m$ , paralela às geratrizes do cilindro. O plano definido pelas retas  $r$  e  $m$  (o plano  $\theta$ ) tem a **orientação** dos planos tangentes.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

2. Determina-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano definido pelas retas  $r$  e  $m$ ) com o plano da base de referência do cilindro (a reta  $i$ ); Considerou-se, como base de referência do sólido, a sua base de menor afastamento – a base que está contida no plano  $\varphi$ . Assim, a reta de interseção do plano  $\theta$  com o plano  $\varphi$  está definida por dois pontos – o ponto **A** (o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\varphi$ ) e o ponto **B** (o ponto de interseção da reta  $m$  com o plano  $\varphi$ ).

Note que os pontos **A** e **B** se determinaram de forma direta, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. Note, ainda, que a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ) está coincidente com a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ). Esta situação deve-se ao facto de o plano  $\theta$  (plano definido pelas retas  $r$  e  $m$ ) ser um plano projetante frontal, pois está definido por uma reta oblíqua (a reta  $r$ ) e por uma reta projetante frontal (a reta  $m$ ).

3. Conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência). Assim, determinaram-se as retas tangentes à base de referência do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ . Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é  $i_2$  – a projeção frontal da reta  $i$ ). A reta  $t$  é uma reta frontal (de frente) que está definida por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (é paralela à reta  $i$  e perpendicular ao raio **[OT]** da base de menor afastamento). A reta  $t'$  é outra reta frontal (de frente) que está igualmente definida por um ponto (o ponto **T'**) e por uma direção (é paralela à reta  $i$  e perpendicular ao raio **[OT']** da base de menor afastamento). Já temos uma reta de cada um dos dois planos tangentes – o plano  $\theta'$  está definido pela reta  $t$  e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ , pelo que é um plano projetante frontal) e o plano  $\theta''$  está definido pela reta  $t'$  e também pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ , pelo que é outro plano projetante frontal).

Note que seria possível, de forma imediata, determinar os traços dos dois planos, pois é possível determinar diretamente os traços de um plano projetante frontal que contém uma dada reta. No entanto, optou-se por se prosseguir com o **método geral**.

4. Determinar as geratrizes de contacto ou de tangência (as geratrizes  $g$  e  $g'$ ). Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz  $g'$  está igualmente definida por um ponto (o ponto **T'**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). Neste momento já temos duas retas de cada um dos dois planos tangentes.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido pela sua orientação e por duas retas: o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $t$  e  $g$  e é paralelo ao plano  $\theta$  (é projetante frontal) o plano  $\theta''$  está definido pelas retas  $t'$  e  $g'$  e é também paralelo ao plano  $\theta$  (é também projetante frontal).

Em seguida, determinaram-se os traços dos dois planos tangentes, atendendo ao facto de se tratarem de dois planos projetantes frontais.

Assim, o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) está coincidente com  $t_2$  (a projeção frontal da reta  $t$ ) o que nos garante que o plano  $\theta'$  contém a reta  $t$  e é um plano projetante frontal. O seu traço horizontal ( $h_{\theta'}$ ) é concorrente com  $f_{\theta'}$  num ponto do eixo **X** e é perpendicular ao eixo **X** (pois é uma reta de topo com cota nula) –  $h_{\theta'}$  está, assim, definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é uma reta projetante frontal).

De forma semelhante, o traço frontal do plano  $\theta''$  ( $f_{\theta''}$ ) está coincidente com  $t'_2$  (a projeção frontal da reta  $t'$ ) o que nos garante que o plano  $\theta''$  contém a reta  $t'$  e é um plano projetante frontal. O seu traço horizontal ( $h_{\theta''}$ ) é concorrente com  $f_{\theta''}$  num ponto do eixo **X** e é perpendicular ao eixo **X** (pois é uma reta de topo com cota nula) –  $h_{\theta''}$  está, assim, definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é uma reta projetante frontal).

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro e da reta  $r$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta'$  e  $\theta''$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , da reta  $m$ , da reta  $i$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

## 615.

### Dados:

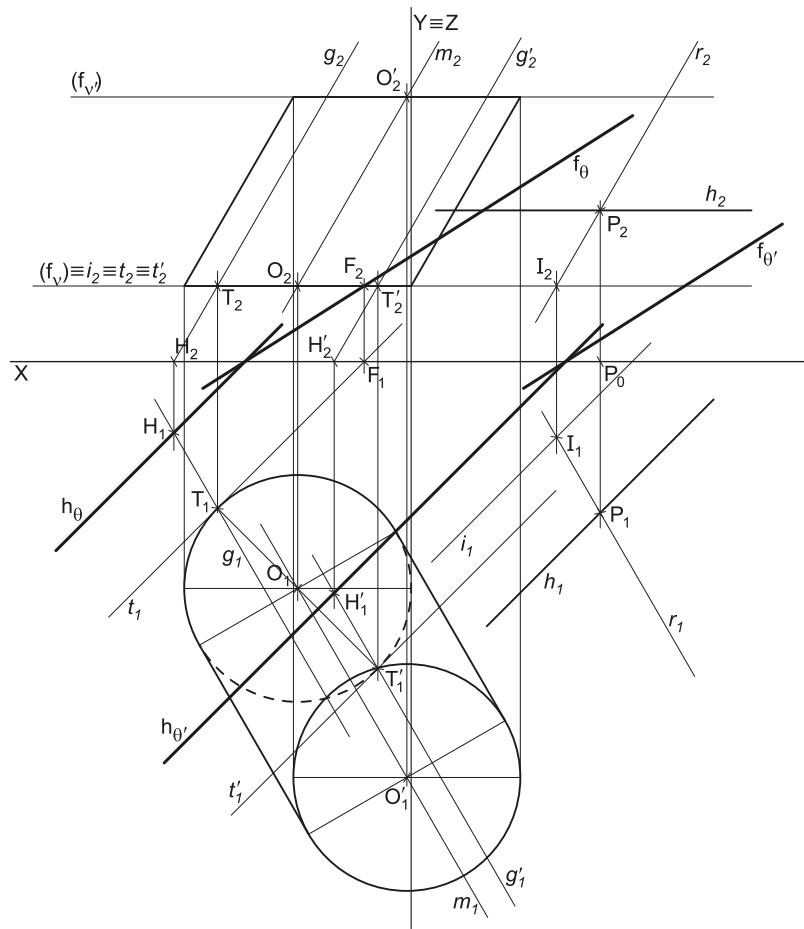
Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro, bem como a reta  $h$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto  $P$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (ponto do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

Representou-se, também, o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base inferior do sólido. O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou entre parêntesis). O plano  $v$  (o plano que contém a base inferior do cilindro) é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $(f_v)$ ) passa necessariamente por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ).

Para desenhar as projeções do cilindro começou-se por se desenhar as projeções da reta  $m$ , a reta suporte do eixo do cilindro – a reta  $m$  está definida por um ponto (o ponto  $O$ ) e pela sua direção (a direção das geratrizes, dada no enunciado). As projeções da reta  $m$  fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{1/3}$  (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes, cujas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

O cilindro tem 5 cm de altura (que é a distância entre os planos das duas bases) e a base inferior tem 2 cm de cota (a cota do ponto  $O$ ), pelo que a base superior tem 7 cm de cota ( $2 + 5 = 7$ ). Assim, representou-se o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal, em função da sua cota (que é 7 cm). O plano  $v'$  não tem traço horizontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).

Em seguida, determinou-se o ponto  $O'$ , o centro da base superior do sólido. O ponto  $O'$  é o ponto de interseção da reta  $m$  (a reta suporte do eixo do sólido) com o plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do cilindro) – o ponto  $O'$  teve determinação direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. Por fim, desenharam-se as projeções do cilindro, a partir dos seus contornos aparentes.



### Resolução:

Preende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que são paralelos à reta  $h$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, por um ponto exterior, duas retas concorrentes – uma reta paralela à reta dada e uma reta paralela às geratrizes do cilindro (essas duas retas definem um plano – o plano  $\theta$ ). Com vista a uma maior economia de traçados, optou-se por se considerar o ponto  $P$  (o ponto da reta  $h$  que é dado no enunciado) como o ponto exterior. A reta  $h$  é, assim, a reta paralela a si própria. Pelo ponto  $P$  conduziu-se, ainda a reta  $r$ , paralela às geratrizes do cilindro (e à reta  $m$ ). O plano definido pelas retas  $h$  e  $r$  (o plano  $\theta$ ) tem a **orientação** dos planos tangentes.

2. Determina-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano definido pelas retas  $h$  e  $r$ ) com o plano da base de referência do cilindro (a reta  $i$ ); Considerou-se, como base de referência do sólido, a sua base inferior – a base que está contida no plano  $v$ . Assim, a reta de interseção do plano  $\theta$  com o plano  $v$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$  e está definida por um ponto (o ponto  $I$ ) e por uma direção (a direção da reta  $h$ , pois retas horizontais de um plano são paralelas entre si). O ponto  $I$  é o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $v$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

3. Conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência). Assim, determinaram-se as retas tangentes à base de referência do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ .

Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é  $i_1$ , a projeção horizontal da reta  $i$ ). A reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) que está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $i$  e perpendicular ao raio  $[OT]$  da base inferior). A reta  $t'$  é outra reta horizontal (de nível) que está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $i$  e perpendicular ao raio  $[OT']$  da base inferior). Já temos uma reta de cada um dos dois planos tangentes – o plano  $\theta'$  está definido pela reta  $t$  e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ) e o plano  $\theta''$  está definido pela reta  $t'$  e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

4. Determinar as geratrizes de contacto ou de tangência (as geratrizes  $g$  e  $g'$ ). Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz  $g'$  está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). Neste momento já temos duas retas de cada um dos dois planos tangentes.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido pela sua orientação e por duas retas: o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $t$  e  $g$  e é paralelo ao plano  $\theta$ ; o plano  $\theta''$  está definido pelas retas  $t'$  e  $g'$  e é também paralelo ao plano  $\theta$ .

Analisemos a determinação dos traços de cada um dos dois planos tangentes. Cada um dos traços de um plano é uma reta e para definirmos uma reta (qualquer reta) são sempre necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Começemos por determinar o traço horizontal do plano  $\theta'$ , que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H$ , o traço horizontal da geratriz  $g$ . Já temos um ponto para definir  $h_{\theta'}$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Tendo em conta que a reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta'$ , já temos a direção que nos faltava para definir  $h_{\theta'}$  –  $h_{\theta'}$  está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e pela sua direção (é paralelo à reta  $t$  e também à reta  $i$ ).

Determinemos, agora, o traço frontal do plano  $\theta'$ , que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta'$  são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $t$  – o ponto  $F$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{\theta'}$  –  $f_{\theta'}$  (o traço frontal do plano  $\theta'$ ) está definido por dois pontos (o ponto de concorrência dos dois traços do plano e o ponto  $F$ ).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano  $\theta''$ , que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H'$ , o traço horizontal da geratriz  $g'$ . Já temos um ponto para definir  $h_{\theta''}$  – falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Tendo em conta que a reta  $t'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta''$ , já temos a direção que nos faltava para definir  $h_{\theta''}$  –  $h_{\theta''}$  está definido por um ponto (o ponto  $H'$ ) e pela sua direção (é paralelo à reta  $t'$  e também à reta  $i$ ).

Determinemos, agora, o traço frontal do plano  $\theta''$ , que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta''$  são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\theta''$  ( $f_{\theta''}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que os planos  $\theta''$  e  $\theta'$  têm a mesma orientação (são planos paralelos), os dois planos têm, em comum, todas as “famílias” de retas. Assim, as retas frontais (de frente) do plano  $\theta''$  são paralelas às retas frontais (de frente) do plano  $\theta'$  e já é conhecida a direção das retas frontais (de frente) do plano  $\theta'$  – a direção do seu traço frontal ( $f_{\theta'}$ ). Dessa forma, já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{\theta''}$  –  $f_{\theta''}$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\theta''$  – é paralelo a  $f_{\theta'}$ ).

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro e da reta  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta'$  e  $\theta''$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos  $v$  e  $v'$ , da reta  $f'$ , da reta  $i$ , das retas  $t$  e  $t'$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 616.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **M** e o cone, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Trata-se de um cone de revolução, cuja base é horizontal, pelo que o ponto **O** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice do cone) se situam necessariamente na mesma reta projetante horizontal, pois o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta vertical). Por outro lado, uma vez que o cone tem 6 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que a base tem cota nula (está contida no Plano Horizontal de Projeção), o vértice do cone tem 6 cm de cota ( $6 + 0 = 6$ ).

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que contêm o ponto **M**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado (o ponto **M**) e pelo vértice do cone, uma reta (a reta **i**). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta **i**, a reta que passa pelo ponto **V** (o vértice do cone) e pelo ponto **M** (o ponto dado) – a reta **i** está, assim, definida por dois pontos (os pontos **V** e **M**). A reta **i** é a reta de interseção entre os dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

Salienta-se que a reta **i** é, nesta situação, uma **reta de perfil**, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

2. Determinar o ponto de interseção da reta **i** com o plano da base, que é o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **I**, que é, imediatamente, o traço horizontal da reta **i**. Acontece que, como atrás se referiu, a reta **i** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que não é possível, de forma direta, determinar quaisquer pontos pertencentes à reta **i**.

Nesse sentido, há que recorrer a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por se recorrer ao rebatimento do plano de perfil (o plano  $\pi$ ) que contém a reta, pelo que se indicaram os seus traços imediatamente. Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento (que foi  $f_r$ ).

Em seguida, rebateram-se os pontos **V** e **M** (os pontos que definem a reta **i**), o que nos permitiu determinar **V<sub>r</sub>** e **M<sub>r</sub>** (os pontos **V** e **M** rebatidos, respetivamente). Por fim, desenhou-se a reta **i<sub>r</sub>** (a reta **i** rebatida) que passa por **V<sub>r</sub>** e por **M<sub>r</sub>** (a reta **i<sub>r</sub>** está definida por dois pontos – os pontos **V<sub>r</sub>** e **M<sub>r</sub>**).

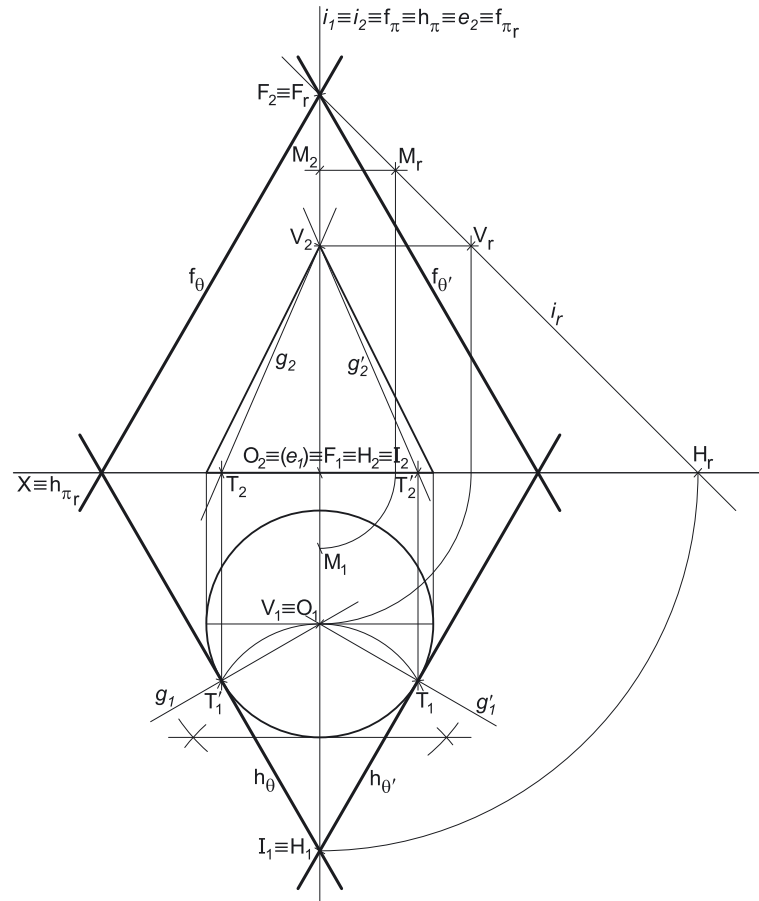
Em seguida, em rebatimento, determinou-se o traço horizontal da reta **i** (que é o ponto **I**) – **H<sub>r</sub>** (o traço horizontal da reta **i** em rebatimento) é o ponto de interseção de **i<sub>r</sub>** (a reta **i** rebatida) com **h<sub>πr</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi$  rebatido). Por fim, inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções do ponto **H**. Como atrás se referiu, o ponto **I** é o traço horizontal da reta **i** (o ponto **H**), facto que se assinalou convenientemente no desenho.

3. Conduzir, pelo ponto **I**, as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da diretriz da superfície (ou base do cone). Tendo em conta que a base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção, as retas tangentes à base do cone são, imediatamente, os traços horizontais dos dois planos tangentes – **h<sub>0</sub>** e **h<sub>0'</sub>**. Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas **h<sub>0</sub>** e **h<sub>0'</sub>** são tangentes à base do cone, respetivamente (**T** e **T'** são os pontos de tangência). As retas **h<sub>0</sub>** e **h<sub>0'</sub>** determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (ponto esse que, neste caso, é **I<sub>1</sub>**, a projeção horizontal do ponto **I**). Atendendo a que o ponto **I** é o traço horizontal da reta **i**, a reta **h<sub>0</sub>** está definida por dois pontos – os pontos **T** e **H**. De forma semelhante, a reta **h<sub>0'</sub>** está também definida por dois pontos – os pontos **T'** e **H**.

Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes **g** e **g'**. Nesse sentido, desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz **g** está definida por dois pontos – os pontos **V** e **T**. A geratriz **g'** está igualmente definida por dois pontos – os pontos **V** e **T'**.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas **i**, **h<sub>0</sub>** e **g** e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas **i**, **h<sub>0'</sub>** e **g'**. Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que os traços horizontais dos dois planos já foram determinados, há, agora, que determinar os traços frontais dos dois planos tangentes, para o que foi necessário determinar previamente o traço frontal da reta  $i$  – o ponto  $F$ . O ponto  $F$  determinou-se com o recurso ao rebatimento do plano  $\pi$ , que tinha sido previamente efetuado para se determinar o ponto  $I$ . Assim,  $F_r$  (o traço frontal da reta  $i$  em rebatimento) é o ponto de interseção de  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) com  $f_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  rebatido). Atendendo a que o ponto  $F$  é um ponto da charneira, o ponto  $F$  roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que se tem imediatamente  $F_2 \equiv F_r$ .

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que é concorrente com  $h_\theta$  no eixo  $X$  e passa pelo ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $i$ ). O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X$ ) e o ponto  $F$ .

Por fim, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), que é concorrente com  $h_{\theta'}$  no eixo  $X$  e passa igualmente pelo ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $i$ ). Assim, o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) está igualmente definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo  $X$ ) e o ponto  $F$ .

### Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares – caso da reta  $i$ , do plano  $\pi$ , de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  (que nos permitiram determinar os traços da reta  $i$ ), das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência.

## 617.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas  $r$  e  $m$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do sólido. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou entre parêntesis). O plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro) é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ).

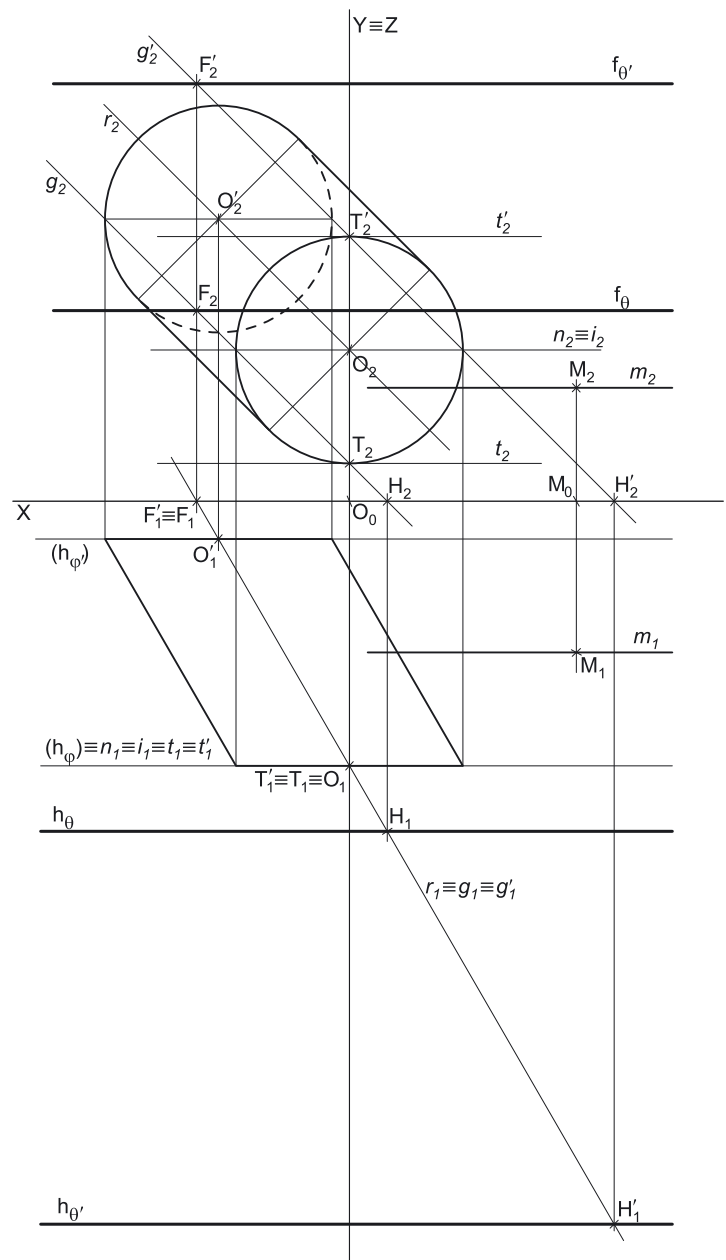
O cilindro tem 6 cm de altura (que é a distância entre os planos das duas bases) e a base de maior afastamento tem 7 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $O$ ), pelo que a base de menor afastamento tem 1 cm de afastamento ( $7 - 6 = 1$ ). Assim, representou-se o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal, em função do seu afastamento (que é 1 cm). O plano  $\varphi'$  não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).

Em seguida, determinou-se o ponto  $O'$ , o centro da base de menor afastamento do sólido. O ponto  $O'$  é o ponto de interseção da reta  $r$  (a reta suporte do eixo do sólido) com o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro) – o ponto  $O'$  teve determinação direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. Por fim, desenharam-se as projeções do cilindro, a partir dos seus contornos aparentes.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que são paralelos à reta  $f$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, por um ponto exterior, duas retas concorrentes – uma reta paralela à reta dada e uma reta paralela às geratrizes do cilindro (essas duas retas definem um plano – o plano  $\theta$ ). Com vista a uma maior economia de traçados, optou-se por se considerar o ponto  $O$  (o centro da base de maior afastamento que é, também, o ponto que define a reta  $r$ ) como o ponto exterior. A reta  $r$  é, assim, a reta paralela às geratrizes do cilindro. Pelo ponto  $O$  conduziu-se, ainda a reta  $n$ , fronto-horizontal (a reta paralela à reta dada). O plano definido pelas retas  $r$  e  $n$  (o plano  $\theta$ ) tem a **orientação** dos planos tangentes.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Note que o plano  $\theta$  é necessariamente um plano de rampa, pois está definido por uma reta oblíqua (a reta  $r$ ) e uma reta fronto-horizontal (a reta  $n$ ).

2. Determina-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano definido pelas retas  $r$  e  $n$ ) com o plano da base de referência do cilindro (a reta  $i$ ); Considerou-se, como base de referência do sólido, a sua base de maior afastamento – a base que está contida no plano  $\varphi$ . Assim, a reta  $i$  é a própria reta  $n$  (facto que se assinalou convenientemente no desenho), pois a reta  $n$  pertence aos dois planos (o plano  $\theta$  e o plano  $\varphi$ ).

3. Conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência). Assim, determinaram-se as retas tangentes à base de referência do cilindro que são paralelas à reta  $i$ . Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é  $i_2$ , a projeção frontal da reta  $i$ ). A reta  $t$  é uma reta fronto-horizontal que está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $i$  – é fronto-horizontal). A reta  $t'$  é outra reta fronto-horizontal, que está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $i$  – é fronto-horizontal).

Já temos uma reta de cada um dos dois planos tangentes – o plano  $\theta'$  está definido pela reta  $t$  e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ) e o plano  $\theta''$  está definido pela reta  $t'$  e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ).

4. Determinar as geratrizes de contacto ou de tangência (as geratrizes  $g$  e  $g'$ ). Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro e da reta  $r$ ). A geratriz  $g'$  está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro e da reta  $r$ ). Neste momento já temos duas retas de cada um dos dois planos tangentes.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido pela sua orientação e por duas retas: o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $t$  e  $g$  e é paralelo ao plano  $\theta$ ; o plano  $\theta''$  está definido pelas retas  $t'$  e  $g'$  e é também paralelo ao plano  $\theta$ .

Analisemos a determinação dos traços de cada um dos dois planos tangentes.

O plano  $\theta'$  está definido por uma reta oblíqua (a geratriz  $g$ ) e uma reta fronto-horizontal (a reta  $t$ ), pelo que o plano  $\theta'$  é, assim, um plano de rampa. Começou-se por determinar o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $f_{\theta'}$  é uma reta fronto-horizontal (porque o plano  $\theta'$  é um plano de rampa). Falta-nos um ponto para definir  $f_{\theta'}$ . Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da geratriz  $g$  – o ponto  $F$ . O traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) passa pelo ponto  $F$  (o traço frontal da geratriz  $g$ ) e é fronto-horizontal –  $f_{\theta'}$  está definido por um ponto (o ponto  $F$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Determinemos, agora, o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $h_{\theta'}$  é uma reta fronto-horizontal (porque o plano  $\theta'$  é um plano de rampa). Falta-nos um ponto para definir  $h_{\theta'}$ . Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da geratriz  $g$  – o ponto  $H$ . O traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ) passa pelo ponto  $H$  (o traço horizontal da geratriz  $g$ ) e é fronto-horizontal –  $h_{\theta'}$  está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

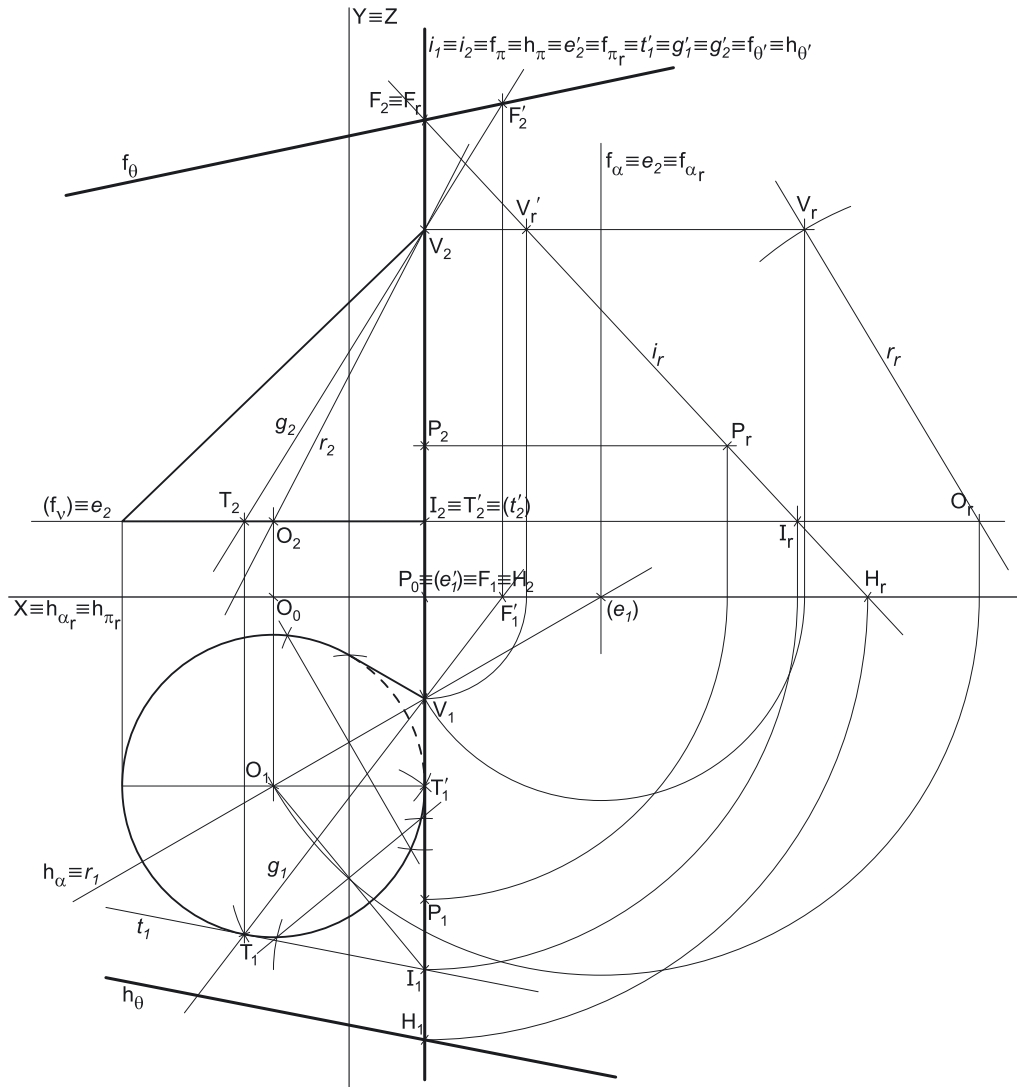
O plano  $\theta''$  está definido por uma reta oblíqua (a geratriz  $g'$ ) e uma reta fronto-horizontal (a reta  $t'$ ), pelo que o plano  $\theta''$  é, assim, outro plano de rampa. Começou-se por determinar o traço frontal do plano  $\theta''$  ( $f_{\theta''}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $f_{\theta''}$  é uma reta fronto-horizontal (porque o plano  $\theta''$  é um plano de rampa). Falta-nos um ponto para definir  $f_{\theta''}$ . Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da geratriz  $g'$  – o ponto  $F'$ . O traço frontal do plano  $\theta''$  ( $f_{\theta''}$ ) passa pelo ponto  $F'$  (o traço frontal da geratriz  $g'$ ) e é fronto-horizontal –  $f_{\theta''}$  está definido por um ponto (o ponto  $F'$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Determinemos, agora, o traço horizontal do plano  $\theta''$  ( $h_{\theta''}$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção –  $h_{\theta''}$  é uma reta fronto-horizontal (porque o plano  $\theta''$  é um plano de rampa). Falta-nos um ponto para definir  $h_{\theta''}$ . Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da geratriz  $g'$  – o ponto  $H'$ . O traço horizontal do plano  $\theta''$  ( $h_{\theta''}$ ) passa pelo ponto  $H'$  (o traço horizontal da geratriz  $g'$ ) e é fronto-horizontal –  $h_{\theta''}$  está definido por um ponto (o ponto  $H'$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

### Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro e da reta  $m$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta'$  e  $\theta''$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , da reta  $n$ , das retas  $t$  e  $t'$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

618.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **P**, pelas respectivas projeções, bem como o plano  $v$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. O plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base do cone) não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou entre parêntesis). O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**).

**Determinação das projeções do cone:**

Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar as duas projeções da base do cone, que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal, pois o plano que a contém (o plano  $v$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Por outro lado foi possível, ainda, desenhar a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), passando pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ), sendo que a reta  $r$  é a reta suporte do eixo do sólido.

Por fim, atendendo a que a geratriz mais à direita do cone é de perfil, foi possível determinar  $V_1$  (a projeção horizontal do vértice do cone), imediatamente, sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ). Este procedimento permitiu-nos concluir o desenho da projeção horizontal do cone.

É dado, no enunciado, que o eixo do cone (o segmento de reta  $[OV]$ ) mede 9 cm – o segmento de reta  $[OV]$  está contido na reta  $r$ , que não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento de reta  $[OV]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da reta  $r$  (o plano  $\alpha$ ), cujos traços determinaram imediatamente – o plano  $\alpha$  é o plano vertical que contém a reta  $r$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que foi o seu traço frontal ( $f_{\alpha}$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, rebateu-se o ponto **O**, o que nos permitiu determinar  $O_r$  (o ponto **O** rebatido). Rebateu-se, também, a projeção horizontal do ponto **V** ( $V_1$ ), o que nos permitiu desenhar a linha de chamada sobre a qual se situa  $V_r$  (o ponto **V** rebatido). Em rebatimento, o segmento  $[OV]$  já está em verdadeira grandeza, pelo que, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  (o ponto **O** rebatido) e com 9 cm de raio (o comprimento do eixo do sólido), determinou-se  $V_r$  (o ponto **V** rebatido), sobre a respetiva linha de chamada. Por fim, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do ponto **V** ( $V_2$ ).

A partir da projeção frontal do ponto **V** ( $V_2$ ), desenhou-se a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ) e concluiu-se o desenho da projeção frontal do cone.

#### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que contêm o ponto **G**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado (o ponto **P**) e pelo vértice do cone, uma reta (a reta  $i$ ). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $i$ , a reta que passa pelo ponto **V** (o vértice do cone) e pelo ponto **P** (o ponto dado) – a reta  $i$  está, assim, definida por dois pontos (os pontos **V** e **P**). A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

Salienta-se que a reta  $i$  é, nesta situação, uma **reta de perfil** (o ponto **P** e o ponto **V** têm a mesma abcissa), cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base (o plano  $v$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto **I**, que é o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano  $v$ . Tendo em conta que o plano  $v$  é um plano projetante frontal, foi possível determinar, de forma direta, a projeção frontal do ponto **I** ( $I_2$ ). No entanto, e como atrás se referiu, a reta  $i$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que não é possível, de forma direta, determinar quaisquer pontos pertencentes à reta  $i$  – não é possível determinar diretamente a projeção horizontal do ponto **I** ( $I_1$ ).

Nesse sentido, há que recorrer a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por se recorrer ao rebatimento do plano de perfil (o plano  $\pi$ ) que contém a reta, pelo que se indicaram os seus traços imediatamente. Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que foi o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ).

Em seguida, rebateram-se os pontos **V** e **P** (os pontos que definem a reta  $i$ ), o que nos permitiu determinar  $V_r$  e  $P_r$  (os pontos **V** e **P** rebatidos, respetivamente). Note que o ponto  $V_r$  é o ponto **V** rebatido, pelo seu segundo rebatimento –  $V_r$  é o ponto **V** rebatido pelo rebatimento do plano de perfil (o plano  $\pi$ ). Por fim, desenhou-se a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) que passa por  $V_r$  e por  $P_r$  (a reta  $i_r$  está definida por dois pontos – os pontos  $V_r$  e  $P_r$ ).

Em seguida, transportou-se o ponto **I** para o rebatimento, o que nos permitiu determinar  $I_r$  (o ponto **I** rebatido), sobre  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida). Por fim, inverteu-se o rebatimento e determinou-se a projeção horizontal do ponto **I** ( $I_1$ ), sobre a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ).

3. Conduzir, pelo ponto **I**, as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base do cone). Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base, respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é  $I_1$ , a projeção horizontal do ponto **I**). A reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) que está definida por dois pontos – os pontos **T** e **I**. Já a reta  $t'$  é uma **reta de topo** (uma reta projetante frontal) que está igualmente definida por dois pontos – os pontos **T'** e **I**.

Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos **V** e **T**. A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos **V** e **T'**. Note que a geratriz  $g'$  é necessariamente **de perfil**.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t'$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta  $i$  nos planos de projeção – os pontos **F** e **H**. Acontece que, como atrás se referiu, as projeções da reta  $i$  não verificam o **Critério de Reversibilidade** (por se tratar de uma reta de perfil), pelo que a determinação dos seus traços não se pode processar de forma direta – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

No entanto, já se recorreu a um processo geométrico auxiliar para a determinação do ponto **I** (ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base). Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta  $i$  nos planos de projeção, com o recurso ao rebatimento do plano  $\pi$ , que havia sido previamente efetuado. Assim,  $F_r$  (o traço frontal da reta  $i$  em rebatimento) é o ponto de interseção de  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) com  $f_{\pi r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  rebatido), tal como  $H_r$  (o traço horizontal da reta  $i$  em rebatimento) é o ponto de interseção de  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) com  $h_{\pi r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  rebatido). Atendendo a que o ponto **F** é um ponto da charneira, o ponto **F** roda sobre si próprio (é um ponto fixo), pelo que se tem imediatamente  $F_2 \equiv F_r$ . Invertendo o rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se as projeções do ponto **H** (o traço horizontal da reta  $i$ ).

Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\theta$ . Começamos pelo traço horizontal ( $h_\theta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $h_\theta$  – o ponto **H**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Já temos a direção que nos faltava. Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ) passa pelo ponto **H** e é paralelo à reta  $t$  – está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (a direção da reta  $t$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

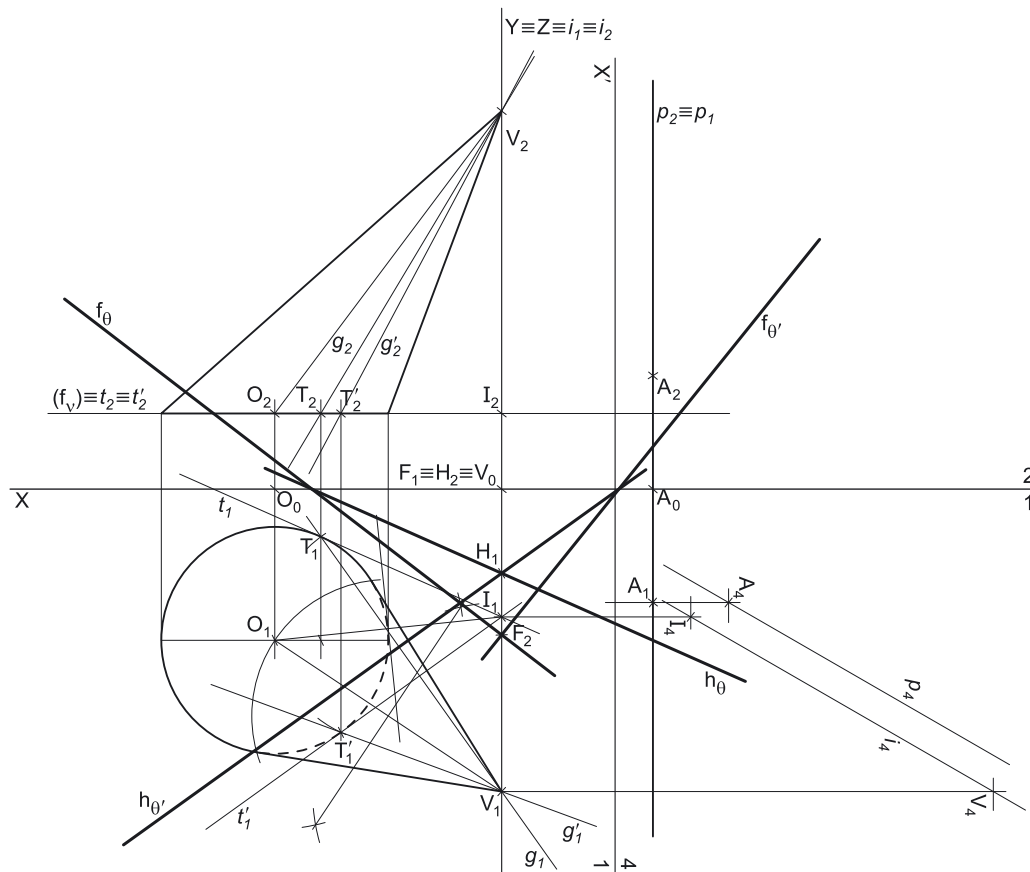
O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_\theta$  – o ponto **F**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é concorrente com  $h_\theta$  no eixo **X** num ponto que se situa fora dos limites do papel, pelo que esse ponto não tem qualquer utilidade para se determinar o traço frontal do plano  $\theta$ . Assim, determinou-se o ponto **F'**, o traço frontal da geratriz **g** (que é outra reta do plano  $\theta$ ). Já temos o ponto que nos faltava. Assim, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está definido por dois pontos – os pontos **F** e **F'**.

Por fim, determinaram-se os traços do plano  $\theta'$ , o que se processou de forma direta. De facto, o plano  $\theta'$  está definido por duas retas de perfil (as retas **i** e **g'**) concorrentes e, ainda, por uma reta de topo (a reta **t'**), concorrente com as outras duas. Nesse sentido, conclui-se imediatamente que o plano  $\theta'$  é um plano de perfil, cujos traços se determinaram de forma direta.

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares – caso do plano  $\nu$ , da reta **r**, do plano  $\alpha$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (para a determinação do vértice **V**, do cone), da reta **i**, do plano  $\pi$  e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  (para a determinação dos pontos **I**, **F** e **H**), das retas **t** e **t'**, das geratrizes **g** e **g'**, da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

## 619.



#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cone bem como a reta **p**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta **p** é uma **reta de perfil**, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade** – a reta **p** está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é dado o ângulo que a reta **p** faz com o Plano Horizontal de Projeção).

Representou-se, ainda, o plano  $\nu$  (o plano que contém a base do cone), pelo seu traço frontal. O plano  $\nu$  (o plano horizontal que contém a base do cone) não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou entre parêntesis). O plano  $\nu$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_\nu$ ) passa necessariamente por **O2** (a projeção frontal do ponto **O**).

Tendo em conta que a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base, e atendendo, ainda, a que a base do cone tem 2 cm de cota (a cota do ponto **O**) e que o cone tem 8 cm de altura, o vértice do cone (o ponto **V**) tem 10 cm de cota ( $2 + 8 = 10$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone que são paralelos à reta  $p$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, pelo vértice do cone, uma reta paralela à reta dada (a reta  $i$ ). A reta  $i$  é a reta paralela à reta  $p$  e que passa pelo ponto  $V$ . A reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $V$ ) e uma direção (é paralela à reta  $p$ ). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

Salienta-se que a reta  $i$  é, também ela, uma **reta de perfil**, cujas projeções também não verificam o **Crítério de Reversibilidade** (à semelhança do referido para a reta  $p$ ).

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base, que é o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, há que determinar o ponto  $I$ , cuja projeção frontal ( $I_2$ ) se determina imediatamente, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Acontece que, como atrás se referiu, a reta  $i$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, pelo que não é possível, de forma direta, determinar quaisquer pontos pertencentes à reta  $i$ .

Nesse sentido, há que recorrer a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por se recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar a reta  $i$  numa reta frontal (de frente), por exemplo. Para tal, foi necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo à reta  $i$ , o que nos permite transformar a reta  $i$  numa reta frontal (paralela ao **plano 4**). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Note que é fundamental que se mantenha o Plano Horizontal de Projeção, para não se perder a referência da reta  $p$  — uma vez que a reta  $p$  está definida pela sua direção (que é o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção) e que a reta  $i$  é paralela à reta  $p$ , o Plano Horizontal de Projeção é o plano de projeção que tem de ser mantido.

Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção — o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $i$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ), pelo que o eixo  $X'$  é perpendicular ao eixo  $X$  inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção da reta  $i$  no **plano 4** ( $i_4$ ), para o que foi necessário determinar as projeções, no **plano 4**, do ponto que define a reta  $i$  — o ponto  $V$ .  $V_4$  é a projeção do ponto  $V$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve — a distância de  $V_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $V_2$  ao eixo  $X$  (que é 10 cm — a cota de  $V$ ). No entanto, ainda não é possível desenhar  $i_4$  (a projeção da reta  $i$  no **plano 4**), pois para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção e, até ao momento, apenas temos um ponto — o ponto  $V_4$ . De facto, falta-nos garantir o paralelismo da reta  $i$  em relação à reta  $p$ , o que se processa com o recurso a um processo geométrico auxiliar.

No entanto, já se recorreu a um processo geométrico auxiliar — à mudança do diedro de projeção. Assim, há que determinar a projeção da reta  $p$  no **plano 4** ( $p_4$ ), para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Assim, determinou-se  $A_4$ , a projeção do ponto  $A$  (o ponto que define a reta  $p$ ) no **plano 4**, em função da sua cota, que se manteve — a distância de  $A_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm — a cota de  $A$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $p_4$  — falta-nos outro ponto ou uma direção.

Atendendo a que é dada a direção da reta  $p$  no enunciado (o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção) e que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta  $p$  é uma reta frontal (de frente), o ângulo que a reta  $p$  faz com o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Assim, por  $A_4$  conduziu-se a reta  $p_4$  fazendo, com o eixo  $X'$ , um ângulo de  $60^\circ$ . Note que, das duas possibilidades para se marcar o ângulo de  $60^\circ$  a partir de  $A_4$ , a que a resolução apresenta é a única que nos garante que o traço frontal da reta  $p$  tem cota negativa (para que se situe no **SPFI**).

Por fim, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) as duas retas (as retas  $i$  e  $p$ ) são retas frontais (de frente), cujas projeções já verificam o **crítério de Reversibilidade**. Assim, é possível garantir o paralelismo da reta  $i$  em relação a reta  $p$ , de forma direta — por  $V_4$  (a projeção do ponto  $V$  no **plano 4**), conduziu-se a reta  $i_4$  (a projeção da reta  $i$  no **plano 4**), paralela a  $p_4$  (a projeção da reta  $p$  no **plano 4**). A reta  $i_4$  está definida por um ponto (o ponto  $V_4$ ) e por uma direção (é paralela a  $p_4$ ).

No diedro de projeção formado pelo plano, as projeções da reta  $i$  já verificam o **Crítério de Reversibilidade** e mantêm-se as cotas. Assim, determinou-se  $I_4$  (a projeção do ponto  $I$  no **plano 4**), sobre  $i_4$  (a projeção da reta  $i$  no **plano 4**), em função da sua cota (que é 2 cm e se manteve). Por fim, determinou-se a projeção horizontal do ponto  $I$  ( $I_1$ ), sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ).

Está, por fim, concluída a **Etapa 2 do método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, paralelos a uma reta dada**.

3. Conduzir, pelo ponto  $I$ , as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da diretriz da superfície (ou base do cone). Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base, respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $t$  e  $t'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é  $I_1$ , a projeção horizontal do ponto  $I$ ). A reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) que está definida por dois pontos — os pontos  $T$  e  $I$ . A reta  $t'$  é outra reta horizontal (de nível) que está igualmente definida por dois pontos — os pontos  $T'$  e  $I$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

**4.** Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T$ . A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T'$ .

**5.** Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $t'$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Para se determinarem os traços dos dois planos tangentes foi necessário, antes de mais, a determinação dos traços da reta  $i$  – o ponto  $H$ . e o ponto  $F$ . O ponto  $H$  determinou-se com o recurso à mudança do diedro de projeção que tinha sido previamente efetuada, para se determinar o ponto  $I$ . Assim,  $H_4$  (a projeção, no plano 4, do traço horizontal da reta  $i$ ) é o ponto de interseção de  $i_4$  (a projeção da reta  $i$  no plano 4) com o eixo  $X'$ , pois o ponto  $H$  tem cota nula. No diedro de projeção formado pelo plano 1 e pelo plano 4, foi possível, ainda, determinar a projeção horizontal do ponto  $H$  ( $H_1$ ), sobre a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ). Uma vez que o ponto  $H$  tem cota nula, determinou-se  $H_2$  (a projeção frontal do ponto  $H$ ), de forma imediata, sobre o eixo  $X$ .

Por outro lado, o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $i$ ) foi determinado, no novo diedro de projeção, a partir da sua projeção horizontal ( $F_1$ ), que se mantém – isso permitiu-nos determinar  $F_4$ , a projeção do ponto  $F$  no plano 4. Atendendo a que, na mudança do diedro de projeção efetuada, se mantém as cotas, a projeção frontal do ponto  $F$  ( $F_2$ ) determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $F_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$ . Sublinha-se que a cota do ponto  $F$  é negativa, pois  $F_4$  se situa para baixo do eixo  $X'$ .

Começamos por determinar o traço horizontal do plano  $\theta$ , ( $h_\theta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $h_\theta$  – o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $i$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Tendo em conta que a reta  $t$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$ , já temos a direção que nos faltava para definir  $h_\theta$  –  $h_\theta$  está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e pela sua direção (é paralelo à reta  $t$ ).

Determinemos, agora, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta$  são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal do plano  $\theta$  passa necessariamente pelo ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $i$ ), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\theta$  –  $f_\theta$  está definido por dois pontos (o ponto de concorrência dos dois traços do plano e o ponto  $F$ ).

Determinemos, em seguida, o traço horizontal do plano  $\theta'$ , ( $h_{\theta'}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $h_{\theta'}$  – o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $i$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Tendo em conta que a reta  $t'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta'$ , já temos a direção que nos faltava para definir  $h_{\theta'}$  –  $h_{\theta'}$  está definido por um ponto (o ponto  $H$ ) e pela sua direção (é paralelo à reta  $t'$ ).

Determinemos, por fim, o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), que é outra reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta'$  são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal do plano  $\theta'$  passa necessariamente pelo ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $i$ ), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{\theta'}$  –  $f_{\theta'}$  está definido por dois pontos (o ponto de concorrência dos dois traços do plano e o ponto  $F$ ).

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cone e da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares – caso do plano  $v$ , da reta  $i$ , de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada (que nos permitiram determinar as projeções do ponto  $I$  e os traços da reta  $i$ ), das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência.



## 620.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto **P** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**).

Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção horizontal do ponto **O'** (o centro da base superior do cilindro). De facto, é dada a sua abcissa e, além disso, sabe-se que a base superior (que tem 3 cm de raio) é tangente ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o ponto **O'** tem, necessariamente, 3 cm de afastamento. Assim, desenhou-se a projeção horizontal da reta  $r(r_1)$ , que é a reta suporte do eixo do sólido.

### Determinação das projeções do cilindro:

É dado, no enunciado, que as geratrizes do cilindro medem 9 cm – tendo em conta que as geratrizes de um cilindro são paralelas ao seu eixo e que estão, todos, compreendidos entre dois planos paralelos (os planos das duas bases), sabe-se imediatamente que as geratrizes do sólido e seu eixo têm o mesmo comprimento.

Assim, o eixo do cilindro (o segmento de reta  $[OO']$ ) mede 9 cm – o segmento de reta  $[OO']$  está contido na reta  $r$ , que não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento de reta  $[OO']$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da reta  $r$  (o plano  $\alpha$ ), cujos traços determinaram imediatamente – o plano  $\alpha$  é o plano vertical que contém a reta  $r$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que foi o seu traço frontal  $(f_\alpha)$ .

Em seguida, rebateu-se o ponto **O**, o que nos permitiu determinar  $O_r$  (o ponto **O** rebatido). Rebateu-se, também, a projeção horizontal do ponto **O'** ( $O'_1$ ), o que nos permitiu desenhar a linha de chamada sobre a qual se situa  $O'_r$  (o ponto **O'** rebatido). Em rebatimento, o segmento  $[OO']$  já está em verdadeira grandeza, pelo que, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  (o ponto **O** rebatido) e com 9 cm de raio (o comprimento do eixo do sólido), determinou-se  $O'_r$  (o ponto **O'** rebatido), sobre a respetiva linha de chamada. Por fim, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do ponto **O'** ( $O'_2$ ).

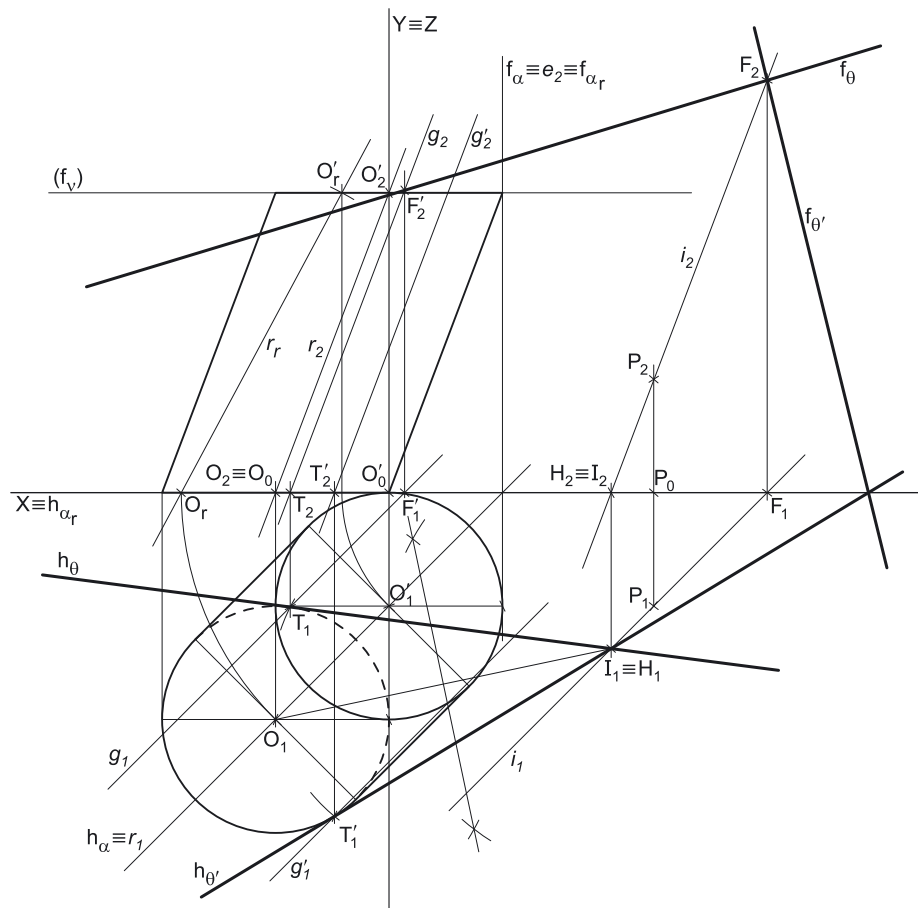
A partir da projeção frontal do ponto **O'** ( $O'_2$ ), desenhou-se a projeção frontal da reta  $r(r_2)$  e representou-se o plano  $v'$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do cilindro. O plano  $v'$  não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou entre parêntesis). O plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do cilindro) é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal  $(f_{v'})$  passa necessariamente por  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto **O'**).

Por fim, desenharam-se as projeções do cilindro, a partir dos seus contornos aparentes.

### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que passam pelo ponto **P**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado, uma reta paralela às geratrizes do cilindro (a reta  $i$ ). A reta  $i$  é a reta paralela às geratrizes do cilindro (e à reta  $r$ , que é a reta suporte do eixo) e que passa pelo ponto **P**. A reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto **P**) e uma direção (a direção das geratrizes do cilindro e da reta  $r$ ). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cilindro.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base de referência – o ponto  $I$ . Considerou-se, como base de referência, a base inferior do cilindro, que é o Plano Horizontal de Projeção. Assim, determinou-se o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano que contém a base de referência do cilindro (o Plano Horizontal de Projeção) – esse ponto (o ponto  $I$ ) é, imediatamente, o traço horizontal da reta  $i$  (o ponto  $H$ ), o que se assinalou convenientemente no desenho.

3. Conduzir, pelo ponto  $I$ , as retas tangentes à base de referência do cilindro – as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base (de referência). Tendo em conta que a base de referência do cilindro está contida no Plano Horizontal de Projeção, as retas tangentes à base (de referência) do cilindro são, imediatamente, os traços horizontais dos dois planos tangentes –  $h_0$  e  $h_{0'}$ . Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $h_0$  e  $h_{0'}$  são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $h_0$  e  $h_{0'}$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é  $I_1$ , a projeção horizontal do ponto  $I$ ). A reta  $h_0$  está definida por dois pontos – os pontos  $T$  e  $I$ . A reta  $h_{0'}$  está definida por dois pontos – os pontos  $T'$  e  $I$ .

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Desenham-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz  $g'$  está igualmente definida por um ponto (o ponto  $T'$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro).

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $h_0$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $h_{0'}$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Tendo em conta que os traços frontais dos dois planos já foram determinados, há, agora, que determinar os traços frontais dos dois planos tangentes, para o que se determinou o traço frontal da reta  $i$  (o ponto  $F$ ).

Assim, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_\theta$  (o ponto  $F$ , que é o traço frontal da reta  $i$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços do plano são duas retas concorrentes num ponto do eixo  $X$ , que se situa fora dos limites do papel. Assim, continua a faltar-nos um ponto para definir  $f_\theta$ . Determinou-se o traço frontal  $d$  geratriz  $g$ , o ponto  $F'$ . Assim, já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\theta$ . O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) está definido por dois pontos – os pontos  $F$  e  $F'$ .

Por fim, determinou-se o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\theta'}$  (o ponto  $F$ , que é o traço frontal da reta  $i$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços do plano são duas retas concorrentes num ponto do eixo  $X$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{\theta'}$ . O traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorência dos dois traços do plano e o ponto  $F$ .

### Traçado:

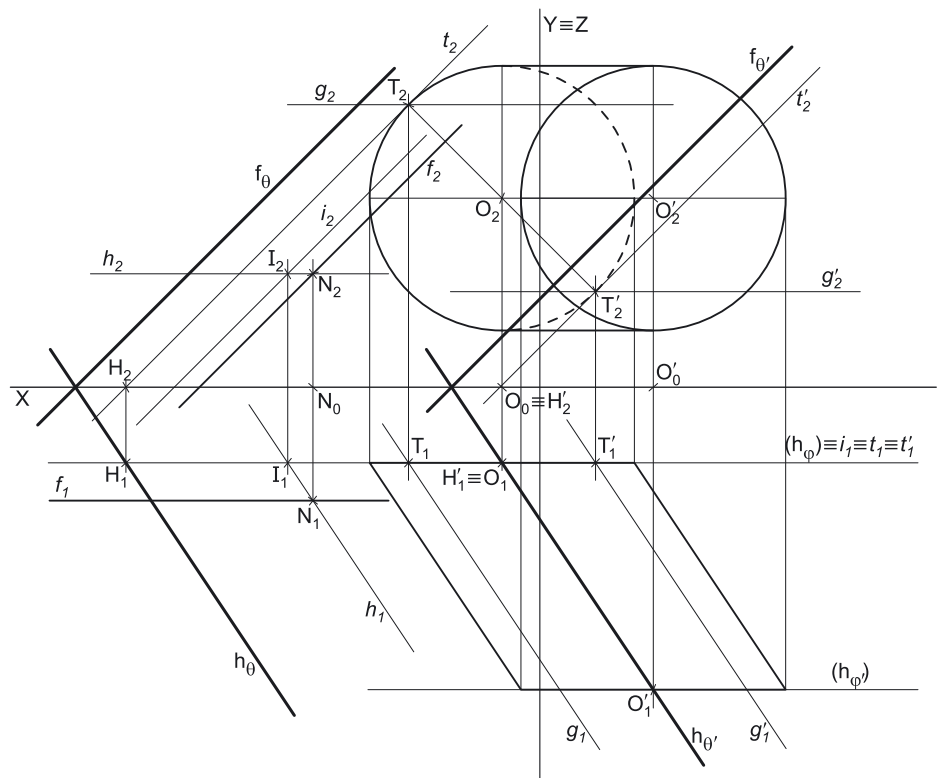
Os dados (as projeções do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares – caso do plano  $v$ , da reta  $r$ , do plano  $\alpha$ , de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  e à reta  $r$  (que nos permitiram determinar as projeções do sólido), da reta  $i$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência.

## 621.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro bem como a reta  $f$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $N$ ) e por uma direção (a direção dada no enunciado). O ponto  $N$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

Representaram-se, também, os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , os planos frontais (de frente) que contêm as duas bases do sólido. Os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  não têm traço frontal, pelo que se representaram, apenas, pelos respetivos traços horizontais (que se identificaram entre parêntesis). O plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro) é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ). O plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro) é também um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ) passa necessariamente por  $O'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O'$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que os pontos **O** e **O'** têm a mesma cota, o eixo do cilindro está contido numa reta horizontal (de nível) – as geratrizes do cilindro estão, igualmente, contidas em retas horizontais (de nível).

#### Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que são paralelos à reta **f**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, por um ponto exterior, duas retas concorrentes – uma reta paralela à reta dada e uma reta paralela às geratrizes do cilindro (essas duas retas definem um plano – o plano  $\theta$ ). Com vista a uma maior economia de traçados, optou-se por se considerar o ponto **N** (o ponto que define a reta **f** e que é dado no enunciado) como o ponto exterior. A reta **f** é, assim, a reta paralela a si própria. Pelo ponto **N** conduziu-se, ainda a reta **h**, paralela às geratrizes (e ao eixo) do cilindro. O plano definido pelas retas **f** e **h** (o plano  $\theta$ ) tem a **orientação** dos planos tangentes.

2. Determina-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano definido pelas retas **f** e **h**) com o plano da base de referência do cilindro (a reta **i**); Considerou-se, como base de referência do sólido, a sua base de menor afastamento – a base que está contida no plano  $\varphi$ . A reta **i** é necessariamente uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta$  (é a reta de interseção do plano  $\theta$  com um plano frontal). Assim, a reta **i** está definida por um ponto (o ponto **I**, que é o ponto de interseção da reta **h** com o plano  $\varphi$ ) e por uma direção (é paralela à reta **f**).

Note que o ponto **I** se determinou de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

3. Conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta **i** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência). Assim, determinaram-se as retas tangentes à base de referência do cilindro que são paralelas à reta **i**. Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas **t** e **t'** são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas **t** e **t'** determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é **i<sub>1</sub>**, a projeção horizontal da reta **i**). A reta **t** é uma reta frontal (de frente) que está definida por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (é paralela à reta **i** e perpendicular ao raio **[OT]** da base de menor afastamento). A reta **t'** é outra reta frontal (de frente) que está igualmente definida por um ponto (o ponto **T'**) e por uma direção (é paralela à reta **i** e perpendicular ao raio **[OT']** da base de menor afastamento).

Já temos uma reta de cada um dos dois planos tangentes – o plano  $\theta'$  está definido pela reta **t** e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ) e o plano  $\theta''$  está definido pela reta **t'** e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ).

4. Determinar as geratrizes de contacto ou de tangência (as geratrizes **g** e **g'**). Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz **g** está definida por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz **g'** está igualmente definida por um ponto (o ponto **T'**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). Neste momento já temos duas retas de cada um dos dois planos tangentes.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido pela sua orientação e por duas retas: o plano  $\theta'$  está definido pelas retas **t** e **g** e é paralelo ao plano  $\theta$ ; o plano  $\theta''$  está definido pelas retas **t'** e **g'** e é também paralelo ao plano  $\theta$ .

Analisemos a determinação dos traços de cada um dos dois planos tangentes.

Começamos por determinar o traço horizontal do plano  $\theta'$ , que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **t**. Já temos um ponto para definir **h<sub>0'</sub>** – falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Tendo em conta que a geratriz **g** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta'$ , já temos a direção que nos faltava para definir **h<sub>0'</sub>** – **h<sub>0'</sub>** está definido por um ponto (o ponto **H**) e pela sua direção (é paralelo à geratriz **g**).

Determinemos, agora, o traço frontal do plano  $\theta'$ , que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta'$  são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\theta'$  (**f<sub>0'</sub>**) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Tendo em conta que a reta **t** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta'$ , já temos a direção que nos faltava para definir **f<sub>0'</sub>** – **f<sub>0'</sub>** está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e pela sua direção (é paralelo à reta **t**).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano  $\theta''$ , que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **H'**, o traço horizontal da reta **t'**. Já temos um ponto para definir **h<sub>0''</sub>** – falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Tendo em conta que a geratriz **g'** é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta''$ , já temos a direção que nos faltava para definir **h<sub>0''</sub>** – **h<sub>0''</sub>** está definido por um ponto (o ponto **H'**) e pela sua direção (é paralelo à geratriz **g'**).

Determinemos, agora, o traço frontal do plano  $\theta''$ , que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os traços do plano  $\theta''$  são duas retas do plano que são concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos um ponto para definir o traço frontal do plano  $\theta''$  (**f<sub>0''</sub>**) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Tendo em conta que a reta **t'** é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta''$ , já temos a direção que nos faltava para definir **f<sub>0''</sub>** – **f<sub>0''</sub>** está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e pela sua direção (é paralelo à reta **t'**).

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro e da reta **f**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta'$  e  $\theta''$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , da reta **h**, da reta **i**, das retas **t** e **t'**, das geratrizes **g** e **g'**, da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'**, ainda, do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

## 622.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **M** e o cone, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

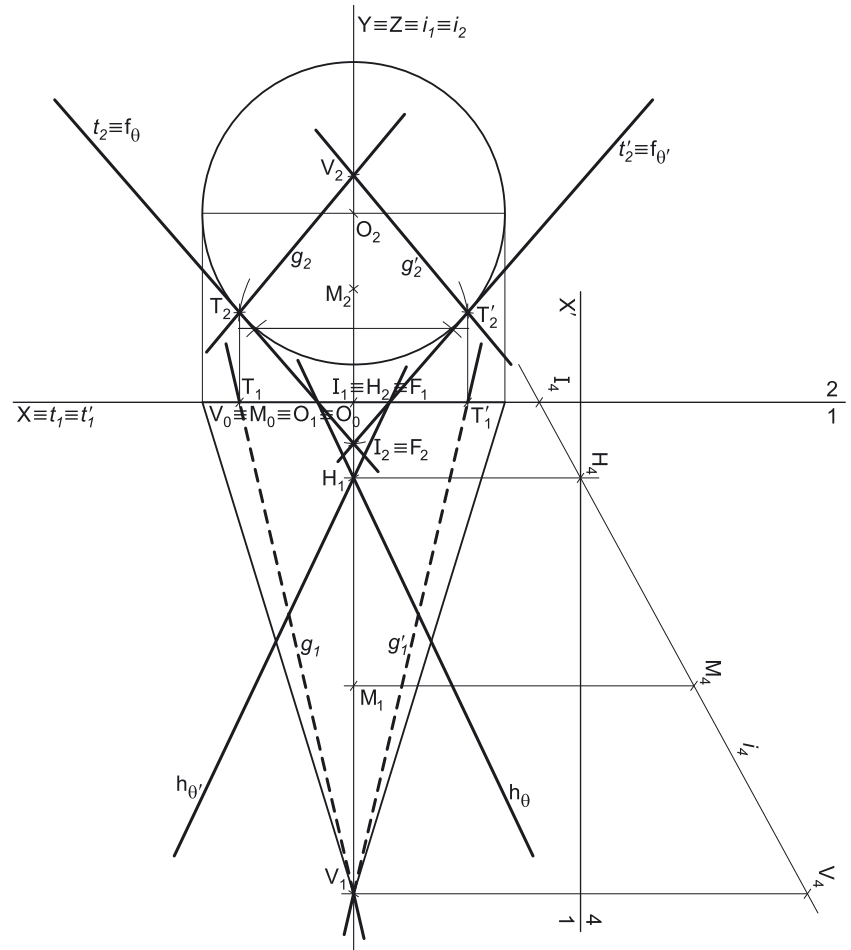
**Resolução:**

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que contêm o ponto **M**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado (o ponto **M**) e pelo vértice do cone, uma reta (a reta  $\hat{i}$ ). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da reta  $\hat{i}$ , a reta que passa pelo ponto **V** (o vértice do cone) e pelo ponto **M** (o ponto dado) – a reta  $\hat{i}$  está, assim, definida por dois pontos (os pontos **V** e **M**). A reta  $\hat{i}$  é a reta de interseção entre os dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

Salienta-se que a reta  $\hat{i}$  é, nesta situação, uma **reta de perfil**, cujas projeções não verificam o **CrITÉrio de Reversibilidade**.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $\hat{i}$  com o plano da base, que é o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **I**, que é, imediatamente, o traço frontal da reta  $\hat{i}$ . Acontece que, como atrás se referiu, a reta  $\hat{i}$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **CrITÉrio de Reversibilidade**, pelo que não é possível, de forma direta, determinar quaisquer pontos pertencentes à reta  $\hat{i}$ . No entanto, é possível determinar, de forma direta, a projeção horizontal do ponto **I** ( $I_1$ ), pois o ponto **I** é o ponto da reta  $\hat{i}$  que tem afastamento nulo (é o traço frontal da reta  $\hat{i}$ ).



Nesse sentido, há que recorrer a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por se recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar a reta  $\hat{i}$  numa reta frontal (de frente), por exemplo. Para tal, foi necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), por um outro plano de projeção (o **plano 4**) paralelo à reta  $\hat{i}$ , o que nos permite transformar a reta  $\hat{i}$  numa reta frontal (paralela ao **plano 4**). Nesse sentido, o novo diedro de projeção tem o Plano Horizontal de projeção (o **plano 1**) em comum com o diedro de projeção anterior, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo à reta  $\hat{i}$ , o eixo  $X'$  é paralelo à projeção horizontal da reta  $\hat{i}$  ( $i_1$ ), pelo que o eixo  $X'$  é perpendicular ao eixo **X** inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo **X**).

Em seguida, foi necessário determinar a projeção da reta  $\hat{i}$  no **plano 4** ( $i_4$ ), para o que foi necessário determinar as projeções, no **plano 4**, dos dois pontos que definem a reta  $\hat{i}$  – os pontos **V** e **M**.  $M_4$  é a projeção do ponto **M** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $M_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $M_2$  ao eixo **X** (que é 3 cm – a cota de **M**).  $V_4$  é a projeção do ponto **V** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $V_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $V_2$  ao eixo **X** (que é 6 cm – a cota de **V**). Por fim, desenhou-se  $i_4$  (a projeção da reta  $\hat{i}$  no **plano 4**), passando por  $V_4$  e por  $M_4$  ( $i_4$  está definida por dois pontos).

No diedro de projeção formado pelo plano, as projeções da reta  $\hat{i}$  já verificam o **CrITÉrio de Reversibilidade** e mantêm-se as projeções horizontais. Assim, como a projeção horizontal do ponto **I** já tinha sido determinada (e se manteve, na mudança do diedro de projeção efetuada), foi possível determinar  $I_4$  (a projeção do ponto **I** no **plano 4**), de forma direta. Por fim, invertendo-se a mudança do diedro de projeção efetuada, determinou-se  $I_2$  (a projeção frontal do ponto **I**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $I_2$  ao eixo **X** é igual a distância de  $I_4$  ao eixo **X**. Note que o ponto **I** tem cota negativa, pois  $I_4$  (a projeção do ponto **I** no **plano 4**) se situa para baixo do eixo  $X'$ .

Como o ponto **I** é o traço frontal da reta  $\hat{i}$ , assinalou-se esse facto diretamente, em projeções – tem-se imediatamente  $F \equiv I$ , em ambas as projeções.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

3. Conduzir, pelo ponto **I**, as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da diretriz da superfície (ou base do cone). Tendo em conta que a base do cone está contida no Plano Frontal de Projeção, as retas tangentes à base do cone são, imediatamente, os traços frontais dos dois planos tangentes –  $f_0$  e  $f_{0'}$ . Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas  $f_0$  e  $f_{0'}$  são tangentes à base do cone, respetivamente (**T** e **T'** são os pontos de tangência). As retas  $f_0$  e  $f_{0'}$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (ponto esse que, neste caso, é  $I_2$ , a projeção frontal do ponto **I**). Atendendo a que o ponto **I** é o traço frontal da reta  $i$ , a reta  $f_0$  está definida por dois pontos – os pontos **T** e **F**. De forma semelhante, a reta  $f_{0'}$  está também definida por dois pontos – os pontos **T'** e **F**.

Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Nesse sentido, desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos **V** e **T**. A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos **V** e **T'**.

Note que, sendo especificamente pedidas (no enunciado) as geratrizes de contacto, bem como as respetivas invisibilidades, se representaram estas geratrizes com a expressividade adequada, bem como com as invisibilidades existentes. Em projeção frontal, as duas geratrizes são visíveis na sua totalidade. Já em projeção horizontal, o segmento **[VT]**, da geratriz  $g$ , é invisível, pois está oculto pela massa do sólido. De forma semelhante, e também em projeção horizontal, o segmento **[VT']**, da geratriz  $g'$ , é invisível, pois está oculto pela massa do sólido.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $f_0$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $f_{0'}$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Tendo em conta que os traços frontais dos dois planos já foram determinados, há, agora, que determinar os traços horizontais dos dois planos tangentes, para o que foi necessário determinar previamente o traço horizontal da reta  $i$  – o ponto **H**. O ponto **H** determinou-se com o recurso à mudança do diedro de projeção que tinha sido previamente efetuada, para se determinar o ponto **I**. Assim,  $H_4$  (a projeção, no plano 4, do traço horizontal da reta  $i$ ) é o ponto de interseção de  $i_4$  (a projeção da reta  $i$  no plano 4) com o eixo  $X'$ , pois o ponto **H** tem cota nula. No diedro de projeção formado pelo plano 1 e pelo plano 4, foi possível, ainda, determinar a projeção horizontal do ponto **H** ( $H_1$ ), sobre a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ). Uma vez que o ponto **H** tem cota nula, determinou-se  $H_2$  (a projeção frontal do ponto **H**), de forma imediata, sobre o eixo **X**.

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_0$ ), que é concorrente com  $f_0$  no eixo **X** e passa pelo ponto **H** (o traço horizontal da reta  $i$ ). O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_0$ ) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X**) e o ponto **H**.

Por fim, determinou-se o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{0'}$ ), que é concorrente com  $f_{0'}$  no eixo **X** e passa igualmente pelo ponto **H** (o traço horizontal da reta  $i$ ). Assim, o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{0'}$ ) está igualmente definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X**) e o ponto **H**.

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ ), bem como as projeções das geratrizes  $g$  e  $g'$  (com as respetivas invisibilidades), que são o objetivo final do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares – caso da reta  $i$ , de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção (que nos permitiram determinar os traços da reta  $i$ ), da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência.

## 623.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o cone bem como a reta  $h$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e pela sua direção (a direção dada no enunciado).

**Resolução:**

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que são paralelos à reta  $h$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, pelo vértice do cone, uma reta paralela à reta dada (a reta  $i$ ). A reta  $i$  é a reta paralela à reta  $h$  e que passa pelo ponto  $V$ . A reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $V$ ) e uma direção (é paralela à reta  $h$ ). A reta  $i$  é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base, que é o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $I$ , o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano que contém a base do cone (o Plano Frontal de Projeção). Neste caso, o ponto  $I$  é, imediatamente, o traço frontal da reta  $i$  (o ponto  $F$ ), facto que se assinalou convenientemente no desenho.

3. Conduzir, pelo ponto  $I$ , as retas tangentes à base do cone, que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base do cone. Tendo em conta que a base do cone está contida no Plano Frontal de Projeção, as retas tangentes à base do cone são, imediatamente, os traços frontais dos dois planos tangentes –  $f_0$  e  $f_0'$ . Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as retas  $f_0$  e  $f_0'$  são tangentes à base do cone, respetivamente ( $T$  e  $T'$  são os pontos de tangência). As retas  $f_0$  e  $f_0'$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (ponto esse que, neste caso, é  $I_2$ , a projeção frontal do ponto  $I$ ). Atendendo a que o ponto  $I$  é o traço frontal da reta  $i$ , a reta  $f_0$  está definida por dois pontos – os pontos  $T$  e  $F$ . De forma semelhante, a reta  $f_0'$  está também definida por dois pontos – os pontos  $T'$  e  $F$ .

Já temos duas retas para definir cada um dos dois planos tangentes.

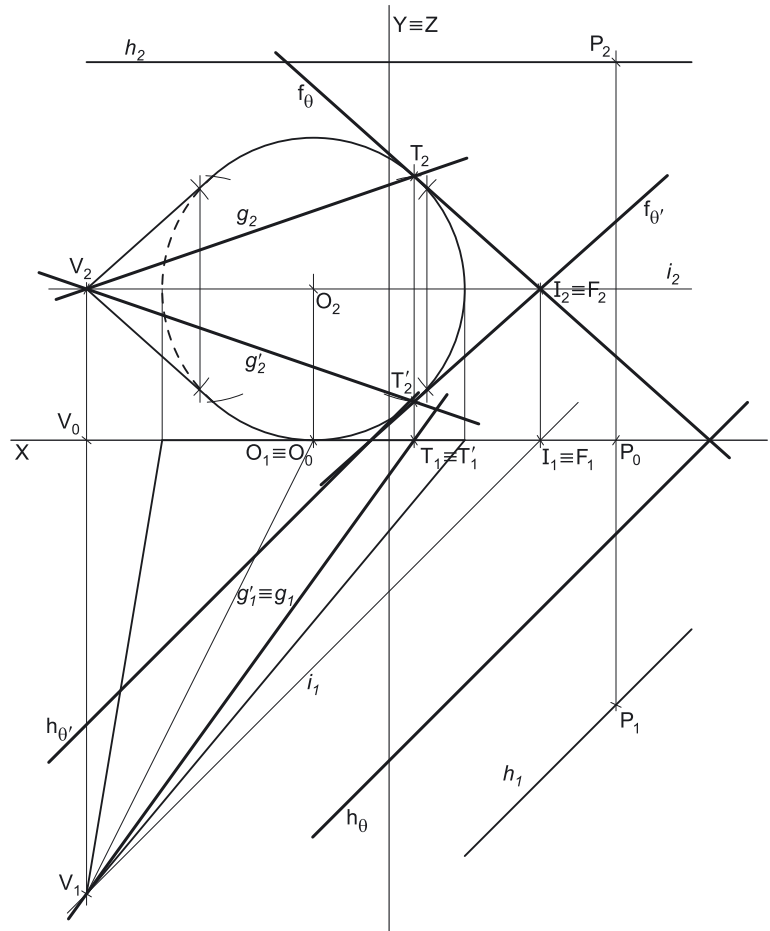
4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . Desenham-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T$ . A geratriz  $g'$  está igualmente definida por dois pontos – os pontos  $V$  e  $T'$ .

Note que, sendo especificamente pedidas (no enunciado) as geratrizes de contacto, bem como as respetivas invisibilidades, se representaram estas geratrizes com a expressividade adequada, bem como com as invisibilidades existentes. Em projeção frontal, as duas geratrizes são visíveis na sua totalidade. Já em projeção horizontal, o segmento  $[VT']$ , da geratriz  $g'$ , é invisível, pois está oculto pela massa do sólido – no entanto, a geratriz  $g'$  está oculta pela geratriz  $g$ , que é visível, pelo que, em projeção horizontal, também não existe qualquer invisibilidade a assinalar.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano  $\theta$  está definido pelas retas  $i$ ,  $f_0$  e  $g$  e o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $i$ ,  $f_0'$  e  $g'$ . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Tendo em conta que os traços frontais dos dois planos já foram determinados, há, agora, que determinar os traços horizontais dos dois planos tangentes.

Assim, determinou-se o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_0$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_0$ ) é concorrente com  $f_0$  no eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $h_0$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $i$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Já temos a direção que nos faltava. Assim, o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_0$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X$ ) e por uma direção (é paralelo à reta  $i$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ) é concorrente com  $f_{\theta'}$  no eixo  $X$ , pelo que já temos um ponto para definir  $h_{\theta'}$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $i$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\theta'$  e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula. Já temos a direção que nos faltava. Assim, o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo  $X$ ) e por uma direção (é paralelo à reta  $i$ ).

### Traçado:

Os dados (as projeções do cone e da reta  $h$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ ), bem como as projeções das geratrizes  $g$  e  $g'$ , que são o objetivo final do exercício. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $i$ , da construção necessária à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, do eixo  $Y \equiv Z$ , que é uma linha de referência).

## 624.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro, bem como a reta  $p$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto  $K$ , representado pelas suas projeções, é o ponto em que a reta  $p$  é concorrente com o eixo  $X$ . A reta  $p$ , sendo uma reta passante e passando por um ponto do  $\beta_{1/3}$  (o ponto  $P$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pois tem coordenadas iguais), é necessariamente uma reta do  $\beta_{1/3}$ .

Em seguida, desenharam-se as projeções da reta  $f$ , a reta suporte do eixo do cilindro – a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $O$ , o centro da base inferior) e por uma direção (a direção dada no enunciado, que é a direção das geratrizes e, também, a direção do eixo do cilindro).

O cilindro tem 8 cm de altura (que é a distância entre os planos das duas bases) e a base inferior tem cota nula (está contida no Plano Horizontal de Projeção), pelo que a base superior tem 8 cm de cota ( $0 + 8 = 8$ ). Assim, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal, em função da sua cota (que é 8 cm). O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).

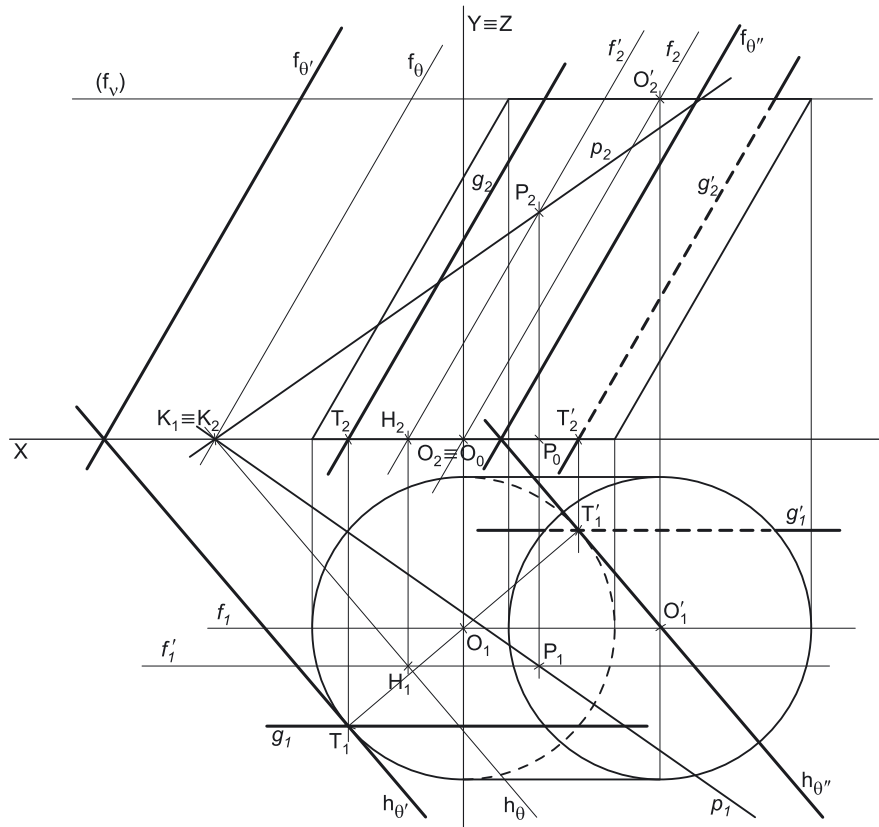
Em seguida, determinou-se o ponto  $O'$ , o centro da base superior do sólido. O ponto  $O'$  é o ponto de interseção da reta  $f$  (a reta suporte do eixo do sólido) com o plano  $v$  (o plano que contém a base superior do cilindro) – o ponto  $O'$  teve determinação direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Por fim, desenharam-se as projeções do cilindro, a partir dos seus contornos aparentes.

### Resolução:

Preende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que são paralelos à reta  $p$ . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, por um ponto exterior, duas retas concorrentes – uma reta paralela à reta dada e uma reta paralela às geratrizes do cilindro (essas duas retas definem um plano – o plano  $\theta$ ). Com vista a uma maior economia de traçados, optou-se por se considerar o ponto  $P$  (o ponto da reta  $p$  que é dado no enunciado) como o ponto exterior. A reta  $p$  é, assim, a reta paralela a si própria. Pelo ponto  $P$  conduziu-se, ainda a reta  $f'$ , paralela às geratrizes do cilindro (e à reta  $f$ ). O plano definido pelas retas  $r$  e  $f'$  (o plano  $\theta$ ) tem a **orientação** dos planos tangentes.

2. Determina-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano definido pelas retas  $p$  e  $f'$ ) com o plano da base de referência do cilindro (a reta  $i$ ); Considerou-se, como base de referência do sólido, a sua base inferior – a base que está contida no Plano Horizontal de Projeção. Assim, a reta de interseção do plano  $\theta$  com o Plano Horizontal de Projeção é o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_{\theta}$ ), que está definido por dois pontos – o ponto  $K$  e o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $f'$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinou-se, ainda, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que está definido por um ponto (o ponto **K**) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano – é paralelo à reta  $f'$ ).

**3.** Conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência). Assim, determinaram-se as retas tangentes à base de referência do cilindro que são paralelas a  $h_0$  – essas retas são, imediatamente, os traços horizontais dos planos tangentes ( $h_{0'}$  e  $h_{0''}$ ), pois a base de referência está contida no Plano Horizontal de Projeção.

Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas  $h_{0'}$  e  $h_{0''}$  são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas  $h_{0'}$  e  $h_{0''}$  determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é  $h_0$  – o traço horizontal do plano  $\theta$ ). A reta  $h_{0'}$  é uma reta horizontal (de nível) que está definida por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (é paralela a  $h_0$  e perpendicular ao raio **[OT]** da base inferior). A reta  $h_{0''}$  é outra reta horizontal (de nível) que está igualmente definida por um ponto (o ponto **T'**) e por uma direção (é paralela a  $h_0$  e perpendicular ao raio **[OT']** da base inferior). Já temos uma reta de cada um dos dois planos tangentes – o plano  $\theta'$  está definido pelo seu traço horizontal ( $h_{0'}$ ) e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ) e o plano  $\theta''$  está definido pelo seu traço horizontal ( $h_{0''}$ ) e pela sua orientação (é paralelo ao plano  $\theta$ ).

**4.** Determinar as geratrizes de contacto ou de tangência (as geratrizes  $g$  e  $g'$ ). Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz  $g'$  está igualmente definida por um ponto (o ponto **T'**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). Neste momento já temos duas retas de cada um dos dois planos tangentes.

**5.** Cada um dos dois planos tangentes está definido pela sua orientação e por duas retas: o plano  $\theta'$  está definido pelas retas  $h_{0'}$  e  $g$  e é paralelo ao plano  $\theta$ ; o plano  $\theta''$  está definido pelas retas  $h_{0''}$  e  $g'$  e é também paralelo ao plano  $\theta$ .

Tendo em conta que os traços horizontais dos dois planos já foram determinados, analisemos a determinação dos traços frontais de cada um dos dois planos tangentes. Cada um dos traços frontais de um plano é uma reta e para definirmos uma reta (qualquer reta) são sempre necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Por outro lado, é necessário ter em consideração que os planos  $\theta'$  e  $\theta''$  são paralelos ao plano  $\theta$ , cujos traços foram previamente determinados.

Começemos por determinar o traço frontal do plano  $\theta'$ . O traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) é concorrente com  $h_{0'}$  (o traço horizontal do plano  $\theta'$ ) no eixo **X**, pelo que já temos um ponto para definir  $f_{\theta'}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Tendo em conta que a geratriz  $g$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta'$ , já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{\theta'}$  –  $f_{\theta'}$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos traços do plano) e pela sua direção (é paralelo à geratriz  $g$  e a  $f_\theta$ ).

Determinemos, em seguida, o traço frontal do plano  $\theta''$ . O traço frontal do plano  $\theta''$  ( $f_{\theta''}$ ) é concorrente com  $h_{0''}$  (o traço horizontal do plano  $\theta''$ ) no eixo **X**, pelo que já temos um ponto para definir  $f_{\theta''}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Tendo em conta que a geratriz  $g'$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\theta''$ , já temos a direção que nos faltava para definir  $f_{\theta''}$  –  $f_{\theta''}$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos traços do plano) e pela sua direção (é paralelo à geratriz  $g'$  e a  $f_\theta$ ).

#### Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro e da reta  $p$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos  $\theta'$  e  $\theta''$ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta  $f'$ , do plano  $v$ , dos traços do plano  $\theta$ , das geratrizes  $g$  e  $g'$ , da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo **Y**  $\equiv$  **Z**, que é uma linha de referência).

## 20 SECÇÕES PLANAS

### 625.

Por **secção plana de um poliedro** entende-se o **polígono** limitado pela linha resultante da intersecção de um plano (plano secante) com as faces desse poliedro.

### 626.

Por **figura da seretação** entende-se a **figura plana** resultante da secção produzida no sólido pelo plano secante.

Por **sólido resultante da secção** (ou **sólido truncado**) entende-se **um outro sólido**, que é **uma parte do sólido inicial** e do qual a figura da secção é uma face – é a parte do sólido inicial que está compreendida entre o plano secante e uma base ou o vértice.

### 627.

Por **plano secante** (ou **plano cortante**) entende-se todo o plano **que corta** (ou **que secciona**) um determinado sólido, produzindo uma secção no mesmo.

### 628.

Tendo em conta que um poliedro é limitado lateralmente por **faces** (que estão contidas em planos) que se intersejam segundo **arestas** (segmentos de reta), a determinação da secção produzida num poliedro por um dado plano processa-se através das sucessivas intersecções – sejam **intersecções entre retas e planos** (para determinar os pontos em que o plano secante corta as arestas do poliedro), sejam **intersecções entre planos** (para determinar os segmentos de retas segundo os quais o plano secante corta as faces do poliedro).

### 629.

A **figura da secção** produzida numa **pirâmide** por um plano paralelo ao plano da base é **sempre** um polígono **semelhante** ao polígono da base, com os seus lados **paralelos** aos lados correspondentes do polígono da base.

### 630.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representou-se, ainda, o plano  $v$  (plano secante), pelo seu traço frontal. O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

#### Resolução:

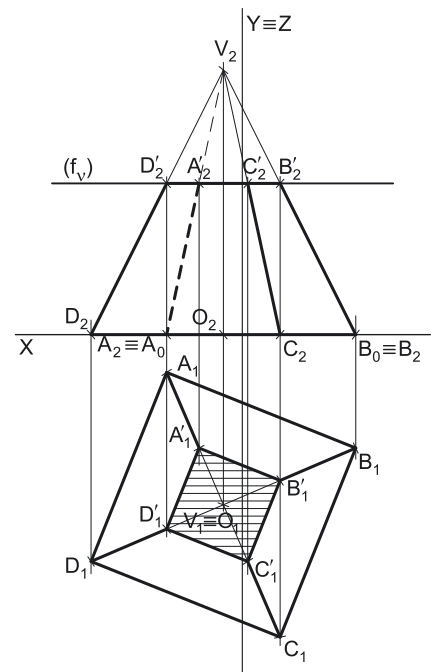
##### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, a partir de **A<sub>1</sub>** e de **B<sub>1</sub>**, construiu-se a projeção horizontal do quadrado, garantindo-se que o polígono se situa, na totalidade, no espaço do *1.º Diedro*. Em seguida determinou-se o ponto **O**, o centro do quadrado. A projeção frontal do quadrado situa-se no eixo **X**, pois todos os seus vértices têm cota nula.

Trata-se de uma pirâmide regular, cuja base é horizontal (de nível), pelo que o ponto **O** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice da pirâmide) se situam necessariamente na mesma reta projetante horizontal, pois o eixo da pirâmide está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta vertical). Assim, tem-se, imediatamente **V<sub>1</sub> ≡ O<sub>1</sub>**. Por outro lado, uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que a base tem cota nula (está contida no Plano Horizontal de Projeção), o vértice da pirâmide tem 7 cm de cota ( $0 + 7 = 7$ ), o que nos permitiu determinar a sua projeção frontal (**V<sub>2</sub>**). Por fim, a partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projeções.

O **contorno aparente frontal** da pirâmide é a linha fechada **[BCDV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**. No entanto, as arestas **[AB]** e **[AD]** estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a da aresta **[AV]**. A aresta lateral **[CV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal).

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado **[ABCD]**, cuja projeção horizontal é o quadrado **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **V**. Este, por ser o vértice de **maior cota** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas laterais **[AV]**, **[BV]**, **[CV]** e **[DV]**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção é um polígono semelhante ao polígono da base (outro quadrado) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do quadrado da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $v$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as quatro arestas laterais), não cortando a base em nenhuma das suas arestas – assim, a figura da secção tem quatro vértices, pelo que é um **quadrilátero** (um quadrado, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção** – estes foram determinados a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ). Assim, o ponto  $A'$  é o ponto em que o plano  $v$  corta a aresta lateral  $[AV]$ , o ponto  $B'$  é o ponto em que o plano  $v$  corta a aresta lateral  $[BV]$ , o ponto  $C'$  é o ponto em que o plano  $v$  corta a aresta lateral  $[CV]$  e, por fim, o ponto  $D'$  é o ponto em que o plano  $v$  corta a aresta lateral  $[DV]$ .

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura, tendo em conta, ainda, as situações de paralelismo existentes – o lado  $[A'B']$  da secção é paralelo ao lado  $[AB]$  da base, o lado  $[B'C']$  da secção é paralelo ao lado  $[BC]$  da base, o lado  $[C'D']$  da secção é paralelo ao lado  $[CD]$  da base e, por fim, o lado  $[A'D']$  da secção é paralelo ao lado  $[AD]$  da base.

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $v$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $v$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção.

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide compreendido entre o plano  $v$  (o plano secante) e o Plano Horizontal de Projeção (o plano que contém a base do sólido). Assim, a base inferior desse novo sólido é o quadrado  $[ABCD]$  e a sua base superior é o quadrado  $[A'B'C'D']$  (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $A$  e  $A'$ . Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base inferior), as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da base superior do sólido), e a aresta lateral  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'D']$ , apesar de serem invisíveis em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção frontal). Já a aresta lateral  $[CC']$  é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos  $C$  e  $C'$  são os vértices de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado  $[ABCD]$ , cuja projeção horizontal é o quadrado  $[A_1B_1C_1D_1]$ . Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ . Estes vértices, por serem os vértices de **maior cota** do sólido, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[A'B']$ ,  $[B'C']$ ,  $[C'D']$  e  $[A'D']$ , da base superior, e as arestas laterais  $[AA']$ ,  $[BB']$ ,  $[CC']$  e  $[DD']$ .

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo  $X$ .

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço frontal do plano secante, porque integra os dados, representou-se a **médio**. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do quadrado). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 631.

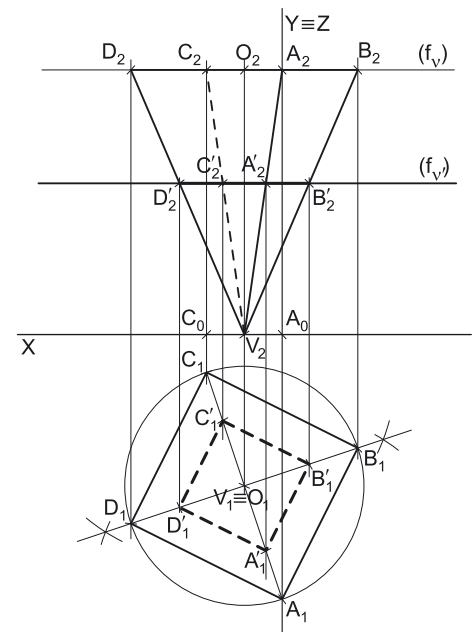
#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$  e  $C$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representaram-se, ainda, os planos  $v$  e  $v'$ , pelos respetivos traços frontais. O plano  $v$  é o plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide. O plano  $v'$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente pelas projeções frontais dos pontos  $A$  e  $C$  ( $A_2$  e  $C_2$ , respetivamente). O plano  $v'$  é o plano secante. Nenhum dos planos  $v$  e  $v'$  tem traço horizontal (ambos os planos são paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que os seus traços frontais se identificaram entre parêntesis.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, a partir de  $A_1$  e de  $C_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do quadrado. Para tal foi necessário determinar, também, o ponto  $O$ , o centro do quadrado. A projeção frontal do quadrado situa-se sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Trata-se de uma pirâmide regular, cuja base é horizontal, pelo que o ponto **O** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice da pirâmide) se situam necessariamente na mesma reta projetante horizontal, pois o eixo da pirâmide está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta vertical) – tem-se, imediatamente,  $V_1 \equiv O_1$ . Por outro lado, uma vez que o vértice da pirâmide tem cota nula, determinaram-se as duas projeções do ponto **V**. Por fim, a partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projeções.

O **contorno aparente frontal** da pirâmide é a linha fechada **[BADV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>A<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. No entanto, as arestas **[BC]** e **[CD]** estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a da aresta **[CV]**. A aresta lateral **[AV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal).

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado **[ABCD]**, cuja projeção horizontal é o quadrado **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **V**. Este, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas laterais **[AV]**, **[BV]**, **[CV]** e **[DV]**.

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção é um polígono semelhante ao polígono da base (outro quadrado) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do quadrado da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $v'$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as quatro arestas laterais), não cortando a base em nenhuma das suas arestas – assim, a figura da secção tem quatro vértices, pelo que é um **quadrilátero** (um quadrado, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção** – estes foram determinados a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ). Assim, o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $v'$  corta a aresta lateral **[AV]**, o ponto **B'** é o ponto em que o plano  $v'$  corta a aresta lateral **[BV]**, o ponto **C'** é o ponto em que o plano  $v'$  corta a aresta lateral **[CV]** e, por fim, o ponto **D'** é o ponto em que o plano  $v'$  corta a aresta lateral **[DV]**.

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura, tendo em conta, ainda, as situações de paralelismo existentes – o lado **[A'B']** da secção é paralelo ao lado **[AB]** da base, o lado **[B'C']** da secção é paralelo ao lado **[BC]** da base, o lado **[C'D']** da secção é paralelo ao lado **[CD]** da base e, por fim, o lado **[A'D']** da secção é paralelo ao lado **[AD]** da base.

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $v'$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $v'$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Todos os lados da **figura da secção** são **invisíveis** em projeção horizontal, pois estão contidos nas faces laterais da pirâmide que são todas invisíveis (em projeção horizontal). Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

### Traçado:

As projeções da pirâmide e o traço frontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y  $\equiv$  Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do quadrado).

## 632.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Representaram-se, ainda, os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , pelos respectivos traços horizontais. O plano  $\varphi$  é o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide. O plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ) passa necessariamente pelas projeções horizontais dos pontos **A** e **B** ( $A_1$  e  $B_1$ , respectivamente). O plano  $\varphi'$  é o plano secante. Nenhum dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  tem traço frontal (ambos os planos são paralelos ao Plano Frontal de Projeção), pelo que os seus traços horizontais se identificaram entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o triângulo equilátero **[ABC]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, a partir de  $A_2$  e de  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respectivamente), construiu-se a projeção frontal do triângulo. Determinou-se, também, o ponto **O**, o centro do triângulo. A projeção horizontal do triângulo situa-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{\varphi}$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, pelas projeções do ponto **O** (o centro da base) conduziram-se as projeções homónimas da reta  $r$  (a reta suporte do eixo da pirâmide). As projeções da reta  $r$  fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, porque é uma reta paralela ao  $\beta_{1/3}$  (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

Por outro lado, uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que a base tem 2 cm de afastamento (o afastamento do plano  $\varphi$ , que é o afastamento dos pontos **A** e **B**), o vértice da pirâmide tem 10 cm de afastamento ( $2 + 8 = 10$ ). Assim, o vértice da pirâmide (o ponto **V**) é o ponto da reta  $r$  que tem 10 cm de afastamento. Por fim, a partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projeções.

O **contorno aparente frontal** da pirâmide é a linha fechada **[ABVC]**, cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2V_2C_2]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[BC]** da base é invisível, por se situar na parte invisível do sólido (separa duas faces do sólido que são invisíveis em projeção frontal – a base e a face lateral **[BCV]**). Já a aresta lateral **[AV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ACBV]**, cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1C_1B_1V_1]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta **[AB]**, da base, é invisível, por se situar na parte invisível do sólido (separa duas faces do sólido que são invisíveis em projeção horizontal – a base e a face lateral **[ABV]**). Já a aresta lateral **[CV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção horizontal).

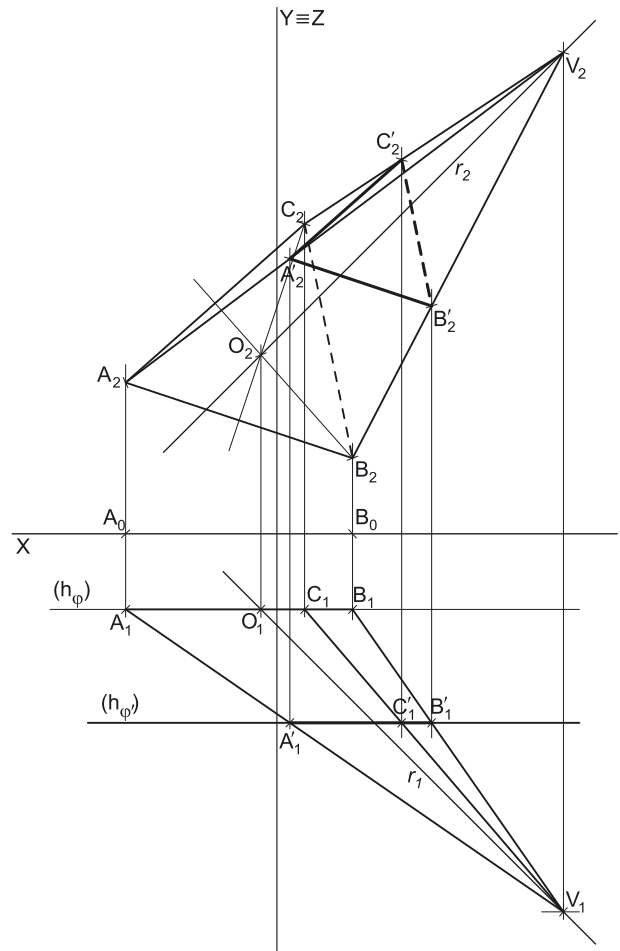
*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção é um polígono semelhante ao polígono da base (outro triângulo equilátero) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do triângulo da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\varphi'$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as três arestas laterais), não cortando a base em nenhuma das suas arestas – assim, a figura da secção tem três vértices, pelo que é um **triângulo** (como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **três vértices** da **figura da secção** – estes foram determinados a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de intersecção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ). Assim, o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral **[AV]**, o ponto **B'** é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral **[BV]** e, por fim, o ponto **C'** é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral **[CV]**.

A partir das projeções dos três vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura, tendo em conta, ainda, as situações de paralelismo existentes – o lado **[A'B']** da secção é paralelo ao lado **[AB]** da base, o lado **[B'C']** da secção é paralelo ao lado **[BC]** da base e, por fim, o lado **[A'C']** da secção é paralelo ao lado **[AC]** da base.

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\varphi'$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\varphi'$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O lado invisível da **figura da secção** (em projeção frontal) é o lado da figura que está contido na face da pirâmide que é invisível em projeção frontal – a face lateral [BCV]. Assim, o lado da figura da secção que se situa naquela face é **invisível** (o lado [B'C']) em projeção frontal. Os outros dois lados da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por estarem contidos em faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (as faces laterais [ABV] e [ACV]).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

### Traçado:

As projeções da pirâmide e o traço horizontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do triângulo).

## 633.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Representaram-se, ainda, os planos  $v$  e  $v'$ , pelos respetivos traços frontais. O plano  $v$  é o plano horizontal (de nível) que contém a face [ABC] do tetraedro. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). O plano  $v'$  é o plano secante. Nenhum dos planos  $v$  e  $v'$  tem traço horizontal (ambos os planos são paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que os seus traços frontais se identificaram entre parêntesis.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do tetraedro:

A face inferior do sólido (o triângulo equilátero [ABC]) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao triângulo. Em seguida, procedeu-se à construção da projeção horizontal do triângulo, inscrita na circunferência, de acordo com os dados – o vértice **C** é o vértice de maior afastamento do triângulo e o seu lado [AB] é fronto-horizontal. A projeção frontal do triângulo situa-se sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

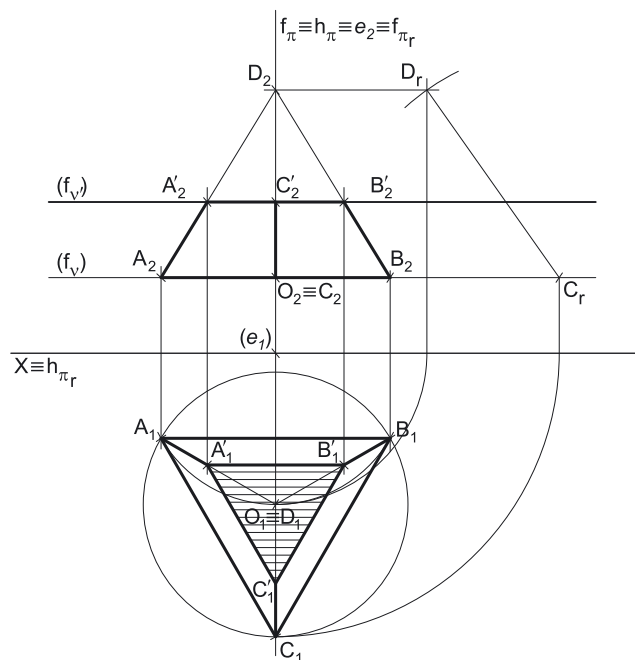
Um tetraedro toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**, qualquer que seja a face que se considere como base. Assim, o vértice **D** (o quarto vértice do sólido) situa-se numa reta que passa pelo ponto **O** e que é ortogonal ao plano que contém o triângulo [ABC] (que é o plano  $v$ ), ou seja, situa-se na reta vertical (projetante horizontal) que passa pelo ponto **O**. Dessa forma, determinou-se  $D_1$ , a projeção horizontal do vértice **D**, coincidente com a projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ).

Apesar de o tetraedro tomar a forma aparente de uma pirâmide triangular regular, não é conhecida a altura dessa pirâmide mas, sim, é adquirido o facto de que **todas as arestas de um tetraedro são iguais** (têm o mesmo comprimento), pois trata-se de um **poliedro regular**. Assim, é um facto que todas as arestas que convergem no vértice **D** (as arestas [AD], [BD] e [CD]) têm o mesmo comprimento dos lados do triângulo [ABC] (que estão em verdadeira grandeza em projeção horizontal). No entanto, nenhuma daquelas arestas se projeta em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de projeção, pois nenhuma daquelas três arestas é paralela a qualquer dos planos de projeção. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano projetante da aresta [CD], que é de perfil – o plano  $\pi$  (que é um plano de perfil). Nesse sentido, representou-se o plano  $\pi$  pelos seus traços, de forma imediata.

Efetou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira (que é o traço frontal do plano –  $f_\pi$ ), bem como os planos ortogonais à charneira, que são planos horizontais – os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Reberam-se os pontos **C** e **O**, determinando  $C_r$  e  $O_r$ . Por  $O_r$  conduziu-se uma perpendicular ao eixo **X**, que corresponde ao eixo do sólido (relativo à face [ABC]) em rebatimento. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $C_r$  e com raio igual à medida do lado do triângulo [ABC] (que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal), determinou-se  $D_r$  sobre a perpendicular ao eixo **X** que passa por  $O_r$ , desenhando-se em seguida a aresta [CD] em rebatimento – o segmento [ $C_rD_r$ ].

Uma vez que, no rebatimento efetuado, os pontos mantêm as suas cotas, transportou-se a cota do ponto **D** para a sua linha de chamada (através de uma paralela ao eixo **X**, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), determinando-se  $D_2$  (a projeção frontal do ponto **D**).

Em seguida, a partir das projeções dos quatro vértices do tetraedro, desenharam-se os seus contornos aparentes.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ACBD]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2C_2B_2D_2]$ . Todos os vértices do sólido pertencem ao contorno aparente frontal. No entanto, a aresta  $[AB]$  é invisível em projeção frontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal (as faces  $[ABD]$  e  $[ABC]$ ). Note, ainda, que **A** e **B** são os vértices de menor afastamento do sólido. Apesar disso, a aresta  $[AB]$  está oculta por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Por outro lado, há a referir que a aresta  $[CD]$  é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (o vértice **C** é o vértice de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é o triângulo  $[ABC]$ , cuja projeção horizontal é o triângulo  $[A_1B_1C_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **D**. Este, por ser o vértice de **maior cota** do tetraedro, é **visível**, bem como todas as arestas que neles convergem, ou seja, as arestas  $[AD]$ ,  $[BD]$  e  $[CD]$  são visíveis em projeção horizontal.

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo ao plano da face inferior, pelo que a figura da secção é um polígono semelhante ao polígono da face inferior do tetraedro (outro triângulo equilátero) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do triângulo daquela face. Por outro lado, o plano secante (o plano  $v'$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as três arestas não horizontais do sólido, não cortando a face inferior em nenhuma das suas arestas – assim, a figura da secção tem três vértices, pelo que é um **triângulo** (como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **três vértices da figura da secção** – o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $v'$  corta a aresta  $[AD]$ , o ponto **B'** é o ponto em que o plano  $v'$  corta a aresta  $[BD]$  e, por fim, o ponto **C'** é o ponto em que o plano  $v'$  corta a aresta  $[CD]$ . Salienta-se que os pontos **A'** e **B'** foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se da determinação dos pontos de interseção das arestas do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ).

No entanto, o mesmo não acontece com o ponto **C'**, pois este ponto está contido numa aresta de perfil do sólido (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**). Assim, de uma forma direta, é apenas possível determinar a projeção frontal do ponto **C'** ( $C'_2$ ). No entanto, uma vez que o plano secante é paralelo ao plano que contém a face inferior do sólido, e como acima se referiu, a figura da secção tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes da face  $[ABC]$ , o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da figura da secção. Assim, o lado  $[A'B']$  da secção é paralelo ao lado  $[AB]$  da face  $[ABC]$ , tal como o lado  $[B'C']$  da secção é paralelo ao lado  $[BC]$  da face  $[ABC]$  e, ainda, como o lado  $[A'C']$  da secção é paralelo ao lado  $[AC]$  da face  $[ABC]$ . Atendendo ao exposto, foi possível determinar a projeção horizontal do ponto **C'** ( $C'_1$ ).

Note que, no entanto, uma outra forma para determinar a projeção horizontal do ponto **C** ( $C'_1$ ), seria o recurso ao rebatimento da aresta  $[CD]$ , previamente efetuado para a determinação da projeção frontal do ponto **D**.

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $v'$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $v'$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção.

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de tetraedro – o tronco do sólido compreendido entre o plano  $v'$  (o plano secante) e o plano  $v$  (o plano que contém a face inferior base do sólido). Assim, a base inferior desse novo sólido é o triângulo equilátero  $[ABC]$  e a sua base superior é o triângulo equilátero  $[A'B'C']$  (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ACBB'C'A']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2C_2B_2B'_2C'_2A'_2]$ . Todos os vértices do sólido pertencem ao contorno aparente frontal. No entanto, a aresta  $[AB]$  (da base inferior) e a aresta  $[A'B']$  (da base superior) são invisíveis em projeção frontal, pois separam faces invisíveis em projeção frontal (a aresta  $[AB]$  separa as faces  $[ABB'A']$  e  $[ABC]$  e a aresta  $[A'B']$  separa as faces  $[ABB'A']$  e  $[A'B'C']$ ). Note, ainda, que **A**, **B**, **A'** e **B'** são os vértices de menor afastamento do sólido. Apesar disso, aquelas duas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Por outro lado, há a referir que a aresta  $[CC']$  é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (os vértices **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é o triângulo equilátero  $[ABC]$ , cuja projeção horizontal é o triângulo  $[A_1B_1C_1]$ . Em projeção horizontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A'**, **B'** e **C'**. Estes vértices, por serem os vértices de **maior cota** do sólido, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[A'B']$ ,  $[B'C']$  e  $[C'D']$ , da base superior, e as arestas laterais  $[AA']$ ,  $[BB']$  e  $[CC']$ .

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X**.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço frontal do plano secante, porque integra os dados, representou-se a **médio**. As projeções do tetraedro, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do triângulo ou, ainda, os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , para a determinação das projeções do sólido). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 634.

### Dados:

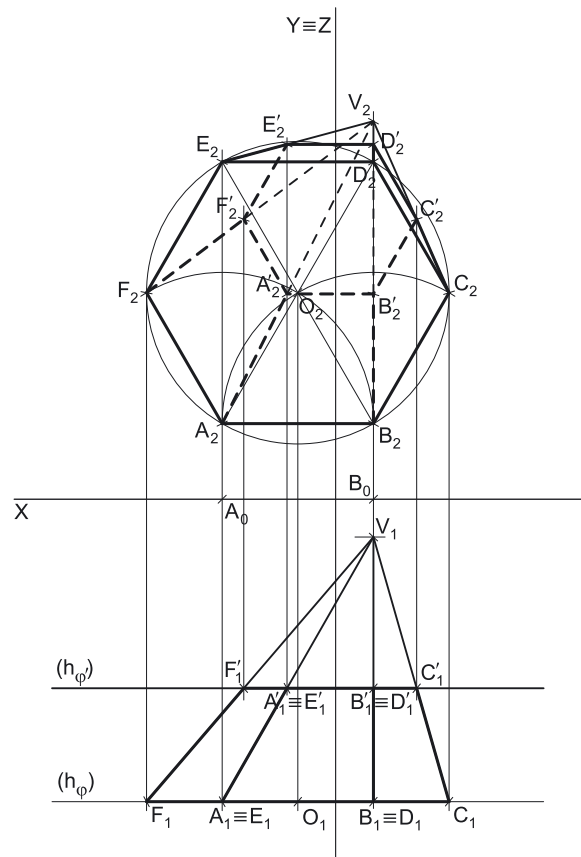
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Representaram-se, ainda, os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , pelos respectivos traços horizontais. O plano  $\varphi$  é o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide. O plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ) passa necessariamente pelas projeções horizontais dos pontos **A** e **B** ( $A_1$  e  $B_1$ , respetivamente). O plano  $\varphi'$  é o plano secante. Nenhum dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  tem traço frontal (ambos os planos são paralelos ao Plano Frontal de Projeção), pelo que os seus traços horizontais se identificaram entre parêntesis.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o hexágono **[ABCDEF]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, a partir de  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção frontal do hexágono, garantindo-se que a figura se situa no espaço do 1.º Diedro (para que a pirâmide se situe no espaço do 1.º Diedro, como o enunciado pede expressamente). Para tal foi necessário determinar, também,  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**, o centro do hexágono). A projeção horizontal do hexágono situa-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{\varphi}$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Tendo em conta que as arestas laterais **[BV]** e **[DV]** da pirâmide são de perfil, e sendo dada a cota do ponto **V** (o vértice da pirâmide), sabe-se que o ponto **V** é o ponto que tem a mesma abcissa dos pontos **B** e **D** e que tem 10 cm de cota, o que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**). Por outro lado, uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que o vértice tem afastamento inferior à base, que tem 8 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **B**), o vértice da pirâmide tem 1 cm de afastamento ( $8 - 7 = 1$ ), o que nos permitiu determinar a projeção horizontal do ponto **V** ( $V_1$ ). Por fim, a partir das projeções dos sete vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projeções.



O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ABCVEF]**, cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2V_2E_2F_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **D**. Este vértice, por ser um dos vértices de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[CD]** e **[DE]**, da base, e a aresta lateral **[DV]**. As arestas laterais **[AV]**, **[BV]** e **[FV]** são invisíveis, por se situarem na parte invisível do sólido (separam faces do sólido que são invisíveis em projeção frontal).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[CDEFV]**, cuja projeção horizontal é o polígono  $[C_1D_1E_1F_1V_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **B**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[BC]** e **[AF]**, da base, e as arestas laterais **[AV]** e **[BV]**. No entanto, todas estas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal. Por outro lado, as arestas laterais **[DV]** e **[EV]** são visíveis (em projeção horizontal), por se situarem na parte visível do sólido (os pontos **D**, **E** e **V** são os vértices de maior cota da pirâmide).

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção é um polígono semelhante ao hexágono da base (outro hexágono regular) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do hexágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\varphi'$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as seis arestas laterais), não cortando a base em nenhuma das suas arestas – assim, a figura da secção tem seis vértices, pelo que é um **hexágono** (como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices** da **figura da secção** – o ponto  $A'$  é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral **[AV]**, o ponto  $B'$  é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral **[BV]**, o ponto  $C'$  é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral **[CV]**, o ponto  $D'$  é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral **[DV]**, o ponto  $E'$  é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral **[EV]** e, por fim, o ponto  $F'$  é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral **[FV]**. Salienta-se que os pontos  $A'$ ,  $C'$ ,  $E'$  e  $F'$  foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se da determinação dos pontos de interseção das arestas laterais do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

No entanto, o mesmo não acontece com os pontos  $B'$  e  $D'$ , pois estes dois pontos estão contidos em arestas de perfil do sólido (cujas projeções não verificam o **Crítério de Reversibilidade**). Assim, de uma forma direta, é apenas possível determinar a projeção horizontal dos pontos  $B'$  e  $D'$  ( $B'_1$  e  $D'_1$ , respetivamente). No entanto, uma vez que o plano secante é paralelo ao plano que contém a base do sólido, e como acima se referiu, a figura da secção tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes da base **[ABCDEF]**, o que nos permitiu desenhar a projeção frontal da figura da secção. Assim, o lado  $[A'B']$  da secção é paralelo ao lado **[AB]** da base, o lado  $[B'C']$  da secção é paralelo ao lado **[BC]** da base, o lado  $[C'D']$  da secção é paralelo ao lado **[CD]** da base, o lado  $[D'E']$  da secção é paralelo ao lado **[DE]** da base, o lado  $[E'F']$  da secção é paralelo ao lado **[EF]** da base e, por fim, o lado  $[A'F']$  da secção é paralelo ao lado **[AF]** da base. Atendendo ao exposto, foi possível determinar as projeções frontais dos pontos  $B'$  e  $D'$  ( $B'_2$  e  $D'_2$ , respetivamente).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\varphi$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\varphi'$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

**Determinação das projeções do sólido resultante da secção:**

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide compreendido entre o plano  $\varphi'$  (o plano secante) e o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base da pirâmide). Assim, a base de menor afastamento desse novo sólido é o hexágono **[ABCDEF]** e a sua base de maior afastamento é o hexágono **[A'B'C'D'E'F']** (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ABCC'D'E'EF]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>E'<sub>2</sub>F<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem cinco vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **D**, **A'**, **B'** e **F'**. O vértice **D**, por ser um dos vértices de **maior afastamento** do sólido, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[CD]** e **[DE]**, da base de maior afastamento, e a aresta lateral **[DD']**. Os vértices **A'**, **B'** e **F'**, por serem dos vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[E'F']**, **[A'F']**, **[A'B']** e **[B'C']**, da base de menor afastamento, e as arestas laterais **[FF']**, **[AA']** e **[BB']**.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[CDEFF'E'D'C']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>F'<sub>1</sub>E'<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A**, **B**, **A'** e **B'**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AF]**, **[AB]** e **[BC]**, da base de maior afastamento, as arestas **[A'F']**, **[A'B']** e **[B'C']**, da base de menor afastamento, e as arestas laterais **[AA']** e **[BB']**. No entanto, todas estas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

A **figura da secção** é invisível em ambas as projeções (a área do corte é invisível em ambas as projeções), pelo que não há lugar ao seu preenchimento com tracejado.

**Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço horizontal do plano secante, porque integra os dados, representou-se a **médio**. O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do hexágono).

## 635.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Representaram-se, ainda, os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , pelos respetivos traços horizontais. O plano  $\varphi$  é o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide. O plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi}$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto **A** (**A<sub>1</sub>**). O plano  $\varphi'$  é o plano secante. Nenhum dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  tem traço frontal (ambos os planos são paralelos ao Plano Frontal de Projeção), pelo que os seus traços horizontais se identificaram entre parêntesis.

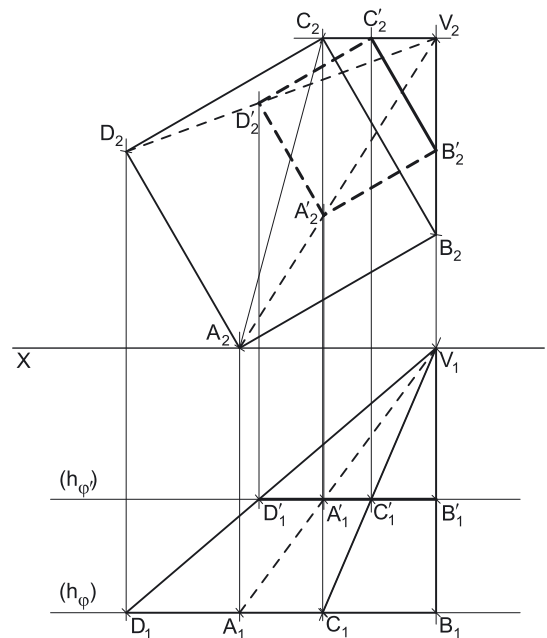
**Resolução:**

**Determinação das projeções da pirâmide:**

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que o quadrado **[ABCD]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, a partir de **A<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**), mediu-se (em verdadeira grandeza) o ângulo que o lado **[AB]** faz com o Plano Horizontal de Projeção, o que nos permitiu desenhar a projeção frontal da reta suporte do lado **[AB]**. Sobre essa reta mediram-se os 6 cm (a medida do lado do quadrado) e determinou-se **B<sub>2</sub>**, a projeção frontal do ponto **B**.

A partir de **A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção frontal do quadrado, garantindo-se que a figura se situa no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro (para que a pirâmide se situe no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro, como o enunciado pede expressamente). Determinou-se, também, o ponto **O**, o centro do quadrado. A projeção horizontal do quadrado situa-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{\varphi}$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Tendo em conta que a aresta lateral **[BV]** da pirâmide é de perfil, sabe-se que o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem a mesma abcissa do ponto **B** – atendendo a que o vértice da pirâmide tem afastamento nulo, determinou-se imediatamente **V<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **V**). Por outro lado, uma vez que a aresta lateral **[CV]** da pirâmide é horizontal (de nível), sabe-se que o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem a mesma cota do ponto **C**, o que nos permitiu determinar **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **V**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ABVCD]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2V_2C_2D_2]$ . Todos os vértices da pirâmide pertencem ao contorno aparente frontal. No entanto, a aresta  $[BC]$  é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (a face lateral  $[BCV]$  e a base  $[ABCD]$ ). Note que  $C$  e  $D$  são dois dos vértices de maior afastamento do sólido. Por outro lado, há a referir que as arestas laterais  $[AV]$  e  $[DV]$  são invisíveis em projeção frontal, pois separam faces invisíveis em projeção frontal (a aresta lateral  $[AV]$  separa as faces  $[ABV]$  e  $[ADV]$  e a aresta lateral  $[DV]$  separa as faces  $[ADV]$  e  $[CDV]$ ).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[BCDV]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1V_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice  $A$ . Este, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$ , da base, e a aresta lateral  $[AV]$ . No entanto, as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a da aresta lateral  $[AV]$ . Já a aresta lateral  $[CV]$  é visível (em projeção horizontal), por se situar na parte visível do sólido (os vértices  $C$  e  $V$  são os vértices de maior cota do sólido).

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção é um polígono semelhante ao polígono da base (outro quadrado) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do quadrado da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\varphi'$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as quatro arestas laterais), não cortando a base em nenhuma das suas arestas – assim, a figura da secção tem quatro vértices, pelo que é um **quadrilátero** (um quadrado, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção** – o ponto  $A'$  é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral  $[AV]$ , o ponto  $B'$  é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral  $[BV]$ , o ponto  $C'$  é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral  $[CV]$  e, por fim, o ponto  $D'$  é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a aresta lateral  $[DV]$ . Salienta-se que os pontos  $A'$ ,  $C'$  e  $D'$  foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se da determinação dos pontos de interseção das arestas laterais do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

No entanto, o mesmo não acontece com o ponto  $B'$ , pois este ponto está contido numa aresta de perfil do sólido (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**). Assim, de uma forma direta, é apenas possível determinar a projeção horizontal do ponto  $B'$  ( $B'_1$ ). No entanto, uma vez que o plano secante é paralelo ao plano que contém a base da pirâmide, e como atrás se referiu, a figura da secção tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do quadrado  $[ABCD]$ , o que nos permitiu desenhar a projeção frontal da figura da secção. Assim, o lado  $[A'B']$  da secção é paralelo ao lado  $[AB]$  do quadrado  $[ABCD]$ , tal como o lado  $[B'C']$  da secção é paralelo ao lado  $[BC]$  do quadrado  $[ABCD]$ , tal como o lado  $[C'D']$  é paralelo ao lado  $[CD]$  do quadrado  $[ABCD]$  e, ainda, como o lado  $[A'D']$  da secção é paralelo ao lado  $[AD]$  do quadrado  $[ABCD]$ . Atendendo ao exposto, foi possível determinar a projeção frontal do ponto  $B'$  ( $B'_2$ ).

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\varphi'$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\varphi'$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

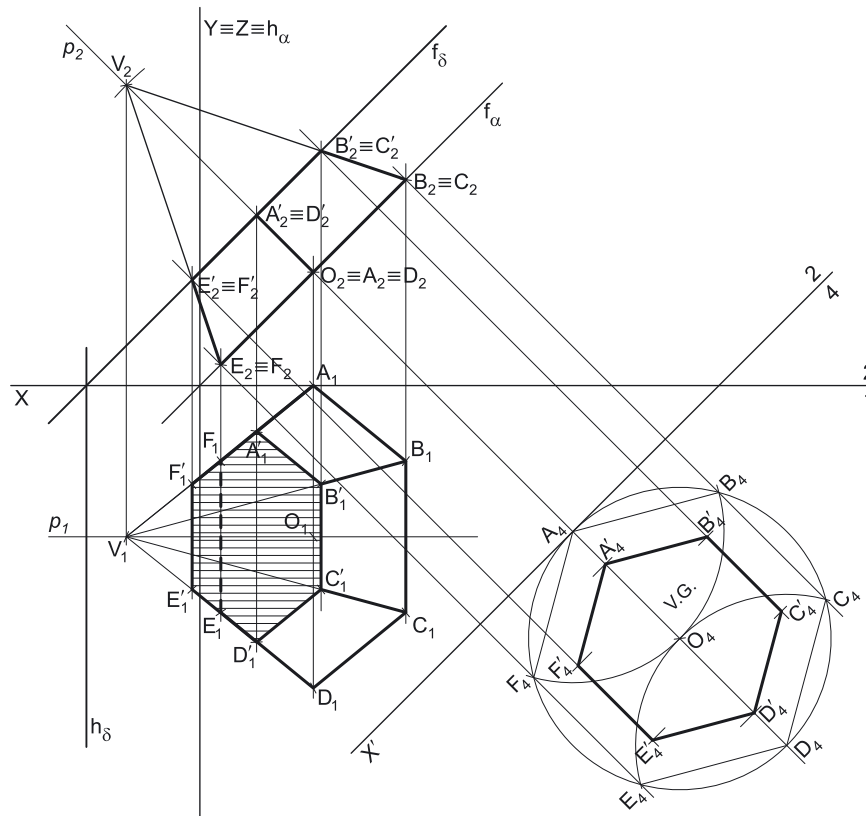
Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais  $[ABV]$ ,  $[ADV]$  e  $[CDV]$ . Assim, os (três) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados  $[A'B']$ ,  $[A'D']$  e  $[C'D']$ ). O lado  $[B'C']$  da **figura da secção** é **visível** em projeção frontal, por se situar numa face da pirâmide que é visível em projeção frontal (a face lateral  $[BCV]$ ).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

#### Traçado:

As projeções da pirâmide e o traço horizontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo  $X$  representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do quadrado).

636.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados e pertencente ao plano  $\alpha$ . O ponto  $O$  pertence ao plano, pelo que a sua projeção frontal ( $O_2$ ) se situam sobre o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\delta$  (o plano secante) pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\delta$  é paralelo ao plano  $\alpha$ , pelo que nos seus traços são paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$  (para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**).

**Resolução:***Determinação das projeções do hexágono da base da pirâmide:*

O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base da pirâmide (o hexágono) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do hexágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**.

Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção. Nesta situação, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível), pois um plano horizontal (de nível) é um plano projetante frontal, tal como o plano  $\alpha$  (que é um plano de topo) – um plano horizontal (de nível) é um **caso particular** dos planos projetantes frontais. Para transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\alpha$ , o eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ) é paralelo ao traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$O_4$  é a projeção do ponto  $O$  no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $O_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $O_1$  ao eixo  $X$  (que é 4 cm – o afastamento do ponto  $O$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é paralelo ao **plano 4**, o hexágono projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**, pelo que já é possível efetuar a sua construção. Por outro lado, a circunferência circunscrita ao hexágono 't' tangente ao Plano Frontal de Projeção, prelo que a circunferência tem 4 cm de raio (o afastamento do ponto  $O$ ). Assim, com o compasso, fezemos centro em  $O_4$  (a projeção do ponto  $O$  no **plano 4**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção (no **plano 4**) da circunferência circunscrita ao hexágono e efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção (no **plano 4**) da figura.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Note que se atendeu à posição do hexágono que o enunciado refere expressamente – dois dos lados da figura são de topo (ortogonais ao Plano Frontal de Projeção). Uma vez que se manteve o Plano Frontal de Projeção (na mudança do diedro de projeção efetuada), mantém-se a ortogonalidade desses dois lados do hexágono em relação ao Plano Frontal de Projeção. Em seguida, identificaram-se os vértices do hexágono de forma arbitrária (mas sequencial), pois o enunciado é omissivo, e determinaram-se as suas projeções frontais (que se situam sobre o traço frontal do plano  $\alpha$ , pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal).

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, de forma a determinar as projeções horizontais dos vértices do hexágono, sobre as respetivas linhas de chamada (no diedro de projeção inicial) e em função dos respetivos afastamentos, que se mantiveram. Assim,  $A_1$  é a projeção horizontal do ponto  $A$ , que se determinou em função do seu afastamento (que é nulo e se manteve) –  $A_1$  situa-se no eixo  $X$ , tal como  $A_4$  se situava no eixo  $X'$ .  $B_1$  é a projeção horizontal do ponto  $B$  e determinou-se em função do seu afastamento, que se manteve – a distância de  $B_1$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $B_4$  ao eixo  $X'$ . O procedimento foi idêntico para os restantes vértices do hexágono, o que nos permitiu determinar a projeção horizontal da figura. Sublinha-se que os pontos  $B$  e  $F$  têm o mesmo afastamento, tal como os pontos  $C$  e  $E$  também têm o mesmo afastamento.

### Determinação das projeções da pirâmide:

A pirâmide é **regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (o plano  $\alpha$ ), que é uma reta frontal (de frente). Assim, pelas projeções do ponto  $O$  conduziram-se as projeções homónimas da reta  $p$ , a reta suporte do eixo da pirâmide. A reta  $p$  é ortogonal ao plano  $\alpha$ , pois tem as suas projeções perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\alpha$  (a reta  $p$  verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\alpha$ ).

A altura da pirâmide é a distância do vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base (o plano  $\alpha$ ) – como a pirâmide é **regular**, a sua altura corresponde ao comprimento do seu eixo (o comprimento do segmento de reta  $[OV]$ ), que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois a reta  $p$  (a reta que o contém) é paralela ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a partir de  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ), sobre  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ) mediram-se os 7 cm (a altura da pirâmide), determinando-se  $V_2$  (a projeção frontal do vértice da pirâmide). Note que se garantiu que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro, pois o vértice tem cota positiva.  $V_1$  (a projeção horizontal do vértice) está sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ), pois o ponto  $V$  é um ponto da reta  $p$ . A partir das projeções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[CDEV]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[C_2D_2E_2V_2]$ . Em projeção frontal, existem três vértices que não integram o contorno aparente frontal do sólido – os vértices  $B$ ,  $A$  e  $F$ . Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são invisíveis (em projeção frontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[AF]$ , e  $[EF]$ , da base, e as arestas laterais  $[AV]$ ,  $[BV]$  e  $[FV]$ . No entanto, todas estas arestas estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar. Note que as faces laterais  $[BCV]$  e  $[EFV]$  estão contidas em planos projetantes frontais. Salienta-se que a aresta lateral  $[CV]$  é visível, em projeção frontal, pois o vértice  $C$  é o vértice de maior afastamento do sólido.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[ABCDV]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1B_1C_1D_1V_1]$ . Em projeção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices  $E$  e  $F$ . Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são invisíveis (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AF]$ ,  $[DE]$  e  $[EF]$  (da base) e as arestas laterais  $[EV]$  e  $[FV]$ . No entanto, à exceção da aresta  $[EF]$ , todas as outras arestas estão ocultas (em projeção horizontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar resume-se à da aresta  $[EF]$ . Note que as faces laterais  $[DEV]$  e  $[AFV]$  estão contidas em planos projetantes horizontais. Salienta-se que as arestas laterais  $[BV]$  e  $[CV]$  são visíveis, em projeção horizontal, pois os vértices  $B$  e  $C$  são os vértices de maior cota do sólido.

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção é um polígono semelhante ao hexágono da base (outro hexágono regular) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do hexágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\delta$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as seis arestas laterais), não cortando a base em nenhuma das suas arestas – assim, a figura da secção tem seis vértices, pelo que é um **hexágono** (como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices da figura da secção** – o ponto  $A'$  é o ponto em que o plano  $\delta$  corta a aresta lateral  $[AV]$ , o ponto  $B'$  é o ponto em que o plano  $\delta$  corta a aresta lateral  $[BV]$ , o ponto  $C'$  é o ponto em que o plano  $\delta$  corta a aresta lateral  $[CV]$ , o ponto  $D'$  é o ponto em que o plano  $\delta$  corta a aresta lateral  $[DV]$ , o ponto  $E'$  é o ponto em que o plano  $\delta$  corta a aresta lateral  $[EV]$  e, por fim, o ponto  $F'$  é o ponto em que o plano  $\delta$  corta a aresta lateral  $[FV]$ . Salienta-se que os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $E'$  e  $F'$  (os seis vértices da figura da secção) foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se da determinação dos pontos de interseção das arestas laterais do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\delta$ ).

### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide compreendido entre o plano  $\delta$  (o plano secante) e o plano  $\alpha$  (o plano que contém a sua base). Assim, a base inferior desse novo sólido é o hexágono  $[ABCDEF]$  e a sua base superior é o hexágono  $[A'B'C'D'E'F']$  (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[CDEE'D'C']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[C_2D_2E_2E'_2D'_2C'_2]$ . Em projeção frontal existem seis vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ . Todos estes vértices são os vértices de **menor afastamento** do sólido, pelo que são invisíveis, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[AF]$  e  $[EF]$  (da base inferior), as arestas  $[A'B']$ ,  $[B'C']$ ,  $[A'F']$  e  $[E'F']$  (da base superior) e as arestas laterais  $[AA']$ ,  $[BB']$  e  $[FF']$ . No entanto, todas estas arestas estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar. Note que as faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[EE'F'F]$  estão contidas em planos projetantes frontais. Salienta-se que a aresta lateral  $[CC']$  é visível, em projeção frontal, pois os vértices  $C$  e  $C'$  são os vértices de maior afastamento do sólido.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[ABCDD'E'F'A']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1B_1C_1D_1D'_1E'_1F'_1A'_1]$ . Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **E**, **F**, **B'** e **C'**. Os vértices **B'** e **C'**, por serem os vértices de **maior cota** do sólido, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[A'B']$ ,  $[B'C']$  e  $[C'D']$  (da base superior) e as arestas laterais  $[BB']$  e  $[CC']$ . Os vértices **E** e **F**, por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AF]$ ,  $[EF]$  e  $[DE]$  (da base inferior) e as arestas laterais  $[EE']$  e  $[FF']$ . Note que as faces laterais  $[DD'E'E]$  e  $[AA'F'F]$  estão contidas em planos projetantes horizontais.

A **figura da secção** é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), pelo que se assinalou esse facto preenchendo a projeção horizontal da mesma com tracejado.

**Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:**

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\delta$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\delta$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que se recorreu, previamente (para a determinação das projeções do hexágono) a uma mudança do diedro de projeção, é possível constatar que, nesse novo diedro de projeção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**) o plano  $\delta$  é paralelo ao **plano 4**. Assim, a figura da secção projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções (no **plano 4**) dos seis vértices da figura da secção, em função dos respetivos afastamentos, que se mantiveram.  $A'_4$  é a projeção do ponto **A'** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $A'_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A'_1$  ao eixo  $X$ .  $B'_4$  e  $F'_4$  são as projeções dos pontos **B'** e **F'** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se em função dos seus afastamentos (que é o mesmo e se manteve) – a distância de  $B'_4$  e  $F'_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B'_1$  e  $F'_1$  ao eixo  $X$  (respetivamente).  $C'_4$  e  $E'_4$  são as projeções dos pontos **C'** e **E'** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se em função dos seus afastamentos (que é o mesmo e se manteve) – a distância de  $C'_4$  e  $E'_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $C'_1$  e  $E'_1$  ao eixo  $X$  (respetivamente).  $D'_4$  é a projeção do ponto **D'** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $D'_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $D'_1$  ao eixo  $X$ .

Por fim, desenhou-se o hexágono definido por  $A'_4, B'_4, C'_4, D'_4, E'_4$  e  $F'_4$  – o hexágono  $[A'_4B'_4C'_4D'_4E'_4F'_4]$  é a projeção (no **plano 4**) do hexágono  $[A'B'C'D'E'F']$  e está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho.

**Traçado:**

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y = Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\delta$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. Os traços do plano  $\alpha$  (o plano que contém a base da pirâmide) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção (necessária para a construção das projeções do hexágono e para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção) ou da reta  $p$ . O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

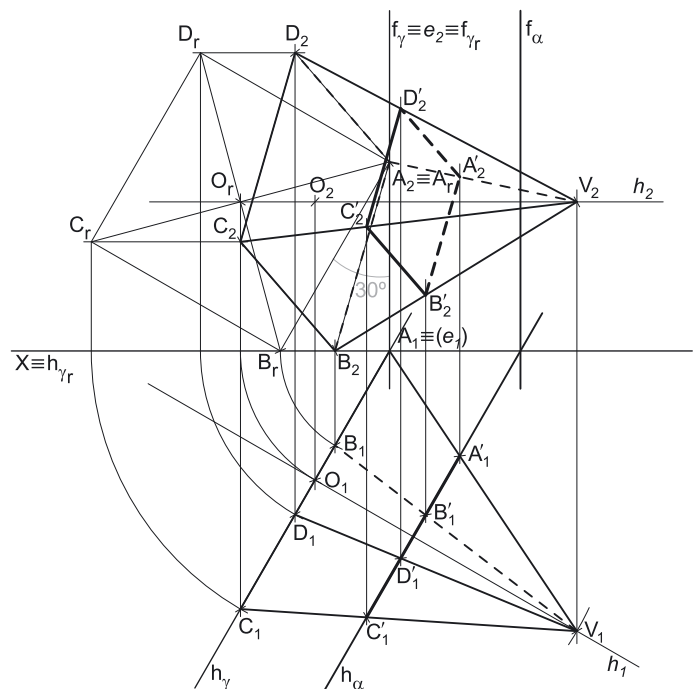
## 637.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados e pertencente ao plano  $\gamma$ . O ponto **A** pertence ao plano e tem afastamento nulo, pelo que o ponto **A** é um ponto do traço frontal do plano ( $f_\gamma$ ). Note que é dado o **ângulo** (um ângulo de  $30^\circ$ ) que o lado  $[AB]$  do quadrado faz com  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano  $\gamma$ ), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\gamma$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante) pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  é paralelo ao plano  $\gamma$ , pelo que nos seus traços são paralelos aos traços homónimos do plano  $\gamma$  (para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**). Por outro lado, uma vez que o plano  $\alpha$  dista 3 cm do plano  $\gamma$ , e porque a distância entre os dois planos se mede ortogonalmente aos dois planos,  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) dista 3 cm de  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ). Por fim, atendendo a que a pirâmide se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro, o vértice da pirâmide terá de se situar para a frente do plano  $\gamma$  (o plano da base), o que significa que o plano  $\alpha$  também tem de se situar para a frente do plano  $\gamma$ , para que produza uma secção na pirâmide.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Resolução:

### Determinação das projeções do quadrado da base da pirâmide:

O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano  $\gamma$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_\gamma \equiv e_2 \equiv f_{\gamma'}$ .

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_2$ . Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que, a partir de  $A_r$ , é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que o lado **[AB]** faz com  $f_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ) – é o ângulo que o segmento **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** faz com  $f_{\gamma'}$ . Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta suporte do lado **[AB]** do quadrado, em rebatimento, fazendo, com  $f_{\gamma'}$ , um ângulo de 30°. Tendo em conta que o ponto **B** tem cota nula, o ponto **B<sub>r</sub>** é o ponto dessa reta que se situa no eixo **X** (onde se situa  $h_{\gamma'}$ ).

Note que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de 30° a partir de  $A_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ponto **B** tem cota nula e se situa no **SPHA** (para que o quadrado se situe no espaço do 1.ª Diedro, como o enunciado refere expressamente).

A partir de  $A_r$  e  $B_r$  efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono em rebatimento ( $C_r$  e  $D_r$ ), bem como o centro do quadrado ( $O_r$ ). Em seguida inverteu-se o rebatimento do plano  $\gamma$  e determinaram-se as projeções de todos os vértices do quadrado (e do ponto **O**), o que nos permitiu desenhar as duas projeções do quadrado **[ABCD]**.

### Determinação das projeções da pirâmide:

A pirâmide é **regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (o plano  $\gamma$ ), que é uma reta horizontal (de nível). Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções homónimas da reta **h**, a reta suporte do eixo da pirâmide. A reta **h** é ortogonal ao plano  $\gamma$ , pois tem as suas projeções perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\gamma$  (a reta **h** verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\gamma$ ).

A altura da pirâmide é a distância do vértice (o ponto **V**) ao plano da base (o plano  $\gamma$ ) – como a pirâmide é **regular**, a sua altura corresponde ao comprimento do seu eixo (o comprimento do segmento de reta **[OV]**), que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois a reta **h** (a reta que o contém) é paralela ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a partir de  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**), sobre  $h_1$  (a projeção horizontal da reta **h**) mediram-se os 8 cm (a altura da pirâmide), determinando-se  $V_1$  (a projeção horizontal do vértice da pirâmide). Note que se garantiu que a pirâmide se situa no espaço do 1.ª Diedro, pois o vértice tem afastamento positivo.  $V_2$  (a projeção frontal do vértice) está sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta **h**), pois o ponto **V** é um ponto da reta **h**. A partir das projeções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal do sólido – o vértice **A**. Este, por ser o vértice de **menor afastamento** do sólido, é invisível (em projeção frontal), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**. As arestas **[AB]** e **[AD]** estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a da aresta lateral **[AV]**. Salienta-se que a aresta lateral **[CV]** é visível, em projeção frontal, pois o vértice **C** é um dos vértices de maior afastamento da pirâmide.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ADCV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **B**. Este, por ser o vértice de **menor cota** do sólido, é invisível (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]** (da base) e a aresta lateral **[BV]**. No entanto, as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal, é a referente à aresta **[BV]**. Salienta-se que a aresta lateral **[DV]** é visível, em projeção horizontal, pois o vértice **D** é o vértice de maior cota do sólido.

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção é um polígono semelhante ao polígono da base (outro quadrado) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do quadrado da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as quatro arestas laterais), não cortando a base em nenhuma das suas arestas – assim, a figura da secção tem quatro vértices, pelo que é um **quadrilátero** (um quadrado, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção** – o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[AV]**, o ponto **B'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[BV]**, o ponto **C'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[CV]** e, por fim, o ponto **D'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[DV]**. Salienta-se que os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'** (os quatro vértices da figura da secção) foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se da determinação dos pontos de interseção das arestas laterais do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\alpha$ ).

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza (está deformada), pois o plano que a contém (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais **[ABV]** e **[ADV]**. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados **[A'B']** e **[A'D']**, respetivamente). Os lados **[B'C']** e **[C'D']** da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por se situarem em faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]**, respetivamente).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os traços do plano  $\gamma$  (o plano que contém a base da pirâmide, representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, o plano  $\gamma$  é meramente auxiliar. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\gamma$  (para a construção das projeções do quadrado) ou da reta **h**.

## 638.

### Dados:

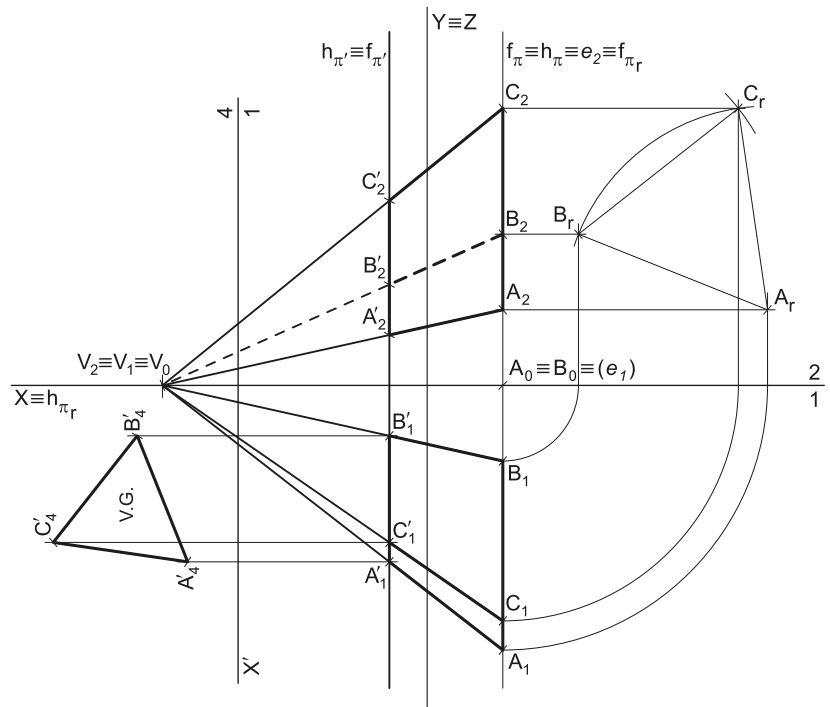
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base da pirâmide), pelos seus traços. O plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que os seus traços passam pelas projeções homónimas dos pontos **A** e **B** (que pertencem ao plano  $\pi$ ).

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\pi'$  (o plano secante) pelos seus traços, em função dos dados – o plano  $\pi'$  é outro plano de perfil.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do triângulo da base da pirâmide:

O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base da pirâmide (o triângulo **[ABC]**) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi r}$ .



Em seguida, rebateram-se os pontos **A** e **B**, tendo em conta que os arcos dos seus rebatimentos estão contidos em planos horizontais (planos ortogonais à charneira do rebatimento). Nesse sentido, os arcos do rebatimento de ambos os pontos projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as respetivas cotas, ao longo dos seus rebatimentos.

A partir de **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**, efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar o terceiro vértice do polígono em rebatimento (**C<sub>r</sub>**). Em seguida inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$  e determinaram-se as projeções do ponto **C**, o que nos permitiu desenhar as duas projeções do triângulo **[ABC]** (que se reduzem, ambas, a segmentos de reta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante).

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A altura da pirâmide é a distância do vértice (o ponto **V**) ao plano da base (o plano  $\pi$ ) – a distância do vértice ao plano  $\pi$  corresponde, na prática, à diferença entre as respetivas abcissas. Por outro lado, atendendo a que o ponto **V** tem abcissa positiva (é dado no enunciado), sabe-se que o ponto **V** se situa à esquerda do plano  $\pi$ . Assim, considerando que o plano  $\pi$  tem  $-2$  de abcissa (a abcissa dos pontos **A** e **B**) e que a pirâmide tem  $9$  cm de altura, o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem necessariamente  $7$  cm de abcissa ( $-2 + 9 = 7$ ). O ponto **V** é um ponto do eixo **X** (é dado no enunciado) e já se determinou a sua abcissa, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **V**. A partir das projeções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ACV]** (que é, na prática, a própria face lateral **[ACV]**), cuja projeção frontal é o triângulo **[A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal do sólido – o vértice **B**. Este, por ser o vértice de **menor afastamento** do sólido, é invisível (em projeção frontal), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[BV]**. No entanto, as arestas **[AB]** e **[BC]** estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar refere-se à aresta lateral **[BV]**.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ACBV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>B<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Todos os vértices do sólido pertencem ao contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta **[AB]** é invisível em projeção horizontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal (as faces **[ABV]** e **[ABC]**). Apesar disso, a aresta **[AB]** está oculta por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Por outro lado, há a referir que a aresta **[CV]** é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (o vértice **C** é o vértice de maior cota do sólido).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção é um polígono semelhante ao triângulo da base (outro triângulo equilátero) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do triângulo da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\pi'$ ) é um plano duplamente projetante, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as três arestas laterais), não cortando a base em nenhuma das suas arestas – assim, a figura da secção tem três vértices, pelo que é um **triângulo** (um triângulo equilátero, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **três vértices da figura da secção** – o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\pi'$  corta a aresta lateral **[AV]**, o ponto **B'** é o ponto em que o plano  $\pi'$  corta a aresta lateral **[BV]** e o ponto **C'** é o ponto em que o plano  $\pi'$  corta a aresta lateral **[CV]**. Salienta-se que os pontos **A'**, **B'** e **C'** (os três vértices da figura da secção) foram determinados de forma direta, pois tratou-se da determinação dos pontos de interseção das arestas laterais do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi'$ ).

## Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide compreendido entre o plano  $\pi'$  (o plano secante) e o plano  $\pi$  (o plano que contém a sua base). Assim, a base mais à direita desse novo sólido é o triângulo **[ABC]** e a sua base mais à esquerda é o triângulo **[A'B'C']** (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ACC'A']**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **C** e **C'**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** da pirâmide, são invisíveis, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]** (da base mais à direita), as arestas **[A'B']** e **[B'C']** (da base mais à esquerda) e a aresta lateral **[BB']**. No entanto, as arestas **[AB]**, **[BC]**, **[A'B']** e **[B'C']** estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar refere-se à aresta lateral **[BB']**.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ACBB'C'A']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]**. Todos os vértices do sólido pertencem ao contorno aparente horizontal. No entanto, as arestas **[AB]** (da base mais à direita) e **[A'B']** (da base mais à esquerda) são invisíveis em projeção horizontal, pois separam faces invisíveis em projeção horizontal (a aresta **[AB]** separa as faces **[ABB'A']** e **[ABC]** e a aresta **[A'B']** separa as faces **[ABB'A']** e **[A'B'C']**). Apesar disso, aquelas duas arestas estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Por outro lado, há a referir que a aresta **[CC']** é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (os vértices **C** e **C'** são os vértices de maior cotado sólido).

A **figura da secção** é invisível em ambas as projeções (ambas as projeções se reduzem a segmentos de reta), pelo que não há lugar à execução de tracejado.

## Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\pi'$ ) não é paralelo nenhum dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\pi'$  num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção. Nesse sentido, optou-se transformar o plano  $\pi'$  num plano frontal (de frente). Para tal, substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\pi'$ . Nesse sentido, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\pi'$ , o eixo **X'** (o novo eixo **X**) é paralelo ao traço horizontal do plano  $\pi'$  (**h<sub>π'</sub>**). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 4**) dos três vértices da figura da secção, em função das respetivas cotas, que se mantiveram. **A'<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **A'** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **A'<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A'<sub>2</sub>** ao eixo **X**. **B'<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **B'** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **B'<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **B'<sub>2</sub>** ao eixo **X**. **C'<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **C'** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **C'<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **C'<sub>2</sub>** ao eixo **X**.

Por fim, desenhou-se o triângulo definido por **A'<sub>4</sub>**, **B'<sub>4</sub>** e **C'<sub>4</sub>** – o triângulo **[A'<sub>4</sub>B'<sub>4</sub>C'<sub>4</sub>]** é a projeção (no **plano 4**) do triângulo **[A'B'C']** e está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho.

## Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\pi'$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a base da pirâmide) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  (necessários para a determinação das projeções da base da pirâmide) ou os referentes à mudança do diedro de projeção (necessária à determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).



## 639.

A figura da secção produzida num prisma por um plano paralelo aos planos das bases é sempre um polígono geometricamente igual aos polígonos das bases, com os seus lados paralelos aos lados correspondentes dos polígonos das bases.

## 640.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **O**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se, pelo seu traço horizontal, o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base de menor afastamento do prisma. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi}$ ) passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e por  $R_1$  (a projeção horizontal do ponto **R**). Representou-se, ainda, o plano  $\varphi''$ , o plano secante, pelo seu traço horizontal. Note que, apesar de ainda não se ter representado, considerou-se que o plano  $\varphi'$  é o plano que contém a base de maior afastamento do sólido. Os planos  $\varphi$  e  $\varphi''$  não têm traço frontal, pelo que os respetivos traços horizontais se identificaram entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções do prisma:*

A base de menor afastamento do prisma (o quadrado **[RSTU]**) está contida num plano frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  e raio até  $R_2$ , desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao polígono e procedeu-se à sua construção, em projeção frontal. Uma vez que o enunciado é omissivo em relação à ordem dos vértices, estes foram nomeados de forma arbitrária, mas sequencial. A projeção horizontal do quadrado situa-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{\varphi}$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

O prisma tem 6 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, atendendo a que o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base **[RSTU]**) tem 1 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **O** e **R**), o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) tem necessariamente 7 cm de afastamento ( $1 + 6 = 7$ ). Isso permitiu-nos representar o plano  $\varphi'$ , pelo seu traço horizontal – o plano  $\varphi'$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Em seguida, determinaram-se as projeções da base de maior afastamento do prisma – o quadrado **[R'S'T'U']**. Tendo em conta que se trata de um prisma regular, as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas de topo (retas projetantes frontais). Assim, a projeção frontal do quadrado **[R'S'T'U']** está coincidente com a projeção frontal do quadrado **[RSTU]** – a sua projeção horizontal está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$ , pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal.

A partir dos oito vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o quadrado **[R'S'T'U']**, cuja projeção frontal é o quadrado **[R'\_2S'\_2T'\_2U'\_2]**. Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – todos os vértices da base **[RSTU]**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção frontal.

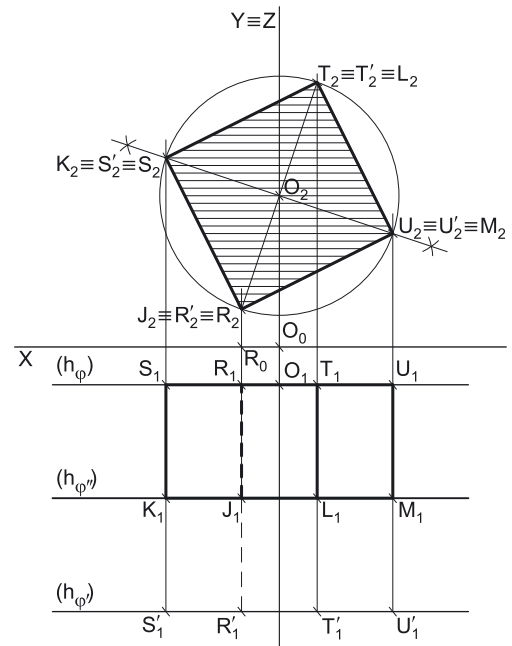
O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[STUU'T'S']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[S\_1T\_1U\_1U'\_1T'\_1S'\_1]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **R** e **R'**, que são os vértices de **menor cota** do prisma. Por isso mesmo, os vértices **R** e **R'** são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[RS]** e **[RU]** (da base **[RSTU]**) as arestas **[R'U']** e **[R'T']** (da base **[R'S'T'U']**) e ainda a aresta lateral **[RR']**. As arestas **[RS]**, **[RU]**, **[R'S']** e **[R'U']** estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que a aresta **[RR']** é a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal. Já a aresta lateral **[TT']** é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (note que os vértices **T** e **T'** são os vértices de maior cota do sólido).

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção é um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases (é um outro quadrado) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes dos quadrados das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\varphi''$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as quatro arestas laterais do prisma), não cortando qualquer das bases em nenhuma das respetivas arestas – assim, a figura da secção tem quatro vértices, pelo que é um **quadrilátero** (um quadrado, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção** (os pontos **J**, **K**, **L** e **M**), que foram determinados a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais do prisma (que estão contidas em retas projetantes frontais) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi''$ ). A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrado).

Tendo em conta que as arestas laterais do prisma estão contidas em retas projetantes frontais, a projeção frontal da **figura da secção** está coincidente com as projeções frontais das duas bases do sólido.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\phi''$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\phi''$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um outro prisma – um prisma quadrangular regular, com bases frontais (de frente), cuja base de menor afastamento é o quadrado [RSTU] e cuja base de maior afastamento é o quadrado [JKLM] (que é, afinal, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e o Plano Frontal de Projeção).

O **contorno aparente frontal** é o quadrado [JKLM], cuja projeção frontal é o quadrado [ $J_2K_2L_2M_2$ ]. Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – todos os vértices da base [RSTU]. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [STUMLK], cuja projeção horizontal é o polígono [ $S_1T_1U_1M_1L_1K_1$ ]. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **R** e **J**, que são os vértices de **menor cota** do prisma. Por isso mesmo, os vértices **R** e **J** são **invisíveis** (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [RS] e [RU] (da base [RSTU]) as arestas [JK] e [JM] (da base [JKLM]) e ainda a aresta lateral [RJ]. As arestas [RS], [RU], [JK] e [JM] estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que a aresta [RJ] é a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal. Já a aresta lateral [TL] é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (note que os vértices **T** e **L** são os vértices de maior cota do sólido).

A **figura da secção**, porque é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X**.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço horizontal do plano secante (o plano  $\phi''$ ), porque integra os dados, representou-se a **médio**. As projeções do prisma, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (que é o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os planos frontais (de frente) que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que os seus traços horizontais se representaram a **leve**. As restantes linhas representaram-se igualmente a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do quadrado). O tracejado que preenche a figura da secção executou-se a **leve**.

## 641.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **O** e a reta **r** (a reta suporte do eixo do prisma), pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se, pelo seu traço frontal, o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base inferior do sólido. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**). A reta **r** está definida por um ponto (o ponto **O**, o centro da base inferior do prisma) e pela sua direção (a direção das suas projeções, que é dada no enunciado).

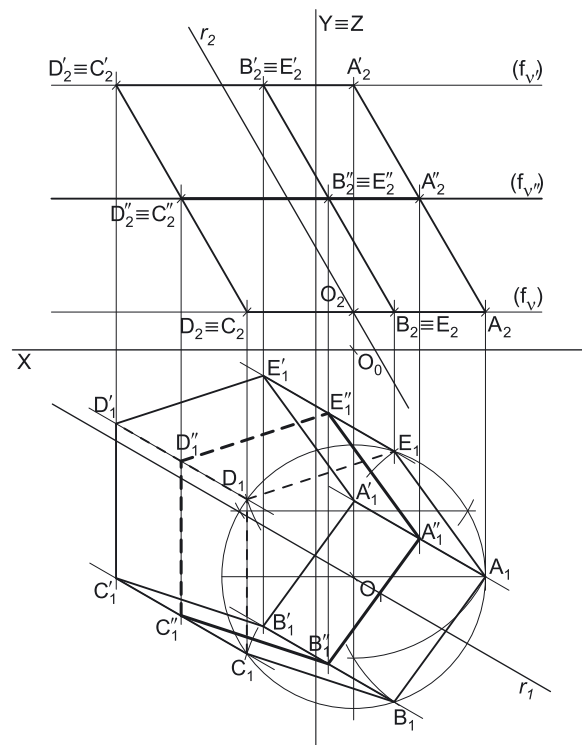
Representou-se, ainda, o plano  $v''$ , o plano secante, pelo seu traço frontal. Os planos  $v$  e  $v''$  não têm traço horizontal, pelo que os respetivos traços frontais se identificaram entre parêntesis. Note que, apesar de ainda não se ter representado, considerou-se que o plano  $v'$  é o plano que contém a base superior do sólido.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

A base inferior do prisma (o pentágono [ABCDE]) está contida num plano horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao polígono e procedeu-se à sua construção, em projeção horizontal. Note que se atendeu aos dados sobre o polígono, quer no que respeita à sua posição, quer no que respeita à ordem dos vértices.

Assim, o lado [CD] é de topo e, uma vez que o vértice **A** é o vértice de menor abcissa da figura, isso permitiu-nos concluir que o lado [CD] é o lado mais à esquerda da figura. Por fim, uma vez que o ponto **B** é o vértice de maior afastamento do pentágono e que os vértices são nomeados de forma sequencial, o vértice **C** tem afastamento superior ao vértice **D**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O prisma tem 6 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, atendendo a que o plano  $v$  (o plano que contém a base inferior) tem 1 cm de cota (a cota do ponto  $O$ ), o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) tem necessariamente 7 cm de cota ( $1 + 6 = 7$ ). Isso permitiu-nos representar o plano  $v'$ , pelo seu traço frontal – o plano  $v'$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

As arestas laterais do prisma estão contidas em retas paralelas à reta suporte do eixo. Assim, pelas projeções de cada um dos vértices do pentágono  $[ABCDE]$  conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), que são paralelas às projeções homónimas da reta  $r$  (a reta suporte do eixo do prisma). Os vértices da base superior (os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  e  $E'$ ) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $v'$  (o plano da base superior) e foram determinados a partir das suas projeções frontais (pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal). Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do pentágono  $[A'B'C'D'E']$  (a base superior do prisma).

A partir dos dez vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ABCC'B'A']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2C'_2B'_2A'_2]$ . Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $D$ ,  $D'$ ,  $E$  e  $E'$ . Estes quatro vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[CD]$ ,  $[DE]$  e  $[AE]$  (da base inferior), as arestas  $[C'D']$ ,  $[D'E']$  e  $[A'E']$  (da base superior), e as arestas laterais  $[DD']$  e  $[EE']$ . No entanto, todas estas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Salienta-se que a aresta lateral  $[BB']$  é visível, m projeção frontal, pois os pontos  $B$  e  $B'$  são os vértices de maior afastamento do prisma. Note que a face lateral  $[CC'D'D]$  está contida num plano projetante frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[ABCC'D'E'E]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1B_1C_1C'_1D'_1E'_1E_1]$ . Em projeção horizontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices  $D$ ,  $A'$  e  $B'$ . O vértice  $D$ , por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[CD]$  e  $[DE]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[DD']$ . Os vértices  $A'$  e  $B'$ , por serem dos vértices de **maior cota** do prisma, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[A'B']$ ,  $[B'C']$  e  $[A'E']$ , da base superior, e as arestas laterais  $[AA']$  e  $[BB']$ .

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção é um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases (é um outro **pentágono regular**) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes dos pentágonos das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $v''$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as cinco arestas laterais do prisma), não cortando qualquer das bases em nenhuma das respetivas arestas – assim, a figura da secção tem cinco vértices, pelo que é um **pentágono** (como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices** da **figura da secção** (os pontos  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $D''$  e  $E''$ ), que foram determinados a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais do prisma (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $v''$ ). Assim, o ponto  $A''$  é o ponto em que o plano  $v''$  corta a aresta lateral  $[AA']$ , o ponto  $B''$  é o ponto em que o plano  $v''$  corta a aresta lateral  $[BB']$ , o ponto  $C''$  é o ponto em que o plano  $v''$  corta a aresta lateral  $[CC']$ , o ponto  $D''$  é o ponto em que o plano  $v''$  corta a aresta lateral  $[DD']$  e, por fim, o ponto  $E''$  é o ponto em que o plano  $v''$  corta a aresta lateral  $[EE']$ .

A partir das projeções dos cinco vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um pentágono regular).

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $v''$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $v''$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais  $[CC'D'D]$  e  $[DD'E'E]$ . Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces são **invisíveis**, em projeção horizontal (os lados  $[C''D'']$  e  $[D''E'']$ ). Os lados  $[A''E'']$ ,  $[A''B'']$  e  $[B''C'']$  da **figura da secção** são **visíveis** em projeção horizontal, por se situarem em faces do prisma que são visíveis em projeção horizontal (as faces laterais  $[AA'E'E]$ ,  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ , respetivamente).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

#### Traçado:

As projeções do prisma e o traço frontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo  $X$  representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os traços frontais dos planos que contêm as bases do sólido, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta  $r$  e dos traçados referentes à construção do pentágono).

## 642.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar **A'₁** (a projeção horizontal do ponto **A'**). Em seguida representou-se, pelo seu traço frontal, o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base inferior do sólido. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por **A₂** e por **B₂** (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente).

Representou-se, ainda, o plano  $v''$ , o plano secante, pelo seu traço frontal. Os planos  $v$  e  $v''$  não têm traço horizontal, pelo que os respetivos traços frontais se identificaram entre parêntesis. Note que, apesar de ainda não se ter representado, considerou-se que o plano  $v'$  é o plano que contém a base superior do sólido.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

A base inferior do prisma (o triângulo equilátero **[ABC]**) está contida num plano horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, a partir de **A₁** e de **B₁**, construiu-se a projeção horizontal do triângulo, atendendo-se aos dados sobre o polígono (o vértice **C** é o vértice de maior abscissa da figura), o que nos permitiu determinar a projeção horizontal do ponto **C** (**C₁**). A projeção frontal do triângulo situa-se sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é projetante frontal.

O prisma tem 6 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, atendendo a que o plano  $v$  (o plano que contém a base inferior) tem 2 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **B**), o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) tem necessariamente 8 cm de cota ( $2 + 6 = 8$ ). Isso permitiu-nos representar o plano  $v'$ , pelo seu traço frontal – o plano  $v'$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Em seguida, determinou-se a projeção frontal do ponto **A'** (**A'₂**), sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. Tendo em conta que os pontos **A** e **A'** (os dois extremos da aresta lateral **[AA']**) têm a mesma abscissa, conclui-se que a aresta lateral **[AA']** é de perfil, tal como as restantes arestas do prisma. Por outro lado, atendendo a que as arestas da base superior (os lados do triângulo **[A'B'C']**) são paralelas às arestas correspondentes da base inferior (o triângulo **[ABC]**), foi possível determinar as projeções horizontais dos restantes vértices da base superior (os pontos **B** e **C'**), a partir de **A'₁** (a projeção horizontal do ponto **A'**).

A projeção frontal do triângulo **[A'B'C']** (e de todos os seus vértices) situa-se sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. A partir dos seis vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

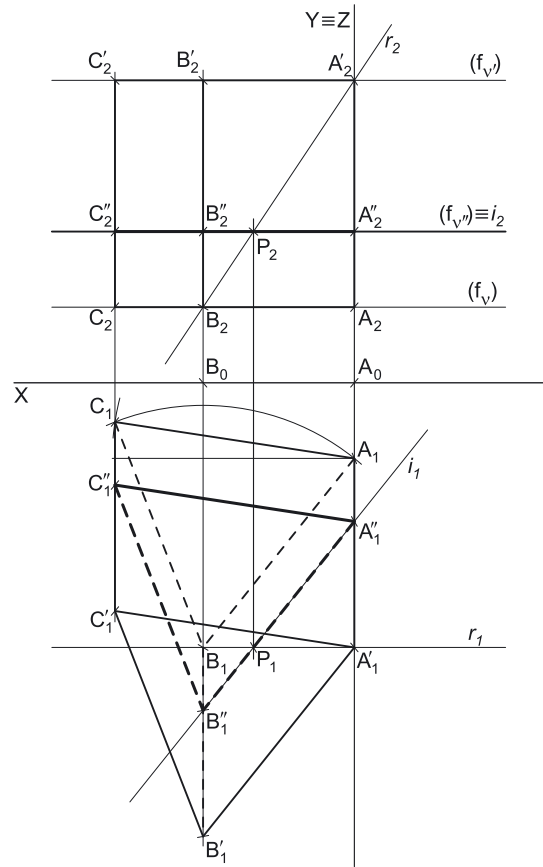
O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ABCC'B'A']**, cuja projeção frontal é o polígono **[A₂B₂C₂C'₂B'₂A'₂]**. Todos os vértices do sólido pertencem ao contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[AC]** (da base inferior) é invisível em projeção frontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal (separa a base **[ABC]** da face lateral **[AA'C'C]**). Também a aresta **[A'C']** (da base superior) é invisível em projeção frontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal (separa a base **[A'B'C']** da face lateral **[AA'C'C]**). Apesar disso, aquelas duas arestas estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Por outro lado, há a referir que a aresta **[BB']** é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (os vértices **B** e **B'** são os vértices de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ACC'B'A']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A₁C₁C'₁B'₁A'₁]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **B**. Este vértice, por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base inferior, e a aresta lateral **[BB']**. Por outro lado, a aresta **[A'C']** é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (separa a base superior **[A'B'C']** da face lateral **[AA'C'C]**).

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção é um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases (é um outro **triângulo equilátero**) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes dos triângulos das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $v''$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as três arestas laterais do prisma), não cortando qualquer das bases em nenhuma das respetivas arestas – assim, a figura da secção tem três vértices, pelo que é um **triângulo** (como atrás se referiu).

Assim, para determinar as projeções da figura da secção, é necessário determinar os pontos de interseção do plano secante (o plano  $v''$ ) com as arestas laterais do sólido. Acontece que as arestas laterais do sólido estão contidas em retas de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade** – assim, não é possível, de forma imediata, determinar as projeções dos pontos em que o plano secante corta as arestas laterais do sólido.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Uma possibilidade para determinar os pontos de interseção do plano secante com as arestas laterais do sólido seria recorrer a um processo geométrico auxiliar – recorrer a uma mudança do diedro de projeção ou ao rebatimento do plano de perfil, por exemplo. No entanto, optou-se por uma situação substancialmente mais simples e imediata, como em seguida se expõe.

Pretende-se determinar a interseção entre o plano  $v''$  (o plano secante) e a face  $[AA'B'B]$  (que está contida num plano). A interseção do plano  $v''$  com a face  $[AA'B'B]$  é um segmento de reta – a reta suporte desse segmento é a reta de interseção entre dois planos (o plano  $v''$  e o plano que contém a face  $[AA'B'B]$ ). Analisemos a determinação dessa reta (reta  $i$ ) – a reta  $i$  tem de pertencer aos dois planos. Tendo em conta que a reta  $i$  pertence ao plano  $v''$ , que é um plano projetante frontal, pelo que a sua projeção frontal ( $i_2$ ) se situa necessariamente sobre o traço frontal do plano  $v''$  ( $f_{v''}$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $v''$  – falta-nos garantir que a reta  $i$  pertence ao plano que contém a face lateral  $[AA'B'B]$ .

Por outro lado, para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Acontece que já temos a direção, pois a reta  $i$  é necessariamente uma reta horizontal (de nível), paralela aos segmentos  $[AB]$  e  $[A'B']$  (o plano secante é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes das figuras das duas bases). Falta-nos um ponto para definir a reta  $i$ . Os dados do plano que contém a face  $[AA'B'B]$  são insuficientes para definir a reta  $i$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Nesse sentido, recorreu-se à reta  $i$ , como reta auxiliar do plano – a reta  $r$  está definida por dois pontos (os pontos  $B$  e  $A'$ , que são dois vértices opostos da face  $[AA'B'B]$ ). Em seguida, determinou-se o ponto de interseção da reta  $r$  (a reta auxiliar) com o plano  $v''$  (o plano secante) – o ponto  $P$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ . A reta  $i$  está, assim, definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (é paralela aos segmentos  $[AB]$  e  $[A'B']$ ). O que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta  $i$ .

O ponto em que a reta  $i$  intersesta a aresta lateral  $[AA']$  é o ponto  $A''$  – o ponto  $A''$  é, assim, o ponto em que o plano secante (o plano  $v''$ ) corta a aresta lateral  $[AA']$ . O ponto em que a reta  $i$  intersesta a aresta lateral  $[BB']$  é o ponto  $B''$  – o ponto  $B''$  é, assim, o ponto em que o plano secante (o plano  $v''$ ) corta a aresta lateral  $[BB']$ .

Por fim, determinaram-se as projeções do ponto  $C'$ , o ponto em que o plano secante (o plano  $v''$ ) corta a aresta lateral  $[CC']$ . À semelhança do referido para os pontos  $A''$  e  $B''$ , o ponto  $C''$  está contido numa aresta lateral que é de perfil e cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Assim, de uma forma direta, é apenas possível determinar a projeção frontal do ponto  $C''$  ( $C''_2$ ). No entanto, uma vez que o plano secante é paralelo aos planos que contêm as bases do prisma, e como atrás se referiu, a figura da secção tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do triângulo  $[ABC]$ , o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da figura da secção, a partir dos vértices já determinados ( $A''$  e  $B''$ ). Assim, o lado  $[A''C'']$  da secção é paralelo à aresta  $[AC]$  da base  $[ABC]$  (e à aresta  $[A'C']$  da base  $[A'B'C']$ ), tal como o lado  $[B''C'']$  da secção é paralelo à aresta  $[BC]$  da base  $[ABC]$  (e à aresta  $[B'C']$  da base  $[A'B'C']$ ). Atendendo ao exposto, foi possível determinar a projeção horizontal do ponto  $C''$  ( $C''_1$ ).

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $v''$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $v''$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ . Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces são **invisíveis**, em projeção horizontal (os lados  $[A''B'']$  e  $[B''C'']$ ). O lado  $[A''C'']$  da **figura da secção** é **visível** em projeção horizontal, pois situa-se numa face do prisma que é visível em projeção horizontal (a face lateral  $[AA'C'C]$ ).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

#### Traçado:

As projeções do prisma e o traço frontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo  $X$  representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os traços frontais dos planos que contêm as bases do sólido, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta  $r$  e da reta  $i$ ).

## 643.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\theta$ , o plano que contém a base inferior do prisma, pelos seus traços e contendo os pontos **A** e **B**. O plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_\theta$ ) passa necessariamente por  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente).

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante) pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  é paralelo ao plano  $\theta$ , pelo que os seus traços são paralelos aos traços homónimos do plano  $\theta$  (para que se verifique o **Crítério de paralelismo entre planos**). Por outro lado, uma vez que o plano  $\alpha$  dista 4 cm do plano  $\theta$ , e porque a distância entre os dois planos se mede ortogonalmente aos dois planos,  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) dista 4 cm de  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Por fim, atendendo a que o quadrado **[ABCD]** é a base inferior do prisma, o sólido situa-se para cima do plano  $\theta$ , o que significa que o plano  $\alpha$  também tem de se situar para cima do plano  $\theta$ , para que produza uma secção do prisma.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do quadrado da base inferior do prisma:

O plano que contém a base inferior do prisma (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi  $h_\theta$  (o traço horizontal do plano  $\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $h_\theta \equiv e_1 \equiv h_{\theta r}$ .

O ponto **B** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) tem-se, imediatamente,  $B_r \equiv B_1$ . Em seguida rebateu-se também o ponto **A**, cujo arco do rebatimento está contido no Plano Frontal de Projeção (o ponto **A** pertence ao Plano Frontal de Projeção, pois tem afastamento nulo), o que nos permitiu determinar  $A_r$  (que se situa no eixo **X**).

A partir de  $A_r$  e  $B_r$  efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono em rebatimento ( $C_r$  e  $D_r$ ). Em seguida inverteu-se o rebatimento do plano  $\theta$  e determinaram-se as projeções dos vértices **C** e **D** do quadrado, o que nos permitiu desenhar as duas projeções do polígono.

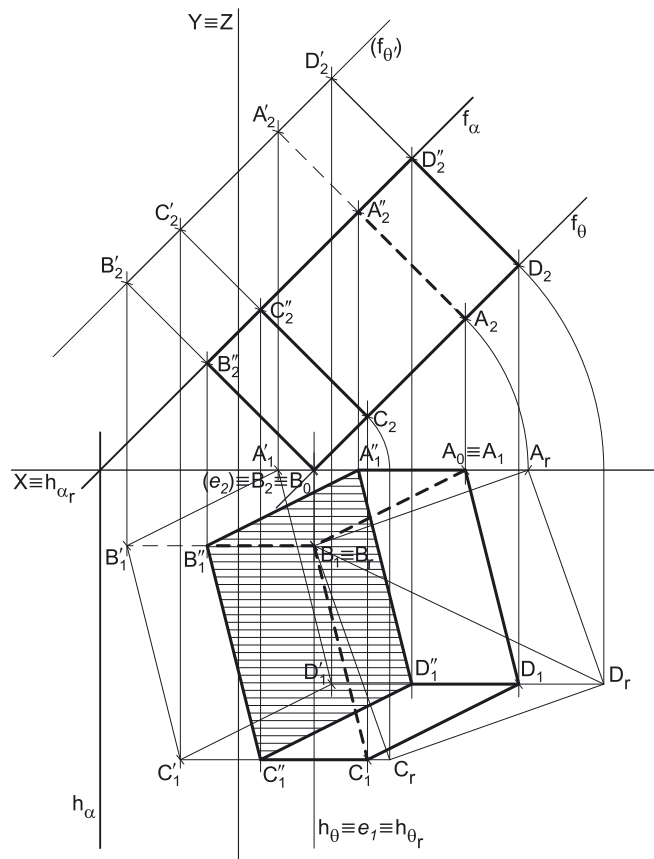
#### Determinação das projeções do prisma:

O prisma tem 7 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, o plano que contém a base superior do sólido (o quadrado **[A'B'C'D']**) é um plano paralelo ao plano  $\theta$  que dista 7 cm do plano  $\theta$ . Nesse sentido, representou-se o plano  $\theta'$  (o plano que contém a base superior do prisma) pelo seu traço frontal ( $f_{\theta'}$ ), que é paralelo ao traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ). O plano  $\theta'$  é um outro plano de topo, que foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço horizontal situa-se fora dos limites do papel), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Por fim, uma vez que o plano  $\theta'$  dista 7 cm do plano  $\theta$ , e porque a distância entre os dois planos se mede ortogonalmente aos dois planos,  $f_{\theta'}$  (o traço frontal do plano  $\theta'$ ) dista 7 cm de  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ).

Trata-se de um prisma regular, pelo que as arestas laterais do sólido estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases – são retas frontais (de frente), cujas projeções frontais são perpendiculares aos traços frontais dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ . Assim, pelas projeções de cada um dos vértices do quadrado **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), ortogonais aos planos das bases. Os vértices da base superior (os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $\theta'$  (o plano da base superior) e foram determinados a partir das suas projeções frontais (pois o plano  $\theta'$  é um plano projetante frontal). Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do quadrado **[A'B'C'D']** (a base superior do prisma).

A partir dos oito vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDD'C'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e **A'**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]** (da base inferior), as arestas **[A'B']** e **[A'D']** (da base superior), e a aresta lateral **[AA']**. A aresta lateral **[CC']** é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do prisma). Note que as arestas **[AB]**, **[AD]**, **[A'B']** e **[A'D']**, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção frontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[ADCC'B'A']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1D_1C_1C'_1B'_1A'_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **B** e **D'**. O vértice **B**, por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[BB']$ . O vértice **D'**, por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'D']$  e  $[C'D']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[DD']$ .

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção é um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases (é um outro **quadrado**) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes dos quadrados das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as quatro arestas laterais do prisma), não cortando qualquer das bases em nenhuma das respetivas arestas – assim, a figura da secção tem quatro vértices, pelo que é um **quadrilátero** (um quadrado, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção** (os pontos **A''**, **B''**, **C''** e **D''**), que foram determinados a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais do prisma (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\alpha$ ). Assim, o ponto **A''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral  $[AA']$ , o ponto **B''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral  $[BB']$ , o ponto **C''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral  $[CC']$  e, por fim, o ponto **D''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral  $[DD']$ .

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrado).

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção.

*Determinação das projeções do sólido resultante da secção:*

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um outro prisma – um prisma quadrangular oblíquo, com bases horizontais (de nível), cuja base inferior é o quadrado  $[ABCD]$  e cuja base superior é o quadrado  $[A''B''C''D'']$  (que é, afinal, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e a base inferior).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDD''C''B'']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D''_2C''_2B''_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e **A''**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base inferior), as arestas  $[A''B'']$  e  $[A''D'']$  (da base superior), e a aresta lateral  $[AA'']$ . A aresta lateral  $[CC'']$  é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos **C** e **C''** são os vértices de maior afastamento do prisma). Note que as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$ ,  $[A''B'']$  e  $[A''D'']$ , apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção frontal).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[ADCC''B''A'']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1D_1C_1C''_1B''_1A''_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **B** e **D''**. O vértice **B**, por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[BB']$ . O vértice **D''**, por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A''D'']$  e  $[C''D'']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[DD'']$ .

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X**.

**Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do prisma, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os traços dos planos que contêm as bases, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$ , para a construção do quadrado). O tracejado que preenche a figura da secção executou-se a **leve**.

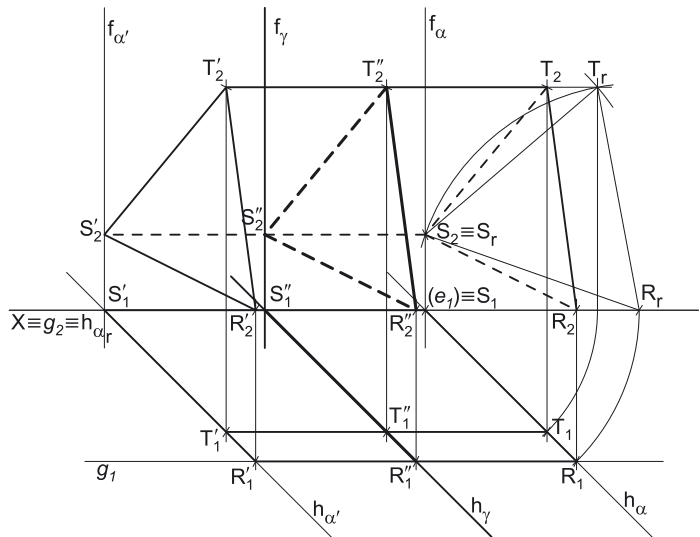


## 644.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$  (o plano que contém o triângulo [RST]), pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto R, pelas suas projeções e pertencente ao plano  $\alpha$ . O ponto R tem cota nula, pelo que é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). Por outro lado, é dado o afastamento do ponto S (que é nulo), o que nos permitiu determinar a projeção horizontal do ponto S ( $S_1$ ), que se situa no eixo X, sobre o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal.

O prisma tem 6 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, o plano que contém a base mais à esquerda do sólido (o triângulo [R'S'T']) é um plano paralelo ao plano  $\alpha$  que dista 6 cm do plano  $\alpha$ . Nesse sentido, representou-se o plano  $\alpha'$  (o plano que contém a base mais à esquerda do prisma) pelos seus traços, que são paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$  (para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**). Assim, e porque a distância entre os dois planos se mede ortogonalmente aos dois planos,  $h_{\alpha'}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha'$ ) dista 6 cm de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ).



Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\gamma$  (o plano secante) pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\gamma$  é paralelo aos planos  $\alpha$  e  $\alpha'$ , pelo que os seus traços são paralelos aos traços homónimos daqueles dois planos (para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**). Por outro lado, uma vez que o plano  $\gamma$  dista 3 cm de ambos os planos (para que esteja equidistante dos planos das duas bases), e porque a distância entre os dois planos se mede ortogonalmente aos dois planos,  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ) dista 3 cm de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) e de  $h_{\alpha'}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha'$ ).

### Resolução:

#### Determinação das projeções do triângulo da base mais à direita do prisma:

O plano que contém a base mais à direita do prisma (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base mais à direita do prisma (o triângulo [RST]) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_\alpha \equiv e_2 \equiv f_{\alpha_r}$ .

Rebateu-se o ponto R, cujo arco do rebatimento está contido no Plano Horizontal de Projeção (o ponto R pertence ao Plano Horizontal de Projeção, pois tem cota nula), o que nos permitiu determinar  $R_r$  (que se situa no eixo X). Tendo em conta que o ponto S é um ponto do traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ), que é a charneira do rebatimento, o ponto S é um ponto que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $R_r$  e com 6 cm de raio (a medida do lado do triângulo), determinou-se  $S_r$ , sobre o traço frontal do plano em rebatimento ( $f_{\alpha_r}$ ).

A partir de  $R_r$  e  $S_r$  efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar o terceiro vértice do polígono em rebatimento ( $T_r$ ). Em seguida inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$  e determinaram-se as projeções dos vértices S e T, o que nos permitiu desenhar as duas projeções do polígono. Note que o ponto S é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $S_2 \equiv S_r$ .

#### Determinação das projeções do prisma:

Tendo em conta que as arestas laterais do sólido estão contidas em retas fronto-horizontais (é dado no enunciado), pelas projeções de cada um dos vértices do triângulo [RST] conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram). Os vértices da base mais à esquerda (os pontos R', S' e T') são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $\alpha'$  (o plano que contém a base mais à esquerda) e foram determinados a partir das suas projeções horizontais (pois o plano  $\alpha'$  é um plano projetante horizontal). Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do triângulo [R'S'T'] (a base mais à esquerda do prisma).

A partir dos seis vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes. Note que a aresta lateral [RR'] do prisma está contida no Plano Horizontal de Projeção, pois o ponto R é um ponto com cota nula (e o ponto R' é necessariamente outro ponto com cota nula). Por outro lado, a aresta lateral [SS'] do prisma está contida no Plano Frontal de Projeção, pois o ponto S é um ponto com afastamento nulo (e o ponto S' é necessariamente outro ponto com afastamento nulo).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [RTT'S'R'], cuja projeção frontal é o polígono [R<sub>2</sub>T<sub>2</sub>T'<sub>2</sub>S'<sub>2</sub>R'<sub>2</sub>]. Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice S. Este vértice, por ser um dos vértices de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [RS] e [ST] (da base [RST]), as aresta lateral [SS']. A aresta [R'T'] da base mais à esquerda do prisma é visível, por se situar na parte visível do sólido (a aresta [R'T'] separa duas faces do prisma que são visíveis em projeção frontal – a base [R'S'T'] e a face lateral [RR'T'T']).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [RTSS'T'R'], cuja projeção horizontal é o polígono [R<sub>1</sub>T<sub>1</sub>S<sub>1</sub>S'<sub>1</sub>T'<sub>1</sub>R'<sub>1</sub>]. Todos os vértices do prisma integram o contorno aparente horizontal. No entanto, as arestas [RS] (da base [RST]) e [R'S'] (da base [R'S'T']) são invisíveis, por se situarem na parte invisível do sólido (separam faces do sólido que são invisíveis em projeção horizontal – a base respetiva e a face lateral [RR'S'S]). No entanto, todas estas arestas estão ocultas (em projeção horizontal) por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar. Já a aresta lateral [TT'] é visível, por se situar na parte visível do sólido (note que os pontos T e T' são os vértices de maior cota do sólido).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção é um polígono geometricamente igual aos triângulos das bases (é um outro **triângulo equilátero**) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes dos triângulos das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\gamma$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as três arestas laterais do prisma), não cortando qualquer das bases em nenhuma das respetivas arestas – assim, a figura da secção tem três vértices, pelo que é um **triângulo** (um triângulo equilátero, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **três vértices da figura da secção** (os pontos **R''**, **S''** e **T''**), que foram determinados a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais do prisma (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\gamma$ ). Assim, o ponto **R''** é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta lateral **[RR']**, o ponto **S''** é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta lateral **[SS']** e, por fim, o ponto **T''** é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta lateral **[TT']**.

A partir das projeções dos três vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um triângulo equilátero).

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\gamma$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais **[RR'S'S']** e **[SS'T'T']**. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados **[R''S'']** e **[S''T'']**). O lado **[R''T'']** da **figura da secção** é **visível** em projeção frontal, por se situar numa face do prisma que é visível em projeção frontal (a face lateral **[RR'T'T']**).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

#### Traçado:

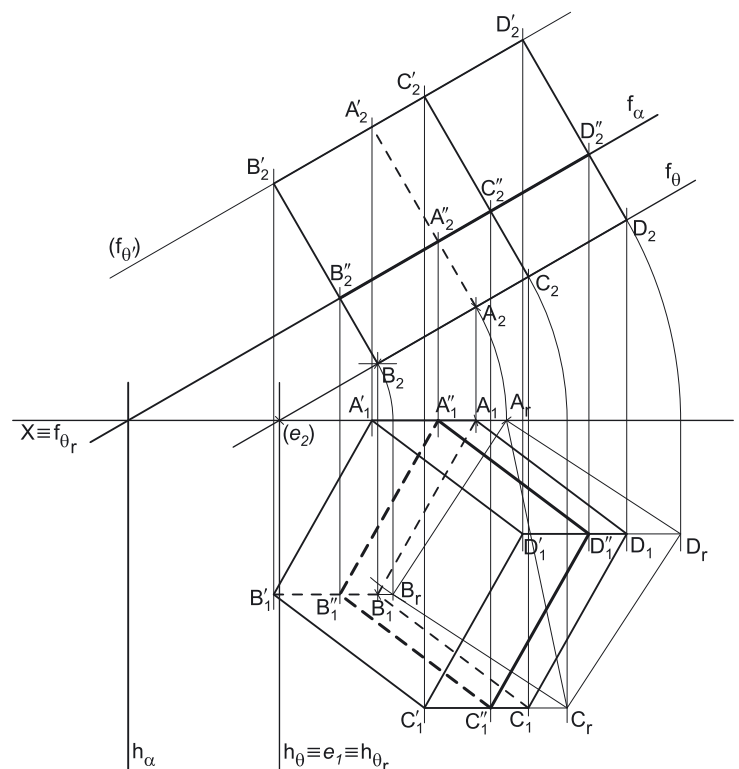
As projeções do prisma e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os traços dos planos que contêm as bases do sólido, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  e à construção do triângulo em verdadeira grandeza).

## 645.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\theta$  (o plano que contém o quadrado **[ABCD]**), pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções e pertencente ao plano  $\theta$ . O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que é necessariamente um ponto do traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ). Por outro lado, é dada a cota do ponto **B**, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do ponto **B** ( $B_2$ ), que se situa sobre o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante) pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  é paralelo ao plano  $\theta$ , pelo que os seus traços são paralelos aos traços homónimos do plano  $\theta$  (para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**). Por outro lado, uma vez que o plano  $\alpha$  dista 2 cm do plano  $\theta$ , e porque a distância entre os dois planos se mede ortogonalmente aos dois planos,  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) dista 2 cm de  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Por fim, atendendo a que o cubo se situa no espaço do 1º Diedro, o quadrado **[ABCD]** é a face inferior do sólido, pelo que o cubo situa-se para cima do plano  $\theta$ , o que significa que o plano  $\alpha$  também tem de se situar para cima do plano  $\theta$ , para que produza uma secção no cubo.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Resolução:

### Determinação das projeções do quadrado da face inferior do cubo:

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado [ABCD] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi  $h_\theta$  (o traço horizontal do plano  $\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $h_\theta \equiv e_f \equiv h_{\theta_r}$ .

Nesse sentido, rebateu-se o ponto **A**, cujo arco do rebatimento está contido no Plano Frontal de Projeção (o ponto **A** pertence ao Plano Frontal de Projeção, pois tem afastamento nulo), o que nos permitiu determinar  $A_r$  (que se situa no eixo **X**). Em seguida rebateu-se a projeção frontal do ponto **B**, o que nos permitiu determinar, sobre o eixo **X**, a referência de  $B_r$ , pela qual se conduziu uma perpendicular ao eixo **X** –  $B_r$  tem de se situar nesta perpendicular ao eixo **X**.

Uma vez que o cubo tem 5,5 cm de aresta, o quadrado [ABCS] tem 5,5 cm de lado. Por outro lado, em rebatimento, o quadrado está em verdadeira grandeza, pelo que é possível medir todos os seus lados diretamente (não há deformação). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $A_r$  e com 5,5 cm de raio, determinou-se  $B_r$ , sobre a respetiva perpendicular à charneira.

A partir de  $A_r$  e  $B_r$  efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono em rebatimento ( $C_r$  e  $D_r$ ). Em seguida inverteu-se o rebatimento do plano  $\theta$  e determinaram-se as projeções dos vértices **C** e **D** do quadrado, bem como a projeção horizontal do ponto **B** ( $B_1$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções do polígono.

### Determinação das projeções do cubo:

O cubo tem 5,5 cm de aresta, pelo que o plano que contém a face superior do sólido (o quadrado [A'B'C'D']) é um plano paralelo ao plano  $\theta$  que dista 5,5 cm do plano  $\theta$ . Nesse sentido, representou-se o plano  $\theta'$  (o plano que contém a face superior do sólido) pelo seu traço frontal ( $f_{\theta'}$ ), que é paralelo ao traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ). O plano  $\theta'$  é um outro plano de topo, que foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço horizontal situa-se fora dos limites do papel), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Por fim, uma vez que o plano  $\theta'$  dista 5,5 cm do plano  $\theta$ , e porque a distância entre os dois planos se mede ortogonalmente aos dois planos,  $f_{\theta'}$  (o traço frontal do plano  $\theta'$ ) dista 5,5 cm de  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ).

As arestas do cubo que não estão contidas nos planos  $\theta$  e  $\theta'$  estão contidas em retas ortogonais aos planos daquelas duas faces – são retas frontais (de frente), cujas projeções frontais são perpendiculares aos traços frontais dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ . Assim, pelas projeções de cada um dos vértices do quadrado [ABCD] conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte daquelas arestas (que não se identificaram), ortogonais aos planos das duas faces de topo. Os vértices da face superior (os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas frontais (de frente) do cubo com o plano  $\theta'$  (o plano da face superior) e foram determinados a partir das suas projeções frontais (pois o plano  $\theta'$  é um plano projetante frontal). Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do quadrado [A'B'C'D'] (a face superior do cubo).

A partir dos oito vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [BCDD'C'B'], cuja projeção frontal é o polígono [B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e **A'**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [AB] e [AD] (da face inferior), as arestas [A'B'] e [A'D'] (da face superior), e a aresta [AA']. A aresta [CC'] é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do cubo). Note que as arestas [AB], [AD], [A'B'] e [A'D'], apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção frontal).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [ADCC'B'A'], cuja projeção horizontal é o polígono [A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **B** e **D'**. O vértice **B**, por ser o vértice de **menor cota** do cubo, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [AB], [BC] e [BB']. O vértice **D'**, por ser o vértice de **maior cota** do cubo, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [A'D'], [C'D'] e [DD'].

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo aos planos das duas faces de topo, pelo que a figura da secção é um polígono geometricamente igual aos quadrados das duas faces (é um outro **quadrado**) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes dos quadrados daquelas duas faces. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas frontais (de frente) do sólido (as quatro arestas frontais do cubo), não cortando qualquer das faces em nenhuma das respetivas arestas – assim, a figura da secção tem quatro vértices, pelo que é um **quadrilátero** (um quadrado, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção** (os pontos **A''**, **B''**, **C''** e **D''**), que foram determinados a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas frontais (de frente) do cubo (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\alpha$ ). Assim, o ponto **A''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta [AA'], o ponto **B''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta [BB'], o ponto **C''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta [CC'] e, por fim, o ponto **D''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta [DD'].

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrado).

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do cubo que são invisíveis em projeção horizontal – as faces  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ . Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces são **invisíveis**, em projeção horizontal (os lados  $[A''B'']$  e  $[B''C'']$ ). Os lados  $[A''D'']$  e  $[C''D'']$  da **figura da secção** são **visíveis** em projeção horizontal, por se situarem em faces do cubo que são visíveis em projeção horizontal (as faces  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$ , respetivamente).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

#### Traçado:

As projeções do cubo e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os traços dos planos que contêm as duas faces de topo do sólido, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários ao rebatimento do plano  $\theta$  e à construção do quadrado, em verdadeira grandeza).

## 646.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base da pirâmide), pelos seus traços. O plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que os seus traços passam pelas projeções homónimas dos pontos **A** e **B** (que pertencem ao plano  $\pi$ ).

A altura do prisma é a distância entre os planos das duas bases, que corresponde, na prática, à diferença entre as respetivas abcissas. Assim, atendendo a que a outra base tem abcissa positiva (e, por isso, é a base mais à esquerda), o plano  $\pi'$  (o plano que contém essa base) situa-se à esquerda do plano  $\pi$ . Assim, considerando que o plano  $\pi$  tem  $-2$  de abcissa (a abcissa dos pontos **A** e **B**) e que o prisma tem  $6$  cm de altura, o plano  $\pi'$  (o plano da base mais à esquerda do sólido) tem necessariamente  $4$  cm de abcissa ( $(-2) + 6 = 4$ ).

Este raciocínio permitiu-nos representar o plano  $\pi'$  (o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do prisma) pelos seus traços, e, ainda, representar o ponto **B'** pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **B'** pertence ao plano  $\pi'$ , que é um plano duplamente projetante, pelo que as projeções do ponto **B'** se situam sobre os traços homónimos do plano  $\pi'$ .

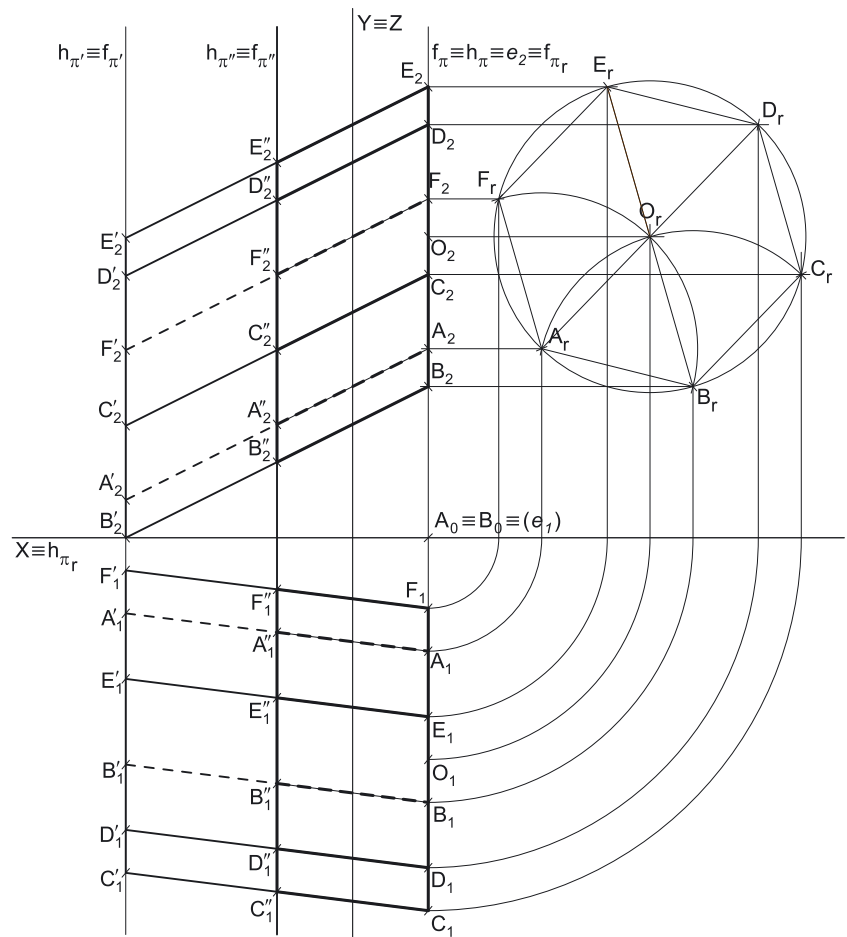
Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\pi''$  (o plano secante) pelos seus traços, em função dos dados – o plano  $\pi'$  é outro plano de perfil.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do hexágono $[ABCDEF]$ :

O plano que contém a base mais à direita do prisma (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que aquela base do prisma (o hexágono regular  $[ABCDEF]$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do hexágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi r}$ .

Em seguida, rebateram-se os pontos **A** e **B**, tendo em conta que os arcos dos seus rebatimentos estão contidos em planos horizontais (planos ortogonais à charneira do rebatimento). Nesse sentido, os arcos do rebatimento de ambos os pontos projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as respetivas cotas, ao longo dos seus rebatimentos, o que nos permitiu determinar **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir de  $A_r$  e  $B_r$  efetuaram-se os traçados necessários à construção do hexágono em verdadeira grandeza, em rebatimento, para o que foi necessário, Em primeiro lugar, determinar o ponto  $O_r$  (o centro do hexágono, em rebatimento) e, em seguida, desenhar a circunferência que tem centro em  $O_r$  e que passa por  $A_r$  e  $B_r$ . Em seguida efetuaram-se os restantes traçados da construção, o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono em rebatimento. Em seguida inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$  e determinaram-se as projeções dos restantes vértices do hexágono (e ainda do ponto  $O$ , apesar de não ser absolutamente necessário), o que nos permitiu desenhar as duas projeções do hexágono  $[ABCDEF]$  (que se reduzem, ambas, a segmentos de reta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante).

### Determinação das projeções do prisma:

A partir das duas projeções dos pontos  $B$  e  $B'$  (que são dois extremos de uma das arestas laterais do prisma), é possível determinar a direção das retas suporte das arestas laterais do sólido. Assim, pelas projeções de cada um dos restantes cinco vértices do hexágono  $[ABCDEF]$  conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte daquelas arestas (que não se identificaram), paralelas às projeções homónimas da aresta lateral  $[BB']$ . Os restantes cinco vértices da base mais à esquerda do prisma (os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  e  $F'$ ) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas do prisma com o plano  $\pi'$  (o plano que contém a base de maior abscissa do prisma) e foram determinados diretamente, pois o plano  $\pi'$  é um plano duplamente projetante.

Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do hexágono regular  $[A'B'C'D'E'F']$  (a base mais à esquerda do prisma), cujas projeções de reduzem, ambas, a segmentos de reta, pois o plano  $\pi'$  é um plano duplamente projetante. A partir das projeções dos doze vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDEE'D'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2E_2E'_2D'_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $A$ ,  $F$ ,  $A'$  e  $F'$ . Estes quatro vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[AF]$  e  $[EF]$  (da base mais à direita), as arestas  $[A'B']$ ,  $[A'F']$  e  $[E'F']$  (da base mais à esquerda), e as arestas laterais  $[AA']$  e  $[FF']$ . Note que as arestas  $[AB]$ ,  $[AF]$ ,  $[EF]$ ,  $[A'B']$ ,  $[A'F']$  e  $[E'F']$ , apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção frontal). Assim, as únicas invisibilidades a assinalar, em projeção frontal, são as referentes às arestas laterais  $[AA']$  e  $[FF']$ . As arestas laterais  $[CC']$  e  $[DD']$  são visíveis, por se situarem na parte visível do sólido (os pontos  $C$ ,  $D$ ,  $C'$  e  $D'$  são os vértices de maior afastamento do prisma).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[CDEFF'D'E'C']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[C_1D_1E_1F_1F'_1E'_1D'_1C'_1]$ . Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  e  $B'$ . Estes quatro vértices, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$  e  $[AF]$  (da base mais à direita), as arestas  $[A'B']$ ,  $[B'C']$  e  $[A'F']$  (da base mais à esquerda), e as arestas laterais  $[AA']$  e  $[BB']$ . Note que as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[AF]$ ,  $[A'B']$ ,  $[B'C']$  e  $[A'F']$ , apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção horizontal). Assim, as únicas invisibilidades a assinalar, em projeção horizontal, são as referentes às arestas laterais  $[AA']$  e  $[BB']$ . As arestas laterais  $[DD']$  e  $[EE']$  são visíveis, por se situarem na parte visível do sólido (os pontos  $D$ ,  $E$ ,  $D'$  e  $E'$  são os vértices de maior cota do prisma).

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\pi''$ ) é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção é um polígono geometricamente igual aos hexágonos das duas faces (é um outro **hexágono regular**) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes dos hexágonos daquelas duas bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\pi''$ ) é um plano duplamente projetante, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as seis arestas laterais), não cortando qualquer das bases em nenhuma das respetivas arestas – assim, a figura da secção tem seis vértices, pelo que é um **hexágono** (um hexágono regular, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices da figura da secção** (os pontos  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $D''$ ,  $E''$  e  $F''$ ), que foram determinados diretamente, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais do prisma (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi''$ ). Assim, o ponto  $A''$  é o ponto em que o plano  $\pi''$  corta a aresta  $[AA']$ , o ponto  $B''$  é o ponto em que o plano  $\pi''$  corta a aresta  $[BB']$ , o ponto  $C''$  é o ponto em que o plano  $\pi''$  corta a aresta  $[CC']$ , o ponto  $D''$  é o ponto em que o plano  $\pi''$  corta a aresta  $[DD']$ , o ponto  $E''$  é o ponto em que o plano  $\pi''$  corta a aresta  $[EE']$  e, por fim, o ponto  $F''$  é o ponto em que o plano  $\pi''$  corta a aresta  $[FF']$ .

A partir das projeções dos seis vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um hexágono regular). A **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta em ambas as projeções, pois o plano secante (o plano  $\pi''$ ) é um plano duplamente projetante. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas).

### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de prisma – o tronco do prisma compreendido entre o plano  $\pi''$  (o plano secante) e a base mais à direita do sólido – trata-se de um outro prisma, cuja base mais à direita é o hexágono  $[ABCDEF]$  e cuja base mais à esquerda é o hexágono  $[A''B''C''D''E''F'']$ .

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDEE''D''C''B'']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2E_2E''_2D''_2C''_2B''_2]$ . Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $A$ ,  $F$ ,  $A''$  e  $F''$ . Estes quatro vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do novo prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[AF]$  e  $[EF]$  (da base mais à direita), as arestas  $[A''B'']$ ,  $[A''F'']$  e  $[E''F'']$  (da base mais à esquerda), e as arestas laterais  $[AA'']$  e  $[FF'']$ . Note que as arestas  $[AB]$ ,  $[AF]$ ,  $[EF]$ ,  $[A''B'']$ ,  $[A''F'']$  e  $[E''F'']$ , apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção frontal). Assim, as únicas invisibilidades a assinalar, em projeção frontal, são as referentes às arestas laterais  $[AA'']$  e  $[FF'']$ . As arestas laterais  $[CC'']$  e  $[DD'']$  são visíveis, por se situarem na parte visível do sólido (os pontos  $C$ ,  $D$ ,  $C''$  e  $D''$  são os vértices de maior afastamento do novo prisma).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[CDEFF''D''E''C'']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[C_1D_1E_1F_1F''_1E''_1D''_1C''_1]$ . Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A**, **B**, **A''** e **B''**. Estes quatro vértices, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$  e  $[AF]$  (da base mais à direita), as arestas  $[A''B'']$ ,  $[B''C'']$  e  $[A''F'']$  (da base mais à esquerda), e as arestas laterais  $[AA'']$  e  $[BB'']$ . Note que as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[AF]$ ,  $[A''B'']$ ,  $[B''C'']$  e  $[A''F'']$ , apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção horizontal). Assim, as únicas invisibilidades a assinalar, em projeção horizontal, são as referentes às arestas laterais  $[AA'']$  e  $[BB'']$ . As arestas laterais  $[DD'']$  e  $[EE'']$  são visíveis, por se situarem na parte visível do sólido (os pontos **D**, **E**, **D''** e **E''** são os vértices de maior cota do prisma).

A **figura da secção** é invisível em ambas as projeções, pelo que não há lugar ao preenchimento de qualquer das suas projeções com tracejado.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\pi''$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. Os traços dos planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos que contêm as bases do prisma) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções da do prisma, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , para a construção das projeções do hexágono).

## 647.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **A**, pelas respetivas projeções, em função dos dados, bem como o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base), pelo seu traço frontal  $(f_v)$ . O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal  $(f_v)$  passa por  $A_2$  e por  $O_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **O**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções da pirâmide:

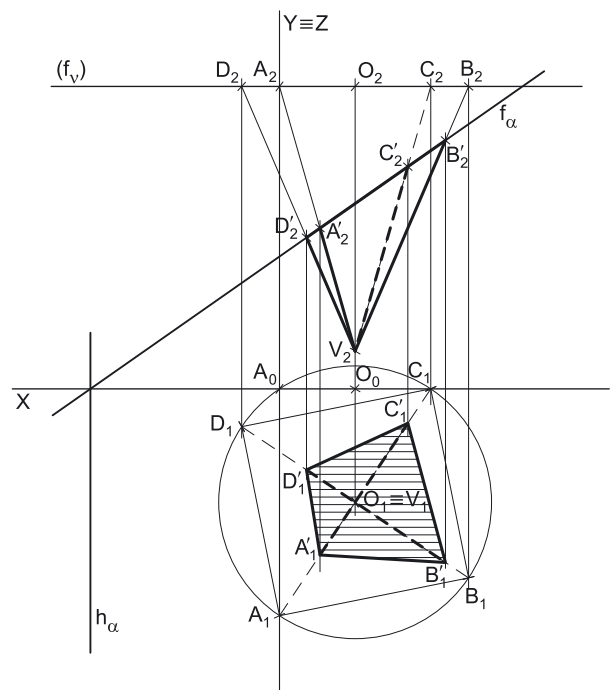
A base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao polígono e procedeu-se à construção do quadrado, inscrito na circunferência. Após a construção da projeção horizontal da figura, determinou-se a sua projeção frontal, que se reduz a um segmento de reta sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Tendo em conta que o enunciado é omissivo no que respeita à ordem dos vértices do quadrado, estes foram nomeados de forma arbitrária, mas sequencial.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta vertical (projetante horizontal) – tem-se, imediatamente,  $V_1 \equiv O_1$ . Por outro lado, tendo em conta que é dada a cota do vértice da pirâmide (que é 1 cm), determinou-se imediatamente a sua projeção frontal  $(V_2)$ . Em seguida, a partir das projeções de todos os seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BADV]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2A_2D_2V_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[BC]$  e  $[CD]$ , da base, e a aresta lateral  $[CV]$ . No entanto, as arestas da base estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção frontal) é a relativa à aresta lateral  $[CV]$ . A aresta lateral  $[AV]$  é visível, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal, além de que **A** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado  $[ABCD]$ , cuja projeção horizontal é o quadrado  $[A_1B_1C_1D_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – todas as arestas laterais da pirâmide são invisíveis, em projeção horizontal.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao quadrado da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as quatro arestas laterais da pirâmide, não cortando qualquer aresta da base. Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero** (mas não é um quadrado, pois o plano secante **não é paralelo** ao plano da base).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\alpha$ ). Assim, o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[AV]**, o ponto **B'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[BV]**, o ponto **C'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[CV]** e, por fim, o ponto **D'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[DV]**.

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas).

## Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide compreendido entre o plano  $\alpha$  (o plano secante) e o vértice do sólido. Assim, este novo sólido é uma outra pirâmide, cuja base é o quadrilátero **[A'B'C'D']**.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[B'A'D'V]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B'₂A'₂D'₂V₂]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **C'**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** do sólido, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[B'C']** e **[C'D']**, da base, e a aresta lateral **[C'V]**. No entanto, as arestas **[B'C']** e **[C'D']** estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção frontal) é a relativa à aresta **[C'V]**. A aresta **[A'V]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal, além de que **A'** é o vértice de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é o quadrilátero **[A'B'C'D']**, cuja projeção horizontal é o quadrilátero **[A'₁B'₁C'₁D'₁]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'V]**, **[B'V]**, **[C'V]** e **[D'V]** são invisíveis, em projeção horizontal.

A **figura da secção** é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), pelo que se assinalou esse facto preenchendo a projeção horizontal da mesma com tracejado.

## Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\alpha$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O traço frontal do plano  $\nu$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do quadrado). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 648.

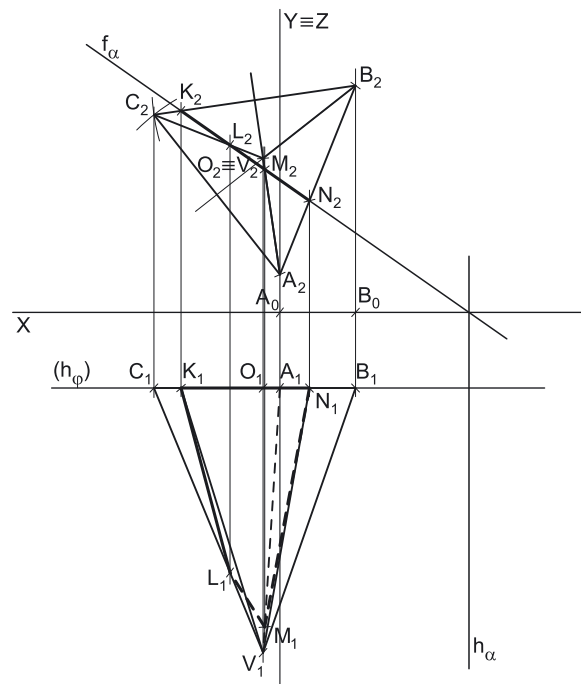
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados, bem como o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base), pelo seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por **A₁** e por **B₁** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o triângulo **[ABC]**) está contida num plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, a partir de **A₂** e **B₂** (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção frontal do triângulo, o que nos permitiu determinar **C₂** (a projeção frontal do ponto **C**). Note que se respeitou o dado do enunciado referente ao ponto **C** – **C** é o vértice de maior abscissa do triângulo.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinou-se, também, a projeção frontal do ponto **O** (o centro do triângulo). Após a construção da projeção frontal da figura, determinou-se a sua projeção horizontal, que se reduz a um segmento de reta sobre  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta de topo (projetante frontal) – tem-se, imediatamente,  $V_2 \equiv O_2$ . Por outro lado, uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e se situa no espaço do  $1^a$  Diedro, o vértice **V** tem de ter afastamento superior à base. Ora, a altura de uma pirâmide é a distância do vértice ao plano da base. Assim, e atendendo a que o plano da base tem 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **B**), o vértice **V** tem 9 cm de afastamento ( $2 + 7 = 9$ ), o que nos permitiu determinar  $V_1$  (a projeção horizontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os quatro vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o triângulo **[ABC]**, cuja projeção frontal é o triângulo **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – todas as arestas laterais da pirâmide são visíveis, em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[BCV]** (que é, na prática, a face lateral **[BCV]**), cuja projeção horizontal é o triângulo **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AC]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**. No entanto, as arestas da base estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção horizontal) é a relativa à aresta lateral **[AV]**.

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não** é um polígono semelhante ao triângulo da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas laterais da pirâmide (as arestas **[AV]** e **[CV]**), cortando ainda duas arestas da base (as arestas **[AB]** e **[BC]**). Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\alpha$ ). Assim, o ponto **K** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[BC]** da base, o ponto **L** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[CV]**, o ponto **M** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[AV]** e, por fim, o ponto **N** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AB]** da base.

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrilátero). Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais **[ABV]** e **[CDV]**. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces são **invisíveis**, em projeção horizontal (os lados **[LM]** e **[MN]**). O lado **[KL]** da **figura da secção** é **visível** em projeção horizontal, por se situar numa face da pirâmide que é visível em projeção horizontal (a face lateral **[BCV]**). Por fim, o lado **[KN]** da figura da secção, que está contido na base, apesar de ser invisível, está oculto por arestas da base que são visíveis em projeção horizontal. Assim, as invisibilidades da figura da secção a assinalar em projeção horizontal são as referentes aos seus lados **[LM]** e **[MN]**.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

#### Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. O traço horizontal do plano que contém a base da pirâmide, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do triângulo).

## 649.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base da pirâmide), pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados e pertencente ao plano  $\pi$ . O plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que as projeções do ponto  $O$  situam-se necessariamente sobre os traços homónimos do plano  $\pi$ . Por outro lado, o ponto  $O$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ).

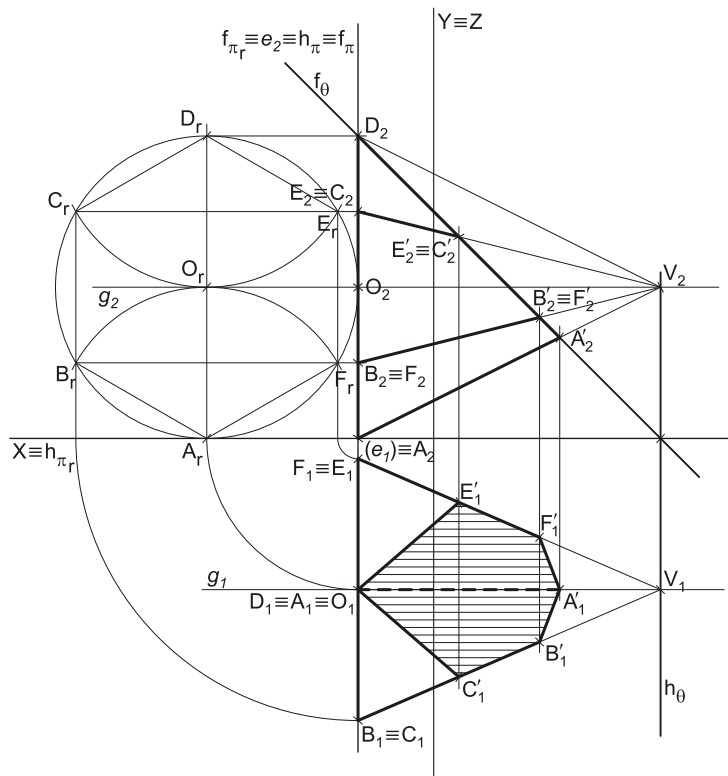
Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\theta$  (o plano secante) pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do hexágono da base da pirâmide:

O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base da pirâmide (o hexágono regular  $[ABCDEF]$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do hexágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv h_\pi$ .

Em seguida, rebateu-se o ponto  $O$ , tendo em conta que o arco do seu rebatimento está contido num plano horizontal (um plano ortogonal à charneira do rebatimento). Nesse sentido, o arco do rebatimento do ponto  $O$  projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e o ponto mantém a sua cota, ao longo do seu rebatimento, o que nos permitiu determinar  $O_r$ .



Atendendo a que a circunferência circunscrita ao hexágono é tangente a ambos os planos de projeção, conclui-se que a circunferência tem 4 cm de raio (raio igual à cota e ao afastamento do ponto  $O$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 4 cm de raio, desenhou-se, em rebatimento, a circunferência circunscrita ao polígono, que é tangente a  $f_\pi$  e a  $h_\pi$ .

Em seguida efetuaram-se os traçados necessários à construção do hexágono, inscrito na circunferência, e atendendo aos dados – dois dos lados da figura são verticais, ou seja, paralelos a  $f_\pi$ . A construção da figura, em verdadeira grandeza (em rebatimento), permitiu-nos determinar os seis vértices do polígono em rebatimento. Tendo em conta que o enunciado é omissivo no que respeita à ordem dos vértices do hexágono, estes foram nomeados de forma arbitrária, mas sequencial.

Em seguida inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$  e determinaram-se as projeções de todos os vértices do hexágono, o que nos permitiu desenhar as duas projeções do polígono (que se reduzem, ambas, a segmentos de reta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante).

#### Determinação das projeções da pirâmide:

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base que passa pelo ponto  $O$  (o centro da base). Assim, pelas projeções do ponto  $O$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte do eixo da pirâmide (a reta  $g$ ), que é uma reta fronto-horizontal.

A altura da pirâmide é a distância do vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base (o plano  $\pi$ ) – a distância do vértice ao plano  $\pi$  corresponde, na prática, à diferença entre as respetivas abcissas. Por outro lado, atendendo a que o ponto  $V$  tem abcissa negativa (é dado no enunciado), sabe-se que o ponto  $V$  se situa à direita do plano  $\pi$ . Assim, considerando que o plano  $\pi$  tem 2 cm de abcissa e que a pirâmide tem 8 cm de altura, o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) tem necessariamente  $-6$  de abcissa ( $2 - 8 = -6$ ). O ponto  $V$  é, assim, o ponto da reta  $g$  que tem  $-6$  de abcissa. A partir das projeções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ABCDV]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2D_2V_2]$ . Em projeção frontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal do sólido – os vértices  $E$  e  $F$ . Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são invisíveis (em projeção frontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AF]$ ,  $[DE]$  e  $[EF]$ , da base, e as arestas laterais  $[EV]$  e  $[FV]$ . No entanto, todas estas estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[CDEV]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[C_1D_1E_1V_1]$ . Em projeção horizontal, existem três vértices que não integram o contorno aparente horizontal do sólido – os vértices **A**, **B** e **F**. Estes três vértices, por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são invisíveis (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[AF]$  e  $[EF]$ , da base, e as arestas laterais  $[AV]$ ,  $[BV]$  e  $[FV]$ . No entanto, todas estas estão ocultas (em projeção horizontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção horizontal, também não há qualquer invisibilidade a assinalar.

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao hexágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as seis arestas laterais da pirâmide, não cortando qualquer aresta da base. De uma forma mais precisa, o plano  $\theta$  corta a base num único ponto, que é o ponto em que o plano corta a aresta lateral  $[DV]$ . Assim, a figura da secção tem **seis vértices**, pelo que é um **hexágono** (mas não é um hexágono regular, pois o plano secante **não é paralelo** ao plano da base).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\theta$ ). Assim, o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral  $[AV]$ , o ponto **B'** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral  $[BV]$ , o ponto **C'** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral  $[CV]$ , o ponto **E'** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral  $[EV]$ , o ponto **F'** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral  $[FV]$ , e, por fim, o **próprio ponto D** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral  $[DV]$ .

Note que os pontos **E'** e **C'** têm as suas projeções frontais coincidentes, pois situam-se em arestas laterais cujas projeções frontais são igualmente coincidentes – as arestas laterais  $[EV]$  e  $[CV]$ , respetivamente. De forma semelhante, também os pontos **B'** e **F'** têm as suas projeções frontais coincidentes, pois situam-se igualmente em arestas laterais cujas projeções frontais são coincidentes – as arestas laterais  $[BV]$  e  $[FV]$ , respetivamente.

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas).

*Determinação das projeções do sólido resultante da secção:*

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide compreendido entre o plano  $\theta$  (o plano secante) e a base da pirâmide (que corresponde à parte do sólido que está compreendida entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ABCDC'B'A']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2D_2C'_2B'_2A'_2]$ . Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **E**, **F**, **E'** e **F'**. Todos estes vértices são os vértices de **menor afastamento** do sólido, pelo que são invisíveis, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[DE]$ ,  $[EF]$  e  $[AF]$  (da base  $[ABCDEF]$ ), as arestas  $[D'E']$ ,  $[E'F']$ , e  $[A'F']$  (da face  $[A'B'C'DE'F']$ ) e as arestas laterais  $[EE']$  e  $[FF']$ . No entanto, todas estas arestas estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar. Salienta-se que as arestas laterais  $[BB']$  e  $[CC']$  são visíveis, em projeção frontal, pois os vértices **B**, **C**, **B'** e **C'** são os vértices de maior afastamento do sólido.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[CDEE'F'A'B'C']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[C_1D_1E_1E'_1F'_1A'_1B'_1C'_1]$ . Em projeção horizontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A**, **B** e **F**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[AF]$  e  $[EF]$  (da base) e as arestas laterais  $[AA']$ ,  $[BB']$  e  $[FF']$ . No entanto, todas estas arestas (à exceção da aresta  $[AA']$ ) estão ocultas por aresta do sólido que são visíveis (em projeção horizontal). Assim, a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal, é a referente à aresta  $[AA']$ . Note ainda que as faces laterais  $[EE'F'F]$  e  $[BB'C'C]$  estão contidas em planos projetantes horizontais.

A **figura da secção** é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), pelo que se assinalou esse facto preenchendo a projeção horizontal da mesma com tracejado.

**Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\theta$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a base da pirâmide) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  e à construção do hexágono em verdadeira grandeza, em rebatimento). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 650.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide, pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

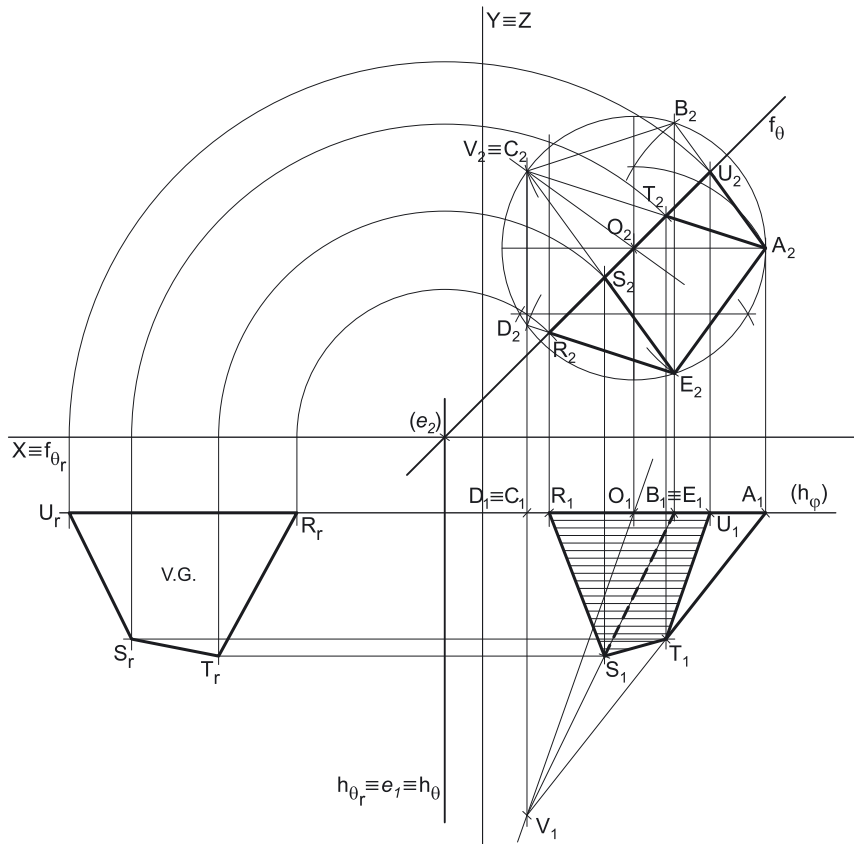
Representou-se, ainda, o plano  $\theta$ , o plano secante, pelos seus traços, em função dos dados.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o pentágono **[ABCDE]**) está contida num plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o pentágono **[ABCDE]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao polígono e procedeu-se à sua construção, em projeção frontal, de acordo com os dados.

Note que se atendeu aos dados sobre o polígono, quer no que respeita à sua posição, quer no que respeita à ordem dos vértices. Uma vez que o vértice **A** é o vértice de menor abcissa da figura, o lado **[CD]** (o lado oposto ao vértice **A**) é o lado mais à esquerda da figura e é vertical. Por outro lado, uma vez que o ponto **B** é o vértice de maior cota do pentágono e que os vértices são nomeados de forma sequencial, o vértice **C** tem cota superior ao vértice **D**. A projeção horizontal do pentágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.



O enunciado refere expressamente que o vértice da pirâmide se situa na mesma projetante frontal do vértice **C**, da base, pelo que os dois pontos têm as suas projeções frontais coincidentes – tem-se, imediatamente,  $V_2 \equiv C_2$ . Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do vértice ao plano da base. Ora, uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e que o plano da base tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**), e atendendo a que a pirâmide se situa no espaço do 1.º Diedro, o vértice **V** tem 10 cm de afastamento ( $2 + 8 = 10$ ), o que nos permitiu determinar  $V_1$  (a projeção horizontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ABVDE]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser um dos vértices de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. No entanto, a aresta lateral **[CV]** é projetante frontal, pelo que a sua projeção frontal se reduz a um único ponto – assim, não existe qualquer invisibilidade a assinalar em relação a esta aresta. Por outro lado, as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar. Por fim, as arestas laterais **[AV]** e **[EV]** são visíveis (em projeção frontal), por se situarem na parte visível do sólido (aquelas arestas separam faces que são visíveis em projeção frontal).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABCV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não integram ao contorno aparente horizontal – os vértices **D** e **E**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[CD]**, **[DE]** e **[AE]**, da base, e as arestas laterais **[DV]** e **[EV]**. No entanto, todas estas arestas estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar. Por fim, a aresta lateral **[BV]** é visível (em projeção horizontal), por se situar na parte visível do sólido (note que o vértice **B** é o vértice de maior cota do sólido).

#### a) Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não** é um polígono semelhante ao pentágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas laterais da pirâmide (as arestas **[AV]** e **[EV]**), cortando ainda duas arestas da base (as arestas **[AB]** e **[DE]**). Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de intersecção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\theta$ ). Assim, o ponto **R** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta **[DE]** da base, o ponto **S** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral **[EV]**, o ponto **T** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral **[AV]** e o ponto **U** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta **[AB]** da base.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide compreendido entre o plano  $\theta$  (o plano secante) e o Plano Horizontal de Projeção (sendo que a figura da secção é uma das faces desse novo sólido).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [RSTUAE], cuja projeção frontal é o polígono [R<sub>2</sub>S<sub>2</sub>T<sub>2</sub>U<sub>2</sub>A<sub>2</sub>E<sub>2</sub>]. Todos os vértices do sólido integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta [RU] é invisível, por se situar na parte invisível do sólido (separa duas faces do sólido que são invisíveis em projeção horizontal – as faces [RSTU] e [AERU]). Já as arestas [AT] e [ES] são visíveis (em projeção frontal), por se situarem na parte visível do sólido (note que os pontos **S** e **T** são os vértices de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [RSTAU], cuja projeção horizontal é o polígono [R<sub>1</sub>S<sub>1</sub>T<sub>1</sub>A<sub>1</sub>U<sub>1</sub>]. Em projeção horizontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **E**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** do sólido, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [RE], [AE] e [ES]. No entanto, as arestas [RE] e [AE] estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal, é a referente à aresta [ES].

A **figura da secção** é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), pelo que se assinalou esse facto preenchendo a projeção horizontal da mesma com tracejado.

**b)** Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção – a charneira foi  $h_0$  (o traço horizontal do plano  $\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $h_0 \equiv e_1 \equiv h_{0r}$ .

Em seguida, rebateram-se os quatro vértices da figura da secção, tendo em conta que os arcos dos respetivos rebatimentos estão contidos em planos frontais (planos ortogonais à charneira do rebatimento). Nesse sentido, os arcos do rebatimento dos quatro pontos projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos mantêm os respetivos afastamentos (ao longo dos seus rebatimentos), o que nos permitiu determinar **R<sub>r</sub>**, **S<sub>r</sub>**, **T<sub>r</sub>** e **U<sub>r</sub>**. Por fim, desenhou-se o quadrilátero [R<sub>r</sub>S<sub>r</sub>T<sub>r</sub>U<sub>r</sub>], que é a figura da secção em verdadeira grandeza, o que se assinalou devidamente no desenho.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\theta$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do pentágono ou os referentes ao rebatimento do plano  $\theta$ , para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 651.

#### Dados:

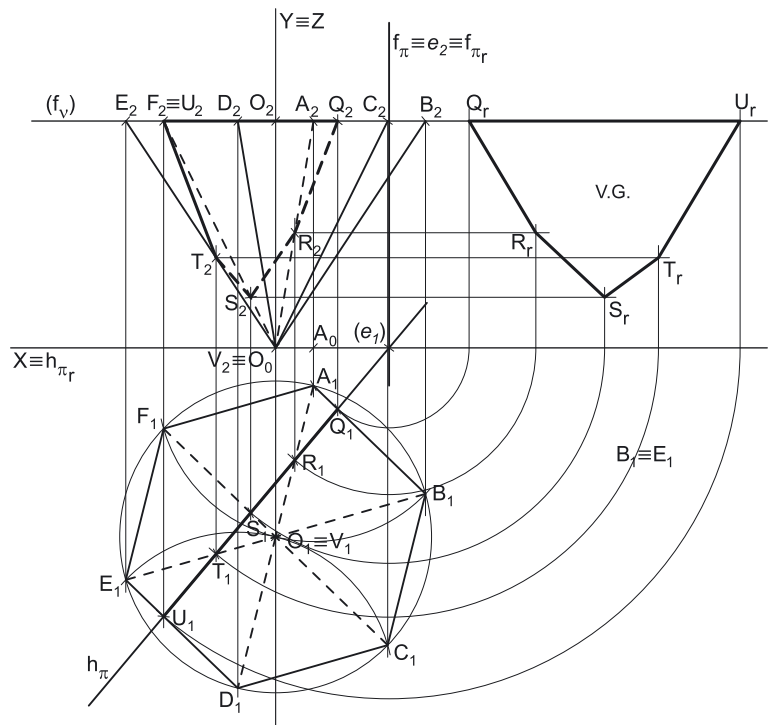
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **A**, pelas respetivas projeções, em função dos dados, bem como o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide), pelo seu traço frontal ( $f_v$ ). O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por **O<sub>2</sub>** e por **A<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **O** e **A**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\pi$  (o plano secante), pelos seus traços.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o hexágono regular [ABCDEF]) está contida num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o hexágono [ABCDEF] se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**), desenhou-se a circunferência circunscrita ao polígono. Em seguida efetuaram-se os traçados necessários à construção do hexágono, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros cinco vértices do polígono.

(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

Após a construção da projeção horizontal da figura, determinou-se a sua projeção frontal, que se reduz a um segmento de reta sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta vertical (projetante horizontal) – tem-se, imediatamente,  $V_1 \equiv O_1$ . Por outro lado, uma vez que o vértice da pirâmide (o ponto  $V$ ) é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, sabe-se que o ponto  $V$  tem cota nula, o que nos permitiu determinar a sua projeção frontal ( $V_2$ ), que se situa no eixo  $X$ . Em seguida, a partir das projeções de todos os sete vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDEV]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2E_2V_2]$ . Em projeção frontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices  $A$  e  $F$ . Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[AF]$  e  $[EF]$ , da base, e as arestas laterais  $[AV]$  e  $[FV]$ . No entanto, as arestas da base estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que as invisibilidades a assinalar (em projeção frontal) são as referentes às arestas laterais  $[AV]$  e  $[FV]$ . As arestas laterais  $[CV]$  e  $[DV]$  são visíveis (em projeção frontal), por se situarem na parte visível do sólido (os pontos  $C$  e  $D$  são os vértices de maior afastamento da pirâmide).

O **contorno aparente horizontal** é o hexágono  $[ABCDEF]$ , cuja projeção horizontal é o hexágono  $[A_1B_1C_1D_1E_1F_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice  $V$ . Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – todas as arestas laterais da pirâmide são invisíveis, em projeção horizontal.

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\pi$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao triângulo da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\pi$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta três arestas laterais da pirâmide (as arestas  $[AV]$ ,  $[FV]$  e  $[EV]$ ), cortando ainda duas arestas da base (as arestas  $[AB]$  e  $[DE]$ ). Assim, a figura da secção tem **cinco vértices**, pelo que é um **pentágono**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\pi$ ). Assim, o ponto  $Q$  é o ponto em que o plano  $\pi$  corta a aresta  $[AB]$  da base, o ponto  $R$  é o ponto em que o plano  $\pi$  corta a aresta lateral  $[AV]$ , o ponto  $S$  é o ponto em que o plano  $\pi$  corta a aresta lateral  $[FV]$ , o ponto  $T$  é o ponto em que o plano  $\pi$  corta a aresta lateral  $[EV]$  e, por fim, o ponto  $U$  é o ponto em que o plano  $\pi$  corta a aresta  $[DE]$  da base.

A partir das projeções dos cinco vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um pentágono irregular). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais  $[ABV]$ ,  $[AFV]$  e  $[EFV]$ . Assim, os (três) lados da figura da secção que se situam naquelas três faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados  $[QR]$ ,  $[RS]$  e  $[ST]$ ). O lado  $[TU]$  da **figura da secção** é **visível** em projeção frontal, por se situar numa face da pirâmide que é visível em projeção frontal (a face lateral  $[DEV]$ ). Por fim, o lado  $[QU]$  da figura da secção, que está contido na base, apesar de ser invisível, está oculto por arestas da base que são visíveis em projeção frontal (pois o plano que contém a base é projetante frontal). Assim, as invisibilidades da figura da secção a assinalar, em projeção frontal, são as referentes aos seus lados  $[QR]$ ,  $[RS]$  e  $[ST]$ .

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

### Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\pi$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\pi$ ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção – a charneira foi  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi'}$ .

Em seguida, rebateram-se os cinco vértices da figura da secção, tendo em conta que os arcos dos respetivos rebatimentos estão contidos em planos horizontais (planos ortogonais à charneira do rebatimento). Nesse sentido, os arcos do rebatimento dos cinco pontos projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as respetivas cotas (ao longo dos seus rebatimentos), o que nos permitiu determinar  $Q_r$ ,  $R_r$ ,  $S_r$ ,  $T_r$  e  $U_r$ . Por fim, desenhou-se o pentágono  $[Q_rR_rS_rT_rU_r]$ , que é a figura da secção em verdadeira grandeza, o que se assinalou devidamente no desenho.

### Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve**, pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do hexágono ou os referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

## 652.

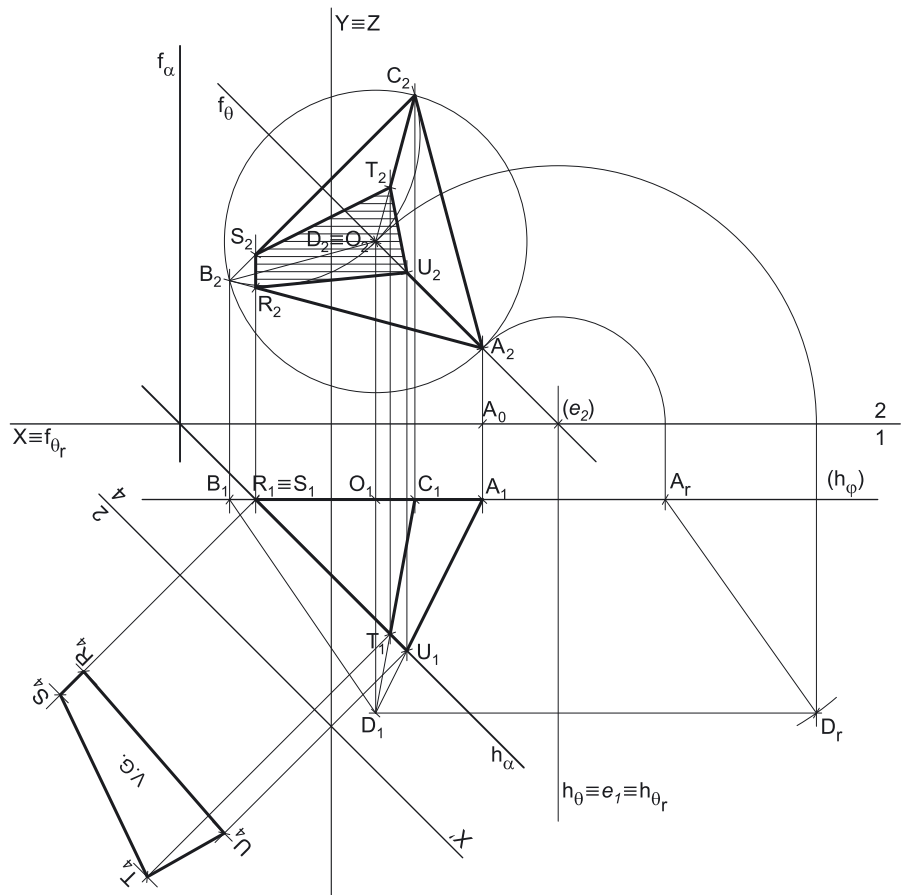
**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **A** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). Representou-se, ainda, o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é o plano frontal (de frente) que contém a face **[ABC]** do tetraedro. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto **A** (**A<sub>1</sub>**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante) pelos seus traços.

**Resolução:***Determinação das projeções do tetraedro:*

Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a reta suporte da projeção frontal da aresta **[AD]** do sólido, em função da direção dada no enunciado. Um tetraedro toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**, qualquer que seja a face que se considere como base. Neste caso, considerou-se a face dada (o triângulo **[ABC]**), que está contida num plano frontal (de frente). Assim, o vértice **D** (o quarto vértice do sólido) situa-se numa reta que passa pelo ponto **O** (o centro dessa face) e que é ortogonal ao plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\varphi$ ), ou seja, os dois pontos situam-se numa mesma reta de topo (projetante frontal).



Por outro lado, uma vez que o triângulo **[ABC]** se inscreve numa circunferência com 4 cm de raio, sabe-se que a distância entre as projeções frontais dos pontos **A** e **O** (**A<sub>2</sub>** e **O<sub>2</sub>**, respetivamente) é 4 cm. Assim, atendendo ao exposto, e porque **D<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **D**) tem de se situar sobre a reta suporte da projeção frontal da aresta **[AD]** (já desenhada), determinaram-se as projeções frontais dos pontos **O** e **D** (**O<sub>2</sub>** e **D<sub>2</sub>**, respetivamente), que estão necessariamente coincidentes. Por fim, a projeção horizontal do ponto **O** (**O<sub>1</sub>**) situa-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é projetante horizontal.

A face **[ABC]** do sólido está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) e com raio até **A<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**), desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao triângulo. Em seguida, procedeu-se à construção da projeção frontal do triângulo, inscrita na circunferência. Tendo em conta que o enunciado é omissivo em relação à ordem dos vértices, estes foram nomeados de forma arbitrária. A projeção horizontal do triângulo situa-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Apesar de o tetraedro tomar a forma aparente de uma pirâmide triangular regular, não é conhecida a altura dessa pirâmide mas, sim, é adquirido o facto de que **todas as arestas de um tetraedro são iguais** (têm o mesmo comprimento), pois trata-se de um **poliedro regular**. Assim, é um facto que todas as arestas que convergem no vértice **D** (as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]**) têm o mesmo comprimento dos lados do triângulo **[ABC]** (que estão em verdadeira grandeza em projeção frontal). No entanto, nenhuma daquelas arestas se projeta em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de projeção, pois nenhuma daquelas três arestas é paralela a qualquer dos planos de projeção. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano projetante frontal da aresta **[AD]**, que é um plano de topo – o plano  $\theta$  (que se representou pelos seus traços em seguida).

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (que é o traço horizontal do plano), que roda sobre si própria, pelo que se tem imediatamente  $h_\theta \equiv e_r \equiv h_{0r}$ . Em seguida identificaram-se como os planos ortogonais à charneira, que são planos frontais – os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos, nos seus rebatimentos, mantêm os seus afastamentos.

Assim, rebateram-se os pontos **A** e **O**, determinando **A<sub>r</sub>** e **O<sub>r</sub>**. Por **O<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular ao eixo **X**, que corresponde ao eixo do sólido (relativo à face **[ABC]**) em rebatimento. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **A<sub>r</sub>**, e com raio igual à medida do lado do triângulo **[ABC]** (que está em verdadeira grandeza em projeção frontal), determinou-se **D<sub>r</sub>** sobre a perpendicular ao eixo **X** que passa por **O<sub>r</sub>**, desenhando-se em seguida a aresta **[AD]** em rebatimento – o segmento **[A<sub>r</sub>D<sub>r</sub>]**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Uma vez que, no rebatimento efetuado, os pontos mantêm os seus afastamentos, transportou-se o afastamento do ponto **D** para a sua linha de chamada (através de uma paralela ao eixo **X**, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), determinando-se **D<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **D**).

Em seguida, a partir das projeções dos quatro vértices do tetraedro, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o triângulo **[ABC]**, cuja projeção frontal é o triângulo **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **D**. Este, por ser o vértice de **maior afastamento** do tetraedro, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem, ou seja, as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]** são visíveis em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ACBD]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>B<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Todos os vértices do sólido pertencem ao contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta **[AB]** é invisível em projeção horizontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal (as faces **[ABD]** e **[ABC]**). Note, ainda, que **A** e **B** são os vértices de menor cota do sólido. Apesar disso, a aresta **[AB]** está oculta por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Por outro lado, há a referir que a aresta **[CD]** é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (o vértice **C** é o vértice de maior cota do sólido).

### a) Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não** é um polígono semelhante ao triângulo da face **[ABC]**. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta **quatro arestas** do tetraedro – as arestas **[AD]**, **[CD]**, **[AB]** e **[AC]**. Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\alpha$ ). Assim, o ponto **R** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AB]**, o ponto **S** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[BC]**, o ponto **T** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[CD]** e o ponto **U** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AD]**.

Note que os pontos **R** e **S** têm as suas projeções horizontais coincidentes, pois as arestas a que se pertencem (as arestas **[AB]** e **[BC]**) têm, igualmente, as suas projeções horizontais coincidentes. Salienta-se, por isso, que o plano secante, ao cortar a face **[ABC]** do tetraedro, a corta necessariamente em dois pontos – os dois pontos atrás referidos.

### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um poliedro compreendido entre o plano  $\alpha$  (o plano secante) e o plano  $\varphi$  (o plano que contém a face **[ABC]** do tetraedro). Assim, a figura da secção (o quadrilátero **[RSTU]**) é uma das faces desse novo sólido, tal como a sua face de menor afastamento passou a ser um quadrilátero – o quadrilátero **[ARSC]**.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ARSC]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>R<sub>2</sub>S<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices **T** e **U**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **maior afastamento** do sólido, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[T]**, **[ST]**, **[TU]**, **[AU]** e **[RU]**.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ACSTU]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>S<sub>1</sub>T<sub>1</sub>U<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **R**. Este vértice, por ser um dos vértices de **menor cota** do sólido, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AR]**, **[RS]** e **[RU]**. No entanto, todas estas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar.

A **figura da secção** é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), pelo que se assinalou esse facto preenchendo a projeção frontal da mesma com tracejado.

b) Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção. Nesta situação, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano frontal (de frente), pois um plano frontal (de frente) é um plano projetante horizontal, tal como o plano  $\alpha$  (que é um plano vertical) – um plano frontal (de frente) é **um caso particular** dos planos projetantes horizontais. Para transformar o plano  $\alpha$  num plano frontal (de frente), é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\alpha$ , o eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ) é paralelo ao traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 4**) dos quatro vértices da figura da secção, em função dos respectivos afastamentos, que se mantiveram.  $R_4$  é a projeção do ponto  $R$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $R_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $R_1$  ao eixo  $X$ .  $S_4$  é a projeção do ponto  $S$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $S_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $S_1$  ao eixo  $X$ .  $T_4$  é a projeção do ponto  $T$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $T_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $T_1$  ao eixo  $X$ .  $U_4$  é a projeção do ponto  $U$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $U_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $U_1$  ao eixo  $X$ .

Por fim, desenhou-se o quadrilátero definido por  $R_4, S_4, T_4$  e  $U_4$  – o quadrilátero  $[R_4S_4T_4U_4]$  é a projeção (no **plano 4**) do quadrilátero  $[RSTU]$  e está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do tetraedro, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (um dos objetivos do exercício) representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção (outro dos objetivos do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à construção do triângulo, Dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$  (para a determinação das projeções do sólido) ou, ainda, Dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 653.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$  e  $C$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto  $C$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). Representou-se, ainda, o plano  $\theta$ , pelos seus traços. O plano  $\theta$  é o plano de topo que contém a base da pirâmide. O plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_\theta$ ) passa necessariamente pelas projeções frontais dos pontos  $A$  e  $C$  ( $A_2$  e  $C_2$ , respetivamente).

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $v$  (o plano secante) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

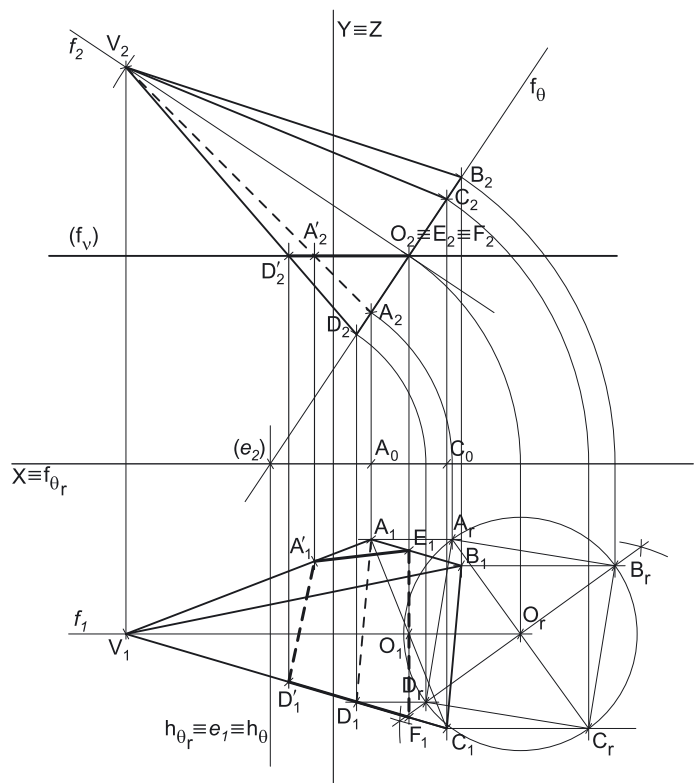
#### Resolução:

##### Determinação das projeções do quadrado da base da pirâmide:

O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**.

Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi  $h_\theta$  (o traço horizontal do plano  $\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $h_\theta \equiv e_1 \equiv h_{\theta_r}$ . Em seguida identificaram-se como os planos ortogonais à charneira, que são planos frontais (de frente) – os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos, nos seus rebatimentos, mantêm os seus afastamentos.

Assim, rebateram-se os pontos  $A$  e  $C$ , determinando  $A_r$  e  $C_r$ . A partir de  $A_r$  e  $C_r$  efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza, o que se processou determinando previamente o centro do quadrado em rebatimento (o ponto  $O_r$ ), com o recurso à mediatriz do segmento de reta  $[A_rC_r]$ . Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido), desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado (que passa por  $A_r$  e por  $C_r$  e conclui-se a construção do quadrado, em rebatimento, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono em rebatimento ( $B_r$  e  $D_r$ ). Por fim, inverteu-se o rebatimento do plano  $\theta$  e determinaram-se as projeções de todos os vértices do quadrado (e do ponto  $O$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções do quadrado  $[ABCD]$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A pirâmide é **regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (o plano  $\theta$ ), que é uma reta frontal (de frente). Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções homónimas da reta **f**, a reta suporte do eixo da pirâmide. A reta **f** é ortogonal ao plano  $\theta$ , pois tem as suas projeções perpendiculares aos traços homónimos do plano  $\theta$  (a reta **h** verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano  $\theta$ ).

A altura da pirâmide é a distância do vértice (o ponto **V**) ao plano da base (o plano  $\theta$ ) – como a pirâmide é **regular**, a sua altura corresponde ao comprimento do seu eixo (o comprimento do segmento de reta **[OV]**), que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois a reta **f** (a reta que o contém) é paralela ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a partir de **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**), sobre **f<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **f**) mediram-se os 9 cm (a altura da pirâmide), determinando-se **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do vértice da pirâmide). Note que se garantiu que a pirâmide se situa no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro, pois o vértice tem cota positiva. **V<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do vértice) está sobre **f<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **f**), pois o ponto **V** é um ponto da reta **f**. A partir das projeções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal do sólido – o vértice **A**. Este, por ser o vértice de **menor afastamento** do sólido, é invisível (em projeção frontal), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**. As arestas **[AB]** e **[AD]** estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a da aresta lateral **[AV]**. Salienta-se que a aresta lateral **[CV]** é visível, em projeção frontal, pois o vértice **C** é um dos vértices de maior afastamento da pirâmide.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABCV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **D**. Este, por ser o vértice de **menor cota** do sólido, é invisível (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AD]** e **[CD]** (da base) e a aresta lateral **[DV]**. Salienta-se que, em função dos dados do exercício, nesta situação particular, a face lateral **[CDV]** da pirâmide está contida num plano projetante horizontal. Exatamente por isso, as arestas **[CD]** e **[DV]**, apesar de serem invisíveis, estão ocultas (em projeção horizontal) pela aresta lateral **[CV]**, pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a da aresta **[AD]** da base. A aresta lateral **[BV]** é visível, em projeção horizontal, pois o vértice **B** é o vértice de maior cota do sólido.

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\nu$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não** é um polígono semelhante ao quadrado da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\nu$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas laterais da pirâmide (as arestas laterais **[AV]** e **[DV]**) e, ainda, duas arestas da base (as arestas **[AB]** e **[CD]**). Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero** (mas não um quadrado, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\nu$ ). Assim, o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\nu$  corta a aresta lateral **[AV]**, o ponto **D'** é o ponto em que o plano  $\nu$  corta a aresta lateral **[DV]**, o ponto **E** é o ponto em que o plano  $\nu$  corta a aresta **[AB]** da base e o ponto **F** é o ponto em que o plano  $\nu$  corta a aresta **[CD]** da base.

Note que os pontos **E** e **F** têm as suas projeções frontais coincidentes, pois as arestas a que se pertencem (as arestas **[AB]** e **[CD]**) têm, igualmente, as suas projeções frontais coincidentes. Salienta-se, por isso, que o plano secante, ao cortar a base **[ABCD]** da pirâmide, a corta necessariamente em dois pontos – os dois pontos atrás referidos.

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrilátero). Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\nu$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\nu$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

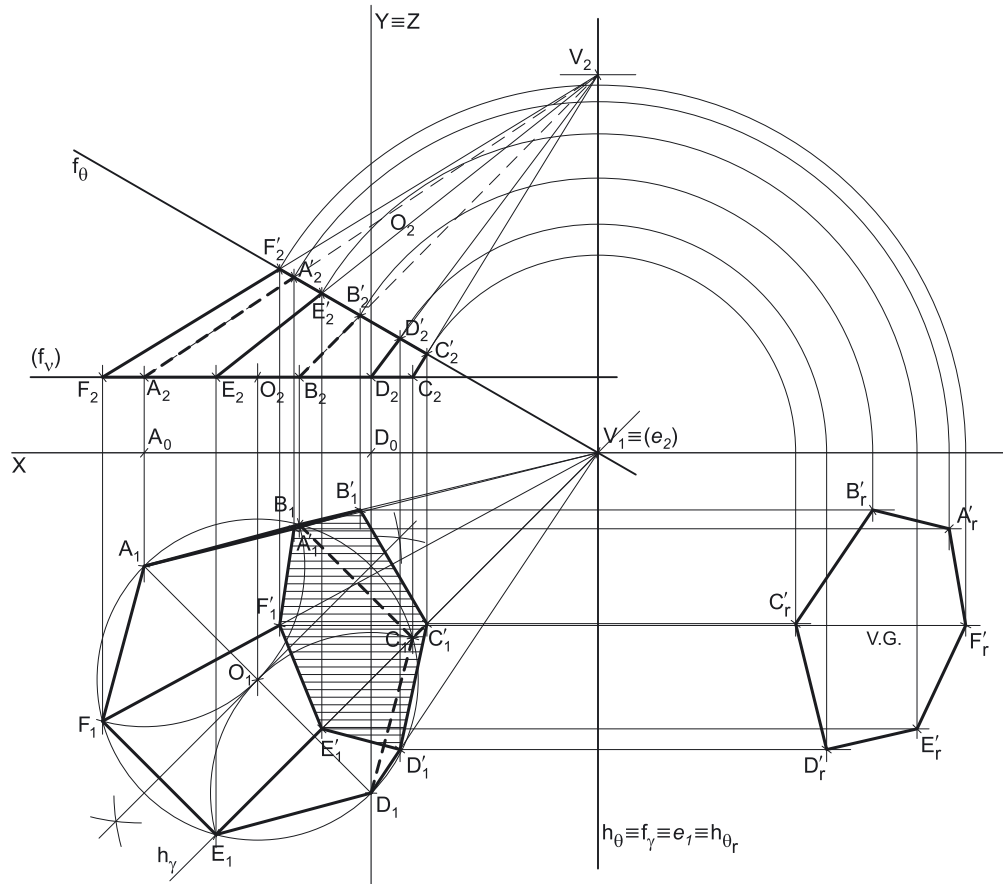
Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais **[ADV]** e **[CDV]**, bem como a base **[ABCD]**. Assim, os (três) lados da figura da secção que se situam naquelas três faces são **invisíveis**, em projeção horizontal (os lados **[A'D']**, **[D'F]** e **[EF]**). O lado **[A'E]** da **figura da secção** é **visível** em projeção horizontal, por se situar numa face da pirâmide que é visível em projeção horizontal (a face lateral **[ABV]**). Por fim, o lado **[D'F]** da figura da secção, que está contido na face lateral **[CDV]**, apesar de ser invisível, está oculto por arestas da base que são visíveis em projeção horizontal (pois o plano que contém essa face é um plano projetante horizontal). Assim, as invisibilidades da figura da secção a assinalar, em projeção horizontal, são as referentes aos lados **[A'D']** e **[EF]**.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

#### Traçado:

As projeções da pirâmide e o traço frontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano  $\theta$  (o plano que contém a base da pirâmide) representaram-se a **leve**, pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$ , para a construção do quadrado ou da reta **f**).

654.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **D**, pelas respectivas projeções, em função dos dados, bem como o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide), pelo seu traço frontal  $(f_v)$ . O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal  $(f_v)$  passa por  $A_2$  e por  $D_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **D**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\theta$  (o plano secante), pelos seus traços.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o hexágono regular **[ABCDEF]**) está contida num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o hexágono **[ABCDEF]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, Em primeiro lugar, determinou-se a projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ), o centro do hexágono, com o recurso à mediatriz do segmento de reta **[A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), desenhou-se a circunferência circunscrita ao polígono (que passa igualmente por ou  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto **D**). Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do hexágono, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros quatro vértices do polígono.

Em seguida nomearam-se os vértices do hexágono, em projeção horizontal, segundo a ordem apresentada no enunciado – o ponto **F** é o ponto de maior abscissa da figura, pelo que, por oposição, o ponto **C** é o vértice de menor abscissa do hexágono. Após a construção da projeção horizontal da figura, determinou-se a sua projeção frontal, que se reduz a um segmento de reta sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, atendendo a que as arestas laterais **[CV]** e **[EV]** da pirâmide estão contidas no mesmo plano projetante horizontal, representou-se esse plano pelos seus traços (embora tal não fosse absolutamente necessário para a resolução do exercício) – o plano  $\gamma$ . Este procedimento permite-nos concluir que as projeções horizontais dos pontos **C**, **E** e **V** ( $C_1$ ,  $E_1$  e  $V_1$ , respetivamente) têm de estar alinhadas (colineares). Por outro lado, uma vez que o vértice da pirâmide (o ponto **V**) tem afastamento nulo, foi possível determinar  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto **V**) de forma imediata, pois situa-se no eixo **X** (no ponto de concorrência de  $h_v$  com o eixo **X**).

Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do vértice ao plano da base. Ora, uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e que o plano da base tem 2 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **D**), e atendendo a que a pirâmide se situa no espaço do  $1^a$  Diedro, o vértice **V** tem 10 cm de cota ( $2 + 8 = 10$ ), o que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os sete vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [CDEFV], cuja projeção frontal é o polígono [C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]. Em projeção frontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices **A** e **B**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [AB], [BC] e [AF], da base, e as arestas laterais [AV] e [BV]. No entanto, as arestas da base estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que as invisibilidades a assinalar (em projeção frontal) são as referentes às arestas laterais [AV] e [BV]. As arestas laterais [DV] e [EV] são visíveis (em projeção frontal), por se situarem na parte visível do sólido (os pontos **D** e **E** são os vértices de maior afastamento da pirâmide).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [ABVDEF], cuja projeção horizontal é o polígono [A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>V<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>]. Em projeção horizontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **C**. Estes vértices, por ser um dos vértices de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [BC] e [CD], da base, e a aresta lateral [CV]. As arestas laterais [AV], [EV] e [FV] são visíveis (em projeção horizontal), por se situarem na parte visível do sólido (são arestas que separam faces da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal).

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao hexágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as seis arestas laterais), não cortando a base em nenhuma das suas arestas – assim, a figura da secção tem seis vértices, pelo que é um **hexágono** (mas não um hexágono regular, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices da figura da secção** – o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [AV], o ponto **B'** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [BV], o ponto **C'** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [CV], o ponto **D'** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [DV], o ponto **E'** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [EV] e, por fim, o ponto **F'** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [FV]. Salienta-se que os pontos **A'**, **B'**, **C'**, **D'**, **E'** e **F'** (os seis vértices da figura da secção) foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se da determinação dos pontos de interseção das arestas laterais do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\theta$ ).

### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide compreendido entre o plano  $\theta$  (o plano secante) e o plano  $\nu$  (o plano que contém a sua base). Assim, a base inferior desse novo sólido é o hexágono [ABCDEF] e a sua base superior é o hexágono [A'B'C'D'E'F'] (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [CDEFF'E'D'C'], cuja projeção frontal é o polígono [C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>F'<sub>2</sub>E'<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>]. Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A**, **B**, **A'** e **B'**. Todos estes vértices são os vértices de **menor afastamento** do sólido, pelo que são invisíveis, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [AB], [BC] e [AF] (da base inferior), as arestas [A'B'], [B'C'] e [A'F'] (da base superior) e as arestas laterais [AA'] e [BB']. No entanto, as arestas [AB], [BC], [AF], [A'B'], [B'C'] e [A'F'] estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, as invisibilidades a assinalar são as referentes às arestas [AA'] e [BB']. Salienta-se que as arestas laterais [DD'] e [EE'] são visíveis, em projeção frontal, pois os vértices **D**, **E**, **D'** e **E'** são os vértices de maior afastamento do sólido.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [ABB'C'D'DEF], cuja projeção horizontal é o polígono [A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>]. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **C**, **A'**, **F'** e **E'**. Os vértices **A'**, **F'** e **E'**, por serem os vértices de **maior cota** do sólido, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [A'B'], [A'F'], [E'F'] e [D'E'] (da base superior) e as arestas laterais [AA'], [EE'] e [FF']. O vértice **C**, por ser um dos vértices de **menor cota** do sólido, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [BD] e [CD] (da base inferior) e a aresta lateral [CC'].

A **figura da secção** é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), pelo que se assinalou esse facto preenchendo a projeção horizontal da mesma com tracejado.

### Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção – a charneira foi **h<sub>0</sub>** (o traço horizontal do plano  $\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente, **h<sub>0</sub> = e<sub>1</sub> = h<sub>0r</sub>**.

Em seguida, rebateram-se os seis vértices da figura da secção, tendo em conta que os arcos dos respetivos rebatimentos estão contidos em planos frontais (planos ortogonais à charneira do rebatimento). Nesse sentido, os arcos do rebatimento dos seis pontos projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos mantêm os respetivos afastamentos (ao longo dos seus rebatimentos), o que nos permitiu determinar **A'<sub>r</sub>**, **B'<sub>r</sub>**, **C'<sub>r</sub>**, **D'<sub>r</sub>**, **E'<sub>r</sub>** e **F'<sub>r</sub>**. Por fim, desenhou-se o hexágono [A'<sub>r</sub>B'<sub>r</sub>C'<sub>r</sub>D'<sub>r</sub>E'<sub>r</sub>F'<sub>r</sub>], que é a figura da secção em verdadeira grandeza, o que se assinalou devidamente no desenho.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\theta$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O traço frontal do plano  $\nu$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do hexágono ou os referentes ao rebatimento do plano  $\theta$ , para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

655.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, ainda, o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto **A** ( $A_1$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano secante (o plano  $\gamma$ ) pelos seus traços.

Resolução:

Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que o quadrado **[ABCD]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, a partir de  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), mediu-se (em verdadeira grandeza) o ângulo que o lado **[AB]** faz com o Plano Horizontal de Projeção, o que nos permitiu desenhar a projeção frontal da reta suporte do lado **[AB]**. Sobre essa reta mediram-se os 6 cm (a medida do lado do quadrado) e determinou-se  $B_2$ , a projeção frontal do ponto **B**. Note que se garantiu que o ponto **A** é o vértice de maior cota do quadrado (como o enunciado pede expressamente).

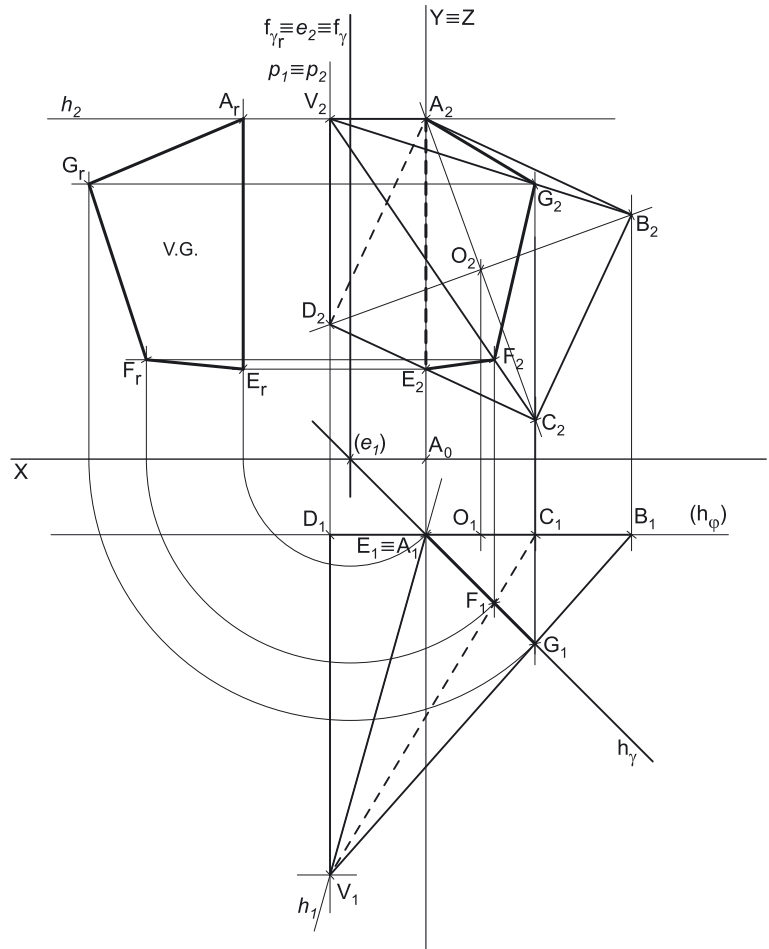
A partir de  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção frontal do quadrado, garantindo-se que a figura se situa no espaço do  $1^a$  Diedro (para que a pirâmide se situe no espaço do  $1^a$  Diedro, como o enunciado pede expressamente). Determinou-se, também, o ponto **O**, o centro do quadrado. A projeção horizontal do quadrado situa-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Tendo em conta que a aresta lateral **[DV]** da pirâmide é de perfil, sabe-se que o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem a mesma abscissa do ponto **D**. Por outro lado, uma vez que a aresta lateral **[AV]** da pirâmide é horizontal (de nível), sabe-se que o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem a mesma cota do ponto **A** – a conjugação destas duas informações permitiu-nos determinar  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**).

Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do vértice ao plano da base. Ora, uma vez que a pirâmide tem 9 cm de altura e que o plano da base tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto **A**), e atendendo a que a pirâmide se situa no espaço do  $1^a$  Diedro, o vértice **V** tem 11 cm de afastamento ( $2 + 9 = 11$ ), o que nos permitiu determinar  $V_1$  (a projeção horizontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide pertencem ao contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[AD]** é invisível em projeção frontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal (a face lateral **[ADV]** e a base **[ABCD]**). Note que **A** e **D** são dois dos vértices de menor afastamento do sólido. Por outro lado, há a referir que as arestas laterais **[BV]** e **[CV]** são visíveis em projeção frontal, pois separam faces visíveis em projeção frontal (a aresta lateral **[BV]** separa as faces **[ABV]** e **[BCV]** e a aresta lateral **[CV]** separa as faces **[BCV]** e **[CDV]**).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[B<sub>1</sub>A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **C**. Este, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. No entanto, as arestas **[BC]** e **[CD]** estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a da aresta lateral **[CV]**. Já a aresta lateral **[AV]** é visível (em projeção horizontal), por se situar na parte visível do sólido (os vértices **A** e **V** são os vértices de maior cota do sólido).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao quadrado da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\gamma$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta três arestas laterais da pirâmide (as arestas [AV], [BV] e [CV]), cortando ainda uma aresta da base (a aresta [CD]). Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero** (mas não um quadrado, como atrás se referiu).

Sublinha-se que, na prática, o plano  $\gamma$  corta a aresta lateral [AV] no ponto A, que é também um ponto da base. Assim, é possível afirmar que o plano secante corta a base em dois pontos e, para além disso, corta ainda duas arestas laterais (as arestas [BV] e [CV]).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\theta$ ). Assim, o ponto E é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta [CD] da base, o ponto F é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [CV], o ponto G é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [BV] e, por fim, o ponto A é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [AV] (é o outro ponto em que o plano  $\theta$  corta a base da pirâmide).

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrilátero). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – a base [ABCD]. Assim, o lado da figura da secção que se situa na base da pirâmide é **invisível**, em projeção frontal (o lado [AE]). Os lados [AG], [EF] e [FG] da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por se situarem em faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (as faces laterais [ABV], [CDV] e [BCV], respetivamente).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

## Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção – a charneira foi  $f_0$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_0 \equiv e_2 \equiv f_0$ .

Em seguida, rebateram-se os quatro vértices da figura da secção, tendo em conta que os arcos dos respetivos rebatimentos estão contidos em planos horizontais (planos ortogonais à charneira do rebatimento). Nesse sentido, os arcos do rebatimento dos quatro pontos projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as respetivas cotas (ao longo dos seus rebatimentos), o que nos permitiu determinar  $A_r$ ,  $E_r$ ,  $F_r$  e  $G_r$ . Por fim, desenhou-se o quadrilátero  $[A_rE_rF_rG_r]$ , que é a figura da secção em verdadeira grandeza, o que se assinalou devidamente no desenho.

## Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo X representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo Y  $\equiv$  Z representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço horizontal do plano  $\phi$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do quadrado ou os referentes ao rebatimento do plano  $\theta$ , para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

## 656.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se, pelo seu traço frontal, o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base inferior do sólido. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $A_2$  e por  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções do prisma:*

A base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, a partir de  $A_1$  e de  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do polígono, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado –  $C_1$  e  $D_1$ . Note que se atendeu a que os pontos **A** e **B** são os vértices de maior abscissa do quadrado, como o enunciado refere expressamente.

A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

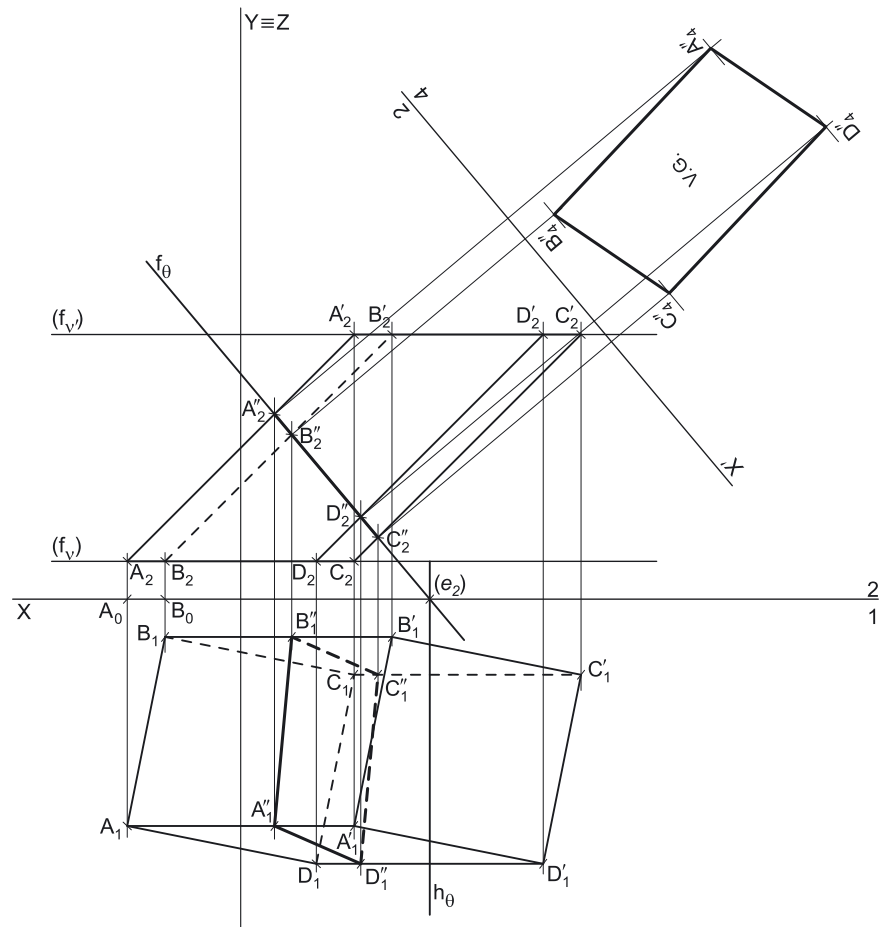
O prisma tem 6 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, atendendo a que o plano  $v$  (o plano que contém a base inferior) tem 1 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **B**), o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) tem necessariamente 7 cm de cota ( $1 + 6 = 7$ ). Isso permitiu-nos representar o plano  $v'$ , pelo seu traço frontal – o plano  $v'$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

De acordo com o enunciado, as arestas laterais do prisma estão contidas em retas frontais (de frente) cuja direção é dada. Assim, pelas projeções de cada um dos vértices do quadrado **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram). Os vértices da base superior (os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $v'$  (o plano da base superior) e foram determinados a partir das suas projeções frontais (pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal). Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do quadrado **[A'B'C'D']** (a base superior do prisma).

A partir dos oito vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ADCC'D'A']**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>D<sub>2</sub>C<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **B** e **B'**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]** (da base inferior), as arestas **[A'B']** e **[B'C']** (da base superior), e a aresta lateral **[BB']**. A aresta lateral **[DD']** é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos **D** e **D'** são os vértices de maior afastamento do prisma). Note que as arestas **[AB]**, **[BC]**, **[A'B']** e **[B'C']**, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção frontal).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABB'C'D'D]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **C** e **A'**. O vértice **C**, por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base inferior, e a aresta lateral **[CC']**. O vértice **A'**, por ser um dos vértices de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']** e **[A'D']**, da base superior, e a aresta lateral **[AA']**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**a) Determinação das projeções da figura da secção:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\theta$  (o plano secante), pelos seus traços, em função dos dados. O plano secante (o plano  $\theta$ ) não é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção **não é** um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as quatro arestas laterais do prisma, não cortando qualquer das duas bases, em nenhuma das suas arestas. Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero** (mas não um quadrado, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção** (os pontos **A''**, **B''**, **C''** e **D''**), que foram determinados a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais do prisma (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\theta$ ). Assim, o ponto **A''** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [**AA'**], o ponto **B''** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [**BB'**], o ponto **C''** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [**CC'**] e, por fim, o ponto **D''** é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta lateral [**DD'**].

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrilátero). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais [**BB'C'C**] e [**CC'D'D**]. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces são **invisíveis**, em projeção horizontal (os lados [**B''C''**] e [**C''D''**], respetivamente). Os lados [**A''B''**] e [**A''D''**] da **figura da secção** são **visíveis** em projeção horizontal, por se situarem em faces do prisma que são visíveis em projeção horizontal (as faces laterais [**AA'B'B**] e [**AA'D'D**], respetivamente).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

**b)** Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\theta$  num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção. Nesta situação, há que transformar o plano  $\theta$  num plano horizontal (de nível), pois um plano horizontal (de nível) é um plano projetante frontal, tal como o plano  $\theta$  (que é um plano de topo) – um plano horizontal (de nível) é **um caso particular** dos planos projetantes frontais. Para transformar o plano  $\theta$  num plano horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\theta$ . Nesse sentido, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\theta$ , o eixo **X'** (o novo eixo **X**) é paralelo ao traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 4**) dos quatro vértices da figura da secção, em função dos respetivos afastamentos, que se mantiveram. **A''<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **A''** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **A''<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A''<sub>1</sub>** ao eixo **X**. **B''<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **B''** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **B''<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **B''<sub>1</sub>** ao eixo **X**. **C''<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **C''** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **C''<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **C''<sub>1</sub>** ao eixo **X**. **D''<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **D''** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **D''<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **D''<sub>1</sub>** ao eixo **X**.

Por fim, desenhou-se o quadrilátero definido por **A''<sub>4</sub>**, **B''<sub>4</sub>**, **C''<sub>4</sub>** e **D''<sub>4</sub>** – o quadrilátero [**A''<sub>4</sub>B''<sub>4</sub>C''<sub>4</sub>D''<sub>4</sub>**] é a projeção (no **plano 4**) do quadrilátero [**A''B''C''D''**] e está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho

**Traçado:**

As projeções do prisma e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y** = **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases do sólido) representaram-se a **leve**, pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da **figura da secção** (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do quadrado ou os referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

## 657.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se, pelo seu traço horizontal, o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base de menor afastamento do sólido. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por **A**<sub>1</sub> e por **B**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

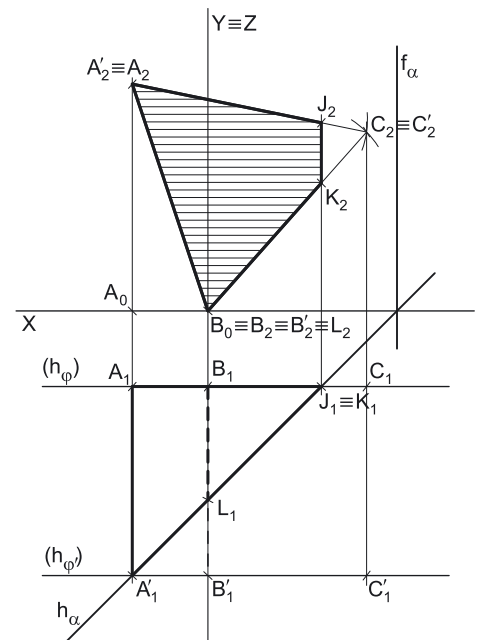
Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços.

**Resolução:***Determinação das projeções do prisma:*

A base de menor afastamento do prisma (o triângulo equilátero **[ABC]**) está contida num plano frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, a partir de **A**<sub>2</sub> e de **B**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção frontal do polígono, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do terceiro vértice do triângulo – **C**<sub>1</sub>. Note que se atendeu a que o ponto **C** é o vértice de menor abcissa do triângulo, como o enunciado refere expressamente.

A projeção horizontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

O prisma tem 5 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, atendendo a que o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de menor afastamento) tem 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **B**), o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) tem necessariamente 7 cm de afastamento ( $2 + 5 = 7$ ). Isso permitiu-nos representar o plano  $\varphi'$ , pelo seu traço horizontal – o plano  $\varphi'$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.



Trata-se de um prisma regular, pelo que as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases – retas projetantes frontais. Assim, as projeções frontais dos vértices da base de maior afastamento (o triângulo **[A'B'C']**) estão necessariamente coincidentes com as projeções frontais dos vértices da base de menor afastamento (o triângulo **[ABC]**). Por outro lado, atendendo a que o plano que contém a base de maior afastamento (o plano  $\varphi'$ ) é um plano projetante horizontal, a projeção horizontal do triângulo **[A'B'C']** reduz-se a um segmento de reta, sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ).

A partir dos seis vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o triângulo **[A'B'C']**, cuja projeção frontal é o triângulo **[A'2B'2C'2]**. Em projeção frontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – todos os vértices da base **[ABC]**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[AA'C'C]** (que é, na prática, a face lateral **[AA'C'C]** do prisma), cuja projeção horizontal é o retângulo **[A1A'1C1C'1]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **B** e **B'**, que são os vértices de **menor cota** do prisma. Por isso mesmo, os vértices **B** e **B'** são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]** (da base **[ABC]**) as arestas **[A'B']** e **[B'C']** (da base **[A'B'C']**) e ainda a aresta lateral **[BB']**. As arestas **[AB]**, **[BC]**, **[A'B']** e **[B'C']** estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a aresta lateral **[BB']** é a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal.

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção **não** é um polígono geometricamente igual aos triângulos das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas laterais do prisma, cortando ainda duas arestas da base de menor afastamento. Note que, na prática, o plano  $\alpha$  (o plano secante) corta a base de maior afastamento (e a aresta lateral **[AA']**) num único ponto – o ponto **A'**. Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção** (os pontos **A'**, **J**, **K** e **L**), que foram determinados a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais do prisma (que estão contidas em retas projetantes frontais) com um plano projetante horizontal (o plano  $\alpha$ ). Assim, o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[AA']**, o ponto **L** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[BB']**, o ponto **J** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AC]** (da base **[ABC]**) e, por fim, o ponto **K** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[BC]** (da base **[ABC]**). Note que os pontos **J** e **K** têm as suas projeções horizontais coincidentes, pois as arestas **[AC]** e **[BC]** também têm as suas projeções horizontais coincidentes.

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrilátero). Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco do prisma – o tronco do prisma cuja base de menor afastamento é o polígono **[ABKJ]** e cuja face de maior afastamento é a própria figura da secção (o quadrilátero **[JKLA']**) – trata-se, afinal, da parte do sólido compreendida entre o plano secante e o Plano Frontal de Projeção.

O **contorno aparente frontal** do sólido é a linha fechada **[JKLA']**, cuja projeção frontal é o polígono **[J<sub>2</sub>K<sub>2</sub>L<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e **B**. Estes dois vértices, por serem dos vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é o triângulo **[AJA']** (que corresponde, na prática, à face superior do sólido), cuja projeção horizontal é o triângulo **[A<sub>1</sub>J<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **L**, **B** e **K**, que são os vértices de **menor cota** do sólido. Por isso mesmo, os vértices **L**, **B** e **K** são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[BK]** e **[JK]** (da base **[ABKJ]**), as arestas **[A'L]**, **[BL]** e **[KL]** (da face **[JKLA']**) e ainda a aresta lateral **[BL]**. As arestas **[AB]**, **[BK]**, **[JK]**, **[A'L]**, **[BL]** e **[KL]** estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que a aresta **[BL]** é a única invisibilidade do sólido a assinalar (em projeção horizontal).

A **figura da secção** é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), pelo que se assinalou esse facto preenchendo a projeção frontal da mesma com tracejado.

## Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\alpha$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do prisma, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (que é o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os traços horizontais dos planos que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas representaram-se igualmente a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do triângulo). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção frontal) executou-se a **leve**.

## 658.

### Dados:

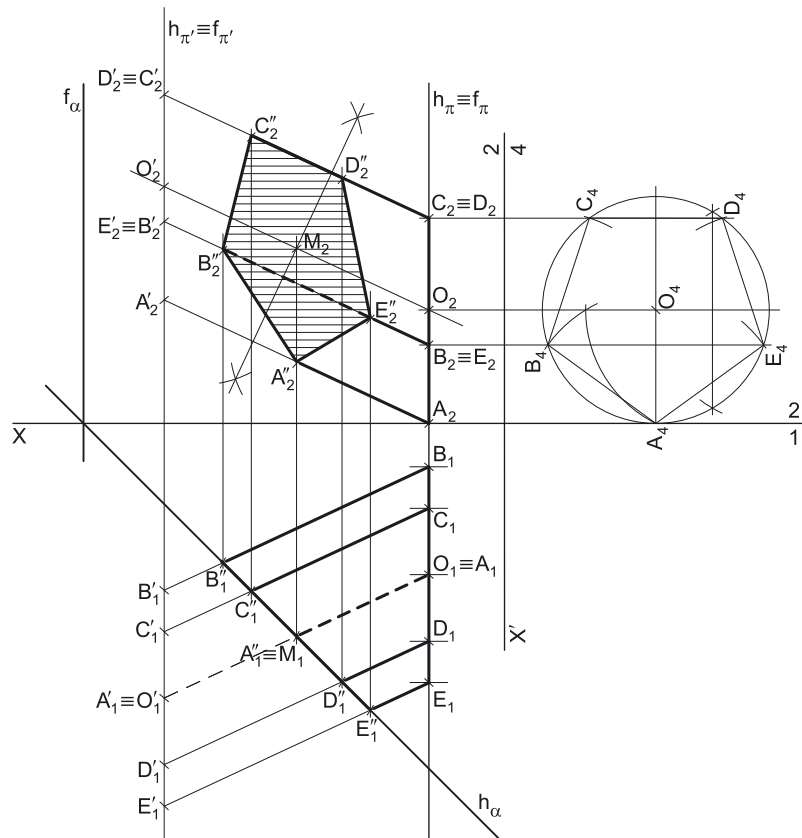
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se, pelos seus traços, o plano  $\pi$ , o plano de perfil que contém a base mais à direita do sólido. O plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que os seus traços passam pelas projeções homónimas do ponto **O**.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do pentágono [ABCDE]:

O ponto **A** tem cota nula e a face lateral superior do prisma está contida num plano projetante frontal, pelo que é possível concluir que o lado de maior cota do pentágono tem de ser projetante frontal (de topo). Ora, havendo um ponto do pentágono com cota nula (o ponto **A**) e sendo o lado superior (o lado oposto a esse vértice) de topo, a circunferência circunscrita ao pentágono é necessariamente tangente ao Plano Horizontal de Projeção (no ponto **A**). Assim, o ponto **A** tem de se situar na mesma projetante horizontal do ponto **O**, o que nos permitiu, de uma forma imediata, determinar as projeções do ponto **A**.

O plano que contém o pentágono **[ABCDE]** (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o pentágono **[ABCDE]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do pentágono estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\pi$  num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção. Nesta situação, transformou-se o plano  $\pi$  num plano horizontal (de nível), pois um plano horizontal (de nível) é um plano projetante frontal, tal como o plano  $\pi$  (que é um plano duplamente projetante) – um plano horizontal (de nível) é **um caso particular** dos planos projetantes frontais. Para transformar o plano  $\pi$  num plano horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\pi$ . Nesse sentido, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\pi$ , o eixo **X'** (o novo eixo **X**) é paralelo ao traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

**O<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **O** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **O<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **O<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 3 cm – o afastamento do ponto **O**). **A<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **A<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 3 cm – o afastamento do ponto **A**).

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\pi$  é paralelo ao **plano 4**, o pentágono projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**, pelo que já é possível efetuar a sua construção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **O** no **plano 4**) e com raio até **A<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **A** no **plano 4**), desenhou-se a projeção (no **plano 4**) da circunferência circunscrita ao pentágono e efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção (no **plano 4**) da figura. Em seguida, identificaram-se os vértices do pentágono de forma arbitrária (mas sequencial), pois o enunciado é omissivo, e determinaram-se as suas projeções frontais (que se situam sobre o traço frontal do plano  $\pi$ , pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal). A projeção frontal do pentágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, de forma a determinar as projeções horizontais dos vértices do pentágono e em função dos respetivos afastamentos, que se mantiveram. **B<sub>1</sub>** é a projeção horizontal do ponto **B** e determinou-se em função do seu afastamento, que se manteve – a distância de **B<sub>1</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **B<sub>4</sub>** ao eixo **X'**. O procedimento foi idêntico para os restantes vértices do pentágono, o que nos permitiu determinar as suas projeções horizontais e, assim, concluir a projeção horizontal da figura (que se reduz a um segmento de reta, pois o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante horizontal).

#### Determinação das projeções do prisma:

O prisma tem 7 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, o plano  $\pi'$  (o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do sólido) tem mais 7 cm de abscissa do que o plano  $\pi$  (o plano  $\pi'$  situa-se 7 cm para a esquerda do plano  $\pi$ ). Isso permitiu-nos representar o plano  $\pi'$ , pelos seus traços.

De acordo com o enunciado, as arestas laterais do prisma estão contidas em retas oblíquas, paralelas a  $\beta_{1/3}$ . Uma vez que retas paralelas a  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, pelas projeções de cada um dos vértices do pentágono [**ABCDE**] conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram). Os vértices da base mais à esquerda (os pontos **A'**, **B'**, **C'**, **D'** e **E'**) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $\pi'$  (o plano que contém a base mais à esquerda do prisma) e foram determinados diretamente, pois o plano  $\pi'$  é um plano duplamente projetante. Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do pentágono [**A'B'C'D'E'**] (a base mais à esquerda do prisma).

A partir dos dez vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [**AEDD'E'A**], cuja projeção frontal é o polígono [**A<sub>2</sub>E<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>E'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>**]. Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **B**, **C**, **B'** e **C'**. Estes quatro vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [**AB**], [**BC**] e [**CD**] (da base mais à direita), as arestas [**A'B'**], [**B'C'**] e [**C'D'**] (da base mais à esquerda), e as arestas laterais [**BB'**] e [**CC'**]. No entanto, todas estas arestas, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar. A aresta lateral [**EE'**] é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos **E** e **E'** são os vértices de maior afastamento do prisma).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [**BCDEE'D'C'B**], cuja projeção horizontal é o polígono [**B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>E'<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>**]. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **A'**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [**AB**] e [**AE**] (da base mais à direita), as arestas [**A'B'**] e [**A'E'**] (da base mais à esquerda) e a aresta lateral [**AA'**]. Note que as arestas [**AB**], [**AE**], [**A'B'**] e [**A'E'**], apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral [**AA'**]. As arestas laterais [**CC'**] e [**DD'**] são visíveis, por se situarem na parte visível do sólido (os pontos **C**, **D**, **C'** e **D'** são os vértices de maior cota do prisma).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das projeções da figura da secção:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços, em função dos dados. Para tal foi necessário, em primeiro lugar, determinar o ponto médio do eixo do prisma (o ponto **M**), o que se processou com o recurso à mediatriz do segmento  $[O_2O'_2]$  (a projeção frontal do eixo). Em seguida, uma vez que o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal, sabe-se que  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) passa necessariamente por **M**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **M**).

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção **não** é um polígono geometricamente igual aos pentágonos das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as cinco arestas laterais do prisma, não cortando qualquer das duas bases, em nenhuma das suas arestas. Assim, a figura da secção tem **cinco vértices**, pelo que é um **pentágono** (mas não um pentágono regular, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices da figura da secção** (os pontos **A''**, **B''**, **C''**, **D''** e **E''**), que foram determinados a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais do prisma (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\alpha$ ). Assim, o ponto **A''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[AA']**, o ponto **B''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[BB']**, o ponto **C''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[CC']**, o ponto **D''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[DD']** e, por fim, o ponto **E''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[EE']**.

A partir das projeções dos cinco vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um pentágono irregular). Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas).

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um outro prisma – um prisma pentagonal oblíquo, com uma base de perfil e a outra base é a figura da secção (que é, afinal, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e o plano que contém a sua base mais à direita).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[AEDD''C''B''A'']**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>E<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D''<sub>2</sub>C''<sub>2</sub>B''<sub>2</sub>A''<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **B**, **C** e **E''**. O vértice **E''**, por ser o vértice de **maior afastamento** do sólido, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A''E'']** e **[D''E'']** (da base **[A''B''C''D''E'']**) e a aresta lateral **[EE'']**. Os vértices **B** e **C**, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[BC]** e **[CD]** (da base **[ABCDE]**) e as arestas laterais **[BB'']** e **[CC'']**. No entanto, todas estas arestas, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), à excepção da aresta **[BB'']**, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar se refere à da aresta lateral **[BB'']**.

Salienta-se o facto de que a aresta lateral **[BB'']**, em projeção frontal, está **parcialmente oculta** pela aresta **[EE'']**, que é visível, pelo que a invisibilidade da aresta **[BB'']**, em projeção frontal, se resume ao segmento de reta **[B''<sub>2</sub>E''<sub>2</sub>]**.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[BCDEE''D''C''B'']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>E''<sub>1</sub>D''<sub>1</sub>C''<sub>1</sub>B''<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **A''**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[AE]** (da base **[ABCDE]**), as arestas **[A''B'']** e **[A''E'']** (da base **[A''B''C''D''E'']**) e a aresta lateral **[AA'']**. Note que as arestas **[AB]**, **[AE]**, **[A''B'']** e **[A''E'']**, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral **[AA'']**. As arestas laterais **[CC'']** e **[DD'']** são visíveis, por se situarem na parte visível do sólido (os pontos **C**, **D**, **C''** e **D''** são os vértices de maior cota do sólido).

A **figura da secção**, porque é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X**.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\alpha$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do prisma, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (que é o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os planos de perfil que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que os seus traços se representaram a **leve**. As restantes linhas representaram-se igualmente a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada e à construção do pentágono em verdadeira grandeza ou, ainda, da mediatriz do segmento de reta  $[O_2O'_2]$ ). O tracejado que preenche a figura da secção, em projeção frontal, executou-se a **leve**.

## 659.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base mais à direita do prisma), pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções e pertencentes ao plano  $\pi$ , também em função dos dados. Os pontos **A** e **B** pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano duplamente projetante, pelo que as projeções dos dois pontos situam-se sobre os traços homónimos do plano  $\pi$ .

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano  $\gamma$  (o plano secante), pelos seus traços, em função dos dados. Uma vez que o plano  $\gamma$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal, sabe-se que  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ) passa necessariamente por **P**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **P**).

**Resolução:***Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:*

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado [ABCD] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**.

Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\pi$  num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção. Nesta situação, transformou-se o plano  $\pi$  num plano horizontal (de nível), pois um plano horizontal (de nível) é um plano projetante frontal, tal como o plano  $\pi$  (que é um plano duplamente projetante) – um plano horizontal (de nível) é um **caso particular** dos planos projetantes frontais. Para transformar o plano  $\pi$  num plano horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\pi$ . Nesse sentido, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

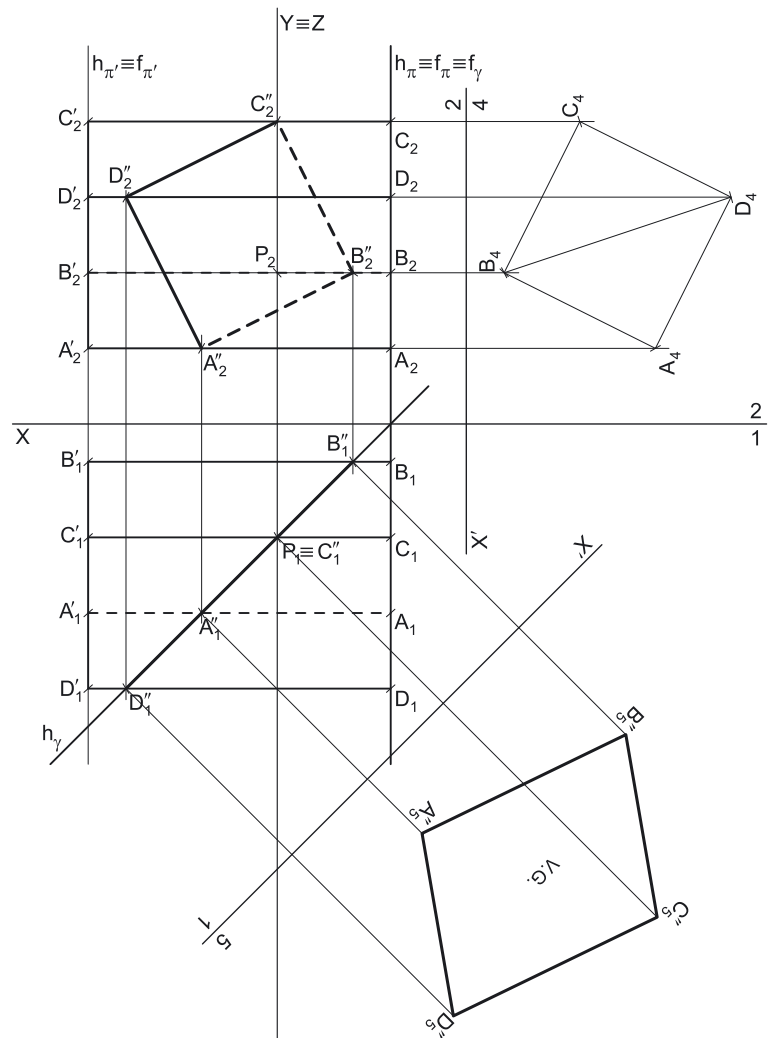
- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\pi$ , o eixo **X'** (o novo eixo **X**) é paralelo ao traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

**A**<sub>4</sub> é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **A**<sub>4</sub> ao eixo **X'** é igual à distância de **A**<sub>1</sub> ao eixo **X** (que é 2 cm – o afastamento do ponto **A**). **B**<sub>4</sub> é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **B**<sub>4</sub> ao eixo **X'** é igual à distância de **B**<sub>1</sub> ao eixo **X** (que é 4 cm – o afastamento do ponto **B**).

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\pi$  é paralelo ao **plano 4**, o quadrado projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**, pelo que já é possível efetuar a sua construção. Assim, a partir de **A**<sub>4</sub> e **B**<sub>4</sub> (as projeções, no **plano 4**, dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção (no **plano 4**) da figura. Em seguida, determinaram-se as suas projeções frontais (que se situam sobre o traço frontal do plano  $\pi$ , pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal). A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, de forma a determinar as projeções horizontais dos restantes dois vértices do quadrado e em função dos respetivos afastamentos, que se mantiveram. **C**<sub>1</sub> é a projeção horizontal do ponto **C** e determinou-se em função do seu afastamento, que se manteve – a distância de **C**<sub>1</sub> ao eixo **X** é igual à distância de **C**<sub>4</sub> ao eixo **X'**. **D**<sub>1</sub> é a projeção horizontal do ponto **D** e determinou-se em função do seu afastamento, que se manteve – a distância de **D**<sub>1</sub> ao eixo **X** é igual à distância de **D**<sub>4</sub> ao eixo **X'**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, desenhou-se a projeção horizontal do quadrado, que se reduz a um segmento de reta, pois o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante horizontal.

### Determinação das projeções do prisma:

A altura do prisma é a distância entre os planos das duas bases, que corresponde, na prática, à diferença entre as respetivas abcissas. Assim, atendendo a que o quadrado  $[ABCD]$  é a base mais à direita do prisma, a outra base é a base mais à esquerda do sólido. Assim, o plano  $\pi'$  (o plano que contém essa base) situa-se à esquerda do plano  $\pi$ . Nesse sentido, atendendo a que o plano  $\pi$  tem  $-3$  de abcissa (a abcissa dada no enunciado) e que o prisma tem  $8$  cm de altura, o plano  $\pi'$  (o plano da base mais à esquerda do sólido) tem necessariamente  $5$  cm de abcissa ( $(-3) + 8 = 5$ ).

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases (retas fronto-horizontais).

Assim, pelas projeções de cada um dos vértices do quadrado  $[ABCD]$  conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram) e determinaram-se os vértices da base mais à esquerda (os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ ), que são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $\pi'$  (o plano que contém a base mais à esquerda do prisma). As projeções dos vértices da base  $[A'B'C'D']$  foram determinadas diretamente, pois o plano  $\pi'$  é um plano duplamente projetante. Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do quadrado  $[A'B'C'D']$  (a base mais à esquerda do prisma).

A partir dos oito vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ADCC'D'A']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2D_2C_2C'_2D'_2A'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $B$  e  $B'$ . Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$  (da base mais à direita), as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$  (da base mais à esquerda), e a aresta lateral  $[BB']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[A'B']$  e  $[B'C']$ , apesar de serem invisíveis (em projeção frontal), estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral  $[BB']$ . A aresta lateral  $[DD']$  é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos  $D$  e  $D'$  são os vértices de maior afastamento do prisma).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1D'_1C'_1B'_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices  $A$  e  $A'$ . Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base mais à direita), as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da base mais à esquerda) e a aresta lateral  $[AA']$ . Note que as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'D']$ , apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral  $[AA']$ . A aresta lateral  $[CC']$  é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos  $C$  e  $C'$  são os vértices de maior cota do prisma).

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção **não é** um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\gamma$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as quatro arestas laterais do prisma, não cortando qualquer das duas bases, em nenhuma das suas arestas. Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero** (mas não um quadrado, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção** (os pontos  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  e  $D''$ ), que foram determinados a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais do prisma (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\gamma$ ). Assim, o ponto  $A''$  é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta lateral  $[AA']$ , o ponto  $B''$  é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta lateral  $[BB']$ , o ponto  $C''$  é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta lateral  $[CC']$  e o ponto  $D''$  é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta lateral  $[DD']$ .

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrilátero irregular). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ . Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados  $[A''B'']$  e  $[B''C'']$ , respetivamente). Os lados  $[A''D'']$  e  $[C''D'']$  da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por se situarem em faces do prisma que são visíveis em projeção frontal (as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$ , respetivamente).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

### Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\gamma$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza**, pois o plano que a contém (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Sublinha-se que, apesar de, em projeção frontal, a **figura da secção** ser efetivamente um quadrado, a **figura da secção não é um quadrado** – a sua projeção frontal, com a deformação inerente à projeção, é que é um quadrado.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\gamma$  num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção. Nesta situação, há que transformar o plano  $\gamma$  num plano frontal (de frente), pois um plano frontal (de frente) é um plano projetante horizontal, tal como o plano  $\gamma$  (que é um plano vertical) – um plano frontal (de frente) é um caso particular dos planos projetantes horizontais. Para transformar o plano  $\gamma$  num plano frontal (de frente), é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\gamma$ . Nesse sentido, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 5**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/5**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\gamma$ , o eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ) é paralelo ao traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 5**) dos quatro vértices da figura da secção, em função das respetivas cotas, que se mantiveram.  $A''_5$  é a projeção do ponto  $A''$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A''_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $A''_2$  ao eixo  $X$ .  $B''_5$  é a projeção do ponto  $B''$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B''_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $B''_2$  ao eixo  $X$ .  $C''_5$  é a projeção do ponto  $C''$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $C''_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $C''_2$  ao eixo  $X$ .  $D''_5$  é a projeção do ponto  $D''$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $D''_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $D''_2$  ao eixo  $X$ .

Por fim, desenhou-se o quadrilátero definido por  $A''_5, B''_5, C''_5$  e  $D''_5$  – o quadrilátero  $[A''_5B''_5C''_5D''_5]$  é a projeção (no **plano 5**) do quadrilátero  $[A''B''C''D'']$  e está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho

#### Traçado:

As projeções do prisma e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços dos planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos que contêm as bases do sólido) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da **figura da secção** (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à primeira mudança do diedro de projeção (para a construção do quadrado  $[ABCD]$  em verdadeira grandeza), bem como dos referentes à segunda mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

## 660.

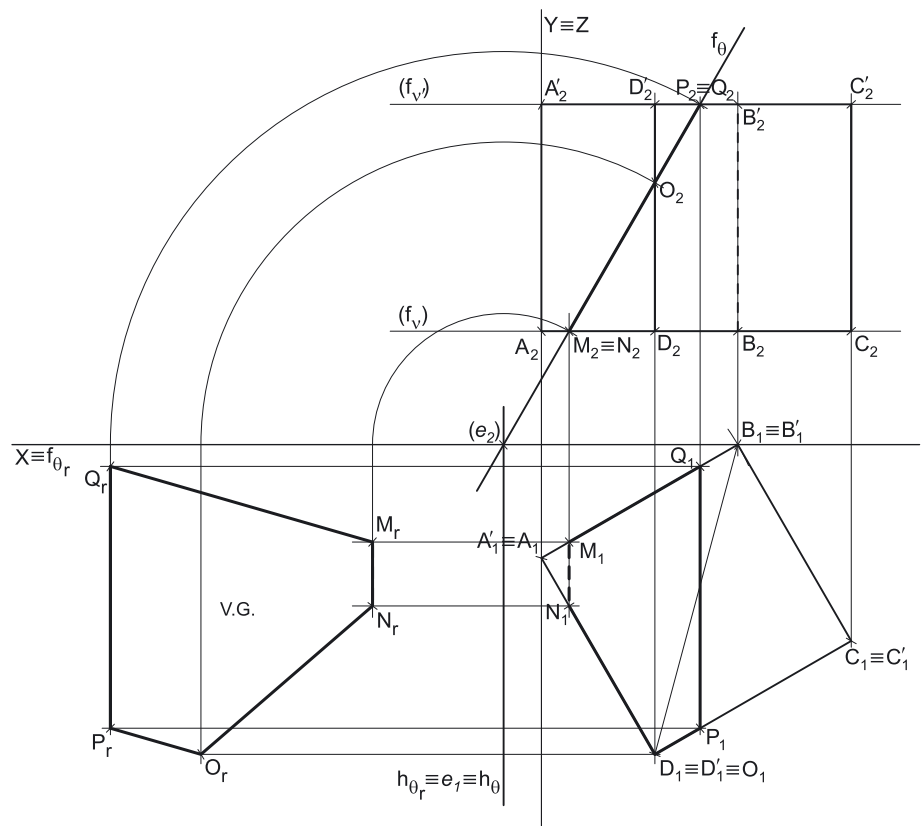
#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, ainda, o plano  $v$ , pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é o plano horizontal (de nível) que contém a face inferior do cubo. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal  $(f_v)$  passa necessariamente pela projeção frontal do ponto  $A$  ( $A_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do cubo:

O quadrado  $[ABCD]$  está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado  $[ABCD]$  se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) e com 6 cm de raio (a medida da aresta do cubo), determinou-se  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ) sobre o eixo  $X$ , pois o ponto  $B$  tem afastamento nulo.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A partir de  $A_1$  e de  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do quadrado, garantindo-se que a figura se situa no espaço do  $1^a$  Diedro (para que o cubo se situe no espaço do  $1^a$  Diedro, como o enunciado pede expressamente). A projeção frontal do quadrado situa-se sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, representou-se o plano horizontal (de nível)  $v'$  que contém a face superior do cubo (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ). A distância entre os dois planos é a medida da aresta do cubo (que é 6 cm). Atendendo a que o plano  $v$  (o plano que contém a face inferior do cubo) tem 3 cm de cota (a cota do ponto  $A$ ), o plano  $v'$  (o plano que contém a face superior do cubo) tem 9 cm de cota ( $3 + 6 = 9$ ). Este raciocínio permitiu-nos desenhar o traço frontal do plano  $v'$  – o plano  $v'$  também não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ) se representou entre parêntesis.

Tendo em conta que as arestas do cubo que não pertencem àquelas duas faces estão contidas em retas projetante horizontais (retas verticais), as projeções horizontais dos vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$  determinam-se imediatamente – estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices do quadrado  $[ABCD]$ . Por outro lado, tendo em conta que o plano  $v'$  (o plano que contém o quadrado  $[A'B'C'D']$ ) é um plano projetante frontal, a determinação das projeções frontais dos vértices daquele quadrado processa-se também de forma direta. Note que, na prática, se tratou de determinar os pontos de interseção de retas projetantes horizontais (as retas suporte das arestas verticais do cubo) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ).

A partir dos oito vértices do cubo, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ADCC'D'A']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2D_2C_2C'_2D'_2A'_2]$ . Em projeção frontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices  $B$  e  $B'$ . Estes, por serem os vértices de menor afastamento do cubo, são invisíveis bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$  (da face  $[ABCD]$ ), as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$  (da face  $[A'B'C'D']$ ) e a aresta  $[BB']$ . As arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[A'B']$  e  $[B'C']$  estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta  $[BB']$ . Note que a aresta  $[DD']$  é visível, em projeção frontal, pois situa-se na parte visível do sólido (os vértices  $D$  e  $D'$  são os vértices de maior afastamento do cubo).

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado  $[A'B'C'D']$ , cuja projeção horizontal é o quadrado  $[A'_1B'_1C'_1D'_1]$ . Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – todos os vértices da face  $[ABCD]$ . Estes, por serem os vértices de **menor cota** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes horizontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção horizontal.

#### a) Determinação das projeções da figura da secção:

Em primeiro lugar, representou-se o plano secante (o plano  $\theta$ ) pelos seus traços, em função dos dados. O plano secante (o plano  $\theta$ ) não é paralelo aos planos das faces, pelo que a figura da secção **não** é um polígono geometricamente igual aos quadrados das faces. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta uma das arestas verticais do cubo, cortando ainda a face inferior em duas arestas e a face superior em outras duas arestas. Assim, a figura da secção tem **cinco vértices**, pelo que é um **pentágono** (irregular).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices** da **figura da secção** (os pontos  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$  e  $Q$ ), que foram determinados a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas verticais do cubo (que estão contidas em retas projetantes horizontais) com um plano projetante frontal (o plano  $\theta$ ). Assim, o ponto  $M$  é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta  $[AB]$ , o ponto  $N$  é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta  $[AD]$ , o ponto  $O$  é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta  $[DD']$ , o ponto  $P$  é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta  $[C'D']$  e, por fim, o ponto  $Q$  é o ponto em que o plano  $\theta$  corta a aresta  $[A'B']$ .

Note que os pontos  $M$  e  $N$  têm as suas projeções frontais coincidentes, pois as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (as arestas a que aqueles pontos pertencem) também têm as suas projeções frontais coincidentes. De forma semelhante, também os pontos  $P$  e  $Q$  têm as suas projeções frontais coincidentes, pois as arestas  $[C'D']$  e  $[A'B']$  (as arestas a que aqueles pontos pertencem) também têm as suas projeções frontais coincidentes.

A partir das projeções dos cinco vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um pentágono irregular). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do cubo que são invisíveis em projeção horizontal – a face  $[ABCD]$ . Assim, o lado da figura da secção que se situa naquela face é **invisível**, em projeção horizontal (o lado  $[MN]$ ). O lado  $[PQ]$  da **figura da secção** é **visível** em projeção horizontal, por se situar numa face do cubo que é visível em projeção horizontal (a face  $[ABCD]$ ). Por fim, os restantes lados da figura da secção (os lados  $[NO]$ ,  $[OP]$  e  $[MP]$ ), que estão contidos em faces projetantes horizontais, apesar de serem invisíveis, estão ocultos por arestas do cubo que são visíveis em projeção horizontal (pois os planos que contêm essas faces são planos projetantes horizontais).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

#### b) Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção – a charneira foi  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_\theta \equiv e_2 \equiv f_{\theta_r}$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, rebateram-se os cinco vértices da figura da secção, tendo em conta que os arcos dos respectivos rebatimentos estão contidos em planos frontais (planos ortogonais à charneira do rebatimento). Nesse sentido, os arcos do rebatimento dos cinco pontos projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos mantêm os respectivos afastamentos (ao longo dos seus rebatimentos), o que nos permitiu determinar  $M_r, N_r, O_r, P_r$  e  $Q_r$ . Por fim, desenhou-se o pentágono  $[M_r, N_r, O_r, P_r, Q_r]$ , que é a figura da secção em verdadeira grandeza, o que se assinalou devidamente no desenho.

#### Traçado:

As projeções do cubo e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as faces horizontais do cubo) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respectivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da **figura da secção** (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à construção do quadrado em verdadeira grandeza ou ao rebatimento do plano  $\theta$ , para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

## 661.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$  e  $C$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. O ponto  $C$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). Representou-se, ainda, o plano  $\gamma$ , pelos seus traços. O plano  $\gamma$  é o plano vertical que contém o quadrado  $[ABCD]$ . O plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\gamma$ ) passa necessariamente pelas projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $C$  ( $A_1$  e  $C_1$ , respetivamente).

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\varphi$  (o plano secante) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do quadrado $[ABCD]$ :

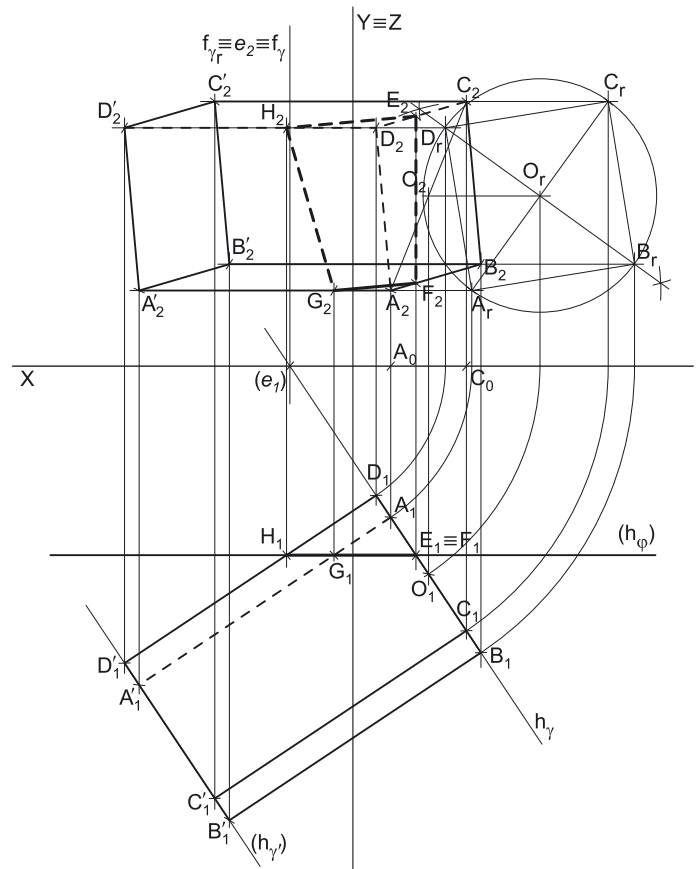
O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**.

Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano  $\gamma$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_\gamma \equiv e_2 \equiv f_{\gamma r}$ . Em seguida identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos horizontais (de nível) – os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos, nos seus rebatimentos, mantêm as suas cotas.

Assim, rebateram-se os pontos  $A$  e  $C$ , determinando  $A_r$  e  $C_r$ . A partir de  $A_r$  e  $C_r$  efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza, o que se processou determinando previamente o centro do quadrado em rebatimento (o ponto  $O_r$ ), com o recurso à mediatriz do segmento de reta  $[A_r, C_r]$ . Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido), desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado (que passa por  $A_r$  e por  $C_r$  e conclui-se a construção do quadrado, em rebatimento, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono em rebatimento ( $B_r$  e  $D_r$ ). Por fim, inverteu-se o rebatimento do plano  $\gamma$  e determinaram-se as projeções de todos os vértices do quadrado (e do ponto  $O$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções do quadrado  $[ABCD]$ .

##### Determinação das projeções do prisma:

O prisma tem 8 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, o plano que contém a outra base do sólido (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ) é um plano paralelo ao plano  $\gamma$  que dista 8 cm do plano  $\gamma$ . Nesse sentido, representou-se o plano  $\gamma'$  (o plano que contém a base  $[A'B'C'D']$  do prisma) pelo seu traço horizontal ( $h_{\gamma'}$ ), que é paralelo ao traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ). O plano  $\gamma'$  é um outro plano vertical, que foi representado, apenas, pelo seu traço horizontal (o seu traço frontal situa-se fora dos limites do papel), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Por fim, uma vez que o plano  $\gamma'$  dista 8 cm do plano  $\gamma$ , e porque a distância entre os dois planos se mede ortogonalmente aos dois planos,  $h_{\gamma'}$  (o traço horizontal do plano  $\gamma'$ ) dista 8 cm de  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Trata-se de um prisma regular, pelo que as arestas laterais do sólido estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases – são retas horizontais (de nível), cujas projeções horizontais são perpendiculares aos traços horizontais dos planos  $\gamma$  e  $\gamma'$ . Assim, pelas projeções de cada um dos vértices do quadrado  $[ABCD]$  conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), ortogonais aos planos das bases. Os vértices da outra base (os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ ) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $\gamma'$  (o plano da outra base) e foram determinados a partir das suas projeções horizontais (pois o plano  $\gamma'$  é um plano projetante horizontal). Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do quadrado  $[A'B'C'D']$  (a base de maior afastamento do prisma).

A partir dos oito vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ABCC'D'A']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2C'_2D'_2A'_2]$ . Em projeção frontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $D$  e  $B'$ . O vértice  $D$ , por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível** (em projeção frontal), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AD]$  e  $[CD]$ , da base de menor afastamento, e a aresta lateral  $[DD']$ . O vértice  $B'$ , por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$ , da base de maior afastamento, e a aresta lateral  $[BB']$ .

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1D'_1C'_1B'_1]$ . Em projeção horizontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices  $A$  e  $A'$ . Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis** (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base de menor afastamento), as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da base de maior afastamento), e a aresta lateral  $[AA']$ . Note que as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'D']$ , apesar de serem invisíveis (em projeção horizontal), estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção horizontal). A aresta lateral  $[CC']$  é visível (em projeção horizontal), por se situar na parte visível do sólido (os pontos  $C$  e  $C'$  são os vértices de maior cota do prisma).

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\varphi$ ) não é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção **não** é um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\varphi$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas laterais do prisma (as arestas laterais  $[AA']$  e  $[DD']$ ) e, ainda, duas arestas da base de menor afastamento (as arestas  $[AB]$  e  $[CD]$ ). Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero** (mas não um quadrado, como atrás se referiu).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ). Assim, o ponto  $G$  é o ponto em que o plano  $\varphi$  corta a aresta lateral  $[AA']$ , o ponto  $H$  é o ponto em que o plano  $\varphi$  corta a aresta lateral  $[DD']$ , o ponto  $E$  é o ponto em que o plano  $\varphi$  corta a aresta  $[CD]$  (da base  $[ABCD]$ ) e o ponto  $F$  é o ponto em que o plano  $\varphi$  corta a aresta  $[AB]$  (da base  $[ABCD]$ ).

Note que os pontos  $E$  e  $F$  têm as suas projeções horizontais coincidentes, pois as arestas a que se pertencem (as arestas  $[AB]$  e  $[CD]$ ) têm, igualmente, as suas projeções horizontais coincidentes. Salienta-se, por isso, que o plano secante, ao cortar a base  $[ABCD]$  do prisma, a corta necessariamente em dois pontos – os dois pontos atrás referidos.

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrilátero). Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\varphi$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\varphi$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$ , bem como a base  $[ABCD]$ . Assim, os (três) lados da figura da secção que se situam naquelas três faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados  $[GH]$ ,  $[EH]$  e  $[EF]$ ). O lado  $[GF]$  da **figura da secção** é **visível** em projeção frontal, por se situar numa face do prisma que é visível em projeção frontal (a face lateral  $[AA'B'B]$ ).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

#### Traçado:

As projeções do prisma e o traço horizontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços dos planos  $\gamma$  e  $\gamma'$  (os planos que contêm as bases do prisma) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\gamma$ , para a construção do quadrado).

## 662.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\theta$  (o plano que contém a base inferior do prisma), pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados e pertencentes ao plano  $\theta$ . O ponto **B** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). Os pontos **A** e **B** pertencem ao plano  $\theta$ , que é um plano projetante frontal, pelo que as suas projeções frontais (**A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>**, respetivamente) se situam sobre o traço frontal do plano  $\theta$  (**f<sub>θ</sub>**).

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\varphi$  (o plano secante) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções do triângulo [ABC]:*

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi **h<sub>θ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente, **h<sub>θ</sub> ≡ e<sub>r</sub> ≡ h<sub>θr</sub>**. Em seguida identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos frontais (de frente) – os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos, nos seus rebatimentos, mantêm os seus afastamentos.

Assim, rebateram-se os pontos **A** e **B**, determinando **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**. A partir de **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**, efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo em verdadeira grandeza, atendendo aos dados (o ponto **B** é o vértice de maior cota do triângulo, que tem de se situar no espaço do *1<sup>a</sup> Diedro*), o que nos permitiu determinar o terceiro vértice do polígono em rebatimento – **C<sub>r</sub>**. Note que se garantiu que **A** é o vértice de menor afastamento do triângulo. Por fim, inverteu-se o rebatimento do plano  $\theta$  e determinaram-se as projeções do ponto **C**, o que nos permitiu desenhar as duas projeções do triângulo **[ABC]**.

*Determinação das projeções do prisma:*

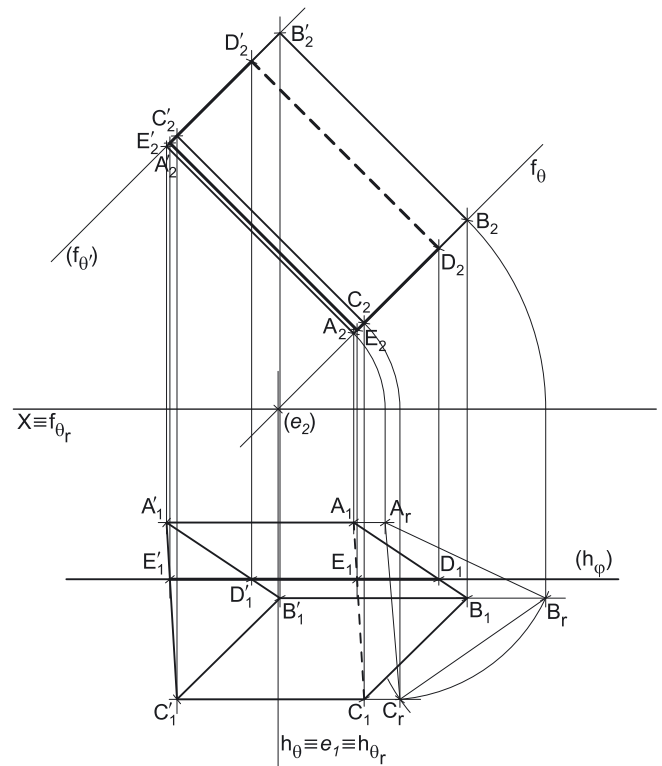
O prisma tem 7 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, o plano que contém a base superior do sólido (o triângulo **[A'B'C']**) é um plano paralelo ao plano  $\theta$  que dista 7 cm do plano  $\theta$ . Nesse sentido, representou-se o plano  $\theta'$  (o plano que contém a base **[A'B'C']** do prisma) pelo seu traço frontal (**f<sub>θ'</sub>**), que é paralelo ao traço frontal do plano  $\theta$  (**f<sub>θ</sub>**). O plano  $\theta'$  é um outro plano de topo, que foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (o seu traço horizontal situa-se fora dos limites do papel), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Por fim, uma vez que o plano  $\theta'$  dista 7 cm do plano  $\theta$ , e porque a distância entre os dois planos se mede ortogonalmente aos dois planos, **f<sub>θ'</sub>** (o traço frontal do plano  $\theta'$ ) dista 7 cm de **f<sub>θ</sub>** (o traço frontal do plano  $\theta$ ).

Trata-se de um prisma regular, pelo que as arestas laterais do sólido estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases – são retas frontais (de frente), cujas projeções frontais são perpendiculares aos traços frontais dos planos  $\theta$  e  $\theta'$ . Assim, pelas projeções de cada um dos vértices do triângulo **[ABC]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), ortogonais aos planos das bases. Os vértices da base superior (os pontos **A'**, **B'** e **C'**) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $\theta'$  (o plano da base superior) e foram determinados a partir das suas projeções frontais (pois o plano  $\theta'$  é um plano projetante frontal). Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do triângulo **[A'B'C']** (a base superior do prisma).

A partir dos seis vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ACBB'C'A']**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>B<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>]**. Todos os vértices do prisma integram o contorno aparente frontal. No entanto, as arestas **[AB]** (da base **[ABC]**) e **[A'B']** (da base **[A'B'C']**) são invisíveis, por se situarem na parte invisível do sólido (separam faces do sólido que são invisíveis em projeção horizontal – a base respetiva e a face lateral **[AA'B'B]**). No entanto, todas estas arestas estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar. Já a aresta lateral **[CC']** é visível, por se situar na parte visível do sólido (note que os pontos **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABCC'A']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **B'**. Este vértice, por ser o vértice de maior cota do prisma, é visível (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[A'B']** e **[B'C']** (da base superior) e a aresta lateral **[BB']**. A aresta **[AC]** (da base **[ABC]**) é invisível (em projeção horizontal), por se situar na parte invisível do sólido (os pontos **A** e **C** são os vértices de menor cota do prisma).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\varphi$ ) não é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção **não é** um polígono geometricamente igual aos triângulos das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\varphi$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas da base inferior do prisma (as arestas **[AB]** e **[AC]**) e, ainda, duas arestas da base superior (as arestas **[A'B']** e **[A'C']**). Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ). Assim, o ponto **D** é o ponto em que o plano  $\varphi$  corta a aresta **[AB]** da base inferior, o ponto **E** é o ponto em que o plano  $\varphi$  corta a aresta **[AC]** da base inferior, o ponto **D'** é o ponto em que o plano  $\varphi$  corta a aresta **[A'B']** da base superior e o ponto **E'** é o ponto em que o plano  $\varphi$  corta a aresta **[A'C']** da base superior.

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrilátero). Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\varphi$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\varphi$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

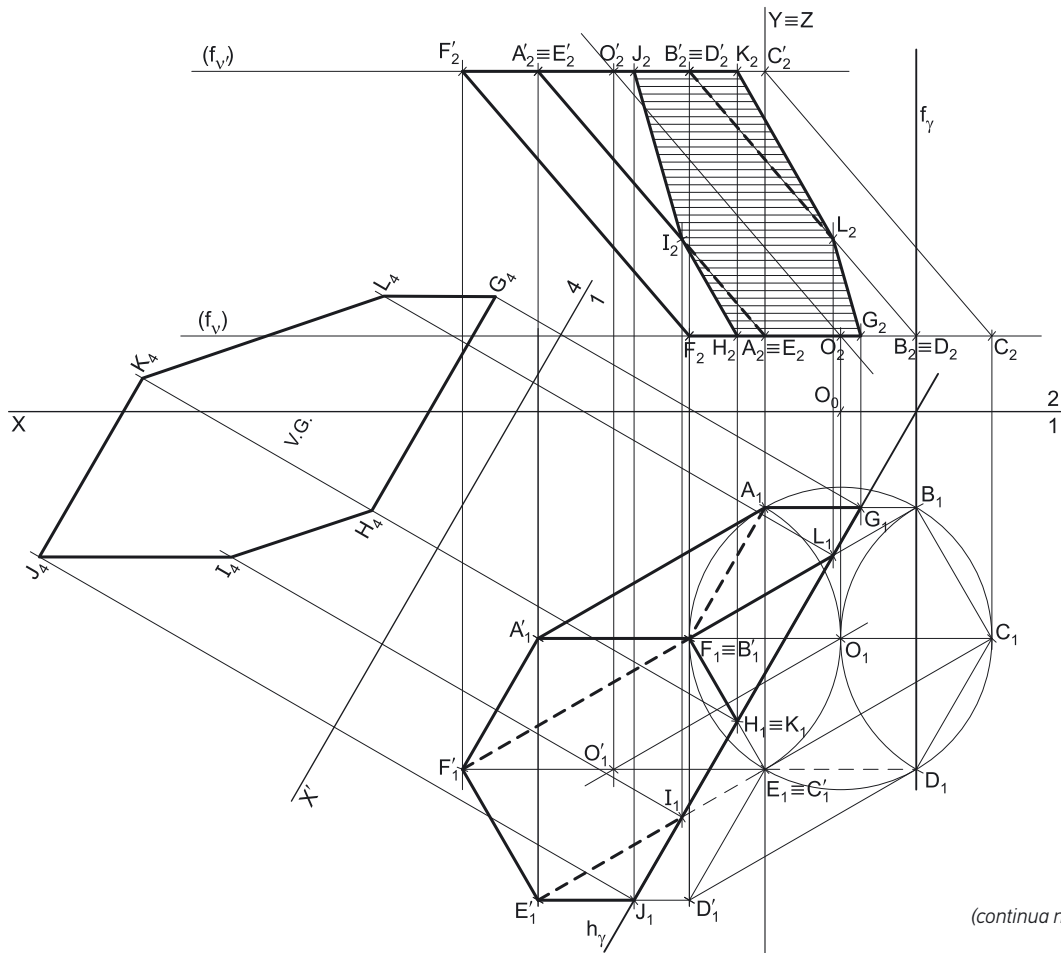
Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção frontal – a face lateral **[AA'B'B]** e as duas bases. Assim, os (três) lados da figura da secção que se situam naquelas três faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados **[DE]**, **[DD']** e **[D'E']**). O lado **[EE']** da **figura da secção** é **visível** em projeção frontal, por se situar numa face do prisma que é visível em projeção frontal (a face lateral **[AA'C'C]**). Salienta-se que os lados **[DE]** e **[D'E']** da figura da secção, que estão contidos nas bases do sólido (que são projetantes frontais), apesar de serem invisíveis, estão ocultos por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal (pois os planos que contêm essas faces são planos projetantes frontais).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

## Traçado:

As projeções do prisma e o traço horizontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y  $\equiv$  Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços dos planos  $\theta$  e  $\theta'$  (os planos que contêm as bases do prisma) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$ , para a construção do triângulo).

**663.**



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se, pelo seu traço frontal, o plano  $v$ , o plano horizontal (e nível) que contém a base inferior do sólido. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\gamma$  (o plano secante), pelos seus traços.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do prisma

O ponto **A** tem cota nula e a face lateral superior do prisma está contida num plano projetante frontal, pelo que é possível concluir que o lado de maior cota do pentágono tem de ser projetante frontal (de topo). Ora, havendo um ponto do pentágono com cota nula (o ponto **A**) e sendo o lado superior (o lado oposto a esse vértice) de topo, a circunferência circunscrita ao pentágono é necessariamente tangente ao Plano Horizontal de Projeção (no ponto **A**). Assim, o ponto **A** tem de se situar na mesma projetante horizontal do ponto **O**, o que nos permitiu, de uma forma imediata, determinar as projeções do ponto **A**.

O hexágono **[ABCDEF]** está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o hexágono **[ABCD]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Por outro lado, o hexágono regular é o único polígono regular cujo lado é igual ao raio da circunferência em que se inscreve. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio (a medida do lado do hexágono, que é igual ao raio da circunferência em que se inscreve), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao polígono. Em seguida efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal da figura, atendendo aos dados (dois dos lados do hexágono são fronto-horizontais, ou seja, paralelos ao eixo **X**).

Por fim, identificaram-se os vértices do hexágono de forma arbitrária (mas sequencial), pois o enunciado é omissivo, e determinaram-se as suas projeções frontais (que se situam sobre o traço frontal do plano  $v$ , pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal). A projeção frontal do hexágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

O prisma tem 7 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, neste caso, a altura do prisma é a diferença entre as cotas dos planos horizontais (de nível) que contêm as duas bases do sólido. Nesse sentido, e atendendo a que o plano  $v$  tem 2 cm de cota (a cota do ponto **O**), o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) tem 9 cm de cota ( $2 + 7 = 9$ ), o que nos permitiu representar o plano  $v'$ , pelo seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

De acordo com o enunciado, as arestas laterais fazem, em projeção horizontal, ângulos de  $30^\circ$  (a.e.) com o eixo **X**, o que nos permitiu desenhar as projeções horizontais das retas suporte das arestas laterais do sólido. Por outro lado, atendendo a que dois dos vértices da base superior se situam nas mesmas projetantes horizontais de outros dois vértices da base inferior, e dada a direção das projeções horizontais das arestas laterais do sólido, existem quatro hipóteses para que tal se verifique. No entanto, duas dessas quatro hipóteses fazem com que o prisma seja um **prisma regular** e não um **prisma oblíquo**, pelo que não foram consideradas. Das duas hipóteses que geram um **prisma oblíquo**, apenas a que a resolução apresenta garante que o prisma se situe no espaço do  $1^\circ$  Diedro (na outra hipótese, a base superior teria dois vértices no  $2^\circ$  Diedro).

Assim, considerando que a base superior é o hexágono **[A'B'C'D'E'F']**, os vértices **B'** e **C'** são os vértices que se situam nas mesmas projetantes horizontais dos vértices **F** e **E** (respetivamente), o que se assinalou convenientemente no desenho. As projeções frontais dos pontos **B'** e **C'** situam-se sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. Este procedimento permitiu-nos determinar a direção das projeções frontais das geratrizes. Assim, pelas projeções frontais dos restantes vértices do hexágono **[ABCDEF]** conduziram-se as projeções frontais das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram) e determinaram-se os respetivos vértices da base superior. Estes foram determinados a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar a interseção entre as arestas laterais do prisma (que estão contidas em retas não projetantes) com o plano da base superior (que é um plano projetante frontal). Assim, desetminaram-se as duas projeções da base superior do sólido.

A partir dos doze vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[CDEFF'E'D'C']**, cuja projeção frontal é o polígono **[C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>F'<sub>2</sub>E'<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A**, **B**, **A'** e **B'**. Estes quatro vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis** (em projeção frontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[BC]** e **[AF]** (da base inferior), as arestas **[A'B']**, **[B'C']** e **[A'F']** (da base superior), e as arestas laterais **[AA']** e **[BB']**. No entanto, todas estas arestas, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar. As arestas laterais **[DD']** e **[EE']** são visíveis (em projeção frontal), por se situarem na parte visível do sólido (os pontos **D**, **D'**, **E** e **E'** são os vértices de maior afastamento do prisma).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABCDD'E'F'A']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>E'<sub>1</sub>F'<sub>1</sub>A<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **E**, **F**, **B'** e **C'**. Os vértices **E** e **F**, por serem dois dos vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[DE]**, **[EF]** e **[AF]** (da base inferior) e as arestas laterais **[EE']** e **[FF']**. Os vértices **B'** e **C'**, por serem dois dos vértices de **maior cota** do prisma, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[A'B']**, **[B'C']** e **[C'D']** (da base superior) e as arestas laterais **[BB']** e **[CC']**.

##### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção **não** é um polígono geometricamente igual aos hexágonos das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\gamma$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas laterais do prisma (as arestas **[BB']** e **[EE']**), cortando também duas arestas da base inferior (as arestas **[AB]** e **[EF]**) e, ainda, duas arestas da base superior (as arestas **[B'C']** e **[D'E']**). Assim, a figura da secção tem **seis vértices**, pelo que é um **hexágono** (mas não um hexágono regular, como atrás se referiu).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices** da **figura da secção** (os pontos **G, H, I, J, K** e **L**), que foram determinados a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais do prisma (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\gamma$ ). Assim, o ponto **G** é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta **[AB]** da base inferior, o ponto **H** é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta **[EF]** da base inferior, o ponto **I** é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta lateral **[EE']**, o ponto **J** é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta **[D'E']** da base superior, o ponto **K** é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta **[B'C']** da base superior e, por fim, o ponto **L** é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta lateral **[BB']**. A partir das projeções dos seis vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um hexágono irregular).

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco do prisma inicial, um sólido em que a figura da secção é uma das suas faces (a parte do sólido inicial que está compreendida entre o plano secante e o Plano Frontal de Projeção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[GLKJE'F'FH]**, cuja projeção frontal é o polígono **[G<sub>2</sub>L<sub>2</sub>K<sub>2</sub>J<sub>2</sub>E'<sub>2</sub>F'<sub>2</sub>H<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A, A', B'** e **I**. O vértice **I**, por ser um dos vértices de **maior afastamento** do sólido, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[E'I]**, **[IJ]** e **[IH]**. Os vértices **A, A' e B'**, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[A'F']**, **[A'B']** e **[B'K]** (da base superior), as arestas **[AF]** e **[AG]** (da base inferior) e as arestas laterais **[AA']** e **[B'L]**. No entanto, todas estas arestas, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), à excepção da aresta **[B'L]**, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar se refere à da aresta lateral **[B'L]**.

Salienta-se o facto de que a aresta lateral **[AA']**, em projeção frontal, está apenas **parcialmente oculta** pela aresta **[E'I]**, que é visível, pelo que parte da invisibilidade da aresta **[AA']** é real – em projeção frontal, a invisibilidade real da aresta **[AA']** resume-se ao segmento de reta **[I<sub>2</sub>A<sub>2</sub>]**.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[GLKJE'F'A'A]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[G<sub>1</sub>L<sub>1</sub>K<sub>1</sub>J<sub>1</sub>E'<sub>1</sub>F'<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>A<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **F, H, I** e **B'**. O vértice **B'**, por serem um dos vértices de **maior cota** do sólido, é **visível** (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']** e **[B'K]** (da base superior), bem como a aresta lateral **[B'L]**. Os vértices **F** e **H**, por serem dois dos vértices de **menor cota** do sólido, são **invisíveis** (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AF]**, **[FH]** e **[GH]** (da base inferior), bem como as arestas laterais **[FF']** e **[HI]**. No entanto, as arestas **[FH]**, **[GH]** e **[HI]**, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, as invisibilidades a assinalar são as referentes às arestas **[FF']** e **[AF]**. Note que o vértice **I** também é invisível em projeção horizontal (apesar de não ser dos vértices de **menor cota**), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[HI]**, **[IJ]** e **[EI]**. No entanto, as arestas **[IJ]** e **[HI]** estão contidas no plano  $\gamma$ , que é um plano projetante horizontal, pelo que, ainda que sendo invisíveis, estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal (o que já não acontece com a aresta **[EI]**). Assim, em projeção horizontal, há ainda a assinalar a invisibilidade da aresta **[EI]**.

A **figura da secção**, porque é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X**.

#### Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\gamma$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza**, pois o plano que a contém (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a **figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza** em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\gamma$  num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção. Nesta situação, há que transformar o plano  $\gamma$  num plano frontal (de frente), pois um plano frontal (de frente) é um plano projetante horizontal, tal como o plano  $\gamma$  (que é um plano vertical) – um plano frontal (de frente) é **um caso particular** dos planos projetantes horizontais. Para transformar o plano  $\gamma$  num plano frontal (de frente), é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\gamma$ . Nesse sentido, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\gamma$ , o eixo **X'** (o novo eixo **X**) é paralelo ao traço horizontal do plano  $\gamma$  (**h<sub>γ</sub>**). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 4**) dos seis vértices da figura da secção, em função dos respetivos afastamentos, que se mantiveram. **G<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **G** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **G<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **G<sub>2</sub>** ao eixo **X**. **H<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **H** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **H<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **H<sub>2</sub>** ao eixo **X**. **I<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **I** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **I<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **I<sub>2</sub>** ao eixo **X**. **J<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **J** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **J<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **J<sub>2</sub>** ao eixo **X**. **K<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **K** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **K<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **K<sub>2</sub>** ao eixo **X**. **L<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **L** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **L<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **L<sub>2</sub>** ao eixo **X**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, desenhou-se o quadrilátero definido por  $G_4, H_4, I_4, J_4, K_4$  e  $L_4$  – o hexágono  $[G_4H_4I_4J_4K_4L_4]$  é a projeção (no plano 4) do hexágono  $[GHIJKL]$  e está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\gamma$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do prisma, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (que é o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (parte do objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção (outro dos objetivos do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. Os planos horizontais (de nível) que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que os seus traços frontais se representaram a **leve**. As restantes linhas representaram-se igualmente a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção da projeção horizontal do hexágono ou os referentes à mudança do diedro de projeção efetuada para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção, em projeção frontal, executou-se a **leve**.

## 664.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$  e  $B$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\rho$  (o plano secante), pelos seus traços.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o triângulo equilátero  $[ABC]$ ) está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, a partir de  $A_1$  e de  $B_1$  efetuou-se a construção da projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$ , o que nos permitiu determinar  $C_1$  (a projeção horizontal do vértice  $C$  do triângulo). Note que se determinou, ainda,  $O_1$ , a projeção horizontal do ponto  $O$  (o centro do triângulo). A projeção frontal do triângulo situa-se no eixo  $X$ , pois todos os seus vértices têm cota nula (bem como o ponto  $O$ ).

Trata-se de uma **pirâmide regular**, cuja base é horizontal (está contida no Plano Horizontal de Projeção), pelo que o ponto  $O$  (o centro da base) e o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) se situam necessariamente na mesma reta projetante horizontal, pois o eixo da pirâmide está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta vertical). Assim, tem-se, imediatamente  $V_1 \equiv O_1$ . Por outro lado, uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que a base tem cota nula (está contida no Plano Horizontal de Projeção), o vértice da pirâmide tem 7 cm de cota ( $0 + 7 = 7$ ), o que nos permitiu determinar a sua projeção frontal ( $V_2$ ). Por fim, a partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projeções, começando pelos respetivos contornos aparentes.

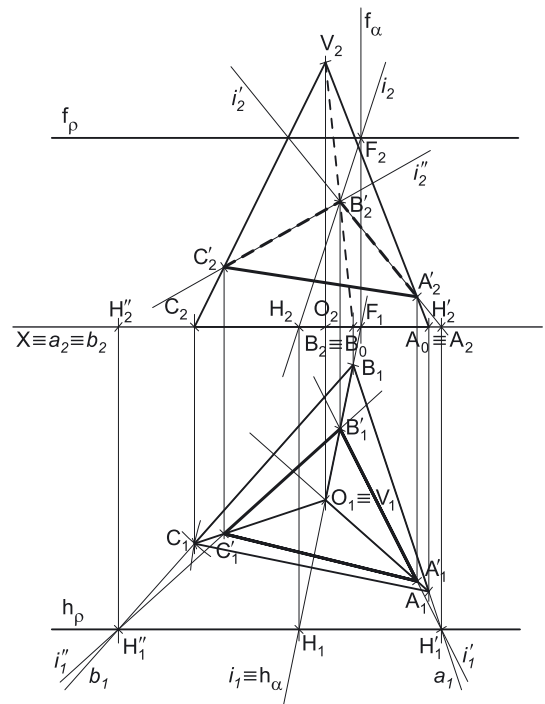
O **contorno aparente frontal** é o triângulo  $[ACV]$  (que é, na prática, a face lateral  $[ACV]$  da pirâmide), cuja projeção frontal é o triângulo  $[A_2C_2V_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice  $B$ . Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AC]$  e  $[BC]$ , da base, e a aresta lateral  $[CV]$ . No entanto, as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$  estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar em projeção frontal é a da aresta lateral  $[CV]$ .

O **contorno aparente horizontal** é o triângulo  $[ABC]$ , cuja projeção horizontal é o triângulo  $[A_1B_1C_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice  $V$ . Este, por ser o vértice de **maior cota** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que neles convergem – todas as arestas laterais da pirâmide.

##### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Poder-se-ia ter recorrido a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano secante num plano projetante o que, na prática, transformaria esta situação numa situação idêntica às situações precedentes. No entanto, optou-se por resolver o exercício com o recurso ao **método misto**.

Assim, a **primeira etapa** consiste em averiguar se o plano secante (o plano  $\rho$ ) corta a base da pirâmide. A reta de interseção do plano  $\rho$  (o plano secante) com o plano da base do sólido (o Plano Horizontal de Projeção) é  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) –  $h_p$  é exterior ao triângulo  $[ABC]$  (não corta o triângulo), pelo que o plano  $\rho$  não corta a base da pirâmide. Assim, o plano  $\rho$  cortará, apenas, as arestas laterais da pirâmide, pelo que a figura da secção terá três vértices – será um triângulo. No entanto, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo ao plano da base, a figura da secção, sendo um triângulo, **não é um triângulo semelhante ao triângulo da base** (a figura da secção **não é um triângulo equilátero**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **segunda etapa** consiste em determinar o ponto de interseção de uma das três arestas laterais do sólido com o plano secante (o plano  $\rho$ ). Nesse sentido, começou-se por determinar o ponto de interseção da aresta lateral [BV] com o plano  $\rho$ . Tendo em conta que se trata da interseção entre uma reta não projetante (a reta suporte da aresta [BV]) com um plano não projetante (o plano  $\rho$ ), é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executa em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **2.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **3.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

- Assim, conduziu-se, pela aresta lateral [BV], o plano  $\alpha$ , que é o plano projetante horizontal da aresta [BV]. O plano  $\alpha$  é um plano vertical.
- Em seguida determinou-se a reta de interseção do plano  $\alpha$  (o plano auxiliar) com o plano  $\rho$  (o plano secante) – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – o ponto F (o seu traço frontal) e o ponto H (o seu traço horizontal).
- O ponto em que a reta  $i$  interseca a aresta lateral [BV] é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral [BV] – o ponto B'.

Já temos um ponto da figura da secção – o ponto B'.

A **terceira etapa** consiste em determinar sucessivamente as retas de interseção do plano secante (o plano  $\rho$ ) com os planos que contêm as faces laterais da pirâmide. Nesse sentido, determinou-se a reta de interseção do plano que contém a face lateral [ABV] (o plano ABV) com o plano secante (o plano  $\rho$ ) – a reta  $i'$ . Para definir a reta  $i'$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $i'$  – o ponto B'. De facto, o ponto B' é um ponto que pertence ao plano  $\rho$  (pois pertence à reta  $i$ , que pertence ao plano  $\rho$ ) e pertence ao plano ABV (pois pertence à aresta lateral [BV], que está contida no plano ABV). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $i'$ .

Os dados são insuficientes para determinar o elemento em falta da reta  $i'$ , pelo que é necessário o recurso a um plano auxiliar. Recorreu-se ao Plano Horizontal de Projeção (o plano que contém a base da pirâmide), como plano auxiliar. Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano auxiliar (o Plano Horizontal de Projeção) com os dois planos – o plano  $\rho$  e o plano ABV. O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ) é a reta de interseção do plano  $\rho$  (o plano secante) com o Plano Horizontal de Projeção (o plano auxiliar). A reta  $a$  (a reta suporte do lado [AB] do triângulo) é a reta de interseção do Plano Horizontal de Projeção (o plano auxiliar) com o plano ABV.

As retas  $a$  e  $h_\rho$  são coplanares (estão, ambas, contidas no Plano Horizontal de Projeção, que é o plano auxiliar a que se recorreu) e não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto H'. O ponto H' é, assim, outro ponto comum aos dois planos (o plano ABV e o plano  $\rho$ ), pelo que é outro ponto da reta  $i'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i'$ . A reta  $i'$  (a reta de interseção do plano ABV com o plano  $\rho$ ) está definida por dois pontos – os pontos B' e H'. A reta  $i'$  interseca a aresta lateral [AV] no ponto A' – o ponto A' é, assim, outro ponto da figura da secção.

Por fim, determinou-se a reta de interseção do plano que contém a face lateral [BCV] (o plano BCV) com o plano secante (o plano  $\rho$ ) – a reta  $i''$ . Para definir a reta  $i''$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $i''$  – o ponto B'. De facto, o ponto B' é um ponto que pertence ao plano  $\rho$  (pois pertence à reta  $i$ , que pertence ao plano  $\rho$ ) e pertence ao plano BCV (pois pertence à aresta lateral [BV], que está contida no plano BCV). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $i''$ .

Os dados são insuficientes para determinar o elemento em falta da reta  $i''$ , pelo que é necessário o recurso a um plano auxiliar. Recorreu-se mais uma vez ao Plano Horizontal de Projeção (o plano que contém a base da pirâmide), como plano auxiliar. Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano auxiliar (o Plano Horizontal de Projeção) com os dois planos – o plano  $\rho$  e o plano BCV. O traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ) é a reta de interseção do plano  $\rho$  (o plano secante) com o Plano Horizontal de Projeção (o plano auxiliar). A reta  $b$  (a reta suporte do lado [BC] do triângulo) é a reta de interseção do Plano Horizontal de Projeção (o plano auxiliar) com o plano BCV.

As retas  $b$  e  $h_\rho$  são coplanares (estão, ambas, contidas no Plano Horizontal de Projeção, que é o plano auxiliar a que se recorreu) e não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto H''. O ponto H'' é, assim, outro ponto comum aos dois planos (o plano BCV e o plano  $\rho$ ), pelo que é outro ponto da reta  $i''$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i''$ . A reta  $i''$  (a reta de interseção do plano BCV com o plano  $\rho$ ) está definida por dois pontos – os pontos B' e H''. A reta  $i''$  interseca a aresta lateral [CV] no ponto C' – o ponto C' é, assim, outro ponto da figura da secção.

A partir das projeções dos três vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um triângulo). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais [ABV] e [BCV]. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados [A'B'] e [B'C']). O lado [A'C'] da **figura da secção** é **visível** em projeção frontal, por se situar numa face da pirâmide que é visível em projeção frontal (a face lateral [ACV]).

Todas as faces laterais da pirâmide são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, todos os lados da **figura da secção** são igualmente visíveis (por se situarem em faces da pirâmide que são visíveis, em projeção horizontal).

#### Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo X representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $\alpha$ , das retas  $i$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $i'$  e  $i''$ ).

## 665.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, ainda, o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\gamma$  (o plano secante), pelos seus traços. O plano  $\gamma$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao quadrado. Em seguida, procedeu-se à construção da projeção frontal do quadrado, inscrita na circunferência, de acordo com os dados – a projeção frontal da diagonal **[AC]** faz, com o eixo **X**, o ângulo dado no enunciado. Em seguida, nomearam-se os vértices de acordo com os dados (**A** é o vértice de maior cota e **B** o de maior abscissa) e determinou-se a projeção horizontal do quadrado, que se situa sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, cuja base é frontal (está contida no plano  $\varphi$ ), pelo que o ponto **O** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice da pirâmide) se situam necessariamente na mesma reta projetante frontal, pois o eixo da pirâmide está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta de topo). Assim, tem-se, imediatamente  $V_2 \equiv O_2$ . Por outro lado, uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que a base tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**), o vértice da pirâmide tem 9 cm de afastamento ( $2 + 7 = 9$ ), o que nos permitiu determinar a sua projeção horizontal ( $V_1$ ). Por fim, a partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projeções, começando pelos respectivos contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o quadrado **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**, cuja projeção frontal é o quadrado **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este, por ser o vértice de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas laterais **[AV]**, **[BV]**, **[CV]** e **[DV]**.

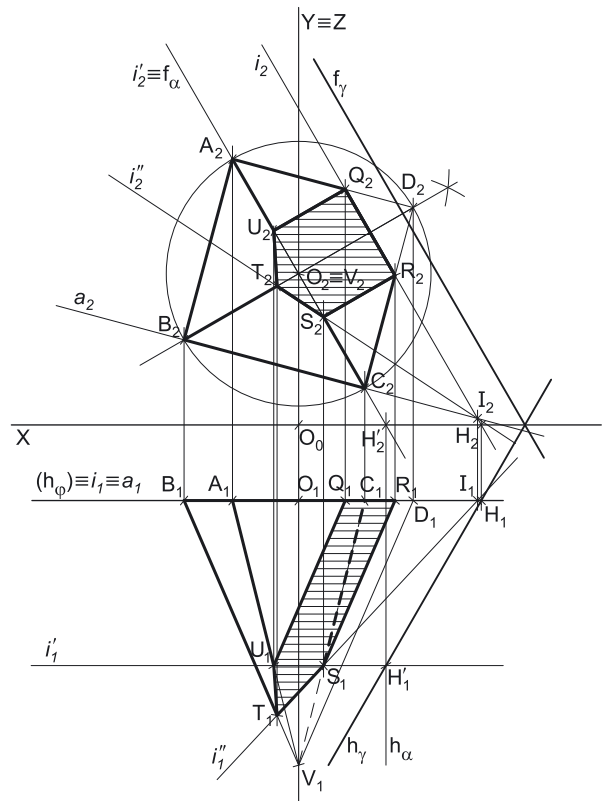
O **contorno aparente horizontal** da pirâmide é a linha fechada **[BADV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. No entanto, as arestas **[BC]** e **[CD]** estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a da aresta **[CV]**. A aresta lateral **[AV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção horizontal).

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante (o plano  $\gamma$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Poder-se-ia ter recorrido a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano secante num plano projetante o que, na prática, transformaria esta situação numa situação idêntica às situações das secções produzidas em pirâmide por planos projetantes. No entanto, optou-se por resolver o exercício com o recurso ao **método misto**.

Assim, a **primeira etapa** consiste em averiguar se o plano secante (o plano  $\gamma$ ) corta a base da pirâmide. Nesse sentido, determinou-se a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano secante) com o plano da base do sólido (o plano  $\varphi$ ) – a reta **i**. A reta **i** é uma reta frontal do plano  $\gamma$  que está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\gamma$ ). A reta **i** corta o quadrado **[ABCD]** em dois pontos (os pontos **Q** e **R**) cujas projeções se determinaram imediatamente. Já temos dois pontos da figura da secção.

Por outro lado, é possível depreender, a partir dos dois pontos determinados e da posição do plano secante, que o plano  $\gamma$  cortará, apenas, três das arestas laterais do sólido (o plano  $\gamma$  não cortará a aresta **[DV]** da pirâmide). Sublinha-se, no entanto, que este raciocínio (e a visão espacial a ele inerente) não é absolutamente fundamental para a resolução do exercício, como em seguida se demonstra. Assim, à partida, a figura da secção terá cinco vértices – será um pentágono (irregular).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **segunda etapa** consiste em determinar o ponto de interseção de uma das arestas laterais do sólido com o plano secante (o plano  $\gamma$ ). Nesse sentido, começou-se por determinar o ponto de interseção da aresta lateral [AV] com o plano  $\gamma$ . Tendo em conta que se trata da interseção entre uma reta não projetante (a reta suporte da aresta [AV]) com um plano não projetante (o plano  $\gamma$ ), é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executa em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **2.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **3.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

- Assim, conduziu-se, pela aresta lateral [AV], o plano  $\alpha$ , que é o plano projetante frontal da aresta [AV]. O plano  $\alpha$  é um plano de topo.
- Em seguida determinou-se a reta de interseção do plano  $\alpha$  (o plano auxiliar) com o plano  $\gamma$  (o plano secante) – a reta  $i'$ . A reta  $i'$  é a reta de interseção entre os dois planos e é uma reta frontal (de frente), pois os traços frontais dos dois planos são paralelos entre si, o que significa que os dois planos têm, em comum, a “família” das retas frontais (de frente). Assim, a reta  $i'$  está definida por um ponto (o ponto  $H'$ , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\gamma$ ).
- O ponto em que a reta  $i'$  interseca a aresta lateral [AV] é o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta lateral [AV] – o ponto  $U$ .

Já temos mais um ponto da figura da secção – o ponto  $U$ .

Salienta-se que o plano  $\alpha$  contém, também, a aresta lateral [CV] da pirâmide (o plano  $\alpha$  é, também, o plano projetante frontal da aresta lateral [CV]). Assim, o processo atrás exposto aplica-se também à aresta lateral [CV] da pirâmide (exatamente com os mesmos raciocínios), o que nos permite determinar o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a aresta lateral [CV] – o ponto  $S$ . Já temos um outro ponto da figura da secção, o que perfaz um total de quatro pontos.

A **terceira etapa** consiste em determinar sucessivamente as retas de interseção do plano secante (o plano  $\gamma$ ) com os planos que contêm as faces laterais da pirâmide. Nesse sentido, determinou-se a reta de interseção do plano que contém a face lateral [BCV] (o plano BCV) com o plano secante (o plano  $\gamma$ ) – a reta  $i''$ . Para definir a reta  $i''$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $i''$  – o ponto  $S$ . De facto, o ponto  $S$  é um ponto que pertence ao plano  $\gamma$  (pois pertence à reta  $i'$ , que pertence ao plano  $\gamma$ ) e pertence ao plano BCV (pois pertence à aresta lateral [CV], que está contida no plano BCV). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $i''$ .

Os dados são insuficientes para determinar o elemento em falta da reta  $i''$ , pelo que é necessário o recurso a um plano auxiliar. Recorreu-se ao plano  $\phi$  (o plano que contém a base da pirâmide), como plano auxiliar. Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano auxiliar (o plano  $\phi$ ) com os dois planos – o plano  $\gamma$  (o plano secante) e o plano BCV. A reta  $i$  (anteriormente determinada) é a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano secante) com o plano  $\phi$  (o plano auxiliar). A reta  $a$  (a reta suporte do lado [BC] do quadrado) é a reta de interseção do plano  $\phi$  (o plano auxiliar) com o plano BCV.

As retas  $a$  e  $i$  são coplanares (estão, ambas, contidas no plano  $\phi$ , que é o plano auxiliar a que se recorreu) e não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto  $I$ . O ponto  $I$  é, assim, outro ponto comum aos dois planos (o plano BCV e o plano  $\gamma$ ), pelo que é outro ponto da reta  $i''$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i''$ . A reta  $i''$  (a reta de interseção do plano BCV com o plano  $\gamma$ ) está definida por dois pontos – os pontos  $S$  e  $I$ . A reta  $i''$  interseca a aresta lateral [BV] no ponto  $T$  – o ponto  $T$  é, assim, um outro ponto da figura da secção. Já temos os cinco pontos da figura da secção.

Em seguida desenharam-se as projeções da figura da secção. O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas).

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide compreendido entre o plano  $\gamma$  (o plano secante) e o plano  $\phi$  (o plano que contém a sua base). Assim, a base de menor afastamento desse novo sólido é o pentágono [ABCRQ] e uma das suas faces é o pentágono [QRSTU] (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [ABCRQ], cuja projeção frontal é o polígono [ $A_2B_2C_2R_2Q_2$ ]. Em projeção frontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $S$ ,  $T$  e  $U$ . Todos estes vértices são os vértices de **maior afastamento** do sólido, pelo que são visíveis, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [QU], [AU], [TU], [BT], [ST], [CS] e [RS].

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [RQABTS], cuja projeção horizontal é o polígono [ $R_1Q_1A_1B_1T_1S_1$ ]. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices  $C$  e  $U$ . O vértice  $C$ , por ser o vértice de **menor cota** do sólido, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [BC], [CR] e [CS]. No entanto, as arestas [AB] e [BC] estão ocultas (em projeção horizontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta [CS]. Por outro lado, o vértice  $U$  é **visível** em projeção horizontal (por se situar na parte visível do sólido), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [TU], [AU] e [QU].

A **figura da secção** é visível em ambas as projeções (a área do corte é visível em ambas as projeções), pelo que se assinalou esse facto preenchendo ambas as projeções da mesma com tracejado.

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\gamma$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O traço horizontal do plano  $\phi$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da construção da projeção frontal do quadrado, do plano  $\alpha$ , das retas  $i$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $i'$  e  $i''$ ). O tracejado que preenche a figura da secção (em ambas as projeções) executou-se a **leve**.



## 666.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **Q**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se, pelo seu traço horizontal, o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto **Q** ( $Q_1$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o pentágono **[ABCDE]**) está contida num plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o pentágono **[ABCDE]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto **Q**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao polígono e procedeu-se à sua construção, em projeção frontal, atendendo aos dados. A projeção horizontal do pentágono está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

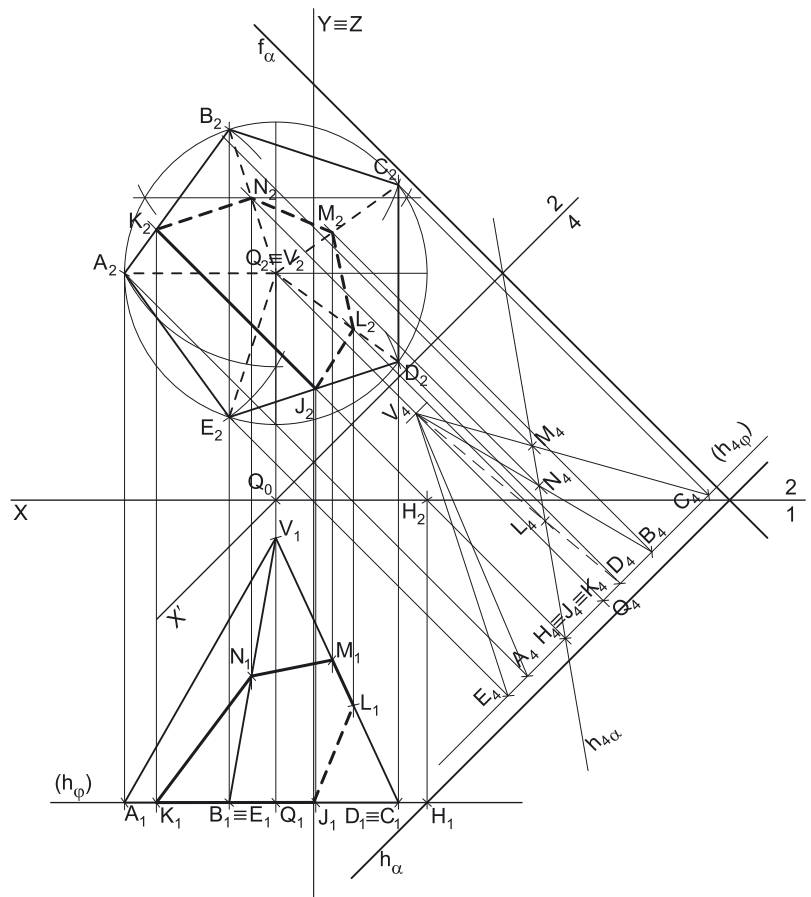
Trata-se de uma **pirâmide regular**, cuja base é frontal (está contida no plano  $\varphi$ ), pelo que o ponto **Q** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice da pirâmide) se situam necessariamente na mesma reta projetante frontal, pois o eixo da pirâmide está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta de topo), pelo que os dois pontos têm as suas projeções frontais coincidentes. Assim, tem-se, imediatamente  $V_2 \equiv Q_2$ . Conclui-se, portanto, que o ponto **V** e o ponto **Q** têm a mesma cota. O ponto **A** é o vértice de maior abscissa do pentágono e a aresta lateral **[AV]** é horizontal (de nível). Nesse sentido, o ponto **A** tem a mesma cota do ponto **Q** e é o vértice mais à esquerda do polígono, o que nos permitiu perceber a posição da figura e concluir a construção da sua projeção frontal. Por fim, atendendo a que o enunciado é omissivo no que respeita à ordem dos vértices, nomearam-se os vértices do pentágono de forma arbitrária, mas sequencial.

Por outro lado, uma vez que a aresta lateral **[AV]** mede 8 cm e é horizontal (de nível), sabe-se que a aresta lateral **[AV]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal), pois é paralela ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**) e com 8 cm de raio (o comprimento da aresta), determinou-se  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto **V**), sobre a linha de sua chamada. Note que se atendeu ao facto de o ponto **V** ser invisível em projeção frontal, ou seja, o ponto **V** tem necessariamente afastamento inferior ao plano  $\varphi$ .

Por fim, a partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projeções, começando pelos respetivos contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o pentágono **[ABCDE]**, cuja projeção frontal é o pentágono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que neles convergem – todas as arestas laterais da pirâmide são invisíveis, em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABCV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices **D** e **E**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AE]**, **[CD]** e **[DE]**, da base, e as arestas laterais **[DV]** e **[EV]**. No entanto, todas estas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar. Por fim, a aresta lateral **[BV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (o vértice **B** é o vértice de maior cota da pirâmide).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projeção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida numa pirâmide por um plano não projetante**) numa **secção produzida numa pirâmide por um plano projetante**.

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual a base da pirâmide se projeta em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, a base projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, que, assim, deverá ser o plano de projeção a manter.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\alpha$ , de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 2**), o plano  $\alpha$  é um plano vertical (um plano projetante horizontal).

Em seguida determinaram-se as projeções dos seis vértices da pirâmide no **plano 4** o que se processa a partir dos respetivos afastamentos. **A<sub>4</sub>, B<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, D<sub>4</sub> e E<sub>4</sub>** são, assim, as projeções dos pontos **A, B, C, D e E** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se dos respetivos afastamentos, que se mantêm (os cinco pontos têm 8 cm de afastamento, que é o afastamento da base da pirâmide). Representou-se, ainda, o traço do plano  $\phi$  no **plano 4** (**h<sub>4φ</sub>**), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices da base da pirâmide. O plano  $\phi$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano frontal (de frente), pelo que continua a ser um plano projetante horizontal.

**V<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **V** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **V<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **V<sub>1</sub>** ao eixo **X**. A partir das projeções dos seis vértices da pirâmide no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção (a aresta lateral **[DV]** é a única invisibilidade a assinalar).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** – **h<sub>4α</sub>**. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de **h<sub>4α</sub>** – o ponto **H** (que é, por economia de traçados, o ponto de **h<sub>α</sub>** que tem 8 cm de afastamento). **H<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **H** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **H<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **H<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 8 cm – o afastamento de **H**). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** (**h<sub>4α</sub>**) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com **f<sub>α</sub>** (que se situa no eixo **X'**) e **H<sub>4</sub>** (a nova projeção horizontal do ponto **H**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta três arestas laterais da pirâmide (as arestas **[CV]**, **[BV]** e **[DV]**), cortando, ainda, a base da pirâmide em outras duas arestas (as arestas **[AB]** e **[DE]**), pelo que a figura da secção tem **cinco vértices** – é um **pentágono**. No entanto, atendendo a que o plano secante (o plano  $\alpha$ ) **não é paralelo** ao plano da base, a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao pentágono da base. Assim, a figura da secção é um **pentágono irregular**.

Salienta-se que as arestas **[AB]** e **[DE]**, da base, têm as suas projeções horizontais (no **plano 4**) coincidentes, mas, de facto, o plano secante corta a base naquelas duas arestas (cujas projeções horizontais estão coincidentes) e não apenas numa única aresta, o que, nesta situação, seria impossível.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices** da **figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**, o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal. Assim, o ponto **J** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[DE]** da base, o ponto **K** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AB]** da base, o ponto **L** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[DV]**, o ponto **M** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[CV]** e, por fim, o ponto **N** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[BV]**. Em seguida determinaram-se as projeções frontais (no **plano 2**) dos pontos **J, K, L, M e N** (os cinco vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções frontais daqueles pontos (no **plano 2**), foi possível determinar as suas projeções horizontais (no **plano 1**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto **J** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[DE]**, pelo que a sua projeção horizontal (**J<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[DE]** (**[D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>]**). O ponto **K** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AB]**, pelo que a sua projeção horizontal (**K<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[AB]** (**[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>]**). O ponto **L** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[DV]**, pelo que a sua projeção horizontal (**L<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[DV]** (**[D<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**). O ponto **M** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[CV]**, pelo que a sua projeção horizontal (**M<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[CV]** (**[C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**). O ponto **N** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[BV]**, pelo que a sua projeção horizontal (**N<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[BV]** (**[B<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**).

A partir das projeções de todos os vértices da figura da secção, foi possível desenhar as suas duas projeções. Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – todas faces laterais da pirâmide são invisíveis, em projeção frontal. Assim, os (quatro) lados da figura da secção que se situam nas faces laterais da pirâmide são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados [JL], [LM], [MN] e [KN]). O lado [JK] da **figura da secção** é **visível** em projeção frontal, por se situar numa face da pirâmide que é visível em projeção frontal (a base [ABCDE]).

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais [AEV] e [DEV] da pirâmide são **invisíveis**, em projeção horizontal. Assim, o lado da figura da secção que se situa na face lateral [DEV] é **invisível**, em projeção horizontal (o lado [JL]). Os lados [MN] e [KN] da figura da secção são **visíveis**, em projeção horizontal, por se situarem em faces da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (as faces laterais [BCV] e [ABV], respetivamente). Salienta-se que os lados [JK] e [LM] da figura da secção, que estão contidos em faces do sólido que são projetantes horizontais (a base [ABCDE] e a face lateral [CDV], respetivamente), apesar de serem invisíveis, estão ocultos por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (pois os planos que as contêm são planos projetantes horizontais).

#### Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante, nomeadamente a projeção da pirâmide no **plano 4**).

## 667.

#### Dados:

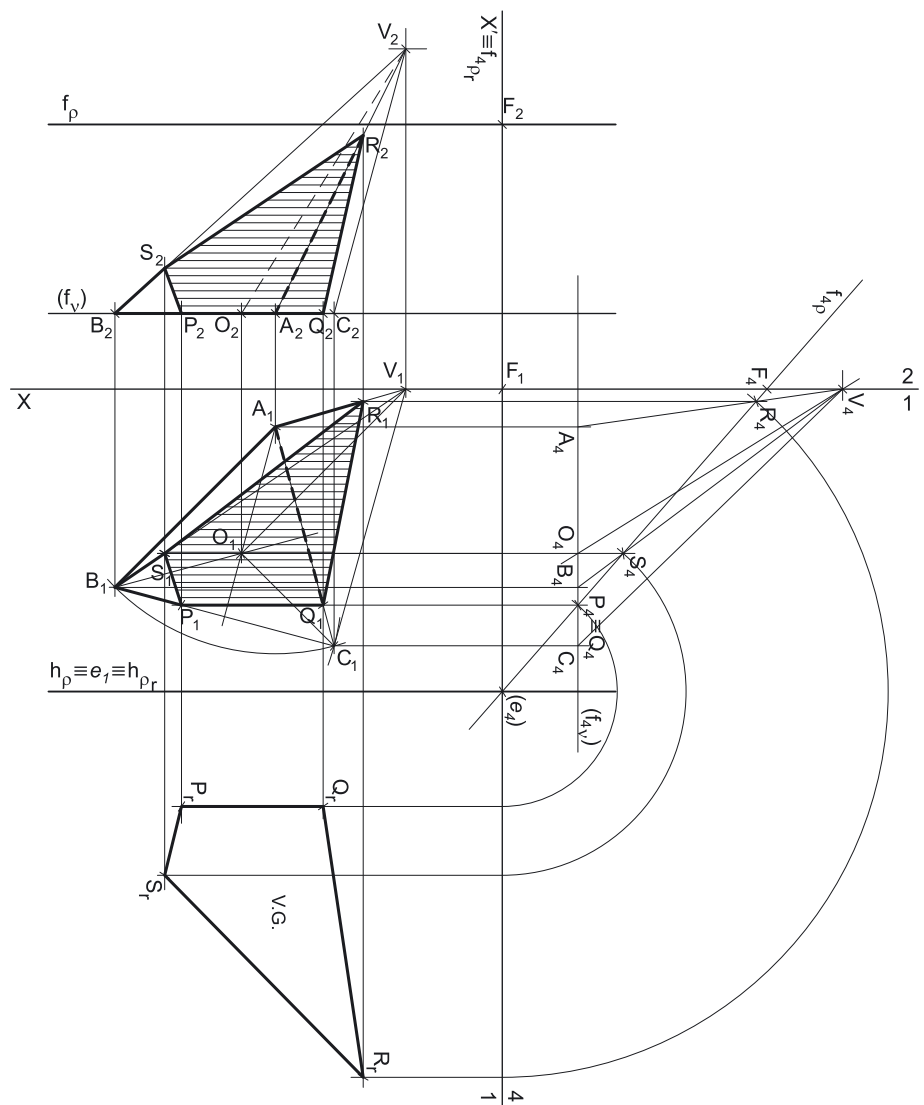
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Representaram-se, ainda, o plano  $v$ , pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é o plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente pela projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o triângulo equilátero [ABC]) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o triângulo [ABC] se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), mediu-se (em verdadeira grandeza) o ângulo que o lado [AB] faz com o Plano Frontal de Projeção, o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta suporte do lado [AB]. Sobre essa reta mediram-se os 6 cm (a medida do lado do triângulo) e determinou-se  $B_1$ , a projeção horizontal do ponto **B**.

A partir de  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do triângulo, garantindo-se que a figura se situa no espaço do 1.º Diedro (para que a pirâmide se situe no espaço do 1.º Diedro, como o enunciado pede expressamente). Determinou-se, também, o ponto **O**, o centro do triângulo. A projeção frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, pela projeção horizontal do ponto  $O(O_1)$ , conduziu-se a projeção horizontal da reta suporte do eixo da pirâmide, fazendo, com o eixo  $X$ , o ângulo dado no enunciado. Este procedimento permitiu-nos, em seguida, determinar  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto  $V$ ), em função do seu afastamento, que é nulo (como o enunciado refere expressamente). Por outro lado, uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que a base tem 2 cm de cota (a cota do ponto  $A$ ), o vértice da pirâmide tem necessariamente 9 cm de cota ( $2 + 7 = 9$ ), o que nos permitiu determinar a projeção frontal do ponto  $V(V_2)$ . Por fim, a partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projeções, começando pelos respetivos contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o triângulo  $[BCV]$  (que é, na prática, a face lateral  $[BCV]$ ), cuja projeção frontal é o triângulo  $[B_2C_2V_2]$ . Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal do sólido – o vértice  $A$ . Este, por ser o vértice de **menor afastamento** do sólido, é invisível (em projeção frontal), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AC]$ , da base, e a aresta lateral  $[AV]$ . No entanto, as arestas  $[AB]$  e  $[AC]$  estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar refere-se à da aresta lateral  $[AV]$ .

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[ABCV]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1B_1C_1V_1]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta  $[AC]$ , da base, é invisível em projeção horizontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal (a face lateral  $[ACV]$  e a base  $[ABC]$ ). Por outro lado, há a referir que a aresta lateral  $[BV]$  é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (as faces  $[ABV]$  e  $[BCV]$ ).

#### a) Determinação das projeções da figura da secção:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$  (o plano secante), pelos seus traços, em função dos dados. O plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projeção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida numa pirâmide por um plano não projetante**) numa **secção produzida numa pirâmide por um plano projetante**.

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual a base da pirâmide se projeta em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, a base projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, que, assim, deverá ser o plano de projeção a manter.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\rho$ , de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano de topo (um plano projetante frontal).

Em seguida determinaram-se as projeções dos quatro vértices da pirâmide no **plano 4** o que se processa a partir das respetivas cotas.  $A_4$ ,  $B_4$  e  $C_4$  são, assim, as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$ , e  $C$  no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se das respetivas cotas, que se mantêm (os quatro pontos têm 2 cm de cota, que é a cota da base da pirâmide). Representou-se, ainda, o traço do plano  $\nu$  no **plano 4** ( $f_{4\nu}$ ), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices da base da pirâmide. O plano  $\nu$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

$V_4$  é a projeção do ponto  $V$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $V_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $V_2$  ao eixo  $X$  (que é 9 cm – a cota de  $V$ ). A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, tendo em conta que, no **plano 4**, não existem quaisquer invisibilidades a assinalar.

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** –  $f_{4\rho}$ . Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de  $f_\rho$  – o ponto  $F$ .  $F_4$  é a projeção do ponto  $F$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$  (que é 7 cm – a cota de  $f_\rho$ ). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_\rho$  (que se situa no eixo  $X'$ ) e  $F_4$  (a nova projeção frontal do ponto  $F$ ).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas laterais da pirâmide (as arestas  $[AV]$  e  $[BV]$ ), cortando, ainda, a base da pirâmide em outras duas arestas (as arestas  $[AC]$  e  $[BC]$ ), pelo que a figura da secção tem **quatro vértices** – é um **quadrilátero**.

Salienta-se que as arestas  $[AC]$  e  $[BC]$ , da base, têm as suas projeções frontais (no **plano 4**) coincidentes, mas, de facto, o plano secante corta a base naquelas duas arestas (cujas projeções frontais estão coincidentes) e não apenas numa única aresta, o que, nesta situação, seria impossível.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\rho$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Assim, o ponto  $P$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta  $[BC]$  da base, o ponto  $Q$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta  $[AC]$  da base, o ponto  $R$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral  $[AV]$  e, por fim, o ponto  $S$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral  $[BV]$ . Em seguida determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  (os quatro vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, a partir das projeções horizontais daqueles pontos (no **plano 1**), foi possível determinar as suas projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto **P** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[BC]**, pelo que a sua projeção frontal (**P<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[BC]** (**[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**). O ponto **Q** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AC]**, pelo que a sua projeção frontal (**Q<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[AC]** (**[A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**). O ponto **R** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AV]**, pelo que a sua projeção frontal (**R<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[AV]** (**[A<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**). O ponto **S** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[BV]**, pelo que a sua projeção frontal (**S<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[BV]** (**[B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**).

Em seguida desenharam-se as projeções da figura da secção.

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide compreendido entre o plano  $\rho$  (o plano secante) e o plano  $\nu$  (o plano que contém a sua base). Assim, a base inferior desse novo sólido é o quadrilátero **[ABPQ]** e uma das suas faces é quadrilátero **[PQRS]** (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BPQSR]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>P<sub>2</sub>Q<sub>2</sub>S<sub>2</sub>R<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este, por ser o vértice de **menor afastamento** do sólido, é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]**, **[AQ]** e **[AV]**. No entanto, as arestas **[AB]** e **[AQ]** estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta **[AV]**.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABPQS]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>P<sub>1</sub>Q<sub>1</sub>S<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **R**. Este, por se situar na parte visível do sólido, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BR]**, **[PR]** e **[RS]**. No entanto, há a referir que a aresta **[AQ]**, da base, é invisível (em projeção horizontal), pois separa duas faces do sólido que são invisíveis em projeção horizontal – as faces **[ABPQ]** e **[AQS]**.

A **figura da secção** é visível em ambas as projeções (a área do corte é visível em ambas as projeções), pelo que se assinalou esse facto preenchendo ambas as projeções da mesma com tracejado.

**b)** O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que, para se determinar a verdadeira grandeza da figura da secção, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

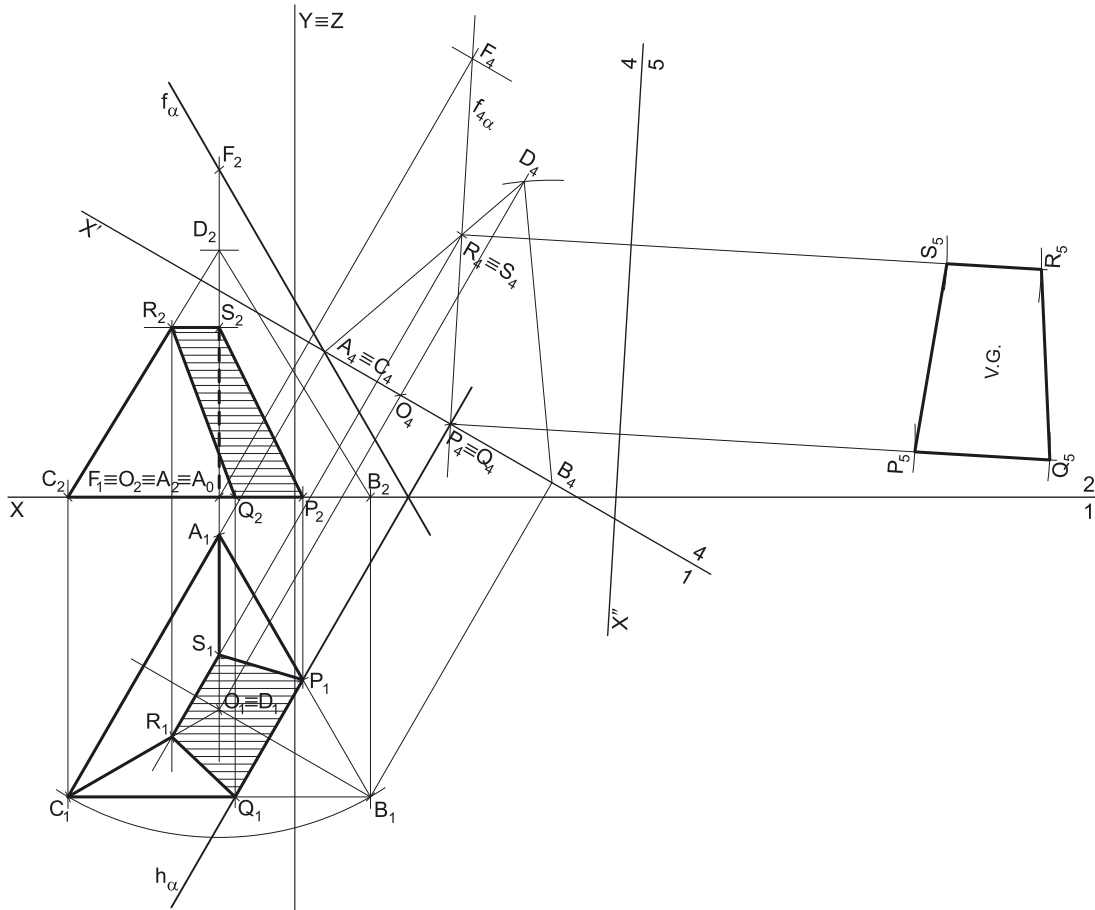
Optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, rebatendo-o como um plano de topo (o rebatimento do plano  $\rho$  no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi **h<sub>p</sub>**, (o traço horizontal do plano  $\rho$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente, **h<sub>p</sub>  $\equiv$  e<sub>1</sub>  $\equiv$  h<sub>p<sub>r</sub></sub>**.

Em seguida, rebateram-se os quatro vértices da figura da secção, tendo em conta que os arcos dos respetivos rebatimentos estão contidos em planos ortogonais à charneira do rebatimento, que, no novo diedro de projeção, são planos frontais (planos paralelos ao **plano 4**). Nesse sentido, os arcos do rebatimento dos quatro pontos projetam-se em verdadeira grandeza no **plano 4** e os pontos, ao longo dos seus rebatimentos, mantêm os respetivos afastamentos (referenciados ao **plano 4**), o que nos permitiu determinar **P<sub>r</sub>**, **Q<sub>r</sub>**, **R<sub>r</sub>**, e **S<sub>r</sub>**. Por fim, desenhou-se o quadrilátero **[P<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>R<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]**, que é a figura da secção em verdadeira grandeza, o que se assinalou devidamente no desenho.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y  $\equiv$  Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\rho$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O traço frontal do plano  $\nu$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (parte do objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção (outro dos objetivos do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada (de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante, nomeadamente a projeção da pirâmide no **plano 4**), bem como, ainda, os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em ambas as projeções) executou-se a **leve**.

668.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante) pelos seus traços. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal a  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

**Resolução:**

*Determinação das projeções do tetraedro:*

Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção horizontal da reta suporte do lado **[AB]** do triângulo **[ABC]**, em função da direção dada no enunciado. Por outro lado, uma vez a face **[ABC]** do sólido está contida no Plano Horizontal de Projeção, o triângulo **[ABC]** está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, sobre a reta suporte do lado **[AB]** mediram-se os 6 cm (a medida da aresta do tetraedro) e determinou-se a projeção horizontal do ponto **B** (**B<sub>1</sub>**). Em seguida, a partir de **A<sub>1</sub>** e de **B<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do triângulo **[ABC]**, o que nos permitiu determinar a projeção horizontal do terceiro vértice do triângulo (o ponto **C**), tendo-se ainda determinado a projeção horizontal do ponto **O** (o centro do triângulo). As projeções de todos estes pontos estão no eixo **X**, pois o triângulo está contido no Plano Horizontal de Projeção (todos os pontos têm cota nula).

Um tetraedro toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**, qualquer que seja a face que se considere como base. Neste caso, considerou-se a face dada (o triângulo **[ABC]**), que está contida no Plano Horizontal de Projeção. Assim, o vértice **D** (o quarto vértice do sólido) situa-se numa reta que passa pelo ponto **O** (o centro dessa face) e que é ortogonal ao plano que contém o triângulo **[ABC]** (o Plano Horizontal de Projeção), ou seja, os dois pontos situam-se numa mesma reta vertical (projetante horizontal), pelo que os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes – tem-se, imediatamente, **D<sub>1</sub> = O<sub>1</sub>**.

Apesar de o tetraedro tomar a forma aparente de uma pirâmide triangular regular, não é conhecida a altura dessa pirâmide mas, sim, é adquirido o facto de que **todas as arestas de um tetraedro são iguais** (têm o mesmo comprimento), pois trata-se de um **poliedro regular**. Assim, é um facto que todas as arestas que convergem no vértice **D** (as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]**) têm o mesmo comprimento dos lados do triângulo **[ABC]** (que estão em verdadeira grandeza em projeção horizontal). No entanto, nenhuma daquelas arestas se projeta em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de projeção, pois nenhuma daquelas três arestas é paralela a qualquer dos planos de projeção. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, há que ter em conta que a presente situação se trata da **secção produzida num sólido por um plano não projetante**, situação que tem uma resolução muito simplificada caso se recorra a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar o plano secante (que é um plano não projetante) num plano projetante. Assim, de forma a resolver as duas situações de uma só vez (o recurso a um processo geométrico auxiliar para a determinação das projeções do tetraedro e o recurso a uma mudança do diedro de projeção para a determinação da secção), optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, com vista a uma maior economia de traçados, na mudança do diedro de projeção a efetuar há que manter o plano de projeção no qual a base do sólido (a face **[ABC]**, neste caso) se projete em verdadeira grandeza. Assim, na mudança do diedro de projeção a efetuar há que manter o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) e substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**).

Por outro lado, esta mudança do diedro de projeção tem de ser escolhida de forma criteriosa, de forma a, numa mesma mudança do diedro de projeção, ser possível representar uma das arestas **[AD]**, **[BD]** ou **[CD]** em verdadeira grandeza e, em simultâneo, ser possível transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante. Tendo em conta que, em projeção horizontal, a aresta **[BD]** é perpendicular a  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ), optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja paralelo à aresta **[BD]** – o **plano 4** será, igualmente, ortogonal a plano  $\alpha$ , o que, como atrás se referiu, cumprirá os dois objetivos com uma única mudança do diedro de projeção.

Assim, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo a aresta **[BD]**, o eixo **X'** é paralelo à projeção horizontal da aresta (é paralelo a **[B<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**). Por outro lado, como atrás se referiu, e porque o **plano 4** é também ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo **X'** é necessariamente perpendicular ao traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 1**), o plano  $\alpha$  é um plano de topo (um plano projetante frontal).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a aresta **[BD]** é frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal (no **plano 4**). Assim, há que representar essa aresta no **plano 4** para, em seguida, ser possível concluir a construção das projeções do tetraedro.

**B<sub>4</sub>** e **O<sub>4</sub>** são as projeções dos pontos **B** e **O** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se em função das suas cotas, que se mantiveram – como os pontos têm cota nula, as suas projeções no **plano 4** situam-se no eixo **X'**. A linha de chamada do ponto **D** corresponde à linha de chamada do ponto **O** (porque os dois pontos se situam na mesma reta projetante horizontal). Assim, e atendendo a que a aresta **[BD]** está em verdadeira grandeza em projeção frontal, com o compasso, fazendo centro em **B<sub>4</sub>** e com 6 cm de raio (a medida da aresta do tetraedro), determinou-se **D<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **D** no **plano 4**). Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do ponto **D**, em função da sua cota, que se manteve – a distância de **D<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **D<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

Finalmente, a partir das projeções dos quatro vértices do tetraedro, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o triângulo **[BCD]** (que, na prática, é a face **[BCD]** do sólido), cuja projeção frontal é o triângulo **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este, por ser o vértice de **menor afastamento** do tetraedro, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem, ou seja, as arestas **[AB]**, **[AC]** e **[AD]** são invisíveis em projeção frontal. No entanto, as arestas **[AB]** e **[AC]** estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar refere-se à da aresta **[AD]**.

O **contorno aparente horizontal** é o triângulo **[ABC]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **D**. Este, por ser o vértice de **maior cota** do tetraedro, é **visível** (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que nele convergem, ou seja, as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]** são visíveis em projeção horizontal.

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. No entanto, tendo-se recorrido previamente a uma **mudança do diedro de projeção** para se determinarem as projeções do sólido, essa mudança do diedro de projeção teve, também como propósito (e como oportunamente se referiu), a transformação do plano  $\alpha$  num plano projetante. Assim, e como já exposto, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\alpha$  é um plano de topo (um plano projetante frontal).

Em seguida determinou-se a projeção do tetraedro no **plano 4**, o que se processa a partir das projeções de todos os seus vértices. Já tínhamos as projeções (no **plano 4**) de dois dos vértices do tetraedro – os vértices **B** e **D**. Assim, determinaram-se as as projeções dos pontos **A** e **C** no **plano 4**, em função das respetivas cotas (que se mantiveram). **A<sub>4</sub>** e **C<sub>4</sub>** são as projeções dos pontos **A** e **C** no **plano 4** (respetivamente) e situam-se no eixo **X'**, pois os pontos têm cota nula (que se manteve). Este procedimento permitiu-nos desenhar a projeção, no **plano 4**, do tetraedro.

Por fim, foi necessário determinar o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** – **f<sub>4 $\alpha$</sub>** . Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de **f <sub>$\alpha$</sub>**  – o ponto **F** (que, por economia de traçados, se situou na linha de chamada do ponto **D**). **F<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **F<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **F<sub>2</sub>** ao eixo **X**. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** (**f<sub>4 $\alpha$</sub>** ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_\alpha$  (que se situa no eixo **X'**) e **F<sub>4</sub>** (a nova projeção frontal do ponto **F**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta quatro arestas do tetraedro – as arestas **[AB]** e **[BC]** (da face **[ABC]**) e ainda as arestas **[AD]** e **[CD]**. Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Salienta-se que as arestas **[AB]** e **[BC]** (da face **[ABC]**) têm as suas projeções frontais (no **plano 4**) coincidentes, mas, de facto, o plano secante corta aquelas duas arestas (cuja novas projeções frontais estão coincidentes) e não apenas uma única aresta (o que, nesta situação, seria impossível). De forma semelhante, também as arestas **[AD]** e **[CD]** têm as suas projeções frontais (no **plano 4**) coincidentes, mas, de facto, o plano secante corta aquelas duas arestas (cuja novas projeções frontais estão coincidentes) e não apenas uma única aresta (o que, nesta situação, seria impossível).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Assim, o ponto **P** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AB]**, o ponto **Q** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[BC]**, o ponto **R** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[CD]** e, por fim, o ponto **S** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AD]**. Em seguida determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **P**, **Q**, **R** e **S** (os quatro vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções horizontais daqueles pontos (no **plano 1**), foi possível determinar as suas projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto **P** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AB]**, pelo que a sua projeção frontal (**P<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[AB]** (**[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>]**). O ponto **Q** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[BC]**, pelo que a sua projeção frontal (**Q<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[BC]** (**[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**). O ponto **S** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AD]**, pelo que a sua projeção frontal (**S<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[AD]** (**[A<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**).

Este procedimento não pode ser utilizado para a aresta **[CD]**, que é de perfil (as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**). Assim, a projeção frontal do ponto **R** tem de ser determinada em função da cota do ponto, que se manteve. Ness sentido, **R<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **R** (no **plano 2**) e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **R<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **R<sub>4</sub>** ao eixo **X'**. Salienta-se, ainda, que os pontos **R** e **S** têm necessariamente a mesma cota.

Em seguida desenharam-se as projeções da figura da secção.

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco do tetraedro – o tronco do tetraedro compreendido entre o plano  $\alpha$  (o plano secante) e o Plano Horizontal de Projeção. Assim, a base inferior desse novo sólido é o quadrilátero **[ACQP]** e uma das suas faces é o quadrilátero **[PQRS]** (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[CQP<sub>2</sub>SR<sub>2</sub>]**, cuja projeção frontal é o polígono **[C<sub>2</sub>Q<sub>2</sub>P<sub>2</sub>S<sub>2</sub>R<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este é o vértice de **menor afastamento** do sólido, pelo que é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AC]**, **[AP]** e **[AS]**. No entanto, as arestas **[AC]** e **[AP]** estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta **[AS]**.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ACQP]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>Q<sub>1</sub>P<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **R** e **S**. Estes vértices, por serem os vértices de **maior cota** do sólido, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[PS]**, **[AS]**, **[RS]**, **[CR]** e **[QR]**.

A **figura da secção** é visível em ambas as projeções (a área do corte é visível em ambas as projeções), pelo que se assinalou esse facto preenchendo ambas as projeções da mesma com tracejado.

#### Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo recurso a uma segunda mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura da secção) num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção. Tendo em conta a primeira mudança do diedro de projeção efetuada, em que o plano  $\alpha$  já havia sido transformado num plano de topo, há, agora, que transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível), pois um plano horizontal (de nível) é um plano projetante frontal, tal como o plano  $\alpha$  (que é um plano de topo, no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Recorde que um plano horizontal (de nível) é **um caso particular** dos planos projetantes frontais. Para transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as novas projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X''**) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\alpha$ , o eixo **X''** (o novo eixo **X**) é paralelo ao novo traço frontal do plano  $\alpha$  (**f<sub>4 $\alpha$</sub>** ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X''** (o novo eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 5**) dos quatro vértices da figura da secção, em função dos respetivos afastamentos, que se mantiveram. **P<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **P** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **P<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **P<sub>1</sub>** ao eixo **X'**. **Q<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **Q** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **Q<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **Q<sub>1</sub>** ao eixo **X'**. **R<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **R** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **R<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **R<sub>1</sub>** ao eixo **X'**. **S<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **S** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **S<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **S<sub>1</sub>** ao eixo **X**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, desenhou-se o quadrilátero definido por  $P_5$ ,  $Q_5$ ,  $R_5$  e  $S_5$  – o quadrilátero  $[P_5Q_5R_5S_5]$  é a projeção (no plano 5) do quadrilátero  $[PQRS]$  e está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\alpha$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do tetraedro, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respectivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da **figura da secção** (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à primeira mudança do diedro de projeção (para a construção das projeções do tetraedro e para a determinação da figura da secção), bem como dos referentes à segunda mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em ambas as projeções) executou-se a **leve**.

## 669.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $O$  e  $A$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se, pelo seu traço frontal, o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente pelas projeções frontais dos pontos  $O$  e  $A$  ( $O_1$  e  $A_1$ , respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços. O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais a  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

#### Resolução:

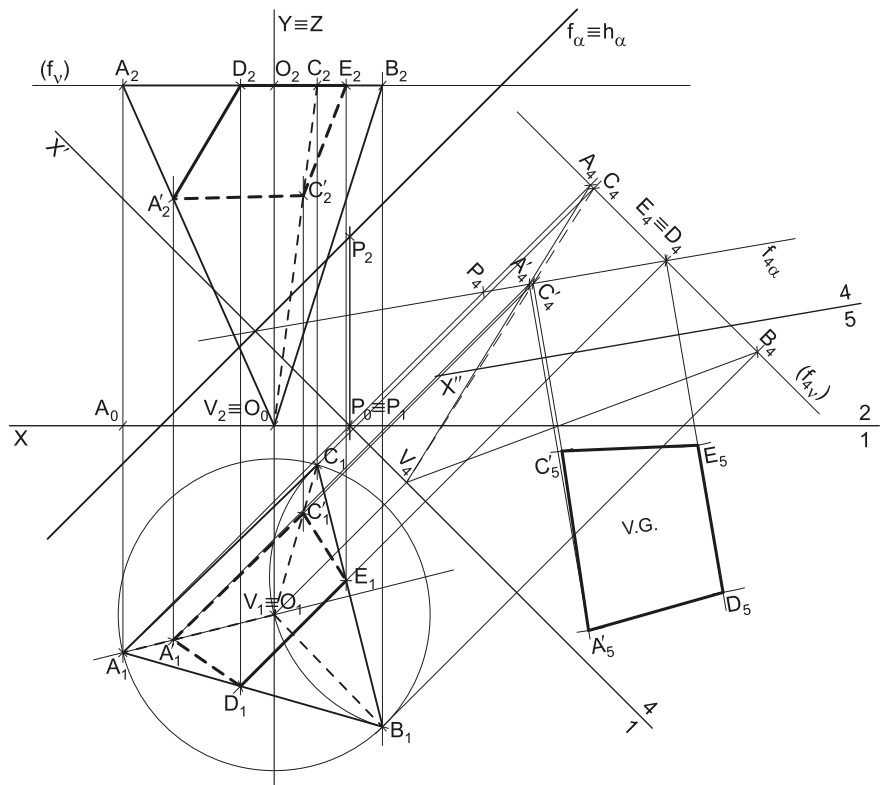
##### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o triângulo equilátero  $[ABC]$ ) está contida num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com raio até  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao polígono e procedeu-se à sua construção, em projeção horizontal, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do triângulo –  $B$  e  $C$ . A projeção frontal do triângulo está sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, cuja base é horizontal (está contida no plano  $v$ ), pelo que o ponto  $O$  (o centro da base) e o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) se situam necessariamente na mesma reta projetante horizontal, pois o eixo da pirâmide está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta vertical), pelo que os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes. Assim, tem-se, imediatamente  $V_1 \equiv O_1$ . Por outro lado, atendendo a que o vértice da pirâmide tem cota nula (é dado no enunciado), determinou-se a projeção frontal do ponto  $V$  ( $V_2$ ), que se situa no eixo  $X$ .

Por fim, a partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projeções, começando pelos respetivos contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é o triângulo  $[ABC]$ , cuja projeção horizontal é o triângulo  $[A_1B_1C_1]$ . Em projeção horizontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice  $V$ . Este, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que neles convergem – todas as arestas laterais da pirâmide são invisíveis, em projeção horizontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [ACV] (que, na prática, é a face lateral [ACV]), cuja projeção frontal é o polígono [A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]. Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [AC] e [BC], da base, e a aresta lateral [CV]. No entanto, as arestas [AC] e [BC] estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta [CV].

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projeção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida numa pirâmide por um plano não projetante**) numa **secção produzida numa pirâmide por um plano projetante**.

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual a base da pirâmide se projeta em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, a base projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, que, assim, deverá ser o plano de projeção a manter.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\alpha$ , de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\alpha$  é um plano de topo (um plano projetante frontal).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos quatro vértices da pirâmide no **plano 4** o que se processa a partir das respetivas cotas. **A<sub>4</sub>**, **B<sub>4</sub>** e **C<sub>4</sub>** são, assim, as projeções dos pontos **A**, **B** e **C** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se das respetivas cotas, que se mantêm (os três pontos têm 9 cm de cota, que é a cota da base da pirâmide). Representou-se, ainda, o traço do plano  $\nu$  no **plano 4** ( $f_{4\nu}$ ), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices da base da pirâmide. O plano  $\nu$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

**V<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **V** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que é nula e se manteve) – **V<sub>4</sub>** situa-se no eixo **X'**, pois o ponto **V** tem cota nula. A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção (a aresta lateral [CV] é a única invisibilidade a assinalar).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** –  $f_{4\alpha}$ . Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de  $f_\alpha$  – o ponto **P**. **P<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **P** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **P<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **P<sub>2</sub>** ao eixo **X**. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** ( $f_{4\alpha}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_\alpha$  (que se situa no eixo **X'**) e **P<sub>4</sub>** (a nova projeção frontal do ponto **P**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas laterais da pirâmide (as arestas [AV] e [CV]), cortando, ainda, a base da pirâmide em outras duas arestas (as arestas [AB] e [BC]), pelo que a figura da secção tem **quatro vértices** – é um **quadrilátero**.

Salienta-se que as arestas [AB] e [BC], da base, têm as suas projeções frontais (no **plano 4**) coincidentes, mas, de facto, o plano secante corta a base naquelas duas arestas (cuja projeções frontais estão coincidentes) e não apenas numa única aresta, o que, nesta situação, seria impossível.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Assim, o ponto **D** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta [AB] da base, o ponto **E** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta [BC] da base, o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral [AV], e, por fim, o ponto **C'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral [CV]. Em seguida determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **A'**, **B'**, **D** e **E** (os quatro vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções horizontais daqueles pontos (no **plano 1**), foi possível determinar as suas projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta [AV], pelo que a sua projeção frontal (**A'<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta [AV] ([A<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]). O ponto **C'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta [CV], pelo que a sua projeção frontal (**C'<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta [CV] ([C<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]). O ponto **D** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta [AB], pelo que a sua projeção frontal (**D<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta [AB] ([A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>]). O ponto **E** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta [BC], pelo que a sua projeção frontal (**E<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta [BC] ([B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]).

A partir das projeções de todos os vértices da figura da secção, foi possível desenhar as suas duas projeções. Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais [ACV] e [BCV] da pirâmide são **invisíveis**, em projeção frontal. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces laterais são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados [A'C'] e [C'E]). O lado [A'D] da figura da secção é **visível**, em projeção frontal, por se situar numa face da pirâmide que é visível em projeção frontal (a face lateral [ABV]). Salienta-se que o lado [DE] da figura da secção, que está contido numa face do sólido que é projetante frontal (a base [ABC]), apesar de ser invisível, está oculto por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (pois o plano que a contém é um plano projetante frontal).

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção horizontal – todas faces laterais da pirâmide são invisíveis, em projeção horizontal. Assim, os (três) lados da figura da secção que se situam nas faces laterais da pirâmide são **invisíveis**, em projeção horizontal (os lados [A'D], [A'C'] e [C'E]). O lado [DE] da **figura da secção** é **visível** em projeção horizontal, por se situar numa face da pirâmide que é visível em projeção horizontal (a base [ABC]).

*Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:*

O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo recurso a uma segunda mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura da secção) num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção. Tendo em conta a primeira mudança do diedro de projeção efetuada, em que o plano  $\alpha$  já havia sido transformado num plano de topo, há, agora, que transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível), pois um plano horizontal (de nível) é um plano projetante frontal, tal como o plano  $\alpha$  (que é um plano de topo, no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Recorde que um plano horizontal (de nível) é **um caso particular** dos planos projetantes frontais. Para transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém o plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X''**) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\alpha$ , o eixo **X''** (o novo eixo **X**) é paralelo ao novo traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{4\alpha}$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X''** (o novo eixo **X**).

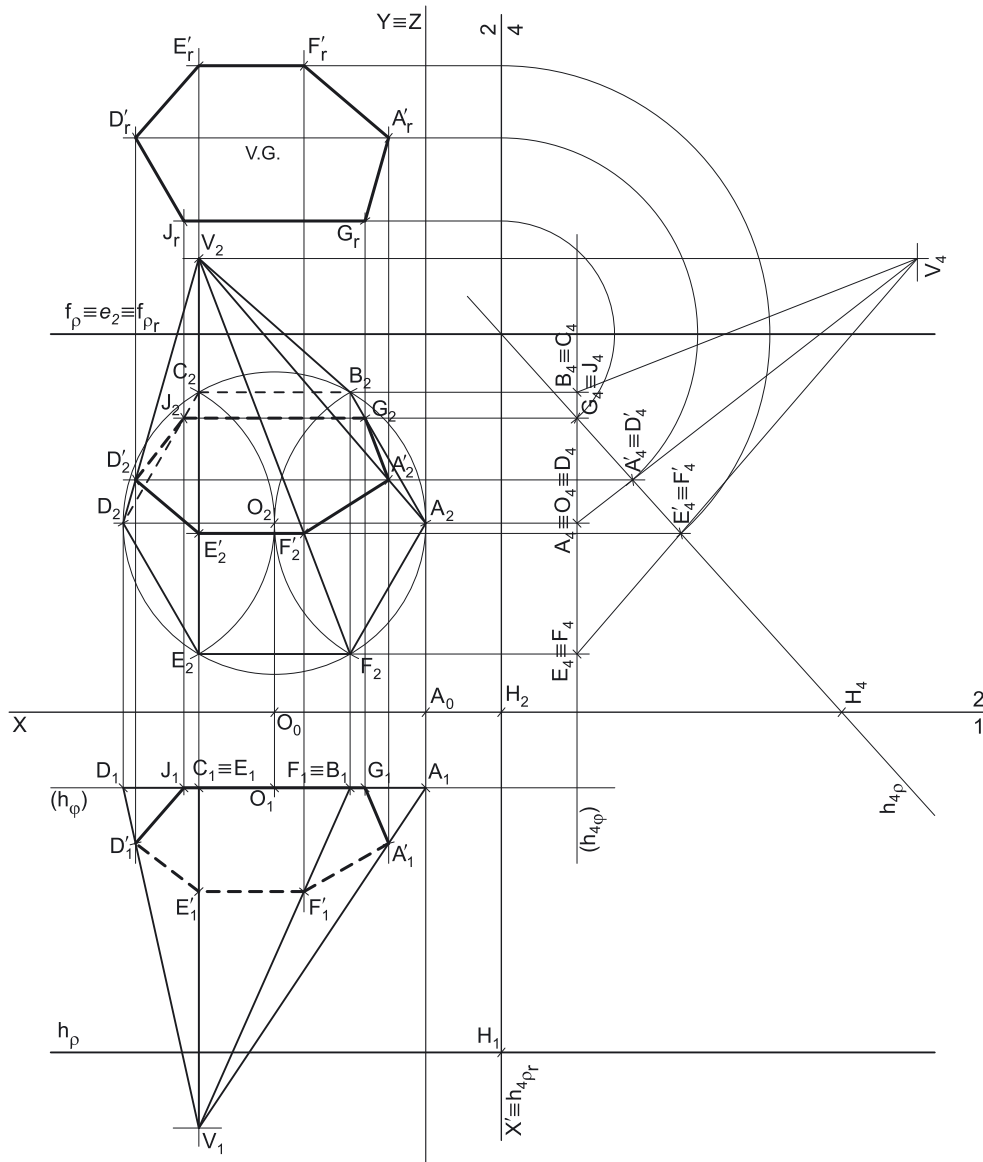
Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 5**) dos quatro vértices da figura da secção, em função dos respetivos afastamentos, que se mantiveram. **A'\_5** é a projeção do ponto **A'** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **A'\_5** ao eixo **X''** é igual à distância de **A'\_1** ao eixo **X'**. **C'\_5** é a projeção do ponto **C'** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **C'\_5** ao eixo **X''** é igual à distância de **C'\_1** ao eixo **X'**. **D\_5** é a projeção do ponto **D** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **D\_5** ao eixo **X''** é igual à distância de **D\_1** ao eixo **X**. **E\_5** é a projeção do ponto **E** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **E\_5** ao eixo **X''** é igual à distância de **E\_1** ao eixo **X**.

Por fim, desenhou-se o quadrilátero definido por **A'\_5**, **C'\_5**, **D\_5** e **E\_5** – o quadrilátero [A'\_5C'\_5E\_5D\_5] é a projeção (no **plano 5**) do quadrilátero [A'C'ED] e está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho

**Traçado:**

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço frontal do plano  $\nu$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve**, pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da **figura da secção** (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à primeira mudança do diedro de projeção (para a determinação da figura da secção), bem como dos referentes à segunda mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

670.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **A**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se, pelo seu traço horizontal, o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi}$ ) passa necessariamente pelas projeções horizontais dos pontos **O** e **A** ( $O_2$  e  $A_2$ , respetivamente). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\rho$  (o plano secante), pelos seus traços.

**Resolução:**

*Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o hexágono regular [**ABCDEF**]) está contida num plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o hexágono se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com raio até  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao polígono e procedeu-se à sua construção, em projeção frontal, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos restantes vértices do polígono. A projeção horizontal do hexágono está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{\varphi}$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. Note que se atendeu ao facto de os pontos **B** e **C** serem os vértices de maior cota do hexágono, como o enunciado refere expressamente.

Tendo em conta que as arestas laterais [**CV**] e [**EV**] da pirâmide são de perfil, sabe-se que o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem a mesma abcissa dos pontos **C** e **E**. Por outro lado, sendo dada a cota do ponto **V**, foi possível determinar  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do vértice ao plano da base. Ora, uma vez que a pirâmide tem 9 cm de altura e que o plano da base tem 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **O** e **A**), e atendendo a que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro, o vértice **V** tem 11 cm de afastamento ( $2 + 9 = 11$ ), o que nos permitiu determinar **V<sub>1</sub>** (a projecção horizontal do vértice **V**).

Por fim, a partir das projecções dos sete vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projecções, começando pelos respetivos contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ABVDEF]**, cuja projecção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>]**. Em projecção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser um dos vértices de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. Por outro lado, as arestas laterais **[AV]**, **[EV]** e **[FV]** são visíveis (em projecção frontal), por se situarem na parte visível do sólido (aquelas arestas separam faces que são visíveis em projecção frontal).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABCDV]**, cuja projecção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projecção horizontal existem dois vértices que não integram ao contorno aparente horizontal – os vértices **E** e **F**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[DE]**, **[EF]** e **[AF]**, da base, e as arestas laterais **[EV]** e **[FV]**. No entanto, todas estas arestas estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projecção horizontal, pelo que, em projecção horizontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar. Por fim, as arestas laterais **[BV]** e **[CV]** são visíveis (em projecção horizontal), por se situarem na parte visível do sólido (note que os vértices **B** e **C** são os vértices de maior cota do sólido).

#### Determinação das projecções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projecção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida numa pirâmide por um plano não projetante**) numa **secção produzida numa pirâmide por um plano projetante**.

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projecção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual a base da pirâmide se projeta em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, a base projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projecção, que, assim, deverá ser o plano de projecção a manter.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projecção (o **plano 1**) por um novo plano de projecção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\rho$ , de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projecção que tem, em comum com o diedro de projecção anterior, o Plano Frontal de Projecção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projecção, tem-se o seguinte: – no que respeita às **projecções, mantêm-se as projecções frontais** (que se situam no plano de projecção que se manteve) e **alteram-se as projecções horizontais** (que passarão a ser as projecções no novo plano de projecção – o **plano 4**); – no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projecção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projecção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projecção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projecção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). No novo diedro de projecção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 2**), o plano  $\rho$  é um plano vertical (um plano projetante horizontal).

Em seguida, determinaram-se as projecções dos sete vértices da pirâmide no **plano 4** o que se processa a partir dos respetivos afastamentos. **A<sub>4</sub>**, **B<sub>4</sub>**, **C<sub>4</sub>**, **D<sub>4</sub>**, **E<sub>4</sub>** e **F<sub>4</sub>** são, assim, as projecções dos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se dos respetivos afastamentos, que se mantêm (os seis pontos têm 2 cm de afastamento, que é o afastamento da base da pirâmide). Representou-se, ainda, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** (**h<sub>4\rho</sub>**), que contém as projecções no **plano 4** de todos os vértices da base da pirâmide. O plano  $\rho$ , no novo diedro de projecção, é ainda um plano frontal (de frente), pelo que continua a ser um plano projetante horizontal.

**V<sub>4</sub>** é a projecção do ponto **V** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que é 11 cm e se manteve) – a distância de **V<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **V<sub>1</sub>** ao eixo **X**. A partir das projecções dos sete vértices da pirâmide no **plano 4**, desenhou-se a projecção do sólido no **plano 4**, atendendo a que, no novo plano de projecção (no **plano 4**), não existe qualquer invisibilidade a assinalar.

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** – **h<sub>4\rho</sub>**. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de **h<sub>\rho</sub>** – o ponto **H**. **H<sub>4</sub>** é a projecção do ponto **H** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **H<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **H<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 9 cm – o afastamento de **h<sub>\rho</sub>**). Tendo em conta que, no novo diedro de projecção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** (**h<sub>4\rho</sub>**) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com **f<sub>\rho</sub>** (que se situa no eixo **X'**) e **H<sub>4</sub>** (a nova projecção horizontal do ponto **H**).

No novo diedro de projecção, o plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta quatro arestas laterais da pirâmide (as arestas **[AV]**, **[DV]**, **[EV]** e **[FV]**), cortando, ainda, a base da pirâmide em outras duas arestas (as arestas **[AB]** e **[CD]**), pelo que a figura da secção tem **seis vértices** – é um **hexágono**. No entanto, como o plano secante (o plano  $\rho$ ) não é paralelo ao plano da base, a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao hexágono da base, pelo que, apesar de se tratar de um hexágono, a figura da secção **não é** um hexágono regular (pois o plano secante **não é** paralelo ao plano da base)

Salienta-se que as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, têm as suas projecções horizontais (no **plano 4**) coincidentes, mas, de facto, o plano secante corta a base naquelas duas arestas (cujas projecções horizontais estão coincidentes) e não apenas numa única aresta, o que, nesta situação, seria impossível. De forma semelhante, também as arestas laterais **[AV]** e **[DV]** têm as suas projecções horizontais (no **plano 4**) coincidentes, tal como as arestas laterais **[EV]** e **[FV]**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices da figura da secção no plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**, o plano  $\rho$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal. Assim, o ponto **G** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AB]** da base, o ponto **J** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[CD]** da base, o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[AV]**, o ponto **D'** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[DV]**, o ponto **E'** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[EV]**, e, por fim, o ponto **F'** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[FV]**. Em seguida determinaram-se as projeções frontais (no **plano 2**) dos pontos **A', D', E', F', G** e **J** (os seis vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções frontais daqueles pontos (no **plano 2**), foi possível determinar as suas projeções horizontais (no **plano 1**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AV]**, pelo que a sua projeção horizontal (**A'<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[AV]** (**(A<sub>1</sub>V<sub>1</sub>)**). O ponto **D'** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[DV]**, pelo que a sua projeção horizontal (**D'<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[DV]** (**(D<sub>1</sub>V<sub>1</sub>)**). O ponto **F'** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[FV]**, pelo que a sua projeção horizontal (**F'<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[FV]** (**(F<sub>1</sub>V<sub>1</sub>)**). O ponto **G** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AB]**, pelo que a sua projeção horizontal (**G<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[AB]** (**(A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>)**). O ponto **J** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[CD]**, pelo que a sua projeção horizontal (**J<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[CD]** (**(C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>)**).

Este procedimento não pode ser utilizado para a aresta **[EV]**, que é de perfil (as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**). Assim, a projeção horizontal do ponto **E'** tem de ser determinada em função do afastamento do ponto, que se manteve. Ness sentido, **E'<sub>1</sub>** é a projeção horizontal do ponto **E'** (no **plano 1**) e determinou-se em função da seu afastamento (que se manteve) – a distância de **E'<sub>1</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **E'<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

A partir das projeções de todos os vértices da figura da secção, foi possível desenhar as suas duas projeções. Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais **[BCV]**, **[CDV]** e a base **[ABCDEF]**. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados **[GJ]** e **[JD']**). Os lados **[D'E']**, **[E'F']**, **[A'F']** e **[A'G]** da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por se situarem em faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (as faces laterais **[DEV]**, **[EFV]**, **[AFV]** e **[ABV]**, respetivamente).

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais **[DEV]**, **[EFV]** e **[AFV]** da pirâmide são **invisíveis**, em projeção horizontal. Assim, os (três) lados da figura da secção que se situam naquelas três faces laterais são **invisíveis**, em projeção horizontal (os lados **[D'E']**, **[E'F']** e **[A'F']**). Os lados **[A'G]** e **[D'J]** da figura da secção são **visíveis**, em projeção horizontal, por se situarem em faces da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (as faces laterais **[ABV]** e **[CDV]**, respetivamente). Salienta-se que o lado **[GJ]** da figura da secção, que está contido numa face do sólido que é projetante horizontal (a base **[ABCDEF]**), apesar de ser invisível, está oculto por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (pois o plano que a contém é um plano projetante horizontal).

#### Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que, para se determinar a verdadeira grandeza da figura da secção, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção, rebatendo-o como um plano vertical (o rebatimento do plano  $\rho$  no diedro formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi  $f_\rho$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_\rho \equiv e_2 \equiv f_{\rho'}$ .

Em seguida, rebateram-se os seis vértices da figura da secção, tendo em conta que os arcos dos respetivos rebatimentos estão contidos em planos ortogonais à charneira do rebatimento, que, no novo diedro de projeção, são planos horizontais (planos paralelos ao **plano 4**). Nesse sentido, os arcos do rebatimento dos seis pontos projetam-se em verdadeira grandeza no **plano 4** e os pontos, ao longo dos seus rebatimentos, mantêm as respetivas cotas (referenciadas ao **plano 4**), o que nos permitiu determinar **A'<sub>r</sub>**, **D'<sub>r</sub>**, **E'<sub>r</sub>**, **F'<sub>r</sub>**, **G<sub>r</sub>** e **J<sub>r</sub>**. Por fim, desenhou-se o hexágono **[A'<sub>r</sub>G<sub>r</sub>J<sub>r</sub>D'<sub>r</sub>E'<sub>r</sub>F'<sub>r</sub>]**, que é a figura da secção em verdadeira grandeza, o que se assinalou devidamente no desenho.

#### Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço horizontal do plano  $\rho$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da **figura da secção** (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação da figura da secção), bem como dos referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  (para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

## 671.

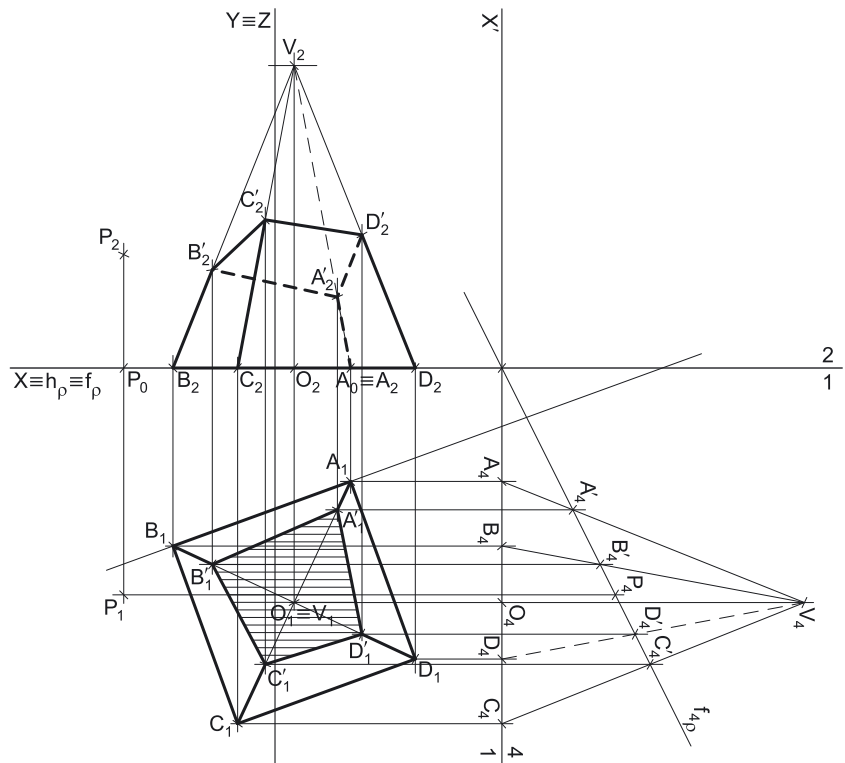
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O plano  $\rho$  (o plano secante) está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **P**.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, a partir de **A**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **A**), mediu-se (em verdadeira grandeza) o ângulo que o lado **[AB]** faz com o Plano Frontal de Projeção, o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta suporte do lado **[AB]**. Sobre essa reta mediram-se os 5 cm (a medida do lado do quadrado) e determinou-se **B**<sub>1</sub>, a projeção horizontal do ponto **B**. Note que se garantiu que o ponto **A** é o vértice de menor afastamento do quadrado (como o enunciado pede expressamente).

A partir de **A**<sub>1</sub> e **B**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do quadrado, garantindo-se que a figura se situa no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro (para que a pirâmide se situe no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro, como o enunciado pede expressamente). Determinou-se, também, o ponto **O**, o centro do quadrado. A projeção frontal do quadrado situa-se no eixo **X**, pois todos os vértices do quadrado têm cota nula (o quadrado situa-se no Plano Horizontal de Projeção).



Trata-se de uma **pirâmide regular**, cuja base é horizontal (está contida no Plano Horizontal de Projeção), pelo que o ponto **O** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice da pirâmide) se situam necessariamente na mesma reta projetante horizontal, pois o eixo da pirâmide está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta vertical). Assim, tem-se, imediatamente  $V_1 \equiv O_1$ . Por outro lado, uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e que a base tem cota nula (está contida no Plano Horizontal de Projeção), o vértice da pirâmide tem 8 cm de cota ( $0 + 8 = 8$ ), o que nos permitiu determinar a sua projeção frontal (**V**<sub>2</sub>). Por fim, a partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projeções, começando pelos respetivos contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** da pirâmide é a linha fechada **[BCDV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**. No entanto, as arestas **[AB]** e **[AD]** estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a da aresta **[AV]**. A aresta lateral **[CV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal).

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado **[ABCD]**, cuja projeção horizontal é o quadrado **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **V**. Este, por ser o vértice de **maior cota** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas laterais **[AV]**, **[BV]**, **[CV]** e **[DV]**.

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projeção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida numa pirâmide por um plano não projetante**) numa **secção produzida numa pirâmide por um plano projetante**.

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual a base da pirâmide se projeta em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, a base projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, que, assim, deverá ser o plano de projeção a manter.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\rho$ , de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte: – no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**); – no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), ou seja, ortogonal ao eixo  $X$  inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano de topo (um plano projetante frontal).

Em seguida determinaram-se as projeções dos cinco vértices da pirâmide no **plano 4** o que se processa a partir das respetivas cotas.  $A_4$ ,  $B_4$ ,  $C_4$  e  $D_4$  são, assim, as projeções dos pontos **A**, **B**, **C** e **D** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se das respetivas cotas, que se mantêm – como os pontos têm cota nula, as suas projeções no **plano 4** situam-se no eixo  $X'$ .

$V_4$  é a projeção do ponto **V** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $V_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $V_2$  ao eixo  $X$  (que é 8 cm – a cota de **V**). A partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção (a aresta lateral  $[DV]$  é a única invisibilidade a assinalar).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** –  $f_{4\rho}$ . Para tal recorreu-se ao ponto **P**, que é o ponto que define o plano  $\rho$ .  $P_4$  é a projeção do ponto **P** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $P_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $P_2$  ao eixo  $X$  (que é 3 cm – a cota de **P**). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_\rho$  (que se situa no eixo  $X'$ ) e  $P_4$  (a nova projeção frontal do ponto **P**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as quatro arestas laterais da pirâmide, não cortando a base da pirâmide em nenhuma das suas arestas, pelo que a figura da secção tem **quatro vértices** – é um **quadrilátero**. No entanto, como o plano secante (o plano  $\rho$ ) não é paralelo ao plano da base, a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao quadrado da base, pelo que, apesar de se tratar de um quadrilátero, a figura da secção **não é** um quadrado (pois o plano secante **não é paralelo** ao plano da base).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\rho$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Assim, o ponto  $A'$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral  $[AV]$ , o ponto  $B'$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral  $[BV]$ , o ponto  $C'$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral  $[CV]$  e, por fim, o ponto  $D'$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral  $[DV]$ . Em seguida determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  (os quatro vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções horizontais daqueles pontos (no **plano 1**), foi possível determinar as suas projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto  $A'$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta  $[AV]$ , pelo que a sua projeção frontal ( $A'_2$ ) se situa sobre a projeção frontal da aresta  $[AV]$  ( $[A_2V_2]$ ). O ponto  $B'$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta  $[BV]$ , pelo que a sua projeção frontal ( $B'_2$ ) se situa sobre a projeção frontal da aresta  $[BV]$  ( $[B_2V_2]$ ). O ponto  $C'$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta  $[CV]$ , pelo que a sua projeção frontal ( $C'_2$ ) se situa sobre a projeção frontal da aresta  $[CV]$  ( $[C_2V_2]$ ). O ponto  $D'$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta  $[DV]$ , pelo que a sua projeção frontal ( $D'_2$ ) se situa sobre a projeção frontal da aresta  $[DV]$  ( $[D_2V_2]$ ).

Em seguida desenharam-se as projeções da figura da secção. O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas).

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide compreendido entre o plano  $\rho$  (o plano secante) e o Plano Horizontal de Projeção (o plano que contém a sua base). Assim, a base inferior desse novo sólido é o quadrado  $[ABCD]$  e a sua face superior é quadrilátero  $[A'B'C'D']$  (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices **A** e  $A'$ . Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são invisíveis, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base), as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da face superior) e, ainda, a aresta lateral  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, as invisibilidades a assinalar são as referentes às arestas  $[A'B']$ ,  $[A'D']$  e  $[AA']$ .

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado  $[ABCD]$ , cuja projeção horizontal é o quadrado  $[A_1B_1C_1D_1]$ . Em projeção horizontal existem quatro vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ . Todos estes vértices, por serem os vértices de **maior cota** do sólido, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[A'B']$ ,  $[B'C']$ ,  $[C'D']$  e  $[A'D']$  (da face superior), bem como as arestas laterais  $[AA']$ ,  $[BB']$ ,  $[CC']$ , e  $[DD']$ .

A **figura da secção** é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), pelo que se assinalou esse facto preenchendo a projeção horizontal da figura da secção com tracejado.

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\rho$ ), sendo dados e porque se situam no eixo  $X$ , ficam a **médio**, que que foi a expressividade utilizada para o eixo  $X$ . representaram-se a **médio**. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, para a determinação das projeções da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 672.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **D**, pelas respectivas projeções, em função dos dados, bem como o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base inferior do prisma), pelo seu traço frontal ( $f_v$ ). O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por **A**<sub>2</sub> e por **D**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **A** e **D**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços.

**Resolução:***Determinação das projeções do prisma:*

A base inferior do prisma (o hexágono regular **[ABCDEF]**) está contida num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o hexágono **[ABCDEF]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, Em primeiro lugar, determinou-se a projeção horizontal do ponto **O** (**O**<sub>1</sub>), o centro do hexágono, com o recurso à mediatriz do segmento de reta **[A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até **A**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **A**) ou **D**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **D**), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao polígono. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do hexágono, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros quatro vértices do polígono.

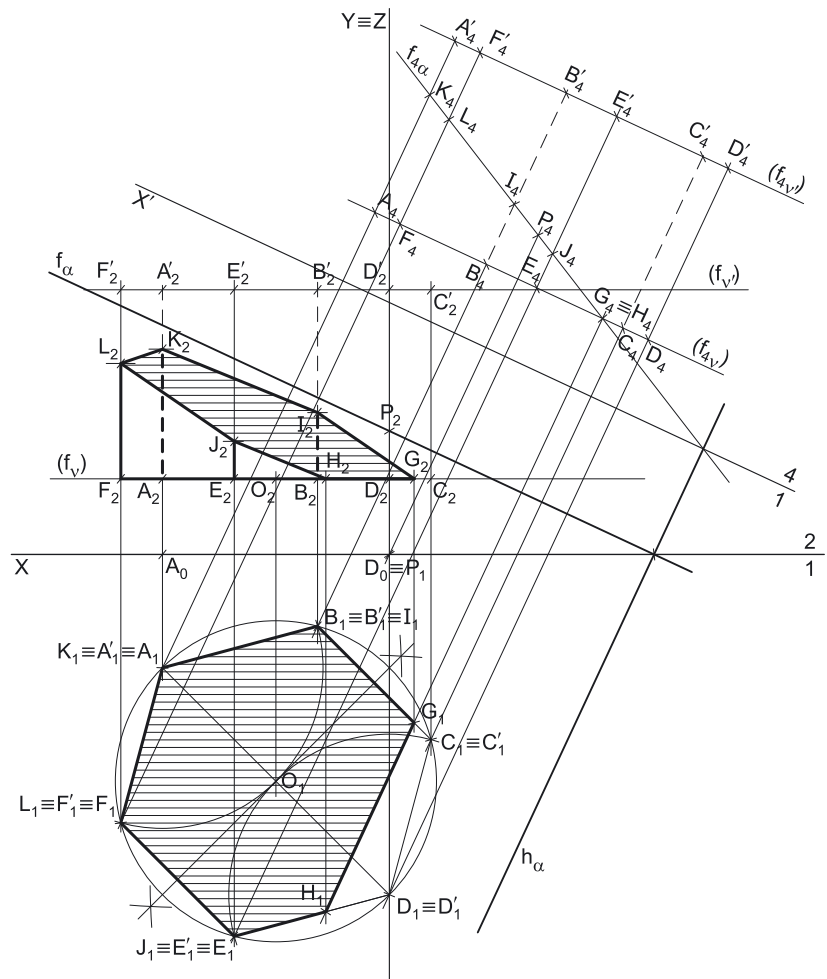
Em seguida nomearam-se os vértices do hexágono, em projeção horizontal, segundo a ordem apresentada no enunciado – o ponto **B** é o ponto de menor afastamento da figura, pelo que, por oposição, o ponto **E** é o vértice de maior afastamento do hexágono. Após a construção da projeção horizontal da figura, determinou-se a sua projeção frontal, que se reduz a um segmento de reta sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de um **prisma regular**, cujas bases são horizontais (de nível), pelo que as suas arestas laterais (bem como o seu eixo) estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases (que são retas verticais – retas projetantes horizontais). Assim, as projeções horizontais dos vértices da base superior (o hexágono **[A'B'C'D'E'F']**) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes do hexágono da base inferior, o que se assinalou imediatamente.

Por outro lado, uma vez que o prisma tem 5 cm de altura (que é a distância entre os planos que contêm as duas bases) e que a base inferior tem 2 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **D**), o plano que contém a base superior tem 7 cm de cota ( $2 + 5 = 7$ ), o que nos permitiu desenhar, de forma imediata, o traço frontal do plano  $v'$ . O plano  $v'$  é o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do prisma – o plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a projeção frontal do hexágono **[A'B'C'D'E'F']**, que se reduz a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. Por fim, a partir das projeções dos doze vértices do prisma, desenharam-se as suas duas projeções, começando pelos respetivos contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[CDEFF'E'D'C']**, cuja projeção frontal é o polígono **[C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>F'<sub>2</sub>E'<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A**, **B**, **A'** e **B'**. Estes quatro vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis** (em projeção frontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[BC]** e **[AF]** (da base inferior), as arestas **[A'B']**, **[B'C']** e **[A'F']** (da base superior), e as arestas laterais **[AA']** e **[BB']**. No entanto, todas estas arestas, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar. As arestas laterais **[DD']** e **[EE']** são visíveis (em projeção frontal), por se situarem na parte visível do sólido (os pontos **D**, **D'**, **E** e **E'** são os vértices de maior afastamento do prisma).

O **contorno aparente horizontal** é o hexágono **[A'B'C'D'E'F']**, cuja projeção horizontal é o hexágono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem seis vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – todos os vértices da base **[ABCDEF]**. Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes horizontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção horizontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projeção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida num prisma por um plano não projetante**) numa **secção produzida num prisma por um plano projetante**.

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual as bases do sólido se projetem em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, as bases projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, que, assim, deverá ser o plano de projeção a manter.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\alpha$ , de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_{\alpha}$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\alpha$  é um plano de topo (um plano projetante frontal).

Em seguida determinaram-se as projeções dos doze vértices do prisma no **plano 4** o que se processa a partir das respetivas cotas. **A<sub>4</sub>, B<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, D<sub>4</sub>, E<sub>4</sub> e F<sub>4</sub>** são, assim, as projeções dos pontos **A, B, C, D, E e F** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se das respetivas cotas, que se mantêm (os seis pontos têm 2 cm de cota, que é a cota da base inferior do prisma). Representou-se, ainda, o traço do plano  $\nu$  no **plano 4** ( $f_{4\nu}$ ), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices do hexágono **[ABCDEF]**. O plano  $\nu$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

**A'<sub>4</sub>, B'<sub>4</sub>, C'<sub>4</sub>, D'<sub>4</sub>, E'<sub>4</sub> e F'<sub>4</sub>** são, pelo seu lado, as projeções dos pontos **A', B', C', D', E' e F'** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se das respetivas cotas, que se mantêm (os seis pontos têm 7 cm de cota, que é a cota da base superior do prisma). Representou-se, ainda, o traço do plano  $\nu'$  no **plano 4** ( $f_{4\nu'}$ ), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices do hexágono **[A'B'C'D'E'F']**. O plano  $\nu'$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

A partir das projeções dos doze vértices do prisma no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção (as arestas laterais **[BB']** e **[CC']** são as invisibilidades a assinalar).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** –  $f_{4\alpha}$ . Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de  $f_{4\alpha}$  – o ponto **P**. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por considerar que **P** é o ponto de  $f_{4\alpha}$  que tem abcissa nula. **P<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **P** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **P<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **P<sub>2</sub>** ao eixo **X**. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** ( $f_{4\alpha}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_{\alpha}$  (que se situa no eixo **X'**) e **P<sub>4</sub>** (a nova projeção frontal do ponto **P**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta quatro arestas laterais do prisma (as arestas **[AA']**, **[BB']**, **[EE']** e **[FF']**), cortando ainda a base inferior do prisma em duas das suas arestas (as arestas **[BC]** e **[DE]**). Note que o plano  $\alpha$  (o plano secante) não corta a base superior do prisma. Assim, a figura da secção tem **seis vértices** – é um **hexágono**. No entanto, como o plano secante (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo aos planos das bases, a figura da secção **não é** um polígono geometricamente igual aos hexágonos das bases, pelo que, apesar de se tratar de um hexágono, a figura da secção **não é** um hexágono regular (pois o plano secante **não é paralelo** aos planos das bases)

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices da figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Assim, o ponto **G** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[BC]** (da base inferior), o ponto **H** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[DE]** (da base inferior), o ponto **I** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[BB']**, o ponto **J** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[EE']**, o ponto **K** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[AA']** e, por fim, o ponto **L** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[FF']**. Em seguida determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **G, H, I, J, K e L** (os seis vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, determinaram-se as projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, dos seis vértices da figura da secção. O ponto **G** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[BC]**, pelo que a sua projeção frontal (**G<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[BC]** (**[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**). O ponto **H** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[DE]**, pelo que a sua projeção frontal (**H<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[DE]** (**[D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>]**).

Este procedimento não pode ser utilizado para as restantes arestas, que estão contidas em retas verticais. Assim, as projeções frontais dos restantes vértices da figura da secção foram determinadas em função das cotas daqueles pontos, que se mantiveram. Nesse sentido, **I<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **I** (no **plano 2**) e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **I<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **I<sub>4</sub>** ao eixo **X'**. **J<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **J** (no **plano 2**) e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **J<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **J<sub>4</sub>** ao eixo **X'**. **K<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **K** (no **plano 2**) e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **K<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **K<sub>4</sub>** ao eixo **X'**. **L<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **L** (no **plano 2**) e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **L<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **L<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida desenharam-se as projeções da figura da secção. O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas).

**Determinação das projeções do sólido resultante da secção:**

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco do prisma inicial – o tronco do prisma compreendido entre o plano  $\alpha$  (o plano secante) e o Plano Horizontal de Projeção. Assim, a base inferior desse novo sólido é o hexágono [ABGHEF] e a sua face superior é hexágono [GHJLKI] (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [GHEFLKI], cuja projeção frontal é o polígono [G<sub>2</sub>H<sub>2</sub>E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>L<sub>2</sub>K<sub>2</sub>I<sub>2</sub>]. Em projeção frontal existem três vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices L, A e B. Os vértices A e B, por serem dos vértices de **menor afastamento** do sólido, são invisíveis, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [AB], [BC] e [AF] (da base inferior) e as arestas laterais [AK] e [BI]. No entanto, as arestas [AB], [BC] e [AF] estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, as invisibilidades a assinalar são as referentes às arestas [AK] e [BI].

O **contorno aparente horizontal** é o hexágono [GHJLKI], cuja projeção horizontal é o hexágono [G<sub>1</sub>H<sub>1</sub>J<sub>1</sub>L<sub>1</sub>K<sub>1</sub>I<sub>1</sub>]. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices A, B, E e F. Todos estes vértices, por serem dos vértices de **menor cota** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [BG], [AB], [AF], [EF] e [EH] (da base inferior), bem como as arestas laterais [BI], [AK], [FL] e [EJ]. No entanto, todas estas arestas ou são projetantes horizontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção horizontal.

A **figura da secção** é visível em ambas as projeções (a área do corte é visível em ambas as projeções), pelo que se assinalou esse facto preenchendo ambas as projeções da figura da secção com tracejado.

**Traçado:**

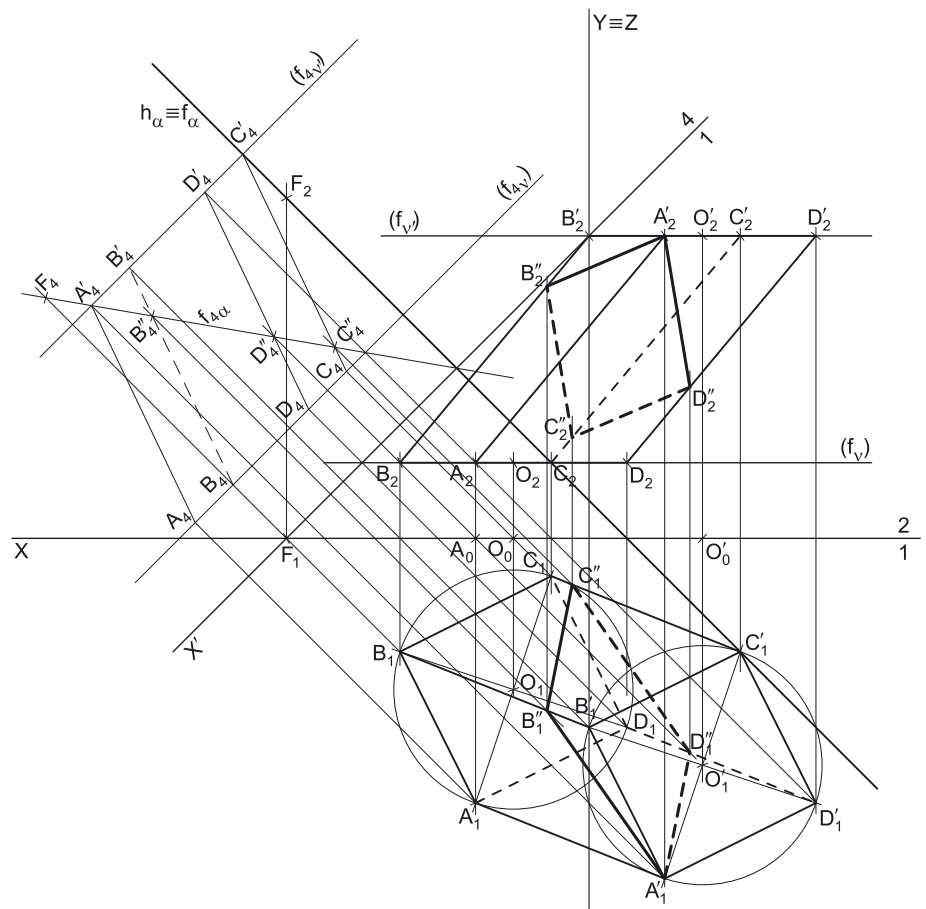
O eixo X representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo Y = Z representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\alpha$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases do prisma) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do prisma, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, para a determinação das projeções da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em ambas as projeções) executou-se a **leve**.

## 673.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos O, O' e A, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base inferior do prisma), pelo seu traço frontal ( $f_v$ ). O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por O<sub>2</sub> e por A<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos O e A, respetivamente). Representou-se, ainda, o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma), pelo seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O plano  $v'$  é, também, um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ) passa por O'<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto O'). Por fim, os planos  $v$  e  $v'$  não têm traço horizontal (são ambos paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que os seus traços frontais se identificaram entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços. O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Resolução:

### Determinação das projeções do prisma:

A base inferior do prisma (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com raio até  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao polígono. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros três vértices do polígono.

Em seguida nomearam-se os vértices do quadrado, em projeção horizontal, de forma arbitrária (pois o enunciado é omissivo), mas sequencial. Após a construção da projeção horizontal da figura, determinou-se a sua projeção frontal, que se reduz a um segmento de reta sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

As arestas laterais do prisma estão contidas em retas paralelas à reta suporte do eixo (que é a reta suporte do segmento de reta  $[OO']$ ). Assim, pelas projeções de cada um dos vértices do quadrado  $[ABCD]$  conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), que são paralelas às projeções homónimas do segmento  $[OO']$ . Os vértices da base superior (os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ ) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $v'$  (o plano da base superior) e foram determinados a partir das suas projeções frontais (pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal). Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do quadrado  $[A'B'C'D']$  (a base superior do prisma). Por fim, a partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se as suas duas projeções, começando pelos respetivos contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BADD'A'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2A_2D_2D'_2A'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $C$  e  $C'$ . Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[BC]$  e  $[CD]$  (da base inferior), as arestas  $[B'C']$  e  $[C'D']$  (da base superior), e a aresta lateral  $[CC']$ . A aresta lateral  $[AA']$  é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos  $A$  e  $A'$  são os vértices de maior afastamento do prisma). Note que as arestas  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[B'C']$  e  $[C'D']$ , apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção frontal).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[ABCC'D'A']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1B_1C_1C'_1D'_1A'_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices  $D$  e  $B'$ . O vértice  $D$ , por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AD]$  e  $[CD]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[DD']$ . O vértice  $B'$ , por ser um dos vértices de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[BB']$ .

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projeção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida num prisma por um plano não projetante**) numa **secção produzida num prisma por um plano projetante**.

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual as bases do sólido se projetem em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, as bases projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, que, assim, deverá ser o plano de projeção a manter.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\alpha$ , de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_{\alpha}$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\alpha$  é um plano de topo (um plano projetante frontal).

Em seguida determinaram-se as projeções dos oito vértices do prisma no **plano 4** o que se processa a partir das respetivas cotas.  $A_4$ ,  $B_4$ ,  $C_4$  e  $D_4$  são, assim, as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se das respetivas cotas, que se mantêm (os quatro pontos têm 2 cm de cota, que é a cota da base inferior do prisma). Representou-se, ainda, o traço do plano  $v$  no **plano 4** ( $f_{4,v}$ ), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices do quadrado  $[ABCD]$ . O plano  $v$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

$A'_4$ ,  $B'_4$ ,  $C'_4$  e  $D'_4$  são, pelo seu lado, as projeções dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se das respetivas cotas, que se mantêm (os quatro pontos têm 8 cm de cota, que é a cota da base superior do prisma). Representou-se, ainda, o traço do plano  $v'$  no **plano 4** ( $f_{4,v'}$ ), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$ . O plano  $v'$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

A partir das projeções dos oito vértices do prisma no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção (a aresta lateral  $[BB']$  é a única invisibilidade a assinalar).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** –  $f_{4\alpha}$ . Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de  $f_{4\alpha}$  – o ponto **F**.  $F_4$  é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** ( $f_{4\alpha}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_\alpha$  (que se situa no eixo  $X'$ ) e  $F_4$  (a nova projeção frontal do ponto **F**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as quatro arestas laterais do prisma, não cortando qualquer das duas bases do sólido. De uma forma mais precisa, o plano  $\alpha$  corta a base superior num único ponto, que é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral  $[AA']$ . Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero** (mas não é um quadrado, pois o plano secante **não é paralelo** aos planos das bases).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção no plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Assim, o **próprio ponto A'** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral  $[AA']$ , o ponto **B''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral  $[BB']$ , o ponto **C''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral  $[CC']$  e, por fim, o ponto **D''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral  $[DD']$ . Em seguida determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **A'**, **B''**, **C''** e **D''** (os quatro vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, determinaram-se as projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, dos quatro vértices da figura da secção. A projeção frontal do ponto **A'** já é conhecida. O ponto **B''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta  $[BB']$ , pelo que a sua projeção frontal ( $B''_2$ ) se situa sobre a projeção frontal da aresta  $[BB']$  ( $[B_2B'_2]$ ). O ponto **C''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta  $[CC']$ , pelo que a sua projeção frontal ( $C''_2$ ) se situa sobre a projeção frontal da aresta  $[CC']$  ( $[C_2C'_2]$ ). O ponto **D''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta  $[DD']$ , pelo que a sua projeção frontal ( $D''_2$ ) se situa sobre a projeção frontal da aresta  $[DD']$  ( $[D_2D'_2]$ ).

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as duas projeções da figura. O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$ . Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados  $[B''C'']$  e  $[C''D'']$ ). Os lados  $[A'B'']$  e  $[A'D'']$  da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por se situarem em faces do prisma que são visíveis em projeção frontal (as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$ , respetivamente).

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  do prisma são **invisíveis**, em projeção horizontal. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces laterais são **invisíveis**, em projeção horizontal (os lados  $[A'D'']$  e  $[C''D'']$ ). Os lados  $[A'B'']$  e  $[B''C'']$  da figura da secção são **visíveis**, em projeção horizontal, por se situarem em faces do prisma que são visíveis em projeção horizontal (as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ , respetivamente).

#### Traçado:

As projeções do prisma e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\alpha$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases do prisma) representaram-se a **leve**, pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação da figura da secção).

## 674.

### Dados:

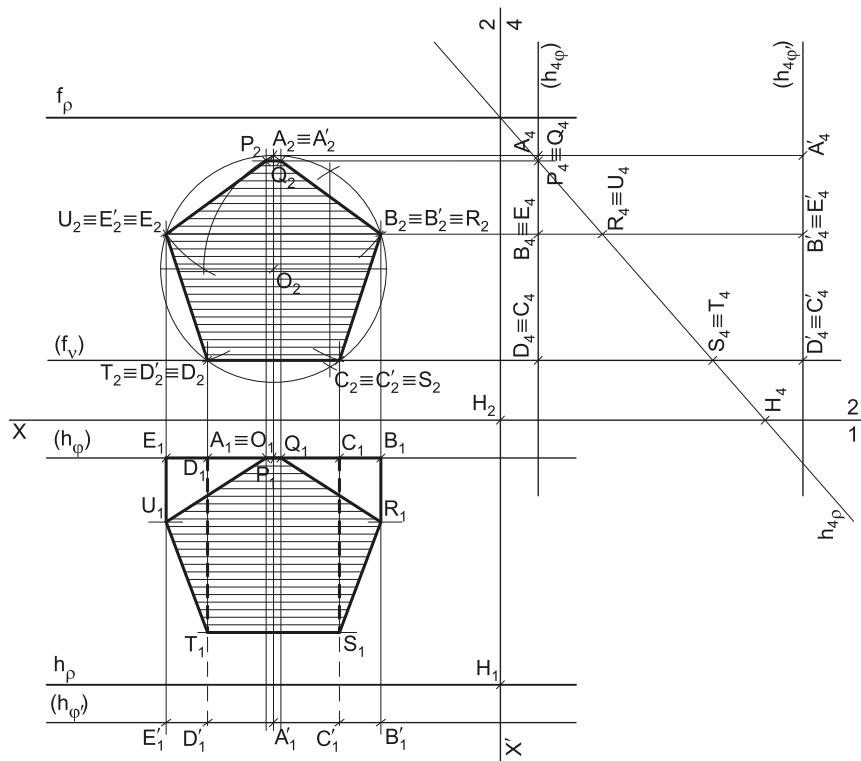
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados, bem como o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do prisma), pelo seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\rho$  (o plano secante), pelos seus traços.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

A base de menor afastamento do prisma (o pentágono regular **[ABCDE]**) está contida num plano frontal (de frente), pelo que o pentágono **[ABCDE]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao polígono. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do pentágono, inscrito na circunferência, e em função dos dados, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros quatro vértices do polígono. Note que se atendeu ao facto referido no enunciado de que uma das faces laterais do prisma (a sua face de menor cota – a face mais próxima do Plano Horizontal de Projeção) está contida num plano horizontal (de nível), pelo que o lado inferior do pentágono é fronto-horizontal.



Em seguida nomearam-se os vértices do pentágono, em projeção frontal, de forma arbitrária (pois o enunciado é omissivo), mas sequencial. Após a construção da projeção frontal da figura, determinou-se a sua projeção horizontal, que se reduz a um segmento de reta sobre  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Trata-se de um **prisma regular**, cujas bases são frontais (de frente), pelo que as suas arestas laterais (bem como o seu eixo) estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases (que são retas de topo – retas projetantes frontais). Assim, as projeções frontais dos vértices da base de maior afastamento (o pentágono **[A'B'C'D'E']**) têm as suas projeções frontais coincidentes com as projeções frontais dos vértices correspondentes do pentágono **[ABCDE]**, o que se assinalou imediatamente.

Por outro lado, uma vez que o prisma tem 7 cm de altura (que é a distância entre os planos que contêm as duas bases) e que a base de menor afastamento tem 1 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**), o plano que contém a base de maior afastamento tem 8 cm de afastamento ( $1 + 7 = 8$ ), o que nos permitiu desenhar, de forma imediata, o traço horizontal do plano  $\varphi'$ . O plano  $\varphi'$  é o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do prisma – o plano  $\varphi'$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a projeção horizontal do pentágono **[A'B'C'D'E']**, que se reduz a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. Por fim, a partir das projeções dos dez vértices do prisma, desenharam-se as suas duas projeções, começando pelos respetivos contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o pentágono **[A'B'C'D'E']**, cuja projeção frontal é o pentágono **[A'2B'2C'2D'2E'2]**. Em projeção frontal existem cinco vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – todos os vértices da base **[ABCDE]**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[BAEE'A'B']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B1A1E1E'1A'1B'1]**. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **C, D, C' e D'**. Estes quatro vértices, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis** (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[BC]**, **[CD]** e **[DE]** (da base de menor afastamento), as arestas **[B'C']**, **[C'D']** e **[D'E']** (da base de maior afastamento), e as arestas laterais **[CC']** e **[DD']**. No entanto, as arestas **[BC]**, **[CD]**, **[DE]**, **[B'C']**, **[C'D']** e **[D'E']**, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, as invisibilidades a assinalar são as referentes às arestas laterais **[CC']** e **[DD']**. A aresta lateral **[AA']** é visível (em projeção horizontal), por se situar na parte visível do sólido (os pontos **A** e **A'** são os vértices de maior cota do prisma).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projeção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida num prisma por um plano não projetante**) numa **secção produzida num prisma por um plano projetante**.

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual as bases do sólido se projetem em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, as bases projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, que, assim, deverá ser o plano de projeção a manter.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\rho$ , de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano vertical (um plano projetante horizontal).

Em seguida determinaram-se as projeções dos dez vértices do prisma no **plano 4** o que se processa a partir dos respetivos afastamentos. **A<sub>4</sub>, B<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, D<sub>4</sub> e E<sub>4</sub>**, são, assim, as projeções dos pontos **A, B, C, D e E** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se dos respetivos afastamentos, que se mantêm (os cinco pontos têm 1 cm de afastamento, que é o afastamento do plano  $\phi$ ). Representou-se, ainda, o traço do plano  $\phi$  no **plano 4** (**h<sub>4 $\phi$</sub>** ), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices do pentágono **[ABCDE]**. O plano  $\phi$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano frontal (de frente), pelo que continua a ser um plano projetante horizontal.

**A'<sub>4</sub>, B'<sub>4</sub>, C'<sub>4</sub>, D'<sub>4</sub>, e E'<sub>4</sub>** são, pelo seu lado, as projeções dos pontos **A', B', C', D' e E'** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se dos respetivos afastamentos, que se mantêm (os cinco pontos têm 8 cm de afastamento, que é o afastamento do plano  $\phi'$ ). Representou-se, ainda, o traço do plano  $\phi'$  no **plano 4** (**h<sub>4 $\phi'$</sub>** ), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices do pentágono **[A'B'C'D'E']**. O plano  $\phi'$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano frontal (de frente), pelo que continua a ser um plano projetante horizontal.

A partir das projeções dos dez vértices do prisma no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, atendendo a que, no novo plano de projeção (no **plano 4**), não existe qualquer invisibilidade a assinalar.

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** – **h<sub>4 $\rho$</sub>** . Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de **h<sub>4 $\rho$</sub>**  – o ponto **H**. **H<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **H** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **H<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **H<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 7 cm – o afastamento de **h<sub>4 $\rho$</sub>** ). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** (**h<sub>4 $\rho$</sub>** ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com **f<sub>4 $\rho$</sub>**  (que se situa no eixo **X'**) e **H<sub>4</sub>** (a nova projeção horizontal do ponto **H**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta quatro arestas laterais do prisma (as arestas **[BB']**, **[CC']**, **[DD']** e **[EE']**), cortando ainda a base de menor afastamento do prisma em duas das suas arestas (as arestas **[AB]** e **[AE]**). Note que o plano  $\rho$  (o plano secante) não corta a base de maior afastamento do prisma. Assim, a figura da secção tem **seis vértices** – é um **hexágono**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices da figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**, o plano  $\rho$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal. Assim, o ponto **P** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AE]** (da base de menor afastamento), o ponto **Q** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AB]** (da base de menor afastamento), o ponto **R** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[BB']**, o ponto **S** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[CC']**, o ponto **T** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[DD']** e, por fim, o ponto **U** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[EE']**. Em seguida determinaram-se as projeções frontais (no **plano 2**) dos pontos **P, Q, R, S, T** e **U** (os seis vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Salienta-se que as arestas **[AB]** e **[AE]**, da base de menor afastamento, têm as suas projeções horizontais (no **plano 4**) coincidentes, mas, de facto, o plano secante corta a base naquelas duas arestas (cujas projeções horizontais estão coincidentes) e não apenas numa única aresta, o que, nesta situação, seria impossível. De forma semelhante, também as arestas laterais **[CC']** e **[DD']** têm as suas projeções horizontais (no **plano 4**) coincidentes, tal como as arestas laterais **[BB']** e **[EE']**.

Por fim, determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**), no diedro de projeção inicial, dos seis vértices da figura da secção. O ponto **P** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AE]**, pelo que a sua projeção horizontal (**P<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[AE]** (**[A<sub>1</sub>E<sub>1</sub>]**). O ponto **Q** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AB]**, pelo que a sua projeção horizontal (**Q<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[AB]** (**[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>]**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Este procedimento não pode ser utilizado para as restantes arestas, que estão contidas em retas de topo. Assim, as projeções horizontais dos restantes vértices da figura da secção foram determinadas em função dos afastamentos daqueles pontos, que se mantiveram. Nesse sentido,  $R_1$  é a projeção horizontal do ponto  $R$  (no plano 1) e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $R_1$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $R_4$  ao eixo  $X'$ .  $S_1$  é a projeção horizontal do ponto  $S$  (no plano 1) e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $S_1$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $S_4$  ao eixo  $X'$ .  $T_1$  é a projeção horizontal do ponto  $T$  (no plano 1) e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $T_1$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $T_4$  ao eixo  $X'$ .  $U_1$  é a projeção horizontal do ponto  $U$  (no plano 1) e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $U_1$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $U_4$  ao eixo  $X'$ .

Em seguida desenharam-se as projeções da figura da secção. O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas).

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco do prisma inicial – o tronco do prisma compreendido entre o plano  $\rho$  (o plano secante) e o Plano Frontal de Projeção. Assim, a base de menor afastamento desse novo sólido é o hexágono  $[PQBCDE]$  e a sua face de maior afastamento é hexágono  $[PQRSTU]$  (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é o hexágono  $[PQRSTU]$ , cuja projeção frontal é o hexágono  $[P_2Q_2R_2S_2T_2U_2]$ . Em projeção frontal existem quatro vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ . Todos estes vértices, por serem dos vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[QB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DE]$  e  $[EP]$  (da base de menor afastamento), bem como as arestas laterais  $[BR]$ ,  $[CS]$ ,  $[DT]$  e  $[EU]$ . No entanto, todas estas arestas ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é o hexágono  $[GHJLKI]$ , cuja projeção horizontal é o hexágono  $[G_1H_1J_1L_1K_1I_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices  $C$  e  $D$ . Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são invisíveis (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[BC]$ ,  $[CD]$  e  $[DE]$  (da base  $[PQBCDE]$ ) e as arestas laterais  $[CS]$  e  $[DT]$ . No entanto, as arestas  $[BC]$ ,  $[CD]$  e  $[DE]$  estão ocultas (em projeção horizontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção horizontal, as invisibilidades a assinalar são as referentes às arestas  $[CS]$  e  $[DT]$ .

A **figura da secção** é visível em ambas as projeções (a área do corte é visível em ambas as projeções), pelo que se assinalou esse facto preenchendo ambas as projeções da figura da secção com tracejado.

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os traços do plano secante (o plano  $\rho$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. Os traços horizontais dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  (os planos que contêm as bases do prisma) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do prisma, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, para a determinação das projeções da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em ambas as projeções) executou-se a **leve**.

## 675.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante) pelos seus traços. O plano  $\alpha$  contém o ponto **A**, que é um ponto com cota nula, pelo que o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) passa necessariamente pelo ponto **A** (pela sua projeção horizontal – **A**<sub>1</sub>). O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

**Resolução:***Determinação das projeções do cubo:*

O quadrado **[ABCD]** está contido no Plano Horizontal de Projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Por outro lado, atendendo a que uma das faces do cubo está contida no Plano Frontal de Projeção (e a face **[ABCD]** está contida no Plano Horizontal de Projeção), uma das arestas do cubo (um dos lados do quadrado **[ABCD]**) está necessariamente contida no eixo **X**. Assim, o lado **[AB]** do quadrado **[ABCD]** é paralelo ao eixo **X** (é fronto-horizontal). Por outro lado, uma vez que o ponto **A** tem 5 cm de afastamento (que é, na prática, a distância do ponto **A** ao eixo **X**), é possível depreender que o quadrado tem 5 cm de lado, que é a medida da aresta do cubo.

Assim, por **A**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **A**) conduziu-se uma paralela ao eixo **X** (a reta suporte do lado **[AB]**), sobre a qual se mediram os 5 cm (em qualquer das projeções), o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **B**. A partir de **A**<sub>1</sub> e **B**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do quadrado, sendo que os seus vértices **C** e **D** se situam no eixo **X**. A projeção frontal do quadrado situa-se sobre o eixo **X**, pois todos os vértices do quadrado têm cota nula (o quadrado está contido no Plano Horizontal de Projeção).

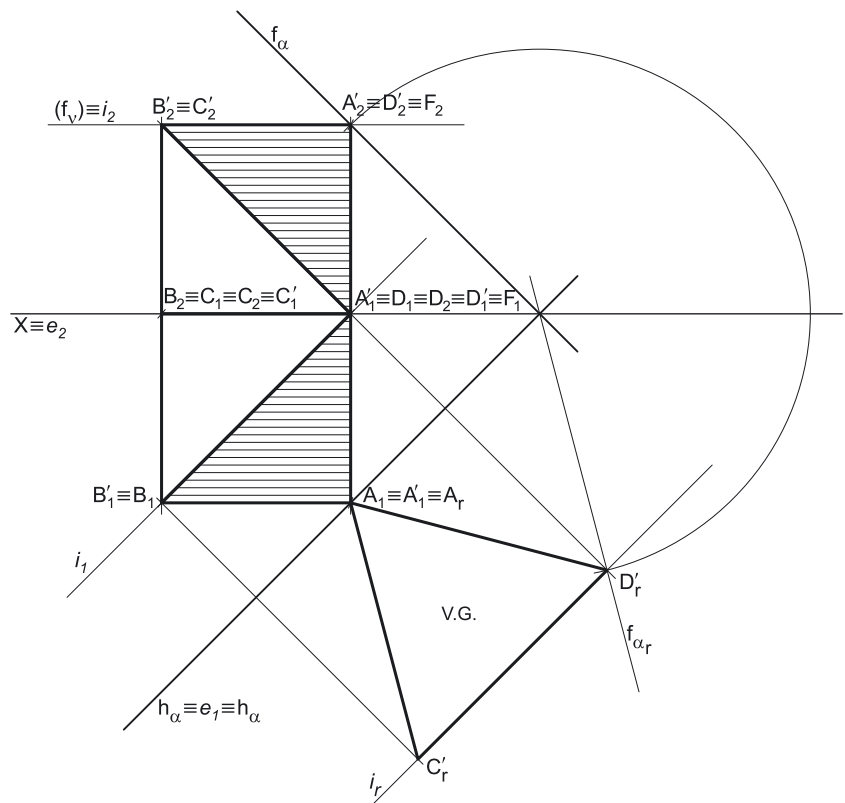
Em seguida, representou-se o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a face superior do cubo (o quadrado **[A'B'C'D']**). A distância entre os dois planos é a medida da aresta do cubo (que é 5 cm). Atendendo a que o plano que contém a face inferior do cubo tem cota nula (é o próprio Plano Horizontal de Projeção), o plano  $v$  (o plano que contém a face superior do cubo) tem 5 cm de cota ( $0 + 5 = 5$ ). Este raciocínio permitiu-nos desenhar o traço frontal do plano  $v$  – o plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) se representou entre parêntesis.

Tendo em conta que as arestas do cubo que não pertencem àquelas duas faces estão contidas em retas projetante horizontais (retas verticais), as projeções horizontais dos vértices do quadrado **[A'B'C'D']** determinam-se imediatamente – estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices do quadrado **[ABCD]**. Por outro lado, tendo em conta que o plano  $v$  (o plano que contém o quadrado **[A'B'C'D']**) é um plano projetante frontal, a determinação das projeções frontais dos vértices daquele quadrado processa-se também de forma direta. Note que, na prática, se tratou de determinar os pontos de interseção de retas projetantes horizontais (as retas suporte das arestas verticais do cubo) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).

A partir dos oito vértices do cubo, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o quadrado **[AA'B'B]** (que é, afinal, a face **[AA'B'B]**), cuja projeção frontal é o quadrado **[A<sub>2</sub>A<sub>2</sub>'B<sub>2</sub>'B<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existem quatro vértices que não integram o contorno aparente frontal – todos os vértices da face **[CC'D'D]**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do cubo, são **invisíveis** bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles quatro vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas do cubo que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado **[A'B'C'D']** (a própria face **[A'B'C'D']**), cuja projeção horizontal é o quadrado **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>'C<sub>1</sub>'D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – todos os vértices da face **[ABCD]**. Estes, por serem os vértices de **menor cota** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes horizontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção horizontal.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## a) Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Poder-se-ia ter optado por recorrer a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar o plano secante num plano projetante. No entanto, optou-se por resolver o exercício com o recurso ao **método misto**.

Assim, Em primeiro lugar, averiguou-se se o plano secante (o plano  $\alpha$ ) corta as faces horizontais (de nível) do cubo. Nesse sentido, começou-se por se determinar as retas de interseção do plano  $\alpha$  com os planos que contêm as faces horizontais (de nível) do sólido. A reta de interseção do plano  $\alpha$  com o Plano Horizontal de Projeção (o plano que contém a face inferior do cubo) é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que já havia sido determinada. O traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) contém o ponto **A** e não corta a face [ABCD] em mais nenhum ponto, pelo que o ponto **A** é o único ponto em que o plano  $\alpha$  corta a face inferior do cubo. Já temos **um ponto** da figura da secção.

A reta de interseção do plano  $\alpha$  com o plano  $v$  (o plano que contém a face superior do cubo) é a reta  $i$ . A reta  $i$ , porque pertence ao plano  $v$ , tem a sua projeção frontal ( $i_2$ ) sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Por outro lado, uma vez que a reta  $i$  pertence ao plano  $\alpha$ , e porque todos os pontos da reta  $i$  têm a mesma cota, depreende-se que a reta  $i$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , pelo que é paralela a todas as retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ . Por fim, porque a reta  $i$  pertence ao plano  $\alpha$ , a reta  $i$  tem o seu traço frontal (o ponto **F**) sobre o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ). Assim, a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ).

A reta  $i$  corta o quadrado [A'B'C'D'] em dois pontos – os pontos **B'** e **D'**. Já temos mais dois pontos da figura da secção, o que perfaz um total de **três pontos**.

O plano  $\alpha$  corta a face [AA'B'B] segundo o segmento [AB'] (que é uma diagonal dessa face). O plano  $\alpha$  corta a face [A'B'C'D'] segundo o segmento [B'D'] (que é uma diagonal dessa face). O plano  $\alpha$  corta a face [AA'D'D] segundo o segmento [AD'] (que é uma diagonal dessa face). Conclui-se que o plano  $\alpha$  não corta mais nenhuma face do cubo – a figura da secção tem três vértices e é o **triângulo** [AB'D']. A partir das projeções dos três vértices da figura da secção, desenharam-se as duas projeções da figura.

## Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cubo cuja face inferior é o quadrado [ABCD] e cuja face superior é o triângulo [B'C'D'] (que é, afinal, a parte do sólido compreendida entre o plano  $\alpha$  e os planos de projeção. Note que o triângulo [AB'D'] (a figura da secção) é uma face deste novo sólido – a sua face superior.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [ABB'D'], cuja projeção frontal é o polígono [A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>]. Em projeção frontal existem três vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices **C**, **C'** e **D**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal). Já a aresta [AB'] é visível, em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal – as faces [ABB'] e [AB'D'].

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [AB'C'D'], cuja projeção horizontal é o polígono [A<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>]. Em projeção horizontal existem três vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices **B**, **C** e **D**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes horizontais ou estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal). Já a aresta [B'D'] é visível, em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal – as faces [B'C'D'] e [AB'D'].

A **figura da secção**, porque é visível em ambas as projeções (a área do corte é visível em ambas as projeções), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em ambas as projeções).

## b) Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas). Nesse sentido, para se determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção – a charneira foi  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_f \equiv h_{\alpha_f}$ . O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_f \equiv A_1$ .

Note que se trata do rebatimento de um plano oblíquo. Assim, os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos verticais, ortogonal a  $h_\alpha$ . Nesse sentido, os arcos do rebatimento dos diferentes pontos não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Optou-se por rebater o plano  $\alpha$  pelo rebatimento dos seus traços. Nesse sentido, há que rebater o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), o que se processa rebatendo um dos seus pontos – o ponto **D'**, por exemplo.

Nesse sentido, por **D'<sub>1</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do seu rebatimento). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (no eixo **X**) e com raio até **D'<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **D'**), transportou-se essa distância para a perpendicular à charneira, onde se situa **D'<sub>f</sub>** (o ponto **D'** rebatido).

Por fim, para rebater o ponto **B'** há que rebater uma reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto **B'** pertença – a reta  $i$ , por exemplo. Assim, por **D'<sub>f</sub>** conduziu-se a reta  $i_f$  (a reta  $i$  rebatida), paralela a  $h_{\alpha_f}$  – a reta  $i_f$  está definida por um ponto (o ponto **D'<sub>f</sub>**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ , em rebatimento). Por fim, uma vez que o ponto **B'** é um ponto da reta  $i$ , por **B'<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B'**) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **B'<sub>f</sub>** (o ponto **B'** rebatido) sobre a reta  $i_f$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A partir das projeções de todos os vértices do sólido desenharam-se as suas duas projeções, começando-se pelos seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o quadrado  $[A'B'C'D']$  (que corresponde à face de maior afastamento do sólido), cuja projeção frontal é o quadrado  $[A'_2B'_2C'_2D'_2]$ . Em projeção frontal, existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A**, **B**, **C** e **D**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1D'_1C'_1B'_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **A'**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da face de menor afastamento), as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da face de maior afastamento), e a aresta  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'D']$  estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar em projeção horizontal é a referente à aresta  $[AA']$ . Por outro lado, a aresta  $[CC']$  é **visível** (em projeção horizontal), pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (note que os pontos **C** e **C'** são os vértices de maior cota do cubo).

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o  $\beta_{1/3}$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Poder-se-ia ter optado por recorrer a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar o plano secante num plano projetante. No entanto, optou-se por resolver o exercício com o recurso ao **método misto**.

Assim, Em primeiro lugar, averiguou-se se o plano secante (o  $\beta_{1/3}$ ) corta as faces frontais (de frente) do cubo. Nesse sentido, começou-se por se determinar as retas de interseção do  $\beta_{1/3}$  com os planos que contêm as faces frontais do sólido. A reta de interseção do  $\beta_{1/3}$  com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a face de menor afastamento do cubo) é a reta  $i$ . A reta  $i$  é uma reta fronto-horizontal, pois a “família” das retas fronto-horizontais é a única “família” de retas que o plano  $\varphi$  e o  $\beta_{1/3}$  têm em comum. A reta  $i$ , porque pertence ao plano  $\varphi$ , tem a sua projeção horizontal ( $i_1$ ) sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. Por outro lado, uma vez que a reta  $i$  pertence ao  $\beta_{1/3}$ , a reta  $i$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, o que nos permitiu determinar a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ). A reta  $i$  corta o quadrado  $[ABCD]$  em dois pontos, pelo que o  $\beta_{1/3}$  corta a face  $[ABCD]$  em dois pontos.

A reta  $i$  corta o quadrado  $[ABCD]$  em dois pontos – o ponto **B** (que é um dos vértices do quadrado) e o ponto **P**. O ponto **P** é o ponto em que a reta  $i$  interseca a aresta  $[AD]$ , pelo que **P** é o ponto em que o  $\beta_{1/3}$  corta a aresta  $[AD]$  do cubo. Já temos **dois pontos** da figura da secção.

A reta de interseção do  $\beta_{1/3}$  com o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a face de maior afastamento do cubo) é a reta  $i'$ . A reta  $i'$  é outra reta fronto-horizontal, pois a “família” das retas fronto-horizontais é também a única “família” de retas que o plano  $\varphi'$  e o  $\beta_{1/3}$  têm em comum. A reta  $i$ , porque pertence ao plano  $\varphi'$ , tem a sua projeção horizontal ( $i'_1$ ) sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. Por outro lado, uma vez que a reta  $i'$  pertence ao  $\beta_{1/3}$ , a reta  $i'$  tem também as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, o que nos permitiu determinar a projeção frontal da reta  $i'$  ( $i'_2$ ). A reta  $i'$  é exterior ao quadrado  $[A'B'C'D']$ , pelo que o  $\beta_{1/3}$  não corta a face  $[A'B'C'D']$  do cubo.

Em seguida determinou-se a reta de interseção do  $\beta_{1/3}$  com o plano que contém a face  $[BB'C'C]$  do cubo. Para tal, identificou-se o esse plano (o plano  $\theta$ ) pelos seus traços. O plano  $\theta$  é um plano de topo (projetante frontal). A reta  $a$  é a reta de interseção do  $\beta_{1/3}$  com o plano  $\theta$ . A reta  $a$ , porque pertence ao plano  $\theta$ , tem a sua projeção frontal ( $a_2$ ) sobre o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. Por outro lado, uma vez que a reta  $a$  pertence ao  $\beta_{1/3}$ , a reta  $a$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_1$ ) – a reta  $a$  é necessariamente uma reta passante. A reta  $a$  interseca a aresta  $[CC']$  no ponto **Q**, pelo que o  $\beta_{1/3}$  corta a aresta  $[CC']$  no ponto **Q**. Já temos mais um ponto da figura da secção, o que perfaz um total de **três pontos**. Note que a reta  $a$  passa necessariamente pelo ponto **B**, que já é um ponto da secção (como anteriormente se expôs).

Por fim, determinou-se a reta de interseção do  $\beta_{1/3}$  com o plano que contém a face  $[AA'D'D]$  do cubo. Para tal, identificou-se o esse plano (o plano  $\delta$ ) pelos seus traços. O plano  $\delta$  é outro plano de topo (projetante frontal). A reta  $b$  é a reta de interseção do  $\beta_{1/3}$  com o plano  $\delta$ . A reta  $b$ , porque pertence ao plano  $\delta$ , tem a sua projeção frontal ( $b_2$ ) sobre o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), pois o plano  $\delta$  é um plano projetante frontal. Por outro lado, uma vez que a reta  $b$  pertence ao  $\beta_{1/3}$ , a reta  $b$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_1$ ). A reta  $b$  interseca a aresta  $[DD']$  no ponto **R**, pelo que o  $\beta_{1/3}$  corta a aresta  $[DD']$  no ponto **R**. Já temos mais um ponto da figura da secção, o que perfaz um total de **quatro pontos**. Note que a reta  $b$  passa necessariamente pelo ponto **P**, que já é um ponto da secção (como anteriormente se expôs).

Conclui-se, assim, que a figura da secção tem quatro vértices, pelo que é um quadrilátero (mas não é um quadrado, pois o plano secante não é paralelo a nenhuma das faces do cubo). Assim, a partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as suas projeções (o quadrilátero  $[PBQR]$ ).

### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cubo cuja face de menor afastamento é o triângulo  $[ABP]$  e cuja face de maior afastamento é o quadrado  $[A'B'C'D']$  (que é, afinal, a parte do sólido compreendida entre o  $\beta_{1/3}$  e o Plano Horizontal de Projeção). Note que o quadrilátero  $[PBQR]$  (a figura da secção) é uma face deste novo sólido – a sua face superior.

O **contorno aparente frontal** é o quadrado  $[A'B'C'D']$ , cuja projeção frontal é o quadrado  $[A'_2B'_2C'_2D'_2]$ . Em projeção frontal existem cinco vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A**, **B**, **Q**, **R** e **P**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), à excepção da aresta  $[PB]$ , pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta  $[PB]$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

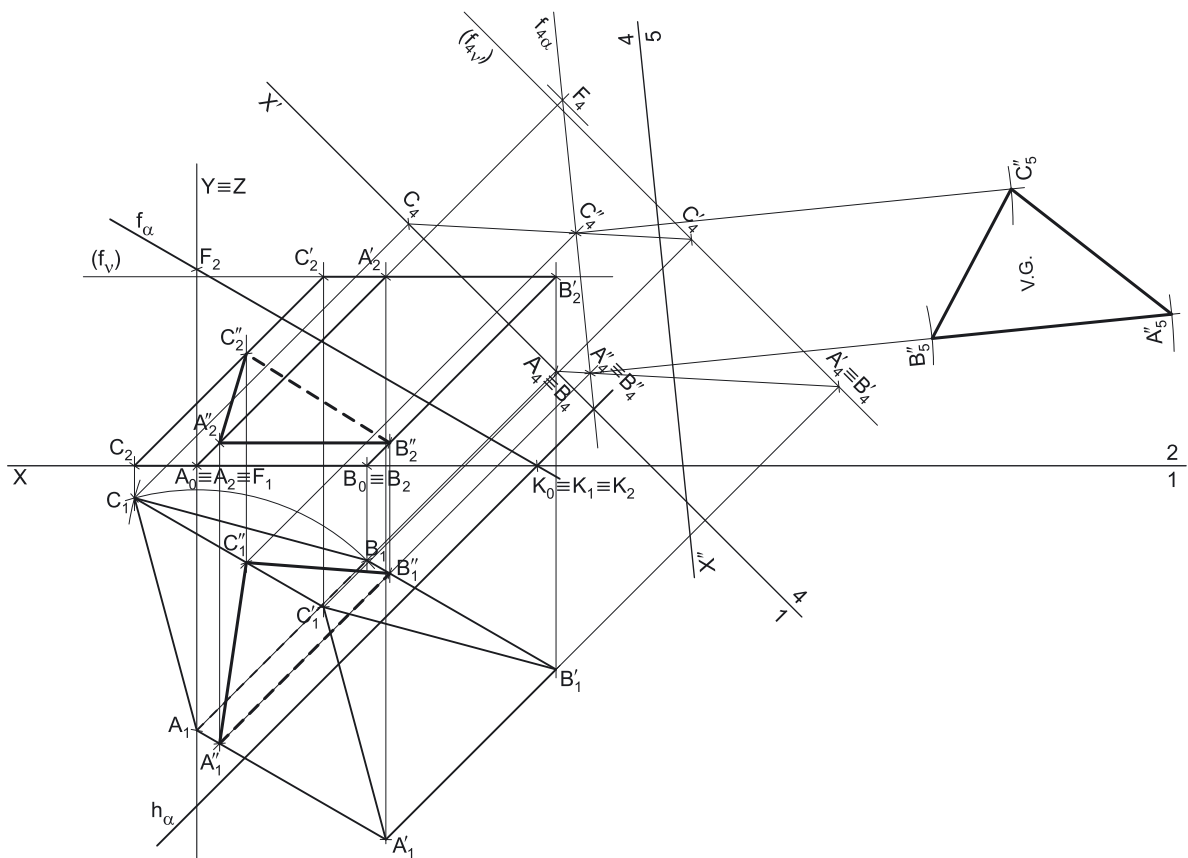
O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[PBB'C'D'R]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[P_1B_1B'_1C'_1D'_1R_1]$ . Em projeção horizontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices  $A$ ,  $A'$  e  $Q$ . Os vértices  $A$  e  $A'$ , por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AP]$  e  $[AB]$  (da face de menor afastamento), as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da face de maior afastamento) e a aresta  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AP]$ ,  $[AB]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'D']$  estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal, é a referente à aresta  $[AA']$ . O vértice  $Q$ , por sua vez, é um dos vértices de maior cota do sólido, pelo que é visível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[QC']$ ,  $[QR]$  e  $[QB]$ .

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo  $X$  (em projeção horizontal).

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cubo, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). Os traços horizontais dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  (os planos que contêm as faces frontais do cubo) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos planos  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\delta$  e, ainda, das retas  $i$ ,  $i'$ ,  $a$  e  $b$ ). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 677.



#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $K$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do prisma:

A base inferior do prisma (o triângulo  $[ABC]$ ) está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, partir de  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do triângulo, garantindo-se que o ponto  $C$  tem abcissa positiva, como o enunciado refere expressamente. A projeção frontal do triângulo situa-se no eixo  $X$ , pois todos os vértices do triângulo têm cota nula (o triângulo situa-se no Plano Horizontal de Projeção).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Atendendo a que o prisma tem 5 cm de altura (que é a distância entre os planos que contêm as duas bases) e que a base inferior tem cota nula (está contida no Plano Horizontal de Projeção), o plano que contém a base superior tem 5 cm de cota ( $0 + 5 = 5$ ), o que nos permitiu desenhar, de forma imediata, o traço frontal do plano  $v$ . O plano  $v$  é, assim, o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do prisma – o plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

É dada a direção das arestas laterais do prisma. Assim, pelas projeções de cada um dos vértices do triângulo **[ABC]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram). Os vértices da base superior (os pontos **A'**, **B'** e **C'**) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $v$  (o plano da base superior) e foram determinados a partir das suas projeções frontais (pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal). Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do triângulo **[A'B'C']** (a base superior do prisma). Por fim, a partir das projeções dos seis vértices do prisma, desenharam-se as suas duas projeções, começando pelos respetivos contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[CABB'CA'C']**, cuja projeção frontal é o polígono **[C<sub>2</sub>A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>]**. Todos os vértices do prisma integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[BC]** (da base inferior) é invisível, por se situar na parte invisível do sólido (separa duas faces do sólido que são invisíveis em projeção frontal – a base inferior e a face lateral **[BB'C'C]**). No entanto, esta aresta está oculta por arestas do sólido que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Já a aresta lateral **[AA']** é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos **A** e **A'** são os vértices de maior afastamento do prisma).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ACBB'A']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **C'**. Este vértice, por ser um dos vértices de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'C']** e **[B'C']**, da base superior, e a aresta lateral **[CC']**. Já a aresta **[AB]** (da base inferior) é invisível, por se situar na parte invisível do sólido (separa duas faces do sólido que são invisíveis em projeção horizontal – a base inferior e a face lateral **[AA'B'B]**).

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projeção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida num prisma por um plano não projetante**) numa **secção produzida num prisma por um plano projetante**.

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual as bases do sólido se projetem em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, as bases projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, que, assim, deverá ser o plano de projeção a manter.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\alpha$ , de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte: – no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**); – no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\alpha$  (**h<sub>α</sub>**). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\alpha$  é um plano de topo (um plano projetante frontal).

Em seguida determinaram-se as projeções dos seis vértices do prisma no **plano 4** o que se processa a partir das respetivas cotas. **A<sub>4</sub>**, **B<sub>4</sub>** e **C<sub>4</sub>** são, assim, as projeções dos pontos **A**, **B** e **C** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se das respetivas cotas, que se mantêm – como os pontos têm cota nula, as suas projeções no **plano 4** situam-se no eixo **X'**.

**A'<sub>4</sub>**, **B'<sub>4</sub>** e **C'<sub>4</sub>** são, pelo seu lado, as projeções dos pontos **A'**, **B'** e **C'** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se das respetivas cotas, que se mantêm (os três pontos têm 5 cm de cota, que é a cota da base superior do prisma). Representou-se, ainda, o traço do plano  $v$  no **plano 4** (**f<sub>4,v</sub>**), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices do triângulo **[A'B'C']**. O plano  $v$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

A partir das projeções dos seis vértices do prisma no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, atendendo a que, no novo plano de projeção (no **plano 4**), não existe qualquer invisibilidade a assinalar.

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** – **f<sub>4,α</sub>**. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de **f<sub>4,α</sub>** – o ponto **F**. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por considerar o ponto **F** como o ponto de **f<sub>4,α</sub>** que tem abcissa nula. **F<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **F<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **F<sub>2</sub>** ao eixo **X**. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** (**f<sub>4,α</sub>**) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com **h<sub>α</sub>** (que se situa no eixo **X'**) e **F<sub>4</sub>** (a nova projeção frontal do ponto **F**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as três arestas laterais do prisma, não cortando qualquer das duas bases do sólido. Assim, a figura da secção tem **três vértices**, pelo que é um **triângulo**. Saliencia-se, todavia, que a figura da secção **não é um triângulo equilátero** (uma figura geometricamente igual às figuras das bases), pois o plano secante **não é paralelo** aos planos das bases.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **três vértices** da **figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Assim, o ponto **A''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[AA']**, o ponto **B''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[BB']** e, por fim, o ponto **C''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[CC']**. Salienta-se que as arestas laterais **[AA']** e **[BB']** têm as suas projeções frontais (no **plano 4**) coincidentes, mas, de facto, o plano secante corta as duas arestas e não apenas uma delas.

Em seguida determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **A''**, **B''** e **C''** (os três vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, determinaram-se as projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, dos três vértices da figura da secção. O ponto **A''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AA']**, pelo que a sua projeção frontal (**A''<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[AA']** (**[A<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>]**). O ponto **B''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[BB']**, pelo que a sua projeção frontal (**B''<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[BB']** (**[B<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**). O ponto **C''** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[CC']**, pelo que a sua projeção frontal (**C''<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[CC']** (**[C<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>]**).

A partir das projeções dos três vértices da figura da secção, desenharam-se as duas projeções da figura. Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção frontal – a face lateral **[BB'C'C]**. Assim, o lado da figura da secção que se situa naquela face é **invisível**, em projeção frontal – o lado **[B''C'']**. Os lados **[A''B'']** e **[A''C'']** da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por se situarem em faces do prisma que são visíveis em projeção frontal (as faces laterais **[AA'B'B]** e **[AA'C'C]**, respetivamente).

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção horizontal – a face lateral **[AA'B'B]**. Assim, o lado da figura da secção que se situa naquela face lateral é **invisível**, em projeção horizontal (o lado **[A''B'']**). Os lados **[A''C'']** e **[B''C'']** da figura da secção são **visíveis**, em projeção horizontal, por se situarem em faces do prisma que são visíveis em projeção horizontal (as faces laterais **[AA'C'C]** e **[BB'C'C]**, respetivamente).

#### Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo recurso a uma segunda mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura da secção) num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção. Tendo em conta a primeira mudança do diedro de projeção efetuada, em que o plano  $\alpha$  já havia sido transformado num plano de topo, há, agora, que transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível), pois um plano horizontal (de nível) é um plano projetante frontal, tal como o plano  $\alpha$  (que é um plano de topo, no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Recorde que um plano horizontal (de nível) é **um caso particular** dos planos projetantes frontais. Para transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\alpha$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém o plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X''**) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\alpha$ , o eixo **X''** (o novo eixo **X**) é paralelo ao novo traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{4\alpha}$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X''** (o novo eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 5**) dos quatro vértices da figura da secção, em função dos respetivos afastamentos, que se mantiveram. **A''<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **A''** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **A''<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **A''<sub>1</sub>** ao eixo **X'**. **B''<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **B''** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **B''<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **B''<sub>1</sub>** ao eixo **X'**. **C''<sub>5</sub>** é a projeção do ponto **C''** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **C''<sub>5</sub>** ao eixo **X''** é igual à distância de **C''<sub>1</sub>** ao eixo **X**.

Por fim, desenhou-se o triângulo definido por **A''<sub>5</sub>**, **B''<sub>5</sub>** e **C''<sub>5</sub>** – o triângulo **[A''<sub>5</sub>B''<sub>5</sub>C''<sub>5</sub>]** é a projeção (no **plano 5**) do triângulo **[A''B''C'']** e está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho

#### Traçado:

As projeções do prisma e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\alpha$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O traço frontal do plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do prisma) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da **figura da secção** (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à primeira mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação da figura da secção), bem como dos referentes à segunda mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).



## 678.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base inferior do prisma), pelo seu traço frontal ( $f_v$ ). O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\rho$  (o plano secante) pelo seu traço horizontal ( $h_p$ ).

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

A base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), mediu-se (em verdadeira grandeza) o ângulo que o lado **[AB]** faz com o Plano Frontal de Projeção, o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta suporte do lado **[AB]**. Sobre essa reta mediram-se os 5 cm (a medida do lado do quadrado) e determinou-se  $B_1$ , a projeção horizontal do ponto **B**. Note que se garantiu que o ponto **B** é o vértice de menor afastamento do quadrado (como o enunciado pede expressamente).

A partir de  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do quadrado, garantindo-se, mais uma vez, que o ponto **B** é o vértice de menor afastamento do polígono. Após a construção da projeção horizontal da figura, determinou-se a sua projeção frontal, que se reduz a um segmento de reta sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

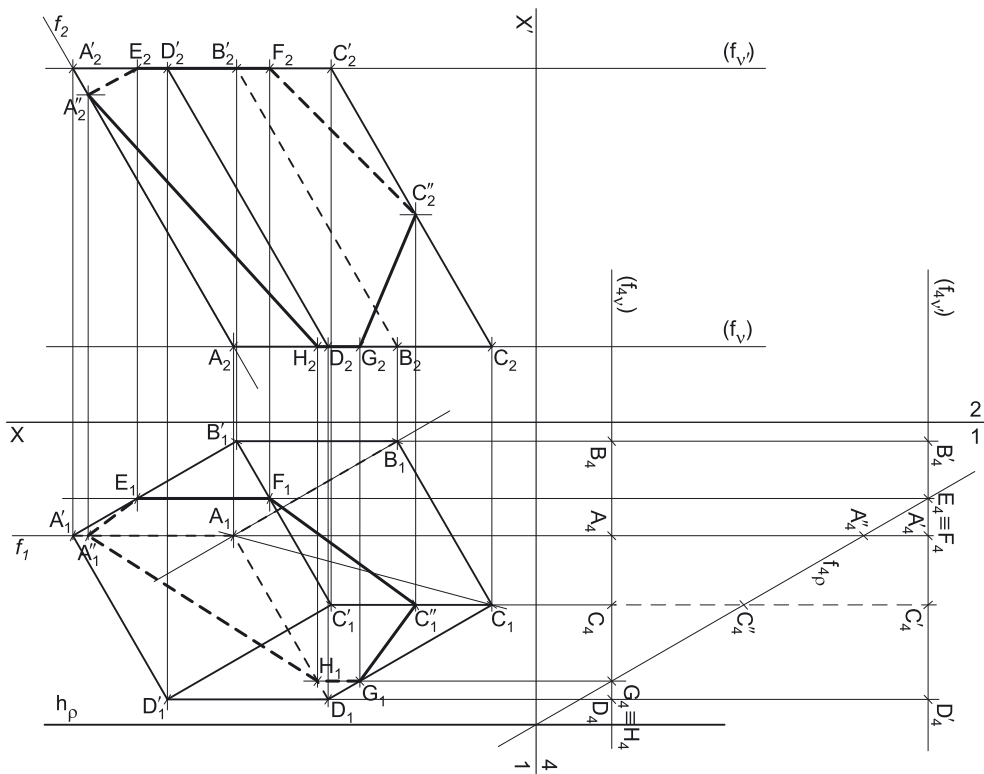
É dada, no enunciado, a direção das arestas laterais do prisma – estão contidas em retas frontais /de frente) que fazem, com o Plano Horizontal de Projeção, ângulos de  $60^\circ$ , de abertura para a esquerda. É dado, também, o comprimento das arestas laterais do sólido. Assim, pelas projeções do ponto **A** conduziram-se as projeções homónimas da reta  $f$ , que é a reta suporte da aresta lateral **[AA']**. Tendo em conta que a reta  $f$  é paralela ao Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal), a aresta **[AA']** (que está contida na reta  $f$ ) projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ), e a partir de  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), mediram-se os 8,5 cm (o comprimento das arestas laterais do sólido), o que nos permitiu determinar  $A'_2$  (a projeção frontal do ponto **A'**), sobre  $f_2$ .  $A'_2$  é, assim, o extremo superior da aresta lateral **[AA']**.

Este procedimento permitiu-nos representar o plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do prisma) pelo seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O plano  $v'$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ) passa necessariamente por  $A'_2$  (a projeção frontal do ponto **A'**). O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ) se identificou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções dos outros três vértices do quadrado **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), paralelas às projeções homónimas da reta  $f$ . Os outros três vértices da base superior do prisma (os pontos **B'**, **C'** e **D'**) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $v'$  (o plano da base superior do prisma) e foram determinados a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do quadrado **[A'B'C'D']** (a base superior do prisma). Por fim, a partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se as suas duas projeções, começando pelos respetivos contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ADCC'D'A']**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>D<sub>2</sub>C<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **B** e **B'**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]** (da base **[ABCD]**), as arestas **[A'B']** e **[B'C']** (da base **[A'B'C'D']**), e a aresta lateral **[BB']**. A aresta lateral **[DD']** é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos **D** e **D'** são os vértices de maior afastamento do prisma). Note que as arestas **[AB]**, **[BC]**, **[A'B']** e **[B'C']**, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção frontal).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[BCDD'A'B']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1D'_1A'_1B'_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **C'**. O vértice **A**, por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$ , da base  $[ABCD]$ , e a aresta lateral  $[AA']$ . O vértice **C'**, por ser um dos vértices de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$  e  $[C'D']$ , da base  $[A'B'C'D']$ , e a aresta lateral  $[CC']$ .

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projeção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida num prisma por um plano não projetante**) numa **secção produzida num prisma por um plano projetante**.

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual as bases do sólido se projetem em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, as bases projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, que, assim, deverá ser o plano de projeção a manter.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\rho$ , de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano de topo (um plano projetante frontal).

Em seguida determinaram-se as projeções dos oito vértices do prisma no **plano 4** o que se processa a partir das respetivas cotas.  $A_4$ ,  $B_4$ ,  $C_4$  e  $D_4$  são, assim, as projeções dos pontos **A**, **B**, **C** e **D** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se das respetivas cotas, que se mantêm (os quatro pontos têm 2 cm de cota, que é a cota da base inferior do prisma). Representou-se, ainda, o traço do plano  $\nu$  no **plano 4** ( $f_{4\nu}$ ), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices do quadrado  $[ABCD]$ . O plano  $\nu$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

$A'_4$ ,  $B'_4$ ,  $C'_4$  e  $D'_4$  são, pelo seu lado, as projeções dos pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se das respetivas cotas, que se mantêm. Representou-se, ainda, o traço do plano  $\nu'$  no **plano 4** ( $f_{4\nu'}$ ), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$ . O plano  $\nu'$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

A partir das projeções dos oito vértices do prisma no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção (a aresta lateral  $[CC']$  é a única invisibilidade a assinalar).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** –  $f_{4\rho}$ . Tendo em conta que é dado o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção, e atendendo, ainda, a que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) o plano  $\rho$  é um plano de topo, o ângulo que o plano  $\rho$  faz com o Plano Horizontal de Projeção projeta-se em verdadeira grandeza no ângulo que o seu traço no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ) faz com o eixo **X'**. Assim, desenhou-se o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $f_{4\rho}$ ), que está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com  $h_\rho$ , que se situa no eixo **X'**) e por uma direção (o ângulo que faz com o eixo **X'**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as duas arestas laterais do prisma (as arestas  $[AA']$  e  $[CC']$ ), cortando ainda a base inferior do prisma em duas das suas arestas (as arestas  $[AD]$  e  $[CD]$ ) e a base superior em outras duas arestas (as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$ ). Assim, a figura da secção tem **seis vértices** – é um **hexágono**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices** da **figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\rho$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Assim, o ponto **A''** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral  $[AA']$ , o ponto **C''** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral  $[CC']$ , o ponto **E** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta  $[A'B']$  (da base superior), o ponto **F** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta  $[B'C']$  (da base superior), o ponto **G** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta  $[CD]$  (da base inferior) e, por fim, o ponto **H** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta  $[C'D']$  (da base inferior).

Salienta-se que as arestas  $[AD]$  e  $[CD]$ , da base inferior, têm as suas projeções frontais (no **plano 4**) coincidentes, mas, de facto, o plano secante corta a base naquelas duas arestas (cujas projeções frontais estão coincidentes) e não apenas numa única aresta, o que, nesta situação, seria impossível. De forma semelhante, também as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$ , da base superior, têm as suas projeções frontais (no **plano 4**) coincidentes.

Em seguida determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **E**, **F**, **G** e **H** (quatro dos seis vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**. Salienta-se que estes são os pontos em que o plano secante corta as arestas das bases. No entanto, este procedimento não pode ser utilizado para a determinação das projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **A''** e **C''**, pois, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), as arestas laterais do prisma são de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**). De facto, de uma forma direta, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, não é possível determinar as projeções horizontais de quaisquer pontos situados nas arestas laterais do prisma. Todavia, isso não impede que prossigamos com a resolução do exercício, como em seguida se expõe.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, determinaram-se as projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, dos quatro vértices acima referidos. O ponto **E** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[A'B']**, pelo que a sua projeção frontal (**E**<sub>2</sub>) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[A'B']** (**[A'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**). O ponto **F** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[B'C']**, pelo que a sua projeção frontal (**F**<sub>2</sub>) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[B'C']** (**[B'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>]**). O ponto **G** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[CD]**, pelo que a sua projeção frontal (**G**<sub>2</sub>) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[CD]** (**[C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**). O ponto **H** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AD]**, pelo que a sua projeção frontal (**H**<sub>2</sub>) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[AD]** (**[A<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**).

Analisemos, agora, a determinação das projeções (no diedro de projeção inicial) dos pontos **A''** e **C''**. Na mudança do diedro de projeção efetuada, mantiveram-se as cotas. Ora, atendendo a que o ponto **A''** é o ponto que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[AA']**, sabe-se imediatamente que a projeção frontal do ponto **A''** (**A''**<sub>2</sub>) tem de se situar sobre a projeção frontal da aresta lateral **[AA']**. Assim, **A''**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **A''**) situa-se sobre a projeção frontal da aresta lateral **[AA']** (**[A<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>]**), tal que a distância de **A''**<sub>2</sub> ao eixo **X** é igual à distância de **A''**<sub>4</sub> ao eixo **X'** (que é a cota do ponto **A''**). Em seguida determinou-se a projeção horizontal do ponto **A''** (**A''**<sub>1</sub>), que se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[AA']** (**[A<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]**).

De forma semelhante, **C''**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **C''**) situa-se sobre a projeção frontal da aresta lateral **[CC']** (**[C<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>]**), tal que a distância de **C''**<sub>2</sub> ao eixo **X** é igual à distância de **C''**<sub>4</sub> ao eixo **X'** (que é a cota do ponto **C''**). Em seguida determinou-se a projeção horizontal do ponto **C''** (**C''**<sub>1</sub>), que se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[CC']** (**[C<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>]**).

A partir das projeções dos seis vértices da figura da secção, desenharam-se as duas projeções da figura. O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]**. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados **[A''E]** e **[FC'']**). Os lados **[A''H]** e **[C''G]** da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por se situarem em faces do prisma que são visíveis em projeção frontal (as faces laterais **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]**, respetivamente). Salienta-se que os lados **[EF]** e **[GH]** da figura da secção, que estão contidos em faces do sólido que são projetantes frontais (a base **[ABCD]** e a base **[A'B'C'D']**, respetivamente), apesar de serem invisíveis, estão ocultos por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal (pois os planos que as contêm são planos projetantes frontais).

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais **[AA'B'B]** e **[AA'D'D]** e a base **[ABCD]** são **invisíveis**, em projeção horizontal. Assim, os (três) lados da figura da secção que se situam naquelas faces são **invisíveis**, em projeção horizontal (os lados **[A''E]**, **[A''D]** e **[GH]**, respetivamente). Os lados **[EF]**, **[EC'']** e **[C''G]** da figura da secção são **visíveis**, em projeção horizontal, por se situarem em faces do prisma que são visíveis em projeção horizontal (a base **[A'B'C'D']** e as faces laterais **[BB'C'C]** e **[CC'D'D]**, respetivamente).

## Traçado:

As projeções do prisma e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O traço horizontal do plano secante (o plano  $\rho$ ), porque integra os dados, representou-se a **médio**. Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases do prisma) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso da reta **f** e de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação da figura da secção).

## 679.

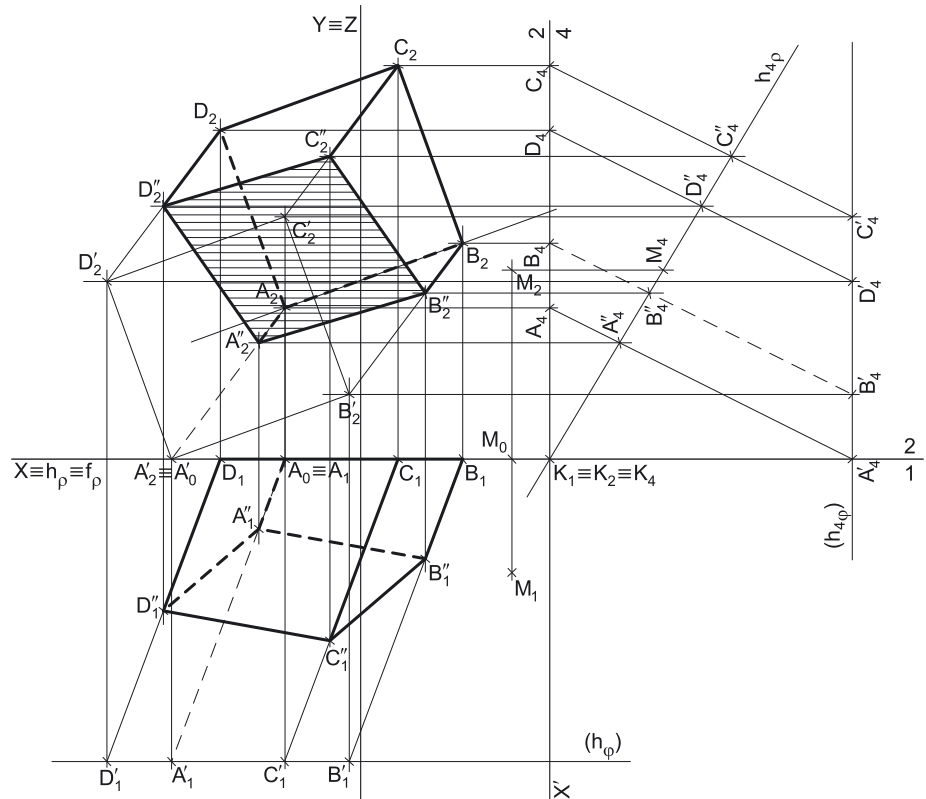
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **M**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção frontal do ponto **A'** ( $A'_2$ ). O plano  $\rho$  (o plano secante) está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **M**.

**Resolução:***Determinação das projeções do prisma:*

A base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** está em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, a partir de  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), mediu-se (em verdadeira grandeza) o ângulo que o lado **[AB]** faz com o Plano Horizontal de Projeção, o que nos permitiu desenhar a projeção frontal da reta suporte do lado **[AB]**. Sobre essa reta mediram-se os 5 cm (a medida do lado do quadrado) e determinou-se  $B_2$ , a projeção frontal do ponto **B**. Note que se garantiu que o ponto **A** é o vértice de menor cota do quadrado (como o enunciado pede expressamente).

A partir de  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção frontal do quadrado, garantindo-se, mais uma vez, que o ponto **A** é o vértice de menor cota do polígono. A projeção horizontal do quadrado situa-se no eixo **X**, pois todos os vértices do quadrado têm afastamento nulo (o quadrado situa-se no Plano Frontal de Projeção).



Atendendo a que o prisma tem 8 cm de altura (que é a distância entre os planos que contêm as duas bases) e que a base de menor afastamento tem afastamento nulo (está contida no Plano Frontal de Projeção), o plano que contém a base de maior afastamento tem 8 cm de afastamento ( $0 + 8 = 8$ ), o que nos permitiu desenhar, de forma imediata, o traço horizontal do plano  $\phi$ . O plano  $\phi$  é o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do prisma – o plano  $\phi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a projeção horizontal do ponto **A'** ( $A'_1$ ), que se situa sobre  $h_{\phi}$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

As arestas laterais do prisma são paralelas entre si e já temos a direção de uma das arestas laterais – a aresta lateral **[AA']**. Assim, pelas projeções dos outros três vértices do quadrado **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), que são paralelas às projeções homónimas da aresta lateral **[AA']**. Os outros vértices da base de maior afastamento (os pontos **B'**, **C'** e **D'**) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $\phi$  (o plano da base de maior afastamento do prisma) e foram determinados a partir das suas projeções horizontais, pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do quadrado **[A'B'C'D']** (a base de maior afastamento do prisma). Por fim, a partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se as suas duas projeções, começando pelos respetivos contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDD'A'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **C'**. O vértice **A**, por ser um dos vértices de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base **[ABCD]**, e a aresta lateral **[AA']**. O vértice **C'**, por ser um dos vértices de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[B'C']** e **[C'D']**, da base **[A'B'C'D']**, e a aresta lateral **[CC']**.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[BCDD'C'B']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **A'**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]** (da base **[ABCD]**), as arestas **[A'B']** e **[A'D']** (da base **[A'B'C'D']**), e a aresta lateral **[AA']**. A aresta lateral **[CC']** é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos **C** e **C'** são os vértices de maior cota do prisma). Note que as arestas **[AB]**, **[AD]**, **[A'B']** e **[A'D']**, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção horizontal).

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projeção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida num prisma por um plano não projetante**) numa **secção produzida num prisma por um plano projetante**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual as bases do sólido se projetem em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, as bases projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, que, assim, deverá ser o plano de projeção a manter.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\rho$ , de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), ou seja, ao eixo **X** inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano vertical (um plano projetante horizontal).

Em seguida determinaram-se as projeções dos oito vértices do prisma no **plano 4** o que se processa a partir dos respetivos afastamentos. **A<sub>4</sub>, B<sub>4</sub>, C<sub>4</sub> e D<sub>4</sub>** são, assim, as projeções dos pontos **A, B, C e D** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se dos respetivos afastamentos, que se mantêm – como os pontos têm afastamento nulo, as suas projeções no **plano 4** situam-se no eixo **X'**.

**A'<sub>4</sub>, B'<sub>4</sub>, C'<sub>4</sub> e D'<sub>4</sub>** são, pelo seu lado, as projeções dos pontos **A', B', C' e D'** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se dos respetivos afastamentos, que se mantêm (os quatro pontos têm 8 cm de afastamento, que é o afastamento do plano  $\varphi$ ). Representou-se, ainda, o traço do plano  $\varphi$  no **plano 4** (**h<sub>4 $\varphi$</sub>** ), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices do quadrado **[A'B'C'D'E']**. O plano  $\varphi$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano frontal (de frente), pelo que continua a ser um plano projetante horizontal.

A partir das projeções dos oito vértices do prisma no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção (a aresta lateral **[BB']** é a única invisibilidade a assinalar).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** – **h<sub>4 $\rho$</sub>** . Para tal recorreu-se ao ponto **M**, que é o ponto que define o plano  $\rho$ . **M<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **M** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **M<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **M<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 3 cm – o afastamento de **M**). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** (**h<sub>4 $\rho$</sub>** ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $f_p$  (que se situa no eixo **X'**) e **M<sub>4</sub>** (a nova projeção horizontal do ponto **M**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as quatro arestas laterais do prisma, não cortando nenhuma das duas bases. Assim, a figura da secção tem **quatro vértices** – é um **quadrilátero** (mas não é um quadrado, pois o plano secante **não é paralelo** aos planos das bases).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**, o plano  $\rho$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal. Assim, o ponto **A''** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[AA']**, o ponto **B''** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[BB']**, o ponto **C''** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[CC']** e, por fim, o ponto **D''** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[DD']**. Em seguida determinaram-se as projeções frontais (no **plano 2**) dos pontos **A'', B'', C'' e D''** (os quatro vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**), no diedro de projeção inicial, dos quatro vértices da figura da secção. O ponto **A''** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AA']**, pelo que a sua projeção horizontal (**A''<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[AA']** (**[A<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]**). O ponto **B''** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[BB']**, pelo que a sua projeção horizontal (**B''<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[BB']** (**[B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>]**). O ponto **C''** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[CC']**, pelo que a sua projeção horizontal (**C''<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[CC']** (**[C<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>]**). O ponto **D''** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[DD']**, pelo que a sua projeção horizontal (**D''<sub>1</sub>**) se situa sobre a projeção horizontal da aresta **[DD']** (**[D<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>]**).

Em seguida desenharam-se as projeções da figura da secção. O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas).

### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco do prisma inicial – o tronco do prisma compreendido entre o plano  $\rho$  (o plano secante) e o Plano Frontal de Projeção. Assim, a base de menor afastamento desse novo sólido é o quadrado **[ABCD]** e a sua face de maior afastamento é quadrado **[A'B'C'D']** (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDD''A''B'']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D''<sub>2</sub>A''<sub>2</sub>B''<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **C''**. O vértice **A**, por ser um dos vértices de **menor afastamento** do sólido, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base **[ABCD]**, e a aresta lateral **[AA'']**. O vértice **C''**, por ser o vértice de **maior afastamento** do sólido, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[B''C'']** e **[C''D'']**, da face **[A''B''C''D'']**, e a aresta lateral **[CC'']**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[BCDD''C''B'']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1D''_1C''_1B''_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **A''**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base  $[ABCD]$ ), as arestas  $[A''B'']$  e  $[A''D'']$  (da face  $[A''B''C''D'']$ ), e a aresta lateral  $[AA'']$ . A aresta lateral  $[CC'']$  é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos **C** e **C''** são dos vértices de maior cota do sólido). Note que as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$ , apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção horizontal).

A **figura da secção** é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), pelo que se assinalou esse facto preenchendo ambas a projeção horizontal da figura da secção com tracejado.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\rho$ ), sendo dados e porque se situam no eixo **X**, ficam a **médio**, que foi a expressividade utilizada para o eixo **X**. O traço horizontal do plano  $\phi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do prisma) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As projeções do prisma, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, para a determinação das projeções da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em ambas as projeções) executou-se a **leve**.

## 680.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **R**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide), pelo seu traço horizontal ( $h_\phi$ ). O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ) passa por **R**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **R**). O plano  $\phi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A diagonal  $[RT]$  é vertical, o que nos permitiu, de forma direta, determinar a projeção horizontal do ponto **T** (**T**<sub>1</sub>), que está coincidente com **R**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **R**). Por outro lado, a base da pirâmide (o quadrado  $[RSTU]$ ) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\phi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, foi possível medir o comprimento da diagonal  $[RT]$  em verdadeira grandeza, em projeção frontal, o que nos permitiu determinar **T**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **T**).

Em seguida, procedeu-se à construção da projeção frontal do quadrado, em verdadeira grandeza. Assim, determinou-se a projeção frontal do ponto **O** (**O**<sub>2</sub>), o centro do quadrado, com o recurso à mediatriz do segmento de reta  $[R_2T_2]$ . Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com raio até **R**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **R**) ou **T**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **T**), desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao polígono, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos outros dois vértices do quadrado. Estes foram identificados de forma arbitrária (mas sequencial), pois o enunciado é omissivo.

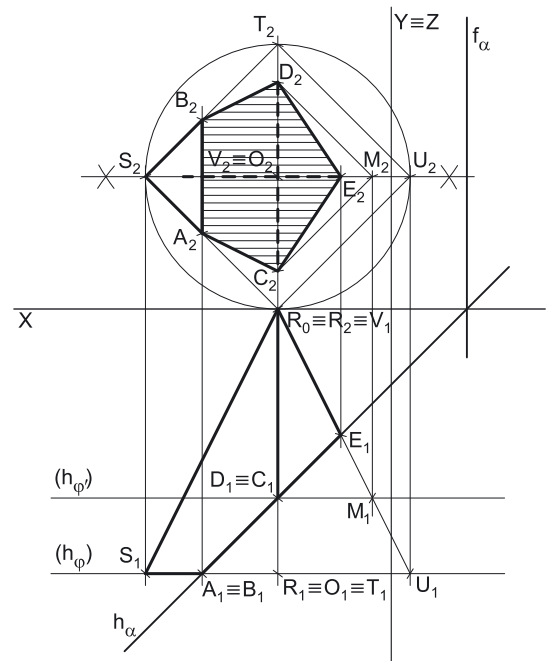
A projeção horizontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\phi$  ( $h_\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, cuja base é frontal (de frente), pelo que o ponto **O** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice da pirâmide) se situam necessariamente na mesma reta projetante frontal, pois o eixo da pirâmide está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta de topo). Assim, tem-se, imediatamente **V**<sub>2</sub>  $\equiv$  **O**<sub>2</sub>. Atendendo a que o vértice da pirâmide tem afastamento nulo, foi possível determinar, de forma imediata, a sua projeção horizontal (**V**<sub>1</sub>). A partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projeções, começando-se pelos respetivos contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o quadrado  $[RSTU]$ , cuja projeção frontal é o quadrado  $[R_2S_2T_2U_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que neles convergem – todas as arestas laterais da pirâmide.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[STUV]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[S_1T_1U_1V_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **R**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[RS]$  e  $[RU]$ , da base, e a aresta lateral  $[RV]$ . No entanto, todas estas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar. A aresta lateral  $[TV]$  é visível (em projeção horizontal), por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção horizontal, além de que **T** é o vértice de maior cota da pirâmide).

(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao quadrado da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta três arestas laterais do sólido (as arestas [RV], [TV] e [UV]), cortando a base em duas arestas (as arestas [RS] e [ST]). Assim, a figura da secção tem **cinco vértices**, pelo que é um **pentágono**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\alpha$ ). O plano  $\alpha$  corta a aresta lateral [UV] no ponto **E**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano  $\alpha$  corta as arestas [RS] e [ST], da base, nos pontos **A** e **B**, respetivamente – os pontos **A** e **B** (determinados diretamente a partir das suas projeções horizontais) têm as suas projeções horizontais coincidentes, pois as projeções horizontais das duas arestas a que pertencem (as arestas [RS] e [ST]) também estão coincidentes.

O plano  $\alpha$  corta as arestas laterais [RV] e [TV] nos pontos **C** e **D**, respetivamente – os pontos **C** e **D** têm as suas projeções horizontais coincidentes, pois as projeções horizontais das duas arestas a que pertencem (as arestas laterais [RV] e [TV]) também estão coincidentes. No entanto, as arestas laterais [RV] e [TV] são arestas de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível determinar, de forma direta, as projeções frontais dos pontos **C** e **D** – os pontos **C** e **D** são, assim, os pontos **“problemáticos”** da secção que o plano  $\alpha$  produz na pirâmide. Nesse sentido, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar (o **rebatimento do plano de perfil** que contém as duas arestas, por exemplo) ou a um raciocínio auxiliar (o recurso ao **método dos planos paralelos à base**).

Optou-se pelo recurso ao **método dos planos paralelos à base**. Nesse sentido conduziu-se, pelos pontos **C** e **D**, um plano  $\varphi'$ , paralelo ao plano da base (o plano  $\varphi$ ) – o plano  $\varphi'$  é o plano frontal (de frente) que contém os pontos **C** e **D**. O plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ) passa necessariamente pelas projeções horizontais dos pontos **C** e **D** ( $C_1$  e  $D_1$ , respetivamente), que já haviam sido determinadas. A secção produzida pelo plano  $\varphi'$  na pirâmide é necessariamente um polígono semelhante ao polígono da base, e com os seus lados paralelos aos lados correspondentes do polígono da base. Assim, desenhou-se parte da secção que o plano  $\varphi'$  produz na pirâmide.

O plano  $\varphi'$  corta a aresta [UV] no ponto **M** – este ponto foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal de dois lados da secção produzida pelo plano  $\varphi'$  na pirâmide – os lados dessa secção que têm extremos no ponto **M**. Esses lados (os lados [MC] e [MD]) são paralelos aos lados correspondentes do quadrado [RSTU] – os lados [RU] e [TU], respetivamente. O desenho parcial da projeção frontal da figura da secção produzida pelo plano  $\varphi'$  na pirâmide (respeitando as situações de paralelismo acima referidas) permitiu-nos determinar as projeções frontais dos pontos **C** ( $C_2$ ) e **D** ( $D_2$ ), sobre as projeções frontais das arestas a que pertencem.

A partir das projeções dos cinco vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (o pentágono [ABDEC]).

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se com deformação, pois o plano que a contém (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

## Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide cuja base é o triângulo [ABS] e em que uma face é o pentágono [ABDEC] (que é, afinal, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e o vértice, como o enunciado refere expressamente).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [SBDECA], cuja projeção frontal é o polígono [ $S_2B_2D_2E_2C_2A_2$ ]. Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** do sólido, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [SV], [CV], [DV] e [EV]. Já a aresta [AB] é visível, em projeção frontal, pois separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal – a base [ABS] e a face [ABDEC].

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [SBDEV], cuja projeção horizontal é o polígono [ $S_1B_1D_1E_1V_1$ ]. Em projeção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **C**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [AS], [AB], [AC], [CV] e [CE]. No entanto, todas estas arestas ou são projetantes horizontais ou estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

A **figura da secção**, porque é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção frontal).

## Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\alpha$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do quadrado ou dos traçados relativos à determinação dos pontos “problemáticos” da secção, nomeadamente o traço horizontal do plano  $\varphi$ ). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção frontal) executou-se a **leve**.

## 681.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide), pelo seu traço frontal ( $f_v$ ). O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\theta$  (o plano secante), pelos seus traços.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

O lado **[AB]** é de topo, o que nos permitiu, de forma direta, determinar a projeção frontal do ponto **B** ( $B_2$ ), que está coincidente com  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**). Por outro lado, a base da pirâmide (o hexágono **[ABCDEF]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, foi possível medir o comprimento do lado **[AB]** em verdadeira grandeza, em projeção frontal, o que nos permitiu determinar  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**).

Em seguida, a partir de  $A_1$  e de  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do hexágono, garantindo-se que o lado **[AB]** é o lado mais à esquerda da figura (como o enunciado pede expressamente). Para tal foi necessário determinar, também,  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**, o centro do hexágono). A projeção frontal do hexágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

O vértice **V**, da pirâmide, tem 8 cm de cota (é dado no enunciado) e é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que o ponto **V** tem, também, 8 cm de afastamento (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**), o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **V**. Em seguida, a partir das projeções de todos os sete vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A**, **E** e **F**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[AF]**, **[EF]** e **[DE]**, da base, e as arestas laterais **[AV]**, **[FV]** e **[EV]**. No entanto, todas estas arestas ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar. Já a aresta lateral **[CV]** é visível, em projeção frontal, pois separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal (o vértice **C** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

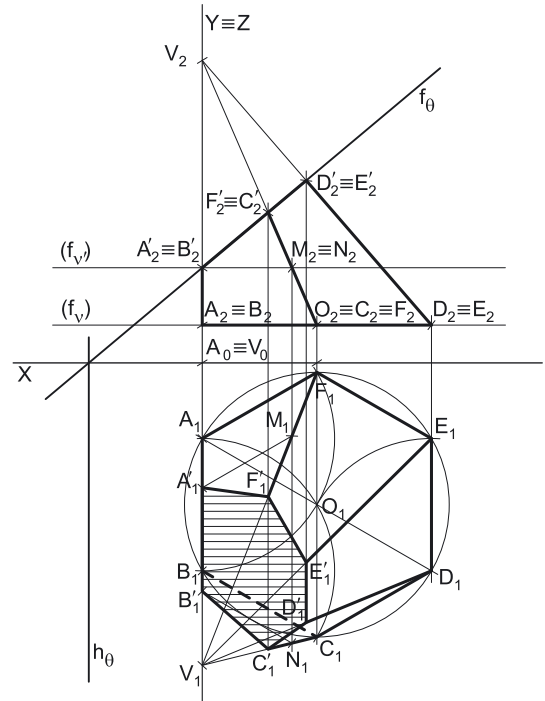
O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[AVCDEF]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>V<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **B**. Este vértice, por ser um dos vértices de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[BV]**. No entanto, as arestas **[AB]** e **[BV]** estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta **[BC]** da base. As arestas laterais **[DV]**, **[EV]** e **[FV]** são visíveis (em projeção horizontal), por se situarem na parte visível do sólido (cada uma daquelas arestas separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção horizontal).

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não** é um polígono semelhante ao hexágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as seis arestas laterais do sólido, não cortando a base em nenhuma das suas arestas. Assim, a figura da secção tem **seis vértices**, pelo que é um **hexágono** (mas não é um hexágono regular, pois o plano secante **não** é paralelo ao plano da base).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\theta$ ). O plano  $\theta$  corta as arestas laterais **[EV]** e **[DV]** nos pontos **E'** e **D'**, respetivamente – os pontos **E'** e **D'** (determinados diretamente a partir das suas projeções frontais) têm as suas projeções frontais coincidentes, pois as projeções frontais das duas arestas a que pertencem (as arestas **[EV]** e **[DV]**) também estão coincidentes. O plano  $\theta$  corta as arestas laterais **[CV]** e **[FV]** nos pontos **C'** e **F'**, respetivamente – os pontos **C'** e **F'** (determinados diretamente a partir das suas projeções frontais) têm as suas projeções frontais coincidentes, pois as projeções frontais das duas arestas a que pertencem (as arestas **[CV]** e **[FV]**) também estão coincidentes.

O plano  $\theta$  corta as arestas laterais **[AV]** e **[BV]** nos pontos **A'** e **B'**, respetivamente – os pontos **A'** e **B'** têm as suas projeções frontais coincidentes, pois as projeções frontais das duas arestas a que pertencem (as arestas laterais **[AV]** e **[BV]**) também estão coincidentes. No entanto, as arestas laterais **[AV]** e **[BV]** são arestas de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível determinar, de forma direta, as projeções horizontais dos pontos **A'** e **B'** – os pontos **A'** e **B'** são, assim, os **pontos “problemáticos”** da secção que o plano  $\theta$  produz na pirâmide. Nesse sentido, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar (o **rebatimento do plano de perfil** que contém as duas arestas, por exemplo) ou a um raciocínio auxiliar (o recurso ao **método dos planos paralelos à base**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo recurso ao **método dos planos paralelos à base**. Nesse sentido conduziu-se, pelos pontos **A'** e **B'**, um plano  $v'$ , paralelo ao plano da base (o plano  $v$ ) – o plano  $v'$  é o plano horizontal (de nível) que contém os pontos **A'** e **B'**. O plano  $v'$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ) passa necessariamente pelas projeções frontais dos pontos **A'** e **B'** ( $A'_2$  e  $B'_2$ , respetivamente), que já haviam sido determinadas. A secção produzida pelo plano  $v'$  na pirâmide é necessariamente um polígono semelhante ao polígono da base, e com os seus lados paralelos aos lados correspondentes do polígono da base. Assim, desenhou-se parte da secção que o plano  $v'$  produz na pirâmide.

O plano  $\theta$  corta as arestas laterais **[FV]** e **[CV]** nos pontos **M** e **N**, respetivamente – os pontos **M** e **N** (determinados diretamente a partir das suas projeções frontais) têm as suas projeções frontais coincidentes, pois as projeções frontais das duas arestas a que pertencem (as arestas **[FV]** e **[CV]**) também estão coincidentes. Em seguida, desenhou-se a projeção horizontal de dois lados da secção produzida pelo plano  $v'$  na pirâmide – os lados **[MA']** e **[NB']**. Estes lados são paralelos aos lados correspondentes do hexágono **[ABCDEF]** – os lados **[AF]** e **[BC]**. Assim, o segmento **[MA']** é paralelo ao lado **[AF]** do hexágono, tal como o segmento **[NB']** é paralelo ao lado **[BC]** do hexágono. O desenho parcial da projeção horizontal da figura da secção produzida pelo plano  $v'$  na pirâmide (respeitando as situações de paralelismo acima referidas) permitiu-nos determinar as projeções horizontais dos pontos **A'** ( $A'_1$ ) e **B'** ( $B'_1$ ), sobre as projeções horizontais das arestas a que pertencem.

A partir das projeções dos seis vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (o hexágono **[A'B'C'D'E'F']**).

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** projeta-se com deformação, pois o plano que a contém (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção.

### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide cuja base é o hexágono **[ABCDEF]** e em que a face superior é o hexágono **[A'B'C'D'E'F']** (que é, afinal, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e o plano da base, como o enunciado refere expressamente).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDD'C'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem seis vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices **A**, **E**, **F**, **A'**, **E'** e **F'**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[AF]**, **[EF]**, **[DE]** **[A'B']**, **[A'F']**, **[E'F']**, **[D'E']**, **[AA']**, **[FF']** e **[EE']**. No entanto, todas estas arestas ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar. Já a aresta **[CC']** é visível, em projeção frontal, pois separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal (os vértices **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[AA'B'C'DEF]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existem quatro vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices **B**, **D'**, **E'** e **F'**. O vértice **B**, por ser um dos vértices de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]**, **[BC]** e **[BB']**. No entanto, as arestas **[AB]** e **[BB']** estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta **[BC]**. Os vértices **D'**, **E'** e **F'**, por sua vez, e por serem os vértices de **maior cota** do sólido, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[F'A']**, **[FF']**, **[E'F']**, **[EE']**, **[D'E']**, **[DD']** e **[C'D']**.

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção horizontal).

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\theta$ ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do hexágono ou dos traçados relativos à determinação dos pontos “problemáticos” da secção, nomeadamente o traço frontal do plano  $v'$ ). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 682.

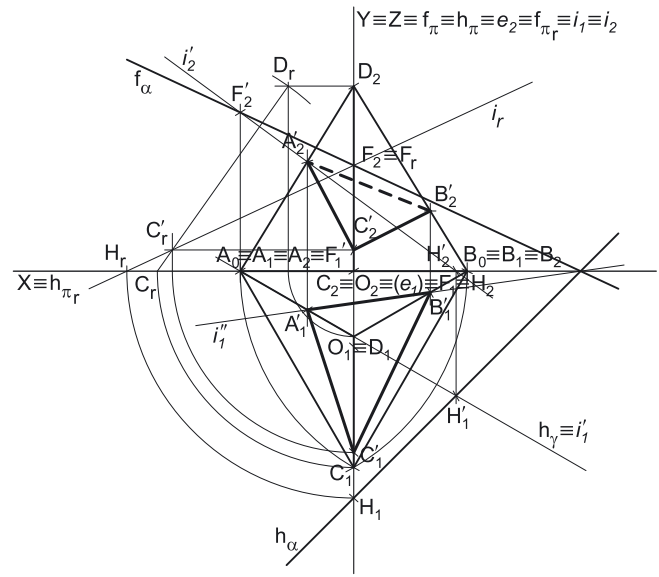
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços.

**Resolução:***Determinação das projeções do tetraedro:*

A face inferior do sólido (o triângulo equilátero **[ABC]**) está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, a partir de **A**<sub>1</sub> e de **B**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do triângulo **[ABC]**, em verdadeira grandeza, tendo-se determinado, também, **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**, o centro do triângulo). A projeção frontal do triângulo situa-se no eixo **X**, pois todos os seus pontos têm cota nula (o triângulo está contido no Plano Horizontal de Projeção).

Um tetraedro toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**, qualquer que seja a face que se considere como base. Assim, o vértice **D** (o quarto vértice do sólido) situa-se numa reta que passa pelo ponto **O** e que é ortogonal ao plano que contém o triângulo **[ABC]** (o Plano Horizontal de Projeção), ou seja, situa-se na reta vertical (projetante horizontal) que passa pelo ponto **O**. Dessa forma, determinou-se **D**<sub>1</sub>, a projeção horizontal do vértice **D**, coincidente com a projeção horizontal do ponto **O** (**O**<sub>1</sub>).



Apesar de o tetraedro tomar a forma aparente de uma pirâmide triangular regular, não é conhecida a altura dessa pirâmide mas, sim, é adquirido o facto de que **todas as arestas de um tetraedro são iguais** (têm o mesmo comprimento), pois trata-se de um **poliedro regular**. Assim, é um facto que todas as arestas que convergem no vértice **D** (as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]**) têm o mesmo comprimento dos lados do triângulo **[ABC]** (que estão em verdadeira grandeza em projeção horizontal). No entanto, nenhuma daquelas arestas se projeta em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de projeção, pois nenhuma daquelas três arestas é paralela a qualquer dos planos de projeção. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano projetante da aresta **[CD]**, que é de perfil – o plano  $\pi$  (que é um plano de perfil). Nesse sentido, representou-se o plano  $\pi$  pelos seus traços, de forma imediata.

Efetou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira (que é o traço frontal do plano –  $f_\pi$ ), bem como os planos ortogonais à charneira, que são planos horizontais – os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Rebateram-se os pontos **C** e **O**, determinando **C**<sub>r</sub> e **O**<sub>r</sub>. Por **O**<sub>r</sub> conduziu-se uma perpendicular ao eixo **X**, que corresponde ao eixo do sólido (relativo à face **[ABC]**) em rebatimento. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **C**<sub>r</sub> e com  $\frac{1}{2}$  cm de raio (a medida do lado do triângulo **[ABC]**, que é a medida da aresta do tetraedro), determinou-se **D**<sub>r</sub> sobre a perpendicular ao eixo **X** que passa por **O**<sub>r</sub>, desenhando-se em seguida a aresta **[CD]** em rebatimento – o segmento **[C**<sub>r</sub>**D**<sub>r</sub>].

Uma vez que, no rebatimento efetuado, os pontos mantêm as suas cotas, transportou-se a cota do ponto **D** para a sua linha de chamada (através de uma paralela ao eixo **X**, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), determinando-se **D**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **D**).

Em seguida, a partir das projeções dos quatro vértices do tetraedro, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ACBD]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A**<sub>2</sub>**C**<sub>2</sub>**B**<sub>2</sub>**D**<sub>2</sub>]. Todos os vértices do sólido pertencem ao contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[AB]** é invisível em projeção frontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal (as faces **[ABD]** e **[ABC]**). Note, ainda, que **A** e **B** são os vértices de menor afastamento do sólido. Apesar disso, a aresta **[AB]** está oculta por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Por outro lado, há a referir que a aresta **[CD]** é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (o vértice **C** é o vértice de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é o triângulo **[ABC]**, cuja projeção horizontal é o triângulo **[A**<sub>1</sub>**B**<sub>1</sub>**C**<sub>1</sub>]. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **D**. Este, por ser o vértice de **maior cota** do tetraedro, é **visível**, bem como todas as arestas que neles convergem, ou seja, as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]** são visíveis em projeção horizontal.

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Poder-se-ia ter recorrido a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano secante num plano projetante, mas optou-se por resolver o exercício com o recurso ao **método misto**.

Assim, a **primeira etapa** consiste em averiguar se o plano secante (o plano  $\alpha$ ) corta a face inferior do tetraedro. A reta de interseção do plano  $\alpha$  (o plano secante) com o plano da face inferior do sólido (o Plano Horizontal de Projeção) é **a** (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – **h** <sub>$\alpha$</sub>  é exterior ao triângulo **[ABC]** (não corta o triângulo), pelo que o plano  $\alpha$  não corta a face inferior do sólido (não corta nenhuma das suas arestas). Assim, o plano  $\alpha$  cortará, apenas, as outras arestas do tetraedro, pelo que a figura da secção terá três vértices – será um **triângulo**. No entanto, uma vez que o plano  $\alpha$  não é paralelo ao plano da base, a figura da secção, sendo um triângulo, **não** é um triângulo semelhante ao triângulo da base (a figura da secção **não** é um **triângulo equilátero**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **segunda etapa** consiste em determinar o ponto de interseção de uma aresta do sólido com o plano secante (o plano  $\alpha$ ). Nesse sentido, começou-se por determinar o ponto de interseção da aresta [CD] com o plano  $\alpha$ . Tendo em conta que se trata da interseção entre uma reta não projetante (a reta suporte da aresta [CD]) com um plano não projetante (o plano  $\alpha$ ), é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executa em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **2.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **3.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

- Assim, conduziu-se, pela aresta [CD], o plano  $\pi$ , que é o plano projetante da aresta [CD]. O plano  $\pi$  é o plano de perfil que contém a aresta [CD] e ao qual já se recorreu, para se determinarem as projeções do sólido.
- Em seguida determinou-se a reta de interseção do plano  $\pi$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano secante) – a reta  $i$ . A reta  $i$  é a reta de interseção entre os dois planos (é uma reta de perfil) e está definida por dois pontos – o ponto F (o seu traço frontal) e o ponto H (o seu traço horizontal).
- O ponto em que a reta  $i$  interseca a aresta [CD] é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta [CD].

Acontece que tanto a reta  $i$  como a aresta [CD] são de perfil, pelo que a determinação do ponto de interseção das duas linhas carece do recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi$ , já efetuado. Nesse sentido, rebateu-se a reta  $i$ , rebatendo os seus traços. O ponto F é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_r \equiv F_2$ . Rebateu-se o ponto H, o que nos permitiu determinar  $H_r$  (o ponto H rebatido) e, assim, desenhar a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $F_r$  e  $H_r$ . Em rebatimento, determinou-se o ponto  $C'_r$ , que é o ponto em que a reta  $i_r$  interseca o segmento de reta [C<sub>r</sub>D<sub>r</sub>] (a aresta [CD] rebatida). Em seguida inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções do ponto  $C'$ . Já temos um ponto da figura da secção – o ponto  $C'$ .

Optou-se por determinar, ainda, o ponto de interseção de uma outra aresta do sólido com o plano  $\alpha$  – a aresta [AD]. Mais uma vez se trata da interseção entre uma reta não projetante (a reta suporte da aresta [AD]) com um plano não projetante, pelo que, de novo, se torna necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** acima enunciado.

- Assim, conduziu-se, pela aresta [AD], o plano  $\gamma$ , que é o plano projetante horizontal da aresta [AD]. O plano  $\gamma$  é um plano vertical.
- Em seguida determinou-se a reta de interseção do plano  $\gamma$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano secante) – a reta  $i'$ . A reta  $i'$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – o ponto F' (o seu traço frontal) e o ponto H' (o seu traço horizontal).
- O ponto em que a reta  $i'$  interseca a aresta [AD] é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta [AD] – o ponto A'.

Já temos outro ponto da figura da secção – o ponto A'.

A **terceira etapa** consiste em determinar as retas de interseção do plano secante (o plano  $\alpha$ ) com os planos que contêm as faces do sólido. Tendo em conta que nos falta, apenas, determinar um único ponto (o ponto em que o plano secante corta a aresta [BD]), basta determinar a reta de interseção do plano secante (o plano  $\alpha$ ) com o plano que contenha uma das duas faces que contêm aquela aresta – a face [ABD] ou a face [BCD].

Optou-se por determinar a reta de interseção do plano que contém a face [ABD] (o plano ABD) com o plano secante (o plano  $\alpha$ ) – a reta  $i''$ . Para definir a reta  $i''$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta  $i''$  – o ponto A'. De facto, o ponto A' é um ponto que pertence ao plano  $\alpha$  (pois pertence à reta  $i'$ , que pertence ao plano  $\alpha$ ) e pertence ao plano ABD (pois pertence à aresta lateral [AD], que está contida no plano ABD). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $i''$ .

O plano ABD é um plano passante (a aresta [AB] do tetraedro está contida no eixo X), pelo que a reta  $i''$  é necessariamente uma reta passante. Por outro lado, a reta  $i''$  é uma reta que pertence ao plano  $\alpha$ , pelo que o ponto de concorrência da reta  $i''$  com o eixo X é necessariamente o ponto de concorrência dos traços do plano  $\alpha$  (que é o ponto do plano  $\alpha$  que se situa no eixo X). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i''$ . Assim, a reta  $i''$  (a reta de interseção do plano ABD com o plano  $\alpha$ ) está definida por dois pontos – o ponto A' e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\alpha$ . A reta  $i''$  interseca a aresta [BD] no ponto B' – o ponto B' é, assim, o terceiro ponto da figura da secção.

A partir das projeções dos três vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um triângulo). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do tetraedro que são invisíveis em projeção frontal – as faces [ABD] e [ABC]. Assim, o lado da figura da secção que se situa numa daquelas duas faces é **invisível**, em projeção frontal (o lado [A'B']). Os lados [B'C'] e [A'C'] da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por se situarem em faces do sólido que são visíveis em projeção frontal (as faces [BCD] e [ACD], respetivamente).

Todas as faces do tetraedro são visíveis em projeção horizontal (excepto a face [ABC], que é invisível, em projeção horizontal). Uma vez que nenhum dos lados da figura da secção está contido na face [ABC], em projeção horizontal, todos os lados da **figura da secção** são visíveis (por se situarem em faces do sólido que são visíveis, em projeção horizontal).

#### Traçado:

As projeções do tetraedro e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo X representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo Y  $\equiv$  Z representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano  $\pi$ , do rebatimento do plano  $\pi$  para a construção das projeções do tetraedro, do plano  $\gamma$ , das retas  $i$ ,  $i'$  e  $i''$ , e, ainda, dos traçados referentes à determinação do ponto  $C'$ , nomeadamente a reta  $i_r$ ).



## 683.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados e pertencente ao plano  $\gamma$ . O ponto **A** pertence ao plano e tem afastamento nulo, pelo que o ponto **A** é um ponto do traço frontal do plano ( $f_\gamma$ ).

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\varphi$  (o plano secante) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções do quadrado da base da pirâmide:*

É dado que o lado **[AB]**, do quadrado, tem as suas projeções paralelas entre si. O plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal do lado **[AB]** (o segmento **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>]**) se situa necessariamente sobre o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ). Nesse sentido, é conhecida a direção da projeção horizontal do lado **[AB]** – a projeção frontal do lado **[AB]** (o segmento **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>]**) tem, assim, de ser paralelo a  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ), o que nos permitiu desenhar a reta suporte da projeção frontal do segmento, a partir de **A<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**). Por outro lado, atendendo a que o ponto **B** tem cota nula, a sua projeção frontal (**B<sub>2</sub>**) situa-se no eixo **X**, o que nos permitiu determinar as duas projeções do ponto **B**.

O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano  $\gamma$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $f_\gamma \equiv e_2 \equiv f_{\gamma_r}$ . O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) tem-se, imediatamente, **A<sub>r</sub>  $\equiv$  A<sub>2</sub>**. Em rebateu-se o ponto **B**, o que nos permitiu determinar **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido).

A partir de **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>** efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono em rebatimento (**C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\gamma$  e determinaram-se as projeções dos outros dois vértices do quadrado (os pontos **C** e **D**), o que nos permitiu desenhar as duas projeções do quadrado **[ABCD]**.

*Determinação das projeções da pirâmide:*

Atendendo a que a aresta lateral **[DV]** é horizontal (os seus pontos têm todos a mesma cota) e que a aresta lateral **[AV]** é de perfil (os seus pontos têm todos a mesma abcissa), foi possível determinar a projeção frontal do ponto **V** (**V<sub>2</sub>**) e, dessa forma, desenhar as projeções frontais de todas as arestas laterais do sólido.

Por outro lado, é dado que a aresta lateral **[DV]** da pirâmide mede 8 cm. Atendendo a que a aresta **[DV]** é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a aresta **[DV]** projeta-se em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em **D<sub>1</sub>** e com 8 cm de raio (o comprimento da aresta **[DV]**), determinou-se **V<sub>1</sub>**, sobre a linha de chamada do ponto **V**. A partir das projeções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

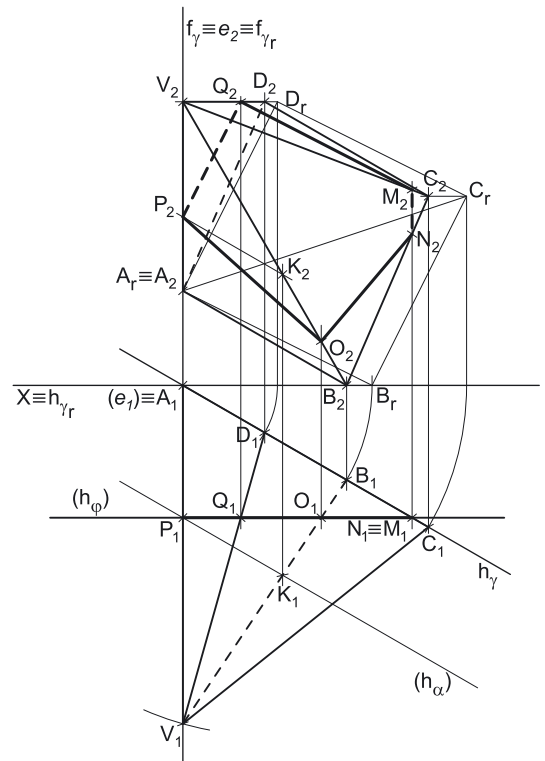
O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ABC<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[AD]** da base é invisível, por se situar na parte invisível do sólido (separa duas faces do sólido que são invisíveis em projeção frontal – a base e a face lateral **[ADV]**). Já as arestas laterais **[BV]** e **[CV]** são visíveis, por se situarem na parte visível do sólido (cada uma dessas duas arestas separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[AV<sub>1</sub>CD<sub>1</sub>]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>V<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **B**. Este, por ser o vértice de **menor cota** do sólido, é invisível (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]** (da base) e a aresta lateral **[BV]**. No entanto, as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal, é a referente à aresta **[BV]**. Salienta-se que a aresta lateral **[DV]** é visível, em projeção horizontal, pois o vértice **D** é o vértice de maior cota do sólido.

*Determinação das projeções da figura da secção:*

O plano secante (o plano  $\varphi$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não** é um polígono semelhante ao quadrado da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\varphi$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta três arestas laterais do sólido (as arestas **[AV]**, **[BV]** e **[DV]**), cortando a base em duas arestas (as arestas **[BC]** e **[CD]**). Assim, a figura da secção tem **cinco vértices**, pelo que é um **pentágono**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ). O plano  $\varphi$  corta a aresta lateral **[BV]** no ponto **O**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano  $\varphi$  corta a aresta lateral **[DV]** no ponto **Q**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano  $\varphi$  corta as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, nos pontos **N** e **M**, respetivamente – os pontos **N** e **M** (determinados diretamente a partir das suas projeções horizontais) têm as suas projeções horizontais coincidentes, pois as projeções horizontais das duas arestas a que pertencem (as arestas **[BC]** e **[CD]**) também estão coincidentes.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O plano  $\varphi$  corta a aresta lateral [AV] no ponto P – no entanto, a aresta lateral [AV] é uma aresta de perfil, pelo que as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Nesse sentido, não é possível determinar, de forma direta, a projeção frontal do ponto P – o ponto P é, assim, o ponto “problemático” da secção que o plano  $\varphi$  produz na pirâmide. Nesse sentido, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar (o **rebatimento do plano de perfil** que contém aquela aresta, por exemplo) ou a um raciocínio auxiliar (o recurso ao **método dos planos paralelos à base**).

Optou-se pelo recurso ao **método dos planos paralelos à base**. Nesse sentido conduziu-se, pelo ponto P, um plano  $\alpha$ , paralelo ao plano da base (o plano  $\gamma$ ) – o plano  $\alpha$  é o plano vertical, paralelo ao plano  $\gamma$ , que contém o ponto P. O plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\alpha$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto P ( $P_1$ ), que já havia sido determinada. O plano  $\alpha$  foi representado, apenas, pelo seu traço horizontal (omitiu-se o seu traço frontal), pelo que o traço horizontal do plano  $\alpha$  se identificou entre parêntesis. A secção produzida pelo plano  $\alpha$  na pirâmide é necessariamente um polígono semelhante ao polígono da base (outro quadrado), e com os seus lados paralelos aos lados correspondentes do quadrado da base. Assim, desenhou-se parte da secção que o plano  $\alpha$  produz na pirâmide.

O plano  $\alpha$  corta a aresta [BV] no ponto K – este ponto foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal de um dos lados da secção produzida pelo plano  $\alpha$  na pirâmide – o lado [KP]. Este lado é paralelo ao lado correspondente do quadrado [ABCD] – o lado [AB]. O desenho parcial da projeção frontal da figura da secção produzida pelo plano  $\alpha$  na pirâmide (respeitando a situação de paralelismo acima referida) permitiu-nos determinar a projeção frontal do ponto P ( $P_2$ ), sobre a projeção frontal da aresta a que pertence.

A partir das projeções dos cinco vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (o pentágono [MNO PQ]). Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\varphi$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\varphi$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – a face lateral [ADV] e a base da pirâmide. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados [PQ] e [MN], respetivamente). Os lados [OP], [NO] e [MQ] da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por se situarem em faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (as faces laterais [ABV], [BCV] e [CDV], respetivamente).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

#### Traçado:

As projeções da pirâmide e o traço horizontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo X representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os traços do plano  $\gamma$  (o plano que contém a base da pirâmide) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\gamma$  (para a construção do quadrado em verdadeira grandeza), do plano  $\alpha$  e, ainda, dos traçados relativos à determinação dos pontos “problemáticos” da secção.

## 684.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, ainda, o plano  $v$ , pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é o plano horizontal (de nível) que contém a base inferior do prisma. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente pela projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\theta$  (o plano secante) pelos seus traços.

**Resolução:***Determinação das projeções do prisma:*

A base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado **[ABCD]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), mediu-se (em verdadeira grandeza) o ângulo que a diagonal **[AC]** faz com o Plano Frontal de Projeção, o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta suporte da diagonal **[AC]**. Sobre essa reta mediram-se os 7,5 cm (a medida da diagonal do quadrado) e determinou-se  $C_1$ , a projeção horizontal do ponto **C**. Note que se garantiu que o ponto **A** é o vértice de maior afastamento do quadrado, como o enunciado refere expressamente.

A partir de  $A_1$  e  $C_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do quadrado, para o que foi necessário o recurso à mediatriz do segmento **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]** e a determinação de  $O_1$  a projeção horizontal do ponto **O**, o centro do quadrado). Em seguida, concluiu-se a construção a projeção horizontal do quadrado, a partir da sua inscrição na circunferência com centro em  $O_1$  e raio até  $A_1$  ou  $C_1$ . A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Note que a ordem atribuída aos vértices **B** e **D** foi arbitrária, pois o enunciado é omissivo.

O prisma tem 7 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, atendendo a que o plano  $v$  (o plano que contém a base **[ABCD]**) tem 2 cm de cota (a cota do ponto **A**), o plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do sólido) tem necessariamente 9 cm de cota ( $2 + 7 = 9$ ). Isso permitiu-nos representar o plano  $v'$ , pelo seu traço frontal – o plano  $v'$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

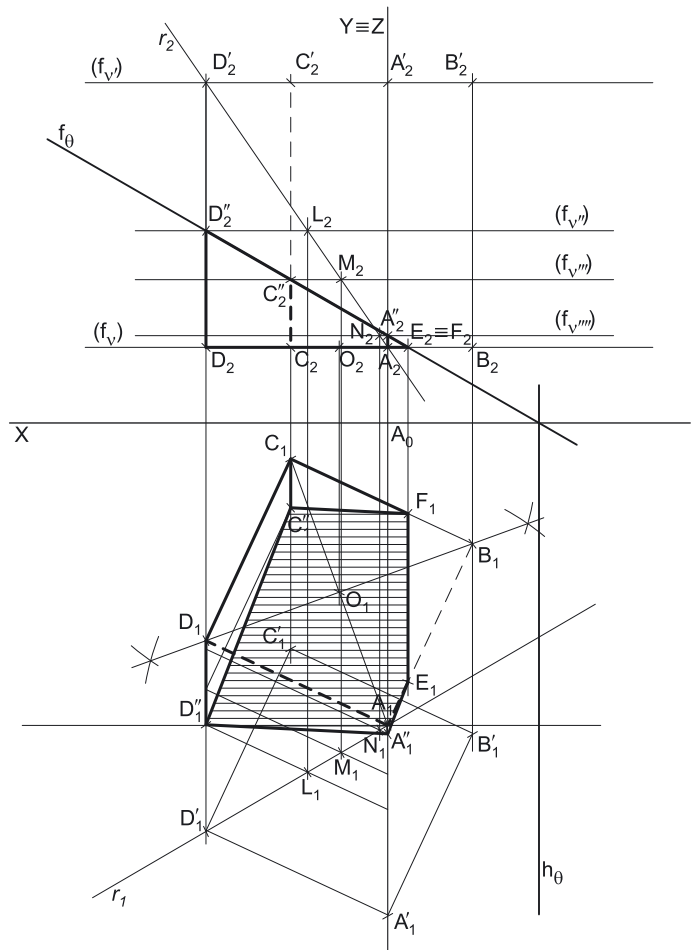
Em seguida, foi possível representar o ponto  $C'$  (o extremo superior da aresta lateral **[CC']**), pelas suas projeções – a sua projeção horizontal determinou-se em função do afastamento (que é dado no enunciado) e a sua projeção frontal situa-se sobre o plano frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é projetante frontal. Note que se teve em conta o facto de as arestas laterais do prisma estarem contidas em retas de perfil (os pontos **C** e  $C'$  têm a mesma abcissa).

Em seguida, teve-se em conta que as arestas laterais do prisma estão contidas em retas de perfil e, ainda, que as arestas da base superior são paralelas às arestas correspondentes da base inferior. Assim, pelas projeções do ponto **B** (um dos vértices da base inferior, consecutivo a **C**) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral **[BB']** (que não se identificaram) – o ponto  $B'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **B** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $C'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta **[B'C']** da base superior (que também não se identificaram) – o vértice  $B'$  da base superior é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

De forma idêntica, pelas projeções do ponto **D** (outro dos vértices da base inferior, consecutivo a **C**) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral **[DD']** (que não se identificaram) – o ponto  $D'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **D** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $C'$  conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta **[C'D']** da base superior (que também não se identificaram) – o vértice  $D'$  da base superior é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

Por fim, pelas projeções do ponto **A** conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral **[AA']** (que não se identificaram) – o ponto  $A'$  é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **A** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto  $D'$  (por exemplo) conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta **[A'D']** da base superior (que também não se identificaram) – o vértice  $A'$  da base superior é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

A partir dos oito vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BADD'A'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2A_2D_2D'_2A'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **C** e **C'**, que são os vértices de **menor afastamento** do prisma. Por isso mesmo, os vértices **C** e **C'** são **invisíveis** (em projeção frontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[BC]$  e  $[CD]$  (da base  $[ABCD]$ ) as arestas  $[B'C']$  e  $[C'D']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e ainda a aresta lateral  $[CC']$ . As arestas  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[B'C']$  e  $[C'D']$  estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que a aresta  $[CC']$  é a única invisibilidade a assinalar, em projeção frontal. Já a aresta lateral  $[AA']$  é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (note que os vértices **A** e **A'** são os vértices de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[BCDD'A'B']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1D'_1A'_1B'_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **C'**. O vértice **A**, por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$  e  $[AA']$ . O vértice **C'**, por ser um dos vértices de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$ ,  $[C'D']$  e  $[CC']$ .

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\theta$ ) não é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção **não** é um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta três arestas laterais do prisma (as arestas  $[AA']$ ,  $[CC']$  e  $[DD']$ ), cortando ainda a base inferior em duas das suas arestas (as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ ). Note que o plano  $\theta$  não corta a base superior. Assim, a figura da secção tem **cinco vértices**, pelo que é um **pentágono**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices da figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\theta$ ). O plano  $\theta$  corta as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base inferior, nos pontos **E** e **F**, respetivamente – os pontos **E** e **F** (determinados diretamente a partir das suas projeções frontais) têm as suas projeções frontais coincidentes, pois as projeções frontais das duas arestas a que pertencem (as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ ) também estão coincidentes.

O plano  $\theta$  corta a aresta lateral  $[AA']$  no ponto **A''** – no entanto, a aresta lateral  $[AA']$  é uma aresta de perfil, pelo que as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. O plano  $\theta$  corta a aresta lateral  $[CC']$  no ponto **C''** – no entanto, a aresta lateral  $[CC']$  é, também, uma aresta de perfil, pelo que as suas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade**. O plano  $\theta$  corta a aresta lateral  $[DD']$  no ponto **D''** – também nesta situação se tem que a aresta lateral  $[DD']$  é uma aresta de perfil, pelo que as suas projeções não verificam, igualmente, o **Critério de Reversibilidade**.

Nesse sentido, não é possível determinar, de forma direta, as projeções horizontais dos pontos **A''**, **C''** e **D''** – os pontos **A''**, **C''** e **D''** são, assim, os pontos **“problemáticos”** da secção que o plano  $\theta$  produz no prisma. Nesse sentido, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar (o **rebatimento dos planos de perfil** que contém aquelas arestas, por exemplo, ou uma **mudança do diedro de projeção**) ou um raciocínio auxiliar (o recurso ao **método dos planos paralelos às bases**).

Optou-se pelo recurso ao **método dos planos paralelos às bases**. Nesse sentido conduziu-se, pelo ponto **D''**, um plano  $v''$ , paralelo aos planos das bases (os planos  $v$  e  $v'$ ) – o plano  $v''$  é o plano horizontal (de nível) que contém o ponto **D''**. A secção produzida pelo plano  $v''$  no prisma é necessariamente um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases, e com os seus lados paralelos aos lados correspondentes dos quadrados das bases.

No entanto, ainda assim não temos qualquer elemento que nos permita determinar a secção que o plano  $v''$  produz no prisma, pois todas as arestas laterais do sólido são de perfil. Assim, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano que contém a face lateral  $[AA'D'D]$  – a reta  $r$ . A reta  $r$  é a reta suporte de uma das diagonais daquela face e está definida por dois pontos – os pontos **A** e **D'** (dois vértices opostos da face  $[AA'D'D]$ ). O plano  $v''$  corta a reta  $r$  no ponto **L** – o ponto **L** é, assim, um ponto da figura da secção que o plano  $v''$  produz no sólido – há apenas que ter em conta que o ponto **L** não se situa em nenhuma das arestas do sólido.

Assim, pela projeção horizontal do ponto **L** ( $L_1$ ) conduziu-se a projeção horizontal de um dos lados da figura da secção que o plano  $v''$  produz no prisma – o lado segundo o qual o plano  $v''$  corta a face lateral  $[AA'D'D]$ . Esse lado correspondente ao lado  $[AD]$ , da base inferior, e, por isso mesmo, é paralelo ao lado  $[AD]$ . O desenho da projeção horizontal desse lado (atendendo à situação de paralelismo atrás referida), permitiu-nos determinar a projeção horizontal do ponto **D''**.

De forma semelhante, conduziu-se, pelo ponto **C''**, um plano  $v'''$ , paralelo aos planos das bases (os planos  $v$  e  $v'$ ) – o plano  $v'''$  é o plano horizontal (de nível) que contém o ponto **C''**. A secção produzida pelo plano  $v'''$  no prisma é necessariamente um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases, e com os seus lados paralelos aos lados correspondentes dos quadrados das bases. O plano  $v'''$  corta a reta  $r$  no ponto **M** – o ponto **M** é, assim, um ponto da figura da secção que o plano  $v'''$  produz no sólido – há apenas que ter em conta que o ponto **M** não se situa em nenhuma das arestas do sólido.

Assim, pela projeção horizontal do ponto **M** ( $M_1$ ) conduziu-se a projeção horizontal de um dos lados da figura da secção que o plano  $v'''$  produz no prisma – o lado segundo o qual o plano  $v'''$  corta a face lateral  $[AA'D'D]$ . Esse lado correspondente ao lado  $[AD]$ , da base inferior, e, por isso mesmo, é paralelo ao lado  $[AD]$ . O desenho da projeção horizontal desse lado (atendendo à situação de paralelismo atrás referida), permitiu-nos determinar a projeção horizontal do ponto **C''**.

Por fim, de forma idêntica, conduziu-se, pelo ponto **A''**, um plano  $v''''$ , paralelo aos planos das bases (os planos  $v$  e  $v'$ ) – o plano  $v''''$  é o plano horizontal (de nível) que contém o ponto **A''**. A secção produzida pelo plano  $v''''$  no prisma é necessariamente um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases, e com os seus lados paralelos aos lados correspondentes dos quadrados das bases. O plano  $v''''$  corta a reta  $r$  no ponto **N** – o ponto **N** é, assim, um ponto da figura da secção que o plano  $v''''$  produz no sólido – há apenas que ter em conta que o ponto **N** não se situa em nenhuma das arestas do sólido.

Assim, pela projeção horizontal do ponto **N** ( $N_1$ ) conduziu-se a projeção horizontal de um dos lados da figura da secção que o plano  $v''''$  produz no prisma – o lado segundo o qual o plano  $v''''$  corta a face lateral  $[AA'D'D]$ . Esse lado correspondente ao lado  $[AD]$ , da base inferior, e, por isso mesmo, é paralelo ao lado  $[AD]$ . O desenho da projeção horizontal desse lado (atendendo à situação de paralelismo atrás referida), permitiu-nos determinar a projeção horizontal do ponto **A''**.

A partir das projeções dos cinco vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um pentágono irregular).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco do prisma inicial – um sólido em que a base é o pentágono [AEFCD] e em que a figura da secção (o pentágono [A''EFC''D'']) é a sua face superior (a parte do sólido inicial que está compreendida entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [EADD'A''], cuja projeção frontal é o polígono [E<sub>2</sub>A<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>]. Em projeção frontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices C, C' e F. Estes três vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [EF], [CF], [CD] (da base inferior), as arestas [C''F] e [C''D''] (da face superior) e ainda a aresta [CC'']. No entanto, todas estas arestas, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), à excepção da aresta [CC''], pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar se refere à da aresta lateral [CC'']. Já a aresta [AA''] é visível, em projeção frontal, pois situa-se na parte visível do sólido (os pontos A e A' são os vértices de maior afastamento do sólido)

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [EFCDD''A''], cuja projeção horizontal é o polígono [E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>D''<sub>1</sub>A''<sub>1</sub>]. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices A e C'. O vértice C', por serem um dos vértices de **maior cota** do sólido, é **visível** (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [FC''] e [C''D''] (da face superior), bem como a aresta lateral [CC'']. O vértice A, por ser um dos vértices de **menor cota** do sólido, é **invisível** (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [AE] e [AD] (da base inferior), bem como a aresta [AA''].

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado (em projeção horizontal), paralelamente ao eixo X.

#### Traçado:

O eixo X representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo Y ≡ Z representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano θ), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. Os planos horizontais (de nível) que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que os seus traços frontais se representaram a **leve**. As projeções do prisma, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (que é o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se igualmente a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à construção da projeção horizontal do quadrado, da reta r e, ainda, de todos os traçados referentes ao recurso aos planos paralelos às bases (para a determinação dos pontos "problemáticos" da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção, em projeção horizontal, executou-se a **leve**.

## 685.

#### Dados:

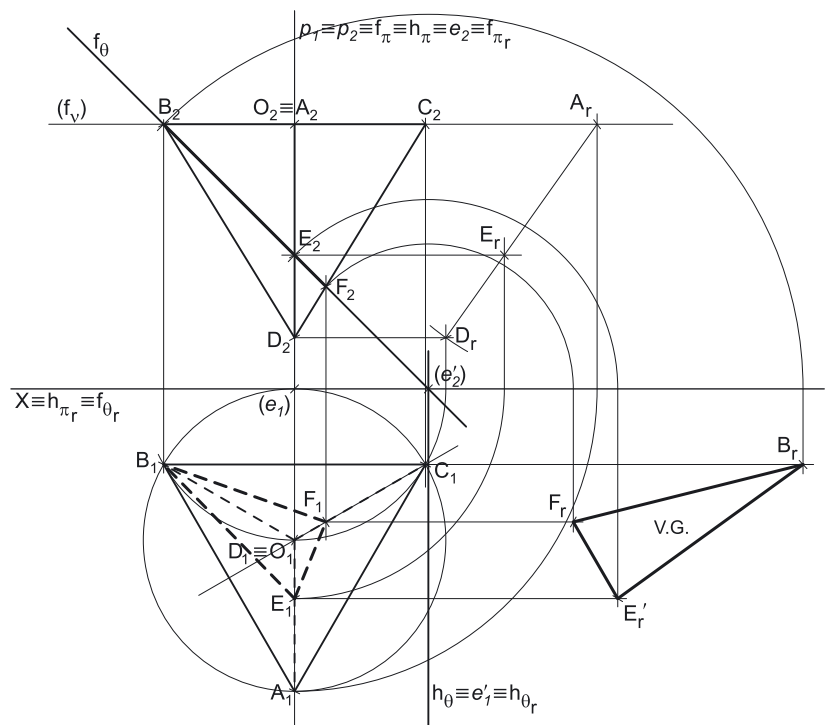
Em primeiro lugar, representou-se o ponto A, pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, ainda, o plano v, pelo seu traço frontal. O plano v é o plano horizontal (de nível) que contém a face [ABC] do tetraedro. O plano v é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (f<sub>v</sub>) passanecessariamente pela projeção frontal do ponto A (A<sub>2</sub>). O plano v não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano θ (o plano secante), pelos seus traços.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do tetraedro:

A face superior do sólido (o triângulo equilátero [ABC]) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano v), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. No entanto, numa primeira análise, os dados para construirmos a projeção horizontal do triângulo são insuficientes.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Uma vez que a aresta **[AD]** do tetraedro é de perfil, é possível concluir que a face oposta (a face **[BCD]**) está contida num plano de rampa, ou seja, que o lado **[BC]**, do triângulo, é necessariamente fronto-horizontal. Em função desta conclusão, é possível depreender que o diâmetro da circunferência (circunscrita ao triângulo) que passa pelo ponto **A** é necessariamente de topo (projetante frontal). Nesse sentido, e porque o ponto **A** é o vértice de maior afastamento do triângulo e ainda porque a circunferência circunscrita ao triângulo é tangente ao Plano Frontal de Projeção, conclui-se, assim, que o afastamento do ponto **A** (8 cm) é o comprimento desse diâmetro (e de qualquer diâmetro da circunferência), pelo que a circunferência tem necessariamente 4 cm de raio.

Face ao exposto, desenhou-se a projeção horizontal do diâmetro da circunferência que passa pelo ponto **A** e determinou-se o seu ponto médio, que é **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**, o centro da circunferência). Com o compasso, fazendo centro em **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência, que tem 4 cm de raio e é tangente ao eixo **X**. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do triângulo **[ABC]**. A projeção frontal do triângulo situa-se sobre o traço frontal do plano  $v$  (**f<sub>v</sub>**), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Note que se garantiu, ainda, que o vértice **B** é o vértice mais à esquerda do sólido, como o enunciado refere expressamente.

Um tetraedro toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**, qualquer que seja a face que se considere como base. Assim, o vértice **D** (o quarto vértice do sólido) situa-se numa reta que passa pelo ponto **O** e que é ortogonal ao plano que contém o triângulo **[ABC]** (que é o plano  $v$ ), ou seja, situa-se na reta vertical (projetante horizontal) que passa pelo ponto **O**. Dessa forma, determinou-se **D<sub>1</sub>**, a projeção horizontal do vértice **D**, coincidente com a projeção horizontal do ponto **O** (**O<sub>1</sub>**).

Apesar de o tetraedro tomar a forma aparente de uma pirâmide triangular regular, não é conhecida a altura dessa pirâmide mas, sim, é adquirido o facto de que **todas as arestas de um tetraedro são iguais** (têm o mesmo comprimento), pois trata-se de um **poliedro regular**. Assim, é um facto que todas as arestas que convergem no vértice **D** (as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]**) têm o mesmo comprimento dos lados do triângulo **[ABC]** (que estão em verdadeira grandeza em projeção horizontal). No entanto, nenhuma daquelas arestas se projeta em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de projeção, pois nenhuma daquelas três arestas é paralela a qualquer dos planos de projeção. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano projetante da aresta **[AD]**, que é de perfil – o plano  $\pi$  (que é um plano de perfil). Nesse sentido, representou-se o plano  $\pi$  pelos seus traços, de forma imediata.

Efetuuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira (que é o traço frontal do plano – **f<sub>\pi</sub>**), bem como os planos ortogonais à charneira, que são planos horizontais – os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Rebateram-se os pontos **A** e **O**, determinando **A<sub>r</sub>** e **O<sub>r</sub>**. Por **O<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular ao eixo **X**, que corresponde ao eixo do sólido (relativo à face **[ABC]**) em rebatimento. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **A<sub>r</sub>** e com raio igual à medida do lado do triângulo **[ABC]** (que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal), determinou-se **D<sub>r</sub>** sobre a perpendicular ao eixo **X** que passa por **O<sub>r</sub>**, desenhando-se em seguida a aresta **[AD]** em rebatimento – o segmento **[A<sub>r</sub>D<sub>r</sub>]**. Note que se garantiu que o vértice **D** tem cota inferior ao plano  $v$ , para que a face **[ABC]** seja visível em projeção horizontal, como o enunciado refere expressamente.

Uma vez que, no rebatimento efetuado, os pontos mantêm as suas cotas, transportou-se a cota do ponto **D** para a sua linha de chamada (através de uma paralela ao eixo **X**, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), determinando-se **D<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **D**).

Em seguida, a partir das projeções dos quatro vértices do tetraedro, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BACD]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Todos os vértices do sólido pertencem ao contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[BC]** é invisível em projeção frontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal (as faces **[BCD]** e **[ABC]**). Note, ainda, que **B** e **C** são os vértices de menor afastamento do sólido. Apesar disso, a aresta **[BC]** está oculta por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Por outro lado, há a referir que a aresta **[AD]** é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (o vértice **A** é o vértice de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é o triângulo **[ABC]**, cuja projeção horizontal é o triângulo **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **D**. Este, por ser o vértice de **menor cota** do tetraedro, é **invisível**, bem como todas as arestas que neles convergem, ou seja, as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]** são invisíveis em projeção horizontal.

### a) Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao plano da face horizontal (de nível), pelo que a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao triângulo da face **[ABC]**. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante contém o ponto **B** (que é um dos vértices do tetraedro e é, também, um dos vértices da figura da secção) e, além disso, corta duas arestas do sólido (as arestas **[AD]** e **[CD]**). Assim, a figura da secção tem **três vértices**, pelo que é um **triângulo** (mas não é um triângulo equilátero, pois o plano secante **não é paralelo** ao plano da face **[ABC]**).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **três vértices da figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\theta$ ). Como atrás se referiu, o ponto **B** é, imediatamente, um ponto da figura da secção (o plano  $\theta$  corta as três arestas que convergem no ponto **B** num mesmo ponto – o ponto **B**, precisamente). O plano  $\theta$  corta a aresta **[CD]** no ponto **F**, que foi determinado diretamente, a partir da sua projeção frontal.

O plano  $\theta$  corta a aresta **[AD]** no ponto **E** – no entanto, a aresta **[AD]** é de perfil, pelo que as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Assim, não é possível determinar, de forma direta, a projeção horizontal do ponto **E** – o ponto **E** é, assim, o **ponto “problemático”** da secção que o plano  $\theta$  produz no tetraedro. Nesse sentido, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar (o **rebatimento do plano de perfil** que contém a aresta, por exemplo) ou a um raciocínio auxiliar (o recurso ao **método dos planos paralelos à base**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo recurso ao **rebatimento do plano de perfil**, pois, de facto, já se recorreu a este processo geométrico auxiliar para a determinação das projeções do tetraedro. Nesse sentido, e porque os arcos do rebatimento dos pontos estão contidos em planos horizontais (planos ortogonais à charneira do rebatimento, que é  $f_{\pi}$ ), transportou-se a cota do ponto **E**, a partir de  $E_2$  (a projeção frontal do ponto **E**) para o rebatimento da aresta **[AD]**, através de uma paralela ao eixo **X** – essa paralela corresponde ao plano ortogonal à charneira e contém o arco do rebatimento do ponto **E**. Este procedimento permitiu-nos determinar  $E_r$  (o ponto **E** rebatido), sobre o segmento **[A<sub>r</sub>D<sub>r</sub>]** (a aresta **[AD]** rebatida). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$ , desenhando a projeção horizontal do arco do rebatimento do ponto **E**, o que nos permitiu determinar  $E_1$  (a projeção horizontal do ponto **E**).

A partir das projeções dos três vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um triângulo). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Uma vez que o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal, a projeção frontal da figura da secção reduz-se a um segmento de reta, pelo que não há lugar à representação de quaisquer invisibilidades (em projeção frontal).

Todas as faces do tetraedro são invisíveis em projeção horizontal (excepto a face **[ABC]**, que é visível, em projeção horizontal). Uma vez que nenhum dos lados da figura da secção está contido na face **[ABC]**, em projeção horizontal, todos os lados da **figura da secção** são **invisíveis** (por se situarem em faces do sólido que são invisíveis, em projeção horizontal).

**b)** Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção – a charneira foi  $h_{\theta}$  (o traço horizontal do plano  $\theta$ ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente,  $h_{\theta} \equiv e_r \equiv h_{\theta_r}$ .

Em seguida, rebateram-se os três vértices da figura da secção, tendo em conta que os arcos dos respetivos rebatimentos estão contidos em planos frontais (planos ortogonais à charneira do rebatimento). Nesse sentido, os arcos do rebatimento dos quatro pontos projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos mantêm os respetivos afastamentos (ao longo dos seus rebatimentos), o que nos permitiu determinar  $B_r$ ,  $E_r$  e  $F_r$ . Por fim, desenhou-se o triângulo **[B<sub>r</sub>E<sub>r</sub>F<sub>r</sub>]**, que é a figura da secção em verdadeira grandeza, o que se assinalou devidamente no desenho.

#### Traçado:

As projeções do tetraedro e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da **figura da secção** (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção da projeção horizontal do triângulo, do plano  $\pi$ , do rebatimento do plano  $\pi$  para a construção das projeções do tetraedro, ou, ainda, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$ , para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).



## 686.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, ainda, o plano  $\varphi$ , pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o ponto **A** pelas suas projeções. O ponto **A** é um ponto da base da pirâmide, que está contida no plano  $\varphi$  – uma vez que o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, a projeção horizontal do ponto **A** ( $A_1$ ) está necessariamente sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ).

Os dados permitiram-nos, também, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da pirâmide:

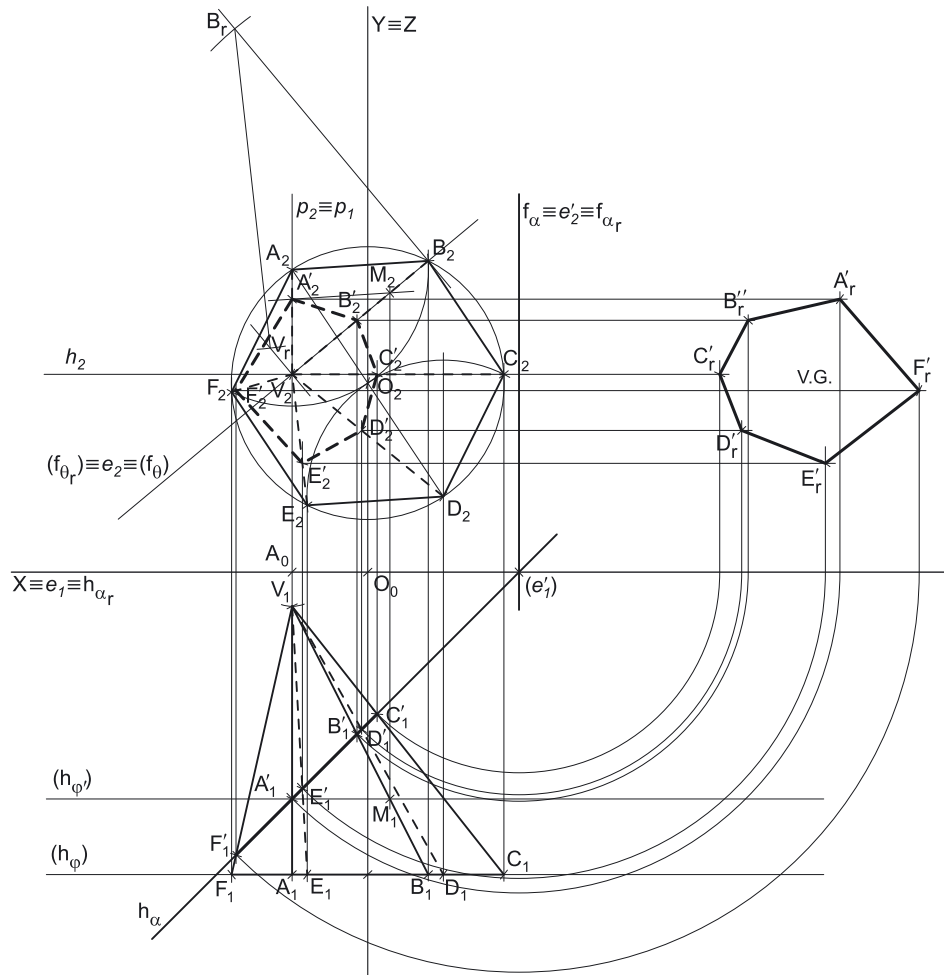
A base da pirâmide (o hexágono **[ABCDEF]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com raio até  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao hexágono. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, em projeção frontal, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos restantes vértices do hexágono. Estes foram identificados segundo a ordem dada no enunciado – o vértice **B** situa-se à direita do vértice **A**. A projeção horizontal do hexágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Atendendo a que a aresta lateral **[CV]** é horizontal (os seus pontos têm todos a mesma cota) e que a aresta lateral **[AV]** é de perfil (os seus pontos têm todos a mesma abcissa), foi possível determinar a projeção frontal do ponto **V** ( $V_2$ ) e, dessa forma, desenhar as projeções frontais de todas as arestas laterais do sólido.

Por outro lado, é dado que a aresta lateral **[BV]** da pirâmide mede 8,5 cm. No entanto, a aresta **[BV]** não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que a aresta **[BV]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano projetante frontal da aresta **[BV]** para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano projetante frontal da aresta (o plano  $\theta$ ) pelo seu traço frontal – tendo em conta que se omitiu a representação do traço horizontal do plano  $\theta$ , o seu traço frontal identificou-se entre parêntesis.

Assim, a charneira do rebatimento foi o traço frontal do plano ( $f_\theta$ ), pelo que se tem imediatamente  $f_\theta \equiv e_2 \equiv f_{\theta_r}$ . Em seguida, conduziu-se, por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto **B**) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira e contém o arco do rebatimento do ponto **B**). Sobre essa perpendicular à charneira representou-se o afastamento do ponto **B** (o raio do arco do rebatimento) e determinou-se  $B_r$  (o ponto **B** rebatido).

Por  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**) conduziu-se, também, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – com o compasso, fazendo centro em  $B_r$  e com 8,5 cm de raio (o comprimento da aresta **[BV]**), determinou-se  $V_r$ , sobre a perpendicular à charneira que passa por  $V_2$ . Por fim, transportou-se o afastamento do ponto **V** (a distância de  $V_r$  à charneira) para a linha de chamada do ponto **V**, para baixo do eixo **X**, o que nos permitiu determinar a projeção horizontal do ponto **V** ( $V_1$ ). Note que se garantiu que o ponto **V** tem afastamento inferior à base, para que a base da pirâmide seja visível em projeção frontal, como o enunciado refere expressamente.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, a partir das projeções de todos os sete vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o hexágono [ABCDEF], cuja projeção frontal é o hexágono [A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>]. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – todas as arestas laterais da pirâmide são invisíveis, em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [FABCV], cuja projeção horizontal é o polígono [F<sub>1</sub>A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **D** e **A**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [CD], [DE] e [EF], da base, e as arestas laterais [DV] e [EV]. No entanto, as arestas [CD], [DE] e [EF], da base, estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que as invisibilidades a assinalar em projeção horizontal são as referentes às arestas laterais [DV] e [EV]. Por outro lado, as arestas laterais [AV] e [BV] são visíveis (em projeção horizontal), por se situarem na parte visível do sólido (os pontos **A** e **B** são os vértices de maior cota da pirâmide).

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao hexágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as seis arestas laterais do sólido, não cortando a base. Assim, a figura da secção tem **seis vértices**, pelo que é um **hexágono** (trata-se de um hexágono irregular, pois o plano secante **não é paralelo** ao plano da base).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\alpha$ ). O plano  $\alpha$  corta a aresta lateral [BV] no ponto **B'**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano  $\alpha$  corta a aresta lateral [CV] no ponto **C'**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano  $\alpha$  corta a aresta lateral [DV] no ponto **D'**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano  $\alpha$  corta a aresta lateral [EV] no ponto **E'**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano  $\alpha$  corta a aresta lateral [FV] no ponto **F'**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal.

O plano  $\alpha$  corta a aresta lateral [AV] no ponto **A'** – no entanto, a aresta lateral [AV] é uma aresta de perfil, pelo que as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Nesse sentido, não é possível determinar, de forma direta, a projeção frontal do ponto **A'** – o ponto **A'** é, assim, o **ponto “problemático”** da secção que o plano  $\alpha$  produz na pirâmide. Nesse sentido, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar (o **rebatimento do plano de perfil** que contém a aresta [AV], por exemplo) ou um raciocínio auxiliar (o recurso ao **método dos planos paralelos à base**).

Optou-se pelo recurso ao **método dos planos paralelos à base**. Nesse sentido conduziu-se, pelo ponto **A'**, um plano  $\varphi'$ , paralelo ao plano da base (o plano  $\varphi$ ) – o plano  $\varphi'$  é o plano frontal (de frente) que contém o ponto **A'**. A secção produzida pelo plano  $\varphi'$  na pirâmide é necessariamente um polígono semelhante ao polígono da base, e com os seus lados paralelos aos lados correspondentes do polígono da base. Assim, desenhou-se parte da secção que o plano  $\varphi'$  produz na pirâmide.

O plano  $\varphi$  corta a aresta [BV] no ponto **M** – este ponto foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal de um dos lados da secção produzida pelo plano  $\varphi'$  na pirâmide – o lado [MA']. Este lado é paralelo ao lado correspondente do hexágono [ABCDEF] – o lado [AB]. O desenho parcial da projeção frontal da figura da secção produzida pelo plano  $\varphi'$  na pirâmide (respeitando a situação de paralelismo acima referida) permitiu-nos determinar a projeção frontal do ponto **A'** (**A'<sub>2</sub>**), sobre a projeção frontal da aresta a que pertence.

A partir das projeções dos seis vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (o hexágono [A'B'C'D'E'F']). Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – todas as faces laterais da pirâmide são invisíveis em projeção frontal, pelo que todos os lados da figura da secção são igualmente invisíveis em projeção frontal. Note que a base é a única face da pirâmide que é visível em projeção frontal, e não existe nenhum lado da figura da secção que se situe na base (o plano secante não corta a base).

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

#### Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se com deformação, pois o plano que a contém (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções, pelo que para se determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano secante (o plano que contém a figura da secção) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que foi **f<sub>α</sub>**, pelo que se tem imediatamente **f<sub>α</sub> ≡ e'<sub>2</sub> ≡ f<sub>αr</sub>**. Os planos que contém os arcos do rebatimento (os planos ortogonais à charneira) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento de cada um dos vértices da figura da secção, o que nos permitiu determinar os pontos **A'<sub>r</sub>**, **B'<sub>r</sub>**, **C'<sub>r</sub>**, **D'<sub>r</sub>**, **E'<sub>r</sub>** e **F'<sub>r</sub>**. A partir dos seis vértices da figura da secção em rebatimento, desenhou-se o hexágono [**A'<sub>r</sub>**, **B'<sub>r</sub>**, **C'<sub>r</sub>**, **D'<sub>r</sub>**, **E'<sub>r</sub>**, **F'<sub>r</sub>**], que é a figura da secção em verdadeira grandeza (em rebatimento), o que se assinalou convenientemente no desenho.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Traçado:

As projeções da pirâmide e o traço horizontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respectivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à construção do hexágono, do plano  $\theta$  e dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$  (para a determinação da projeção horizontal do ponto **V**), dos traçados relativos à determinação dos pontos “problemáticos” da secção ou, ainda, os referentes à determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

## 687.

Por **secção cônica** entende-se a **figura de secção** que um plano qualquer produz numa **superfície cônica**. Assim, de uma forma geral, o termo **cônicas** refere-se aos diferentes tipos de curvas que resultam das **secções cônicas**.

## 688.

O tipo de **cônica** gerada por uma determinada secção depende da **posição do plano secante** em relação aos diversos elementos da superfície cônica – se o plano secante contém o vértice da superfície ou não, se o plano secante corta todas as geratrizes da superfície ou não (pode cortar todas as geratrizes, ou cortar todas menos uma delas, ou cortar todas menos duas delas), se o plano secante é paralelo ao plano da diretriz ou não, etc.

## 689.

A secção produzida num **cone** é um **círculo** sempre que o plano secante **não contém o vértice do cone e é paralelo ao plano da base**.

## 690.

Um plano produz uma secção **triangular** num **cone** nas situações em que contém o vértice do cone e é secante à base do cone. Nesse caso, a secção produzida por esse plano na **superfície cônica** que limita lateralmente o cone é composta por **duas geratrizes** (as geratrizes que contém os dois lados do triângulo que não pertencem ao plano da base do cone).

## 691.

A secção produzida numa **superfície cônica** por um plano qualquer é uma **parábola** nas situações em que o plano não contém o vértice da superfície e é paralelo a uma única geratriz da superfície.

## 692.

Tendo em conta que esse plano produz uma secção **hiperbólica** no cone, sabe-se que o plano **é paralelo a duas geratrizes da superfície e não contém o vértice do cone** (caso contivesse o vértice do cone, a secção produzida seria **triangular**).

Sublinha-se, no entanto, que a **secção hiperbólica** se refere, nesse caso, a **um único ramo da hipérbole**, pois um cone é limitado lateralmente por uma única folha da superfície cônica e a secção hiperbólica apenas compreende os dois ramos da hipérbole no caso de se tratar da secção num a superfície cônica.

## 693.

A secção produzida numa **superfície cônica** por um plano qualquer é uma **elipse** nas situações em que o plano não contém o vértice da superfície, não é paralelo ao plano da diretriz nem é paralelo a qualquer das geratrizes da superfície.

## 694.

Em primeiro lugar, se a secção é **elíptica**, sabe-se que o plano secante não é paralelo ao plano da base, não contém o vértice do cone e não é paralelo a qualquer das geratrizes da superfície cônica que limita lateralmente o cone. A secção será um **segmento da elipse** se o plano secante, verificando as condições anteriores, cortar a base do sólido.

## 695.

Se o plano  $\alpha$  produz uma secção **parabólica** numa superfície cônica, sabe-se que o plano  $\alpha$  é paralelo a **uma única geratriz** dessa superfície (e não contém o vértice da superfície, pois nesse caso a secção seria uma única reta – a própria geratriz à qual o plano  $\alpha$  é paralelo). Por outro lado, se o plano  $\delta$  produz uma secção **hiperbólica** nessa superfície cônica, sabe-se que o plano  $\delta$  é paralelo a **duas geratrizes** da superfície (e não contém o vértice da superfície, pois nesse caso a secção seria triangular).

Assim, de uma forma sucinta, nenhum dos dois planos contém o vértice da superfície, mas enquanto o plano  $\alpha$  é paralelo a uma única geratriz do cone, o plano  $\delta$  é paralelo a duas geratrizes da superfície.

## 696.

**Dados:**

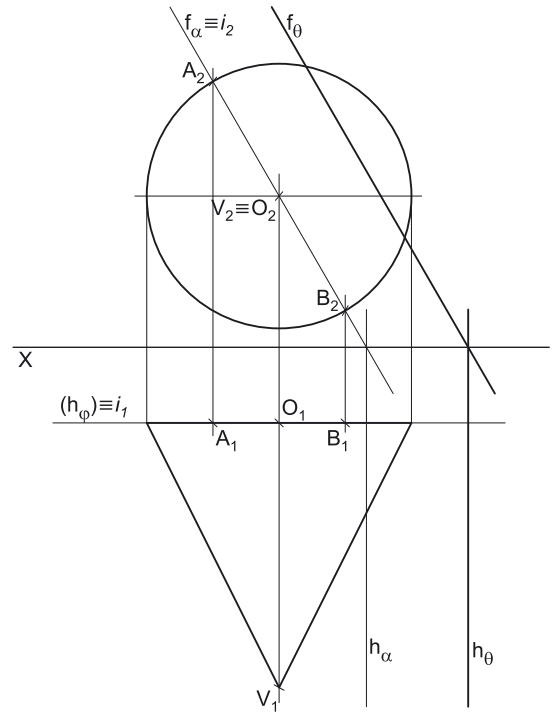
Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone, pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto  $O$  ( $O_1$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Representou-se, também, o plano  $\theta$ , o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados).

**Resolução:***Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, uma reta de topo (uma reta projetante frontal) – assim, tem-se imediatamente  $V_2 \equiv O_2$  (os dois pontos situam-se na mesma projetante frontal).

Por outro lado, o cone tem 8 cm de altura, que é a distância do seu vértice ao plano da base, ou seja, neste caso é a diferença entre os afastamentos do vértice e do plano da base. Tendo em conta que o plano da base (o plano  $\varphi$ ) tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $O$ ), o vértice do cone (o ponto  $V$ ) tem necessariamente 10 cm de afastamento ( $2 + 8 = 10$ ). Este raciocínio permitiu-nos determinar  $V_1$ , a projeção horizontal do ponto  $V$ . Note que o ponto  $V$  tem de ter afastamento positivo, para que o cone se situe no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.



Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

*Identificação do tipo de secção produzida:*

Pretende-se identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\theta$  no cone. Para tal há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **2.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **3.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**1.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto  $V$ ) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\theta$ ). O plano  $\alpha$  é o plano paralelo ao plano  $\theta$  que se conduziu pelo vértice  $V$  do cone. O plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_\alpha$ ) passa por  $V_2$  (a projeção frontal do ponto  $V$ ). Por outro lado, os traços do plano  $\alpha$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\theta$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\theta$ ), para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

**2.** Determinou-se a reta de interseção do plano  $\alpha$  com o plano da base do cone (o plano  $\varphi$ ) – a reta  $i$ . O plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ) está sobre o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\alpha$ . A base do cone está contida no plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ) está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\varphi$ . A reta  $i$ , definida pelas suas duas projeções, é, assim, a reta que pertence simultaneamente aos dois planos (o plano  $\alpha$  e o plano  $\varphi$ ).

**3.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta de interseção (a reta  $i$ ) é secante à base do cone (corta a base do cone nos pontos  $A$  e  $B$ ), pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\theta$  é uma **hipérbole** (ou, mais corretamente, um **ramo de uma hipérbole**, pois o cone é limitado lateralmente por **uma única folha de uma superfície cônica**).

**Traçado:**

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traços do plano  $\alpha$ , o plano paralelo ao plano  $\theta$  que passa pelo vértice do sólido).

## 697.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone, pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Representou-se, também, o plano  $\delta$ , o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados).

### Resolução:

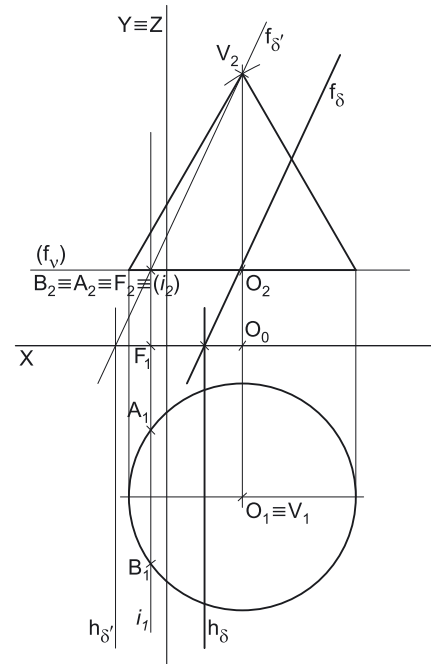
#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, uma reta vertical (uma reta projetante horizontal) – assim, tem-se imediatamente  $V_1 \equiv O_1$  (os dois pontos situam-se na mesma projetante horizontal).

Tendo em conta que as geratrizes do cone medem 6 cm, e que todas as geratrizes têm o mesmo comprimento (por se tratar de um cone de revolução), as geratrizes que se projetam em verdadeira grandeza em projeção frontal são as geratrizes frontais (de frente), ou seja, as geratrizes do contorno aparente frontal (as geratrizes que contêm pelos pontos de maior e de menor abcissa da base). Assim, com o compasso, fazendo centro na projeção frontal do ponto de menor abcissa da circunferência (que não se identificou) e com 6 cm de raio (o comprimento das geratrizes), desenhou-se um arco de circunferência, que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**), na linha de chamada de  $V_1$ .

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção horizontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).



#### Identificação do tipo de secção produzida:

Pretende-se identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\delta$  no cone. Para tal há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **2.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **3.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**1.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\delta$ ). O plano  $\delta'$  é o plano paralelo ao plano  $\delta$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano  $\delta'$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{\delta'}$ ) passa por  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano  $\delta'$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\delta'$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\delta$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\delta$ ), para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

**2.** Determinou-se a reta de interseção do plano  $\delta'$  com o plano da base do cone (o plano  $v$ ) – a reta  $i$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os planos  $\delta'$  e  $v$  são planos secantes, pelo que têm uma única “família” de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é uma reta dessa única “família” de retas que os dois planos têm em comum. Tanto o plano  $\delta'$  como o plano  $v$  são planos projetantes frontais, pelo que a única “família” de retas que os dois planos têm em comum é a “família” das retas projetantes frontais (as retas de topo). Assim, já temos a direção da reta  $i$ . Falta-nos um ponto. A reta  $i$  pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que o seu traço frontal (o ponto **F**) se situa sobre os traços frontais dos dois planos (o ponto **F** é o ponto de concorrência dos traços frontais dos dois planos) – já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ . A reta  $i$  está, assim, definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (é uma reta projetante frontal).

**3.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta de interseção (a reta  $i$ ) é secante à base do cone (corta a base do cone nos pontos **A** e **B**), pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\delta$  é uma **hipérbole** (ou, mais corretamente, um **ramo de uma hipérbole**, pois o cone é limitado lateralmente por **uma única folha de uma superfície cónica**).

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta  $i$  e dos traços do plano  $\delta'$ , o plano paralelo ao plano  $\delta$  que passa pelo vértice do sólido).

698.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos O e V, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano φ, o plano frontal (de frente) que contém a base do cone, pelo seu traço horizontal. O plano φ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h<sub>φ</sub>) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto O (O<sub>1</sub>). O plano φ não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Representou-se, também, o plano γ, o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados).

Resolução:

Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano φ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em O<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto O) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço horizontal do plano φ (h<sub>φ</sub>), pois o plano φ é um plano projetante horizontal.

Em seguida, desenharam-se a projeção horizontal do contorno aparente horizontal do sólido (que é um triângulo com um vértice em V<sub>1</sub> e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção horizontal da base) e a projeção frontal do contorno aparente frontal do cone (que é a própria circunferência que delimita a base, pois a projeção frontal do vértice está no interior da circunferência).

Identificação do tipo de secção produzida:

Pretende-se identificar a curva (a cônica) resultante da secção produzida pelo plano γ no cone. Para tal há que recorrer ao método geral para a identificação da figura da secção, que se executa em três etapas, a saber: 1. conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; 2. determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; 3. analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto V) um plano paralelo ao plano secante (o plano γ). O plano γ' é o plano paralelo ao plano γ que se conduziu pelo vértice V do cone. O plano γ' é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h<sub>γ'</sub>) passa por V<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto V). Por outro lado, os traços do plano γ' (que são duas retas concorrentes do plano γ') são paralelos aos traços homónimos do plano γ (que são duas retas concorrentes do plano γ), para que se verifique o Critério de paralelismo entre planos.

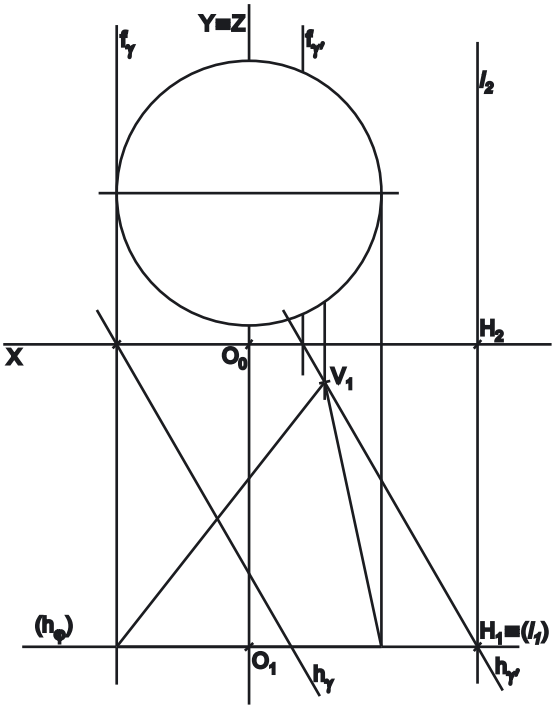
2. Determinou-se a reta de interseção do plano γ' com o plano da base do cone (o plano φ) – a reta i. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os planos γ' e φ são planos secantes, pelo que têm uma única “família” de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é uma reta dessa única “família” de retas que os dois planos têm em comum. Tanto o plano γ' como o plano φ são planos projetantes horizontais, pelo que a única “família” de retas que os dois planos têm em comum é a “família” das retas projetantes horizontais (as retas verticais). Assim, já temos a direção da reta i. Falta-nos um ponto. A reta i pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que o seu traço horizontal (o ponto H) se situa sobre os traços horizontais dos dois planos (o ponto H é o ponto de concorrência dos traços horizontais dos dois planos) – já temos o ponto que nos faltava para definir a reta i. A reta i está, assim, definida por um ponto (o ponto H, o seu traço horizontal) e por uma direção (é uma reta projetante horizontal).

3. Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta de interseção (a reta i) é exterior à base do cone (não corta a base do cone), pelo que a secção produzida no cone pelo plano γ é uma elipse.

Tendo em conta que o plano γ corta a base do cone (o que é possível constatar em projeção horizontal), a secção produzida pelo plano γ no cone é efetivamente um segmento de elipse.

Traçado:

O eixo X representou-se a médio, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo Y ≡ Z representou-se a leve, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a médio. As restantes linhas representam-se a leve, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta i e dos traços do plano γ', o plano paralelo ao plano γ que passa pelo vértice do sólido).





## 699.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O** (o centro da base), pelas suas projeções, em função dos dados. Tendo em conta que a circunferência que delimita a base é tangente ao Plano Frontal de Projeção, o afastamento do ponto **O** é igual ao raio da base, ou seja, o ponto **O** tem 4 cm de afastamento. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone, pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção horizontal do vértice do cone ( $V_1$ ), bem como representar o plano  $\alpha$ , o plano secante, pelos seus traços.

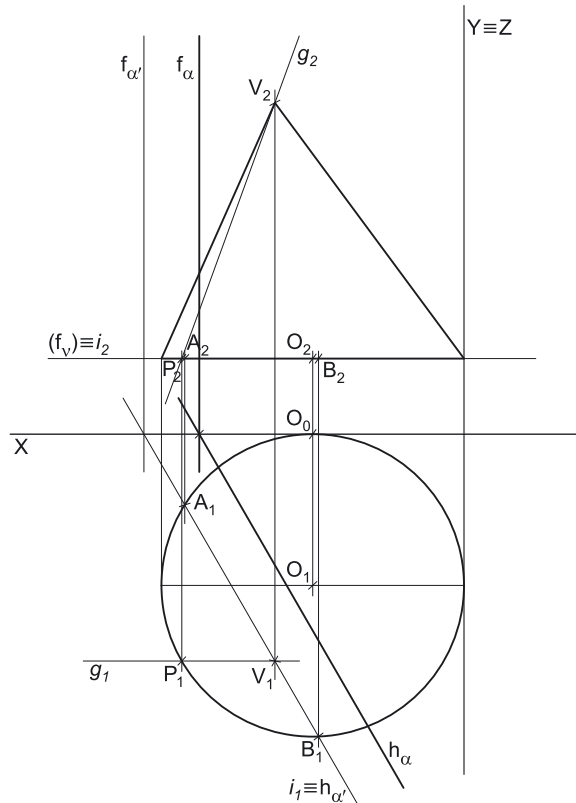
### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base do sólido (que é tangente ao eixo **X**). A projeção frontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se as projeções da geratriz  $g$ , a geratriz frontal (de frente) do cone que faz um ângulo de  $70^\circ$  (a.d.) com o Plano Horizontal de Projeção. Para tal começou-se por se desenhar a sua projeção horizontal ( $g_1$ ). O que nos permitiu determinar as projeções do ponto **P** (que é o ponto da geratriz  $g$  que pertence à base do cone). Note que, para que a geratriz  $g$  faça um ângulo de abertura para a direita como Plano Horizontal de Projeção, o ponto **P** tem de se situar à esquerda do vértice do cone (caso se situasse à direita, aquele ângulo teria necessariamente a sua abertura para o lado esquerdo).

Por fim, determinou-se a projeção frontal do vértice do cone ( $V_2$ ), sobre a projeção frontal da geratriz  $g$  ( $g_2$ ) e na linha de chamada de  $V_1$  (a projeção horizontal do vértice).



Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base, pois a projeção horizontal do vértice está no interior da circunferência).

#### Identificação do tipo de secção produzida:

Pretende-se identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cone. Para tal há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **2.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **3.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**1.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\alpha$ ). O plano  $\alpha'$  é o plano paralelo ao plano  $\alpha$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano  $\alpha'$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\alpha'}$ ) passa por  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano  $\alpha'$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha'$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ), para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

**2.** Determinou-se a reta de interseção do plano  $\alpha'$  com o plano da base do cone (o plano  $v$ ) – a reta  $i$ . O plano  $\alpha'$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ) está sobre o traço horizontal do plano  $\alpha'$  ( $h_{\alpha'}$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\alpha'$ . A base do cone está contida no plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ) está sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $v$ . A reta  $i$ , definida pelas suas duas projeções, é, assim, a reta que pertence simultaneamente aos dois planos (o plano  $\alpha'$  e o plano  $v$ ).

**3.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta de interseção (a reta  $i$ ) é secante à base do cone (corta a base do cone nos pontos **A** e **B**), pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\alpha$  é uma **hipérbole** (ou, mais corretamente, um **ramo de uma hipérbole**, pois o cone é limitado lateralmente por **uma única folha de uma superfície cónica**).

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta  $i$  e dos traços do plano  $\alpha'$ , o plano paralelo ao plano  $\alpha$  que passa pelo vértice do sólido).

## 700.

**Dados:**

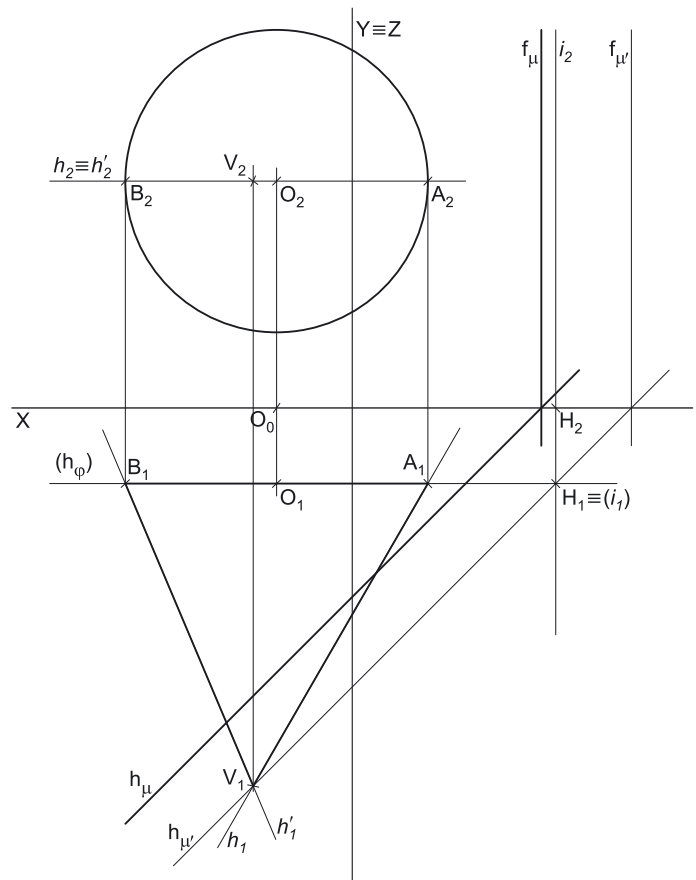
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone, pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Representou-se, também, o plano  $\mu$ , o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados).

**Resolução:***Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

O cone tem 6 cm de altura, que é a distância do seu vértice ao plano da base, ou seja, neste caso é a diferença entre os afastamentos do vértice e do plano da base. Tendo em conta que o plano da base (o plano  $\varphi$ ) tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**), o vértice do cone (o ponto **V**) tem necessariamente 8 cm de afastamento ( $2 + 6 = 8$ ).

Em seguida, desenharam-se as projeções das retas suporte das duas geratrizes horizontais (de nível) do cone – as retas **h** e **h'**. A reta **h**, que passa pelo ponto mais à direita da base do cone (o ponto **A**) é a reta suporte da geratriz que faz, com o Plano Frontal de Projeção, o ângulo dado. O ponto **V** (o vértice do cone) é o ponto da reta **h** que tem 8 cm de afastamento. Assim, a reta **h'**, que passa pelo ponto mais à esquerda da base do cone (o ponto **B**) e pelo ponto **V**, é a reta suporte da outra geratriz horizontal (de nível) do cone – a geratriz que faz um ângulo de abertura para a direita.



Note que, caso a reta **h** passasse pelo ponto **B**, a reta **h'** passaria pelo ponto **A** e, então, o ângulo que a reta **h'** faria com o Plano Frontal de Projeção seria de abertura para a esquerda e não para a direita, como o enunciado refere expressamente.

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices em  $A_1$  e  $B_1$  – os pontos de menor e de maior abscissa da projeção horizontal da base, respetivamente) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base, pois a projeção frontal do vértice está no interior da circunferência).

*Identificação do tipo de secção produzida:*

Pretende-se identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\mu$  no cone. Para tal há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **2.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **3.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**1.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\mu$ ). O plano  $\mu'$  é o plano paralelo ao plano  $\mu$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano  $\mu'$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\mu'}$ ) passa por  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano  $\mu'$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\mu'$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\mu$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\mu$ ), para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

**2.** Determinou-se a reta de interseção do plano  $\mu'$  com o plano da base do cone (o plano  $\varphi$ ) – a reta **i**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os planos  $\mu'$  e  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única "família" de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é uma reta dessa única "família" de retas que os dois planos têm em comum. Tanto o plano  $\mu'$  como o plano  $\varphi$  são planos projetantes horizontais, pelo que a única "família" de retas que os dois planos têm em comum é a "família" das retas projetantes horizontais (as retas verticais). Assim, já temos a direção da reta **i**. Falta-nos um ponto. A reta **i** pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que o seu traço horizontal (o ponto **H**) se situa sobre os traços horizontais dos dois planos (o ponto **H** é o ponto de concorrência dos traços horizontais dos dois planos) – já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i**. A reta **i** está, assim, definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (é uma reta projetante horizontal).

**3.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta de interseção (a reta **i**) é exterior à base do cone (não corta a base do cone), pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\mu$  é uma **elipse**.

Tendo em conta que o plano  $\mu$  não corta a base do cone (o que é possível constatar em projeção horizontal), a secção produzida pelo plano  $\mu$  no cone é uma **elipse** completa

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta *i* e dos traços do plano  $\mu'$ , o plano paralelo ao plano  $\mu$  que passa pelo vértice do sólido).

## 701.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **V**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone, pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). Representou-se, também, o plano  $v'$ , o plano secante, pelo seu traço frontal (em função dos dados). Nenhum dos planos  $v$  e  $v'$  tem traço horizontal (são ambos paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que os respetivos traços frontais se identificaram entre parêntesis.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base do cone. A projeção frontal da circunferência reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior ( $V_1$ ). O arco menor da circunferência que delimita a base (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

#### Determinação das projeções da figura da secção:

Em primeiro lugar há que identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano  $v'$  no cone. Tendo em conta que o plano  $v'$  é paralelo ao plano da base (o plano  $v$ ) e não contém o vértice do cone, a secção produzida pelo plano  $v'$  no cone é um **círculo**.

Para determinar as projeções da figura da secção, há que determinar tanto o **centro** como o **raio** do círculo. O **centro** do círculo é o ponto de interseção do eixo do cone (o segmento de reta  $[OV]$ ) com o plano secante – o ponto **Q**. O ponto **Q** foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta suporte do eixo do cone) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ).

Para se determinar o **raio** do círculo, há que determinar o ponto de interseção de uma geratriz qualquer da superfície com o plano secante (o plano  $v'$ ). Optou-se por se recorrer à geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone, cuja projeção frontal já foi determinada (integra o desenho da projeção frontal do cone). No entanto, essa geratriz ainda não foi desenhada em projeção horizontal. Assim, desenhou-se a projeção horizontal dessa geratriz – a geratriz  $[AV]$ . Esta geratriz está, assim, definida por dois pontos – o ponto **V** (o vértice do cone) e o ponto **A** (o ponto mais à direita da base do cone), o que nos permitiu desenhar a sua projeção horizontal (o segmento de reta  $[A_1V_1]$ ).

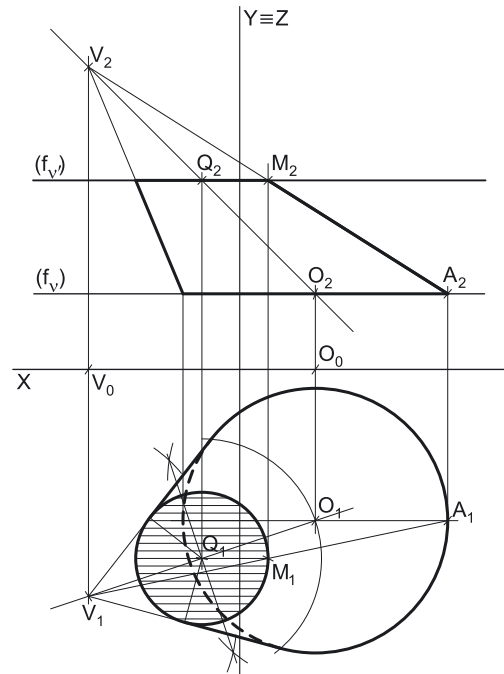
Em seguida, determinou-se o ponto de interseção da geratriz  $[AV]$  com o plano secante – o ponto **M**. O ponto **M** foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta suporte da geratriz  $[AV]$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ).

O raio do círculo é, assim, a distância  $\overline{QM}$ . Por outro lado, atendendo a que o **círculo** (a **figura da secção**) está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, o círculo projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Dessa forma, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio até  $M_1$  (a projeção horizontal do ponto **M**), desenhou-se a projeção horizontal da **figura da secção** (o **círculo** de centro **Q** e raio  $\overline{QM}$ ).

Note que a projeção horizontal do círculo é **necessariamente tangente** às duas geratrizes do contorno aparente horizontal (em projeção horizontal). Nesse sentido, desenharam-se os raios da figura da secção referentes aos pontos de tangência, raios esses que são necessariamente perpendiculares às projeções horizontais das respetivas geratrizes do contorno aparente horizontal. A projeção frontal da figura da secção reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal.

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção.

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cone compreendida entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **projeção frontal do contorno aparente frontal** é um trapézio, cujos lados paralelos são as projeções frontais da base do cone e da figura da secção, em que o segmento  $[A_2M_2]$  é um dos outros dois lados. A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** é uma linha mista fechada limitada, à esquerda, pelo **arco menor da figura da secção** (que está compreendido entre as projeções horizontais das geratrizes do contorno aparente horizontal) e, à direita, pelo **arco maior da base** (que está compreendido entre as projeções horizontais daquelas geratrizes) e limitado, ainda, pelos troços das projeções horizontais das geratrizes do contorno aparente horizontal (que se situam entre aquelas duas curvas). Note que o **arco menor da base inferior** que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal é **invisível** (em projeção horizontal), facto que se assinalou devidamente no desenho.

A **figura da secção** é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), o que foi devidamente identificado com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção horizontal).

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço frontal do plano secante, porque integra os dados, representou-se a **médio**. As projeções do cone, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente horizontal do cone e da projeção horizontal da geratriz **[AV]**). O tracejado que preenche a figura da secção, em projeção horizontal, executou-se a **leve**.

## 702.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **M** e a reta **r**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. As projeções da reta **r** fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, pois a reta **r** é paralela ao  $\beta_{1/3}$  (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes, cujas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado). Não é possível, de forma direta, representar o plano  $\phi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone, pois não nos é dado o seu afastamento. No entanto, foi possível representar o plano  $\phi'$ , o plano secante, pelo seu traço horizontal (em função do seu afastamento). O plano  $\phi'$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

#### Resolução:

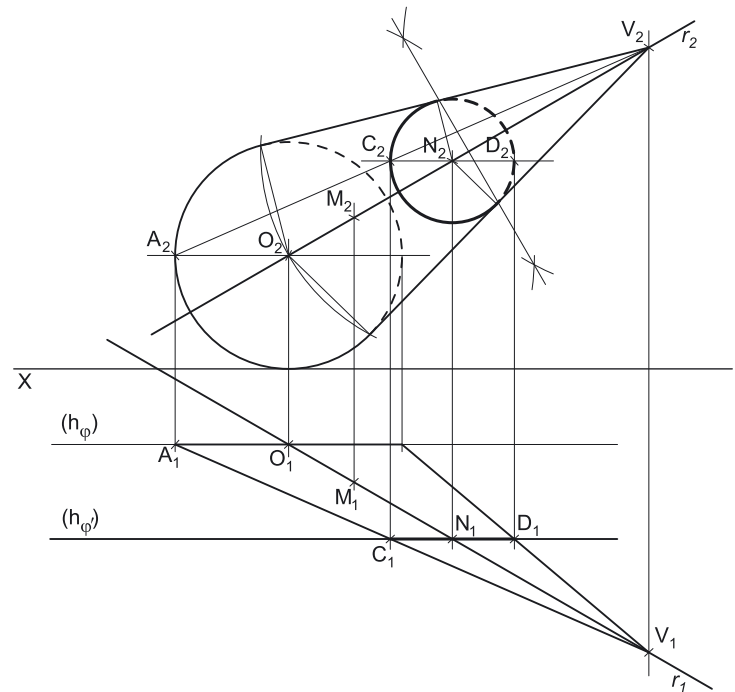
##### Determinação das projeções do cone:

A base do cone tem 3 cm de raio e é tangente ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, o centro da base (o ponto **O**) é o ponto da reta **r** (a reta suporte do eixo do cone) que dista 3 cm do Plano Horizontal de Projeção, ou seja, é o ponto da reta **r** que tem 3 cm de cota. Este raciocínio permitiu-nos determinar as projeções do ponto **O** e, em seguida, representar o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a base do cone) pelo seu traço horizontal. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto **O** (**O<sub>1</sub>**). O plano  $\phi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\phi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a base do cone (que é tangente ao eixo **X**). A projeção horizontal da circunferência reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\phi$  ( $h_\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

O cone tem 5,5 cm de altura, que é a distância do seu vértice ao plano da base, ou seja, neste caso é a diferença entre os afastamentos do vértice e do plano da base. Assim, o vértice do cone (o ponto **V**) é o ponto da reta **r** que tem mais 5,5 cm de afastamento do que o plano  $\phi$  (o plano da base) – o ponto **V** é o ponto da reta **r** que dista 5,5 cm do plano  $\phi$ , medidos ortogonalmente ao plano  $\phi$  (a **distância de um ponto a um plano** mede-se ortogonalmente ao plano). Nesse sentido, determinaram-se as projeções do ponto **V**, sobre as projeções homónimas da reta **r**.

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V<sub>1</sub>** e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (**V<sub>2</sub>**). O arco menor da circunferência que delimita a base (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções da figura da secção:

Em primeiro lugar há que identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\varphi'$  no cone. Tendo em conta que o plano  $\varphi'$  é paralelo ao plano da base (o plano  $\varphi$ ) e não contém o vértice do cone, a secção produzida pelo plano  $\varphi'$  no cone é um **círculo**.

Para determinar as projeções da figura da secção, há que determinar tanto o **centro** como o **raio** do círculo. O **centro** do círculo é o ponto de interseção do eixo do cone (o segmento de reta **[OV]**) com o plano secante – o ponto **N**. O ponto **N** foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta suporte do eixo do cone – a reta **r**) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

Para se determinar o **raio** do círculo, há que determinar o ponto de interseção de uma geratriz qualquer da superfície com o plano secante (o plano  $\varphi'$ ). Optou-se por se recorrer à geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal do cone, cuja projeção horizontal já foi determinada (integra o desenho da projeção horizontal do cone). No entanto, essa geratriz ainda não foi desenhada em projeção frontal. Assim, desenhou-se a projeção frontal dessa geratriz – a geratriz **[AV]**. Esta geratriz está, assim, definida por dois pontos – o ponto **V** (o vértice do cone) e o ponto **A** (o ponto mais à esquerda da base do cone), o que nos permitiu desenhar a sua projeção frontal (o segmento de reta **[A<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**).

Em seguida, determinou-se o ponto de interseção da geratriz **[AV]** com o plano secante – o ponto **C**. O ponto **C** foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta suporte da geratriz **[AV]**) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

O raio do círculo é, assim, a distância **NC**. Por outro lado, atendendo a que o **círculo** (a **figura da secção**) está contido num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, o círculo projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Dessa forma, com o compasso, fazendo centro em **N<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **N**) e com raio até **C<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **C**), desenhou-se a projeção frontal da **figura da secção** (o **círculo** de centro **N** e raio **NC**).

Note que a projeção frontal do círculo é **necessariamente tangente** às duas geratrizes do contorno aparente frontal (em projeção frontal). Nesse sentido, desenharam-se os raios da figura da secção referentes aos pontos de tangência, raios esses que são necessariamente perpendiculares às projeções frontais das respetivas geratrizes do contorno aparente frontal. A projeção horizontal da figura da secção reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  (**h<sub>φ'</sub>**), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal.

Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Tendo em conta que a projeção horizontal da figura da secção se reduz a um segmento de reta sobre **h<sub>φ'</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ), não existe qualquer invisibilidade a assinalar em projeção horizontal. Já em projeção frontal, o arco menor da figura da secção (que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** (por se situar na parte invisível do sólido, em projeção frontal), o que se assinalou devidamente no desenho. Note que os pontos em que o plano  $\varphi'$  corta as geratrizes do contorno aparente frontal são os pontos que estabelecem a distinção entre a **parte visível** da figura da secção e a sua **parte invisível**.

## Traçado:

As projeções da reta **r** e do cone, bem como o traço horizontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base do cone) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, com as respetivas invisibilidades, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente frontal do cone e da projeção frontal da geratriz **[AV]**).

## 703.

### Dados:

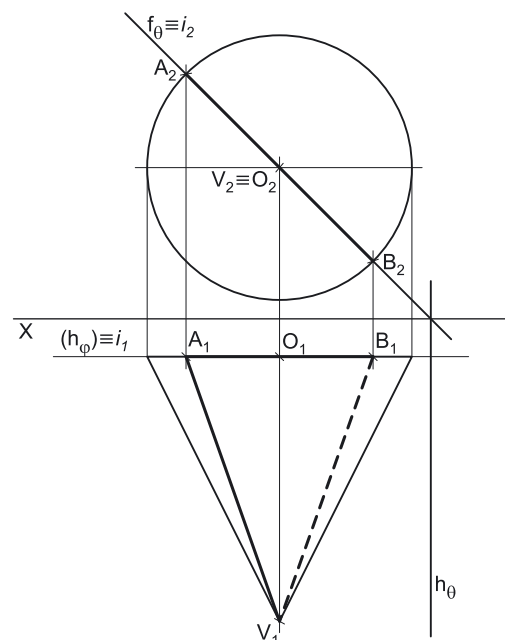
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone, pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto **O** (**O<sub>1</sub>**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a base do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  (**h<sub>φ</sub>**), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, uma reta de topo (uma reta projetante frontal) – assim, tem-se imediatamente **V<sub>2</sub> ≡ O<sub>2</sub>** (os dois pontos situam-se na mesma projetante frontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, o cone tem 6 cm de altura, que é a distância do seu vértice ao plano da base, ou seja, neste caso é a diferença entre os afastamentos do vértice e do plano da base. Tendo em conta que o plano da base (o plano  $\varphi$ ) tem 1 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $O$ ), o vértice do cone (o ponto  $V$ ) tem necessariamente 7 cm de afastamento ( $1 + 6 = 7$ ). Este raciocínio permitiu-nos determinar  $V_1$ , a projeção horizontal do ponto  $V$ . Note que o ponto  $V$  tem de ter afastamento positivo, para que o cone se situe no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

#### Determinação das projeções da figura da secção:

Em primeiro lugar, representou-se, o plano  $\theta$ , o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados). Tendo em conta que o plano  $\theta$  contém o vértice do cone e que o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) passa necessariamente por  $V_2$  (a projeção frontal do ponto  $V$ ).

Em seguida, há que identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\theta$  no cone. Tendo em conta que o plano  $\theta$  contém o vértice do cone, a secção produzida pelo plano  $\theta$  no cone pode ser **um ponto, uma reta ou um triângulo**, dependendo da posição do plano secante (o plano  $\theta$ ) em relação à base de cone – se corta ou não a base do cone ou se é tangente à base do cone.

Nesse sentido, para averiguar a posição do plano secante em relação à base do cone, determinou-se a reta de interseção do plano secante (o plano  $\theta$ ) com o plano da base do cone (o plano  $\varphi$ ). O plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ) está sobre o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\theta$ . A base do cone está contida no plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ) está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\varphi$ . A reta  $i$ , definida pelas suas duas projeções, é, assim, a reta que pertence simultaneamente aos dois planos (o plano  $\theta$  e o plano  $\varphi$ ).

A reta  $i$  é secante à base do cone em dois pontos – os pontos **A** e **B**. Assim, a figura da secção que o plano  $\theta$  produz no cone é necessariamente um **triângulo** – o triângulo **[ABV]**. Tendo em conta que já forma determinados os três vértices do triângulo resultante da secção produzida, desenharam-se as duas projeções da figura da secção – atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

A projeção frontal da figura da secção reduz-se a um segmento de reta sobre  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal – assim, não existe qualquer invisibilidade a assinalar em projeção frontal. Já em projeção horizontal, o lado **[BV]** do triângulo é **invisível**, por se situar na parte invisível da superfície lateral do sólido. Note que **B** é o vértice de menor cota da figura da secção. Salienta-se que o lado **[AB]** da figura da secção, que está contido na base do cone (que é projetante horizontal), apesar de ser invisível, está oculto por linhas do cone que são visíveis em projeção horizontal (nomeadamente a semicircunferência que integra o contorno aparente horizontal do cone).

#### Traçado:

As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, com as respetivas invisibilidades, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares.

## 704.

#### Dados:

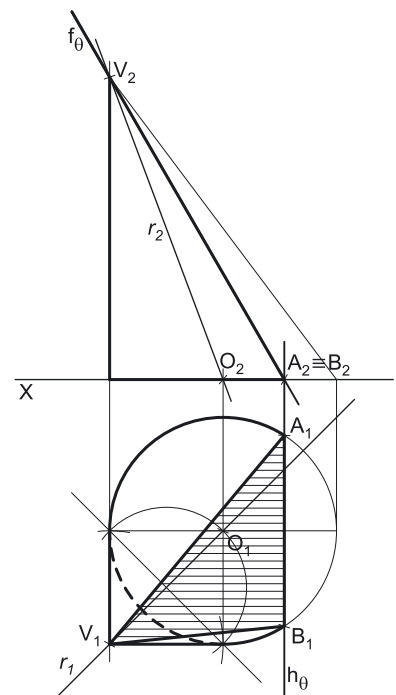
Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), a reta suporte do eixo do cone.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a base do sólido, em projeção horizontal. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta no eixo **X**, pois a base está contida no Plano Horizontal de Projeção.

É dado que a geratriz mais à esquerda do cone é de perfil – este dado permitiu-nos determinar  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto  $V$ ), sobre  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ), com a abcissa do ponto mais à esquerda da base do cone. Por outro lado, o cone tem 8 cm de altura, que é a distância do seu vértice ao plano da base, ou seja, neste caso é a diferença entre as cotas do vértice e do plano da base. Tendo em conta que o plano da base (o Plano Horizontal de Projeção) tem cota nula, o vértice do cone (o ponto  $V$ ) tem necessariamente 8 cm de cota ( $0 + 8 = 8$ ). Este raciocínio permitiu-nos determinar  $V_2$ , a projeção frontal do ponto  $V$  e, dessa forma, desenhar  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ) – note que, desta forma, a reta  $r$  está definida por dois pontos (o ponto  $O$  e o ponto  $V$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior ( $V_1$ ). Salienta-se que uma das geratrizes do contorno aparente horizontal é a **geratriz de perfil** do cone e a outra geratriz do contorno aparente horizontal é a **geratriz frontal** (a única geratriz frontal da superfície, que é a sua geratriz de menor afastamento). O arco menor da circunferência que delimita a base (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

#### *Determinação das projeções da figura da secção:*

Em primeiro lugar, representou-se, o plano  $\theta$ , o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados). Tendo em conta que o plano  $\theta$  contém o vértice do cone e que o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) passa necessariamente por  $V_2$  (a projeção frontal do ponto  $V$ ).

Em seguida, há que identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\theta$  no cone. Tendo em conta que o plano  $\theta$  contém o vértice do cone, a secção produzida pelo plano  $\theta$  no cone pode ser **um ponto, uma reta ou um triângulo**, dependendo da posição do plano secante (o plano  $\theta$ ) em relação à base de cone – se corta ou não a base do cone ou se é tangente à base do cone.

Nesse sentido, para averiguar a posição do plano secante em relação à base do cone, determinou-se a reta de interseção do plano secante (o plano  $\theta$ ) com o plano da base do cone (o Plano Horizontal de Projeção), que é imediatamente o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ).

A reta  $h_\theta$  é secante à base do cone em dois pontos – os pontos **A** e **B**. Assim, a figura da secção que o plano  $\theta$  produz no cone é necessariamente um **triângulo** – o triângulo **[ABV]**. Tendo em conta que já forma determinados os três vértices do triângulo resultante da secção produzida, desenharam-se as duas projeções da figura da secção.

#### *Determinação das projeções do sólido resultante da secção.*

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cone compreendida entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção.

A **projeção frontal do contorno aparente frontal** é um triângulo limitado, à esquerda, pela projeção frontal da geratriz de perfil e, à direita, pela projeção frontal da figura da secção (que está sobre  $f_\theta$ ). A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** é uma linha mista fechada limitada, à esquerda, pela projeção horizontal da geratriz de perfil do cone e, inferiormente, pela projeção horizontal da geratriz frontal (de frente) do contorno aparente horizontal. As partes curvas do contorno aparente horizontal do sólido são os dois arcos da base que estão compreendidos entre as geratrizes do contorno aparente horizontal e a projeção horizontal do segmento **[AB]**, que também integra o contorno aparente horizontal do novo sólido. Note que o **arco menor da base** que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal é **invisível** (em projeção horizontal), facto que se assinalou devidamente no desenho.

A **figura da secção** é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), o que foi devidamente identificado com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção horizontal).

#### **Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do cone, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente horizontal do cone). O tracejado que preenche a figura da secção, em projeção horizontal, executou-se a **leve**.

## 705.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). Por outro lado, o plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou com o recurso a parêntesis. Por fim representou-se, também, o plano  $\alpha$ , o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados).

**Resolução:***Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fez-se centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, uma reta vertical (uma reta projetante horizontal) – assim, tem-se imediatamente  $V_1 \equiv O_1$  (os dois pontos situam-se na mesma projetante horizontal).

Por outro lado, o cone tem 7 cm de altura, que é a distância do seu vértice ao plano da base, ou seja, neste caso é a diferença entre as cotas do vértice e do plano da base. Tendo em conta que o plano da base (o plano  $v$ ) tem 1 cm de cota (a cota do ponto **O**), o vértice do cone (o ponto **V**) tem necessariamente 8 cm de cota ( $1 + 7 = 8$ ). Este raciocínio permitiu-nos determinar  $V_2$ , a projeção frontal do ponto **V**. Note que o ponto **V** tem de ter cota positiva, para que o cone se situe no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

A **determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano  $\alpha$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

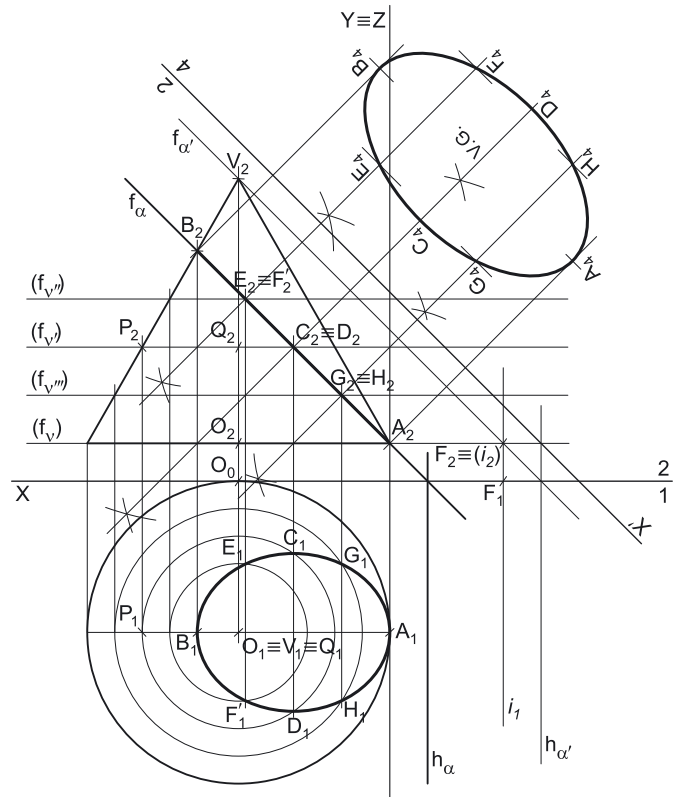
*1. Identificação do tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.*

Para identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**A.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\alpha$ ). O plano  $\alpha'$  é o plano paralelo ao plano  $\alpha$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano  $\alpha'$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{\alpha'}$ ) passa por  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano  $\alpha'$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha'$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ), para que se verifique o **critério de paralelismo entre planos**.

**B.** Determinou-se a reta de interseção do plano  $\alpha'$  com o plano da base do cone (o plano  $v$ ) – a reta  $i$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os planos  $\alpha'$  e  $v$  são planos secantes, pelo que têm uma única "família" de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é uma reta dessa única "família" de retas que os dois planos têm em comum. Tanto o plano  $\alpha'$  como o plano  $v$  são planos projetantes frontais, pelo que a única "família" de retas que os dois planos têm em comum é a "família" das retas projetantes frontais (as retas de topo). Assim, já temos a direção da reta  $i$ . Falta-nos um ponto. A reta  $i$  pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que o seu traço frontal (o ponto **F**) se situa sobre os traços frontais dos dois planos (o ponto **F** é o ponto de concorrência dos traços frontais dos dois planos) – já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ . A reta  $i$  está, assim, definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (é uma reta projetante frontal).

**C.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta  $i$  é exterior à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\alpha$  é uma **elipse** (ou um **segmento de elipse**). Tendo em conta que o plano  $\alpha$  **não corta a base** do cone (o que é possível constatar em projeção frontal, pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal), a secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cone é efetivamente uma **elipse**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que uma **elipse** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

## 2. Determinar os pontos em que o plano $\alpha$ é um plano projetante frontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta, a partir das respetivas projeções frontais.

Tendo em conta que o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta, a partir das respetivas projeções frontais.

O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente frontal** em dois pontos – os pontos em que o plano  $\alpha$  corta as geratrizes do contorno aparente frontal.

Note que o plano  $\alpha$  contém o ponto de menor abscissa (o ponto mais à direita) da base do cone que, dessa forma, já é um ponto da figura da secção e que se identificou imediatamente – o ponto **A**. Nesse sentido, é possível considerar que o plano  $\alpha$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal no ponto **A**. De forma semelhante, é também possível considerar que o plano  $\alpha$  corta a base do cone no ponto **A**.

O plano  $\alpha$  corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal no ponto **B** – as projeções do ponto **B** situam-se sobre as projeções homónimas dessa geratriz e foram determinadas de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal. As projeções da geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal estão definidas pelas projeções do vértice **V**, do cone, e pelas projeções do ponto mais à esquerda da circunferência que delimita a base (e que não se identificou). Note que a projeção horizontal desta geratriz coincide com o diâmetro fronto-horizontal da circunferência.

O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente horizontal** (que é a circunferência que delimita a base) no ponto **A**, o que é possível constatar a partir da projeção frontal da circunferência (tal como atrás se referiu).

Conclui-se que o plano  $\alpha$  corta os contornos aparentes do cone em dois pontos apenas – os pontos **A** e **B**. Já temos **dois pontos** da figura da secção (da elipse)

## 3. Determinar o espaço útil para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano horizontal (de nível), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos horizontais (de nível). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor cota da secção** (porque os planos paralelos à base são planos horizontais). Tenha em conta que qualquer plano horizontal (de nível) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante frontal, é possível constatar, de forma imediata, que o ponto **A** é o **ponto de menor cota** da secção e que **B** é o **ponto de maior cota** da secção (o que não seria possível garantir, caso o plano não fosse projetante frontal). Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre os pontos **A** e **B**.

Por outro lado, **nesta situação**, o segmento **[AB]** é, imediatamente, o **eixo maior** da elipse.

## 4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Tendo em conta que o segmento **[AB]** é o eixo maior da elipse, o primeiro plano auxiliar (paralelo ao plano da base) a que se deverá recorrer deve ser um plano que passe pelo ponto médio do segmento **[AB]** (que não se identificou). Note que o ponto médio do segmento **[AB]** se determinou com o recurso à mediatriz do segmento **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>]** (a projeção frontal do segmento **[AB]**).

Assim, pelo ponto médio do segmento **[AB]** conduziu-se o primeiro plano horizontal (de nível) – o plano  $v'$ . Este plano, porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $v'$  interseja o eixo do cone. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano  $v'$ . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano  $v'$  corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cone. Os pontos **Q** e **P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. O círculo com centro no ponto **Q** e raio **QP** é a secção que o plano  $v'$  produz no cone (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio **Q<sub>1</sub>P<sub>1</sub>**, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $v'$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano secante), que é uma reta de topo (uma reta projetante frontal), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **C** e **D**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções horizontais – as suas projeções frontais (**C<sub>2</sub>** e **D<sub>2</sub>**) situam-se sobre o traço frontal do plano  $v'$ , pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. O segmento **[CD]** é, **nesta situação**, o **eixo menor** da elipse. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **quatro pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **C** e **D** repetiu-se mais duas vezes.

Tendo em conta que o segmento **[AB]** foi dividido em dois segmentos de reta geometricamente iguais (pelo recurso à sua mediatriz), o recurso a mais planos paralelos ao plano da base deve garantir a distribuição o mais homogênea possível dos pontos determinados. Nesse sentido, é aconselhável a determinação dos pontos médios desses dois segmentos de reta.

Determinou-se o ponto médio do segmento de reta de maior cota (com o recurso à sua mediatriz), pelo qual se conduziu o segundo plano auxiliar – o plano  $v''$ . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim determinou-se a reta de interseção do plano  $v''$  com o plano  $\alpha$  e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção – os pontos **E** e **F**. Já temos **seis pontos** da secção. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, determinou-se o ponto médio do segmento de reta de menor cota (com o recurso à sua mediatriz), pelo qual se conduziu o terceiro plano auxiliar – o plano  $v'''$ . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, bem como a reta de interseção do plano  $v'''$  com o plano  $\alpha$  – a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção (os pontos **G** e **H**). Já temos os **oito pontos** necessários ao desenho relativamente preciso da curva da secção. Note que, mais uma vez, se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A partir dos **oito pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção horizontal da elipse é uma outra elipse, que passa pelas projeções horizontais dos oito pontos determinados, e cujo eixo maior é o segmento  $[A_1B_1]$  e cujo eixo menor é o segmento  $[C_1D_1]$  – o desenho da curva é relativamente preciso, a partir dos oito pontos determinados. A projeção frontal da elipse reduz-se a um segmento de reta sobre  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ), pois o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. A figura da secção é **visível** em projeção horizontal, na sua totalidade.

#### Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção.

O plano que contém a figura da secção (o plano secante – o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (a elipse apresenta a deformação tanto em projeção frontal como em projeção horizontal). Assim, para determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\alpha$  (o plano secante) num plano paralelo a um dos planos de projeção.

O plano  $\alpha$  é um plano de topo, que é um plano projetante frontal. O único plano projetante frontal que é paralelo a um dos planos de projeção é o plano horizontal (de nível). Assim, há que transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível), para o que é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção.

Nesse sentido, substituiu-se o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\alpha$ , de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível). Dessa forma, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\alpha$ , o eixo **X'** é paralelo ao traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

**A<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **A<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que, neste caso, é 4 cm – o afastamento de **A**). **B<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **B<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **B<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que, neste caso, é 4 cm – o afastamento de **B**). **C<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **C** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **C<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **C<sub>1</sub>** ao eixo **X**. **D<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **D** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **D<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **D<sub>1</sub>** ao eixo **X**. O procedimento exposto para os pontos **A**, **B**, **C** e **D** repetiu-se para os restantes quatro pontos da secção (os pontos **E**, **F'**, **G** e **H**). Note que, **nesta situação**, os pontos **G** e **E** têm o mesmo afastamento, tal como os pontos **F'** e **H** também têm o mesmo afastamento.

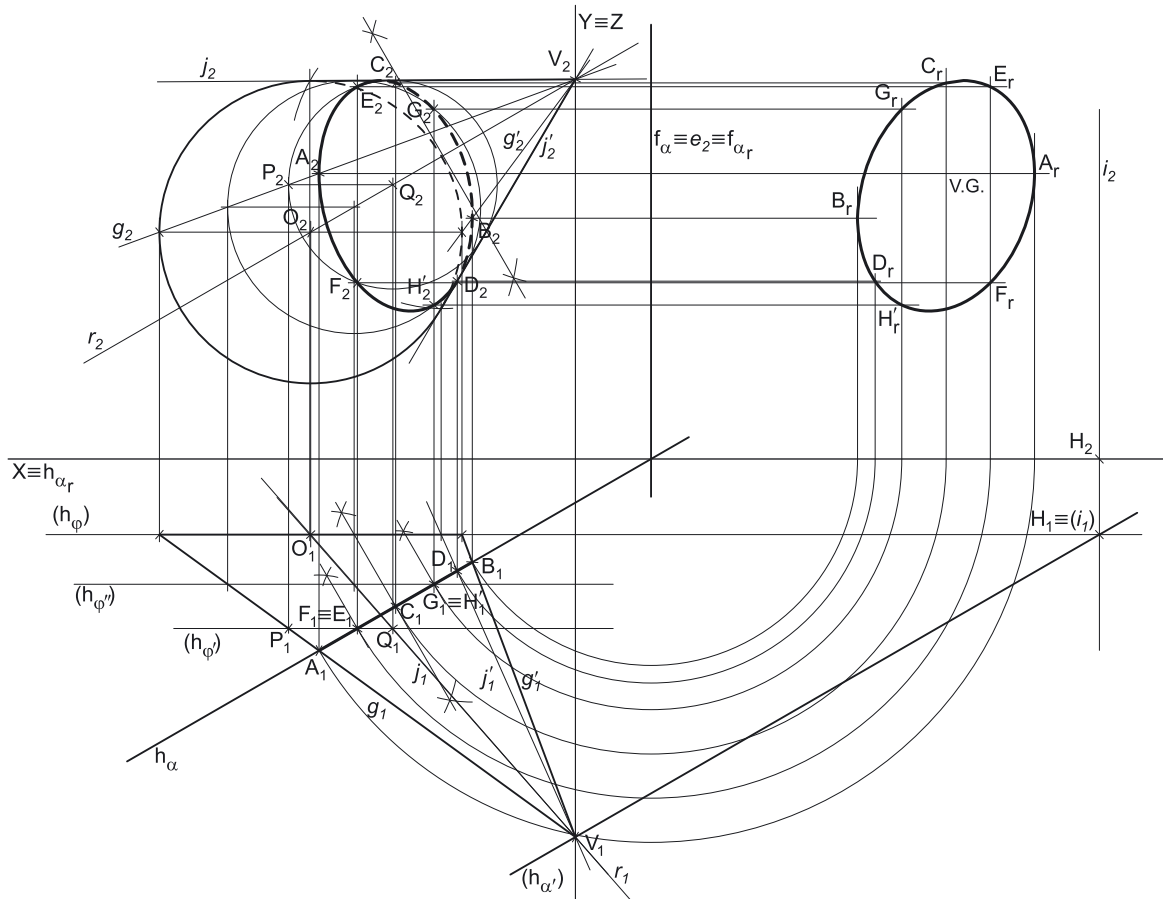
Por fim, a partir das projeções, no **plano 4**, dos **oito pontos** da figura da secção, foi possível desenhar a **elipse** em verdadeira grandeza, com um desenho relativamente preciso (à mão livre), tendo-se assinalado, no desenho, o facto de se tratar da curva em verdadeira grandeza.

Sublinha-se que a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção se poderia ter processado, por exemplo, com o recurso ao rebatimento do plano  $\alpha$  (o plano secante) para qualquer dos planos de projeção.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da figura da secção (um dos objetivos do exercício) representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traços do plano  $\alpha'$ , dos planos horizontais auxiliares, das secções circulares produzidas por aqueles no cone ou, ainda, dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

706.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se, também, o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou com o recurso a parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar  $r_2$ , a projeção frontal da reta  $r$  (a reta suporte do eixo do sólido), bem como representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços.

**Resolução:**

*Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a base do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Sendo dado que o vértice do cone tem abcissa nula, foi possível, de forma imediata, determinar  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**), sobre  $r_2$  (a projeção frontal do eixo do cone). Por outro lado, o cone tem 8 cm de altura, que é a distância do seu vértice ao plano da base, ou seja, neste caso é a diferença entre os afastamentos do vértice e do plano da base. Tendo em conta que o plano da base (o plano  $\varphi$ ) tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**), o vértice do cone (o ponto **V**) tem necessariamente 10 cm de afastamento ( $2 + 8 = 10$ ). Este raciocínio permitiu-nos determinar  $V_1$ , a projeção horizontal do ponto **V**, bem como desenhar a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ) – a reta  $r$  está, assim, definida por dois pontos (os pontos **O** e **V**). Note que o ponto **V** tem de ter afastamento positivo, para que o cone se situe no espaço do  $1^a$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior ( $V_2$ ). Note que o **arco menor da base** que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal é **invisível** (em projeção frontal), facto que se assinalou devidamente no desenho.

(continuação da página anterior)

A **determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano  $\alpha$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

### 1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de intersecção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**A.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\alpha$ ). O plano  $\alpha'$  é o plano paralelo ao plano  $\alpha$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano  $\alpha'$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\alpha'}$ ) passa por **V**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano  $\alpha'$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha'$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ), para que se verifique o **critério de paralelismo entre planos**. No entanto, o traço frontal do plano  $\alpha'$  ( $f_{\alpha'}$ ) situa-se fora dos limites do papel, pelo que o plano  $\alpha'$  foi representado, apenas, pelo seu traço horizontal, facto que se assinalou no desenho identificando o traço horizontal do plano  $\alpha'$  ( $h_{\alpha'}$ ) entre parêntesis.

**B.** Determinou-se a reta de intersecção do plano  $\alpha'$  com o plano da base do cone (o plano  $\varphi$ ) – a reta **i**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os planos  $\alpha'$  e  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única “família” de retas em comum, sendo que a reta de intersecção entre os dois planos é uma reta dessa única “família” de retas que os dois planos têm em comum. Tanto o plano  $\alpha'$  como o plano  $\varphi$  são planos projetantes horizontais, pelo que a única “família” de retas que os dois planos têm em comum é a “família” das retas projetantes horizontais (as retas verticais). Assim, já temos a direção da reta **i**. Falta-nos um ponto. A reta **i** pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que o seu traço horizontal (o ponto **H**) se situa sobre os traços horizontais dos dois planos (o ponto **H** é o ponto de concorrência dos traços horizontais dos dois planos) – já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i**. A reta **i** está, assim, definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (é uma reta projetante horizontal).

**C.** Analisa-se a posição da reta de intersecção em relação à base do cone. A reta **i** é exterior à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\alpha$  é uma **elipse** (ou um **segmento de elipse**). Tendo em conta que o plano  $\alpha$  **não corta a base** do cone (o que é possível constatar em projeção horizontal, pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal), a secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cone é efetivamente uma **elipse**.

Tendo em conta que uma **elipse** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta, a partir das respetivas projeções horizontais.

O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – os pontos em que o plano  $\alpha$  corta as geratrizes do contorno aparente horizontal.

O plano  $\alpha$  corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal (a geratriz **g**) no ponto **A** – as projeções do ponto **A** situam-se sobre as projeções homónimas dessa geratriz e foram determinadas de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal. As projeções da geratriz **g** estão definidas pelas projeções do vértice **V**, do cone, e pelas projeções do ponto mais à esquerda da circunferência que delimita a base (e que não se identificou). Note que foi necessário desenhar a projeção frontal da geratriz **g**, que não havia sido desenhada ainda.

O plano  $\alpha$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal (a geratriz **g'**) no ponto **B** – as projeções do ponto **B** situam-se sobre as projeções homónimas dessa geratriz e foram determinadas de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal. As projeções da geratriz **g'** estão definidas pelas projeções do vértice **V**, do cone, e pelas projeções do ponto mais à direita da circunferência que delimita a base (e que não se identificou). Note que foi necessário desenhar a projeção frontal da geratriz **g'**, que não havia sido desenhada ainda.

O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente frontal** em dois pontos – os pontos em que o plano  $\alpha$  corta as geratrizes do contorno aparente frontal. Note que os pontos da base do cone que pertencem às geratrizes do contorno aparente frontal já haviam sido determinados, com recurso à construção para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção frontal da base do cone) que passava por um ponto exterior (que é **V**<sub>2</sub>). Assim, determinaram-se as projeções horizontais desses dois pontos.

O plano  $\alpha$  corta a geratriz superior do contorno aparente frontal (a geratriz **j**) no ponto **C** – as projeções do ponto **C** situam-se sobre as projeções homónimas dessa geratriz e foram determinadas de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal. As projeções da geratriz **j** estão definidas pelas projeções do vértice **V**, do cone, e pelas projeções de um dos pontos determinados aquando da determinação do contorno aparente frontal. Note que foi necessário desenhar a projeção horizontal da geratriz **j**, que não havia sido desenhada ainda.

O plano  $\alpha$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal (a geratriz **j'**) no ponto **D** – as projeções do ponto **D** situam-se sobre as projeções homónimas dessa geratriz e foram determinadas de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal. As projeções da geratriz **j'** estão definidas pelas projeções do vértice **V**, do cone, e pelas projeções do outro dos pontos determinados aquando da determinação do contorno aparente frontal. Note que foi necessário desenhar a projeção horizontal da geratriz **j'**, que não havia sido desenhada ainda.

Conclui-se que o plano  $\alpha$  corta os contornos aparentes do cone em quatro pontos – os pontos **A, B, C e D**. Já temos **quatro pontos** da figura da secção (da elipse).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

### 3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano frontal (de frente), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos frontais (de frente). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor afastamento da secção** (porque os planos paralelos à base são planos frontais). Tenha em conta que qualquer plano frontal (de frente) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal, é possível constatar, de forma imediata, que o ponto **A** é o **ponto de maior afastamento** da secção e que **B** é o **ponto de menor afastamento** da secção (o que não seria possível garantir, caso o plano não fosse projetante horizontal). Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre os pontos **A** e **B**.

### 4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Tendo em conta que já foram determinados **quatro pontos** da figura da secção, e que o desenho relativamente preciso da curva (à mão livre) requer um mínimo de **oito pontos**, é necessária a determinação de mais quatro pontos da figura (pelo menos). Acontece que o recurso a um plano auxiliar (paralelo ao plano da base) nos permite, sempre, determinar mais **dois pontos** da secção. Assim, é necessário o recurso a dois planos auxiliares (paralelos ao plano da base), para determinarmos os quatro pontos em falta.

Por outro lado, o recurso a planos paralelos ao plano da base para a determinação de mais pontos da figura da secção deve garantir a distribuição o mais homogênea possível dos pontos determinados. Tendo em conta os pontos já determinados (os pontos **A**, **B**, **C** e **D**), observa-se (em projeção horizontal) que existe uma falha de pontos entre os pontos **A** e **C**, bem como entre os pontos **C** e **D**. Nesse sentido, é aconselhável a determinação dos pontos médios dos segmentos de reta  $[A_1C_1]$  e  $[C_1D_1]$ .

Assim, pelo ponto médio do segmento  $[A_1C_1]$  (que não se identificou e que foi determinado com o recurso à mediatriz do segmento) conduziu-se o primeiro plano frontal (de frente) – o plano  $\varphi'$ . Este plano, porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $\varphi'$  intersesta o eixo do cone. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano  $\varphi'$ . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a geratriz **g**. Os pontos **Q** e **P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. O círculo com centro no ponto **Q** e raio  $\overline{QP}$  é a secção que o plano  $\varphi'$  produz no cone (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto **Q**) e com raio  $\overline{Q_2P_2}$ , desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\varphi'$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano secante), que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **E** e **F**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções frontais – as suas projeções horizontais (**E**<sub>1</sub> e **F**<sub>1</sub>) situam-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$ , pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **seis pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **E** e **F** repetiu-se mais uma vez.

Determinou-se o ponto médio do segmento de reta  $[C_1D_1]$  (com o recurso à sua mediatriz), pelo qual se conduziu o segundo plano auxiliar – o plano  $\varphi''$ . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim determinou-se a reta de interseção do plano  $\varphi''$  com o plano  $\alpha$  e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção – os pontos **G** e **H**. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **oito pontos**.

A partir dos **oito pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção frontal da elipse é uma outra elipse, que passa pelas projeções horizontais dos oito pontos determinados – o desenho da curva é relativamente preciso, a partir dos oito pontos determinados. A projeção horizontal da elipse reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ), pois o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

Já em projeção frontal, parte da **figura da secção** é **invisível** – a parte que se situa na parte invisível da superfície lateral do cone, que corresponde ao arco menor  $C_2B_2D_2$  da elipse. Já o arco maior  $C_2A_2D_2$  da elipse é **visível**, em projeção frontal, por se situar na parte visível do sólido. Note que os pontos **C** e **D** (os pontos em que o plano  $\alpha$  corta as geratrizes do contorno aparente frontal) são os pontos que estabelecem a distinção entre a **parte visível** da figura da secção e a sua **parte invisível**.

### Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção.

O plano que contém a figura da secção (o plano secante – o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (a elipse apresenta a deformação tanto em projeção frontal como em projeção horizontal). Assim, para determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo rebatimento do plano secante (o plano  $\alpha$ , que é o plano que contém a figura da secção) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que foi  $f_{\alpha}$ , pelo que se tem imediatamente  $f_{\alpha} \equiv e_2 \equiv f_{\alpha r}$ . Os planos que contêm os arcos do rebatimento (os planos ortogonais à charneira) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento de cada um dos oito pontos da figura da secção que foram determinados, o que nos permitiu determinar os pontos  $A_r, B_r, C_r, D_r, E_r, F_r, G_r$  e  $H'_r$ . A partir dos oito pontos da figura da secção em rebatimento, desenhou-se a **elipse** em verdadeira grandeza, com um desenho relativamente preciso (à mão livre), tendo-se assinalado, no desenho, o facto de se tratar da curva em verdadeira grandeza.

Sublinha-se que a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção se poderia ter processado, por exemplo, com o recurso a uma mudança do diedro de projeção, à semelhança do efetuado no exercício anterior.

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da figura da secção (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente horizontal do cone, dos traços do plano  $\alpha$ , das projeções das geratrizes  $g, g', j$  e  $j'$ , dos planos frontais auxiliares, das secções circulares produzidas por aqueles no cone ou, ainda, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$ , para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

## 707.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi}$ ) passa pela projeção horizontal do ponto  $O$  ( $O_1$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou com o recurso a parêntesis. Por fim representou-se, também, o plano  $\gamma$ , o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados).

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a base do sólido (e que é necessariamente tangente ao eixo  $X$ , pois o raio da circunferência é igual à cota do ponto  $O$ ). A projeção horizontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{\varphi}$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, uma reta de topo (uma reta projetante frontal) – assim, tem-se imediatamente  $V_2 \equiv O_2$  (os dois pontos situam-se na mesma projetante frontal).

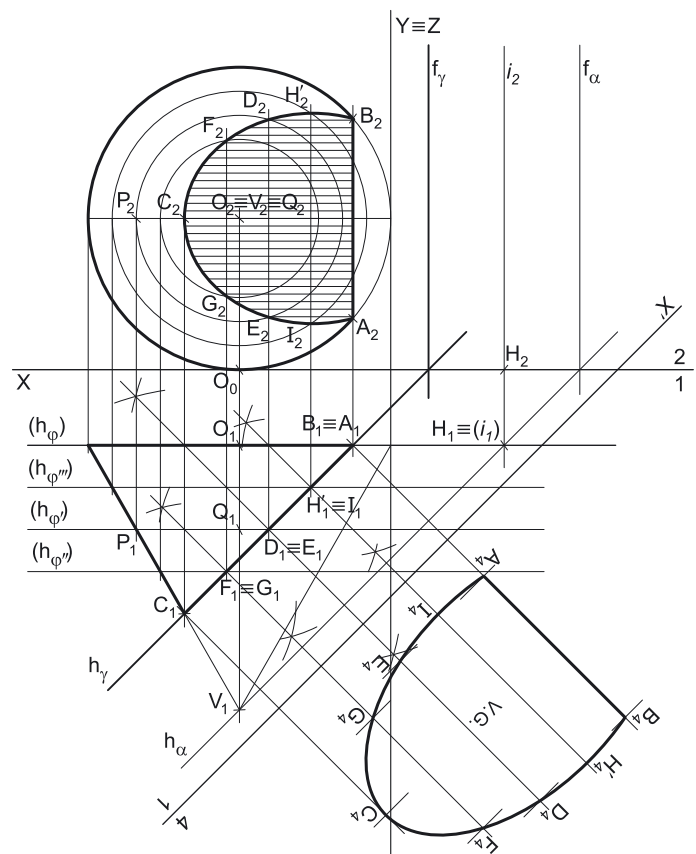
Por outro lado, o cone tem 7 cm de altura, que é a distância do seu vértice ao plano da base, ou seja, neste caso é a diferença entre os afastamentos do vértice e do plano da base. Tendo em conta que o plano da base (o plano  $\varphi$ ) tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $O$ ), o vértice do cone (o ponto  $V$ ) tem necessariamente 9 cm de afastamento ( $2 + 7 = 9$ ). Este raciocínio permitiu-nos determinar  $V_1$ , a projeção horizontal do ponto  $V$ . Note que o ponto  $V$  tem de ter afastamento positivo, para que o cone se situe no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

a) A **determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano  $\gamma$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## 1. Identificação do tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**A.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\gamma$ ). O plano  $\alpha$  é o plano paralelo ao plano  $\gamma$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\alpha$ ) passa por **V**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano  $\alpha$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\gamma$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\gamma$ ), para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

**B.** Determinou-se a reta de interseção do plano  $\alpha$  com o plano da base do cone (o plano  $\varphi$ ) – a reta *i*. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os planos  $\alpha$  e  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única “família” de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é uma reta dessa única “família” de retas que os dois planos têm em comum. Tanto o plano  $\alpha$  como o plano  $\varphi$  são planos projetantes horizontais, pelo que a única “família” de retas que os dois planos têm em comum é a “família” das retas projetantes horizontais (as retas verticais). Assim, já temos a direção da reta *i*. Falta-nos um ponto. A reta *i* pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que o seu traço horizontal (o ponto **H**) se situa sobre os traços horizontais dos dois planos (o ponto **H** é o ponto de concorrência dos traços horizontais dos dois planos) – já temos o ponto que nos faltava para definir a reta *i*. A reta *i* está, assim, definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (é uma reta projetante horizontal).

**C.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta *i* é exterior à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\gamma$  é uma **elipse** (ou um **segmento de elipse**). Tendo em conta que o plano  $\gamma$  **corta a base** do cone (o que é possível constatar em projeção horizontal, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal), a secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cone é efetivamente um **segmento de elipse**.

Tendo em conta que uma **elipse** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o desenho (à mão livre) da figura da secção (um **segmento de elipse**), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

## 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta, a partir das respetivas projeções horizontais.

O plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente horizontal** em três pontos – o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal e os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base do cone (dois pontos).

O plano  $\gamma$  corta a base do cone em dois pontos (os pontos **A** e **B**), cujas projeções horizontais estão coincidentes – os pontos **A** e **B** são, na prática, os pontos em que a reta de interseção entre os dois planos (que não se identificou) corta a circunferência que delimita a base do cone. Sublinha-se que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta vertical (à semelhança da reta de interseção entre os planos  $\alpha$  e  $\varphi$ ) – essa reta corta a circunferência que delimita a base nos pontos **A** e **B**. Note que seria impossível o plano  $\gamma$  cortar a base num único ponto.

O plano  $\alpha$  corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal no ponto **C** – as projeções do ponto **C** situam-se sobre as projeções homónimas dessa geratriz e foram determinadas de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal. As projeções da geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal estão definidas pelas projeções do vértice **V**, do cone, e pelas projeções do ponto mais à esquerda da circunferência que delimita a base (e que não se identificou). Note que a projeção frontal desta geratriz coincide com o diâmetro fronto-horizontal da circunferência.

O plano  $\gamma$  não corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal.

O plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente frontal** (que é a circunferência que delimita a base) em dois pontos – os pontos **A** e **B**, já determinados.

Conclui-se que o plano  $\gamma$  corta os contornos aparentes do cone em três pontos – os pontos **A**, **B** e **C**. Já temos **três pontos** da figura da secção (da elipse)

## 3. Determinar o espaço útil para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano frontal (de frente), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos frontais (de frente). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor afastamento da secção** (porque os planos paralelos à base são planos frontais). Tenha em conta que qualquer plano frontal (de frente) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano  $\gamma$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal, é possível constatar, de forma imediata, que o ponto **C** é o **ponto de maior afastamento** da secção e que os pontos **A** e **B** são, ambos, os **pontos de menor afastamento** da secção (o que não seria possível garantir, caso o plano não fosse projetante horizontal). Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre os pontos **A/B** e **C**.

## 4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Tendo em conta que já foram determinados **três pontos** da figura da secção, e que o desenho relativamente preciso da curva (à mão livre) requer um mínimo de **oito pontos**, é necessária a determinação de mais cinco pontos da figura (pelo menos). Acontece que o recurso a um plano auxiliar (paralelo ao plano da base) nos permite, sempre, determinar mais **dois pontos** da secção. Assim, é necessário o recurso a três planos auxiliares (paralelos ao plano da base), para determinarmos seis pontos que, em conjunto com os três pontos já determinados, perfarão um total de nove pontos, o que é suficiente para um desenho relativamente preciso da curva.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, o recurso a planos paralelos ao plano da base para a determinação de mais pontos da figura da secção deve garantir a distribuição o mais homogênea possível dos pontos determinados. Tendo em conta os pontos já determinados (os pontos **A**, **B** e **C**), há que distribuir os pontos da determinar de forma homogênea entre os pontos **A/B** e **C**.

Assim, o primeiro plano auxiliar (paralelo ao plano da base) a que se deverá recorrer deve ser um plano que passe pelo ponto médio do segmento  $[A_1C_1]$ . Note que o ponto médio do segmento  $[A_1C_1]$  (que não se identificou) se determinou com o recurso à sua mediatriz.

Assim, pelo ponto médio do segmento  $[A_1C_1]$  conduziu-se o primeiro plano frontal (de frente) – o plano  $\varphi'$ . Este plano, porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $\varphi'$  interseja o eixo do cone. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano  $\varphi'$ . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal do cone. Os pontos **Q** e **P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. O círculo com centro no ponto **Q** e raio  $\overline{QP}$  é a secção que o plano  $\varphi'$  produz no cone (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **Q**) e com raio  $\overline{Q_2P_2}$ , desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\varphi'$  (o plano auxiliar) com o plano  $\gamma$  (o plano secante), que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **D** e **E**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções frontais – as suas projeções horizontais (**D**<sub>1</sub> e **E**<sub>1</sub>) situam-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$ , pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **cinco pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **D** e **E** repetiu-se mais duas vezes.

Tendo em conta que o segmento  $[A_1C_1]$  foi dividido em dois segmentos de reta geometricamente iguais (pelo recurso à sua mediatriz), o recurso a mais planos paralelos ao plano da base deve garantir a distribuição o mais homogênea possível dos pontos determinados. Nesse sentido, é aconselhável a determinação dos pontos médios desses dois segmentos de reta.

Determinou-se o ponto médio do segmento de reta de maior afastamento (com o recurso à sua mediatriz), pelo qual se conduziu o segundo plano auxiliar – o plano  $\varphi''$ . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim determinou-se a reta de interseção do plano  $\varphi''$  com o plano  $\gamma$  e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção – os pontos **F** e **G**. Já temos **sete pontos** da figura da secção. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

Por fim, determinou-se o ponto médio do segmento de reta de menor afastamento (com o recurso à sua mediatriz), pelo qual se conduziu o terceiro plano auxiliar – o plano  $\varphi'''$ . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, bem como a reta de interseção do plano  $\varphi'''$  com o plano  $\gamma$  – a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção (os pontos **H** e **I**). Já temos **nove pontos** da figura da secção, que se considera um número suficiente de pontos para o desenho relativamente preciso da curva da secção. Note que, mais uma vez, se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A partir dos **nove pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção frontal da curva é um segmento de elipse, que passa pelas projeções frontais dos nove pontos determinados – o desenho da curva é relativamente preciso, a partir dos nove pontos determinados. A projeção horizontal do segmento de elipse reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ), pois o plano  $\gamma$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal.

#### *Determinação das projeções do sólido resultante da secção.*

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cone compreendida entre o plano secante e o plano  $\varphi$  (o plano da base).

A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** é um triângulo com um vértice em **C**<sub>1</sub>, o outro vértice em **A**<sub>1</sub> (ou **B**<sub>1</sub>) e o outro vértice na projeção horizontal do ponto mais à esquerda da base. A **projeção frontal do contorno aparente frontal** é uma linha mista fechada limitada, à direita, pelo segmento  $[A_2B_2]$  e, à esquerda, pelo arco maior **A**<sub>2**B**<sub>2</sub> da projeção frontal da base.</sub>

A **figura da secção**, porque é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção frontal).

**b)** O plano que contém a figura da secção (o plano secante – o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (a figura da secção apresenta a deformação tanto em projeção frontal como em projeção horizontal). Assim, para determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\gamma$  (o plano secante) num plano paralelo a um dos planos de projeção.

O plano  $\gamma$  é um plano vertical, que é um plano projetante horizontal. O único plano projetante horizontal que é paralelo a um dos planos de projeção é o plano frontal (de frente). Assim, há que transformar o plano  $\gamma$  num plano frontal (de frente), para o que é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, substituiu-se o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\gamma$ , de forma a transformar o plano  $\gamma$  num plano frontal (de frente). Dessa forma, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de intersecção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\gamma$ , o eixo **X'** é paralelo ao traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

**A<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **A<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A<sub>2</sub>** ao eixo **X**.  
**B<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **B<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **B<sub>2</sub>** ao eixo **X**.  
**C<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **C** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **C<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **C<sub>2</sub>** ao eixo **X**.  
**D<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **D** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **D<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **D<sub>2</sub>** ao eixo **X**.  
**E<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **E** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **E<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **E<sub>2</sub>** ao eixo **X**.  
 O procedimento exposto para os pontos **A, B, C, D** e **E** repetiu-se para os restantes quatro pontos da secção (os pontos **F, G, H** e **I**).

Por fim, a partir das projeções, no **plano 4**, dos **nove pontos** da figura da secção, foi possível desenhar o **segmento de elipse** em verdadeira grandeza, com um desenho relativamente preciso (à mão livre), tendo-se assinalado, no desenho, o facto de se tratar da curva em verdadeira grandeza.

Sublinha-se que a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção se poderia ter processado, por exemplo, com o recurso ao rebatimento do plano  $\gamma$  (o plano secante) para qualquer dos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do cone, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). O traço horizontal do plano  $\phi$  (o plano que contém a base) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções do **sólido resultante da secção** (um dos objetivos do exercício) representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traços do plano  $\alpha$ , da reta  $i$ , dos planos frontais auxiliares, das secções circulares produzidas por aqueles no cone ou, ainda, dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada, para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção frontal) executou-se a **leve**.

## 708.

### Dados:

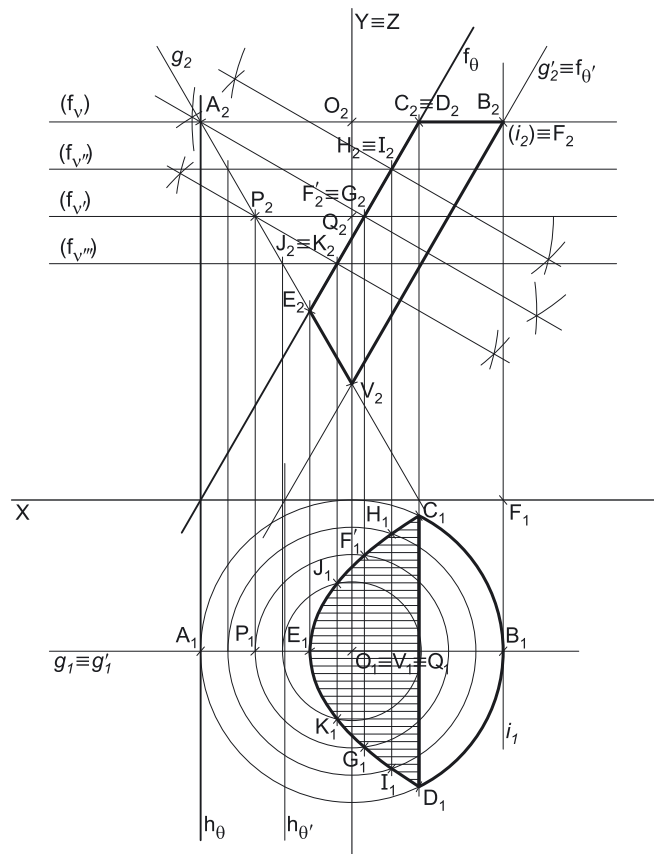
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\nu$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone. O plano  $\nu$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_\nu$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** (**O<sub>2</sub>**). Por outro lado, o plano  $\nu$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou com o recurso a parêntesis. Por fim representou-se, também, o plano  $\theta$ , o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados).

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $\nu$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base do sólido (e que é tangente ao eixo **X**, pois a o raio da circunferência é igual ao afastamento do ponto **O**). A projeção frontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\nu$  ( $f_\nu$ ), pois o plano  $\nu$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, uma reta vertical (uma reta projetante horizontal) – assim, tem-se imediatamente **V<sub>1</sub> = O<sub>1</sub>** (os dois pontos situam-se na mesma projetante horizontal).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Tendo em conta que as geratrizes do cone fazem, com o plano da base, ângulos de  $60^\circ$ , e que todas as geratrizes da superfície fazem o mesmo ângulo (por se tratar de uma superfície de revolução), aquele ângulo projeta-se em verdadeira grandeza apenas nas situações em que as geratrizes são frontais (de frente), ou seja, as geratrizes do contorno aparente frontal (as geratrizes que contêm pelos pontos de maior e de menor abcissa da base – os pontos **A** e **B**, respetivamente).

Assim, desenharam-se as projeções frontais das geratrizes **g** (a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal) e **g'** (a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal) – **g<sub>2</sub>** (a projeção frontal da geratriz **g**) e **g'<sub>2</sub>** (a projeção frontal da geratriz **g'**) fazem, com **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano **v**) ângulos de  $60^\circ$ . O ponto de concorrência das projeções frontais das duas geratrizes é **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **V**). Note que se garantiu, ao medir os ângulos que as projeções frontais das duas geratrizes fazem com **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano **v**), se teve em conta que o vértice do cone é invisível em projeção horizontal (ou seja, tem cota inferior à cota do plano da base).

As projeções horizontais das duas geratrizes (**g<sub>1</sub>** e **g'<sub>1</sub>**) estão necessariamente coincidentes, contendo o diâmetro fronto-horizontal da circunferência que delimita a projeção horizontal da base do cone.

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é o triângulo [**A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>**]) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

A **determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano  $\theta$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que Em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

#### 1. Identificação do tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\theta$  no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**A.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\theta$ ). O plano  $\theta'$  é o plano paralelo ao plano  $\theta$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano  $\theta'$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (**f<sub>θ'</sub>**) passa por **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano  $\theta'$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\theta'$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\theta$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\theta$ ), para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

Note que, nesta situação, o traço frontal do plano  $\theta'$  (**f<sub>θ'</sub>**) está coincidente com a projeção frontal da geratriz **g'** (**g'<sub>2</sub>**) – o plano  $\theta'$  é o plano projetante frontal da geratriz **g'**.

**B.** Determinou-se a reta de interseção do plano  $\theta'$  com o plano da base do cone (o plano **v**) – a reta **i**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os planos  $\theta'$  e **v** são planos secantes, pelo que têm uma única “família” de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é uma reta dessa única “família” de retas que os dois planos têm em comum. Tanto o plano  $\theta'$  como o plano **v** são planos projetantes frontais, pelo que a única “família” de retas que os dois planos têm em comum é a “família” das retas projetantes frontais (as retas de topo). Assim, já temos a direção da reta **i**. Falta-nos um ponto. A reta **i** pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que o seu traço frontal (o ponto **F**) se situa sobre os traços frontais dos dois planos (o ponto **F** é o ponto de concorrência dos traços frontais dos dois planos) – já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i**. A reta **i** está, assim, definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (é uma reta projetante frontal).

**C.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta **i** é tangente à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\theta$  é uma **parábola**.

Tendo em conta que uma **parábola** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

#### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, a determinação dos pontos em que o plano  $\theta$  corta os contornos aparentes é direta, a partir das respetivas projeções frontais.

O plano  $\theta$  corta o **contorno aparente horizontal** em três pontos – o ponto em que o plano  $\theta$  corta a geratriz **g** (a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal) e os pontos em que o plano  $\theta$  corta a base do cone (dois pontos).

O plano  $\theta$  corta a base do cone em dois pontos (os pontos **C** e **D**), cujas projeções frontais estão coincidentes – os pontos **C** e **D** são, na prática, os pontos em que a reta de interseção entre os dois planos (que não se identificou) corta a circunferência que delimita a base do cone. Sublinha-se que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta de topo (à semelhança da reta de interseção entre os planos  $\theta'$  e **v**) – essa reta corta a circunferência que delimita a base nos pontos **C** e **D**. Note que seria impossível o plano  $\theta$  cortar a base num único ponto.

O plano  $\theta$  corta a geratriz **g** (a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal) no ponto **E** – as projeções do ponto **E** situam-se sobre as projeções homónimas da geratriz **g** e foram determinadas de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. O plano  $\theta$  não corta a geratriz **g'** (a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal) – o plano  $\theta$  é paralelo à geratriz **g'**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O plano  $\theta$  corta o **contorno aparente horizontal** (que é a circunferência que delimita a base) em dois pontos – os pontos **C** e **D**, já determinados.

Conclui-se que o plano  $\theta$  corta os contornos aparentes do cone em três pontos – os pontos **C**, **D** e **E**. Já temos **três pontos** da figura da secção (da parábola)

### 3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano horizontal (de nível), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos horizontais (de nível). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor cota da secção** (porque os planos paralelos à base são planos horizontais). Tenha em conta que qualquer plano horizontal (de nível) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano  $\theta$  (o plano secante) é um plano projetante frontal, é possível constatar, de forma imediata, que o ponto **E** é o **ponto de menor cota** da secção e que os pontos **C** e **D** são, ambos, os **pontos de maior cota** da secção (o que não seria possível garantir, caso o plano não fosse projetante frontal). Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre os pontos **C/D** e **E**.

### 4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Tendo em conta que já foram determinados **três pontos** da figura da secção, e que o desenho relativamente preciso da curva (à mão livre) requer um mínimo de **oito pontos**, é necessária a determinação de mais cinco pontos da figura (pelo menos). Acontece que o recurso a um plano auxiliar (paralelo ao plano da base) nos permite, sempre, determinar mais **dois pontos** da secção. Assim, é necessário o recurso a três planos auxiliares (paralelos ao plano da base), para determinarmos seis pontos que, em conjunto com os três pontos já determinados, perfarão um total de nove pontos, o que é suficiente para um desenho relativamente preciso da curva.

Por outro lado, o recurso a planos paralelos ao plano da base para a determinação de mais pontos da figura da secção deve garantir a distribuição o mais homogênea possível dos pontos determinados. Tendo em conta os pontos já determinados (os pontos **C**, **D** e **E**), há que distribuir os pontos da determinar de forma homogênea entre os pontos **C/D** e **E**.

Assim, o primeiro plano auxiliar (paralelo ao plano da base) a que se deverá recorrer deve ser um plano que passe pelo ponto médio do segmento  $[C_2E_2]$ . Note que o ponto médio do segmento  $[C_2E_2]$  (que não se identificou) se determinou com o recurso à sua mediatriz.

Assim, pelo ponto médio do segmento  $[C_2E_2]$  conduziu-se o primeiro plano horizontal (de nível) – o plano  $v'$ . Este plano, porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $v'$  interseca o eixo do cone. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano  $v'$ . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano  $v'$  corta a geratriz **g**. Os pontos **Q** e **P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. O círculo com centro no ponto **Q** e raio  $\overline{QP}$  é a secção que o plano  $v'$  produz no cone (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio  $\overline{Q_1P_1}$ , desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $v'$  (o plano auxiliar) com o plano  $\theta$  (o plano secante), que é uma reta de topo (uma reta projetante frontal), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **F'** e **G**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções horizontais – as suas projeções frontais (**F'<sub>2</sub>** e **G<sub>2</sub>**) situam-se sobre o traço frontal do plano  $v'$ , pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz **cinco pontos** da figura da secção.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **F'** e **G** repetiu-se mais duas vezes.

Tendo em conta que o segmento  $[C_2E_2]$  foi dividido em dois segmentos de reta geometricamente iguais (pelo recurso à sua mediatriz), o recurso a mais planos paralelos ao plano da base deve garantir a distribuição o mais homogênea possível dos pontos determinados. Nesse sentido, é aconselhável a determinação dos pontos médios desses dois segmentos de reta.

Determinou-se o ponto médio do segmento de reta de maior cota (com o recurso à sua mediatriz), pelo qual se conduziu o segundo plano auxiliar – o plano  $v''$ . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim determinou-se a reta de interseção do plano  $v''$  com o plano  $\theta$  e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção – os pontos **H** e **I**. Já temos **sete pontos** da secção. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

Por fim, determinou-se o ponto médio do segmento de reta de menor cota (com o recurso à sua mediatriz), pelo qual se conduziu o terceiro plano auxiliar – o plano  $v'''$ . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, bem como a reta de interseção do plano  $v'''$  com o plano  $\theta$  – a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção (os pontos **J** e **K**). Já temos **nove pontos** da figura da secção, o que é um número de pontos suficientes para o desenho relativamente preciso da curva da secção. Note que, mais uma vez, se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A partir dos **nove pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção horizontal da parábola é uma outra parábola, que passa pelas projeções horizontais dos nove pontos determinados – o desenho da curva é relativamente preciso, a partir dos nove pontos determinados. A projeção frontal da parábola reduz-se a um segmento de reta sobre  $f_0$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ), pois o plano  $\theta$  (o plano secante) é um plano projetante frontal.

### Determinação das projeções do sólido resultante da secção.

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cone compreendida entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **projeção frontal do contorno aparente frontal** é o trapézio  $[E_2C_2B_2V_2]$ . A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** é uma linha mista fechada limitada, à direita, pelo arco menor  $A_2B_2$  da projeção horizontal da base e, à esquerda, pela projeção horizontal da parábola.

Note que o segmento  $[CD]$  é **uma aresta visível** (em projeção horizontal) do **sólido resultante da secção**, pois separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção horizontal – a parte da base que integra esse sólido e a face que é a figura da secção.

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo  $X$  (em projeção horizontal).

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do cone, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traços do plano  $\theta'$ , da reta  $i$ , das projeções das geratrizes  $g$  e  $g'$ , dos planos horizontais auxiliares e, ainda, das secções circulares produzidas por aqueles no cone). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 709.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto  $O$  ( $O_1$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou com o recurso a parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar a reta  $h$  (a reta suporte do eixo do cone), pelas suas projeções – a reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $O$ ) e pela sua direção (que é dada no enunciado).

Por fim representou-se, também, o plano  $\gamma$ , o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados).

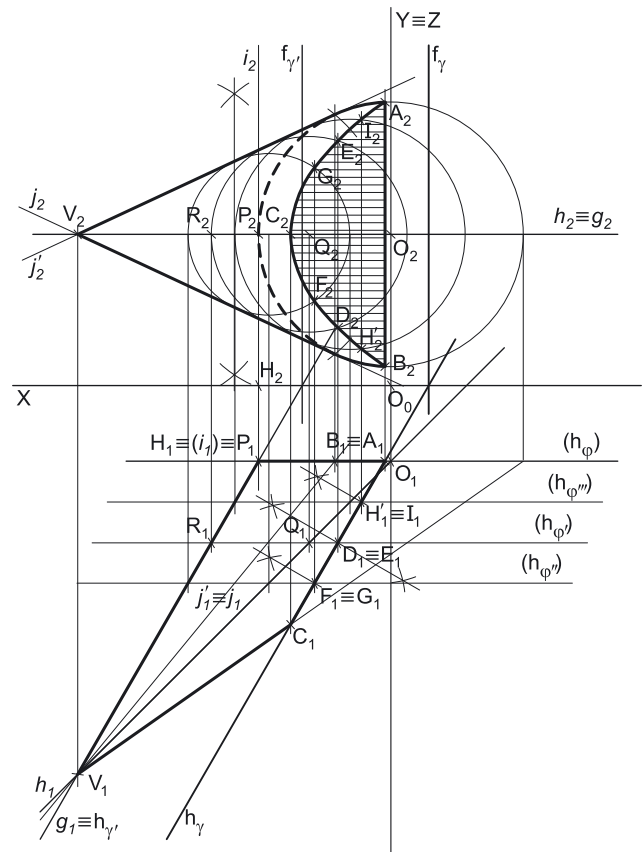
#### Resolução:

##### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a base do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Atendendo aos dados referentes à geratriz que contém o ponto mais à esquerda da base, identificou-se esse ponto – o ponto  $P$ . Em seguida, desenharam-se as projeções da geratriz  $g$  (a geratriz do cone que passa pelo ponto  $P$ , em função dos dados – a geratriz  $g$  é horizontal (de nível) e está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção dada no enunciado).

Em seguida, determinou-se o ponto  $V$  (o vértice do cone), que é o ponto de concorrência da reta  $h$  (a reta suporte do eixo do cone) com a geratriz  $g$ .



Por fim, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior ( $V_2$ ). Note que o arco menor da base que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal é invisível (em projeção frontal), facto que se assinalou devidamente no desenho.

A **determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano  $\gamma$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## 1. Identificação do tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\gamma$  no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**A.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\gamma$ ). O plano  $\gamma'$  é o plano paralelo ao plano  $\gamma$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano  $\gamma'$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\gamma'}$ ) passa por  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano  $\gamma'$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\gamma'$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\gamma$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\gamma$ ), para que se verifique o **Crítério de paralelismo entre planos**.

Note que, nesta situação, o traço horizontal do plano  $\gamma'$  ( $h_{\gamma'}$ ) está coincidente com a projeção horizontal da geratriz  $g$  ( $g_{\gamma'}$ ) – o plano  $\gamma'$  é o plano projetante horizontal da geratriz  $g$ .

**B.** Determinou-se a reta de interseção do plano  $\gamma'$  com o plano da base do cone (o plano  $\phi$ ) – a reta  $i$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os planos  $\gamma'$  e  $\phi$  são planos secantes, pelo que têm uma única “família” de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é uma reta dessa única “família” de retas que os dois planos têm em comum. Tanto o plano  $\gamma'$  como o plano  $\phi$  são planos projetantes horizontais, pelo que a única “família” de retas que os dois planos têm em comum é a “família” das retas projetantes horizontais (as retas verticais). Assim, já temos a direção da reta  $i$ . Falta-nos um ponto. A reta  $i$  pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que o seu traço horizontal (o ponto **H**) se situa sobre os traços horizontais dos dois planos (o ponto **H** é o ponto de concorrência dos traços horizontais dos dois planos) – já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ . A reta  $i$  está, assim, definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (é uma reta projetante horizontal).

**C.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta  $i$  é tangente à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\gamma$  é uma **parábola**.

Tendo em conta que uma **parábola** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

## 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta, a partir das respetivas projeções horizontais.

O plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente horizontal** em três pontos – o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal) e os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base do cone (dois pontos).

O plano  $\gamma$  corta a base do cone em dois pontos (os pontos **A** e **B**), cujas projeções horizontais estão coincidentes – os pontos **A** e **B** são, na prática, os pontos em que a reta de interseção entre os dois planos (que não se identificou) corta a circunferência que delimita a base do cone. Sublinha-se que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta vertical (à semelhança da reta de interseção entre os planos  $\gamma'$  e  $\phi$ ) – essa reta corta a circunferência que delimita a base nos pontos **A** e **B**. Note que seria impossível o plano  $\gamma$  cortar a base num único ponto.

O plano  $\gamma$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal no ponto **C** – as projeções do ponto **C** situam-se sobre as projeções homónimas daquela geratriz e foram determinadas de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal. O plano  $\gamma$  não corta a geratriz  $g$  (a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal), pois o plano  $\gamma$  é paralelo à geratriz  $g$ .

Para averiguar se o plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente frontal**, foi necessário desenhar as projeções horizontais das duas geratrizes do contorno aparente frontal – as geratrizes  $j$  e  $j'$ . Consta-se, em projeção horizontal, que o plano  $\gamma$  não corta qualquer das duas geratrizes  $j$  e  $j'$ . No entanto, o plano  $\gamma$  corta o arco da base que integra o **contorno aparente frontal** em dois pontos – os pontos **A** e **B**, já determinados. Assim, o plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente frontal** em apenas dois pontos – os pontos **A** e **B**.

Conclui-se que o plano  $\gamma$  corta os contornos aparentes do cone em três pontos – os pontos **C**, **D** e **E**. Já temos **três pontos** da figura da secção (da parábola)

## 3. Determinar o espaço útil para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano frontal (de frente), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos frontais (de frente). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor afastamento da secção** (porque os planos paralelos à base são planos frontais). Tenha em conta que qualquer plano frontal (de frente) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano  $\gamma$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal, é possível constatar, de forma imediata, que o ponto **C** é o **ponto de maior afastamento** da secção e que os pontos **A** e **B** são, ambos, os **pontos de menor afastamento** da secção (o que não seria possível garantir, caso o plano não fosse projetante horizontal). Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre os pontos **A/B** e **C**.

## 4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Tendo em conta que já foram determinados **três pontos** da figura da secção, e que o desenho relativamente preciso da curva (à mão livre) requer um mínimo de **oito pontos**, é necessária a determinação de mais cinco pontos da figura (pelo menos). Acontece que o recurso a um plano auxiliar (paralelo ao plano da base) nos permite, sempre, determinar mais **dois pontos** da secção. Assim, é necessário o recurso a três planos auxiliares (paralelos ao plano da base), para determinarmos seis pontos que, em conjunto com os três pontos já determinados, perfarão um total de nove pontos, o que é suficiente para um desenho relativamente preciso da curva.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, o recurso a planos paralelos ao plano da base para a determinação de mais pontos da figura da secção deve garantir a distribuição o mais homogênea possível dos pontos determinados. Tendo em conta os pontos já determinados (os pontos **A**, **B** e **C**), há que distribuir os pontos da determinar de forma homogênea entre os pontos **A/B** e **C**.

Assim, o primeiro plano auxiliar (paralelo ao plano da base) a que se deverá recorrer deve ser um plano que passe pelo ponto médio do segmento  $[A_1C_1]$ . Note que o ponto médio do segmento  $[A_1C_1]$  (que não se identificou) se determinou com o recurso à sua mediatriz.

Assim, pelo ponto médio do segmento  $[A_1C_1]$  conduziu-se o primeiro plano frontal (de frente) – o plano  $\varphi'$ . Este plano, porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $\varphi'$  intersesta a reta **h** (a reta suporte do eixo do cone). O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano  $\varphi'$ . Assim, determinou-se o ponto **R**, que é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a geratriz **g**. Os pontos **Q** e **R** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. O círculo com centro no ponto **Q** e raio  $\overline{QR}$  é a secção que o plano  $\varphi'$  produz no cone (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **Q**) e com raio  $\overline{Q_2R_2}$ , desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\varphi'$  (o plano auxiliar) com o plano  $\gamma$  (o plano secante), que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **D** e **E**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções frontais – as suas projeções horizontais (**D**<sub>1</sub> e **E**<sub>1</sub>) situam-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$ , pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **três pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **D** e **E** repetiu-se mais duas vezes.

Tendo em conta que o segmento  $[A_1C_1]$  foi dividido em dois segmentos de reta geometricamente iguais (pelo recurso à sua mediatriz), o recurso a mais planos paralelos ao plano da base deve garantir a distribuição o mais homogênea possível dos pontos determinados. Nesse sentido, é aconselhável a determinação dos pontos médios desses dois segmentos de reta.

Determinou-se o ponto médio do segmento de reta de maior afastamento (com o recurso à sua mediatriz), pelo qual se conduziu o segundo plano auxiliar – o plano  $\varphi''$ . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim determinou-se a reta de interseção do plano  $\varphi''$  com o plano  $\gamma$  e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção – os pontos **F** e **G**. Já temos **sete pontos** da secção. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

Por fim, determinou-se o ponto médio do segmento de reta de menor afastamento (com o recurso à sua mediatriz), pelo qual se conduziu o terceiro plano auxiliar – o plano  $\varphi'''$ . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, bem como a reta de interseção do plano  $\varphi'''$  com o plano  $\gamma$  – a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção (os pontos **H'** e **I**). Já temos **nove pontos** da figura da secção, o que é um número de pontos suficientes para o desenho relativamente preciso da curva da secção. Note que, mais uma vez, se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A partir dos **nove pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção frontal da parábola é uma outra parábola, que passa pelas projeções frontais dos nove pontos determinados – o desenho da curva é relativamente preciso, a partir dos nove pontos determinados. A projeção horizontal da parábola reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ), pois o plano  $\gamma$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal.

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção.

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cone compreendida entre o plano secante e o plano  $\varphi$  (o plano da base).

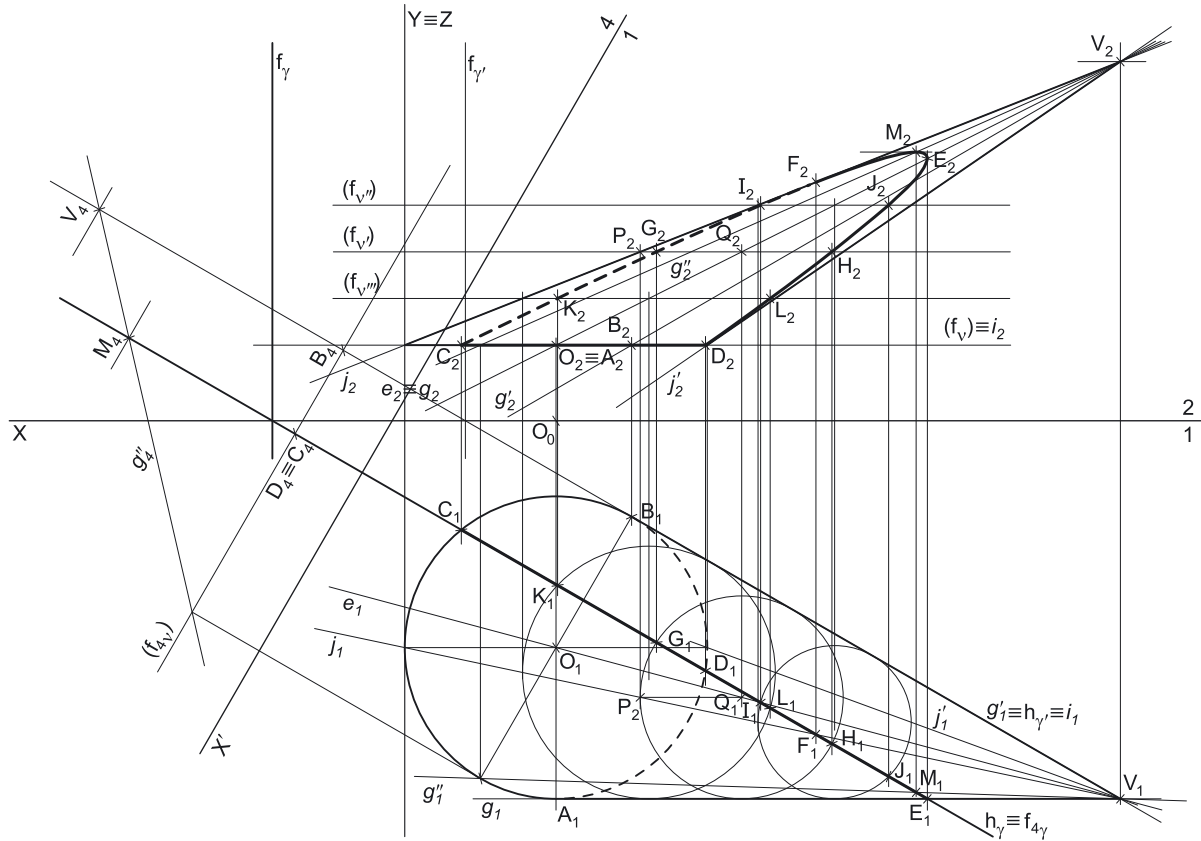
A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** é o trapézio  $[A_1C_1V_1P_1]$ . A **projeção frontal do contorno aparente frontal** é uma linha mista fechada limitada, à direita, pelo segmento  $[A_2B_2]$ , à esquerda pelas projeções frontais das geratrizes **j** e **j'** e, ainda, pelos arcos de circunferência compreendidos entre **A**<sub>2</sub> e a projeção frontal da geratriz **j** (a geratriz de maior cota do contorno aparente frontal) e entre **B**<sub>2</sub> e a projeção frontal da geratriz **j'** (a geratriz de menor cota do contorno aparente frontal). Note que o arco menor da base que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal (as geratrizes **j** e **j'**) é invisível (em projeção frontal), facto que se assinalou devidamente no desenho.

A **figura da secção**, porque é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção frontal).

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do cone, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente frontal do cone, dos traços do plano  $\gamma'$ , da reta **i**, das projeções das geratrizes **g**, **g'**, **j** e **j'**, dos planos frontais auxiliares e, ainda, das secções circulares produzidas por aqueles no cone). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção frontal) executou-se a **leve**.

## 710.



### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). Por outro lado, o plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou com o recurso a parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\gamma$  (o plano secante), pelos seus traços.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenhou-se  $g_1$ , a projeção horizontal da geratriz  $g$  (a geratriz de maior afastamento do contorno aparente horizontal do cone) – note que  $g_1$  é tangente à circunferência que delimita a projeção horizontal da base do cone no ponto  $A_1$ , que é a projeção horizontal do ponto **A** (o ponto da geratriz  $g$  que se situa na base do cone). Nesse sentido,  $g_1$  é perpendicular ao raio da circunferência no ponto  $A_1$  (o raio  $[O_1A_1]$ ).

Em seguida, desenhou-se  $g'_1$ , a projeção horizontal da geratriz  $g'$  (a geratriz do contorno aparente horizontal do cone que faz um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo  $X$ , de abertura para a direita) – note que  $g'_1$  é tangente à circunferência que delimita a projeção horizontal da base do cone no ponto  $B_1$ , que é a projeção horizontal do ponto **B** (o ponto da geratriz  $g'$  que se situa na base do cone). Nesse sentido,  $g'_1$  é perpendicular ao raio da circunferência no ponto  $B_1$  (o raio  $[O_1B_1]$ ).

O ponto de concorrência das projeções horizontais das duas geratrizes ( $g_1$  e  $g'_1$ ) é  $V_1$ , a projeção horizontal do vértice do cone. Por outro lado, o cone tem 7,5 cm de altura, que é a distância do seu vértice ao plano da base, ou seja, neste caso é a diferença entre as cotas do vértice e do plano da base. Tendo em conta que o plano da base (o plano  $v$ ) tem 2 cm de cota (a cota do ponto **O**), o vértice do cone (o ponto **V**) tem necessariamente 9,5 cm de cota ( $2 + 7,5 = 9,5$ ). Este raciocínio permitiu-nos determinar  $V_2$ , a projeção frontal do ponto **V**. Note que o ponto **V** tem de ter cota positiva, para que o cone se situe no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

Por fim, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone, que é a linha mista fechada  $[A_1V_1B_1A_1]$ , em que  $B_1A_1$  se refere ao **arco maior** da base compreendido entre  $A_1$  e  $B_1$ . Note que o **arco menor**  $A_1B_1$  é **invisível** (em projeção horizontal), facto que se assinalou devidamente no desenho.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano  $\gamma$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que Em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

### 1. Identificação do tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\gamma$  no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de intersecção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**A.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\gamma$ ). O plano  $\gamma'$  é o plano paralelo ao plano  $\gamma$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano  $\gamma'$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\gamma'}$ ) passa por **V**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano  $\gamma'$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\gamma'$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\gamma$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\gamma$ ), para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

Note que, nesta situação, o traço horizontal do plano  $\gamma'$  ( $h_{\gamma'}$ ) está coincidente com a projeção horizontal da geratriz **g'** ( $g'_{\gamma'}$ ) – o plano  $\gamma'$  é o plano projetante horizontal da geratriz **g'**.

**B.** Determinou-se a reta de intersecção do plano  $\gamma'$  com o plano da base do cone (o plano  $v$ ) – a reta **i**. O plano  $\gamma'$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da reta **i** ( $i_1$ ) está sobre o traço horizontal do plano  $\gamma'$  ( $h_{\gamma'}$ ), o que nos garante que a reta **i** pertence ao plano  $\gamma'$ . A base do cone está contida no plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da reta **i** ( $i_2$ ) está sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), o que nos garante que a reta **i** pertence ao plano  $v$ . A reta **i**, definida pelas suas duas projeções, é, assim, a reta que pertence simultaneamente aos dois planos (o plano  $\gamma'$  e o plano  $v$ ).

**C.** Analisa-se a posição da reta de intersecção em relação à base do cone. A reta **i** é tangente à base do cone (no ponto **B**), pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\gamma$  é uma **parábola**.

Tendo em conta que uma **parábola** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta, a partir das respetivas projeções horizontais.

O plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a geratriz **g** (a geratriz de maior afastamento do contorno aparente horizontal) e o ponto em que o plano  $\gamma$  corta o arco da base do cone que integra o **contorno aparente horizontal**.

O plano  $\gamma$  corta o arco que integra o **contorno aparente horizontal** em um ponto (o ponto **C**) – o ponto **C** foi determinado a partir da sua projeção horizontal, pois o plano secante (o plano  $\gamma$ ) é um plano projetante horizontal. O plano  $\gamma$  corta a geratriz **g** (a geratriz de maior afastamento do contorno aparente horizontal) no ponto **E** – as projeções do ponto **E** situam-se sobre as projeções homónimas da geratriz **g** e foram determinadas de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal. O plano  $\gamma$  não corta a geratriz **g'** (a outra geratriz do contorno aparente horizontal), pois o plano  $\gamma$  é paralelo à geratriz **g'**.

Para averiguar se o plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente frontal**, foi necessário desenhar as projeções horizontais das duas geratrizes do contorno aparente frontal – as geratrizes **j** e **j'** (a geratriz mais à esquerda e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal, respetivamente). Consta-se, em projeção horizontal, que o plano  $\gamma$  corta a geratriz **j** (no ponto **F**), mas não corta a geratriz **j'**. Por outro lado, o plano  $\gamma$  corta o arco da base que integra o **contorno aparente frontal** num ponto – o ponto **D**, determinado a partir da sua projeção horizontal, pois o plano secante (o plano  $\gamma$ ) é um plano projetante horizontal. Assim, o plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente frontal** em apenas dois pontos – os pontos **D** e **F**.

Conclui-se que o plano  $\gamma$  corta os contornos aparentes do cone em quatro pontos – os pontos **C**, **D**, **E** e **F**. Já temos **quatro pontos** da figura da secção (da parábola)

### 3. Determinar o espaço útil para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano horizontal (de nível), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos horizontais (de nível). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor cota da secção** (porque os planos paralelos à base são planos horizontais). Tenha em conta que qualquer plano horizontal (de nível) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Os pontos **C** e **D**, porque pertencem à base, são, por inerência (e de forma imediata), **os pontos de menor cota da secção**. No entanto, é necessário determinar o **ponto de maior cota da secção**. Tendo em conta que o plano  $\gamma$  (o plano secante) é um **plano projetante horizontal**, não é possível determinar aquele ponto de forma direta, mas que teria determinação imediata caso o plano  $\gamma$  (o plano secante) fosse um **plano projetante frontal**. Assim, face ao exposto, é necessário o recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\gamma$  (o plano secante) num plano projetante frontal e, dessa forma, determinar o **ponto de maior cota da secção**.

Para transformar o plano  $\gamma$  (que é um plano vertical) num plano projetante frontal (um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção), é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**) que seja ortogonal ao plano  $\gamma$ . Note que, nesse caso, o plano  $\gamma$  (que é um plano projetante horizontal) será transformado num plano de perfil (que é um plano duplamente projetante).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, substituiu-se o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), criando um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\gamma$ , o eixo **X'** (o novo eixo **X**) é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 4**) do cone, bem como o novo traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_{4\gamma}$ ), que fica coincidente com  $h_\gamma$  (pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\gamma$  é necessariamente um plano de perfil). Determinaram-se, ainda, as projeções, no **plano 4**, dos pontos **C** e **D** ( $C_4$  e  $D_4$ , respetivamente), cujas projeções no **plano 4** estão coincidentes – **C** e **D** são os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base do cone e são, também (e como já se referiu) **os pontos de menor cota da secção**. Representou-se, ainda, o traço do plano  $\nu$  no **plano 4** ( $f_{4\nu}$ ), que contém a projeção, no **plano 4**, da base do cone. O plano  $\nu$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

Constata-se que o plano  $\gamma$  corta a geratriz mais à esquerda da nova projeção frontal do cone (a geratriz  $g''$ ) num ponto – esse ponto (o ponto **M**) é, de forma imediata, **o ponto de maior cota da secção**. Nesse sentido, desenhou-se a projeção horizontal (no **plano 1**) da geratriz  $g''$  ( $g''_1$ ) e determinaram-se as projeções do ponto **M**, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) – estas foram determinadas de forma direta, pois o plano  $\gamma$ , no novo diedro de projeção, é um plano duplamente projetante (é um plano de perfil).

Por fim, desenhou-se a projeção frontal (no **plano 2**) da geratriz  $g''$  ( $g''_2$ ) e determinou-se a projeção frontal do ponto **M** ( $M_2$ ), sobre  $g''_2$ .

Assim, o ponto **M** é o **ponto de maior cota** da secção e os pontos **C** e **D** são, ambos, os **pontos de menor cota** da secção, o que não seria possível garantir, se não se tivesse transformado o plano  $\gamma$  num plano projetante frontal. Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre os pontos **C/D** e **M**.

#### 4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Já foram determinados **cinco pontos** da figura da secção – os pontos **C, D, E, F** e **M**. Face à dimensão da figura da secção (que agora é possível adivinhar), considera-se que o mínimo de **oito pontos** atrás referido é claramente insuficiente, para um desenho relativamente preciso da curva.

Tendo em conta que o recurso a um plano auxiliar (paralelo ao plano da base) nos permite, sempre, determinar mais **dois pontos** da secção, para determinar os quatro pontos em falta (para os **oito pontos** primeiramente referidos) seria necessário o recurso a dois planos auxiliares. No entanto, face à dimensão da figura da secção, optou-se pelo recurso a três planos auxiliares (paralelos ao plano da base), para determinarmos mais **seis pontos** que, em conjunto com os **cinco pontos** já determinados, perfarão um total de **onze pontos**, o que já será suficiente para um desenho relativamente preciso da curva.

Por outro lado, o recurso a planos paralelos ao plano da base para a determinação de mais pontos da figura da secção deve garantir a distribuição o mais homogênea possível dos pontos determinados. Tendo em conta os pontos já determinados (os pontos **C, D, E, F** e **M**), há que distribuir os pontos da determinar de forma homogênea entre aqueles pontos.

Assim, o primeiro plano auxiliar (paralelo ao plano da base) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a meio entre a cota do plano da base (o plano  $\nu$ ) e a cota do ponto **M** (o ponto de maior cota da secção). Assim, identificou-se o plano  $\nu'$  pelo seu traço frontal ( $f_{\nu'}$ ) – este plano, porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $\nu'$  interseca o eixo do cone. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano  $\nu'$ . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano  $\nu'$  corta a geratriz  $j$  (a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal). Os pontos **Q** e **P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $\nu'$  é um plano projetante frontal. O círculo com centro no ponto **Q** e raio  $QP$  é a secção que o plano  $\nu'$  produz no cone (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio  $Q_1P_1$ , desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\nu'$  (o plano auxiliar) com o plano  $\gamma$  (o plano secante), que é uma reta horizontal (de nível), cujas projeções não se identificaram (mas que se determinou de forma semelhante à determinação da reta  $i$ , atrás exposta). Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **G** e **H**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções horizontais – as suas projeções frontais ( $G_2$  e  $H_2$ ) situam-se sobre o traço frontal do plano  $\nu'$ , pois o plano  $\nu'$  é um plano projetante frontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **sete pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **G** e **H** repetiu-se mais duas vezes.

O segundo plano auxiliar (o plano  $\nu''$ ) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a meio entre a cota do primeiro plano auxiliar (o plano  $\nu'$ ) e a cota do ponto **M** (o ponto de maior cota da secção). Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim determinou-se a reta de interseção do plano  $\nu''$  com o plano  $\gamma$  e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção – os pontos **I** e **J**. Já temos **nove pontos** da secção. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, o terceiro plano auxiliar (o plano  $v'''$ ) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a meio entre a cota do plano da base (o plano  $v$ ) e a cota do primeiro plano auxiliar (o plano  $v'$ ). Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, bem como a reta de interseção do plano  $v'''$  com o plano  $\gamma$  – a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção (os pontos **K** e **L**). Já temos **onze pontos** da figura da secção, o que é um número de pontos suficientes para o desenho relativamente preciso da curva da secção. Note que, mais uma vez, se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A partir dos **onze pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção frontal da parábola é uma outra parábola, que passa pelas projeções frontais dos onze pontos determinados – o desenho da curva é relativamente preciso, a partir dos onze pontos determinados. A projeção horizontal da parábola reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ), pois o plano  $\gamma$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

Já em projeção frontal, parte da **figura da secção** é **invisível** – a parte que se situa na parte invisível da superfície lateral do cone, que corresponde ao arco menor  $C_2K_2F_2$  da parábola. Já o arco maior  $F_2M_2D_2$  da parábola é **visível**, em projeção frontal, por se situar na parte visível do sólido. Note que o ponto **F** (o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a geratriz do contorno aparente frontal) é o ponto que estabelece a distinção entre a **parte visível** da figura da secção e a sua **parte invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base do cone) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos raios da circunferência (que nos permitiram desenhar as projeções horizontais das geratrizes do contorno aparente horizontal do cone), dos traços do plano  $\gamma'$ , da reta  $i$ , dos planos horizontais auxiliares, das secções circulares produzidas por aqueles no cone, das projeções das geratrizes  $g$ ,  $g'$ ,  $j$  e  $j'$  ou, ainda, dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação do ponto de maior cota da secção).

## 711.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). Por outro lado, o plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\phi$  (o plano secante), pelo seu traço horizontal ( $h_\phi$ ). O plano  $\phi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

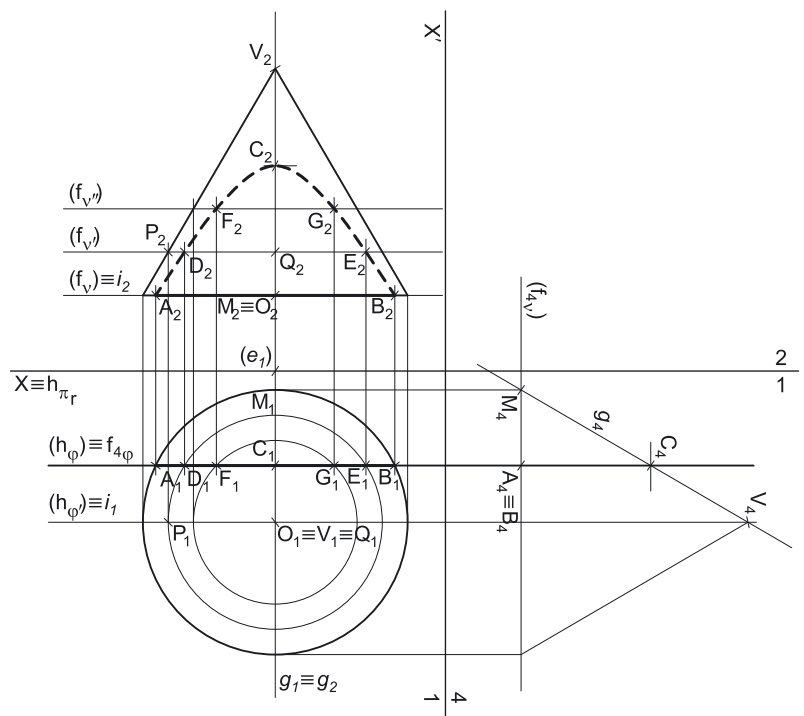
#### Resolução:

##### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, numa reta vertical (uma reta projetante horizontal) – assim, tem-se imediatamente  $V_1 \equiv O_1$  (os dois pontos situam-se na mesma projetante horizontal). Por outro lado, o vértice do cone tem 8 cm de cota, o que nos permitiu, de forma imediata, determinar  $V_2$ , a projeção frontal do ponto **V**.

Por fim, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a projeção horizontal da circunferência que delimita a base).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano  $\varphi$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

### 1. Identificação do tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\varphi$  no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**A.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\varphi$ ). O plano  $\varphi'$  é o plano paralelo ao plano  $\varphi$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ) passa por  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto **V**). Por outro lado, o plano  $\varphi'$  é outro plano frontal (de frente), pelo que se verifica o **critério de paralelismo entre planos**.

**B.** Determinou-se a reta de interseção do plano  $\varphi'$  com o plano da base do cone (o plano  $v$ ) – a reta  $i$ . O plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ) está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\varphi'$ . A base do cone está contida no plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ) está sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $v$ . A reta  $i$ , definida pelas suas duas projeções, é, assim, a reta que pertence simultaneamente aos dois planos (o plano  $\varphi'$  e o plano  $v$ ).

Note que a reta  $i$  é, neste caso, uma reta fronto-horizontal que pertence simultaneamente aos planos  $\varphi'$  e  $v$ .

**C.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta de interseção (a reta  $i$ ) é secante à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\varphi$  é uma **hipérbole** (ou, mais corretamente, um **ramo de uma hipérbole**, pois o cone é limitado lateralmente por **uma única folha de uma superfície cônica**).

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta, a partir das respetivas projeções horizontais.

O plano  $\varphi$  corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – os pontos em que o plano  $\varphi$  corta a base do cone (dois pontos). Assim, os pontos **A** e **B** (os pontos em que o plano  $\varphi$  corta a base do cone) foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano secante (o plano  $\varphi$ ) é um plano projetante horizontal.

O plano  $\varphi$  não corta o **contorno aparente frontal**, pois os pontos **A** e **B** (os pontos em que o plano  $\varphi$  corta a base do cone) não se situam no arco da base que integra o **contorno aparente frontal**. Por outro lado, o plano  $\varphi$  é paralelo às duas geratrizes do contorno aparente frontal, pelo que o plano  $\varphi$  também não corta nenhuma das duas geratrizes do contorno aparente frontal.

Conclui-se que o plano  $\varphi$  corta os contornos aparentes do cone em dois pontos apenas – os pontos **A** e **B**. Já temos **dois pontos** da figura da secção (da hipérbole)

### 3. Determinar o espaço útil para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano horizontal (de nível), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos horizontais (de nível). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor cota da secção** (porque os planos paralelos à base são planos horizontais). Tenha em conta que qualquer plano horizontal (de nível) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Os pontos **A** e **B**, porque pertencem à base, são, por inerência (e de forma imediata), **os pontos de menor cota da secção**. No entanto, é necessário determinar o **ponto de maior cota da secção**. Tendo em conta que o plano  $\varphi$  (o plano secante) é um **plano projetante horizontal**, não é possível determinar aquele ponto de forma direta, mas que teria determinação imediata caso o plano  $\varphi$  (o plano secante) fosse um **plano projetante frontal**. Assim, face ao exposto, é necessário o recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\varphi$  (o plano secante) num plano projetante frontal e, dessa forma, determinar o **ponto de maior cota da secção**.

Para transformar o plano  $\varphi$  (que é um plano frontal) num plano projetante frontal (um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção), é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**) que seja ortogonal ao plano  $\varphi$ . Note que, nesse caso, o plano  $\varphi$  (que é um plano projetante horizontal) será transformado num plano de perfil (que é um plano duplamente projetante).

Nesse sentido, substituiu-se o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), criando um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\varphi$ , o eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ) é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 4**) do cone, bem como o traço do plano  $\varphi$  no **plano 4** ( $f_{4\varphi}$ ), que fica coincidente com  $h_\varphi$  (pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\varphi$  é necessariamente um plano de perfil). Determinaram-se, ainda, as projeções, no **plano 4**, dos pontos **A** e **B** ( $A_4$  e  $B_4$ , respetivamente), cujas projeções no **plano 4** estão coincidentes – **A** e **B** são os pontos em que o plano  $\varphi$  corta a base do cone e são, também (e como já se referiu) **os pontos de menor cota da secção**. Representou-se, ainda, o traço do plano  $\nu$  no **plano 4** ( $f_{4\nu}$ ), que contém a projeção, no **plano 4**, da base do cone. O plano  $\nu$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

Constata-se que o plano  $\varphi$  corta a geratriz mais à esquerda da nova projeção frontal do cone (a geratriz  $g$ ) num ponto – esse ponto (o ponto **C**) é, de forma imediata, **o ponto de maior cota da secção**. Nesse sentido, desenhou-se a projeção horizontal (no **plano 1**) da geratriz  $g$  ( $g_1$ ) e determinaram-se as projeções do ponto **C**, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) – estas foram determinadas de forma direta, pois o plano  $\varphi$ , no novo diedro de projeção, é um plano duplamente projetante (é um plano de perfil). Note que a geratriz  $g$  está definida por dois pontos em ambas as projeções – o ponto **V** (o vértice do cone) e o ponto **M** (o ponto da geratriz que se situa na base do cone).

Por fim, desenhou-se a projeção frontal (no **plano 2**) da geratriz  $g$  ( $g_2$ ) e determinou-se a projeção frontal do ponto **C** ( $C_2$ ), sobre  $g_2$ . Acontece que a geratriz  $g$ , no diedro de projeção inicial (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 2**), é uma geratriz de perfil, cujas projeções não verificam o **Crítério de Reversibilidade**. Assim, não é possível, de forma direta, determinar a projeção frontal do ponto **C** ( $C_2$ ), sobre a projeção frontal da geratriz  $g$  ( $g_2$ ). No entanto, na mudança do diedro de projeção efetuada, mantiveram-se as cotas. Assim, determinou-se  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**) em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $C_4$  ao eixo  $X'$ .

Assim, o ponto **C** é o **ponto de maior cota** da secção e os pontos **A** e **B** são, ambos, os **pontos de menor cota** da secção, o que não seria possível garantir, se não se tivesse transformado o plano  $\varphi$  num plano projetante frontal. Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre os pontos **A/B** e **C**.

#### 4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Já foram determinados **três pontos** da figura da secção – os pontos **A**, **B** e **C**. Tendo em conta que o recurso a um plano auxiliar (paralelo ao plano da base) nos permite, sempre, determinar mais **dois pontos** da secção, para determinar os cinco pontos em falta (para os **oito pontos** primeiramente referidos) seria necessário o recurso a três planos auxiliares. No entanto, face à dimensão da figura da secção, considera-se que **sete pontos** poderão ser suficientes, pelo que se optou pelo recurso a dois planos auxiliares (paralelos ao plano da base). Esses dois planos auxiliares permitir-nos-ão determinar mais **quatro pontos** que, em conjunto com os **três pontos** já determinados, perfarão um total de **sete pontos**, o que já será suficiente para um desenho relativamente preciso da curva.

Por outro lado, o recurso a planos paralelos ao plano da base para a determinação de mais pontos da figura da secção deve garantir a distribuição o mais homogénea possível dos pontos determinados. Tendo em conta os pontos já determinados (os pontos **A**, **B** e **C**), há que distribuir os pontos da determinação de forma homogénea entre aqueles pontos.

Assim, o primeiro plano auxiliar (paralelo ao plano da base) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a um terço da distância entre o plano da base (o plano  $\nu$ ) e o ponto **C** (o ponto de maior cota da secção). Assim, identificou-se o plano  $\nu'$  pelo seu traço frontal ( $f_{\nu'}$ ) – este plano, porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $\nu'$  intersesta o eixo do cone. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano  $\nu'$ . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano  $\nu'$  corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal. Os pontos **Q** e **P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $\nu'$  é um plano projetante frontal. O círculo com centro no ponto **Q** e raio  $\overline{QP}$  é a secção que o plano  $\nu'$  produz no cone (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio  $\overline{Q_1P_1}$ , desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\nu'$  (o plano auxiliar) com o plano  $\varphi$  (o plano secante), que é uma reta fronto-horizontal, cujas projeções não se identificaram (mas que se determinou de forma semelhante à determinação da reta  $i$ , atrás exposta). Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **D** e **E**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções horizontais – as suas projeções frontais ( $D_2$  e  $E_2$ ) situam-se sobre o traço frontal do plano  $\nu'$ , pois o plano  $\nu'$  é um plano projetante frontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **cinco pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **D** e **E** repetiu-se mais uma vez.

O segundo plano auxiliar (o plano  $\nu''$ ) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a meio da distância entre a cota do primeiro plano auxiliar (o plano  $\nu'$ ) e a cota do ponto **C** (o ponto de maior cota da secção), o que significa que está sensivelmente a dois terços da distância entre o plano  $\nu$  e o ponto **C**. Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim determinou-se a reta de interseção do plano  $\nu''$  com o plano  $\varphi$  e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção – os pontos **F** e **G**. Já temos **sete pontos** da secção. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A partir dos **sete pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção frontal da hipérbole é uma outra hipérbole (um ramo da hipérbole), que passa pelas projeções frontais dos sete pontos determinados – o desenho da curva é relativamente preciso, a partir dos sete pontos determinados. A projeção horizontal da hipérbole reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que a figura da secção se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal), pois o plano secante (o plano  $\varphi$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** é **invisível** na sua totalidade, pois situa-se, na sua totalidade, na parte da superfície do sólido que é invisível em projeção frontal.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e o traço horizontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base do cone) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso do traço horizontal do plano  $\varphi'$ , da reta  $i$ , dos planos horizontais auxiliares, das secções circulares produzidas por aqueles no cone, das projeções da geratriz  $g$  ou, ainda, dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação do ponto de maior cota da secção).

## 712.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). Por outro lado, o plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou com o recurso a parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\gamma$  (o plano secante), pelos seus traços. O plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal que contém o ponto **O** (é dado no enunciado), pelo que o seu traço horizontal ( $h_\gamma$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ).

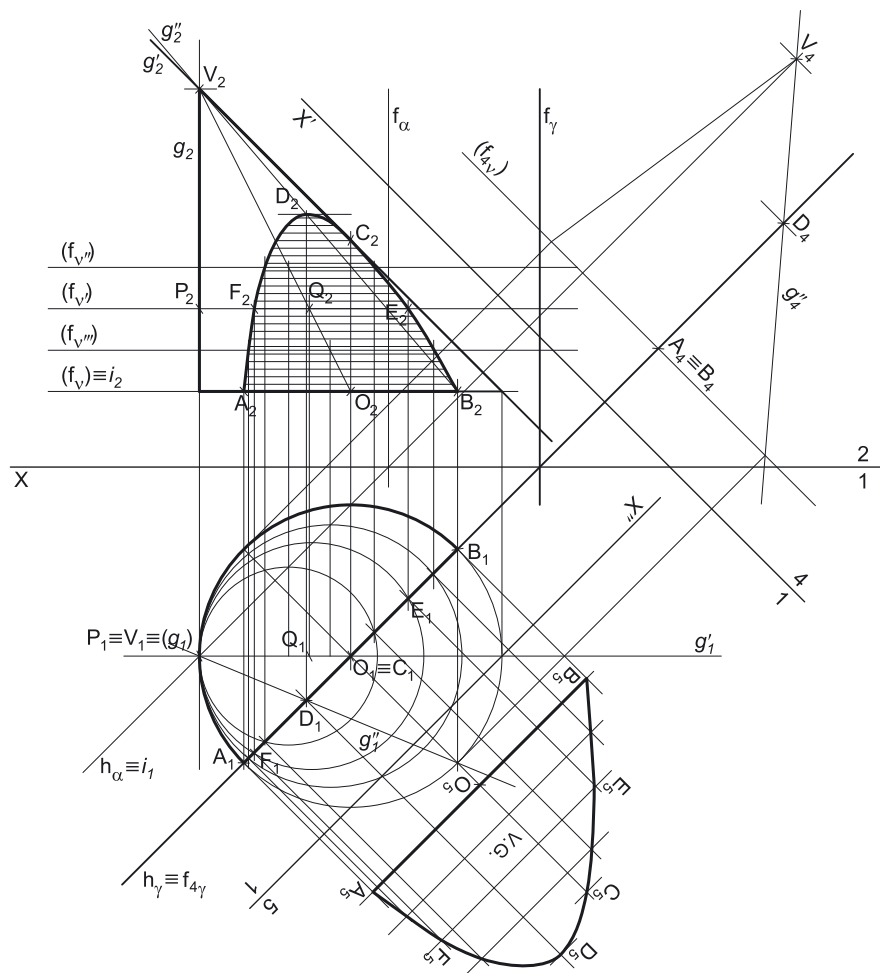
### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, representou-se a geratriz  $g$ , que é a geratriz vertical do cone (a sua geratriz mais à esquerda). A geratriz  $g$  está definida por um ponto (o ponto mais à esquerda da base do cone, que não se identificou) e pela sua direção (é vertical). A projeção horizontal do ponto **V** ( $V_1$ ) está coincidente com a projeção horizontal da geratriz  $g$  ( $g_1$ ), pois a geratriz é projetante horizontal.

Por outro lado, o cone tem 8 cm de altura, que é a distância do seu vértice ao plano da base, ou seja, neste caso é a diferença entre as cotas do vértice e do plano da base. Tendo em conta que o plano da base (o plano  $v$ ) tem 2 cm de cota (a cota do ponto **O**), o vértice do cone (o ponto **V**) tem necessariamente 10 cm de cota ( $2 + 8 = 10$ ). Este raciocínio permitiu-nos determinar  $V_2$ , a projeção frontal do ponto **V**. Note que o ponto **V** tem de ter cota positiva, para que o cone se situe no espaço do  $1^{\circ}$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por fim, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a projeção horizontal da circunferência que delimita a base).

**a) A determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano  $\gamma$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

### 1. Identificação do tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\gamma$  no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**A.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\gamma$ ). O plano  $\alpha$  é o plano paralelo ao plano  $\gamma$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\alpha$ ) passa por  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano  $\alpha$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\gamma$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\gamma$ ), para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

**B.** Determinou-se a reta de interseção do plano  $\alpha$  com o plano da base do cone (o plano  $v$ ) – a reta  $i$ . O plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ) está sobre o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\alpha$ . A base do cone está contida no plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ) está sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $v$ . A reta  $i$ , definida pelas suas duas projeções, é, assim, a reta que pertence simultaneamente aos dois planos (o plano  $\alpha$  e o plano  $v$ ).

**C.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta  $i$  é secante à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\gamma$  é uma **hipérbola** (ou, mais corretamente, um **ramo de uma hipérbola**, pois o cone é limitado lateralmente por **uma única folha de uma superfície cônica**).

Tendo em conta que uma **hipérbola** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta, a partir das respetivas projeções horizontais.

O plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base do cone (dois pontos). Assim, os pontos **A** e **B** (os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base do cone) foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano secante (o plano  $\gamma$ ) é um plano projetante horizontal.

Para averiguar se o plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente frontal**, foi necessário desenhar a projeção horizontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal – a geratriz  $g'$  (note que a geratriz  $g$ , já representada, é a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal). Constatou-se, em projeção horizontal, que o plano  $\gamma$  corta a geratriz  $g'$  (no ponto **C**), mas não corta a geratriz  $g$ . Por outro lado, o plano  $\gamma$  corta o arco da base que integra o **contorno aparente frontal** num ponto – o ponto **A**, já determinado. Assim, o plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente frontal** em apenas dois pontos – os pontos **A** e **C**.

Conclui-se que o plano  $\gamma$  corta os contornos aparentes do cone em três pontos – os pontos **A**, **B** e **C**. Já temos **três pontos** da figura da secção (da hipérbola)

### 3. Determinar o espaço útil para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano horizontal (de nível), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos horizontais (de nível). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor cota da secção** (porque os planos paralelos à base são planos horizontais). Tenha em conta que qualquer plano horizontal (de nível) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Os pontos **A** e **B**, porque pertencem à base, são, por inerência (e de forma imediata), **os pontos de menor cota da secção**. No entanto, é necessário determinar o **ponto de maior cota da secção**. Tendo em conta que o plano  $\gamma$  (o plano secante) é um **plano projetante horizontal**, não é possível determinar aquele ponto, que teria determinação imediata caso o plano  $\gamma$  (o plano secante) fosse um **plano projetante frontal**. Assim, face ao exposto, é necessário o recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\gamma$  (o plano secante) num plano projetante frontal e, dessa forma, determinar o **ponto de maior cota da secção**.

Para transformar o plano  $\gamma$  (que é um plano vertical) num plano projetante frontal (um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção), é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**) que seja ortogonal ao plano  $\gamma$ . Note que, nesse caso, o plano  $\gamma$  (que é um plano projetante horizontal) será transformado num plano de perfil (que é um plano duplamente projetante).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, substituiu-se o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), criando um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\gamma$ , o eixo **X'** (o novo eixo **X**) é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 4**) do cone, bem como o novo traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_{4\gamma}$ ), que fica coincidente com  $h_\gamma$  (pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\gamma$  é necessariamente um plano de perfil). Determinaram-se, ainda, as projeções, no **plano 4**, dos pontos **A** e **B** ( $A_4$  e  $B_4$ , respetivamente), cujas projeções no **plano 4** estão coincidentes – **A** e **B** são os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base do cone e são, também (e como já se referiu) **os pontos de menor cota da secção**. Representou-se, ainda, o traço do plano  $\nu$  no **plano 4** ( $f_{4\nu}$ ), que contém a projeção, no **plano 4**, da base do cone. O plano  $\nu$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

Constata-se que o plano  $\gamma$  corta a geratriz mais à direita da nova projeção frontal do cone (a geratriz  $g''$ ) num ponto – esse ponto (o ponto **D**) é, de forma imediata, **o ponto de maior cota da secção**. Nesse sentido, desenhou-se a projeção horizontal (no **plano 1**) da geratriz  $g''$  ( $g''_1$ ) e determinaram-se as projeções do ponto **D**, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) – estas foram determinadas de forma direta, pois o plano  $\gamma$ , no novo diedro de projeção, é um plano duplamente projetante (é um plano de perfil).

Por fim, desenhou-se a projeção frontal (no **plano 2**) da geratriz  $g''$  ( $g''_2$ ) e determinou-se a projeção frontal do ponto **D** ( $D_2$ ), sobre  $g''_2$ .

Assim, o ponto **D** é o **ponto de maior cota** da secção e os pontos **A** e **B** são, ambos, os **pontos de menor cota** da secção, o que não seria possível garantir, se não se tivesse transformado o plano  $\gamma$  num plano projetante frontal. Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre os pontos **A/B** e **D**.

#### 4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Já foram determinados **quatro pontos** da figura da secção – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Face à dimensão da figura da secção (que agora é possível adivinhar), considerou-se que o mínimo de **oito pontos** atrás referido é ainda insuficiente, para um desenho relativamente preciso da curva.

Tendo em conta que o recurso a um plano auxiliar (paralelo ao plano da base) nos permite, sempre, determinar mais **dois pontos** da secção, para determinar os quatro pontos em falta (para os **oito pontos** primeiramente referidos) seria necessário o recurso a dois planos auxiliares. No entanto, face à dimensão da figura da secção, optou-se pelo recurso a três planos auxiliares (paralelos ao plano da base), para determinarmos mais **seis pontos** que, em conjunto com os **quatro pontos** já determinados, perfarão um total de **dez pontos**, o que já será suficiente para um desenho relativamente preciso da curva.

Por outro lado, o recurso a planos paralelos ao plano da base para a determinação de mais pontos da figura da secção deve garantir a distribuição o mais homogênea possível dos pontos determinados. Tendo em conta os pontos já determinados (os pontos **A**, **B**, **C** e **D**), há que distribuir os pontos da determinação de forma homogênea entre aqueles pontos.

Assim, o primeiro plano auxiliar (paralelo ao plano da base) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a meio entre a cota do plano da base (o plano  $\nu$ ) e a cota do ponto **D** (o ponto de maior cota da secção). Assim, identificou-se o plano  $\nu'$  pelo seu traço frontal ( $f_{\nu'}$ ) – este plano, porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $\nu'$  intersecta o eixo do cone. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano  $\nu'$ . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano  $\nu'$  corta a geratriz  $j$  (a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal). Os pontos **Q** e **P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $\nu'$  é um plano projetante frontal. O círculo com centro no ponto **Q** e raio  $QP$  é a secção que o plano  $\nu'$  produz no cone (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio  $Q_1P_1$ , desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\nu'$  (o plano auxiliar) com o plano  $\gamma$  (o plano secante), que é uma reta horizontal (de nível), cujas projeções não se identificaram (mas que se determinou de forma semelhante à determinação da reta  $i$ , atrás exposta). Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **E** e **F**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções horizontais – as suas projeções frontais ( $E_2$  e  $F_2$ ) situam-se sobre o traço frontal do plano  $\nu'$ , pois o plano  $\nu'$  é um plano projetante frontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **seis pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **E** e **F** repetiu-se mais duas vezes.

O segundo plano auxiliar (o plano  $\nu''$ ) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a meio entre a cota do primeiro plano auxiliar (o plano  $\nu'$ ) e a cota do ponto **D** (o ponto de maior cota da secção). Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim determinou-se a reta de interseção do plano  $\nu''$  com o plano  $\gamma$  e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção (que não se identificaram, para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações). Já temos **oito pontos** da secção. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, o terceiro plano auxiliar (o plano  $v'''$ ) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a meio entre a cota do plano da base (o plano  $v$ ) e a cota do primeiro plano auxiliar (o plano  $v'$ ). Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, bem como a reta de interseção do plano  $v'''$  com o plano  $\gamma$  – a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção (que também não se identificaram, para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações). Já temos **dez pontos** da figura da secção, o que é um número de pontos suficientes para o desenho relativamente preciso da curva da secção. Note que, mais uma vez, se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A partir dos **dez pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção frontal da hipérbole é uma outra hipérbole (um ramo da hipérbole), que passa pelas projeções frontais dos dez pontos determinados – o desenho da curva é relativamente preciso, a partir dos dez pontos determinados. A projeção horizontal da hipérbole reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ), pois o plano  $\gamma$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal.

*Determinação das projeções do sólido resultante da secção.*

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cone compreendida entre o plano secante e o Plano Frontal de Projeção.

A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** é a linha mista fechada limitada pelo segmento de reta  $[A_2B_2]$  e pela semicircunferência  $\overline{A_1V_1B_1}$ . A **projeção frontal do contorno aparente frontal** é uma linha mista fechada limitada, à esquerda, pela projeção frontal da geratriz  $g(g_2)$  e, à direita, pelo segmento  $[V_2C_2]$  e pelo arco  $C_2E_2B_2$ , que é a projeção frontal do segmento de hipérbole que integra o contorno aparente frontal do sólido. Note que o ponto  $C$  (o ponto em que o plano secante corta a geratriz  $g'$ , do contorno aparente frontal) é o ponto em que o contorno aparente frontal deixa de ser uma linha reta (um segmento da geratriz  $g'$ ) para passar a ser uma linha curva (a parte correspondente da hipérbole).

A **figura da secção**, porque é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo  $X$  (em projeção frontal).

**b)** O plano que contém a figura da secção (o plano secante – o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (a figura da secção apresenta a deformação tanto em projeção frontal como em projeção horizontal). Assim, para determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\gamma$  (o plano secante) num plano paralelo a um dos planos de projeção.

O plano  $\gamma$  é um plano vertical, que é um plano projetante horizontal. O único plano projetante horizontal que é paralelo a um dos planos de projeção é o plano frontal (de frente). Assim, há que transformar o plano  $\gamma$  num plano frontal (de frente), para o que é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção.

Nesse sentido, substituiu-se o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano de projeção (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\gamma$ , de forma a transformar o plano  $\gamma$  num plano frontal (de frente). Dessa forma, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 5**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\gamma$ , o eixo  $X'$  é paralelo ao traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ).

$A_5$  é a projeção do ponto  $A$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $A_5$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $A_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $A$ ).  $B_5$  é a projeção do ponto  $B$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $B_5$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $B_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $B$ ).  $C_5$  é a projeção do ponto  $C$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $C_5$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $C_2$  ao eixo  $X$ .  $D_5$  é a projeção do ponto  $D$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $D_5$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $D_2$  ao eixo  $X$ .  $E_5$  é a projeção do ponto  $E$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $E_5$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $E_2$  ao eixo  $X$ .  $F_5$  é a projeção do ponto  $F$  no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_5$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$ . O procedimento exposto para os pontos  $A, B, C, D, E$  e  $F$  repetiu-se para os restantes quatro pontos da secção (os pontos que não foram identificados).

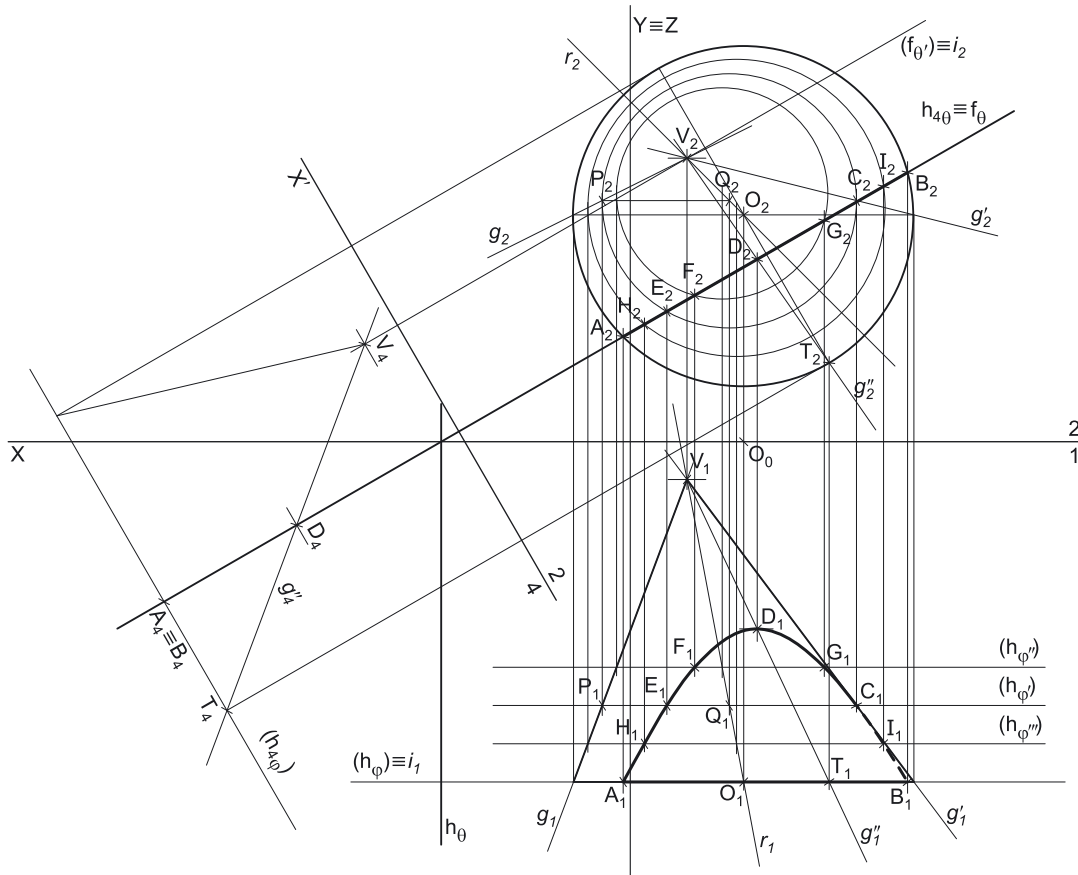
Por fim, a partir das projeções, no **plano 5**, dos **dez pontos** da figura da secção, foi possível desenhar o ramo da **hipérbole** em verdadeira grandeza, com um desenho relativamente preciso (à mão livre), tendo-se assinalado, no desenho, o facto de se tratar da curva em verdadeira grandeza.

Sublinha-se que a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção se poderia ter processado, por exemplo, com o recurso ao rebatimento do plano  $\gamma$  (o plano secante) para qualquer dos planos de projeção.

**Traçado:**

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y = Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do cone, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base do cone) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções do **sólido resultante da secção** (um dos objetivos do exercício) representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traços do plano  $\alpha$ , da reta  $i$ , dos planos horizontais auxiliares, das secções circulares produzidas por aqueles no cone, dos traçados referentes à primeira mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação do ponto de maior cota da secção), das projeções das geratrizes  $g, g'$  e  $g''$ , ou, ainda, dos traçados referentes à segunda mudança do diedro de projeção (para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

713.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\phi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). Por outro lado, o plano  $\phi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou com o recurso a parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\theta$  (o plano secante), pelos seus traços. Bem como desenhar  $r_2$ , a projeção frontal da reta suporte do eixo do cone. A reta  $r$  é, assim, a reta suporte do eixo do cone e a sua projeção frontal ( $r_2$ ) passa por  $O_2$  e tem a direção dada no enunciado.

**Resolução:**

*Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\phi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 4,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a base do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\phi$  ( $h_\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

Sendo dada a cota do vértice do cone (o ponto **V**), foi possível determinar a sua projeção frontal ( $V_2$ ), sobre a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ), pois o ponto **V** é um ponto da reta  $r$ .

O vértice do cone é invisível em projeção frontal, pelo que o ponto **V** (o vértice do cone) tem afastamento inferior à base (que está contida no plano  $\phi$ ). O cone tem 8 cm de altura, que é a distância do seu vértice ao plano da base, ou seja, neste caso é a diferença entre os afastamentos do vértice e do plano da base. Tendo em conta que o plano da base (o plano  $\phi$ ) tem 9 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**), o vértice do cone (o ponto **V**) tem necessariamente 1 cm de cota ( $9 - 8 = 1$ ). Este raciocínio permitiu-nos determinar  $V_1$ , a projeção horizontal do ponto **V**.

Por fim, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a projeção frontal da circunferência que delimita a base).

A **determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano  $\theta$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que Em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### 1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\theta$  no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de intersecção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**A.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\theta$ ). O plano  $\theta'$  é o plano paralelo ao plano  $\theta$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano  $\theta'$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{\theta'}$ ) passa por  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano  $\theta'$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\theta'$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\theta$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\theta$ ), para que se verifique o **CrITÉrio de paralelismo entre planos**. No entanto, o traço horizontal do plano  $\theta'$  ( $h_{\theta'}$ ) situa-se fora dos limites do papel, pelo que o plano  $\theta'$  foi representado, apenas, pelo seu traço frontal, facto que se assinalou no desenho identificando o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ) entre parêntesis.

**B.** Determinou-se a reta de intersecção do plano  $\theta'$  com o plano da base do cone (o plano  $\varphi$ ) – a reta  $i$ . O plano  $\theta'$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal da reta  $i$  ( $i_2$ ) está sobre o traço frontal do plano  $\theta'$  ( $f_{\theta'}$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\theta'$ . A base do cone está contida no plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ) está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{\varphi}$ ), o que nos garante que a reta  $i$  pertence ao plano  $\varphi$ . A reta  $i$ , definida pelas suas duas projeções, é, assim, a reta que pertence simultaneamente aos dois planos (o plano  $\theta'$  e o plano  $\varphi$ ).

**C.** Analisa-se a posição da reta de intersecção em relação à base do cone. A reta  $i$  é secante à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\theta$  é uma **hipérbole** (ou, mais corretamente, um **ramo de uma hipérbole**, pois o cone é limitado lateralmente por **uma única folha de uma superfície cónica**).

Tendo em conta que uma **hipérbole** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta, a partir das respetivas projeções frontais.

O plano  $\theta$  corta o **contorno aparente frontal** em dois pontos – os pontos em que o plano  $\theta$  corta a base do cone (dois pontos). Assim, os pontos **A** e **B** (os pontos em que o plano  $\theta$  corta a base do cone) foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções frontais, pois o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal.

Para averiguar se o plano  $\theta$  corta o **contorno aparente horizontal**, foi necessário desenhar as projeções horizontais das geratrizes do contorno aparente horizontal – as geratrizes **g** e **g'**. Consta-se, em projeção frontal, que o plano  $\theta$  corta a geratriz **g'** (no ponto **C**), mas não corta a geratriz **g**. Por outro lado, o plano  $\theta$  corta o arco da base que integra o **contorno aparente horizontal** num ponto – o ponto **B**, já determinado. Assim, o plano  $\theta$  corta o **contorno aparente horizontal** em apenas dois pontos – os pontos **B** e **C**.

Conclui-se que o plano  $\theta$  corta os contornos aparentes do cone em três pontos – os pontos **A**, **B** e **C**. Já temos **três pontos** da figura da secção (da hipérbole)

### 3. Determinar o espaço útil para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano frontal (de frente), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos frontais (de frente). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor afastamento da secção** (porque os planos paralelos à base são planos frontais). Tenha em conta que qualquer plano frontal (de frente) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Os pontos **A** e **B**, porque pertencem à base, são, por inerência (e de forma imediata), **os pontos de maior afastamento da secção**. No entanto, é necessário determinar o **ponto de menor afastamento da secção**. Tendo em conta que o plano  $\theta$  (o plano secante) é um **plano projetante frontal**, não é possível determinar aquele ponto, que teria determinação imediata caso o plano  $\theta$  (o plano secante) fosse um **plano projetante horizontal**. Assim, face ao exposto, é necessário o recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\theta$  (o plano secante) num plano projetante horizontal e, dessa forma, determinar o **ponto de maior cota da secção**.

Para transformar o plano  $\theta$  (que é um plano de topo) num plano projetante horizontal (um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**) que seja ortogonal ao plano  $\theta$ . Note que, nesse caso, o plano  $\theta$  (que é um plano projetante frontal) será transformado num plano de perfil (que é um plano duplamente projetante).

Nesse sentido, substituiu-se o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), criando um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de intersecção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\theta$ , o eixo **X'** (o novo eixo **X**) é perpendicular ao traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_{\theta}$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 4**) do cone, bem como o novo traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_{4\theta}$ ), que fica coincidente com  $f_0$  (pois, no novo diedro de projeção, o plano  $\theta$  é necessariamente um plano de perfil). Determinaram-se, ainda, as projeções, no **plano 4**, dos pontos **A** e **B** ( $A_4$  e  $B_4$ , respetivamente), cujas projeções no **plano 4** estão coincidentes – **A** e **B** são os pontos em que o plano  $\theta$  corta a base do cone e são, também (e como já se referiu) **os pontos de maior afastamento da secção**. Representou-se, ainda, o traço do plano  $\varphi$  no **plano 4** ( $h_{4\varphi}$ ), que contém a projeção, no **plano 4**, da base do cone. O plano  $\varphi$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano frontal (de frente), pelo que continua a ser um plano projetante horizontal.

Constata-se que o plano  $\theta$  corta a geratriz mais à direita da nova projeção horizontal do cone (a geratriz  $g''$ ) num ponto – esse ponto (o ponto **D**) é, de forma imediata, **o ponto de menor afastamento da secção**. Nesse sentido, desenhou-se a projeção frontal (no **plano 2**) da geratriz  $g''$  ( $g''_2$ ) e determinaram-se as projeções do ponto **D**, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**) – estas foram determinadas de forma direta, pois o plano  $\theta$ , no novo diedro de projeção, é um plano duplamente projetante (é um plano de perfil).

Por fim, desenhou-se a projeção horizontal (no **plano 1**) da geratriz  $g''$  ( $g''_1$ ) e determinou-se a projeção horizontal do ponto **D** ( $D_1$ ), sobre  $g''_1$ .

Assim, o ponto **D** é **o ponto de menor afastamento** da secção e os pontos **A** e **B** são, ambos, **os pontos de maior afastamento** da secção, o que não seria possível garantir, se não se tivesse transformado o plano  $\theta$  num plano projetante horizontal. Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre os pontos **A/B** e **D**.

#### 4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Já foram determinados **quatro pontos** da figura da secção – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Face à dimensão da figura da secção (que agora é possível adivinhar), considerou-se que o mínimo de **oito pontos** atrás referido é ainda insuficiente, para um desenho relativamente preciso da curva.

Tendo em conta que o recurso a um plano auxiliar (paralelo ao plano da base) nos permite, sempre, determinar mais **dois pontos** da secção, para determinar os quatro pontos em falta (para os **oito pontos** primeiramente referidos) seria necessário o recurso a dois planos auxiliares. No entanto, face à dimensão da figura da secção, optou-se pelo recurso a três planos auxiliares (paralelos ao plano da base), para determinarmos mais **seis pontos** que, em conjunto com os **quatro pontos** já determinados, perfarão um total de **dez pontos**, o que já será suficiente para um desenho relativamente preciso da curva.

Por outro lado, o recurso a planos paralelos ao plano da base para a determinação de mais pontos da figura da secção deve garantir a distribuição o mais homogênea possível dos pontos determinados. Tendo em conta os pontos já determinados (os pontos **A**, **B**, **C** e **D**), há que distribuir os pontos da determinação de forma homogênea entre aqueles pontos.

Assim, o primeiro plano auxiliar (paralelo ao plano da base) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a meio entre o afastamento do plano da base (o plano  $\varphi$ ) e o afastamento do ponto **D** (o ponto de menor afastamento da secção). Note que, dada a proximidade do plano ao ponto **C**, se optou por conduzir o plano  $\varphi'$  pelo ponto **C** – o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ) passa por  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**). Assim, identificou-se o plano  $\varphi'$  pelo seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ) – este plano, porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $\varphi'$  interseca o eixo do cone. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano  $\varphi'$ . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a geratriz  $g$  (a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal). Os pontos **Q** e **P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. O círculo com centro no ponto **Q** e raio  $QP$  é a secção que o plano  $\varphi'$  produz no cone (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto **Q**) e com raio  $Q_2P_2$ , desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\varphi'$  (o plano auxiliar) com o plano  $\theta$  (o plano secante), que é uma reta frontal (de frente), cujas projeções não se identificaram (mas que se determinou de forma semelhante à determinação da reta  $i$ , atrás exposta). Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **E** e **C**. O ponto **C** já havia sido determinado. O ponto **E** foi determinado a partir da sua projeção frontal – a sua projeção horizontal ( $E_1$ ) situa-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$ , pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. Já temos mais um ponto da secção, o que perfaz um total de **cinco pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **C** e **E** repetiu-se mais duas vezes.

O segundo plano auxiliar (o plano  $\varphi''$ ) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a meio entre o afastamento do primeiro plano auxiliar (o plano  $\varphi'$ ) e o afastamento do ponto **D** (o ponto de menor afastamento da secção). Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim determinou-se a reta de interseção do plano  $\varphi''$  com o plano  $\theta$  e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção (os pontos **F** e **G**). Já temos **sete pontos** da secção. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

Por fim, o terceiro plano auxiliar (o plano  $\varphi'''$ ) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a meio entre o afastamento do plano da base (o plano  $\varphi$ ) e o afastamento do primeiro plano auxiliar (o plano  $\varphi'$ ). Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, bem como a reta de interseção do plano  $\varphi'''$  com o plano  $\theta$  – a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção (os pontos **H** e **I**). Já temos **nove pontos** da figura da secção, o que é um número de pontos suficientes para o desenho relativamente preciso da curva da secção. Note que, mais uma vez, se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A partir dos **nove pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção horizontal da hipérbole é uma outra hipérbole (um ramo da hipérbole), que passa pelas projeções horizontais dos nove pontos determinados – o desenho da curva é relativamente preciso, a partir dos nove pontos determinados. A projeção frontal da hipérbole reduz-se a um segmento de reta sobre  $f_0$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ), pois o plano  $\theta$  (o plano secante) é um plano projetante frontal.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

Já em projeção horizontal, parte da **figura da secção** é **invisível** – a parte que se situa na parte invisível da superfície lateral do cone, que corresponde ao arco menor  $C_1B_1$  da hipérbole. Já o arco maior  $A_1D_1C_1$  da hipérbole é **visível**, em projeção horizontal, por se situar na parte visível do sólido. Note que o ponto **C** (o ponto em que o plano  $\theta$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal) é o ponto que estabelece a distinção entre a **parte visível** da figura da secção e a sua **parte invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y  $\equiv$  Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base do cone) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso do traço frontal do plano  $\theta$ , da reta  $i$ , das projeções das geratrizes  $g$ ,  $g'$  e  $g''$ , dos planos frontais auxiliares, das secções circulares produzidas por aqueles no cone ou, ainda, dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação do ponto de menor afastamento da secção).

## 714.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **O'**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal  $(f_v)$  passa por **O'**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O'**). O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços.

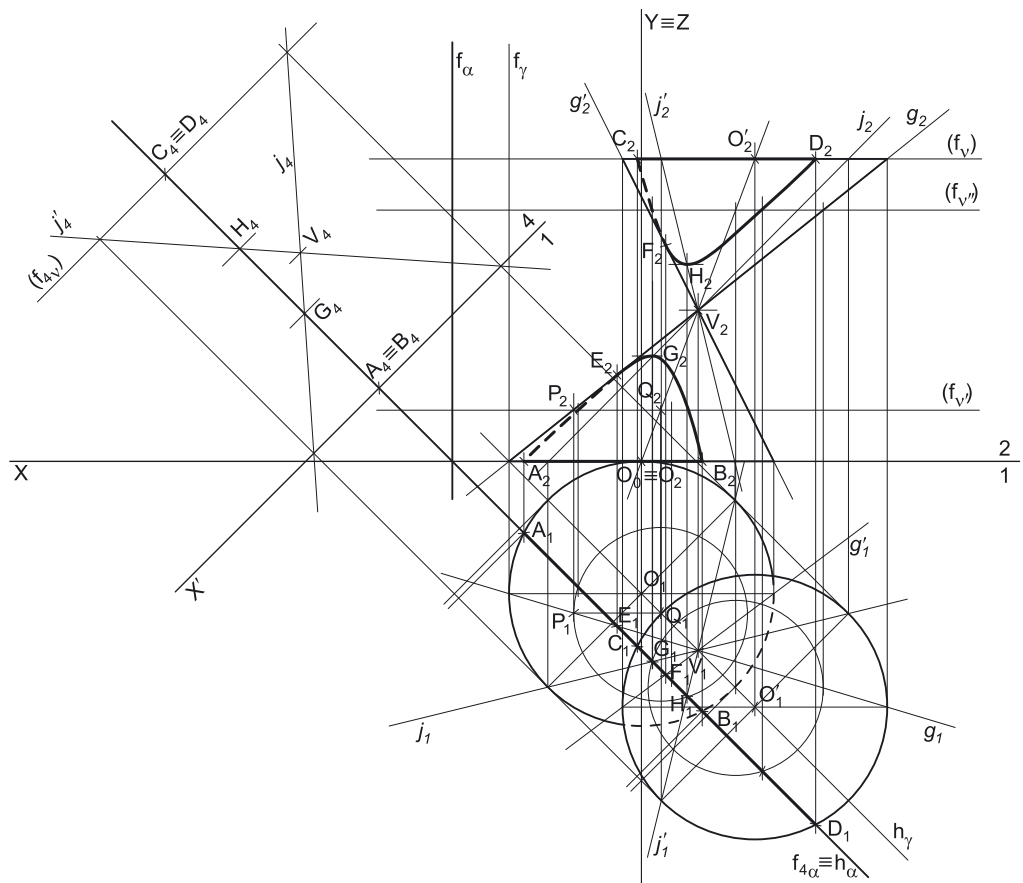
#### Resolução:

##### Determinação das projeções do sólido:

A base inferior está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Por outro lado, a base é tangente ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o seu raio é igual ao afastamento do ponto **O** (o seu centro). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base inferior do sólido (e que é tangente ao eixo **X**). A projeção frontal da base situa-se no eixo **X**, pois a base está contida no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, desenharam-se as projeções do eixo do sólido (o segmento **[OO']**) e determinaram-se as projeções do ponto **V**, o vértice da superfície – o ponto **V** é o ponto do segmento de reta **[OO']** que tem 4 cm de cota. Em seguida, desenharam-se as duas projeções das duas geratrizes do contorno aparente frontal – as geratrizes  $g$  e  $g'$ . A geratriz  $g$  está definida pelo ponto de maior abscissa da base inferior e pelo vértice da superfície (está definida por dois pontos). A geratriz  $g'$  está definida pelo ponto de menor abscissa da base e pelo vértice da superfície (está igualmente definida por dois pontos).

Por fim determinaram-se os pontos em que o plano da base superior (o plano  $v$ ) corta as geratrizes  $g$  e  $g'$  – estes pontos (que não se identificaram) foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Aqueles pontos são os pontos de maior e de menor abscissa da base superior, o que nos permitiu determinar o raio da base superior.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A base superior está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O'$ ) e com raio até aos pontos em que o plano  $v$  intersecta as geratrizes  $g$  e  $g'$ , desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base superior do sólido. A projeção frontal desta base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é constituída por dois triângulos com um vértice em comum em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa das projeções frontais das respetivas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é constituído por duas circunferências secantes – as projeções horizontais das duas bases).

A **determinação da figura da secção produzida no sólido** pelo plano  $\alpha$  deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

#### 1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\alpha$  no sólido há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do sólido, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base (qualquer das bases); **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do sólido.

**A.** Conduziu-se, pelo vértice do sólido (o ponto  $V$ ) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\alpha$ ). O plano  $\gamma$  é o plano paralelo ao plano  $\alpha$  que se conduziu pelo vértice  $V$  do sólido. O plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\gamma$ ) passa por  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto  $V$ ). Por outro lado, os traços do plano  $\gamma$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\gamma$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\alpha$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\alpha$ ), para que se verifique o **critério de paralelismo entre planos**.

**B.** Determinou-se a reta de interseção do plano  $\gamma$  com o plano da base inferior do sólido (o Plano Horizontal de Projeção), que é o próprio traço horizontal do plano  $\gamma$  –  $h_\gamma$ .

**C.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do sólido. A reta  $h_\gamma$  é secante à base do sólido, pelo que a secção produzida no sólido pelo plano  $\alpha$  é uma **hipérbola**. Tendo em conta que o sólido é limitado pelas duas folhas da superfície cónica, a secção produzida é efetivamente uma **hipérbola** e não apenas um **ramo da hipérbola**.

Tendo em conta que uma **hipérbola** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos** (para cada ramo da hipérbola, dependendo, ainda das dimensões de cada ramo da curva).

#### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente horizontal** (as circunferências que delimitam as bases do sólido) em quatro pontos – o plano  $\alpha$  corta a circunferência que delimita a base inferior nos pontos **A** e **B** e corta a circunferência que delimita a base superior nos pontos **C** e **D**.

O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente frontal** em quatro pontos. O plano  $\alpha$  corta a geratriz  $g$  (que é uma das geratrizes do contorno aparente frontal) no ponto **E** e corta a geratriz  $g'$  (que é a outra geratriz do contorno aparente frontal) no ponto **F**. O plano  $\alpha$  corta a semicircunferência da base inferior que integra o contorno aparente frontal no ponto **B** e corta a semicircunferência da base superior que integra o contorno aparente frontal no ponto **D**.

Assim, o plano  $\theta$  corta os contornos aparentes do sólido em quatro pontos – os pontos **A, B, C, D, E** e **F**. Já temos **seis pontos** da figura da secção.

Tendo em conta que os pontos **A, B** e **E** se situam na parte inferior do sólido, estes três pontos pertencem a um dos ramos da hipérbola (o ramo inferior, precisamente). Pelo seu lado, os pontos **C, D** e **F** pertencem à parte superior do sólido, pelo que pertencem ao outro ramo da hipérbola (o seu ramo superior).

#### 3. Determinar o espaço útil para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que as bases do sólido estão contidas em planos horizontais (de nível), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos horizontais (de nível). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor cota da secção** (porque os planos paralelos à base são planos horizontais). Tenha em conta que qualquer plano horizontal (de nível) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano  $\alpha$  (o plano secante) **não é** um plano projetante frontal, **não é possível** determinar, de forma imediata, os pontos de **maior e de menor cota** da curva da secção. No entanto, sabe-se que os pontos **A** e **B** (que se situam na base inferior do sólido) são os **pontos de menor cota** de um dos ramos da hipérbola. Por outro lado, os pontos **C** e **D** (que se situam na base superior do sólido) são os **pontos de maior cota** do outro ramo da hipérbola. Mas ainda assim, não temos o **espaço útil** para cada um dos ramos da secção. No entanto, há que determinar o **ponto de maior cota** do ramo inferior da hipérbola e o **ponto de menor cota** do ramo superior da hipérbola.

Para determinarmos o **espaço útil** da secção, é necessário transformar o plano  $\alpha$  (que é um plano projetante horizontal) num **plano projetante frontal**, o que se processa com o recurso a uma mudança do diedro de projeção. Para transformar o plano  $\alpha$  (que é um plano vertical) num plano projetante frontal (um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção), é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**) que seja ortogonal ao plano  $\alpha$ . Note que, nesse caso, o plano  $\alpha$  (que é um plano projetante horizontal) será transformado num plano de perfil (que é um plano duplamente projetante).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, substituiu-se o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano de projeção (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\alpha$ , de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante frontal. Nesse sentido, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ) – o plano  $\alpha$  foi transformado num plano de perfil (um plano duplamente projetante). Nesse sentido,  $f_{4_\alpha}$  (o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4**) fica coincidente com o seu traço horizontal –  $h_\alpha \equiv f_{4_\alpha}$ . As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 4**) do sólido, bem como as projeções, no **plano 4**, dos pontos **A, B, C e D** ( $A_4, B_4, C_4$  e  $D_4$ , respetivamente). **A e B** são os pontos em que o plano  $\alpha$  corta a base inferior do sólido e são, também (e como já se referiu) **os pontos de menor cota** do ramo inferior da hipérbole. **C e D** são os pontos em que o plano  $\alpha$  corta a base superior do sólido e são, também (e como já se referiu) **os pontos de maior cota** do ramo superior da hipérbole. Representou-se, ainda, o traço do plano  $\nu$  no **plano 4** ( $f_{4_\nu}$ ), que contém a projeção, no **plano 4**, da base superior do sólido. O plano  $\nu$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

Constata-se que o plano  $\alpha$  corta as duas geratrizes do novo contorno aparente frontal (no **plano 4**) do sólido – as geratrizes  $j$  e  $j'$ , cujas projeções no **plano 4** se identificaram de imediato. O plano  $\alpha$  corta a geratriz  $j$  no ponto **G** que é, de forma imediata, **o ponto de maior cota** do ramo inferior da hipérbole. O plano  $\alpha$  corta a geratriz  $j'$  no ponto **H** que é, de forma imediata, **o ponto de menor cota** do ramo superior da hipérbole. Nesse sentido, desenharam-se as projeções horizontais (no **plano 1**) das geratrizes  $j$  e  $j'$  ( $j_1$  e  $j'_1$ , respetivamente) e determinaram-se as projeções dos pontos **G e H**, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) – estas foram determinadas de forma direta, pois o plano  $\alpha$ , no novo diedro de projeção, é um plano duplamente projetante (é um plano de perfil).

Por fim, desenharam-se as projeções frontais (no **plano 2**) das geratrizes  $j$  e  $j'$  ( $j_2$  e  $j'_2$ , respetivamente) e determinaram-se as projeções frontais dos pontos **G e H** ( $G_2$  e  $H_2$ , respetivamente), sobre as projeções frontais das geratrizes a que pertencem.

Assim, o ponto **G** é o **ponto de maior cota** do ramo inferior da hipérbole e os pontos **A e B** são, ambos, **os pontos de menor cota** desse mesmo ramo, o que não seria possível garantir, se não se tivesse transformado o plano  $\alpha$  num plano projetante frontal. Assim, o **espaço útil** (para o ramo inferior) é o espaço compreendido entre os pontos **A/B e G**.

Por outro lado, o ponto **H** é o **ponto de menor cota** do ramo superior da hipérbole e os pontos **C e D** são, ambos, **os pontos de maior cota** desse mesmo ramo, o que, de novo, não seria possível garantir, se não se tivesse transformado o plano  $\alpha$  num plano projetante frontal. Assim, o **espaço útil** (para o ramo superior) é o espaço compreendido entre os pontos **C/D e H**.

Já está identificado o **espaço útil** para cada um dos dois ramos da hipérbole.

#### 4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Já foram determinados **oito pontos** da figura da secção – **quatro pontos** para cada um dos dois ramos da hipérbole. Face à dimensão da figura da secção (que agora é possível adivinhar), considera-se que o mínimo de **oito pontos** atrás referido é ainda insuficiente, para um desenho relativamente preciso da curva. De facto, os oito pontos já determinados distribuem-se por dois ramos da curva (duas curvas de erro), pelo que se considera que apenas quatro pontos para cada uma das duas curvas é claramente insuficiente.

Tendo em conta que o recurso a um plano auxiliar (paralelo ao plano da base) nos permite, sempre, determinar mais **dois pontos** da secção, optou-se pelo recurso a dois planos auxiliares (um para cada ramo), para determinarmos mais **quatro pontos** (dois pontos para cada ramo) que, em conjunto com os **oito pontos** já determinados, perfarão um total de **doze pontos** (seis para cada ramo), o que já poderá ser suficiente para um desenho relativamente preciso das duas curvas.

Assim, o primeiro plano auxiliar (paralelo aos planos das bases) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a meio entre a cota do plano da base inferior (o Plano Horizontal de Projeção) e a cota do ponto **G** (o ponto de maior cota do ramo inferior da hipérbole). Assim, identificou-se o plano  $\nu'$  pelo seu traço frontal ( $f_{\nu'}$ ) – este plano, porque é paralelo aos planos das bases, produz, no sólido, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $\nu'$  interseca o eixo do sólido. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano  $\nu'$ . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano  $\nu'$  corta a geratriz  $g$  (uma das geratrizes do contorno aparente frontal). Os pontos **Q e P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $\nu'$  é um plano projetante frontal. O círculo com centro no ponto **Q** e raio  $\overline{QP}$  é a secção que o plano  $\nu'$  produz no sólido (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio  $\overline{Q_1P_1}$ , desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\nu'$  (o plano auxiliar) com o plano  $\alpha$  (o plano secante), que é uma reta horizontal (de nível), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção (e que não se identificaram, para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações). As projeções frontais destes dois pontos situam-se sobre o traço frontal do plano  $\nu'$ , pois o plano  $\nu'$  é um plano projetante frontal. Já temos mais dois pontos do ramo inferior da hipérbole, o que perfaz um total de **seis pontos** para este ramo.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O segundo plano auxiliar (o plano  $v''$ ) a que se recorreu foi posicionado sensivelmente a meio entre a cota do plano da base superior (o plano  $v$ ) e a cota do ponto  $H$  (o ponto de menor cota do ramo superior da hipérbole). Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no sólido, de forma semelhante à exposta anteriormente (para o plano  $v'$ ). Por fim determinou-se a reta de interseção do plano  $v''$  com o plano  $\alpha$  e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção (que, mais uma vez, não se identificaram, para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações). Já temos mais dois pontos do ramo superior da hipérbole, o que perfaz um total de **seis pontos** para este ramo. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A partir dos **doze pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção frontal da hipérbole é uma outra hipérbole, cujo desenho se processou a partir dos doze pontos determinados. A projeção horizontal da hipérbole reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ), pois o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

Já em projeção frontal, parte da **figura da secção** é **invisível** – as partes que se situam na parte invisível da superfície lateral do sólido. A parte do **ramo inferior** que é **invisível** (em projeção frontal) é a parte que corresponde ao arco menor  $A_2E_2$  da hipérbole. Já o arco maior  $E_2G_2B_2$  da hipérbole é **visível**, em projeção frontal, por se situar na parte visível do sólido. Note que o ponto  $E$  (o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a geratriz  $g$ , do contorno aparente frontal) é o ponto que estabelece a distinção entre a **parte visível** do ramo inferior da hipérbole e a sua **parte invisível**. A parte do **ramo superior** que é **invisível** (em projeção frontal) é a parte que corresponde ao arco menor  $C_2F_2$  da hipérbole. Já o arco maior  $F_2H_2D_2$  da hipérbole é **visível**, em projeção frontal, por se situar na parte visível do sólido. Note que o ponto  $F$  (o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a geratriz  $g'$ , do contorno aparente frontal) é o ponto que estabelece a distinção entre a **parte visível** do ramo superior da hipérbole e a sua **parte invisível**.

Salienta-se que **se considera insuficiente o número de pontos determinados** nesta resolução. De facto, na presente situação, seria aconselhável a determinação de **oito pontos para cada ramo da hipérbole**, o que implicaria o recurso a mais um plano auxiliar para cada ramo (e a consequente redistribuição dos dois planos auxiliares a utilizar em cada ramo, de forma relativamente homogênea, pelo **espaço útil** de cada ramo). No entanto, uma vez que a resolução apresentada está reduzida em relação à resolução original, a utilização de mais planos auxiliares iria sobrecarregar em demasia o desenho, o que dificultaria a sua interpretação por parte do estudante. Assim, mesmo acometida de alguma imprecisão (no desenho das duas curvas), considerou-se que o número insuficiente de pontos determinado seria uma solução de compromisso aceitável entre uma resolução relativamente rigorosa e a sua legibilidade.

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do sólido e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base superior do sólido) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traços do plano  $\gamma$ , das projeções das geratrizes  $g, g', j$  e  $j'$ , dos planos horizontais auxiliares, das secções circulares produzidas por aqueles no cone ou, ainda, dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação dos pontos de maior e de menor cota dos ramos da hipérbole).

## 715.

Por **secção cilíndrica** entende-se a **figura de secção** que um plano qualquer produz numa **superfície cilíndrica**. No entanto, as **secções cilíndricas** são, para todos os efeitos, **curvas cónicas**, pois as figuras resultantes das **secções cilíndricas** são as curvas já estudadas nas **secções cónicas** e que, convencionalmente, se designam por **cónicas**.

## 716.

O tipo de **cónica** gerada por uma determinada **secção cilíndrica** depende da **posição do plano secante** em relação à superfície cilíndrica – se o plano secante é paralelo ao eixo da superfície ou não, ou se o plano secante é paralelo ao plano da diretriz ou não.

## 717.

A secção produzida num **cilindro** é um **círculo** sempre que o plano secante é **paralelo aos planos das bases** do cilindro.

## 718.

A secção produzida numa **superfície cilíndrica** por um plano qualquer é uma **elipse** sempre que o plano não é paralelo ao plano da diretriz nem paralelo ao eixo da superfície (não é paralelo a nenhuma das geratrizes da superfície).

## 719.

Um plano produz uma secção **retangular** num **cilindro** nas situações em que o plano é paralelo ao eixo do sólido (é paralelo às geratrizes da superfície cilíndrica que limita lateralmente o sólido) e é secante às bases do cilindro. Nesse caso, a secção produzida por esse plano na **superfície cilíndrica** (que limita lateralmente o cilindro) é composta por **duas geratrizes** – as geratrizes que contêm os dois lados do retângulo que não pertencem aos planos das bases do cilindro).

## 720.

Em primeiro lugar, se a secção é **elíptica**, sabe-se que o plano secante não é paralelo ao plano da base nem é paralelo a qualquer das geratrizes da superfície cilíndrica que limita lateralmente o cilindro (não é paralelo ao eixo da superfície). A secção será um **segmento da elipse** se o plano secante, verificando as condições anteriores, cortar uma das bases do sólido (ou as duas bases).

## 721.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se, também, o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do cilindro), pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto  $O$  ( $O_1$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar a reta  $r$  (a reta suporte do eixo do sólido) pelas suas projeções, bem como o plano  $\theta$  (o plano secante), pelos seus traços.

As projeções da reta  $r$  fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, porque é uma reta paralela ao  $\beta_{1/3}$  (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

**Resolução:***Determinação das projeções do cilindro:*

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases o que, neste caso, é a diferença entre os afastamentos dos planos que contêm as duas bases. Uma vez que a base de menor afastamento tem 1 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $O$ ), e que a altura do sólido é 4 cm, o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do sólido (o plano  $\varphi'$ ) tem 5 cm de afastamento ( $1 + 4 = 5$ ). Assim, representou-se o plano  $\varphi'$  pelo seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ). O plano  $\varphi'$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $O'$ , o centro da base de maior afastamento do sólido. O ponto  $O'$  é o ponto de interseção da reta  $r$  (a reta suporte do eixo do cilindro) com o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido). O ponto  $O'$  determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal (pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal).

As bases do cilindro estão contidas em planos frontais (de frente), que são paralelos ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projetam em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base de menor afastamento do cilindro. A projeção horizontal desta base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ) e também com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base de maior afastamento do cilindro. A projeção horizontal desta base reduz-se igualmente a um segmento de reta, sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ), pois o plano  $\varphi'$  é outro plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abscissa das projeções horizontais das duas bases) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontais das duas bases) que são paralelas a uma reta, que é  $r_2$  (a projeção frontal da reta suporte do eixo do cilindro). A semicircunferência de maior cota que delimita a base de menor afastamento (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

*Identificação do tipo de secção produzida:*

Pretende-se identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\theta$  no cilindro. Para tal há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em uma ou duas etapas, a saber: **1.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **2.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

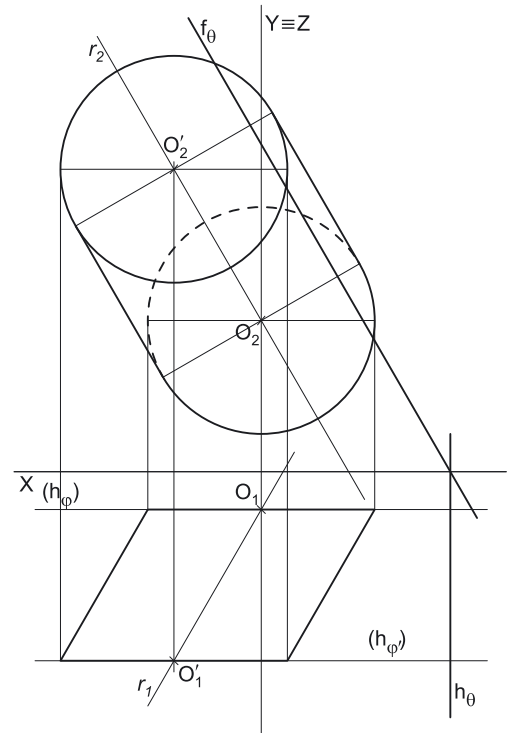
**1.** Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $\theta$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $\theta$  (um plano de topo) não é paralelo aos planos das bases (que são planos frontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

**2.** Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O plano  $\theta$  é paralelo à reta  $r$ , pois o seu traço frontal ( $f_\theta$ ) é paralelo à projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ). Nesse sentido, é possível determinar qualquer reta do plano  $\theta$  (cuja projeção frontal estará, sempre, sobre o traço frontal do plano  $\theta$ ) que seja paralela à reta  $r$ , pelo que se verifica o **critério de paralelismo entre planos e retas** entre o plano  $\theta$  e a reta  $r$ . Assim, a figura da secção é **uma reta ou um paralelogramo**.

Tendo em conta que o plano secante (o plano  $\theta$ ) corta as bases do cilindro (o que é possível constatar em projeção frontal, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal), a secção produzida pelo plano  $\theta$  no cilindro é **um paralelogramo**.

**Traçado:**

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cilindro e os traços do plano secante (o plano  $\theta$ ), porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. As projeções da reta  $r$  representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar (apesar de integrar os dados). Os traços horizontais dos planos que contêm as bases do cilindro, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram igualmente a **leve**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente frontal do cilindro).



## 722.

### Dados:

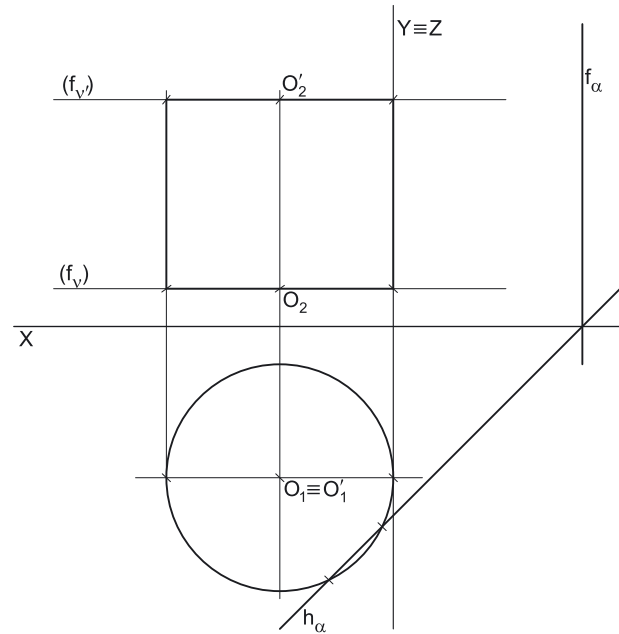
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se, também, o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base inferior do cilindro), pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases que, nesta situação, corresponde à diferença das cotas dos planos que contêm as duas bases. Uma vez que a base inferior tem 1 cm de cota (a cota do ponto **O**) e que a altura do sólido é 5 cm, o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do sólido (o plano  $v'$ ) tem 6 cm de cota ( $1 + 5 = 6$ ). Assim, representou-se o plano  $v'$  pelo seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo (bem como qualquer das suas geratrizes) é projetante horizontal (é ortogonal aos planos das bases). Nesse sentido, o ponto **O'** (o centro da base superior) e o ponto **O** (o centro da base inferior) situam-se na mesma reta projetante horizontal (que é ortogonal aos planos das bases) – tem-se imediatamente  $O'_1 \equiv O_1$ . Por outro lado, atendendo a que o ponto **O'** pertence ao plano  $v'$  (que é um plano projetante frontal) a sua projeção frontal ( $O'_2$ ) está necessariamente sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ).



Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O'**, o centro da base de maior afastamento do sólido. O ponto **O'** é o ponto de interseção da reta **e** (a reta suporte do eixo do cilindro) com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido). O ponto **O'** determinou-se de forma direta, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal e a reta **e** é uma reta projetante frontal.

As bases do cilindro estão contidas em planos horizontais (de nível), que são paralelos ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base inferior do cilindro. A projeção frontal desta base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes horizontais, a projeção horizontal da base superior do sólido está coincidente com a projeção horizontal da sua base inferior. A projeção frontal da base superior reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal.

Por fim desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base superior do sólido) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior e menor abscissa das projeções frontais das duas bases). Note que o lado mais à direita desse retângulo está sobre o eixo  $Y \equiv Z$ , pois o cilindro é tangente ao plano  $YZ$ .

#### Identificação do tipo de secção produzida:

Pretende-se identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cilindro. Para tal há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em uma ou duas etapas, a saber: **1.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **2.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

**1.** Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $\alpha$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $\alpha$  (um plano vertical) não é paralelo aos planos das bases (que são planos horizontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

**2.** Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, pelo que contém a “família” das retas projetantes horizontais. Tendo em conta que o eixo do cilindro está contido numa reta projetante horizontal, verifica-se o **Critério de paralelismo entre planos e retas** entre o plano  $\alpha$  e o eixo do cilindro – o plano  $\alpha$  é paralelo ao eixo do cilindro. Assim, a figura da secção é **uma reta** ou **um paralelogramo**.

Tendo em conta que o plano secante (o plano  $\gamma$ ) corta as bases do cilindro (o que é possível constatar em projeção horizontal, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal), a secção produzida pelo plano  $\gamma$  no cilindro é **um paralelogramo**.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cilindro e os traços do plano secante (o plano  $\alpha$ ), porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. Os traços frontais dos planos que contêm as bases do cilindro, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram igualmente a **leve**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada.



## 723.

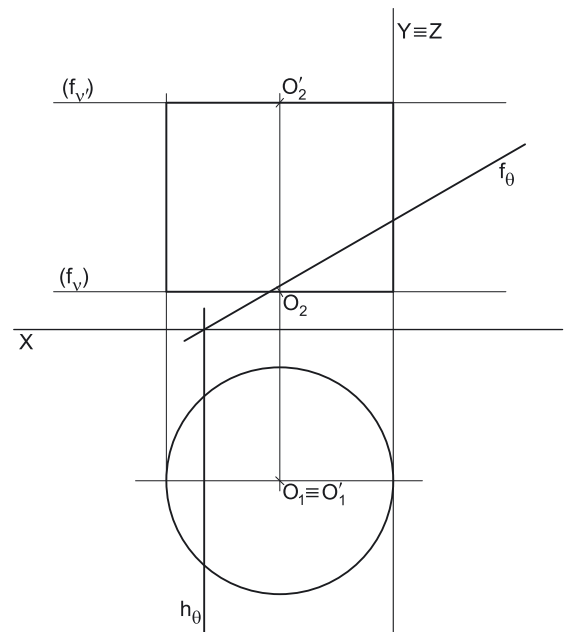
**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se, também, o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base inferior do cilindro), pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto  $O$  ( $O_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\theta$  (o plano secante), pelos seus traços.

**Resolução:***Determinação das projeções do cilindro:*

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases que, nesta situação, corresponde à diferença das cotas dos planos que contêm as duas bases. Uma vez que a base inferior tem 1 cm de cota (a cota do ponto  $O$ ) e que a altura do sólido é 5 cm, o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do sólido (o plano  $v'$ ) tem 6 cm de cota ( $1 + 5 = 6$ ). Assim, representou-se o plano  $v'$  pelo seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo (bem como qualquer das suas geratrizes) é projetante horizontal (é ortogonal aos planos das bases). Nesse sentido, o ponto  $O'$  (o centro da base superior) e o ponto  $O$  (o centro da base inferior) situam-se na mesma reta projetante horizontal (que é ortogonal aos planos das bases) – tem-se imediatamente  $O'_1 \equiv O_1$ . Por outro lado, atendendo a que o ponto  $O'$  pertence ao plano  $v'$  (que é um plano projetante frontal) a sua projeção frontal ( $O'_2$ ) está necessariamente sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ).



Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $O'$ , o centro da base de maior afastamento do sólido. O ponto  $O'$  é o ponto de interseção da reta  $e$  (a reta suporte do eixo do cilindro) com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido). O ponto  $O'$  determinou-se de forma direta, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal e a reta  $e$  é uma reta projetante frontal.

As bases do cilindro estão contidas em planos horizontais (de nível), que são paralelos ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base inferior do cilindro. A projeção frontal desta base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes horizontais, a projeção horizontal da base superior do sólido está coincidente com a projeção horizontal da sua base inferior. A projeção frontal da base superior reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal.

Por fim desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base superior do sólido) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior e menor abscissa das projeções frontais das duas bases). Note que o lado mais à direita desse retângulo está sobre o eixo  $Y \equiv Z$ , pois o cilindro é tangente ao plano  $YZ$ .

*Identificação do tipo de secção produzida:*

Pretende-se identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\theta$  no cilindro. Para tal há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em uma ou duas etapas, a saber: **1.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **2.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

**1.** Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $\theta$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $\theta$  (um plano de topo) não é paralelo aos planos das bases (que são planos horizontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

**2.** Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, pelo que contém a "família" das retas projetantes frontais. Tendo em conta que o eixo do cilindro está contido numa reta projetante horizontal, não se verifica o **Critério de paralelismo entre planos e retas** entre o plano  $\theta$  e o eixo do cilindro – o plano  $\theta$  **não é paralelo** ao eixo do cilindro. Assim, a figura da secção **não é um paralelogramo**, pelo que a figura da secção é uma **elipse** (ou um **segmento de elipse**, se o plano secante cortar qualquer das bases do sólido).

Uma vez que o plano  $\theta$  é projetante frontal, é possível constatar, em projeção frontal, que o plano  $\theta$  corta a base de inferior do sólido, pelo que a figura da secção é um **segmento de elipse**.

**Traçado:**

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cilindro e os traços do plano secante (o plano  $\theta$ ), porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. Os traços frontais dos planos que contêm as bases do cilindro, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram igualmente a **leve**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada.



## 724.

### Dados:

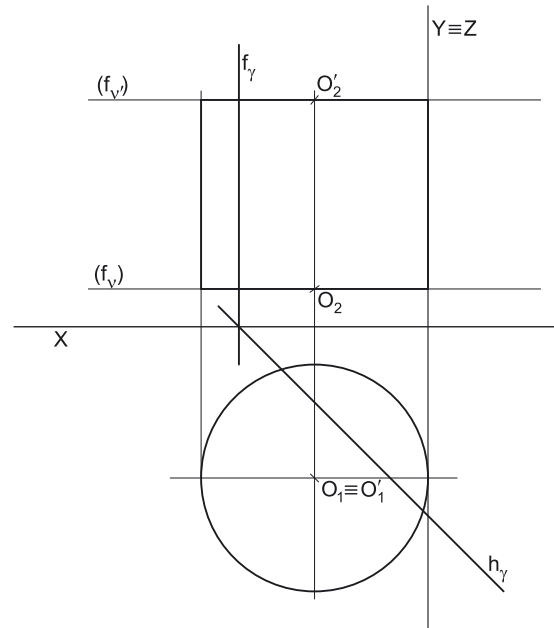
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se, também, o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base inferior do cilindro), pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases que, nesta situação, corresponde à diferença das cotas dos planos que contêm as duas bases. Uma vez que a base inferior tem 1 cm de cota (a cota do ponto **O**) e que a altura do sólido é 5 cm, o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do sólido (o plano  $v'$ ) tem 6 cm de cota ( $1 + 5 = 6$ ). Assim, representou-se o plano  $v'$  pelo seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo (bem como qualquer das suas geratrizes) é projetante horizontal (é ortogonal aos planos das bases). Nesse sentido, o ponto **O'** (o centro da base superior) e o ponto **O** (o centro da base inferior) situam-se na mesma reta projetante horizontal (que é ortogonal aos planos das bases) – tem-se imediatamente  $O'_1 \equiv O_1$ . Por outro lado, atendendo a que o ponto **O'** pertence ao plano  $v'$  (que é um plano projetante frontal) a sua projeção frontal ( $O'_2$ ) está necessariamente sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ).



Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O'**, o centro da base de maior afastamento do sólido. O ponto **O'** é o ponto de interseção da reta **e** (a reta suporte do eixo do cilindro) com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido). O ponto **O'** determinou-se de forma direta, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal e a reta **e** é uma reta projetante frontal.

As bases do cilindro estão contidas em planos horizontais (de nível), que são paralelos ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base inferior do cilindro. A projeção frontal desta base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes horizontais, a projeção horizontal da base superior do sólido está coincidente com a projeção horizontal da sua base inferior. A projeção frontal da base superior reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal.

Por fim desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base superior do sólido) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior e menor abscissa das projeções frontais das duas bases). Note que o lado mais à direita desse retângulo está sobre o eixo  $Y \equiv Z$ , pois o cilindro é tangente ao plano  $YZ$ .

#### Identificação do tipo de secção produzida:

Pretende-se identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\gamma$  no cilindro. Para tal há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em uma ou duas etapas, a saber: **1.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **2.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

**1.** Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $\gamma$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $\gamma$  (um plano vertical) não é paralelo aos planos das bases (que são planos horizontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

**2.** Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, pelo que contém a "família" das retas projetantes horizontais. Tendo em conta que o eixo do cilindro está contido numa reta projetante horizontal, verifica-se o **Critério de paralelismo entre planos e retas** entre o plano  $\gamma$  e o eixo do cilindro – o plano  $\gamma$  é paralelo ao eixo do cilindro. Assim, a figura da secção é **uma reta** ou **um paralelogramo**.

Tendo em conta que o plano secante (o plano  $\gamma$ ) corta as bases do cilindro (o que é possível constatar em projeção horizontal, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal), a secção produzida pelo plano  $\gamma$  no cilindro é **um paralelogramo**.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cilindro e os traços do plano secante (o plano  $\gamma$ ), porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. Os traços frontais dos planos que contêm as bases do cilindro, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram igualmente a **leve**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada.

## 725.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **A**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representaram-se, também, os planos  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do cilindro) e o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro), pelos respetivos traços horizontais. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi}$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). O plano  $\varphi'$  é também um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **A** ( $A_1$ ). Note que, uma vez que o ponto **A** é um ponto da base de menor afastamento do cilindro, o ponto **A** é necessariamente um ponto do plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de menor afastamento do sólido). Ambos os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  não têm traço frontal (são ambos paralelos ao Plano Frontal de Projeção), pelo que os respetivos traços horizontais se identificaram entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\varphi''$  (o plano secante), pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi''$  também não tem traço frontal (é igualmente paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal também se identificou entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções do cilindro:*

Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo (bem como qualquer das suas geratrizes) é projetante frontal (é ortogonal aos planos das bases). Nesse sentido, o ponto  $O'$  (o centro da base de menor afastamento) e o ponto **O** (o centro da base de maior afastamento) situam-se na mesma reta projetante frontal (que é ortogonal aos planos das bases) – tem-se imediatamente  $O'_2 \equiv O_2$ . Por outro lado, atendendo a que o ponto  $O'$  pertence ao plano  $\varphi'$  (que é um plano projetante horizontal) a sua projeção horizontal ( $O'_1$ ) está necessariamente sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ).

As bases do cilindro estão contidas em planos frontais (de frente), que são paralelos ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projetam em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ) e com raio até  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A** (o ponto **A** é um ponto da circunferência que delimita a base de menor afastamento do sólido), desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a base de menor afastamento do cilindro. A projeção horizontal desta base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal.

Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes frontais, a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido está coincidente com a projeção frontal da sua base de menor afastamento. A projeção horizontal da base de maior afastamento reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{\varphi}$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Por fim desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de menor abscissa das projeções horizontais das duas bases).

A **determinação da figura da secção produzida no cilindro** pelo plano  $\varphi''$  deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).
4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

*1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.*

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\varphi''$  no cilindro há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em duas etapas, a saber: **A.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **B.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

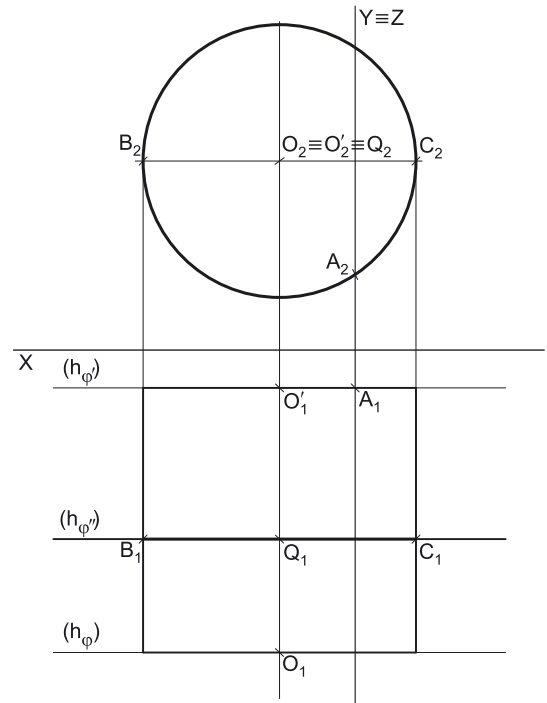
**A.** Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $\varphi''$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $\varphi''$  (um plano frontal) é **paralelo** aos planos das bases (que são dois planos frontais), pelo que a figura da secção é um **círculo**.

*2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.*

Tendo em conta que o plano  $\varphi''$  é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano  $\varphi''$  corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – o plano  $\varphi''$  corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal no ponto **B** e corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal no ponto **C**. Os pontos **B** e **C** foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano  $\varphi''$  é um plano projetante horizontal.

O plano  $\varphi''$  não corta o **contorno aparente frontal**. Conclui-se que o plano  $\varphi''$  corta os contornos aparentes do cilindro em dois pontos – os pontos **B** e **C**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### 3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).

Tendo em conta que o plano  $\varphi''$  é paralelo aos planos das bases, não há lugar à determinação do **espaço útil**.

### 4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Uma vez que a secção produzida pelo plano  $\varphi''$  no cilindro é um **círculo**, apenas é necessária a determinação do centro do círculo, que é o ponto de interseção do plano  $\varphi''$  (o plano secante) com o eixo do sólido – o ponto **Q**. A determinação das projeções do ponto **Q** processou-se de forma direta, pois tratou-se da interseção entre uma reta projetante frontal (a reta suporte do eixo do cilindro) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi''$ ).

O raio desse **círculo** é a distância do ponto **Q** (o seu centro) ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cilindro com o plano  $\varphi''$  (os pontos **B** e **C**, já determinados). Assim, o círculo com centro no ponto **Q** e raio  $\overline{QB} = \overline{QC}$  é a secção que o plano  $\varphi''$  produz no cilindro (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal). Este círculo é geometricamente igual aos círculos das bases e, uma vez que as geratrizes do cilindro são projetantes frontais, tem a sua projeção frontal coincidente com as projeções frontais das duas bases.

Em **projeção horizontal**, a figura reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_{\varphi''}$ , pois o plano  $\varphi''$  é um plano projetante horizontal. Em **projeção frontal**, a figura da secção é invisível, mas está oculta por linhas do sólido que são visíveis em projeção frontal (a circunferência que delimita a base de maior afastamento), pelo que, em projeção frontal, não há lugar à representação de quaisquer invisibilidades.

Note que, não havendo desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), a superfície da figura (a área do corte) nunca é visível, pelo que não há lugar à execução de tracejado.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cilindro e o traço horizontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. Os traços horizontais dos planos  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro) e  $\varphi'$  (o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois são linhas de chamada.

## 726.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **O** e a reta **r**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta **r** tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). A reta **r** contém o ponto **O**, pelo que as suas projeções passam pelas projeções homónimas do ponto **O**. Em seguida, representou-se o plano  $\nu$  (o plano horizontal que contém a base superior do cilindro), pelo seu traço frontal. O plano  $\nu$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{\nu}$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). O plano  $\nu$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontais se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\nu''$  (o plano secante), pelo seu traço frontal. O plano  $\nu''$  também não tem traço horizontal (é igualmente paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal também se identificou entre parêntesis. Note que se considerou que o plano  $\nu'$  é o plano que contém a base inferior do cilindro, razão pela qual se considerou o plano secante o plano  $\nu''$ .

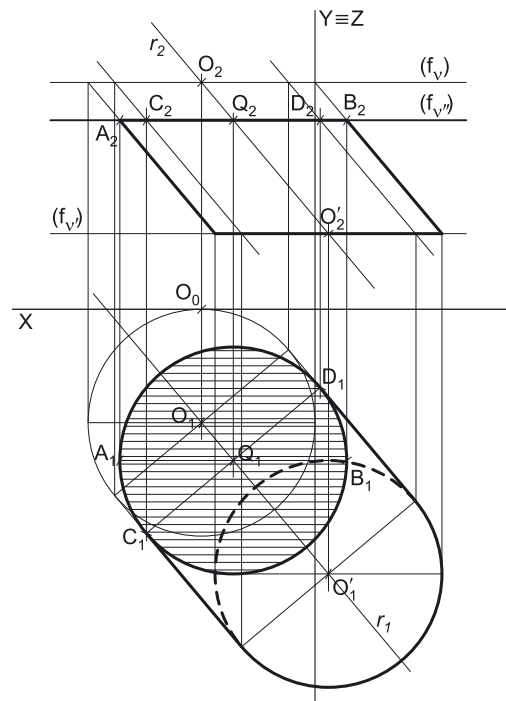
#### Resolução:

##### Determinação das projeções do cilindro:

A base superior do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $\nu$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Por outro lado, atendendo a que a base superior do sólido é tangente ao Plano Frontal de Projeção, o raio da base é igual ao afastamento do ponto **O** (o seu centro), que é 3 cm. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base do sólido (e que é tangente ao eixo **X**). A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\nu$  ( $f_{\nu}$ ).

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contém as suas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das duas bases. Uma vez que a base superior do cilindro está contida num plano horizontal (de nível) com 6 cm de cota (a cota do ponto **O**) e que o cilindro tem 5 cm de altura, o plano horizontal (de nível) que contém a base inferior do sólido (o plano  $\nu'$ ) tem 1 cm de cota ( $6 - 5 = 1$ ). Assim, representou-se o plano  $\nu'$  pelo seu traço frontal ( $f_{\nu'}$ ). O plano  $\nu'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O'**, o centro da base inferior do sólido. O ponto **O'** é o ponto de interseção da reta **r** (a reta suporte do eixo do cilindro) com o plano  $\nu'$  (o plano que contém a base inferior afastamento do sólido). O ponto **O'** determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $\nu'$  é um plano projetante frontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A base inferior está também contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O'$ ) e também com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita da base inferior do cilindro. A projeção frontal desta base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal.

Por fim desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abcissa das projeções frontais das duas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção horizontal da reta  $r$ , a reta suporte do eixo do cilindro). A semicircunferência mais à esquerda da circunferência que delimita a base inferior (e que está compreendida entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

A **determinação da figura da secção produzida no cilindro** pelo plano  $v''$  deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).
4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

#### 1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $v''$  no cilindro há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em duas etapas, a saber: **A**, analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **B**, analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

**A**. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $v''$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $v''$  (um plano horizontal) é **paralelo** aos planos das bases (que são dois planos horizontais), pelo que a figura da secção é **um círculo**.

#### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $v''$  é um plano projetante frontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano  $v''$  corta o **contorno aparente frontal** em dois pontos – o plano  $v''$  corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal no ponto **A** e corta a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal no ponto **B**. Os pontos **A** e **B** foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $v''$  é um plano projetante horizontal. No entanto, para determinar as projeções horizontais dos pontos **A** e **B** ( $A_1$  e  $B_1$ , respetivamente), foi necessário desenhar previamente as projeções horizontais das duas geratrizes do contorno aparente frontal, que ainda não haviam sido desenhadas.

As geratrizes do contorno aparente frontal (que não se identificaram) estão definidas, cada uma delas, por dois pontos – a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal está definida pelos pontos de maior abcissa das duas bases do cilindro, enquanto a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal está definida pelos pontos de menor abcissa das duas bases do cilindro.

O plano  $v''$  corta o **contorno aparente horizontal** em outros dois pontos – o plano  $v''$  corta a geratriz de maior afastamento do contorno aparente horizontal no ponto **C** e corta a geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal no ponto **D**. Os pontos **C** e **D** foram determinados a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $v''$  é um plano projetante horizontal. No entanto, para determinar as projeções dos pontos **C** e **D**, foi necessário desenhar previamente as projeções frontais das duas geratrizes do contorno aparente horizontal, que ainda não haviam sido desenhadas.

Conclui-se que o plano  $v''$  corta os contornos aparentes do cilindro em quatro pontos – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**.

#### 3. Determinar o espaço útil em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).

Tendo em conta que o plano  $v''$  é paralelo aos planos das bases, não há lugar à determinação do **espaço útil**.

#### 4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Uma vez que a secção produzida pelo plano  $v''$  no cilindro é um **círculo**, apenas é necessária a determinação do centro do círculo, que é o ponto de interseção do plano  $v''$  (o plano secante) com a reta  $r$  (a reta suporte do eixo do sólido) – o ponto **Q**. A determinação das projeções do ponto **Q** processou-se de forma direta, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $r$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v''$ ).

O raio desse **círculo** é a distância do ponto **Q** (o seu centro) ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cilindro com o plano  $v''$  (qualquer um dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**, já determinados). Assim, o círculo com centro no ponto **Q** e raio  $\overline{QA} = \overline{QB} = \overline{QC} = \overline{QD}$  é a secção que o plano  $v''$  produz no cilindro (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal). Sublinha-se que o círculo resultante da secção é geometricamente igual aos círculos das bases, pelo que tem igualmente 3 cm de raio (o raio das bases).

Em **projeção frontal**, a figura reduz-se a um segmento de reta sobre  $f_{v''}$ , pois o plano  $v''$  é um plano projetante horizontal. Em **projeção horizontal**, a figura da secção é invisível, mas está oculta por linhas do sólido que são visíveis em projeção frontal (a circunferência que delimita a base de maior afastamento), pelo que, em projeção frontal, não há lugar à representação de quaisquer invisibilidades.

Note que, não havendo desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), a superfície da figura (a área do corte) nunca é visível, pelo que não há lugar à execução de tracejado.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das projeções do sólido resultante da secção.

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção**, que é um outro sólido – a parte do cilindro compreendida entre o plano secante (o plano  $v''$ ) e o plano  $v'$  (o plano que contém a base inferior). Assim, o **sólido resultante da secção** é um outro cilindro em que a base superior é a figura da secção.

O **contorno aparente frontal** deste novo sólido é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abcissa das projeções frontais das duas bases (a base inferior e a nova base superior, que é a figura da secção). A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** é uma linha mista fechada limitada pela semicircunferência  $\widehat{A_1B_1}$  (com menor afastamento e maior abcissa), tendo a parte restante em comum com o contorno aparente horizontal do sólido inicial. Note que, à semelhança do exposto para o sólido inicial, a semicircunferência mais à esquerda da circunferência que delimita a base inferior (e que está compreendida entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção horizontal).

## Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y  $\equiv$  Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço frontal do plano secante, porque integra os dados, representou-se a **médio**. Os traços frontais dos planos que contêm as bases do cilindro representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do cilindro, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente horizontal do cilindro, das projeções frontais das geratrizes do contorno aparente horizontal ou, ainda, das projeções horizontais das geratrizes do contorno aparente frontal.). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 727.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base inferior do cilindro, pelo seu traço frontal. O traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano  $\alpha$  (o plano secante) pelos seus traços.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

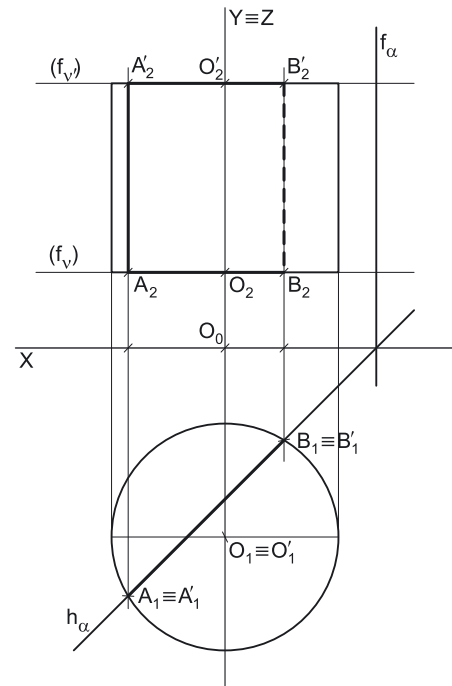
A base inferior do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base inferior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo (bem como qualquer das suas geratrizes) é projetante horizontal (é ortogonal aos planos das bases). Nesse sentido, o ponto **O'** (o centro da base superior) e o ponto **O** (o centro da base inferior) situam-se na mesma reta projetante horizontal (que é ortogonal aos planos das bases) – tem-se imediatamente  $O'_1 \equiv O_1$ .

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contém as suas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das duas bases. Uma vez que a base inferior do cilindro está contida num plano horizontal (de nível) com 2 cm de cota (a cota do ponto **O**) e que o cilindro tem 5 cm de altura, o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do sólido (o plano  $v'$ ) tem 7 cm de cota ( $2 + 5 = 7$ ). Assim, representou-se o plano  $v'$  pelo seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

O ponto **O'** (o centro da base superior) pertence ao plano  $v'$  (que é um plano projetante frontal), pelo que a sua projeção frontal ( $O'_2$ ) está necessariamente sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ). Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes horizontais, a projeção horizontal da base superior do sólido está coincidente com a projeção horizontal da sua base inferior. A projeção frontal da base superior reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal.

Por fim desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base superior do sólido) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior de menor abcissa das projeções frontais das duas bases).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **determinação da figura da secção produzida no cilindro** pelo plano  $\alpha$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).
4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

### 1. Identificação do tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cilindro há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em duas etapas, a saber: **A**, analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **B**, analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

**A**. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $\alpha$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $\alpha$  (um plano vertical) não é paralelo aos planos das bases (que são planos horizontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

**B**. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, pelo que contém a “família” das retas projetantes horizontais. Tendo em conta que o eixo do cilindro está contido numa reta projetante horizontal, verifica-se o **critério de paralelismo entre planos e retas** entre o plano  $\alpha$  e o eixo do cilindro – o plano  $\alpha$  é paralelo ao eixo do cilindro. Assim, a figura da secção é **uma reta** ou **um paralelogramo**.

Tendo em conta que o plano secante (o plano  $\alpha$ ) corta as bases do cilindro (o que é possível constatar em projeção horizontal, pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal), a secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cilindro é **um paralelogramo**.

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – o plano  $\alpha$  corta a circunferência que delimita a base superior do cilindro dois pontos (os pontos **A'** e **B'**). O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente frontal** nos pontos **A** e **A'** – o ponto **A** é o ponto em que plano  $\alpha$  corta a semicircunferência da base inferior que integra o contorno aparente frontal e o ponto **A'** é o ponto em que plano  $\alpha$  corta a semicircunferência da base superior que integra o contorno aparente frontal.

Conclui-se que o plano  $\alpha$  corta os contornos aparentes do cilindro em três pontos – os pontos **A**, **A'** e **B'**.

### 3. Determinar o espaço útil em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).

Tendo em conta que o plano  $\alpha$  corta as duas bases do cilindro, o **espaço útil** em que a secção se desenvolve é o espaço entre as duas bases.

Nesse sentido, determinaram-se os pontos em que o plano  $\alpha$  corta as duas bases. O plano  $\alpha$  corta a base superior nos pontos **A'** e **B'**, já determinados. O plano  $\alpha$  corta a base inferior nos pontos **A** (já determinado) e também no ponto **B**. Já temos **quatro pontos** da figura da secção – estes quatro pontos são os quatro vértices do paralelogramo resultante da secção.

### 4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Uma vez que a secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cilindro é um **paralelogramo**, não é necessária a determinação de quaisquer outros pontos da secção, pois já temos os quatro vértices da figura, que são os pontos **A**, **B**, **A'** e **B'**.

A partir dos quatro vértices da figura da secção (o paralelogramo **[AA'B'B']**), desenharam-se as suas duas projeções, atendendo às invisibilidades existentes. Em **projeção frontal**, o lado **[BB']** é invisível – está contido na parte invisível (em projeção frontal) da superfície lateral do cilindro. Os lados **[AB]** e **[A'B']**, estando contidos nas bases (que são projetantes frontais), são também invisíveis, mas estão ocultos por linhas do sólido que são visíveis em projeção frontal (as semicircunferências que integram o contorno aparente frontal). Em **projeção horizontal**, a figura reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_{\alpha}$ , pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal.

Note que, não havendo desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), a superfície da figura (a área do corte) nunca é visível, pelo que não há lugar à execução de tracejado.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cilindro e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases do cilindro) representaram-se a **leve**, pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois são linhas de chamada.



## 728.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto  $O$  e a reta  $r$ , pelas respectivas projeções, em função dos dados. As projeções da reta  $r$  fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, porque é uma reta paralela ao  $\beta_{1/3}$  (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado). Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\theta$  (o plano secante), pelos seus traços.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases o que, neste caso, é a diferença entre os afastamentos dos planos que contêm as duas bases. Uma vez que a base de menor afastamento tem afastamento nulo (está contida no Plano Frontal de Projeção), e que a altura do sólido é 5,5 cm, o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do sólido (o plano  $\varphi$ ) tem 5,5 cm de afastamento ( $0 + 5,5 = 5,5$ ). Assim, representou-se o plano  $\varphi$  pelo seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $O'$ , o centro da base de maior afastamento do sólido. O ponto  $O'$  é o ponto de interseção da reta  $r$  (a reta suporte do eixo do cilindro) com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido). O ponto  $O'$  determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal (pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal).

A base de menor afastamento do cilindro está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção frontal. Por outro lado, esta base é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o seu raio é igual à cota do ponto  $O$  (que é 4 cm). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a base de menor afastamento do cilindro (que é tangente ao eixo  $X$ ). A projeção horizontal desta base reduz-se a um segmento de reta no eixo  $X$ , pois a base está contida no Plano Frontal de Projeção.

A base de maior afastamento do cilindro está contida num plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que também se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ) e também com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita base de maior afastamento do cilindro. A projeção horizontal desta base reduz-se igualmente a um segmento de reta, sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abscissa das projeções horizontais das duas bases) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontais das duas bases) que são paralelas a uma reta, que é  $r_2$  (a projeção frontal da reta suporte do eixo do cilindro). A semicircunferência de maior cota que delimita a base de menor afastamento (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

A **determinação da figura da secção produzida no cilindro** pelo plano  $\alpha$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que Em seguida, se apresentam:

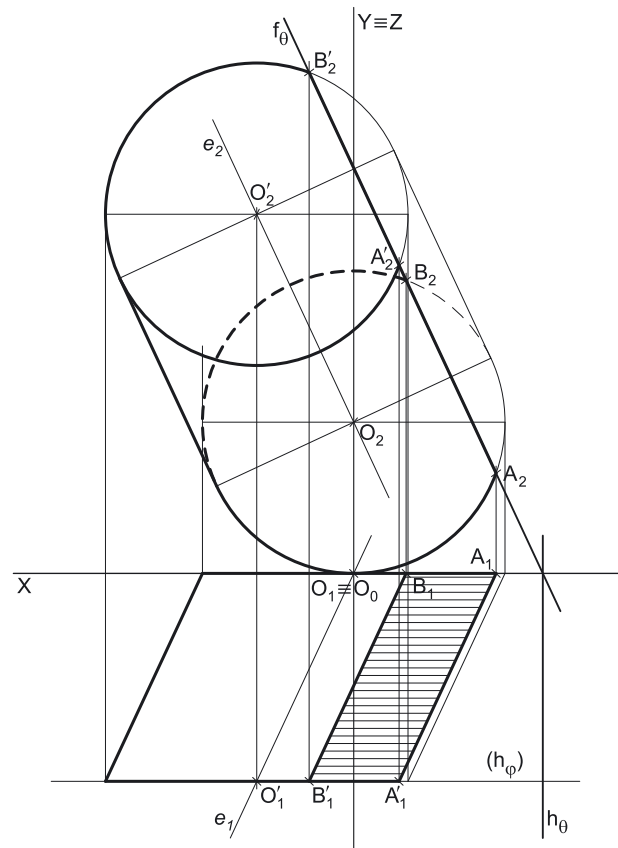
1. Identificar o tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).
4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

#### 1. Identificação do tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\theta$  no cilindro há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em duas etapas, a saber: **A**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **B**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

**A**. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $\theta$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $\theta$  (um plano de topo) não é paralelo aos planos das bases (que são planos frontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

**B**. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O plano  $\theta$  é paralelo à reta  $r$ , pois o seu traço frontal ( $f_\theta$ ) é paralelo à projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ). Nesse sentido, é possível determinar qualquer reta do plano  $\theta$  (cuja projeção frontal estará, sempre, sobre o traço frontal do plano  $\theta$ ) que seja paralela à reta  $r$ , pelo que se verifica o **critério de paralelismo entre planos e retas** entre o plano  $\theta$  e a reta  $r$ . Assim, a figura da secção é **uma reta ou um paralelogramo**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que o plano secante (o plano  $\theta$ ) corta as bases do cilindro (o que é possível constatar em projeção frontal, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal), a secção produzida pelo plano  $\theta$  no cilindro é **um paralelogramo**.

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano  $\theta$  corta o **contorno aparente frontal** em dois pontos – o ponto **A** (o ponto em que o plano  $\theta$  corta a semicircunferência da base de menor afastamento que integra o contorno aparente frontal) e o ponto **B'** (o ponto em que o plano  $\theta$  corta a semicircunferência da base de maior afastamento que integra o contorno aparente frontal).

O plano  $\theta$  corta o **contorno aparente horizontal** em outros dois pontos – o ponto **B** (o ponto em que o plano  $\theta$  corta a semicircunferência da base de menor afastamento que integra o contorno aparente horizontal) e o ponto **B'**, já determinado (o ponto em que o plano  $\theta$  corta a semicircunferência da base de maior afastamento que integra o contorno aparente frontal).

Conclui-se que o plano  $\theta$  corta os contornos aparentes do cilindro em três pontos – os pontos **A**, **B** e **B'**.

### 3. Determinar o espaço útil em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).

Tendo em conta que o plano  $\theta$  corta as duas bases do cilindro, o **espaço útil** em que a secção se desenvolve é o espaço entre as duas bases.

Nesse sentido, determinaram-se os pontos em que o plano  $\theta$  corta as duas bases. O plano  $\theta$  corta a base de menor afastamento nos pontos **A** e **B**, já determinados. O plano  $\theta$  corta a base de maior afastamento nos pontos **B'** (já determinado) e também no ponto **A'**. Já temos **quatro pontos** da figura da secção – estes quatro pontos são os quatro vértices do paralelogramo resultante da secção.

### 4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Uma vez que a secção produzida pelo plano  $\theta$  no cilindro é um **paralelogramo**, não é necessária a determinação de quaisquer outros pontos da secção, pois já temos os quatro vértices da figura, que são os pontos **A**, **B**, **A'** e **B'**. Assim, a partir dos quatro vértices da figura da secção (o paralelogramo **[AA'B'B]**), desenharam-se as suas duas projeções.

*Determinação das projeções do sólido resultante da secção.*

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cilindro compreendida entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção – a o paralelogramo **[AA'B'B]** é uma face deste novo sólido.

Em seguida, desenharam-se as projeções do sólido resultante da secção, começando pelos respetivos contornos aparentes.

A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido é um paralelogramo, em que dois dos seus vértices são os pontos de maior abcissa das projeções horizontais das duas bases e os outros dois vértices são as projeções horizontais dos pontos **A** e **A'** (**A<sub>1</sub>** e **A'<sub>1</sub>**, respetivamente).

A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido é a linha mista fechada limitada, à direita, pelo segmento de reta **[B'<sub>2</sub>A<sub>2</sub>]**. O arco de maior cota que delimita a base de menor afastamento do sólido (e que está compreendido entre a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal e a figura da secção) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção horizontal).

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y  $\equiv$  Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O traço horizontal do plano  $\phi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro) e a reta **r** representaram-se a **leve**, pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do cilindro, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente frontal do cilindro). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 729.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano  $\alpha$  (o plano secante) pelos seus traços.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

A base de menor afastamento do cilindro está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a base de menor afastamento do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X** (pois a base está contida no Plano Frontal de Projeção).

Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo (bem como qualquer das suas geratrizes) é projetante frontal (é ortogonal aos planos das bases). Nesse sentido, o ponto  $O'$  (o centro da base de maior afastamento) e o ponto **O** (o centro da base de menor afastamento) situam-se na mesma reta projetante frontal (que é ortogonal aos planos das bases) – tem-se imediatamente  $O'_2 \equiv O_2$ .

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contém as suas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das duas bases. Uma vez que a base de menor afastamento do cilindro tem afastamento nulo (está contida no Plano Frontal de Projeção) e que o cilindro tem 6 cm de altura, o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do sólido (o plano  $\varphi$ ) tem 6 cm de afastamento ( $0 + 6 = 6$ ). Assim, representou-se o plano  $\varphi$  pelo seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

O ponto  $O'$  (o centro da base de maior afastamento) pertence ao plano  $\varphi$  (que é um plano projetante horizontal), pelo que a sua projeção horizontal ( $O'_1$ ) está necessariamente sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ). Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes frontais, a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido está coincidente com a projeção frontal da sua base de menor afastamento. A projeção horizontal da base de maior afastamento reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Por fim desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior e menor abcissa das projeções horizontais das duas bases).

a) A **determinação da figura da secção produzida no cilindro** pelo plano  $\alpha$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).
4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

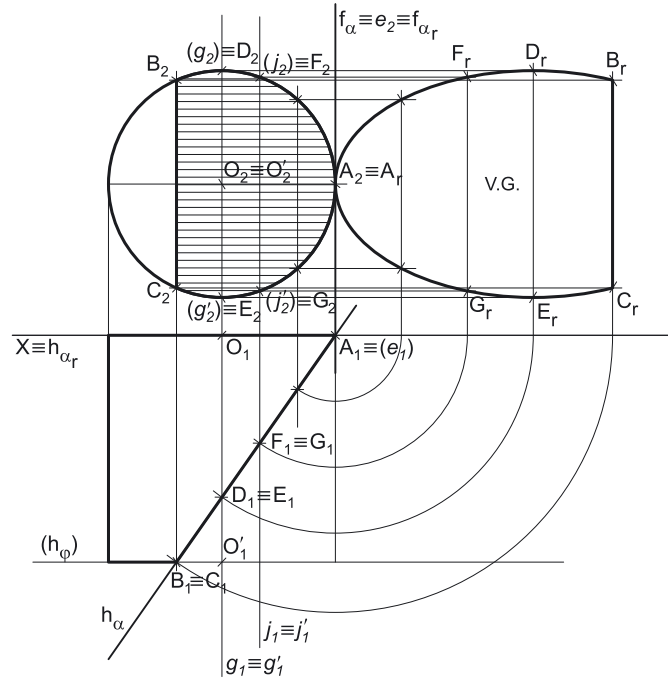
#### 1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cilindro há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em duas etapas, a saber: **A.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **B.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

**A.** Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $\alpha$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $\alpha$  é um plano vertical, que não é paralelo aos planos das bases (que são planos frontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

**B.** Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O eixo do cilindro está contido numa reta de topo (uma reta projetante frontal). O plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, pelo que **não é paralelo** ao eixo do cilindro, pelo que a figura da secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cilindro **não é um paralelogramo** – é uma **elipse**.

Atendendo a que o plano  $\alpha$  corta a base de maior afastamento (o que é possível constatar em projeção horizontal, pois o plano  $\alpha$  é projetante horizontal), a secção produzida pelo plano  $\alpha$  no cilindro é um **segmento de elipse**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

Note que o plano  $\alpha$  contém o ponto de menor abcissa (o ponto mais à direita) da base de menor afastamento do cilindro que, dessa forma, já é um ponto da figura da secção e que se identificou imediatamente – o ponto **A**. Nesse sentido, é possível considerar que o plano  $\alpha$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal no ponto **A**. De forma semelhante, é também possível considerar que o plano  $\alpha$  corta a base de menor afastamento do cilindro no ponto **A**.

Assim, o plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – o ponto **A** (como atrás se referiu) e o ponto **B** (o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a semi-circunferência da base de maior afastamento que integra o contorno aparente horizontal).

O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente frontal** do cilindro (a circunferência que delimita a base de maior afastamento do sólido) em dois pontos – o ponto **B** (já determinado) e o ponto **C**.

Conclui-se que o plano  $\alpha$  corta os contornos aparentes do cilindro em três pontos – os pontos **A**, **B** e **C**. Já temos **três pontos** da figura da secção.

### 3. Determinar o espaço útil em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).

Tendo em conta que as bases do sólido estão contidas em planos frontais (de frente), o recurso a planos paralelos às bases refere-se ao recurso a planos frontais (de frente). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor afastamento da secção** – estes pontos definem o **espaço útil** no qual se desenvolve a secção.

Uma vez que o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal, é possível constatar, de forma imediata, que o ponto **A** é o **ponto de menor afastamento** da secção e que os pontos **B** e **C** são os **pontos de maior afastamento** da secção. Assim, o **espaço útil** no qual a secção se desenvolve é o espaço compreendido entre os pontos **B/C** e **A**.

Note que, como atrás se referiu, na prática o plano secante corta as duas bases do sólido. Assim, a figura da secção desenvolve-se entre as duas bases – a base de menor afastamento (onde se situa o **ponto de menor afastamento** da secção – o ponto **A**) e a base de maior afastamento (onde se situam os **pontos de maior afastamento** da secção – os pontos **B** e **C**).

Por outro lado, atendendo a que o plano secante é **um plano projetante horizontal** e que a superfície cilíndrica que limita o sólido é **uma superfície projetante frontal**, é possível, de forma imediata, desenhar as duas projeções da figura da secção, mesmo sem determinar quaisquer outros pontos da mesma. Nesse sentido, a projeção horizontal da figura da secção é o segmento de reta  $[A_1B_1]$ , que se situa sobre o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ). Já a projeção frontal da figura da secção está parcialmente coincidente com a projeção frontal do contorno aparente do sólido (integrando, ainda, o segmento de reta  $[B_2C_2]$ ).

Assim, a determinação das projeções da figura da secção é direta, tal como direta pode ser a determinação das projeções do **sólido resultante da secção**. No entanto, uma vez que é pedida, também, a verdadeira grandeza da figura da secção (um **segmento de elipse**), que é uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

### 4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Optou-se por se recorrer ao **método das geratrizes** para a determinação dos pontos da secção, uma vez que as geratrizes do cilindro são projetantes frontais (o que nos permite uma grande rapidez e rigor no recurso a este método).

Por uma questão de rigor, começou-se por recorrer às geratrizes de maior e de menor cota do cilindro. Nesse sentido, representaram-se as geratrizes **g** e **g'** pelas respetivas projeções – a geratriz **g** é a geratriz de maior cota do cilindro e a geratriz **g'** é a geratriz de menor cota do sólido. Note que as projeções horizontais das duas geratrizes estão coincidentes. O plano  $\alpha$  corta a geratriz **g** no ponto **D** e corta a geratriz **g'** no ponto **E**. Os pontos **D** e **E** tiveram determinação imediata, pois trata-se da interseção entre retas projetantes frontais (as geratrizes **g** e **g'**) e um plano projetante horizontal (o plano  $\alpha$ ).

Os outros quatro pontos a determinar deverão estar distribuídos pela curva de forma uniforme, de modo equilibrado entre os cinco pontos já determinados. Nesse sentido, desenharam-se as projeções de mais um par de geratrizes quaisquer, **j** e **j'**, tais que as suas projeções horizontais estão coincidentes. Tenha em conta que estas geratrizes se situam sensivelmente a um terço da diferença entre a abcissa das geratrizes **g** e **g'** e a abcissa do ponto **A**, de forma a garantir uma distribuição uniforme dos pontos a determinar. Os pontos **F** e **G** são os pontos em que o plano secante (o plano  $\alpha$ ) corta as geratrizes **j** e **j'**, respetivamente e são mais dois pontos da figura da secção. Já temos **sete pontos** da figura da secção.

O processo acima exposto repetiu-se com mais um par de geratrizes. Assim, recorreu-se a outro par de geratrizes (que não se identificaram) – as geratrizes que se situam a meio da diferença entre a abcissa das geratrizes **j** e **j'** e a abcissa do ponto **A** (visando, como atrás se referiu, a distribuição uniforme dos pontos a determinar). Determinaram-se os pontos em que o plano secante (o plano  $\alpha$ ) corta essas duas geratrizes (pontos esses que também não se identificaram), o que nos permitiu determinar mais dois pontos da figura da secção. Já temos **nove pontos** da figura da secção.

### Determinação das projeções do sólido resultante da secção.

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cilindro compreendida entre o plano secante e o Plano Frontal de Projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente horizontal** deste novo sólido é um trapézio, em que os lados paralelos são as projeções horizontais das duas bases deste novo sólido e o lado mais à esquerda corresponde à projeção horizontal da geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal e o lado mais à direita é a projeção horizontal da figura da secção (o segmento  $[A_1B_1]$ ). A **projeção frontal do contorno aparente frontal** é a circunferência que delimita a projeção frontal do cilindro. Note que a base de maior afastamento deste novo sólido é um segmento de círculo limitado, à direita, pelo segmento de reta  $[BC]$ .

A **figura da secção**, porque é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo  $X$  (em projeção frontal).

b) O plano que contém a figura da secção (o plano secante – o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (o segmento de elipse está deformado tanto em projeção frontal como em projeção horizontal). Assim, para determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano secante (o plano  $\alpha$ , que é o plano que contém a figura da secção) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que foi  $f_{\alpha}$ , pelo que se tem imediatamente  $f_{\alpha} \equiv e_2 \equiv f_{\alpha r}$ . Os planos que contêm os arcos do rebatimento (os planos ortogonais à charneira) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento de cada um dos nove pontos da figura da secção que foram determinados, o que nos permitiu determinar os pontos  $A_r, B_r, C_r, D_r, E_r$  e  $F_r$ , bem como os outros dois pontos (não identificados) em rebatimento. A partir dos nove pontos da figura da secção em rebatimento, desenhou-se o **segmento de elipse** em verdadeira grandeza, com um desenho relativamente preciso (à mão livre), tendo-se assinalado, no desenho, o facto de se tratar da curva em verdadeira grandeza.

Sublinha-se que a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção se poderia ter processado, por exemplo, com o recurso a uma mudança do diedro de projeção.

### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O traço horizontal do plano  $\phi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As projeções do cilindro, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (um dos objetivos do exercício) representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das geratrizes  $g, g', j, e j'$  e dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$ , para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 730.

### Dados:

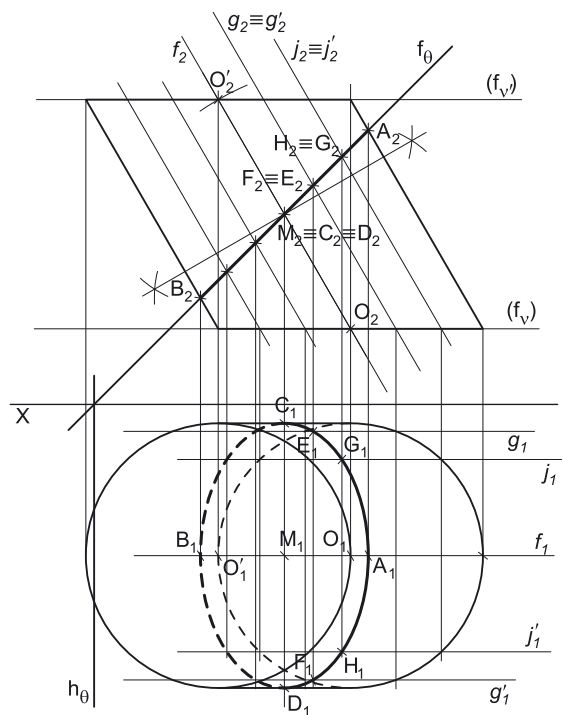
Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base inferior do cilindro, pelo seu traço frontal. O traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto  $O$  ( $O_2$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

A base inferior do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base inferior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, pelas projeções do ponto  $O$  conduziram-se as projeções homónimas da reta  $f$ , a reta suporte do eixo do sólido. Tendo em conta que as geratrizes do sólido medem 7 cm, esse é, também, o comprimento do eixo do cilindro. O eixo do cilindro está contido na reta  $f$ , que é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o eixo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, a partir de  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) e sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ), mediram-se os 7 cm, o que nos permitiu determinar  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ , que é o centro da base superior do cilindro).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se a projeção horizontal do ponto  $O'$  ( $O'_1$ ), que está sobre a projeção horizontal da reta  $f$  ( $f_1$ ) e representou-se o plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do cilindro) pelo seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ) passa pela projeção frontal do ponto  $O'$  ( $O'_2$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A base superior do cilindro está contida num plano que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v'$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O'$ ) e também com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal base superior do cilindro. A projeção frontal desta base reduz-se igualmente a um segmento de reta, sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é outro plano projetante frontal.

Por fim desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abscissa das projeções frontais das duas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontais das duas bases) que são paralelas a uma reta ( $f_1$ , a projeção horizontal da reta  $f$ , que é a reta suporte do eixo do cilindro). O arco mais à esquerda da circunferência que delimita a base inferior (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

Em seguida, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do eixo do cilindro (o segmento  $[OO']$ ), com o recurso à mediatriz do segmento de reta  $[O_2O'_2]$ . Em seguida, representou-se o plano  $\theta$  (o plano secante), pelos seus traços e em função dos dados. O plano  $\theta$  contém o ponto  $M$ , pelo que o seu traço frontal ( $f_\theta$ ) passa pela projeção frontal do ponto  $M$  ( $M_2$ ).

A **determinação da figura da secção produzida no cilindro** pelo plano  $\theta$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que Em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).
4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

#### 1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\theta$  no cilindro há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em duas etapas, a saber: **A**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **B**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

**A**. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $\theta$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $\theta$  (um plano de topo) não é paralelo aos planos das bases (que são planos horizontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

**B**. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O eixo do cilindro está contido numa reta frontal (de frente) – a reta  $f$ . É possível constatar que o plano  $\theta$  **não é paralelo** à reta  $f$ , pois a “família” das retas frontais (de frente) que o plano contém (a “família” de retas a que o seu traço frontal pertence) não é a “família” de retas da reta  $f$  –  $f_\theta$  não é paralelo à reta  $f$ . Assim, o plano  $\theta$  não verifica o **critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta  $f$ , pelo que a figura da secção produzida pelo plano  $\theta$  no cilindro **não é um paralelogramo** – é uma **elipse**.

Atendendo a que o plano  $\theta$  não corta qualquer das bases do cilindro (o que se constata diretamente a partir da projeção frontal do sólido, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal), a secção produzida pelo plano  $\theta$  no cilindro é uma **elipse** (e não um segmento de elipse). Uma **elipse** é uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), cujo desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

#### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano  $\theta$  corta o **contorno aparente frontal** em dois pontos – o ponto **A** (o ponto em que o plano  $\theta$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal) e o ponto **B** (o ponto em que o plano  $\theta$  corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal). Os pontos **A** e **B** foram determinados de forma direta, a partir das respetivas projeções frontais, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. Note, no entanto, que foi necessário desenhar as projeções horizontais daquelas geratrizes (que, na realidade, estão sobre a projeção horizontal da reta  $f$ ).

O plano  $\theta$  corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – o ponto **C** (o ponto em que o plano  $\theta$  corta a geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal) e o ponto **D** (o ponto em que o plano  $\theta$  corta a geratriz de maior afastamento do contorno aparente horizontal). Os pontos **C** e **D** foram determinados de forma direta, a partir das respetivas projeções frontais, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. Note, no entanto, que foi necessário desenhar as projeções frontais daquelas geratrizes (que, na realidade, estão sobre a projeção frontal da reta  $f$ ).

Conclui-se que o plano  $\theta$  corta os contornos aparentes do cilindro em quatro pontos – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Já temos **quatro pontos** da figura da secção.

#### 3. Determinar o espaço útil em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).

Tendo em conta que as bases do sólido estão contidas em planos horizontais (de nível), o recurso a planos paralelos às bases refere-se ao recurso a planos horizontais (de nível). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor cota da secção** (porque os planos paralelos à base são planos horizontais). Tenha em conta que qualquer plano horizontal (de nível) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Uma vez que o plano  $\theta$  (o plano secante) é um plano projetante frontal, é possível constatar, de forma imediata, que o ponto **A** é o **ponto de maior cota** da secção e que o ponto **B** é o **ponto de menor cota** da secção (o que não seria possível garantir, caso o plano não fosse projetante frontal). Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre o ponto **A** e o ponto **B**.

**4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.**

Optou-se por se recorrer ao **método das geratrizes** para a determinação dos pontos da secção, uma vez que as geratrizes do cilindro são projetantes frontais (o que nos permite uma grande rapidez e rigor no recurso a este método).

Dadas as dimensões da figura da secção, optou-se por determinar um número de pontos superior aos **oito pontos** primeiramente referidos, de forma a garantir um desenho da curva (a **elipse**) com alguma precisão.

Nesse sentido, optou-se por se recorrer a dois pares de geratrizes para cada parte da elipse – dois pares de geratrizes para a parte da curva compreendida entre os pontos **C** e **D**, e que passa por **A**, e outros dois pares de geratrizes para a parte da curva compreendida entre os pontos **C** e **D** e que passa por **B**. Cada par de geratrizes permitir-nos-á determinar **dois pontos** da secção. Assim, determinar-se-ão **doze pontos** da secção, o que nos permitirá o desenho da curva com alguma precisão.

Nesse sentido, começou-se por recorrer a um primeiro par de geratrizes (as geratrizes **g** e **g'**), situadas sensivelmente a um terço da distância entre a projeção frontal do ponto **C** (**C<sub>2</sub>**) e a projeção frontal do ponto **A** (**A<sub>2</sub>**), de forma a garantir uma distribuição uniforme dos pontos a determinar – as geratrizes **g** e **g'** têm as suas projeções frontais coincidentes. O plano  $\theta$  corta a geratriz **g** no ponto **E** e corta a geratriz **g'** no ponto **F**. Os pontos **E** e **F** tiveram determinação direta, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, recorreu-se a um segundo par de geratrizes (as geratrizes **j** e **j'**), situadas sensivelmente a dois terços da distância entre a projeção frontal do ponto **C** (**C<sub>2</sub>**) e a projeção frontal do ponto **A** (**A<sub>2</sub>**), de forma a garantir uma distribuição uniforme dos pontos a determinar – as geratrizes **j** e **j'** têm as suas projeções frontais coincidentes (e situam-se a cerca de metade da distância entre as projeções frontais das geratrizes **g** e **g'** e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal). O plano  $\theta$  corta a geratriz **j** no ponto **G** e corta a geratriz **j'** no ponto **H**. Os pontos **G** e **H** tiveram determinação direta, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal.

O procedimento atrás exposto repetiu-se para a parte esquerda da curva (a parte da elipse que passa pelo ponto **B**), recorrendo, de forma semelhante, a mais dois pares de geratrizes (que têm as suas projeções frontais coincidentes). Esses dois pares de geratrizes foram distribuídos de forma uniforme pelo espaço da superfície (conforme exposto para o outro lado da curva) – esses dois pares de geratrizes (que não se identificaram, para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações) permitiu-nos, cada um, determinar mais dois pontos da secção (que também não se identificaram).

A partir dos **doze pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção horizontal da elipse é uma outra elipse, que passa pelas projeções horizontais dos doze pontos determinados – o desenho da curva é relativamente preciso, a partir dos doze pontos determinados. A projeção frontal da elipse reduz-se a um segmento de reta sobre **f<sub>0</sub>** (o traço frontal do plano  $\theta$ ), pois o plano  $\theta$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é perdida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

Já em projeção horizontal, **parte da figura da secção é invisível** – a parte que se situa na parte invisível da superfície lateral do cilindro, que corresponde ao arco **C<sub>1</sub>B<sub>1</sub>D<sub>1</sub>** da elipse. Já o arco **C<sub>1</sub>A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>** da elipse é **visível**, em projeção horizontal, por se situar na parte visível do sólido. Note que os pontos **C** e **D** (os pontos em que o plano  $\theta$  corta as geratrizes do contorno aparente horizontal) são os pontos que estabelecem a distinção entre a **parte visível** da figura da secção e a sua **parte invisível**.

**Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do cilindro e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases do sólido) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente horizontal do cilindro, da mediatriz do segmento de reta **[O<sub>2</sub>O'<sub>2</sub>]**, das projeções das geratrizes **g**, **g'**, **j** e **j'** e das restantes geratrizes (que não se identificaram).

## 731.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base inferior do cilindro, pelo seu traço frontal. O traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto  $O$  ( $O_2$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\gamma$  (o plano secante), pelos seus traços.

**Resolução:***Determinação das projeções do cilindro:*

A base inferior do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base inferior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, pelas projeções do ponto  $O$  conduziram-se as projeções homónimas da reta  $f$ , a reta suporte do eixo do sólido. Tendo em conta que as geratrizes do sólido medem 7 cm, esse é, também, o comprimento do eixo do cilindro. O eixo do cilindro está contido na reta  $f$ , que é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o eixo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, a partir de  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) e sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ), mediram-se os 7 cm, o que nos permitiu determinar  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ , que é o centro da base superior do cilindro).

Em seguida, determinou-se a projeção horizontal do ponto  $O'$  ( $O'_1$ ), que está sobre a projeção horizontal da reta  $f$  ( $f_1$ ) e representou-se o plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do cilindro) pelo seu traço frontal ( $f'_v$ ). O traço frontal do plano  $v'$  ( $f'_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto  $O'$  ( $O'_2$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A base superior do cilindro está contida num plano que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v'$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O'$ ) e também com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal base superior do cilindro. A projeção frontal desta base reduz-se igualmente a um segmento de reta, sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f'_v$ ), pois o plano  $v'$  é outro plano projetante frontal.

Por fim desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abscissa das projeções frontais das duas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontais das duas bases) que são paralelas a uma reta ( $f_1$ , a projeção horizontal da reta  $f$ , que é a reta suporte do eixo do cilindro). O arco mais à esquerda da circunferência que delimita a base inferior (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

A **determinação da figura da secção produzida no cilindro** pelo plano  $\gamma$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que Em seguida, se apresentam:

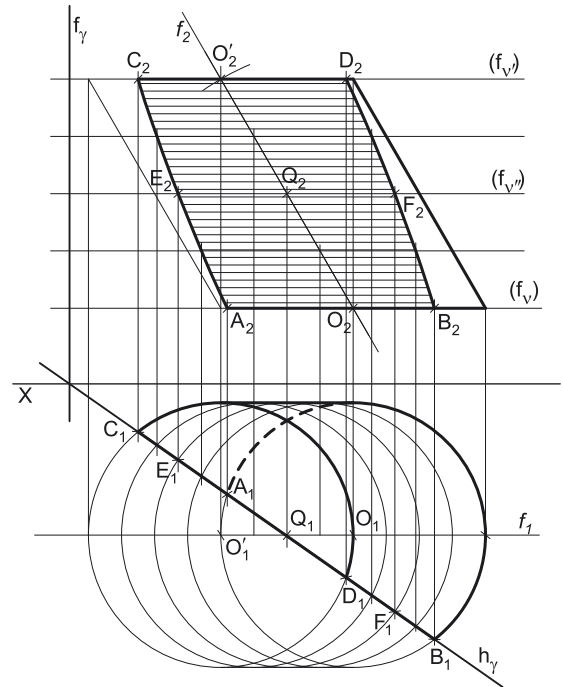
1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).
4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

*1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.*

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\gamma$  no cilindro há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em duas etapas, a saber: **A**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **B**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

**A**. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $\gamma$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $\gamma$  (um plano vertical) não é paralelo aos planos das bases (que são planos horizontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

**B**. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O eixo do cilindro está contido numa reta frontal (de frente) – a reta  $f$ . É possível constatar que o plano  $\gamma$  **não é paralelo** à reta  $f$ , pois a “família” das retas frontais (de frente) que o plano contém (a “família” de retas a que o seu traço frontal pertence, que é a “família” das retas verticais) não é a “família” de retas da reta  $f - f_1$ , não é paralelo à reta  $f$ . Assim, o plano  $\gamma$  não verifica o **critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta  $f$ , pelo que a figura da secção produzida pelo plano  $\gamma$  no cilindro **não é um paralelogramo** – é uma **elipse**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Atendendo a que o plano  $\gamma$  corta as duas bases do cilindro (o que se constata diretamente a partir da projeção horizontal do sólido, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal), a secção produzida pelo plano  $\gamma$  no cilindro é um **segmento de elipse**. Uma **elipse** é uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), cujo desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

## 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – o ponto **B** (o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a semicircunferência da base inferior que integra o contorno aparente horizontal) e o ponto **C** (o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a semicircunferência da base superior que integra o contorno aparente horizontal). Os pontos **B** e **C** foram determinados de forma direta, a partir das respetivas projeções horizontais, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal.

O plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente frontal** em dois pontos – o ponto **B** (o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a semicircunferência da base inferior que integra o contorno aparente frontal) e o ponto **D** (o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a semicircunferência da base superior que integra o contorno aparente frontal). O ponto **B** é o ponto que já havia sido determinado. O ponto **C** foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal.

Conclui-se que o plano  $\gamma$  corta os contornos aparentes do cilindro em três pontos – os pontos **B**, **C** e **D**. Já temos **três pontos** da figura da secção.

## 3. Determinar o espaço útil em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).

Tendo em conta que as bases do sólido estão contidas em planos horizontais (de nível), o recurso a planos paralelos às bases refere-se ao recurso a planos horizontais (de nível). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor cota da secção** (porque os planos paralelos à base são planos horizontais). Tenha em conta que qualquer plano horizontal (de nível) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Uma vez que o plano  $\gamma$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal, é possível constatar, de forma imediata, que os pontos **A** e **B** (os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base inferior do cilindro) são os **pontos de menor cota** da secção e que os pontos **C** e **D** (os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base superior do cilindro) são os **pontos de maior cota** da secção. Assim, determinaram-se as projeções do ponto **A** (a partir da sua projeção horizontal) e conclui-se que o **espaço útil** é o espaço compreendido entre a base inferior (onde se situam os pontos **A** e **B**) e a base superior (onde se situam os pontos **C** e **D**). Já temos **quatro pontos** da figura da secção.

## 4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

O recurso a planos paralelos aos planos das bases deve garantir que os pontos que eles nos permitem determinar estão distribuídos uniformemente pelo **espaço útil**, precisamente para garantir que o desenho da curva (à mão livre) se processe de uma forma o mais precisa possível. Por outro lado, dadas as dimensões da figura da secção (que já é possível adivinhar), considera-se que os oito pontos inicialmente referidos é claramente insuficiente para um desenho relativamente preciso da curva. Assim, e uma vez que já temos **quatro pontos** da secção e que cada plano auxiliar nos permite determinar mais **dois pontos**, optou-se por se recorrer a **três planos auxiliares**, de forma a obter um total de **dez pontos** da secção. Esses três planos auxiliares foram distribuídos pelo **espaço útil** de modo uniforme.

O plano  $v''$  foi o primeiro plano auxiliar a que se recorreu e foi situado a meio da diferença entre a cota do plano  $v$  (o plano da base inferior) e a cota do plano  $v'$  (o plano da base superior). O plano  $v''$ , porque é paralelo aos planos das bases, produz, no cilindro, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $v''$  interseca o eixo do cilindro. O raio desse círculo é igual ao raio das bases, ou seja, é 3,5 cm. O ponto **Q** foi determinado diretamente, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v''$  é um plano projetante frontal. O círculo com centro no ponto **Q** e com 3,5 cm de raio é a secção que o plano  $v''$  produz no cilindro (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal do círculo (e que é tangente às projeções horizontais das geratrizes do contorno aparente horizontal).

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $v''$  (o plano auxiliar) com o plano  $\gamma$  (o plano secante), que é uma reta horizontal (de nível), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **D** e **E**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções horizontais – as suas projeções frontais (**D<sub>2</sub>** e **E<sub>2</sub>**) situam-se sobre o traço frontal do plano  $v''$ , pois o plano  $v''$  é um plano projetante frontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **seis pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **D** e **E** repetiu-se mais duas vezes. Nesse sentido, recorreu-se a um segundo plano auxiliar (que não se identificou), situado a meio da diferença entre a cota do plano  $v$  (o plano da base inferior) e a cota do plano  $v''$  (o primeiro plano auxiliar). Este plano permitiu-nos (de forma semelhante à exposta para os pontos **D** e **E**) determinar mais dois pontos da figura da secção, o que perfaz um total de **oito pontos**. Note que se omitiram todas as notações referentes a esta sequência de traçados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

Por fim, recorreu-se a um terceiro plano auxiliar (que também não se identificou), situado a meio da diferença entre a cota do plano  $v'$  (o plano da base superior) e a cota do plano  $v''$  (o primeiro plano auxiliar). Este plano permitiu-nos (de forma semelhante à exposta para os pontos **D** e **E**) determinar mais dois pontos da figura da secção, o que perfaz um total de **dez pontos**. Note que se omitiram todas as notações referentes a esta sequência de traçados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A figura da secção é, assim, o segmento de elipse limitado, superiormente, pelo segmento de reta **[CD]** e, inferiormente, pelo segmento de reta **[AB]**. Os arcos **AEC** e **BFD** (que são arcos de elipse) são as partes curvas do **segmento de elipse** que é a **figura da secção**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção.

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cilindro compreendida entre o plano secante e o Plano Frontal de Projeção.

A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido é a linha mista fechada que integra o segmento de reta  $[B_1C_1]$ , bem como a projeção horizontal da geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro. Essa linha integra, ainda, as projeções horizontais dos arcos das duas bases que estão compreendidos entre aquele segmento de reta (o segmento de reta  $[B_1C_1]$ ) e a projeção horizontal da geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro. O arco da circunferência que delimita a base inferior que está compreendido entre o ponto **A** e a geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido é outra linha mista fechada, que integra a parte correspondente da projeção frontal da base inferior do sólido e a parte correspondente da base superior do sólido. Essa linha integra, ainda, a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cilindro, bem como o arco  $\overline{A_2E_2C_2}$  da elipse (a projeção frontal do arco mais à esquerda da figura da secção).

A **figura da secção**, porque é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção frontal).

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases do sólido) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do cilindro, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos planos horizontais auxiliares, ou, ainda, das projeções horizontais das secções circulares produzidas por aqueles no cilindro). O traçado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 732.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do cilindro, pelo seu traço horizontal. O traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\theta$  (o plano secante), pelos seus traços.

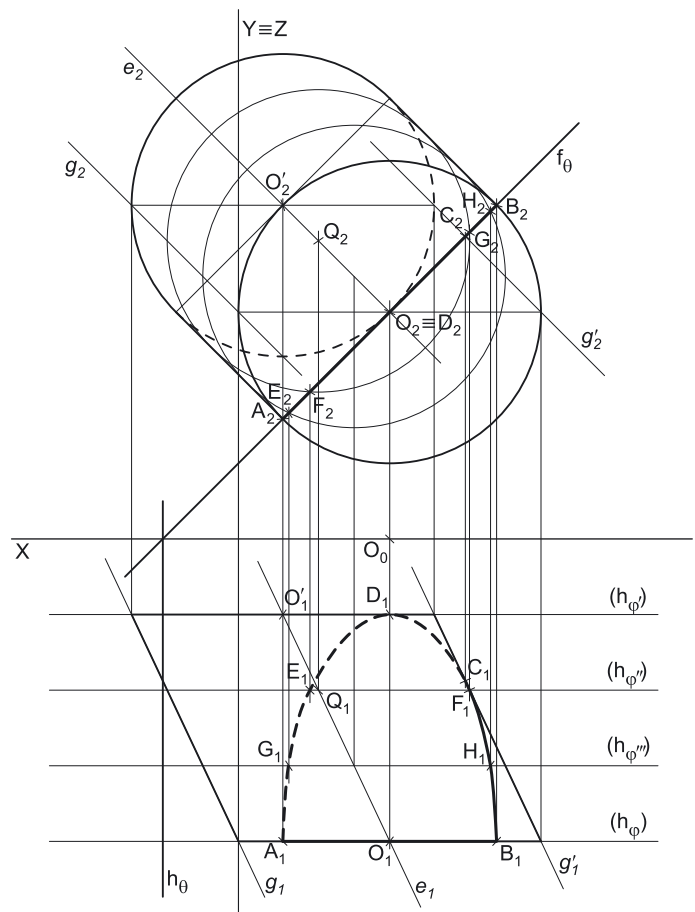
Note que, na presente situação, o plano  $\theta$  (o plano secante) contém necessariamente o ponto **O** (o centro da base de maior afastamento do cilindro), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal e a projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ) está sobre o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ). Assim, o plano  $\theta$  corta necessariamente a base de maior afastamento do cilindro, segundo um dos seus diâmetros.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do cilindro:

A base de maior afastamento do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a base de maior afastamento do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ) conduziu-se a projeção da reta  $e$  ( $e_2$ ), sendo  $e$  a reta suporte do eixo do sólido. Tendo em conta o ponto **O'** se situa na mesma projetante frontal de um dos pontos da circunferência que delimita a base de maior afastamento do sólido (é dado non enunciado) e atendendo, ainda, a que o ponto **O'** tem cota superior a **O** (outro dado do enunciado), determinou-se a projeção frontal do ponto **O'** ( $O'_2$ ), sobre a projeção frontal da reta  $e$  ( $e_2$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases o que, neste caso, é a diferença entre os afastamentos dos planos que contêm as duas bases. Uma vez que a base de maior afastamento tem 8 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $O$ ), e que a altura do sólido é 6 cm, o plano frontal (de frente) que contém a base de menor afastamento do sólido (o plano  $\varphi'$ ) tem 2 cm de afastamento ( $8 - 6 = 2$ ). Assim, representou-se o plano  $\varphi'$  pelo seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ). O plano  $\varphi'$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Em seguida, determinou-se a projeção horizontal do ponto  $O'$  ( $O'_1$ ), que pertence à projeção horizontal da reta  $e$  ( $e_1$ ) e se situa sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. A base de menor afastamento do cilindro está também contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ) e também com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a base de menor afastamento do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal.

Por fim desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abcissa das projeções horizontais das duas bases) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções frontais das duas bases) que são paralelas a uma reta ( $e_2$ , a projeção frontal da reta  $e$ , que é a reta suporte do eixo do cilindro). O arco mais à direita da circunferência que delimita a base de menor afastamento (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

A **determinação da figura da secção produzida no cilindro** pelo plano  $\theta$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que Em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).
4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

### 1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\theta$  no cilindro há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em duas etapas, a saber: **A**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **B**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

**A**. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $\theta$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $\theta$  (um plano de topo) não é paralelo aos planos das bases (que são planos frontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

**B**. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O eixo do cilindro está contido numa reta oblíqua (a reta  $e$ ). É possível constatar que o plano  $\theta$  **não é paralelo** à reta  $e$ , pois o plano  $\theta$  não contém qualquer reta que seja paralela à reta  $e$ . De facto, o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, pelo que as projeções horizontais de todas as retas do plano  $\theta$  estão sobre o traço frontal do plano ( $f_{\theta}$ ), que não é paralelo à projeção frontal da reta  $e$  ( $e_2$ ), pelo que o plano  $\theta$  não contém nenhuma reta paralela à reta  $e$ . Assim, o plano  $\theta$  **não verifica o Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta  $e$ , pelo que a figura da secção produzida pelo plano  $\theta$  no cilindro **não é um paralelogramo** – é uma **elipse**.

Atendendo a que o plano  $\theta$  corta a base de maior afastamento do cilindro (o que se constata diretamente a partir da projeção frontal do sólido, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal), a secção produzida pelo plano  $\theta$  no cilindro é um **segmento de elipse**. Uma **elipse** é uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), cujo desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano  $\theta$  corta o **contorno aparente frontal** em dois pontos – os pontos **A** e **B**. Note que o segmento **[AB]** é um diâmetro da circunferência que delimita a base de maior afastamento do cilindro. Por outro lado, o ponto **A** é o ponto em que a geratriz de menor cota do contorno aparente frontal do cilindro se apoia na base de maior afastamento do cilindro, tal como **B** é o ponto em que a geratriz de maior cota do contorno aparente frontal do cilindro se apoia na base de maior afastamento do sólido. Assim, os pontos **A** e **B** são, por um lado, os pontos em que o plano  $\theta$  corta a semicircunferência da base de maior afastamento que integra o contorno aparente frontal, como são, também, os pontos em que o plano  $\theta$  corta as geratrizes do contorno aparente frontal.

Os pontos **A** e **B** foram determinados de forma direta, a partir das respetivas projeções frontais, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, por uma questão de simplificação do relatório, optou-se por se identificar as geratrizes do contorno aparente horizontal. As geratrizes do contorno aparente horizontal são as geratrizes **g** e **g'** – a geratriz **g** é a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal e a geratriz **g'** é a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal. Nesse sentido, desenharam-se nas suas projeções frontais, a partir das projeções frontais dos dois pontos que definem cada uma das duas geratrizes.

O plano  $\theta$  corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – o ponto **B** (o ponto em que o plano  $\theta$  corta a semicircunferência da base de maior afastamento que integra o contorno aparente horizontal) e o ponto **C** (o ponto em que o plano  $\theta$  corta a geratriz **g'**). O ponto **B** é o ponto que já havia sido determinado. O ponto **C** foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. O plano  $\theta$  não corta a geratriz **g**, pois não a corta no espaço entre as duas bases do cilindro.

Conclui-se que o plano  $\theta$  corta os contornos aparentes do cilindro em três pontos – os pontos **A**, **B** e **C**. Já temos **três pontos** da figura da secção.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

### 3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).

Tendo em conta que as bases do sólido estão contidas em planos frontais (de frente), o recurso a planos paralelos às bases refere-se ao recurso a planos frontais (de frente). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor afastamento da secção** (porque os planos paralelos à base são planos frontais). Tenha em conta que qualquer plano frontal (de frente) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano  $\theta$  corta a base de maior afastamento do sólido, os **pontos de maior afastamento** da secção são, de forma imediata, os pontos em que o plano  $\theta$  corta a base de maior afastamento do sólido – os pontos **A e B**, já determinados.

Por outro lado, é possível constatar que o plano  $\theta$  é tangente à base de menor afastamento do sólido. Nesse sentido, pode considerar-se que o plano  $\theta$  corta a base de menor afastamento do cilindro num ponto (o ponto **D**), pelo que esse ponto é, de forma imediata, o **ponto de menor afastamento** da secção. Nesse sentido, determinaram-se as projeções do ponto **D** (o ponto em que  $f_0$  é tangente à circunferência que delimita a projeção frontal da base de menor afastamento), a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal.

Conclui-se, então, que o **espaço útil** é o espaço compreendido entre a base de maior afastamento do cilindro (onde se situam os pontos **A e B**) e a sua base de menor afastamento (onde se situa o ponto **D**). Já temos **quatro pontos** da figura da secção.

### 4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

O recurso a planos paralelos aos planos das bases deve garantir que os pontos que eles nos permitem determinar estão distribuídos uniformemente pelo **espaço útil**, precisamente para garantir que o desenho da curva (à mão livre) se processe de uma forma o mais precisa possível. Nesse sentido, uma vez que já temos **quatro pontos** da secção e que cada plano auxiliar nos permite determinar mais **dois pontos**, optou-se por se recorrer a **dois planos auxiliares**, de forma a obter mais **quatro pontos**, o que perfará o total dos **oito pontos** referidos. Esses dois planos auxiliares foram distribuídos pelo **espaço útil** de modo uniforme.

O plano  $\varphi''$  foi o primeiro plano auxiliar a que se recorreu e foi situado a um terço da diferença entre o afastamento do plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de menor afastamento) e o afastamento do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento). O plano  $\varphi''$ , porque é paralelo aos planos das bases, produz, no cilindro, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $\varphi''$  intersesta o eixo do cilindro (a reta **e**). O raio desse círculo é igual ao raio das bases, ou seja, é 4 cm. O ponto **Q** foi determinado diretamente, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi''$  é um plano projetante horizontal. O círculo com centro no ponto **Q** e com 4 cm de raio é a secção que o plano  $\varphi''$  produz no cilindro (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **Q**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal do círculo (e que é tangente às projeções frontais das geratrizes do contorno aparente frontal).

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\varphi''$  (o plano auxiliar) com o plano  $\theta$  (o plano secante), que é uma reta frontal (de frente), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **E e F**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções frontais – as suas projeções horizontais (**E<sub>1</sub>** e **F<sub>1</sub>**) situam-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi''$ , pois o plano  $\varphi''$  é um plano projetante horizontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **seis pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **E e F** repetiu-se uma vez mais. Nesse sentido, recorreu-se a um segundo plano auxiliar (o plano  $\varphi'''$ ), situado a meio da diferença entre o afastamento do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento) e o afastamento do plano  $\varphi''$  (o primeiro plano auxiliar). Este plano permitiu-nos (de forma semelhante à exposta para os pontos **E e F**) determinar mais dois pontos da figura da secção (os pontos **G e H**), o que perfaz um total de **oito pontos**. Note que se omitiram todas as notações referentes a esta sequência de traçados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A figura da secção é, assim, o segmento de elipse limitado pelo segmento de reta **[AB]** e pelo ponto **D**. O arco  $\widehat{ADB}$  (um arco de elipse) é a parte curva do **segmento de elipse** que é a **figura da secção**. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

Já em projeção horizontal, parte da **figura da secção** é **invisível** – a parte que se situa na parte invisível da superfície lateral do cilindro, que corresponde ao arco  $\widehat{A_1D_1C_1}$  da elipse. Já o arco  $\widehat{C_1H_1B_1}$  da elipse é **visível**, em projeção horizontal, por se situar na parte visível do sólido. Note que o ponto **C** (o ponto em que o plano  $\theta$  corta a geratriz **g'**, a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal) é o ponto que estabelece a distinção entre a **parte visível** da figura da secção e a sua **parte invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y  $\equiv$  Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cilindro e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. Os traços horizontais dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  (os planos que contêm as bases do sólido) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente frontal do cilindro, das projeções das geratrizes **g** e **g'** ou, ainda, dos planos frontais auxiliares e das projeções frontais das secções circulares produzidas por aqueles no cilindro).



## 733.

Qualquer plano secante a uma esfera secciona a esfera segundo um **círculo**. Este pode variar entre um **círculo máximo** (no caso de o plano secante conter o centro da esfera) e **um ponto** (que é um círculo com 0 cm de raio, no caso de o plano ser tangente à esfera).

## 734.

O centro do **círculo** (a figura da secção) é o ponto em que o plano secante corta o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante – o centro do círculo situa-se, assim, numa reta que contém o centro da esfera e é ortogonal ao plano secante.

## 735.

No caso de o plano  $\alpha$  conter o ponto **O** (o centro da esfera), a figura geométrica resultante da secção produzida na esfera pelo plano  $\alpha$  é um **círculo máximo** da esfera – o **círculo máximo** da esfera que está contido no plano  $\alpha$ .

## 736.

### Dados:

Uma vez que a esfera, que tem 3,5 cm de raio, é tangente aos dois planos de projeção, é possível inferir que no seu centro (o ponto **O**) tem 3,5 cm tanto de cota como de afastamento. Assim, em primeiro lugar representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função do exposto. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano secante), pelo seu traço frontal, em função dos dados. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da esfera:

As duas projeções da esfera são círculos com 3,5 cm de raio e centros nas respetivas projeções do centro da esfera.

Nesse sentido, a **projeção horizontal** da esfera é a própria projeção horizontal do seu **círculo máximo horizontal** – este projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal da esfera (e que é tangente ao eixo **X**).

Por outro lado, a **projeção frontal** da esfera é a própria projeção frontal do seu **círculo máximo frontal** – este projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal da esfera (e que é igualmente tangente ao eixo **X**).

Os diâmetros fronto-horizontais dos dois círculos máximos (que são meramente auxiliares) permitem relacionar as duas projeções da esfera – os pontos de maior e de menor abscissa do círculo máximo frontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizonta) são, também, os pontos de maior e de menor abscissa do círculo máximo horizontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizonta), o que se assinalou com as respetivas linhas de chamada.

#### Determinação da figura da secção:

A secção produzida por qualquer plano numa esfera será sempre um **círculo** – o centro desse círculo é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante e o raio do círculo é a distância desse ponto (o centro do círculo) a um dos pontos de interseção do plano secante com qualquer círculo máximo que contenha aquele raio.

A **determinação da figura da secção produzida na esfera** pelo plano  $v$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

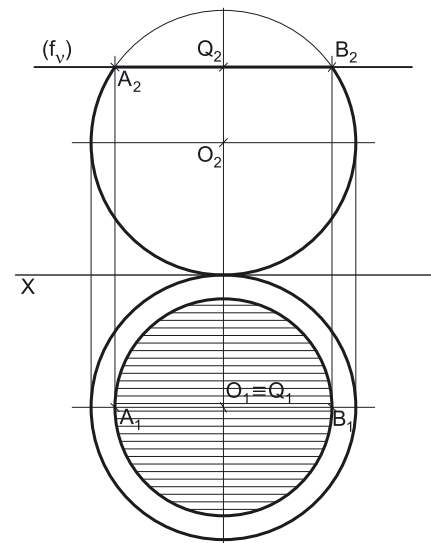
1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.
3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.
4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

#### 1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).

Determinou-se o centro do **círculo**, que é o ponto **Q** – o ponto de interseção do plano  $v$  (o plano secante) com o raio da esfera que é ortogonal ao plano  $v$  (um raio vertical). Tenha em conta que o ponto **Q** é o ponto de interseção do plano  $v$  com o raio vertical (projetante horizontal) da esfera está compreendido entre o ponto **O** (o centro da esfera) e o ponto de maior cota da esfera. O ponto **Q** foi determinado de forma direta, pois tratou-se da interseção entre uma reta projetante horizontal (a reta suporte do diâmetro vertical da esfera) e um plano projetante frontal (o plano  $v$ ). Note que o ponto **O** e o ponto **Q** se situam na mesma projetante horizontal, pelo que se tem imediatamente **Q<sub>1</sub> = O<sub>1</sub>**.

#### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.

Em seguida, determinaram-se os pontos que o plano  $v$  corta os contornos aparentes da esfera. O plano  $v$  não corta o **contorno aparente horizontal** da esfera, pois é paralelo ao plano que contém o contorno aparente horizontal do sólido. O plano  $v$  corta o **contorno aparente frontal** da esfera (o círculo máximo frontal da esfera) nos pontos **A** e **B** – os pontos **A** e **B** foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $v$  (o plano secante) é um plano projetante frontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### 3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.

O raio da figura da secção (o **círculo** resultante da secção) é a distância do ponto **Q** a qualquer dos pontos **A** e **B**.

### 4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

Tendo em conta que o plano que contém a figura da secção (o plano  $v$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, a figura da secção projeta-se em verdadeira grandeza em projeção horizontal, pelo que não é necessária a determinação de quaisquer outros pontos da curva.

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio  $\overline{Q_1A_1} = \overline{Q_1B_1}$ , desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a figura da secção. A projeção frontal da figura da secção reduz-se a um segmento de reta (o segmento  $[A_2B_2]$ ) sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

Em seguida, desenharam-se as projeções **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte da esfera inicial), que é a parte do sólido que está compreendida entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção.

A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido resultante da secção é a linha mista fechada que integra o segmento  $[A_2B_2]$  bem como o arco maior  $\overline{A_2B_2}$  da circunferência que delimita a projeção frontal da esfera. A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido resultante da secção é a própria circunferência que delimita a projeção horizontal da esfera.

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção horizontal).

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções da esfera, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). O traço frontal do plano secante, porque integra os dados, representou-se a **médio**. As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos diâmetros fronto-horizontais das circunferências que limitam as projeções da esfera). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 737.

### Dados:

Uma vez que a esfera, que tem 3,5 cm de raio, é tangente aos dois planos de projeção, é possível inferir que no seu centro (o ponto **O**) tem 3,5 cm tanto de cota como de afastamento. Assim, em primeiro lugar representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função do exposto. Em seguida, representou-se o plano  $\alpha$  (o plano secante), pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  contém um círculo máximo da esfera, pelo que o plano  $\alpha$  contém necessariamente o centro da esfera (o ponto **O**). Nesse sentido, o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ).

### Resolução:

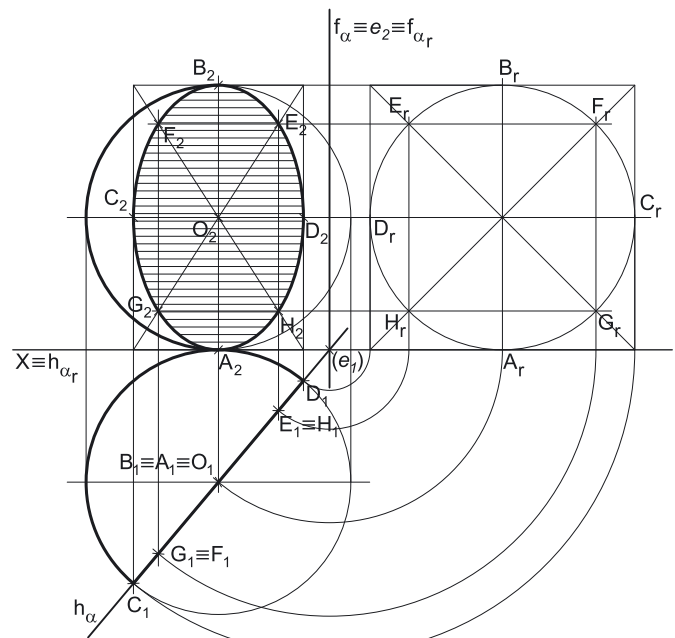
#### Determinação das projeções da esfera:

As duas projeções da esfera são círculos com 3,5 cm de raio e centros nas respetivas projeções do centro da esfera.

Nesse sentido, a **projeção horizontal** da esfera é a própria projeção horizontal do seu **círculo máximo horizontal** – este projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal da esfera (e que é tangente ao eixo **X**).

Por outro lado, a **projeção frontal** da esfera é a própria projeção frontal do seu **círculo máximo frontal** – este projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal da esfera (e que é igualmente tangente ao eixo **X**).

Os diâmetros fronto-horizontais dos dois círculos máximos (que são meramente auxiliares) permitem relacionar as duas projeções da esfera – os pontos de maior e de menor abscissa do círculo máximo frontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizontais) são, também, os pontos de maior e de menor abscissa do círculo máximo horizontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizontais), o que se assinalou com as respetivas linhas de chamada.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação da figura da secção:

A secção produzida por qualquer plano numa esfera será sempre um **círculo** – o centro desse círculo é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante e o raio do círculo é a distância desse ponto (o centro do círculo) a um dos pontos de interseção do plano secante com qualquer círculo máximo que contenha aquele raio.

A **determinação da figura da secção produzida na esfera** pelo plano  $\alpha$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.
3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.
4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

### 1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).

O plano  $\alpha$  (que passa pelo ponto **O**, o centro da esfera) contém um círculo máximo da esfera, pelo que a secção produzida pelo plano  $\alpha$  na esfera é precisamente esse círculo máximo que o plano contém. Assim, o centro da figura da secção é o próprio ponto **O**.

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.

Em seguida, determinaram-se os pontos que o plano  $\alpha$  corta os contornos aparentes da esfera. O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente frontal** da esfera (o círculo máximo frontal da esfera) nos pontos **A** e **B** – os pontos **A** e **B** foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal. O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente horizontal** da esfera (o círculo máximo horizontal da esfera) nos pontos **C** e **D** – os pontos **C** e **D** foram igualmente determinados de forma direta, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal.

### 3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.

O raio da figura da secção (o **círculo** resultante da secção) é a distância do ponto **Q** a qualquer dos pontos **A**, **B**, **C** ou **D**. Tendo em conta que a secção é um círculo máximo da esfera, o raio da figura da secção é o raio da esfera – é 3,5 cm.

### 4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

Tendo em conta que o plano que contém a figura da secção (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (está deformada em ambas as projeções) – a **projeção horizontal** da figura da secção é um **segmento de reta** sobre o traço horizontal do plano  $\alpha$  (pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal) e a sua **projeção frontal** é necessariamente uma **elipse** (resultante da deformação do círculo em projeção frontal). Nesse sentido, o desenho da **elipse** que é a **projeção frontal do círculo** (e que é uma **curva de erro**), carece da determinação de oito pontos da curva, para um desenho relativamente preciso da curva à mão livre.

Note que, ao contrário das **secções cônicas** e **secções cilíndricas**, nesta situação a figura da secção **não é uma elipse** – a figura da secção é um **círculo**, embora a sua projeção (frontal) seja uma **elipse**. Assim, a curva cônica (a **elipse**) não é a **figura da secção em si** mas, sim, a **sua projeção**, deformada pela situação da própria projeção.

Já temos **quatro pontos** para o desenho da curva – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. No entanto, o desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva requer um mínimo de **oito pontos**.

Para a determinação dos restantes pontos necessários ao desenho da **elipse** optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  (o plano secante) e pelo desenho prévio da figura da secção, em rebatimento. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou imediatamente a charneira, que foi o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) – tem-se, imediatamente  $f_\alpha \cdot e_2 \equiv f_{\alpha f}$ . Os planos ortogonais à charneira são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza em projeção horizontal e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo do rebatimento.

Efetuuou-se o rebatimento dos pontos **O**, **A**, **B**, **C** e **D**, o que nos permitiu obter  $O_r$ ,  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$  e  $D_r$ . A figura da secção é um círculo com centro no ponto **O** e raio  $OA = OB = OC = OD$ . Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio  $O_rA_r = O_rB_r = O_rC_r = O_rD_r$  (que é 3,5 cm), desenhou-se a figura da secção em rebatimento (em verdadeira grandeza).

Para determinar os elementos necessários ao desenho (à mão livre) da **elipse**, inscreveu-se a circunferência num quadrado de lados paralelos à charneira do rebatimento. Em seguida, desenharam-se as suas medianas (os segmentos paralelos aos lados e que passam pelo ponto  $O_r$ ) bem como as suas diagonais. Os pontos em que as medianas do quadrado (em rebatimento) se apoiam nos lados do quadrado são, imediatamente, os **quatro pontos** já determinados – os pontos  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$  e  $D_r$ .

$[A_rB_r]$  é, em rebatimento, o diâmetro da circunferência que é paralelo à charneira, pelo que não sofre qualquer deformação em projeção –  $[AB]$  projeta-se em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, a projeção frontal do diâmetro  $[AB]$  corresponderá ao **eixo maior** da elipse.  $[C_rD_r]$  é, em rebatimento, o diâmetro da circunferência que é perpendicular à charneira, pelo que sofre a deformação máxima em projeção –  $[CD]$  projeta-se com a máxima redução em projeção frontal. Assim, a projeção frontal do diâmetro  $[CD]$  corresponderá ao **eixo menor** da elipse.

Por outro lado, a projeção frontal do quadrado (que será um retângulo) corresponderá ao retângulo envolvente da elipse, que nos permitirá ainda mais rigor no desenho da curva. Assim, foi possível, a partir das projeções frontais dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**, desenhar o retângulo que é a projeção frontal do quadrado.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado são mais **quatro** pontos cujas projeções frontais serão os **quatro pontos** em falta e que nos permitirão o desenho da curva da **elipse** com alguma precisão. Em projeção frontal, desenharam-se as diagonais do retângulo (que são as projeções frontais das diagonais do quadrado). Em seguida, transportaram-se, para as diagonais do retângulo, os pontos em que a circunferência (em rebatimento) corta as diagonais do quadrado – esse transporte processou-se com o recurso aos planos horizontais (de nível) que contêm os arcos do rebatimento daqueles pontos. Este procedimento permitiu-nos determinar mais **quatro pontos** para o desenho da **elipse**. A partir dos **oito pontos** determinados, procedeu-se ao desenho da curva (à mão livre), atendendo às situações de tangência da curva aos lados do retângulo acima referidas.

Salienta-se, ainda, que a **projeção frontal da figura da secção** (a **elipse**) é tangente ao contorno aparente frontal da esfera nos pontos **A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**). Salienta-se que os pontos **A** e **B** são os pontos em que o plano  $\alpha$  (o plano secante) corta o contorno aparente frontal da esfera.

**Determinação das projeções do sólido resultante da secção:**

A partir do desenho da figura da secção, foi possível desenhar as projeções **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte da esfera inicial), que é a parte do sólido que está compreendida entre o plano secante (o plano  $\alpha$ ) e o Plano Frontal de Projeção.

A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido resultante da secção é a linha mista fechada que integra o segmento **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**, bem como a semicircunferência **C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>** de maior abscissa, da circunferência que delimita a projeção horizontal da esfera. A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido resultante da secção é a linha curva fechada que integra o arco **A<sub>2</sub>D<sub>2</sub>B<sub>2</sub>**, da elipse, a semicircunferência **A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>** de maior abscissa, da circunferência que delimita a projeção frontal da esfera.

A **figura da secção**, porque **é visível em projeção frontal** (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção frontal).

**Traçado:**

O eixo **X** representa-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções da esfera, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$ , para a determinação dos pontos necessários ao desenho da elipse). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 738.

**Dados:**

Em primeiro lugar representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **O** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). Em seguida, representou-se o plano  $\theta$  (o plano secante), pelos seus traços, em função dos dados.

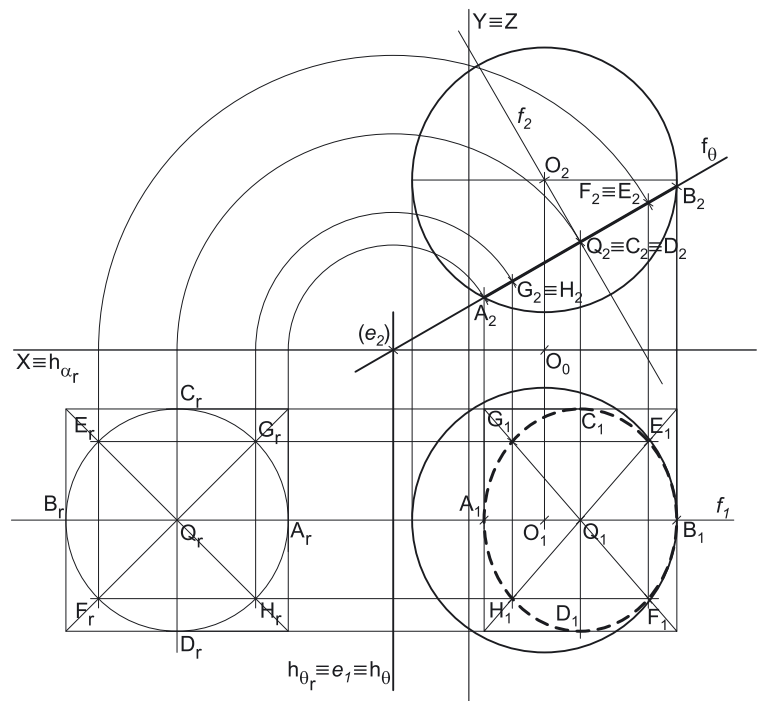
**Resolução:**

**Determinação das projeções da esfera:**

As duas projeções da esfera são círculos com 3,5 cm de raio e centros nas respetivas projeções do centro da esfera.

Nesse sentido, a **projeção horizontal** da esfera é a própria projeção horizontal do seu **círculo máximo horizontal** – este projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal da esfera (e que é tangente ao eixo **X**).

Por outro lado, a **projeção frontal** da esfera é a própria projeção frontal do seu **círculo máximo frontal** – este projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal da esfera (e que é igualmente tangente ao eixo **X**).



Os diâmetros fronto-horizontais dos dois círculos máximos (que são meramente auxiliares) permitem relacionar as duas projeções da esfera – os pontos de maior e de menor abscissa do círculo máximo frontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizonta) são, também, os pontos de maior e de menor abscissa do círculo máximo horizontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizonta), o que se assinalou com as respetivas linhas de chamada.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação da figura da secção:

A secção produzida por qualquer plano numa esfera será sempre um **círculo** – o centro desse círculo é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante e o raio do círculo é a distância desse ponto (o centro do círculo) a um dos pontos de interseção do plano secante com qualquer círculo máximo que contenha aquele raio.

A **determinação da figura da secção produzida na esfera** pelo plano  $\theta$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.
3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.
4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

### 1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).

A reta  $f$ , frontal (de frente) é a reta que passa pelo ponto  $O$  (o centro da esfera) e é ortogonal ao plano  $\theta$  (pois verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**) – a reta  $f$  é, assim, a reta que contém o raio da esfera que é ortogonal ao plano  $\theta$ . Em seguida, determinou-se o centro do **círculo** resultante da secção, que é o ponto  $Q$  – o ponto de interseção do plano  $\theta$  (o plano secante) com a reta  $f$ . O ponto  $Q$  foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal.

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.

Em seguida, determinaram-se os pontos que o plano  $\theta$  corta os contornos aparentes da esfera. O plano  $\theta$  corta o **contorno aparente frontal** da esfera (o círculo máximo frontal da esfera) nos pontos  $A$  e  $B$  – os pontos  $A$  e  $B$  foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $\theta$  (o plano secante) é um plano projetante frontal.

O plano  $\theta$  **não corta o contorno aparente horizontal** da esfera (o círculo máximo horizontal da esfera). Note que os pontos  $A$  e  $B$  (os dois pontos em que o plano  $\theta$  corta o círculo máximo frontal da esfera) têm, ambos, cota inferior ao ponto  $O$  (o centro da esfera), ou seja, têm ambos, cota inferior ao **círculo máximo horizontal** da esfera (que é o seu contorno aparente horizontal).

### 3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.

O raio da figura da secção (o **círculo** resultante da secção) é a distância do ponto  $Q$  a qualquer dos pontos  $A$  ou  $B$ .

### 4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

Tendo em conta que o plano que contém a figura da secção (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (está deformada em ambas as projeções) – a **projeção frontal** da figura da secção é um **segmento de reta** sobre o traço frontal do plano  $\theta$  (pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal) e a sua **projeção horizontal** é necessariamente uma **elipse** (resultante da deformação do círculo em projeção horizontal). Nesse sentido, o desenho da **elipse** que é a **projeção horizontal do círculo** (e que é uma **curva de erro**), carece da determinação de oito pontos da curva, para um desenho relativamente preciso da curva à mão livre.

Note que, ao contrário das **secções cônicas** e **secções cilíndricas**, nesta situação a figura da secção **não é uma elipse** – a figura da secção é um **círculo**, embora a sua projeção (horizontal) seja uma **elipse**. Assim, a curva cônica (a **elipse**) não é a **figura da secção em si** mas, sim, a **sua projeção**, deformada pela situação da própria projeção.

Já temos **dois pontos** para o desenho da curva – os pontos  $A$  e  $B$ . No entanto, o desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva requer um mínimo de **oito pontos**.

Para a determinação dos restantes pontos necessários ao desenho da **elipse** optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  (o plano secante) e pelo desenho prévio da figura da secção, em rebatimento. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção, pelo que se identificou imediatamente a charneira, que foi o traço horizontal do plano ( $h_\theta$ ) – tem-se, imediatamente  $h_\theta \equiv e_f \equiv h_{\theta_r}$ . Os planos ortogonais à charneira são planos frontais (de frente), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza em projeção frontal e os pontos mantêm os seus afastamentos, ao longo do rebatimento.

Efetuuou-se o rebatimento dos pontos  $Q$ ,  $A$  e  $B$ , o que nos permitiu obter  $Q_r$ ,  $A_r$  e  $B_r$ . A figura da secção é um círculo com centro no ponto  $Q$  e raio  $\overline{QA} = \overline{QB}$ . Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_r$  e com raio  $\overline{Q_r A_r} = \overline{Q_r B_r}$ , desenhou-se a figura da secção em rebatimento (em verdadeira grandeza).

Para determinar os elementos necessários ao desenho (à mão livre) da **elipse**, inscreveu-se a circunferência num quadrado de lados paralelos à charneira do rebatimento. Em seguida, desenharam-se as suas medianas (os segmentos paralelos aos lados e que passam pelo ponto  $Q_r$ ) bem como as suas diagonais. Os pontos em que as medianas do quadrado (em rebatimento) se apoiam nos lados do quadrado são, imediatamente, **quatro pontos** que nos permitirão o desenho da elipse – os pontos  $A_r$  e  $B_r$  (cujas projeções foram previamente determinadas) e ainda os pontos  $C_r$  e  $D_r$ .

$[C_r D_r]$  é, em rebatimento, o diâmetro da circunferência que é paralelo à charneira, pelo que não sofre qualquer deformação em projeção –  $[CD]$  projeta-se em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, a projeção horizontal do diâmetro  $[CD]$  corresponderá ao **eixo maior** da elipse.  $[A_r B_r]$  é, em rebatimento, o diâmetro da circunferência que é perpendicular à charneira, pelo que sofre a deformação máxima em projeção –  $[AB]$  projeta-se com a máxima redução em projeção horizontal. Assim, a projeção horizontal do diâmetro  $[AB]$  corresponderá ao **eixo menor** da elipse.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, a projeção horizontal do quadrado (que será um retângulo) corresponderá ao retângulo envolvente da elipse, que nos permitirá ainda mais rigor no desenho da curva. Assim, foi possível, a partir das projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, e invertendo o rebatimento do plano  $\theta$ , desenhar o retângulo que é a projeção horizontal do quadrado, o que nos permitiu, também, determinar as projeções dos pontos **C** e **D**. As projeções horizontais dos pontos **A**, **B**, **C** e **D** (**A<sub>1</sub>**, **B<sub>1</sub>**, **C<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>**) são, imediatamente, os pontos em que a **elipse** (que é a projeção horizontal do **círculo**) será tangente aos lados do retângulo envolvente.

Os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado são mais **quatro** pontos cujas projeções horizontais serão os **quatro pontos** em falta e que nos permitirão o desenho da curva da **elipse** com alguma precisão. Em projeção frontal, desenharam-se as diagonais do retângulo (que são as projeções horizontais das diagonais do quadrado). Em seguida, transportaram-se, para as diagonais do retângulo, os pontos em que a circunferência (em rebatimento) corta as diagonais do quadrado – esse transporte processou-se com o recurso aos planos frontais (de frente) que contêm os arcos do rebatimento daqueles pontos. Este procedimento permitiu-nos determinar mais **quatro pontos** para o desenho da **elipse**. A partir dos **oito pontos** determinados, procedeu-se ao desenho da curva (à mão livre), atendendo às situações de tangência da curva aos lados do retângulo acima referidas. Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

A figura da secção (o **círculo** resultante da secção) é **invisível** em **projeção horizontal**, na sua totalidade, pois situa-se na parte **invisível** da superfície do sólido (a **elipse**, que é a projeção horizontal do círculo, representou-se a traço interrompido). Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

#### Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções da esfera e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$ , para a determinação dos pontos necessários ao desenho da elipse).

## 739.

#### Dados:

Uma vez que a esfera, que tem 4 cm de raio, é tangente aos dois planos de projeção, é possível inferir que no seu centro (o ponto **O**) tem 4 cm tanto de cota como de afastamento. Assim, em primeiro lugar representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função do exposto. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (um dos planos secantes), pelo seu traço horizontal, em função dos dados. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**) se identificou entre parêntesis.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções da esfera:

As duas projeções da esfera são círculos com 4 cm de raio e centros nas respetivas projeções do centro da esfera.

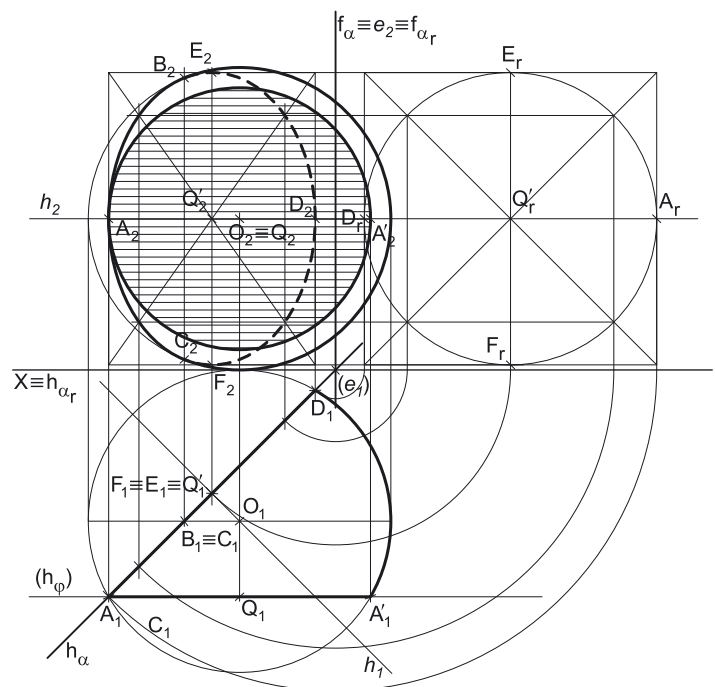
Nesse sentido, a **projeção horizontal** da esfera é a própria projeção horizontal do seu **círculo máximo horizontal** – este projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal da esfera (e que é tangente ao eixo **X**).

Por outro lado, a **projeção frontal** da esfera é a própria projeção frontal do seu **círculo máximo frontal** – este projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal da esfera (e que é igualmente tangente ao eixo **X**).

Os diâmetros fronto-horizontais dos dois círculos máximos (que são meramente auxiliares) permitem relacionar as duas projeções da esfera – os pontos de maior e de menor abcissa do círculo máximo frontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizonta) são, também, os pontos de maior e de menor abcissa do círculo máximo horizontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizonta), o que se assinalou com as respetivas linhas de chamada.

##### 1. Determinação da figura da secção que o plano $\varphi$ produz na esfera

A secção produzida por qualquer plano numa esfera será sempre um **círculo** – o centro desse círculo é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante e o raio do círculo é a distância desse ponto (o centro do círculo) a um dos pontos de interseção do plano secante com qualquer círculo máximo que contenha aquele raio.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A **determinação da figura da secção produzida na esfera** pelo plano  $\varphi$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

- 1.1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).
- 1.2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.
- 1.3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.
- 1.4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

**1.1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).**

Determinou-se o centro do círculo, que é o ponto  $Q$  – o ponto de interseção do plano  $\varphi$  (o plano secante) com o raio da esfera que é ortogonal ao plano  $\varphi$  (um raio de topo). Tenha em conta que o ponto  $Q$  é o ponto de interseção do plano  $\varphi$  com o raio de topo (projetante frontal) da esfera está compreendido entre o ponto  $O$  (o centro da esfera) e o ponto de maior afastamento da esfera. O ponto  $Q$  foi determinado de forma direta, pois tratou-se da interseção entre uma reta projetante frontal (a reta suporte do diâmetro de topo da esfera) e um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ). Note que o ponto  $O$  e o ponto  $Q$  se situam na mesma projetante frontal, pelo que se tem imediatamente  $Q_2 \equiv O_2$ .

**1.2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.**

Em seguida, determinaram-se os pontos que o plano  $\varphi$  corta os contornos aparentes da esfera. O plano  $\varphi$  não corta o **contorno aparente frontal** da esfera, pois é paralelo ao plano que contém o contorno aparente frontal do sólido. O plano  $\varphi$  corta o **contorno aparente horizontal** da esfera (o círculo máximo horizontal da esfera) nos pontos  $A$  e  $A'$  – os pontos  $A$  e  $A'$  foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano  $\varphi$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal.

**1.3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.**

O raio da figura da secção (o círculo resultante da secção) é a distância do ponto  $Q$  a qualquer dos pontos  $A$  e  $A'$ .

**1.4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.**

Tendo em conta que o plano que contém a figura da secção (o plano  $\varphi$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, a figura da secção projeta-se em verdadeira grandeza em projeção frontal, pelo que não é necessária a determinação de quaisquer outros pontos da curva.

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ ) e com raio  $\overline{Q_2A_2} = \overline{Q_2A'_2}$ , desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a figura da secção. A projeção horizontal da figura da secção reduz-se a um segmento de reta (o segmento  $[A_1A'_1]$ ) sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

**2. Determinação da figura da secção que o plano  $\alpha$  produz na esfera:**

Em primeiro lugar representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. Tendo em conta que os dois planos secantes (o plano  $\varphi$  e o plano  $\alpha$ ) têm, em comum, um ponto pertencente ao contorno aparente horizontal da esfera e situado à esquerda do ponto  $O$ , esse ponto é necessariamente o ponto  $A$  (um dos pontos em que o plano  $\varphi$  corta o contorno aparente horizontal – o ponto mais à esquerda). Assim, o plano  $\alpha$  contém o ponto  $A$  – o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\alpha$ ) passa pela projeção horizontal do ponto  $A$  ( $A_1$ ).

A secção produzida por qualquer plano numa esfera será sempre um círculo – o centro desse círculo é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante e o raio do círculo é a distância desse ponto (o centro do círculo) a um dos pontos de interseção do plano secante com qualquer círculo máximo que contenha aquele raio.

A **determinação da figura da secção produzida na esfera** pelo plano  $\alpha$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

- 2.1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).
- 2.2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.
- 2.3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.
- 2.4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

**2.1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).**

A reta  $h$ , horizontal (de nível) é a reta que passa pelo ponto  $O$  (o centro da esfera) e é ortogonal ao plano  $\alpha$  (pois verifica o **critério de ortogonalidade entre retas e planos**) – a reta  $h$  é, assim, a reta que contém o raio da esfera que é ortogonal ao plano  $\alpha$ . Em seguida, determinou-se o centro do círculo resultante da secção, que é o ponto  $Q'$  – o ponto de interseção do plano  $\alpha$  (o plano secante) com a reta  $h$ . O ponto  $Q'$  foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal.

**2.2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.**

Em seguida, determinaram-se os pontos que o plano  $\alpha$  corta os contornos aparentes da esfera. O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente horizontal** da esfera (o círculo máximo horizontal da esfera) nos pontos  $A$  e  $D$  – o ponto  $A$  já havia sido determinado e o ponto  $D$  foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal.

O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente frontal** da esfera (o círculo máximo frontal da esfera) nos pontos  $B$  e  $C$  – os pontos  $B$  e  $C$  foram determinados de forma direta, a partir das respetivas projeções horizontais, pois o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal.

**2.3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.**

O raio da figura da secção (o círculo resultante da secção) é a distância do ponto  $Q'$  a qualquer dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou  $D$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**2.4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.**

Tendo em conta que o plano que contém a figura da secção (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (está deformada em ambas as projeções) – a **projeção horizontal** da figura da secção é um **segmento de reta** sobre o traço horizontal do plano  $\alpha$  (pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal) e a sua **projeção frontal** é necessariamente uma **elipse** (resultante da deformação do círculo em projeção frontal). Nesse sentido, o desenho da **elipse** que é a **projeção frontal do círculo** (e que é uma **curva de erro**), carece da determinação de oito pontos da curva, para um desenho relativamente preciso da curva à mão livre.

Ao contrário das **secções cónicas** e **secções cilíndricas**, nesta situação a figura da secção **não é uma elipse** – a figura da secção é um **círculo**, embora a sua projeção (frontal) seja uma **elipse**. Assim, a curva cónica (a **elipse**) não é a **figura da secção em si** mas, sim, a **sua projeção**, deformada pela situação da própria projeção.

Já temos **quatro pontos** para o desenho da curva – os pontos **A, B, C** e **D**. No entanto, o desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva requer um mínimo de **oito pontos**.

Para a determinação dos restantes pontos necessários ao desenho da **elipse** optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  (o plano secante) e pelo desenho prévio da figura da secção, em rebatimento. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou imediatamente a charneira, que foi o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ) – tem-se, imediatamente  $f_\alpha \equiv e_2 \equiv f_{\alpha_r}$ . Os planos ortogonais à charneira são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza em projeção horizontal e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo do rebatimento.

Efetou-se o rebatimento dos pontos **Q', A** e **D**, o que nos permitiu obter **Q'\_r, A\_r** e **D\_r**. Note que se rebateram os pontos **A** e **D**, pelo facto de **[AD]** ser um diâmetro da circunferência que delimita a figura da secção, mas não os pontos **B** e **C**, precisamente pelo facto de **[BC]** não ser nenhum diâmetro da circunferência. A figura da secção é um círculo com centro no ponto **Q'** e raio  $\overline{Q'A} = \overline{Q'D}$ . Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q'\_r** e com raio  $\overline{Q'_r A_r} = \overline{Q'_r D_r}$ , desenhou-se a figura da secção em rebatimento (em verdadeira grandeza).

Para determinar os elementos necessários ao desenho (à mão livre) da **elipse**, inscreveu-se a circunferência num quadrado de lados paralelos à charneira do rebatimento. Em seguida, desenharam-se as suas medianas (os segmentos paralelos aos lados e que passam pelo ponto **Q'\_r**) bem como as suas diagonais. Os pontos em que as medianas do quadrado (em rebatimento) se apoiam nos lados do quadrado são, imediatamente, **quatro pontos** da circunferência que nos permitirão o desenho da elipse – os pontos **A\_r, D\_r, E\_r** e **F\_r**.

**[E\_r, F\_r]** é, em rebatimento, o diâmetro da circunferência que é paralelo à charneira, pelo que não sofre qualquer deformação em projeção – **[EF]** projeta-se em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, a projeção frontal do diâmetro **[EF]** corresponderá ao **eixo maior** da elipse. **[A\_r, D\_r]** é, em rebatimento, o diâmetro da circunferência que é perpendicular à charneira, pelo que sofre a deformação máxima em projeção – **[AD]** projeta-se com a máxima redução em projeção frontal. Assim, a projeção frontal do diâmetro **[AD]** corresponderá ao **eixo menor** da elipse.

Por outro lado, a projeção frontal do quadrado (que será um retângulo) corresponderá ao retângulo envolvente da elipse, que nos permitirá ainda mais rigor no desenho da curva. Assim, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$  e, a partir das projeções frontais dos pontos **A, D, E** e **F**, desenhou-se o retângulo que é a projeção frontal do quadrado.

Os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado são mais **quatro pontos** cujas projeções frontais serão os **quatro pontos** em falta e que nos permitirão o desenho da curva da **elipse** com alguma precisão. Em projeção frontal, desenharam-se as diagonais do retângulo (que são as projeções frontais das diagonais do quadrado). Em seguida, transportaram-se, para as diagonais do retângulo, os pontos em que a circunferência (em rebatimento) corta as diagonais do quadrado – esse transporte processou-se com o recurso aos planos horizontais (de nível) que contêm os arcos do rebatimento daqueles pontos. Este procedimento permitiu-nos determinar mais **quatro pontos** para o desenho da **elipse**. A partir dos **oito pontos** determinados, procedeu-se ao desenho da curva (à mão livre), atendendo às situações de tangência da curva aos lados do retângulo acima referidas.

Salienta-se, ainda, que a **projeção frontal da figura da secção** (a **elipse**) é tangente ao contorno aparente frontal da esfera nos pontos **B<sub>2</sub>** e **C<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **B** e **C**). Salienta-se que os pontos **B** e **C** são os pontos em que o plano  $\alpha$  (o plano secante) corta o contorno aparente frontal da esfera.

### 3. Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir do desenho das duas figuras de secção (a secção produzida pelo plano  $\varphi$  e a secção produzida pelo plano  $\alpha$ ), foi possível desenhar as projeções **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte da esfera inicial), que é a parte do sólido que está compreendida entre os dois planos secantes (que é um “gomo” da esfera).

A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido resultante da secção é a linha curva fechada que integra o arco  $\overline{B_2 A_2 C_2}$  da elipse, bem como o **arco maior**  $B_2 C_2$  da projeção frontal do contorno aparente frontal da esfera. Note que **B<sub>2</sub>** e **C<sub>2</sub>** são os pontos em que a curva deixa de ser uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da esfera) e passa a ser uma elipse (a projeção frontal da figura da secção) – **B<sub>2</sub>** e **C<sub>2</sub>** são, assim, os pontos em que a elipse e a circunferência são tangentes entre si.

A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido resultante da secção é a linha mista fechada que integra os segmentos **[A<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]** e **[A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**, bem como o arco da projeção horizontal do contorno aparente horizontal da esfera que está compreendido entre aqueles dois segmentos de reta.

A **figura da secção**, que o plano  $\varphi$  produz na esfera, porque é **visível em projeção frontal** (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção frontal). Note que a figura da secção que o plano  $\alpha$  produz na esfera é invisível, em projeção frontal, pelo que não há lugar à sua identificação com tracejado.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Os diâmetros fronto-horizontais dos dois círculos máximos (que são meramente auxiliares) permitem relacionar as duas projeções da esfera – os pontos de maior e de menor abscissa do círculo máximo frontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizonta) são, também, os pontos de maior e de menor abscissa do círculo máximo horizontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizonta), o que se assinalou com as respetivas linhas de chamada.

### 1. Determinação da figura da secção que o plano $\nu$ produz na esfera

A secção produzida por qualquer plano numa esfera será sempre um **círculo** – o centro desse círculo é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante e o raio do círculo é a distância desse ponto (o centro do círculo) a um dos pontos de interseção do plano secante com qualquer círculo máximo que contenha aquele raio.

A **determinação da figura da secção produzida na esfera** pelo plano  $\nu$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que Em seguida, se apresentam:

- 1.1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).
- 1.2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.
- 1.3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.
- 1.4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

#### 1.1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).

Determinou-se o centro do **círculo**, que é o ponto **Q** – o ponto de interseção do plano  $\phi$  (o plano secante) com o raio da esfera que é ortogonal ao plano  $\nu$  (um raio vertical). Tenha em conta que o ponto **Q** é o ponto de interseção do plano  $\nu$  com o raio vertical (projetante horizontal) da esfera está compreendido entre o ponto **O** (o centro da esfera) e o ponto de menor cota da esfera. O ponto **Q** foi determinado de forma direta, pois tratou-se da interseção entre uma reta projetante horizontal (a reta suporte do diâmetro vertical da esfera) e um plano projetante frontal (o plano  $\nu$ ). Note que o ponto **O** e o ponto **Q** se situam na mesma projetante horizontal, pelo que se tem imediatamente  $\mathbf{Q}_1 \equiv \mathbf{O}_1$ .

#### 1.2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.

Em seguida, determinaram-se os pontos que o plano  $\nu$  corta os contornos aparentes da esfera. O plano  $\nu$  não corta o **contorno aparente horizontal** da esfera, pois é paralelo ao plano que contém o contorno aparente horizontal do sólido. O plano  $\nu$  corta o **contorno aparente frontal** da esfera (o círculo máximo frontal da esfera) nos pontos **A** e **B** – os pontos **A** e **B** foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções frontais, pois o plano  $\nu$  (o plano secante) é um plano projetante frontal.

#### 1.3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.

O raio da figura da secção (o **círculo** resultante da secção) é a distância do ponto **Q** a qualquer dos pontos **A** e **B**.

#### 1.4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

Tendo em conta que o plano que contém a figura da secção (o plano  $\nu$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, a figura da secção projeta-se em verdadeira grandeza em projeção horizontal, pelo que não é necessária a determinação de quaisquer outros pontos da curva.

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $\mathbf{Q}_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio  $\overline{\mathbf{Q}_1\mathbf{A}_1} = \overline{\mathbf{Q}_1\mathbf{B}_1}$ , desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a figura da secção. A projeção frontal da figura da secção reduz-se a um segmento de reta (o segmento  $[\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2]$ ) sobre o traço frontal do plano  $\nu$  ( $\mathbf{f}_\nu$ ), pois o plano  $\nu$  é um plano projetante frontal.

### 2. Determinação da figura da secção que o plano $\theta$ produz na esfera:

A secção produzida por qualquer plano numa esfera será sempre um **círculo** – o centro desse círculo é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante e o raio do círculo é a distância desse ponto (o centro do círculo) a um dos pontos de interseção do plano secante com qualquer círculo máximo que contenha aquele raio.

A **determinação da figura da secção produzida na esfera** pelo plano  $\theta$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que Em seguida, se apresentam:

- 2.1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).
- 2.2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.
- 2.3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.
- 2.4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

#### 2.1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).

A reta **f**, frontal (de frente) é a reta que passa pelo ponto **O** (o centro da esfera) e é ortogonal ao plano  $\theta$  (pois verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**) – a reta **f** é, assim, a reta que contém o raio da esfera que é ortogonal ao plano  $\theta$ . Em seguida, determinou-se o centro do **círculo** resultante da secção, que é o ponto **Q'** – o ponto de interseção do plano  $\theta$  (o plano secante) com a reta **f**. O ponto **Q'** foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal.

#### 2.2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.

Em seguida, determinaram-se os pontos que o plano  $\theta$  corta os contornos aparentes da esfera. O plano  $\theta$  corta o **contorno aparente frontal** da esfera (o círculo máximo frontal da esfera) nos pontos **C** e **D** – os pontos **C** e **D** foram determinados de forma direta, a partir das respetivas projeções frontais, pois o plano  $\theta$  (o plano secante) é um plano projetante frontal.

O plano  $\alpha$  corta o **contorno aparente horizontal** da esfera (o círculo máximo horizontal da esfera) nos pontos **E** e **F** – os pontos **E** e **F** foram determinados de forma direta, a partir das respetivas projeções frontais, pois o plano  $\theta$  (o plano secante) é um plano projetante frontal.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### 2.3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.

O raio da figura da secção (o círculo resultante da secção) é a distância do ponto  $Q'$  a qualquer dos pontos  $C$ ,  $D$ ,  $E$  ou  $F$ .

### 2.4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

Tendo em conta que o plano que contém a figura da secção (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (está deformada em ambas as projeções) – a **projeção frontal** da figura da secção é um **segmento de reta** sobre o traço frontal do plano  $\theta$  (pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal) e a sua **projeção horizontal** é necessariamente uma **elipse** (resultante da deformação do círculo em projeção horizontal). Nesse sentido, o desenho da **elipse** que é a **projeção horizontal do círculo** (e que é uma **curva de erro**), carece da determinação de oito pontos da curva, para um desenho relativamente preciso da curva à mão livre.

Ao contrário das **secções cónicas** e **secções cilíndricas**, nesta situação a figura da secção **não é uma elipse** – a figura da secção é um **círculo**, embora a sua projeção (horizontal) seja uma **elipse**. Assim, a curva cónica (a **elipse**) não é a **figura da secção em si** mas, sim, a **sua projeção**, deformada pela situação da própria projeção.

Já temos **quatro pontos** para o desenho da curva – os pontos  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ . No entanto, o desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva requer um mínimo de **oito pontos**.

Para a determinação dos restantes pontos necessários ao desenho da **elipse** optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  (o plano secante) e pelo desenho prévio da figura da secção, em rebatimento. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção, pelo que se identificou imediatamente a charneira, que foi o traço horizontal do plano ( $h_0$ ) – tem-se, imediatamente  $h_0 \equiv e_f \equiv h_{0r}$ . Os planos ortogonais à charneira são planos frontais (de frente), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza em projeção frontal e os pontos mantêm os seus afastamentos, ao longo do rebatimento.

Efetuu-se o rebatimento dos pontos  $Q'$ ,  $C$  e  $D$ , o que nos permitiu obter  $Q'_r$ ,  $C_r$  e  $D_r$ . Note que se rebateram os pontos  $C$  e  $D$ , pelo facto de  $[CD]$  ser um diâmetro da circunferência que delimita a figura da secção, mas não os pontos  $E$  e  $F$ , precisamente pelo facto de  $[EF]$  não ser nenhum diâmetro da circunferência. A figura da secção é um círculo com centro no ponto  $Q'$  e raio  $Q'C = Q'D$ . Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q'_r$  e com raio  $Q'_rC_r = Q'_rD_r$ , desenhou-se a figura da secção em rebatimento (em verdadeira grandeza).

Para determinar os elementos necessários ao desenho (à mão livre) da **elipse**, inscreveu-se a circunferência num quadrado de lados paralelos à charneira do rebatimento. Em seguida, desenharam-se as suas medianas (os segmentos paralelos aos lados e que passam pelo ponto  $Q'_r$ ) bem como as suas diagonais. Os pontos em que as medianas do quadrado (em rebatimento) se apoiam nos lados do quadrado são, imediatamente, **quatro pontos** da circunferência que nos permitirão o desenho da elipse – os pontos  $C_r$ ,  $D_r$ ,  $G_r$  e  $H_r$ .

$[G_rH_r]$  é, em rebatimento, o diâmetro da circunferência que é paralelo à charneira, pelo que não sofre qualquer deformação em projeção –  $[GH]$  projeta-se em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, a projeção horizontal do diâmetro  $[GH]$  corresponderá ao **eixo maior** da elipse.  $[C_rD_r]$  é, em rebatimento, o diâmetro da circunferência que é perpendicular à charneira, pelo que sofre a deformação máxima em projeção –  $[CD]$  projeta-se com a máxima redução em projeção horizontal. Assim, a projeção horizontal do diâmetro  $[CD]$  corresponderá ao **eixo menor** da elipse.

Por outro lado, a projeção horizontal do quadrado (que será um retângulo) corresponderá ao retângulo envolvente da elipse, que nos permitirá ainda mais rigor no desenho da curva. Assim, inverteu-se o rebatimento do plano  $\theta$  e, a partir das projeções horizontais dos pontos  $C$ ,  $D$ ,  $G$  e  $H$ , desenhou-se o retângulo que é a projeção horizontal do quadrado.

Os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado são mais **quatro pontos** cujas projeções horizontais serão os **quatro pontos** em falta e que nos permitirão o desenho da curva da **elipse** com alguma precisão. Em projeção horizontal, desenharam-se as diagonais do retângulo (que são as projeções horizontais das diagonais do quadrado). Em seguida, transportaram-se, para as diagonais do retângulo, os pontos em que a circunferência (em rebatimento) corta as diagonais do quadrado – esse transporte processou-se com o recurso aos planos frontais (de frente) que contêm os arcos do rebatimento daqueles pontos. Este procedimento permitiu-nos determinar mais **quatro pontos** para o desenho da **elipse**. A partir dos **oito pontos** determinados, procedeu-se ao desenho da curva (à mão livre), atendendo às situações de tangência da curva aos lados do retângulo acima referidas.

Salienta-se, ainda, que a **projeção horizontal da figura da secção** (a **elipse**) é tangente ao contorno aparente horizontal da esfera nos pontos  $E_1$  e  $F_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $E$  e  $F$ ). Salienta-se que os pontos  $E$  e  $F$  são os pontos em que o plano  $\theta$  (o plano secante) corta o contorno aparente horizontal da esfera.

### 3. Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir do desenho das duas figuras de secção (a secção produzida pelo plano  $v$  e a secção produzida pelo plano  $\theta$ ), foi possível desenhar as projeções **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte da esfera inicial), que é a parte do sólido que está compreendida entre os dois planos secantes (que é um “gomo” da esfera).

A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido resultante da secção é a linha curva fechada que integra o arco  $\overline{E_1C_1F_1}$  da elipse, bem como o **arco maior**  $F_1E_1$  da projeção horizontal do contorno aparente horizontal da esfera. Note que  $E_1$  e  $F_1$  são os pontos em que a curva deixa de ser uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da esfera) e passa a ser uma elipse (a projeção horizontal da figura da secção) –  $E_1$  e  $F_1$  são, assim, os pontos em que a elipse e a circunferência são tangentes entre si.

A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido resultante da secção é a linha mista fechada que integra os segmentos de reta  $[C_2D_2]$  e  $[A_2B_2]$ , bem como os arcos da projeção frontal do contorno aparente frontal da esfera que estão compreendidos entre aqueles dois segmentos de reta.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **figura da secção**, que o plano  $\theta$  produz na esfera, porque **é visível em projeção horizontal** (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo  $X$  (em projeção horizontal). Note que a figura da secção que o plano  $v$  produz na esfera é invisível, em projeção horizontal, pelo que não há lugar à sua identificação com tracejado.

#### Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções da esfera, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). Os traços dos planos secantes, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$ , para a determinação dos pontos necessários ao desenho da elipse). O tracejado que preenche a figura da secção que é visível em projeção horizontal executou-se a **leve**.

## 741.

#### Dados:

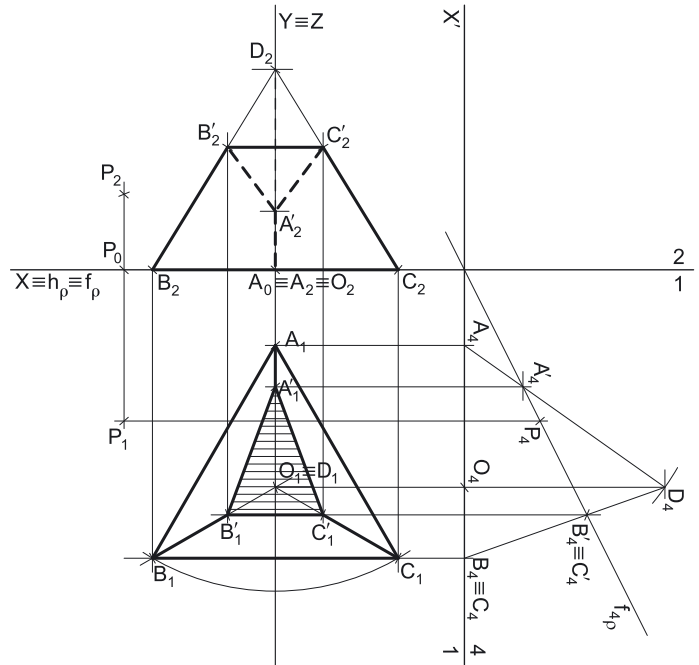
Em primeiro lugar representaram-se os pontos **A** e **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. O plano  $\rho$  (o plano secante) está representado pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **P**.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do tetraedro:

A face **[ABC]** do sólido está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, a partir de **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**), mediu-se (em verdadeira grandeza) o ângulo que o lado **[AB]** faz com o eixo  $X$ , o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta suporte do lado **[AB]**. Sobre essa reta mediram-se os 6,5 cm (a medida da aresta do tetraedro) e determinou-se **B<sub>1</sub>**, a projeção horizontal do ponto **B**.

A partir de **A<sub>1</sub>** e **B<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção frontal horizontal do triângulo **[ABC]**, garantindo-se que **B** é o vértice mais à esquerda da figura (como o enunciado pede expressamente). Determinou-se, também, o ponto **O**, o centro do triângulo. A projeção frontal do triângulo situa-se sobre no eixo  $X$ , pois a figura está contida no Plano Horizontal de Projeção (todos os pontos têm cota nula).



Um tetraedro toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**, qualquer que seja a face que se considere como base. Neste caso, considerou-se a face dada (o triângulo **[ABC]**), que está contida no Plano Horizontal de Projeção. Assim, o vértice **D** (o quarto vértice do sólido) situa-se numa reta que passa pelo ponto **O** (o centro dessa face) e que é ortogonal ao plano que contém o triângulo **[ABC]** (o Plano Horizontal de Projeção), ou seja, os dois pontos situam-se numa mesma reta vertical (projetante horizontal), pelo que os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes – tem-se, imediatamente, **D<sub>1</sub> ≡ O<sub>1</sub>**.

Apesar de o tetraedro tomar a forma aparente de uma pirâmide triangular regular, não é conhecida a altura dessa pirâmide mas, sim, é adquirido o facto de que **todas as arestas de um tetraedro são iguais** (têm o mesmo comprimento), pois trata-se de um **poliedro regular**. Assim, é um facto que todas as arestas que convergem no vértice **D** (as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]**) têm o mesmo comprimento dos lados do triângulo **[ABC]** (que estão em verdadeira grandeza em projeção horizontal). No entanto, nenhuma daquelas arestas se projeta em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de projeção, pois nenhuma daquelas três arestas é paralela a qualquer dos planos de projeção. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, há que ter em conta que a presente situação se trata da **secção produzida num sólido por um plano não projetante**, situação que tem uma resolução muito simplificada caso se recorra a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar o plano secante (que é um plano não projetante) num plano projetante. Assim, de forma a resolver as duas situações de uma só vez (o recurso a um processo geométrico auxiliar para a determinação das projeções do tetraedro e o recurso a uma mudança do diedro de projeção para a determinação da secção), optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção.

Por outro lado, com vista a uma maior economia de traçados, na mudança do diedro de projeção a efetuar há que manter o plano de projeção no qual a base do sólido (a face **[ABC]**, neste caso) se projete em verdadeira grandeza. Assim, na mudança do diedro de projeção a efetuar há que manter o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) e substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**).

Por outro lado, ainda, a mudança do diedro de projeção tem de ser escolhida de forma criteriosa, de forma a, numa mesma mudança do diedro de projeção, ser possível representar uma das arestas **[AD]**, **[BD]** ou **[CD]** em verdadeira grandeza e, em simultâneo, ser possível transformar o plano  $\rho$  num plano projetante. Tendo em conta que a aresta **[AD]** é de perfil e, por isso, perpendicular a  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) em projeção horizontal, substitui-se o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo à aresta **[AD]** – o **plano 4** será, igualmente, ortogonal a plano  $\rho$ , o que, como atrás se referiu, cumprirá os dois objetivos com uma única mudança do diedro de projeção.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à aresta **[AD]**, o eixo **X'** é paralelo à projeção horizontal da aresta (é paralelo a **[A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**). Por outro lado, como atrás se referiu, e porque o **plano 4** é também ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é necessariamente perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  (**h<sub>p</sub>**), que se situa no eixo **X** inicial, pelo que o eixo **X'** é perpendicular ao eixo **X** inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 1**), o plano  $\rho$  é um plano de topo (um plano projetante frontal).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a aresta **[AD]** é frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal (no **plano 4**). Assim, há que representar essa aresta no **plano 4** para, em seguida, ser possível concluir a construção das projeções do tetraedro.

**A<sub>4</sub>** e **O<sub>4</sub>** são as projeções dos pontos **A** e **O** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se em função das suas cotas, que se mantiveram – como os pontos têm cota nula, as suas projeções no **plano 4** situam-se no eixo **X'**. A linha de chamada do ponto **D** corresponde à linha de chamada do ponto **O** (porque os dois pontos se situam na mesma reta projetante horizontal). Assim, e atendendo a que a aresta **[AD]** está em verdadeira grandeza em projeção frontal, com o compasso, fazendo centro em **A<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **A** no **plano 4**) e com 6,5 cm de raio (a medida da aresta do tetraedro), determinou-se **D<sub>4</sub>** (a projeção do ponto **D** no **plano 4**). Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do ponto **D** (**D<sub>2</sub>**), em função da sua cota, que se manteve – a distância de **D<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **D<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

Finalmente, a partir das projeções dos quatro vértices do tetraedro, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o triângulo **[BCD]** (que, na prática, é a face **[BCD]** do sólido), cuja projeção frontal é o triângulo **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este, por ser o vértice de **menor afastamento** do tetraedro, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem, ou seja, as arestas **[AB]**, **[AC]** e **[AD]** são invisíveis em projeção frontal. No entanto, as arestas **[AB]** e **[AC]** estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar refere-se à da aresta **[AD]**.

O **contorno aparente horizontal** é o triângulo **[ABC]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **D**. Este, por ser o vértice de **maior cota** do tetraedro, é **visível** (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que nele convergem, ou seja, as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]** são visíveis em projeção horizontal.

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. No entanto, tendo-se recorrido previamente a uma **mudança do diedro de projeção** para se determinarem as projeções do sólido, essa mudança do diedro de projeção teve, também como propósito (e como oportunamente se referiu), a transformação do plano  $\rho$  num plano projetante. Assim, e como já exposto, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano de topo (um plano projetante frontal).

Em seguida, determinou-se a projeção do tetraedro no **plano 4**, o que se processa a partir das projeções de todos os seus vértices. Já tínhamos as projeções (no **plano 4**) de dois dos vértices do tetraedro – os vértices **A** e **D**. Assim, determinaram-se as projeções dos pontos **B** e **C** no **plano 4**, em função das respetivas cotas (que se mantiveram). **B<sub>4</sub>** e **C<sub>4</sub>** são as projeções dos pontos **B** e **C** no **plano 4** (respetivamente) e situam-se no eixo **X'**, pois os pontos têm cota nula (que se manteve). Este procedimento permitiu-nos desenhar a projeção, no **plano 4**, do tetraedro.

Por fim, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** – **f<sub>4p</sub>**. Para tal recorreu-se ao ponto **P**, o ponto que define o plano  $\rho$ . **P<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **P** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **P<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **P<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 2 cm – a cota de **P**). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** (**f<sub>4p</sub>**) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com **h<sub>p</sub>** (que se situa no eixo **X'**) e **P<sub>4</sub>** (a nova projeção frontal do ponto **P**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta três arestas do tetraedro – as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]**. Assim, a figura da secção tem **três vértices**, pelo que é um **triângulo**. Sublinha-se que, apesar de a figura da secção ser um triângulo, não é um **triângulo equilátero**, pois o plano  $\rho$  não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano que contém a face **[ABC]**) nem paralelo ao plano que contenha qualquer outra face do sólido).

Salienta-se que as arestas **[BD]** e **[CD]** têm as suas projeções frontais (no **plano 4**) coincidentes, mas, de facto, o plano secante corta aquelas duas arestas (cuja novas projeções frontais estão coincidentes) e não apenas uma única aresta (o que, nesta situação, seria impossível).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **três vértices da figura da secção no plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\rho$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Assim, o ponto **A'** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AD]**, o ponto **B'** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[BD]** e, por fim, o ponto **C'** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[CD]**. Em seguida, determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **A'**, **B'** e **C'** (os três vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções horizontais daqueles pontos (no **plano 1**), foi possível determinar as suas projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto **B'** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[BD]**, pelo que a sua projeção frontal (**B'<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[BD]** (**[B<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**). O ponto **C'** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[CD]**, pelo que a sua projeção frontal (**C'<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[CD]** (**[C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto  $A'$  é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta  $[AD]$ , que é uma aresta de perfil – as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Assim, não é possível, de forma direta, determinar a projeção frontal do ponto  $A'$  ( $A'_2$ ), sobre a projeção frontal da aresta  $[AD]$ . No entanto, na mudança do diedro de projeção efetuada, mantiveram-se as cotas, pelo que o ponto  $A'$  mantém a sua cota. Assim, determinou-se a projeção frontal do ponto  $A$  ( $A'_2$ ), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $A'_2$  ao eixo  $X$  é igual a distância de  $A'_4$  ao eixo  $X'$ .

Em seguida, desenharam-se as projeções da figura da secção.

*Determinação das projeções do sólido resultante da secção:*

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco do tetraedro – o tronco do tetraedro compreendido entre o plano  $\rho$  (o plano secante) e o Plano Horizontal de Projeção. Assim, a base inferior desse novo sólido é o triângulo  $[ABC]$  e a sua face superior é o triângulo  $[A'B'C']$  (a figura da secção).

O **contorno aparente frontal** é o quadrilátero  $[BCC'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices  $A$  e  $A'$ . Estes dois vértices são os vértices de **menor afastamento** do sólido, pelo que são invisíveis, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AC]$  (da base  $[ABC]$ ), as arestas  $[A'B']$  e  $[A'C']$  (da face  $[A'B'C']$ ) e ainda a aresta lateral  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$  e  $[AC]$  estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, as invisibilidades a assinalar são as referentes às arestas  $[A'B']$ ,  $[A'C']$  e  $[AA']$ .

O **contorno aparente horizontal** é o triângulo  $[ABC]$ , cuja projeção horizontal é o triângulo  $[A_1B_1C_1]$ . Em projeção horizontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ . Estes vértices, por serem os vértices de **maior cota** do sólido, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[A'B']$ ,  $[A'C']$  e  $[B'C']$  (da face  $[A'B'C']$ ) e as arestas laterais  $[AA']$ ,  $[BB']$  e  $[CC']$ .

A **figura da secção** é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal apenas), pelo que se assinalou esse facto preenchendo ambas a sua projeção horizontal com tracejado.

**Traçado:**

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\rho$ ), sendo dados e porque se situam no eixo  $X$ , ficam a **médio**, que foi a expressividade utilizada para o eixo  $X$ . As projeções do tetraedro, apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o **sólido resultante da secção**). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção, para a construção das projeções do tetraedro e para a determinação da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 742.

**Dados:**

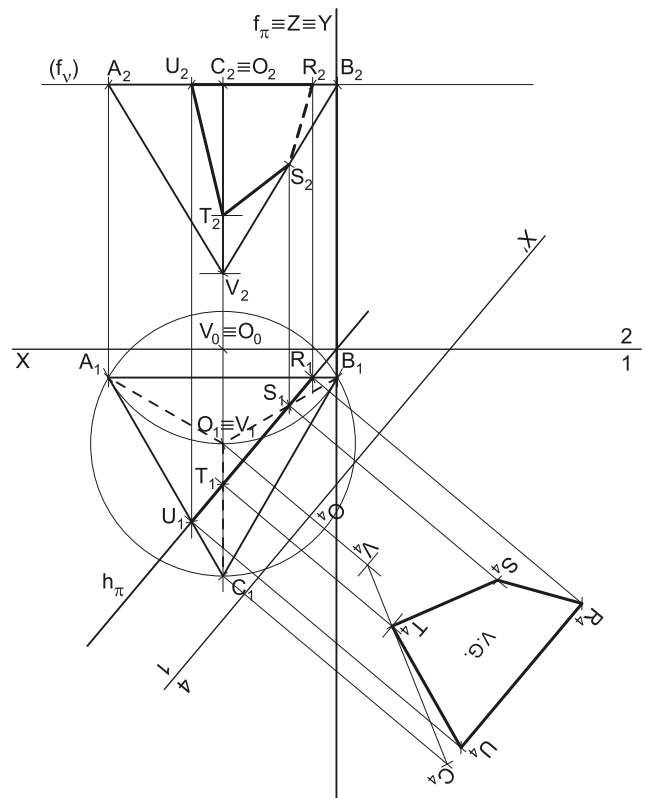
Em primeiro lugar representaram-se os pontos  $V$  e  $C$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa necessariamente pela projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\pi$  (o plano secante) pelos seus traços.

**Resolução:**

*Determinação das projeções da pirâmide:*

Trata-se de uma **pirâmide regular**, cuja base é horizontal, pelo que o ponto  $O$  (o centro da base) e o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) se situam necessariamente na mesma reta projetante horizontal, pois o eixo da pirâmide está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta vertical). Nesse sentido, tem-se imediatamente  $O_1 \equiv V_1$ . Por outro lado, o ponto  $O$  é o centro da circunferência circunscrita à base, pelo que o ponto  $O$  pertence ao plano  $v$ , que é um plano projetante frontal. Assim, a projeção frontal do ponto  $O$  ( $O_2$ ) situa-se necessariamente sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ).

A base da pirâmide (o triângulo  $[ABC]$ ) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e raio até  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao triângulo e efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do triângulo. A projeção frontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Sublinha-se que o enunciado é omissivo em relação à posição dos pontos  $A$  e  $B$ , pelo que se optou por considerar que  $A$  é o vértice de maior abscissa da base (mas poderia ter sido o contrário).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, a partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide, desenharam-se as suas duas projeções.

O **contorno aparente frontal** da pirâmide é a linha fechada  $[ACBV]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2C_2B_2V_2]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta  $[AB]$  da base é invisível, por se situar na parte invisível do sólido (separa duas faces do sólido que são invisíveis em projeção frontal – a base e a face lateral  $[ABV]$ ). Já a aresta lateral  $[CV]$  é visível (como o enunciado refere expressamente), por se situar na parte visível do sólido (note que o vértice  $C$  é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

O **contorno aparente horizontal** é o triângulo  $[ABC]$ , cuja projeção horizontal é o triângulo  $[A_1B_1C_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice  $V$ . Este, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas laterais  $[AV]$ ,  $[BV]$  e  $[CV]$ .

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\pi$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não** é um polígono semelhante ao triângulo da base da pirâmide. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\pi$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas laterais do sólido (as arestas  $[BV]$  e  $[CV]$ ), cortando ainda a base em duas das suas arestas (as arestas  $[AB]$  e  $[AC]$ ). Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas do sólido (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano  $\pi$ ). O plano  $\pi$  corta a aresta  $[AB]$  da base no ponto  $R$ , que foi determinado diretamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano  $\pi$  corta a aresta lateral  $[BV]$  no ponto  $S$ , que foi determinado diretamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano  $\pi$  corta a aresta  $[AC]$  da base no ponto  $U$ , que foi determinado diretamente, a partir da sua projeção horizontal.

O plano  $\pi$  corta a aresta lateral  $[CV]$  no ponto  $T$  – no entanto, a aresta lateral  $[CV]$  é de perfil, pelo que as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Assim, não é possível determinar, de forma direta, a projeção frontal do ponto  $T$  – o ponto  $T$  é, assim, um **ponto “problemático”** da secção que o plano  $\pi$  produz no tetraedro. Nesse sentido, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar (o **rebatimento do plano de perfil** que contém a aresta, por exemplo) ou a um raciocínio auxiliar (o recurso ao **método dos planos paralelos à base**).

Optou-se pelo recurso a um processo geométrico auxiliar mas, em alternativa ao **rebatimento do plano de perfil**, optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção. Por outro lado, uma vez que também é pedida a verdadeira grandeza da secção, optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção que nos permita atingir os dois objetivos de uma só vez – a determinação da projeção frontal do ponto  $T$  e a determinação da verdadeira grandeza da secção.

Por outro lado, com vista a uma maior economia de traçados, na mudança do diedro de projeção a efetuar há que manter o plano de projeção no qual a base do sólido (a base  $[ABC]$ , neste caso) se projete em verdadeira grandeza. Assim, na mudança do diedro de projeção a efetuar há que manter o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) e substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**). Por outro lado, ainda, convirá que o novo plano de projeção (o **plano 4**) seja paralelo ao plano  $\pi$ , de forma a que a figura de secção se projete em verdadeira grandeza nesse plano de projeção.

Assim, há que substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo ao plano  $\pi$ . Nesse sentido, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é paralelo ao plano  $\pi$ , o eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ) é paralelo ao traço horizontal do plano  $\pi$  (é paralelo a  $h_\pi$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 1**), o plano  $\pi$  é um plano frontal (de frente).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a aresta  $[CV]$  já não é uma aresta de perfil, pelo que as suas projeções já verificam o **Critério de Reversibilidade**. Assim, há que representar essa aresta no **plano 4** para, em seguida, ser possível determinar as projeções do ponto  $T$ .

$C_4$  é a projeção do ponto  $C$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $C_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $C_2$  ao eixo  $X$  (que é 7 cm – a cota de  $C$ ).  $V_4$  é a projeção do ponto  $V$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $V_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $V_2$  ao eixo  $X$  (que é 2 cm – a cota de  $V$ ). Em seguida, desenhou-se o segmento  $[C_4V_4]$ , que é a projeção, no **plano 4**, da aresta  $[CV]$ . Por fim, a partir da projeção horizontal do ponto  $T$  ( $T_1$ ), foi possível determinar  $T_4$  (a projeção do ponto  $T$  no **plano 4**), sobre  $[C_4V_4]$ . Por fim, atendendo a que, na mudança do diedro de projeção efetuada, se mantiveram as cotas, o ponto  $T$  mantém a sua cota. Assim, determinou-se a projeção frontal do ponto  $T$  ( $T_2$ ), em função da sua cota, que se manteve – a distância de  $T_2$  ao eixo  $X$  é igual a distância de  $T_4$  ao eixo  $X'$ .

A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrilátero). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Uma vez que o plano secante (o plano  $\pi$ ) é um plano projetante horizontal, a projeção horizontal da figura da secção reduz-se a um segmento de reta, pelo que não há lugar à representação de quaisquer invisibilidades (em projeção horizontal).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – a face lateral [ABV]. Assim, o lado da figura da secção que se situa naquela face lateral é **invisível**, em projeção frontal (o lado [RS]). Os lados [ST] e [TU] da figura da secção são **visíveis**, em projeção frontal, por se situarem em faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (as faces laterais [BCV] e [ACV], respetivamente). Salienta-se que o lado [RU] da figura da secção, que está contido numa face do sólido que é projetante frontal (a base [ABC]), apesar de ser invisível, está oculto por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (pois o plano que a contém é um plano projetante frontal).

**Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:**

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\pi$ ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano  $\pi$ ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Nesse sentido, e como atrás se referiu, na mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação das projeções do ponto **T**), optou-se por garantir que o novo plano de projeção (o **plano 4**) era paralelo ao plano  $\pi$ , pelo que a figura da secção se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4**. De facto, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\pi$  é paralelo ao **plano 4**, pelo que a figura da secção se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4**.

Assim, determinaram-se as projeções (no **plano 4**) dos restantes três vértices da figura da secção (a projeção do ponto **T** no **plano 4** já é conhecida), em função das respetivas cotas, que se mantiveram.  $R_4$  é a projeção do ponto **R** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $R_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $R_2$  ao eixo  $X$ .  $S_4$  é a projeção do ponto **S** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $S_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $S_2$  ao eixo  $X$ .  $U_4$  é a projeção do ponto **U** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $U_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $U_2$  ao eixo  $X$ . Note que os pontos **R** e **U** têm necessariamente a mesma cota, pois ambos situam na base da pirâmide.

Por fim, desenhou-se o quadrilátero definido por  $R_4, S_4, T_4$  e  $U_4$  – o quadrilátero  $[R_4S_4T_4U_4]$  é a projeção (no **plano 4**) do quadrilátero  $[RSTU]$  e está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho.

**Traçado:**

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$  (que é a linha estruturante do exercício). As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da **figura da secção** (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção da projeção horizontal do triângulo, dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada quer para a determinação da projeção frontal do ponto **T**, quer para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

## 743.

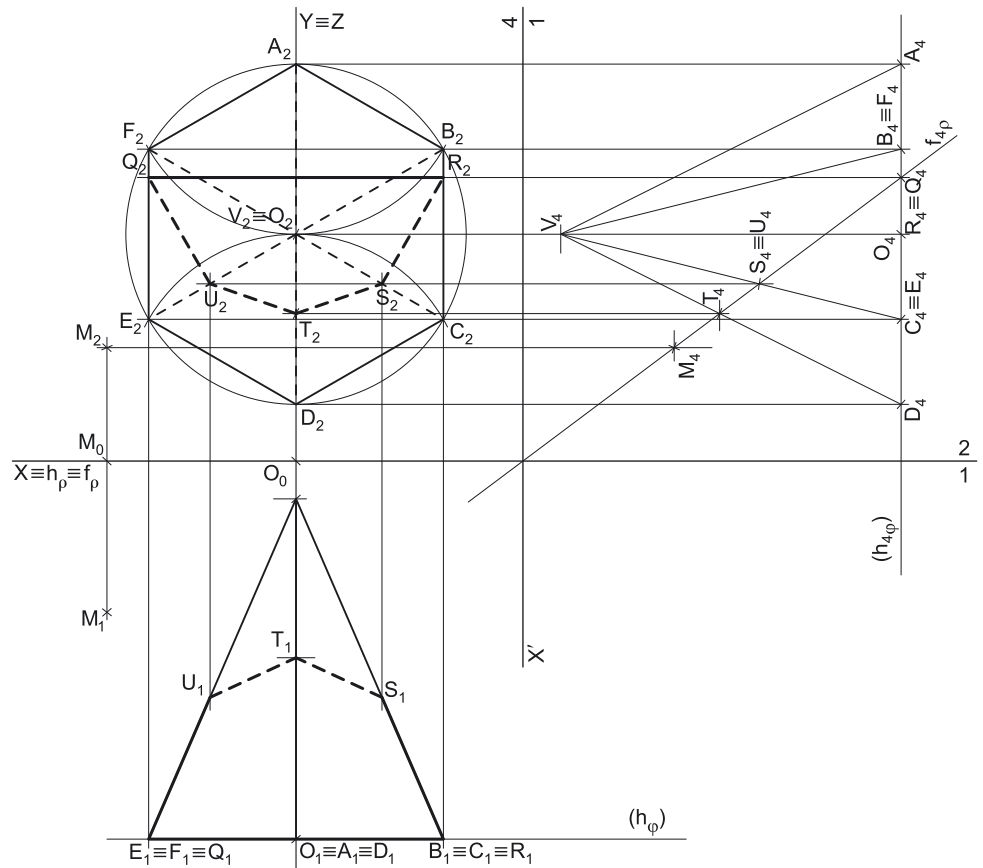
**Dados:**

Em primeiro lugar representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço horizontal, em função do seu afastamento. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar os pontos **O** e **M**, pelas respetivas projeções. O ponto **O** pertence ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, pelo que a sua projeção horizontal ( $O_1$ ) se situa sobre o traço horizontal do plano ( $h_\varphi$ ). O plano  $\rho$  (o plano secante) está representado pelo eixo  $X$  (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **M**.

**Resolução:**

**Determinação das projeções da pirâmide:**

A base da pirâmide (o hexágono [ABCDEF]) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 4,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao hexágono.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Trata-se de uma **pirâmide regular**, cuja base é frontal (de frente), pelo que o ponto **O** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice da pirâmide) se situam necessariamente na mesma reta projetante frontal, pois o eixo da pirâmide está contido numa reta ortogonal ao plano da base (uma reta de topo). Nesse sentido, tem-se imediatamente  $V_2 \equiv O_2$ . Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção frontal da figura, de acordo com os dados. Tendo em conta que duas das arestas laterais da pirâmide são de perfil, sabe-se que dois dos vértices da pirâmide têm a mesma abcissa do ponto **V** (e do ponto **O**), o que nos permitiu identificar a posição do hexágono.

Após a construção da projeção frontal do hexágono, nomearam-se os seus vértices de forma arbitrária (o enunciado é omissivo), mas sequencial. Nesse sentido, considerou-se que o vértice **A** é o vértice de maior cota da figura e que os pontos **B** e **C** são os seus vértices mais à direita. Nesse sentido, as arestas de perfil da pirâmide serão as arestas **[AV]** e **[DV]**. A projeção horizontal do hexágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do vértice ao plano da base o que, neste caso, é a diferença entre os afastamentos do plano da base e do vértice da pirâmide. Ora, uma vez que a pirâmide tem 9 cm de altura e que o plano da base tem 10 cm de afastamento (o afastamento dado no enunciado), e atendendo a que as arestas laterais da pirâmide são todas invisíveis em projeção frontal (como o enunciado refere expressamente), o vértice da pirâmide tem afastamento inferior ao plano  $\varphi$ . Nesse sentido, o vértice da pirâmide tem 1 cm de afastamento ( $10 - 9 = 1$ ), o que nos permitiu determinar **V<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os sete vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o hexágono **[ABCDEF]**, cuja projeção frontal é o hexágono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – todas as arestas laterais da pirâmide são invisíveis em projeção frontal (como o enunciado refere expressamente).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABVF]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>V<sub>1</sub>F<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **C**, **D** e **E**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[BC]**, **[CD]**, **[DE]** e **[EF]**, da base, e as arestas laterais **[CV]**, **[DE]** e **[EV]**. No entanto, todas estas arestas ou são projetantes horizontais ou estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar. Já a aresta lateral **[AV]** é visível, em projeção horizontal, pois separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção horizontal (o vértice **A** é o vértice de maior cota da pirâmide).

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projeção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida numa pirâmide por um plano não projetante**) numa **secção produzida numa pirâmide por um plano projetante**.

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual a base da pirâmide se projeta em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, a base projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, que, assim, deverá ser o plano de projeção a manter.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\rho$ , de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte: – no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), ou seja, ortogonal ao eixo **X** inicial. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano vertical (um plano projetante horizontal).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos sete vértices da pirâmide no **plano 4** o que se processa a partir dos respetivos afastamentos. **A<sub>4</sub>**, **B<sub>4</sub>**, **C<sub>4</sub>**, **D<sub>4</sub>**, **E<sub>4</sub>** e **F<sub>4</sub>** são, assim, as projeções dos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se dos respetivos afastamentos, que se mantêm – a distância de **A<sub>4</sub>**, **B<sub>4</sub>**, **C<sub>4</sub>**, **D<sub>4</sub>**, **E<sub>4</sub>** e **F<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **A<sub>1</sub>**, **B<sub>1</sub>**, **C<sub>1</sub>**, **D<sub>1</sub>**, **E<sub>1</sub>** e **F<sub>1</sub>** ao eixo **X**, que é 10 cm (o afastamento do plano  $\varphi$ ). Representou-se, ainda, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** ( $h_{4\rho}$ ), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices do hexágono **[ABCDEF]**. O plano  $\varphi$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano frontal (de frente), pelo que continua a ser um plano projetante horizontal.

**V<sub>1</sub>** é a projeção do ponto **V** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **V<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **V<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 1 cm – o afastamento de **V**). A partir das projeções dos sete vértices da pirâmide no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, tendo em conta que, na projeção da pirâmide no **plano 4**, não existe qualquer invisibilidade a assinalar (todas as arestas invisíveis estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** – **h<sub>4\rho</sub>**. Para tal recorreu-se ao ponto **M**, que é o ponto que define o plano  $\rho$ . **M<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **M** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **M<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **M<sub>1</sub>** ao eixo **X** (que é 4 cm – o afastamento de **M**). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante horizontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** (**h<sub>4\rho</sub>**) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $f_\rho$  (que se situa no eixo **X'**) e **M<sub>4</sub>** (a nova projeção horizontal do ponto **M**).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta três arestas laterais da pirâmide (as arestas [CV], [DV] e [EV]), cortando a base da pirâmide em duas das suas arestas (as arestas [BC] e [EF]), pelo que a figura da secção tem **cinco vértices** – é um **pentágono**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices da figura da secção no plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\rho$  (o plano secante) é um plano projetante horizontal. Assim, o ponto **R** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta [BC] (da base), o ponto **S** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral [CV], o ponto **T** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral [DV], o ponto **U** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral [EV] e, por fim, o ponto **Q** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta [EF] (da base).

Note que os pontos **R** e **Q** (determinados diretamente a partir das suas projeções no **plano 4**) têm as suas projeções horizontais (no **plano 4**) coincidentes, pois as projeções horizontais (no **plano 4**) das duas arestas a que pertencem (as arestas [BC] e [EF]) também estão coincidentes. No entanto, sublinha-se que o plano  $\rho$  corta a base nas duas arestas referidas e não apenas numa delas, o que seria impossível. De forma semelhante, os pontos **S** e **U** (determinados também a partir das suas projeções no **plano 4**) têm as suas projeções horizontais (no **plano 4**) coincidentes, pois as projeções horizontais (no **plano 4**) das duas arestas a que pertencem (as arestas [CV] e [EV]) também estão coincidentes. No entanto, ressalta-se o facto de que o plano  $\rho$  corta as duas arestas referidas e não apenas uma delas.

Em seguida, determinaram-se as projeções frontais (no **plano 2**) dos pontos **Q, R, S, T** e **U** (os cinco vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções frontais daqueles pontos (no **plano 2**), foi possível determinar as suas projeções horizontais (no **plano 1**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto **Q** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta [EF], pelo que a sua projeção horizontal ( $Q_1$ ) se situa sobre a projeção horizontal da aresta [EF] (que é projetante horizontal – a sua projeção horizontal reduz-se a um único ponto). O ponto **R** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta [BC], pelo que a sua projeção horizontal ( $R_1$ ) se situa sobre a projeção horizontal da aresta [BC] (que é projetante horizontal – a sua projeção horizontal reduz-se a um único ponto). O ponto **S** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta [CV], pelo que a sua projeção horizontal ( $S_1$ ) se situa sobre a projeção horizontal da aresta [CV] ( $(C_1V_1)$ ). O ponto **U** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta [EV], pelo que a sua projeção horizontal ( $U_1$ ) se situa sobre a projeção horizontal da aresta [EV] ( $(E_1V_1)$ ).

Note que os raciocínios acima expostos não podem ser utilizados para determinar a projeção horizontal do ponto **T**, pois o ponto **T** pertence à aresta lateral [DV], que é de perfil e, por isso mesmo, as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Assim, não é possível, de forma direta, determinar a projeção horizontal do ponto **T** ( $T_1$ ), sobre a projeção horizontal da aresta [DV]. No entanto, na mudança do diedro de projeção efetuada, mantiveram-se os afastamentos, pelo que o ponto **T** mantém o seu afastamento. Assim, determinou-se a projeção horizontal do ponto **T** ( $T_1$ ), em função do seu afastamento, que se manteve – a distância de  $T_1$  ao eixo **X** é igual a distância de  $T_4$  ao eixo **X'**.

Em seguida, a partir das projeções dos cinco vértices da figura da secção, desenharam-se as suas projeções. O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas). Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é perdida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Todas as faces laterais da pirâmide são invisíveis em projeção frontal (apenas a base é visível, em projeção frontal). Assim, os lados [RS], [ST], [TU] e [QU], porque estão contidos nas faces laterais da pirâmide, são invisíveis, em projeção frontal. Já o lado [QR] da figura da secção, que está contido na base, é o único lado da figura da secção que é visível, em projeção frontal.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais [BCV], [CDV], [DEV] e [EFV]. Assim, os (quatro) lados da figura da secção que se situam naquelas faces laterais são **invisíveis**, em projeção horizontal (os lados [RS], [ST], [TU] e [QU]). No entanto, os lados [RS] e [QU] da figura da secção, que estão contidos em faces do sólido que são projetantes horizontais (as faces [BCV] e [EFV], respetivamente), apesar de serem invisíveis, estão ocultos por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (pois os planos que as contêm são planos projetantes horizontais). Salienta-se que também o lado [QR] da figura da secção, que está contido numa outra face do sólido que também é projetante horizontal (a base [ABCDEF]), apesar de ser invisível, está igualmente oculto por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (pois o plano que a contém é um plano projetante horizontal).

#### Traçado:

As projeções da pirâmide, porque integram os dados, representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano  $\rho$ ), sendo dados e porque se situam no eixo **X**, ficam a **médio**, que foi a expressividade utilizada para o eixo **X**. As duas projeções da **figura da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção da projeção frontal do hexágono, dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada quer para a determinação da figura da secção).



## 744.

### Dados:

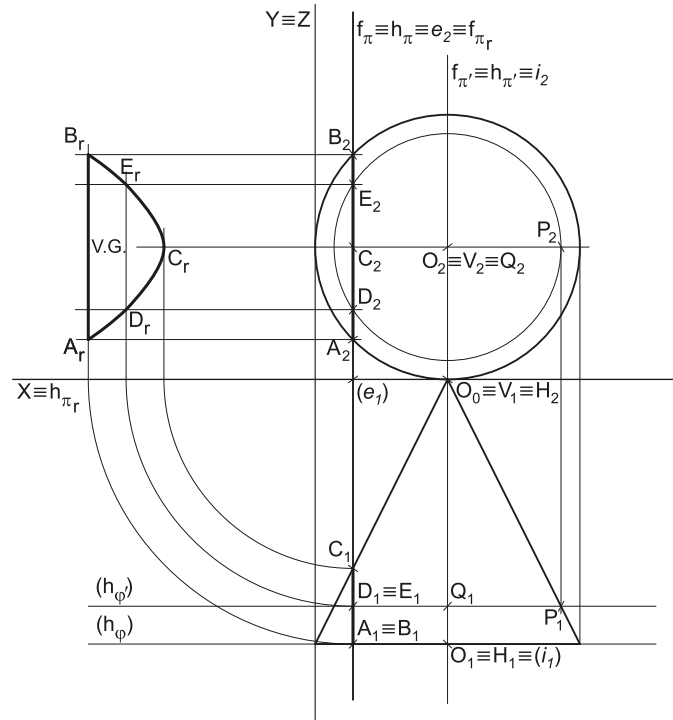
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou com o recurso a parêntesis. Por fim representou-se, também, o plano  $\pi$ , o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados).

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a base do sólido (e que é necessariamente tangente ao eixo  $Y \equiv Z$ , pois o raio da circunferência é igual à abscissa do ponto **O**, em valor absoluto). A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, uma reta de topo (uma reta projetante frontal) – assim, tem-se imediatamente  $V_2 \equiv O_2$  (os dois pontos situam-se na mesma projetante frontal).



Por outro lado, o cone tem 7 cm de altura, que é a distância do seu vértice ao plano da base, ou seja, neste caso é a diferença entre os afastamentos do vértice e do plano da base. Por outro lado, o vértice do cone é invisível em projeção frontal (é dado no enunciado), pelo que o vértice do cone tem afastamento inferior ao plano  $\varphi$ . Tendo em conta que o plano da base (o plano  $\varphi$ ) tem 7 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**), o vértice do cone (o ponto **V**) tem necessariamente afastamento nulo ( $7 - 7 = 0$ ). Este raciocínio permitiu-nos determinar  $V_1$ , a projeção horizontal do ponto **V** (que se situa no eixo **X**).

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

Tendo em conta que o plano  $\pi$  (o plano secante) é um plano duplamente projetante, a determinação das **projeções da figura da secção** é imediata – estão sobre os traços do plano  $\pi$ , na parte correspondente de cada um dos traços que se situa sobre a respetiva projeção do cone. Assim, caso o pedido no exercício se limitasse às **projeções da figura da secção**, o exercício teria uma resolução simples e imediata, sem quaisquer outros traçados, para além de se assinalar, a **forte**, as **duas projeções da figura**. No entanto, é pedida, também, a verdadeira grandeza da figura, ou seja, na prática será necessário desenhar a curva resultante da cónica, pelo que a sequência do exercício tem de ser semelhante à dos restantes exercícios sobre **secções cónicas**.

Assim, a **determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano  $\pi$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

#### 1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\pi$  no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

**A.** Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano  $\pi$ ). O plano  $\pi'$  é o plano paralelo ao plano  $\pi$  que se conduziu pelo vértice **V** do cone (é o plano de perfil). O plano  $\pi'$  é um plano duplamente projetante, pelo que os seus traços passam pelas projeções homónimas do ponto **V**. Por outro lado, os traços do plano  $\pi'$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\pi'$ ) são paralelos aos traços homónimos do plano  $\pi$  (que são duas retas concorrentes do plano  $\pi$ ), pelo que se verifica o **critério de paralelismo entre planos**.

**B.** Determinou-se a reta de interseção do plano  $\pi'$  com o plano da base do cone (o plano  $\varphi$ ) – a reta  $i$ . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Os planos  $\pi'$  e  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única “família” de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é uma reta dessa única “família” de retas que os dois planos têm em comum. Tanto o plano  $\pi'$  como o plano  $\varphi$  são planos projetantes horizontais, pelo que a única “família” de retas que os dois planos têm em comum é a “família” das retas projetantes horizontais (as retas verticais). Assim, já temos a direção da reta  $i$ . Falta-nos um ponto. A reta  $i$  pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que o seu traço horizontal (o ponto **H**) se situa sobre os traços horizontais dos dois planos (o ponto **H** é o ponto de concorrência dos traços horizontais dos dois planos) – já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ . A reta  $i$  está, assim, definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (é uma reta projetante horizontal).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**C.** Analisa-se a posição da reta de intersecção em relação à base do cone. A reta  $l$  é secante à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano  $\pi$  é uma **hipérbole** (ou, mais corretamente, um **ramo de uma hipérbole**, pois o cone é limitado lateralmente por **uma única folha de uma superfície cónica**).

Tendo em conta que uma **hipérbole** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano  $\pi$  corta o **contorno aparente frontal** em dois pontos – os pontos em que o plano  $\pi$  corta a circunferência que delimita a base do cone (os pontos **A** e **B**).

O plano  $\pi$  corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – o ponto **B** (que é o ponto em que o plano  $\pi$  corta a semicircunferência da base que integra o contorno aparente horizontal – a sua semicircunferência de maior cota) e o ponto **C** (o ponto que o plano  $\pi$  corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal).

Conclui-se que o plano  $\pi$  corta os contornos aparentes do cone em três pontos – os pontos **A**, **B** e **C**. Já temos **três pontos** da figura da secção (da hipérbole)

### 3. Determinar o espaço útil para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano frontal (de frente), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos frontais (de frente). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor afastamento da secção** (porque os planos paralelos à base são planos frontais). Tenha em conta que qualquer plano frontal (de frente) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano  $\pi$  (o plano secante) é um plano duplamente projetante (um plano projetante horizontal e simultaneamente projetante frontal), é possível constatar, de forma imediata, que os pontos **A** e **B** são os **pontos de maior afastamento** da secção e que **C** é o **ponto de menor afastamento** da secção (o que não seria possível garantir, caso o plano não fosse projetante horizontal). Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre os pontos **A/B** e **C**.

### 4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Já foram determinados **três pontos** da figura da secção. Face à dimensão da figura da secção (que agora é possível adivinhar), considera-se que os **oito pontos** atrás referido é demasiado para as reduzidas dimensões da figura – neste caso, poderão ser suficientes apenas cinco pontos, de forma a permitir um desenho relativamente preciso da curva (em verdadeira grandeza).

Assim, recorreu-se a um plano auxiliar (paralelo ao plano da base), que foi posicionado sensivelmente a meio entre o afastamento do plano da base (o plano  $\varphi$ ) e o afastamento do ponto **C** (o ponto de menor afastamento da secção). Assim, identificou-se o plano  $\varphi'$  pelo seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ) – este plano, porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $\varphi'$  intersesta o eixo do sólido. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de intersecção de uma qualquer geratriz do cone com o plano  $\varphi'$ . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano  $\varphi'$  corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal. Os pontos **Q** e **P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. O círculo com centro no ponto **Q** e raio  $\overline{QP}$  é a secção que o plano  $\varphi'$  produz no sólido (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **Q**) e com raio  $\overline{Q_2P_2}$ , desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de intersecção do plano  $\varphi'$  (o plano auxiliar) com o plano  $\pi$  (o plano secante), que é uma reta vertical (projetante horizontal), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **D** e **E**. As projeções horizontais destes dois pontos situam-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$ , pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. Já temos mais dois pontos da hipérbole, o que perfaz um total de **cinco pontos** da curva.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção** que se reduzem, ambas, a segmentos de reta (pois o plano secante é duplamente projetante). Assim, a **projeção frontal** da figura da secção é o segmento de reta  $[A_2B_2]$  e a **projeção horizontal** da figura da secção é o segmento de reta  $[A_1C_1]$ . Tendo em conta que ambas as projeções da secção se reduzem a segmentos de reta, não há quaisquer invisibilidades a assinalar (em qualquer das duas projeções).

### Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção.

O plano que contém a figura da secção (o plano secante – o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (a hipérbole apresenta a deformação máxima tanto em projeção frontal como em projeção horizontal). Assim, para determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano secante (o plano  $\pi$ , que é o plano que contém a figura da secção) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que foi  $f_{\pi}$ , pelo que se tem imediatamente  $f_{\pi} \equiv e_2 \equiv f_{\pi'}$ . Os planos que contêm os arcos do rebatimento (os planos ortogonais à charneira) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento de cada um dos oito pontos da figura da secção que foram determinados, o que nos permitiu determinar os pontos **A<sub>r</sub>**, **B<sub>r</sub>**, **C<sub>r</sub>**, **D<sub>r</sub>** e **E<sub>r</sub>**. A partir dos cinco pontos da figura da secção em rebatimento, desenhou-se a **hipérbole** em verdadeira grandeza, com um desenho relativamente preciso (à mão livre), tendo-se assinalado, no desenho, o facto de se tratar da curva em verdadeira grandeza.

Sublinha-se que a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção se poderia ter processado, por exemplo, com o recurso a uma mudança do diedro de projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da figura da secção (um dos objetivos do exercício), representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traços do plano  $\pi'$ , do plano frontal auxiliar, da secção circular produzida por aquele no cone ou, ainda, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

## 745.

### Dados:

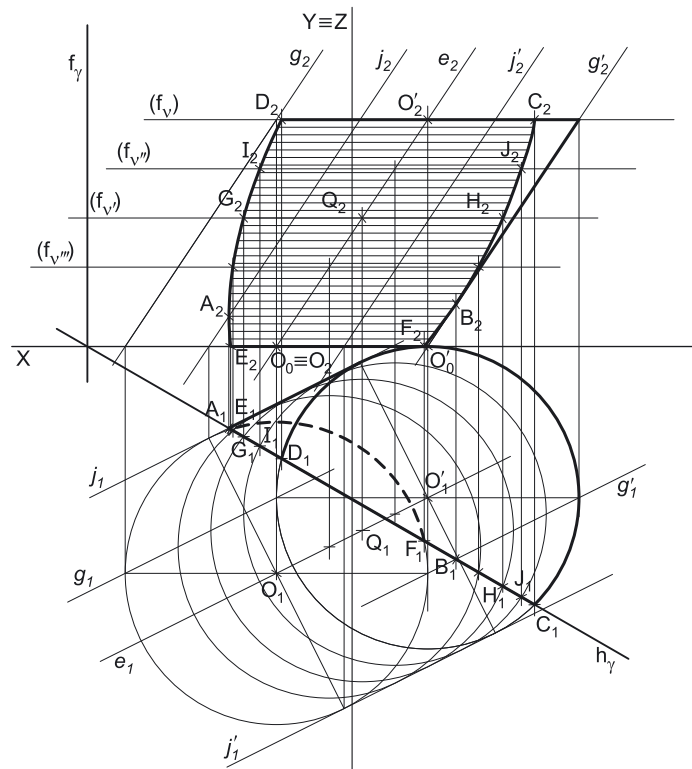
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **O'**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é o plano que contém a base superior do cilindro e é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O'** (**O'\_2**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\gamma$  (o plano secante), pelos seus traços.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

A base inferior do cilindro está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base inferior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta no eixo **X**, pois a base está contida no Plano Horizontal de Projeção.

A base superior do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O'\_1** (a projeção horizontal do ponto **O'**) e também com 4 cm de raio (as duas bases têm o mesmo raio), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a base superior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.



Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e menor abscissa das projeções frontais das duas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção horizontal do eixo do cilindro – o segmento  $[O_1, O'_1]$ ). O arco mais à esquerda da circunferência que delimita a base inferior (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

A **determinação da figura da secção produzida no cilindro** pelo plano  $\gamma$ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que Em seguida, se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).
4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

#### 1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano  $\gamma$  no cilindro há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em duas etapas, a saber: **A**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **B**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

**A**. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano  $\gamma$ ) em relação aos planos das bases. O plano  $\gamma$  (um plano vertical) não é paralelo aos planos das bases (que são planos horizontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**B.** Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O eixo do cilindro está contido numa reta oblíqua (a reta  $e$ , que é suporte do segmento de reta  $[OO']$ ). É possível constatar que o plano  $\gamma$  **não é paralelo** à reta  $e$ , pois o plano  $\gamma$  não contém qualquer reta que seja paralela à reta  $e$ . De facto, o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais de todas as retas do plano  $\gamma$  estão sobre o traço horizontal do plano ( $h_\gamma$ ), que não é paralelo à projeção horizontal da reta  $e$  ( $e_1$ ), pelo que o plano  $\gamma$  não contém nenhuma reta paralela à reta  $e$ . Assim, o plano  $\gamma$  **não verifica o Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta  $e$ , pelo que a figura da secção produzida pelo plano  $\gamma$  no cilindro **não é um paralelogramo** – é uma **elipse**.

Atendendo a que o plano  $\gamma$  corta as duas bases do cilindro (o que se constata diretamente a partir da projeção horizontal do sólido, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal), a secção produzida pelo plano  $\gamma$  no cilindro é um **segmento de elipse**. Uma **elipse** é uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), cujo desenho (à mão livre), com alguma precisão, requer um mínimo de **oito pontos**.

### 2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta. Por uma questão de simplificação do relatório, optou-se por se identificar as geratrizes dos dois contornos aparentes e desenhar também as respetivas projeções em falta.

As geratrizes do contorno aparente frontal são as geratrizes  $g$  e  $g'$  – a geratriz  $g$  é a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal e a geratriz  $g'$  é a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal. Nesse sentido, desenharam-se nas suas projeções horizontais, a partir das projeções horizontais dos dois pontos que definem cada uma das duas geratrizes.

As geratrizes do contorno aparente horizontal são as geratrizes  $j$  e  $j'$  – a geratriz  $j$  é a geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal e a geratriz  $j'$  é a geratriz de maior afastamento do contorno aparente horizontal. Nesse sentido, desenharam-se nas suas projeções frontais, a partir das projeções frontais dos dois pontos que definem cada uma das duas geratrizes.

O plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – o ponto **A** (o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a geratriz  $j$ ) e o ponto **C** (o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a semicircunferência da base superior que integra o contorno aparente horizontal). Os pontos **A** e **C** foram determinados de forma direta, a partir das respetivas projeções horizontais, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal. Note que o plano  $\gamma$  não corta a geratriz  $j'$  no espaço entre as duas bases do sólido.

O plano  $\gamma$  corta o **contorno aparente frontal** em dois pontos – o ponto **B** (o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a geratriz  $g'$ ) e o ponto **C** (o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a semicircunferência da base superior que integra o contorno aparente frontal). O ponto **C** é o ponto que já havia sido determinado. O ponto **B** foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal. Note que o plano  $\gamma$  não corta a geratriz  $g$  no espaço entre as duas bases do sólido.

Conclui-se que o plano  $\gamma$  corta os contornos aparentes do cilindro em três pontos – os pontos **A**, **B** e **C**. Já temos **três pontos** da figura da secção.

### 3. Determinar o espaço útil em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).

Tendo em conta que as bases do sólido estão contidas em planos horizontais (de nível), o recurso a planos paralelos às bases refere-se ao recurso a planos horizontais (de nível). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor cota da secção** (porque os planos paralelos à base são planos horizontais). Tenha em conta que qualquer plano horizontal (de nível) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano  $\gamma$  corta as duas bases do sólido, os **pontos de menor cota** da secção são, de forma imediata, os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base inferior do sólido, tal como os **pontos de maior cota** da secção são os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base superior do sólido.

Assim, determinaram-se os pontos em que o plano  $\gamma$  corta as duas bases do sólido. O ponto **C** é um dos pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base superior do sólido, mas o plano  $\gamma$  corta a base superior do cilindro em dois pontos. O ponto **D** (determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal) é o outro ponto em que o plano  $\gamma$  corta a base superior do cilindro. Os pontos **C** e **D** (os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base superior do cilindro) são, assim, os **pontos de maior cota** da secção.

Em seguida, determinaram-se os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base inferior do sólido – os pontos **E** e **F**. Os pontos **E** e **F** determinaram-se de forma direta, a partir das respetivas projeções horizontais, pois o plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal. Os pontos **E** e **F** (os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base inferior do cilindro) são, assim, os **pontos de menor cota** da secção.

Conclui-se, então, que o **espaço útil** é o espaço compreendido entre a base inferior (onde se situam os pontos **E** e **F**) e a base superior (onde se situam os pontos **C** e **D**). Já temos **seis pontos** da figura da secção.

### 4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

O recurso a planos paralelos aos planos das bases deve garantir que os pontos que eles nos permitem determinar estão distribuídos uniformemente pelo **espaço útil**, precisamente para garantir que o desenho da curva (à mão livre) se processe de uma forma o mais precisa possível. Por outro lado, dadas as dimensões da figura da secção (que já é possível adivinhar), considera-se que os oito pontos inicialmente referidos é claramente insuficiente para um desenho relativamente preciso da curva. Assim, e uma vez que já temos **seis pontos** da secção e que cada plano auxiliar nos permite determinar mais **dois pontos**, optou-se por se recorrer a **três planos auxiliares**, de forma a obter um total de **doze pontos** da secção. Esses três planos auxiliares foram distribuídos pelo **espaço útil** de modo uniforme.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Sublinha-se que o ponto **A** (o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a geratriz  $j$ ) e o ponto **B** (o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a geratriz  $g'$ ) estão suficientemente próximos dos pontos **E** e **F** (os pontos em que o plano  $\gamma$  corta a base inferior do cilindro). Assim, os planos auxiliares foram distribuídos de forma equitativa entre a cota do ponto **B** e a cota do plano  $v$ .

O plano  $v'$  foi o primeiro plano auxiliar a que se recorreu e foi situado a meio da diferença entre a cota do plano  $v$  (o plano da base superior) e a cota do ponto **B**. O plano  $v'$ , porque é paralelo aos planos das bases, produz, no cilindro, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano  $v'$  interseca o eixo do cilindro (a reta  $e$ ). O raio desse círculo é igual ao raio das bases, ou seja, é 4 cm. O ponto **Q** foi determinado diretamente, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. O círculo com centro no ponto **Q** e com 4 cm de raio é a secção que o plano  $v'$  produz no cilindro (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal do círculo (e que é tangente às projeções horizontais das geratrizes do contorno aparente horizontal).

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $v'$  (o plano auxiliar) com o plano  $\gamma$  (o plano secante), que é uma reta horizontal (de nível), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **G** e **H**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções horizontais – as suas projeções frontais (**G<sub>2</sub>** e **H<sub>2</sub>**) situam-se sobre o traço frontal do plano  $v'$ , pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **oito pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **G** e **H** repetiu-se mais duas vezes. Nesse sentido, recorreu-se a um segundo plano auxiliar (o plano  $v''$ ), situado a meio da diferença entre a cota do plano  $v$  (o plano da base superior) e a cota do plano  $v'$  (o primeiro plano auxiliar). Este plano permitiu-nos (de forma semelhante à exposta para os pontos **G** e **H**) determinar mais dois pontos da figura da secção (os pontos **I** e **J**), o que perfaz um total de **doze pontos**.

Por fim, recorreu-se a um terceiro plano auxiliar (o plano  $v'''$ ), situado a meio da diferença entre a cota do plano  $v'$  (o primeiro plano auxiliar) e a cota do ponto **B**. Este plano permitiu-nos (de forma semelhante à atrás exposta) determinar mais dois pontos da figura da secção (que não se identificaram, para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), o que perfaz um total de **doze pontos**. Note que se omitiram todas as notações referentes a esta sequência de traçados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A figura da secção é, assim, o segmento de elipse limitado, superiormente, pelo segmento de reta **[CD]** (o segmento de reta segundo o qual o plano  $\gamma$  corta a base superior) e, inferiormente, pelo segmento de reta **[EF]** (o segmento de reta segundo o qual o plano  $\gamma$  corta a base inferior). Os arcos **EGD** e **FHC** (que são arcos de elipse) são as partes curvas do **segmento de elipse** que é a **figura da secção**.

#### Determinação das projeções do sólido resultante da secção.

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cilindro compreendida entre o plano secante e o Plano Frontal de Projeção.

A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido é a linha mista fechada que integra o segmento de reta **[C<sub>1</sub>E<sub>1</sub>]**, bem como parte da projeção horizontal da geratriz  $j$  (a geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro). Essa linha integra, ainda, o arco da projeção horizontal da base superior que está compreendido entre aquele segmento de reta (o segmento de reta **[C<sub>1</sub>E<sub>1</sub>]**) e a projeção horizontal da geratriz  $j$  ( $j_1$ ). O arco menor **E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>**, da circunferência que delimita a projeção horizontal da base inferior, é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

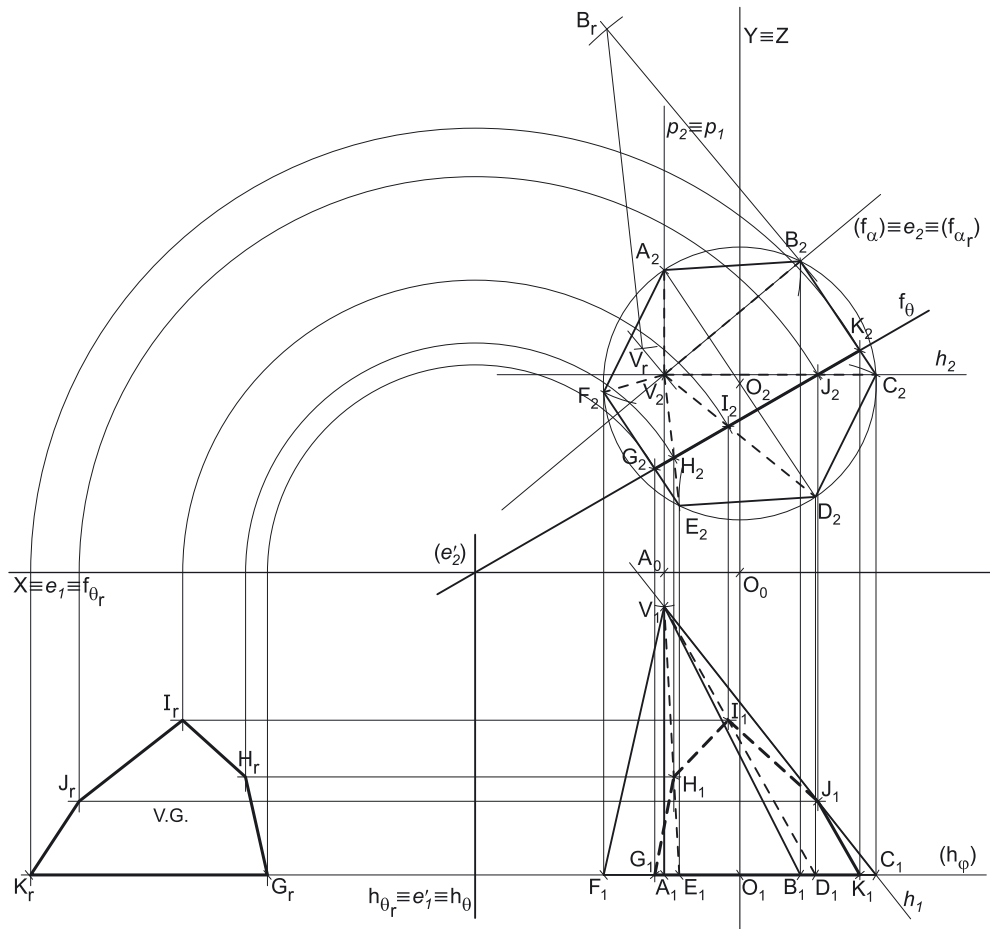
A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido é outra linha mista fechada, que integra a parte correspondente da projeção frontal da base superior do sólido e o segmento **[E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>]**. Essa linha integra, ainda, a parte correspondente da projeção frontal da geratriz  $g'$ , bem como o arco **E<sub>2</sub>B<sub>2</sub>** da elipse  $e$ , ainda, o arco **E<sub>2</sub>G<sub>2</sub>D<sub>2</sub>** da elipse (a projeção frontal do arco mais à esquerda da figura da secção). Note que o ponto **B** (o ponto em que o plano  $\gamma$  corta a geratriz  $g'$  (a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cilindro) é o ponto em que a figura da secção é tangente ao contorno aparente frontal do cilindro – a projeção frontal do ponto **B** (**B<sub>2</sub>**) é o ponto em que a linha do contorno aparente frontal do **sólido resultante da secção** deixa de ser uma linha reta e passa a ser uma linha curva.

A **figura da secção**, porque é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção frontal).

#### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do cilindro, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base superior do sólido) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos planos horizontais auxiliares, ou, ainda, das projeções horizontais das secções circulares produzidas por aqueles no cilindro). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

746.

**Dados:**

Em primeiro lugar representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, ainda, o plano  $\varphi$  é o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa necessariamente pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o ponto **A** pelas suas projeções. O ponto **A** é um ponto da base da pirâmide, que está contida no plano  $\varphi$  – uma vez que o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, a projeção horizontal do ponto **A** ( $A_1$ ) está necessariamente sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ).

Os dados permitiram-nos, também, representar o plano  $\theta$  (o plano secante), pelos seus traços.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o hexágono **[ABCDEF]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com raio até  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao hexágono. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, em projeção frontal, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos restantes vértices do hexágono. Estes foram identificados segundo a ordem dada no enunciado – o vértice **B** situa-se à direita do vértice **A**. A projeção horizontal do hexágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Atendendo a que a aresta lateral **[CV]** é horizontal (os seus pontos têm todos a mesma cota) e que a aresta lateral **[AV]** é de perfil (os seus pontos têm todos a mesma abcissa), foi possível determinar a projeção frontal do ponto **V** ( $V_2$ ) e, dessa forma, desenhar as projeções frontais de todas as arestas laterais do sólido.

Por outro lado, é dado que a aresta lateral **[BV]** da pirâmide mede 8,5 cm. No entanto, a aresta **[BV]** não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que a aresta **[BV]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano projetante frontal da aresta **[BV]** para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano projetante frontal da aresta (o plano  $\alpha$ ) pelo seu traço frontal – tendo em conta que se omitiu a representação do traço horizontal do plano  $\alpha$ , o seu traço frontal identificou-se entre parêntesis.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, a charneira do rebatimento foi o traço frontal do plano ( $f_{\alpha}$ ), pelo que se tem imediatamente  $f_{\alpha} \equiv e_2 \equiv f_{\alpha r}$ . Em seguida, conduziu-se, por  $B_2$  (a projeção frontal do ponto **B**) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **B**). Sobre essa perpendicular à charneira representou-se o afastamento do ponto **B** (o raio do arco do rebatimento) e determinou-se  $B_r$  (o ponto **B** rebatido).

Por  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**) conduziu-se, também, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – com o compasso, fazendo centro em  $B_r$  e com 8,5 cm de raio (o comprimento da aresta  $[BV]$ ), determinou-se  $V_r$ , sobre a perpendicular à charneira que passa por  $V_2$ . Por fim, transportou-se o afastamento do ponto **V** (a distância de  $V_r$  à charneira) para a linha de chamada do ponto **V**, para baixo do eixo **X**, o que nos permitiu determinar a projeção horizontal do ponto **V** ( $V_1$ ). Note que se garantiu que o ponto **V** tem afastamento inferior à base, para que a base da pirâmide seja visível em projeção frontal, como o enunciado refere expressamente.

Em seguida, a partir das projeções de todos os sete vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o hexágono  $[ABCDEF]$ , cuja projeção frontal é o hexágono  $[A_2B_2C_2D_2E_2F_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – todas as arestas laterais da pirâmide são invisíveis, em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[FABCV]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[F_1A_1B_1C_1V_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **D** e **A**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[CD]$ ,  $[DE]$  e  $[EF]$ , da base, e as arestas laterais  $[DV]$  e  $[EV]$ . No entanto, as arestas  $[CD]$ ,  $[DE]$  e  $[EF]$ , da base, estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que as invisibilidades a assinalar em projeção horizontal são as referentes às arestas laterais  $[DV]$  e  $[EV]$ . Por outro lado, as arestas laterais  $[AV]$  e  $[BV]$  são visíveis (em projeção horizontal), por se situarem na parte visível do sólido (os pontos **A** e **B** são os vértices de maior cota da pirâmide).

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao hexágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta três arestas laterais do sólido (as arestas  $[CV]$ ,  $[DV]$  e  $[EV]$ ), cortando a base em duas das suas arestas (as arestas  $[BC]$  e  $[EF]$ ). Assim, a figura da secção tem **cinco vértices**, pelo que é um **pentágono** (trata-se de um pentágono irregular).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices da figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano  $\theta$ ). O plano  $\theta$  corta a aresta  $[BC]$ , da base, no ponto **K**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção frontal. O plano  $\theta$  corta a aresta lateral  $[CV]$  no ponto **J**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção frontal. O plano  $\theta$  corta a aresta lateral  $[DV]$  no ponto **I**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção frontal. O plano  $\theta$  corta a aresta lateral  $[EV]$  no ponto **H**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção frontal. O plano  $\alpha$  corta a aresta  $[EF]$ , da base, no ponto **G**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção frontal.

A partir das projeções dos cinco vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (o pentágono  $[GHIJK]$ ). Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção horizontal – as faces  $[CDV]$ ,  $[DEV]$  e  $[EFV]$ . Assim, os (três) lados da figura da secção que se situam naquelas três faces são **invisíveis**, em projeção horizontal (os lados  $[JI]$ ,  $[IH]$  e  $[GH]$ , respetivamente). O lado  $[JK]$  da **figura da secção** é **visível** em projeção horizontal, por se situar numa face da pirâmide que é visível em projeção horizontal (a face lateral  $[BCV]$ ). Saliencia-se que o lado  $[GK]$  da figura da secção, que está contido numa face do sólido que é projetante horizontal (a base  $[ABCDEF]$ ), apesar de ser invisível, está oculto por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (pois o plano que a contém é um plano projetante horizontal).

### Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção:

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** projeta-se com deformação, pois o plano que a contém (o plano  $\theta$ ) não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções, pelo que para se determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano secante (o plano que contém a figura da secção) para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que foi  $h_0$ , pelo que se tem imediatamente  $h_0 \equiv e'_1 \equiv h_{0r}$ . Os planos que contém os arcos do rebatimento (os planos ortogonais à charneira) são planos frontais (de frente), pelo que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo do rebatimento. Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento de cada um dos vértices da figura da secção, o que nos permitiu determinar os pontos  $G_r$ ,  $H_r$ ,  $I_r$ ,  $J_r$  e  $K_r$ . A partir dos cinco vértices da figura da secção em rebatimento, desenhou-se o pentágono  $[G_rH_rI_rJ_rK_r]$ , que é a figura da secção em verdadeira grandeza (em rebatimento), o que se assinalou convenientemente no desenho.

### Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à construção do hexágono, do plano  $\alpha$  e dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$  (para a determinação da projeção horizontal do ponto **V**) ou, ainda, dos traçados referentes à determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

## 747.

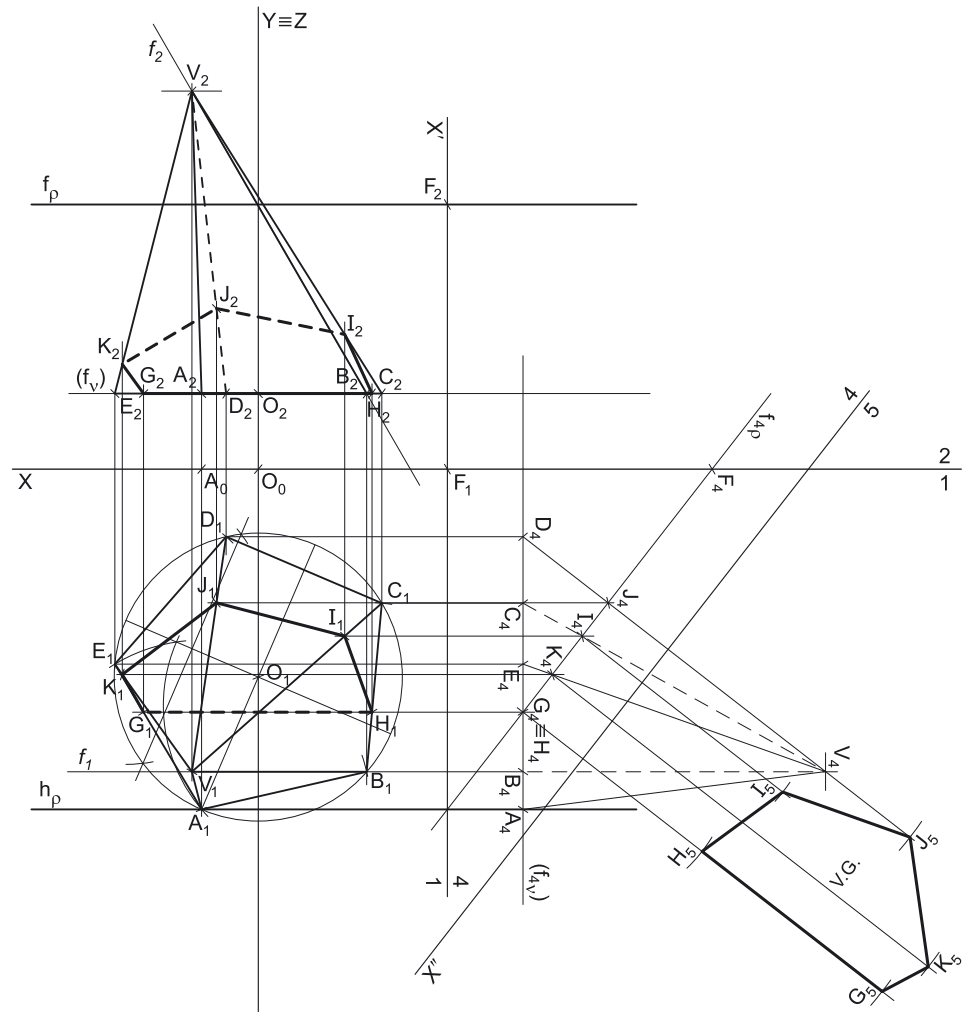
**Dados:**

Em primeiro lugar representaram-se os pontos **O** e **A**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide, pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $O_2$  e por  $A_2$  (as projeções frontais dos pontos **O** e **A**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o pentágono **[ABCDE]**) está contida num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o pentágono **[ABCDE]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao polígono e procedeu-se à sua construção, em projeção horizontal.

Note que se atendeu aos dados sobre o polígono, no que respeita à ordem dos vértices – o vértice **B** situa-se à direita do vértice **A**. A projeção frontal do pentágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.



A altura de uma pirâmide é a distância do vértice ao plano da base o que, neste caso, se refere à diferença das cotas do ponto **V** (o vértice do cone) e do plano  $v$  (o plano que contém a base). Ora, uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e que o plano da base tem 2 cm de cota (a cota dos pontos **O** e **A**), e atendendo a que a pirâmide se situa no espaço do  $1^a$  Diedro, o vértice **V** tem 10 cm de cota ( $2 + 8 = 10$ ).

Em seguida, desenharam-se as projeções da reta  $f$  (a reta suporte da aresta lateral **[BV]**), de acordo com os dados – a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (a direção dada no enunciado). O ponto **V** é, assim, o ponto da reta  $f$  que tem 10 cm de cota. Por fim, a partir das projeções de todos os seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ABCVE]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>V<sub>2</sub>E<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existem um único vértice que não integra ao contorno aparente frontal – o vértice **F**. Este, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[CD]** e **[DE]**, da base, e a aresta lateral **[DV]**. No entanto, as arestas **[CD]** e **[DE]** estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral **[DV]**. Por fim, as arestas laterais **[AV]** e **[BV]** são visíveis (em projeção frontal), por se situarem na parte visível do sólido (note que os vértices **A** e **B** são os vértices de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é o pentágono **[ABCDE]**, cuja projeção horizontal é o pentágono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **maior cota** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – todas as arestas laterais da pirâmide são visíveis, em projeção horizontal.

**a)** Em primeiro lugar representou-se o plano  $p$ , o plano secante, pelos seus traços, em função dos dados. O plano secante (o plano  $p$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma **mudança do diedro de projeção** de forma a transformar o plano secante num plano projetante e, desta forma, transformar esta situação (**secção produzida numa pirâmide por um plano não projetante**) numa **secção produzida numa pirâmide por um plano projetante**.

Sublinha-se que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, há que tentar que se mantenha o plano no qual a base da pirâmide se projeta em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados. Ora, a base projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, que, assim, deverá ser o plano de projeção a manter.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano  $\rho$ , de forma a transformar o plano  $\rho$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\rho$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano  $\rho$  é um plano de topo (um plano projetante frontal).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos seis vértices da pirâmide no **plano 4** o que se processa a partir das respetivas cotas. **A<sub>4</sub>, B<sub>4</sub>, C<sub>4</sub>, D<sub>4</sub> e E<sub>4</sub>** são, assim, as projeções dos pontos **A, B, C, D e E** no **plano 4** (respetivamente) e determinaram-se das respetivas cotas, que se mantêm (os cinco pontos têm 2 cm de cota, que é a cota da base da pirâmide). Representou-se, ainda, o traço do plano  $\nu$  no **plano 4** (**f<sub>4v</sub>**), que contém as projeções no **plano 4** de todos os vértices da base da pirâmide. O plano  $\nu$ , no novo diedro de projeção, é ainda um plano horizontal (de nível), pelo que continua a ser um plano projetante frontal.

**V<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **V** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que é 10 cm e se manteve) – a distância de **V<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **V<sub>2</sub>** ao eixo **X**. A partir das projeções dos seis vértices da pirâmide no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção (as arestas laterais **[BV]** e **[CV]** são as invisibilidades a assinalar, no **plano 4**).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** – **f<sub>4p</sub>**. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de **f<sub>p</sub>** – o ponto **F**. **F<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **F<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **F<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 7 cm – a cota de **f<sub>p</sub>**). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\rho$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\rho$  no **plano 4** (**f<sub>4p</sub>**) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com **h<sub>p</sub>** (que se situa no eixo **X'**) e **F<sub>4</sub>** (a nova projeção frontal do ponto **F**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\rho$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta três arestas laterais da pirâmide (as arestas **[CV]**, **[DV]** e **[EV]**), cortando, ainda, a base da pirâmide em outras duas arestas (as arestas **[BC]** e **[AE]**), pelo que a figura da secção tem **cinco vértices** – é um **pentágono**. No entanto, como o plano secante (o plano  $\rho$ ) não é paralelo ao plano da base, a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao hexágono da base, pelo que, apesar de se tratar de um pentágono, a figura da secção **não é** um pentágono regular (pois o plano secante **não é paralelo** ao plano da base)

Salienta-se que as arestas **[BC]** e **[AE]**, da base, têm as suas projeções frontais (no **plano 4**) coincidentes, mas, de facto, o plano secante corta a base naquelas duas arestas (cujas projeções frontais estão coincidentes) e não apenas numa única aresta, o que, nesta situação, seria impossível.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices da figura da secção no plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\rho$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Assim, o ponto **G** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AE]** da base, o ponto **H** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[BC]** da base, o ponto **I** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[CV]**, o ponto **J** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[DV]** e, por fim, o ponto **K** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta lateral **[EV]**. Em seguida, determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **G, H, I, J e K** (os cinco vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções horizontais daqueles pontos (no **plano 1**), foi possível determinar as suas projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto **G** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[AE]**, pelo que a sua projeção frontal (**G<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[AE]** (**[A<sub>2</sub>E<sub>2</sub>]**). O ponto **H** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[BC]**, pelo que a sua projeção frontal (**H<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[BC]** (**[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**). O ponto **I** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[CV]**, pelo que a sua projeção frontal (**I<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[CV]** (**[C<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**). O ponto **J** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[DV]**, pelo que a sua projeção frontal (**J<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[DV]** (**[D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**). O ponto **K** é o ponto em que o plano  $\rho$  corta a aresta **[EV]**, pelo que a sua projeção frontal (**K<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[EV]** (**[E<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**).

A partir das projeções de todos os vértices da figura da secção, foi possível desenhar as suas duas projeções. Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais **[CDV]** e **[DEV]**. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas faces são **invisíveis**, em projeção frontal (os lados **[IJ]** e **[JK]**). Os lados **[HI]** e **[GK]** da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por se situarem em faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (as faces laterais **[BCV]** e **[AEV]**, respetivamente). Salienta-se que o lado **[GH]** da figura da secção, que está contido numa face do sólido que é projetante frontal (a base **[ABCDE]**), apesar de ser invisível, está oculto por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (pois o plano que a contém é um plano projetante frontal).

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção horizontal – a base **[ABCDE]**. Assim, o único lado da figura da secção que se situa na base do sólido (o lado **[GH]**) é **invisível**, em projeção horizontal. Tendo em conta que todas as faces laterais da pirâmide são visíveis em projeção horizontal, os restantes lados da figura da secção (os lados **[HI]**, **[IJ]**, **[JK]**, e **[GK]**) são visíveis, em projeção horizontal.

**b)** O plano que contém a **figura da secção** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo recurso a uma segunda mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano  $\rho$  (o plano que contém a figura da secção) num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção. Tendo em conta a primeira mudança do diedro de projeção efetuada, em que o plano  $\rho$  já havia sido transformado num plano de topo, há, agora, que transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível), pois um plano horizontal (de nível) é um plano projetante frontal, tal como o plano  $\rho$  (que é um plano de topo, no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**). Recorde que um plano horizontal (de nível) é um **caso particular** dos planos projetantes frontais. Para transformar o plano  $\rho$  num plano horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano  $\rho$ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém o plano 4**, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 5**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X''$ ) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano  $\rho$ , o eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ) é paralelo ao novo traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{4\rho}$ ). As linhas de chamada, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X''$  (o novo eixo  $X$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções (no **plano 5**) dos cinco vértices da figura da secção, em função dos respetivos afastamentos, que se mantiveram.  $G_5$  é a projeção do ponto  $G$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $G_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $G_1$  ao eixo  $X'$ .  $H_5$  é a projeção do ponto  $H$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $H_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $H_1$  ao eixo  $X'$ .  $I_5$  é a projeção do ponto  $I$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $I_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $I_1$  ao eixo  $X$ .  $J_5$  é a projeção do ponto  $J$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $J_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $J_1$  ao eixo  $X$ .  $K_5$  é a projeção do ponto  $K$  no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de  $K_5$  ao eixo  $X''$  é igual à distância de  $J_1$  ao eixo  $X$ .

Por fim, desenhou-se o pentágono definido por  $G_5, H_5, I_5, J_5$  e  $K_5$  – o pentágono  $[G_5H_5I_5J_5K_5]$  é a projeção (no **plano 5**) do pentágono  $[GHIJK]$  e está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho

#### Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base da pirâmide) representou-se a **leve**, pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da **figura da secção** (um dos objetivos do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da **figura da secção** (o outro objetivo do exercício) representou-se a **forte**, pois é a outra parte do pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados referentes à construção do pentágono, dos referentes à primeira mudança do diedro de projeção (para a determinação da figura da secção), bem como dos traçados referentes à segunda mudança do diedro de projeção (para a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção).

## 748.

#### Dados:

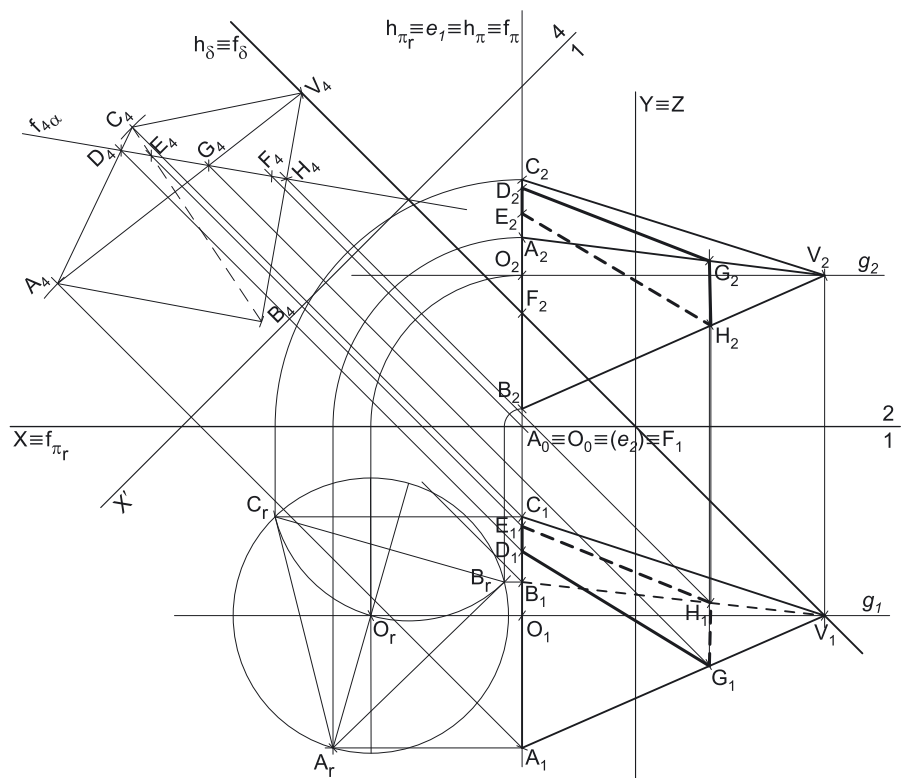
Em primeiro lugar representaram-se os pontos  $O$  e  $A$ , pelas respetivas projeções, bem como o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base da pirâmide), pelos seus traços, em função dos dados. Os traços do plano  $\pi$  passam pelas projeções dos pontos  $O$  e  $A$ , pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante) pelos seus traços. O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do triângulo $[ABC]$ :

O triângulo  $[ABC]$  está contido num plano de perfil, que não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi  $h_\pi$  – tem-se imediatamente  $h_\pi \equiv e'_1 \equiv h_{\pi_r}$ . A charneira é uma reta de topo (projetante frontal), pelo que os planos ortogonais à charneira (os planos que contêm os arcos do rebatimento) são planos frontais (de frente).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Tendo em conta que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e que os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo do rebatimento, efetuou-se o rebatimento dos pontos **O** e **A**, o que nos permitiu determinar **O<sub>r</sub>** e **A<sub>r</sub>**. Com o compasso, em rebatimento, fazendo centro em **O<sub>r</sub>** e com raio até **A<sub>r</sub>**, desenhou-se a circunferência circunscrita ao triângulo (em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção do polígono, inscrito na circunferência. Estes procedimentos permitiram-nos determinar os outros dois vértices do triângulo (em rebatimento) – **B<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**.

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos vértices **B** e **C** do triângulo. As duas projeções do triângulo reduzem-se a segmentos de reta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante.

### Determinação das projeções da pirâmide:

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base, ou seja, está contido numa reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções homónimas da reta **g**, a reta suporte do eixo da pirâmide. Uma vez que a altura da pirâmide é a distância do vértice ao plano da base, medida ortogonalmente a este, o vértice **V** dista 8 cm (a altura da pirâmide) do plano  $\pi$ . Assim, a altura da pirâmide pode medir-se na reta **g**, que é paralela aos dois planos de projeção – o segmento **[OV]** (o eixo do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza em ambas as projeções. Assim, a partir de **O<sub>2</sub>** (por exemplo), mediram-se os 8 cm sobre **g<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **g**) e determinou-se **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **V**), sobre **g<sub>2</sub>**, o que nos permitiu determinar **V<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **V**) sobre **g<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **g**). Note que se garantiu que o vértice **V** se situa à direita do plano da base, como o enunciado pede expressamente.

A partir das projeções de todos os quatro vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABVC]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[BC]** da base é invisível, por se situar na parte invisível do sólido (separa duas faces do sólido que são invisíveis em projeção frontal – a base e a face lateral **[BCV]**). Já a aresta lateral **[AV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal, além de que **A** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

O contorno aparente horizontal é o triângulo **[ACV]** (que corresponde à face lateral **[ACV]**), cuja projeção horizontal é o triângulo **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **B**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[BV]**. As arestas **[AB]** e **[BC]** da base estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal, é a da aresta lateral **[BV]**.

### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas laterais não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar o plano secante (o plano  $\alpha$ ) num plano projetante. Tendo em conta que, nesta situação, a base da pirâmide não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, não existe qualquer necessidade de se manter um determinado plano de projeção – é indistinto, em termos de traçado, manter o Plano Horizontal de Projeção ou manter o Plano Frontal de Projeção.

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\alpha$ , de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante. Assim, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano (**h<sub>α</sub>**). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). Em seguida, determinaram-se as projeções dos quatro vértices da pirâmide, no **plano 4**.

**A<sub>4</sub>**, **B<sub>4</sub>** e **C<sub>4</sub>** são as projeções dos pontos **A**, **B** e **C** no **plano 4** e determinaram-se em função das suas cotas, que se mantiveram. **V<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **V** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota, que se manteve – a distância de **V<sub>4</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **V<sub>2</sub>** ao eixo **X** (que é 4 cm – a cota de **V**).

A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção (a aresta **[BC]**, da base, é a única invisibilidade a assinalar).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** – **f<sub>4,π</sub>**. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de **f<sub>α</sub>** – o ponto **F** (o ponto de **f<sub>α</sub>** que tem a abcissa do plano  $\pi$ , por uma questão de economia de traçados). **F<sub>4</sub>** é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **F<sub>4</sub>** ao eixo **X'** é igual à distância de **F<sub>2</sub>** ao eixo **X**. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** (**f<sub>4,α</sub>**) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com **h<sub>α</sub>** (que se situa no eixo **X'**) e **F<sub>4</sub>** (a nova projeção frontal do ponto **F**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas da base da pirâmide (as arestas **[AC]** e **[BC]**), cortando, ainda, duas arestas laterais do sólido – as arestas laterais **[AV]** e **[BV]**. Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Assim, o ponto **D** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AC]** da base, o ponto **E** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[BC]** da base, o ponto **G** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[AV]** e, por fim, o ponto **H** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral **[BV]**. Em seguida, determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **D**, **E**, **G** e **H** (os quatro vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções horizontais daqueles pontos (no **plano 1**), foi possível determinar as suas projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto **G** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[AV]**, pelo que a sua projeção frontal (**G<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[AV]** (**A<sub>2</sub>V<sub>2</sub>**). O ponto **H** é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta **[BV]**, pelo que a sua projeção frontal (**H<sub>2</sub>**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[BV]** (**B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>**).

Este procedimento não pode ser utilizado para as arestas **[AB]** e **[BC]** (da base), que são de perfil (as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**). Assim, as projeções frontais dos pontos **D** e **E** tiveram de ser determinadas em função das cotas daqueles pontos, que se mantiveram. Nesse sentido, **D<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **D** (no **plano 2**) e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **D<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **D<sub>4</sub>** ao eixo **X'**. De forma semelhante, **E<sub>2</sub>** é a projeção frontal do ponto **E** (no **plano 2**) e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **E<sub>2</sub>** ao eixo **X** é igual à distância de **E<sub>4</sub>** ao eixo **X'**.

A partir das projeções de todos os vértices da figura da secção, foi possível desenhar as suas duas projeções. Por fim, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – a face lateral **[BCV]**. Assim, o lado da figura da secção que se situa naquela face é **invisível**, em projeção frontal – o lado **[EH]**. Os lados **[DG]** e **[GH]** da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por se situarem em faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (as faces laterais **[ACV]** e **[ABV]**, respetivamente). Salienta-se que o lado **[DE]** da figura da secção, que está contido numa face do sólido que é projetante frontal (a base **[ABC]**), apesar de ser invisível, está oculto por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (pois o plano que a contém é um plano projetante frontal).

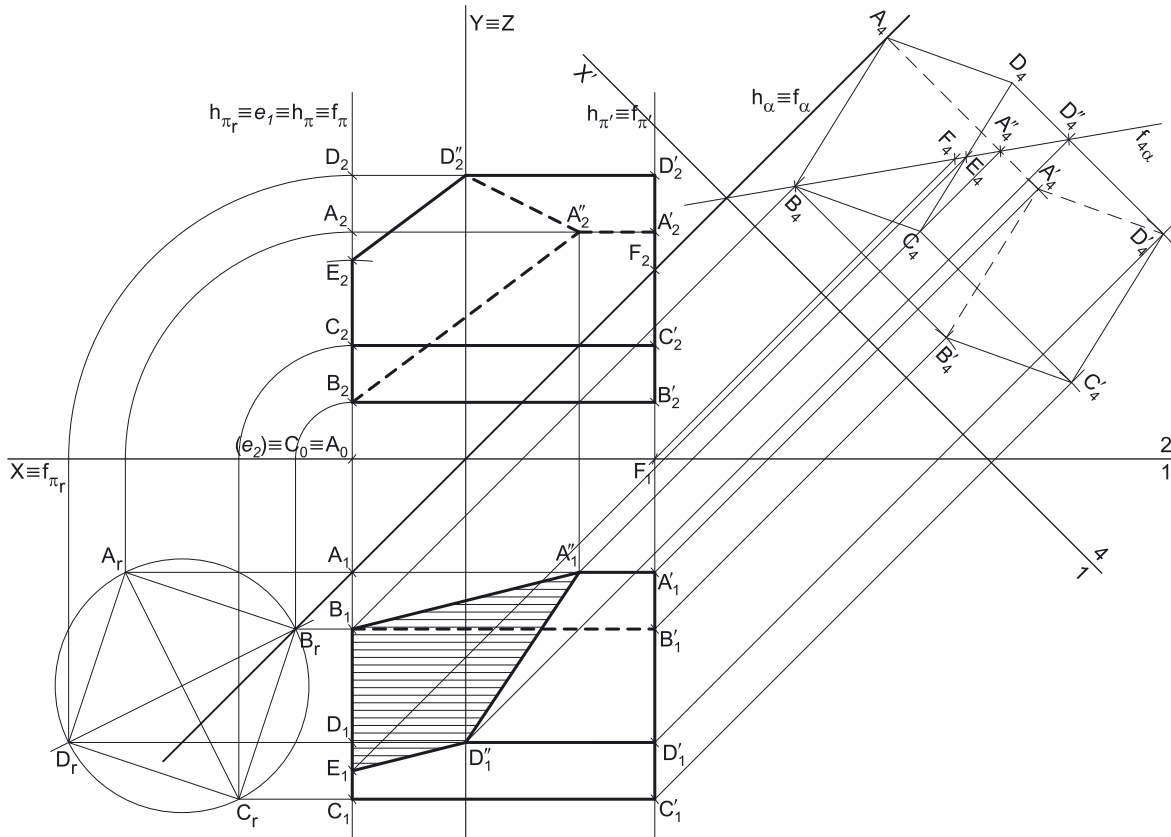
Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]**. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces do sólido (os lados **[GH]** e **[EH]**, respetivamente) são **invisíveis**, em projeção horizontal. O lado **[DG]** da **figura da secção** é **visível** em projeção horizontal, por se situar numa face da pirâmide que é visível em projeção horizontal (a face lateral **[ACV]**). Salienta-se que o lado **[DE]** da figura da secção, que está contido numa face do sólido que é projetante horizontal (a base **[ABC]**), apesar de ser invisível, está oculto por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (pois o plano que a contém é um plano projetante horizontal).

#### Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a base) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados necessários à construção do triângulo (nomeadamente os referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ ), bem como dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada (para a determinação da figura da secção).



749.



**Dados:**

Em primeiro lugar representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respectivas projeções, bem como o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém o quadrado **[ABCD]**), pelos seus traços, em função dos dados. Os traços do plano  $\pi$  passam pelas projeções dos pontos **A** e **C**, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano  $\alpha$  (o plano secante) pelos seus traços. O plano  $\alpha$  tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

**Resolução:**

*Determinação das projeções do quadrado **[ABCD]**:*

O quadrado **[ABCD]** está contido num plano de perfil, que não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi  $h_\pi$  – tem-se imediatamente  $h_\pi \equiv e'_1 \equiv h_{\pi_r}$ . A charneira é uma reta de topo (projetante frontal), pelo que os planos ortogonais à charneira (os planos que contêm os arcos do rebatimento) são planos frontais (de frente).

Tendo em conta que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e que os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo do rebatimento, efetuou-se o rebatimento dos pontos **A** e **C**, o que nos permitiu determinar **A<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**. A partir de **A<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**, construiu-se o quadrado **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>C<sub>r</sub>D<sub>r</sub>]** em verdadeira grandeza, em rebatimento (o quadrado **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>C<sub>r</sub>D<sub>r</sub>]**), o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do quadrado em rebatimento – os pontos **B<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**. Note que se atendeu ao que o enunciado refere expressamente – o vértice **B**, do quadrado, é o vértice de menor cota do quadrado **[ABCD]**.

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos vértices **B** e **D** do quadrado. As duas projeções do quadrado reduzem-se a segmentos de reta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante.

*Determinação das projeções do prisma:*

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 8 cm de altura e o plano  $\pi$  (que tem 3 cm de abscissa) é o plano que contém a base mais à esquerda do sólido, o plano  $\pi'$  (o plano que contém a sua base mais à direita) tem  $-5$  de abscissa ( $3 - 8 = -5$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\pi'$  (o plano que contém a outra base do sólido) pelos seus traços.

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas fronto-horizontais. Assim, pelas projeções dos vértices do quadrado **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram) e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $\pi'$  – esses pontos são os vértices do quadrado **[A'B'C'D']**, que é a base mais à direita do sólido.

A partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices  $A$  e  $A'$ . Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base mais à esquerda), as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da base mais à direita), e a aresta lateral  $[AA']$ . As arestas  $[AB]$ ,  $[A'B']$ ,  $[AD]$  e  $[A'D']$  estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção frontal, é a da aresta lateral  $[AA']$ . Já a aresta lateral  $[CC']$  é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (note que  $C$  e  $C'$  são os vértices de maior afastamento do prisma).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[ADCC'D'A]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1D_1C_1C'_1D'_1A'_1]$ . Em projeção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices  $B$  e  $B'$ . Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$  (da base mais à esquerda), as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$  (da base mais à direita), e a aresta lateral  $[BB']$ . As arestas  $[AB]$ ,  $[A'B']$ ,  $[BC]$  e  $[B'C']$  estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal, é a da aresta lateral  $[BB']$ . Já a aresta lateral  $[DD']$  é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (note que  $D$  e  $D'$  são os vértices de maior cota do prisma).

#### Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas laterais não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar o plano secante (o plano  $\alpha$ ) num plano projetante. Tendo em conta que, nesta situação, as bases do prisma não se projetam em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, não existe qualquer necessidade de se manter um determinado plano de projeção – é indistinto, em termos de traçado, manter o Plano Horizontal de Projeção ou manter o Plano Frontal de Projeção.

Nesse sentido, optou-se por substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano  $\alpha$ , de forma a transformar o plano  $\alpha$  num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com  $1/4$ . Como o **plano 4** é ortogonal ao plano  $\alpha$ , o eixo  $X'$  é perpendicular ao traço horizontal do plano ( $h_\alpha$ ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo  $X'$  (o novo eixo  $X$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções dos oito vértices do prisma no **plano 4**.

$A_4$ ,  $B_4$ ,  $C_4$  e  $D_4$  são as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  no **plano 4** e determinaram-se em função das respetivas cotas, que se mantiveram.  $A'_4$ ,  $B'_4$ ,  $C'_4$  e  $D'_4$  são as projeções dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  no **plano 4** e determinaram-se igualmente em função das respetivas cotas, que se mantiveram.

A partir das projeções dos oito vértices do prisma no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, começando pelo seu contorno aparente (que é a linha fechada  $[ABB'C'D'D]$ ) e atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção. No novo diedro de projeção, o vértice  $A'$  é o vértice de menor afastamento, pelo que é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e a aresta lateral  $[AA']$ . O vértice  $C$  é o vértice de maior afastamento no prisma (no novo diedro de projeção), pelo que é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[BC]$  e  $[CD]$  (da base  $[ABCD]$ ) e a aresta lateral  $[CC']$ .

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** –  $f_{\alpha_4}$ . Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de  $f_\alpha$  – o ponto  $F$  (que tem a abcissa do plano  $\pi'$ , por uma questão de economia de traçados).  $F_4$  é a projeção do ponto  $F$  no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $F_4$  ao eixo  $X'$  é igual à distância de  $F_2$  ao eixo  $X$ . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal, o traço do plano  $\alpha$  no **plano 4** ( $f_{\alpha_4}$ ) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com  $h_\alpha$  (que se situa no eixo  $X'$ ) e  $F_4$  (a nova projeção frontal do ponto  $F$ ).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante contém o vértice  $B$  (da base  $[ABCD]$ ), cortando ainda a aresta  $[CD]$  da base  $[ABCD]$ . O plano  $\alpha$  corta, ainda, as arestas laterais  $[AA']$  e  $[DD']$  do prisma. Assim, a figura da secção tem **quatro vértices** – é um **quadrilátero**. No entanto, o plano secante **não é paralelo** aos planos das bases, pelo que esse quadrilátero **não é** um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases – a figura da secção **não é um quadrado**. Note que o plano secante não corta a base  $[A'B'C'D']$ .

Em seguida, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano  $\alpha$  (o plano secante) é um plano projetante frontal. Assim, o ponto  $E$  é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta  $[CD]$  da base  $[ABCD]$ , o ponto  $A''$  é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral  $[AA']$  e o ponto  $D''$  é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta lateral  $[DD']$ . Recorde que o ponto  $B$  (um dos vértices do quadrado  $[ABCD]$ ) já era um dos pontos da secção. Em seguida, determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos  $E$ ,  $A''$  e  $D''$  (os três vértices da figura da secção agora determinados), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções horizontais daqueles pontos (no **plano 1**), foi possível determinar as suas projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto  $A''$  é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta  $[AA']$ , pelo que a sua projeção frontal ( $A''_2$ ) se situa sobre a projeção frontal da aresta  $[AA']$  ( $[A_2A'_2]$ ). O ponto  $D''$  é o ponto em que o plano  $\alpha$  corta a aresta  $[DD']$ , pelo que a sua projeção frontal ( $D''_2$ ) se situa sobre a projeção frontal da aresta  $[DD']$  ( $[D_2D'_2]$ ).

Este procedimento não pode ser utilizado para a aresta  $[CD]$  (da base  $[ABCD]$ ), que é de perfil (as suas projeções não verificam o **CrITÉrio de Reversibilidade**). Assim, a projeção frontal do ponto  $E$  teve de ser determinada em função da cota daquele ponto, que se manteve. Nesse sentido,  $E_2$  é a projeção frontal do ponto  $E$  (no **plano 2**) e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de  $E_2$  ao eixo  $X$  é igual à distância de  $E_4$  ao eixo  $X'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das projeções de todos os vértices da figura da secção, foi possível desenhar as suas duas projeções. Tendo em conta que o plano secante (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções da figura da secção apresentam deformação).

### Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco do prisma – o sólido compreendido entre os dois planos das bases e entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, o quadrilátero  $[BED''A'']$  é uma das faces deste novo sólido.

O contorno aparente frontal é a linha fechada  $[BCED''D'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2E_2D''_2D'_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices  $A''$  e  $A'$ . Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[A''B]$  e  $[A''D'']$  (da face  $[BED''A'']$ ), as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da base  $[a'b'c'd']$ ), e a aresta lateral  $[A''A']$ . As arestas  $[A'D']$  e  $[A'B']$  estão ocultas por arestas visíveis, pelo que as invisibilidades a assinalar, em projeção frontal, são as referentes às arestas  $[A''B]$ ,  $[A''D'']$  e  $[A''A']$ . Por outro lado, a aresta  $[BE]$  (da base  $[BCE]$ ) é invisível (em projeção frontal), pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal – a face  $[BED''A'']$  e a base  $[BCE]$  (que é projetante frontal). No entanto, também esta aresta está oculta, em projeção frontal, por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal. Já a aresta lateral  $[CC']$  é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (note que  $C$  e  $C'$  são os vértices de maior afastamento do prisma).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada  $[A'D'C'CEBA'']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A'_1D'_1C'_1C_1E_1B_1A''_1]$ . Em projeção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices  $B'$  e  $D'''$ . O vértice  $D'''$ , por ser um dos vértices de **maior cota** do sólido, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[D'''E]$ ,  $[A''D'']$  e  $[D''D']$ . Já o vértice  $B'$ , por ser um dos vértices de **menor cota** do sólido, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e a aresta lateral  $[BB']$ . As arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$  estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal, é a da aresta lateral  $[BB']$ . Por outro lado, a aresta  $[BC]$  (da base  $[BCE]$ ) é invisível (em projeção horizontal), pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – a face  $[BB'C'C]$  e a base  $[BCE]$  (que é projetante horizontal). No entanto, também esta aresta está oculta, em projeção horizontal, por arestas do prisma que são visíveis em projeção horizontal.

A **figura da secção** é **visível** em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), o que se assinalou devidamente com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo  $X$  (em projeção horizontal).

### Traçado:

O eixo  $X$  representa-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do prisma, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso dos traçados necessários à construção do quadrado (nomeadamente os referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ ), bem como dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção (para a determinação da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

## 21 SOMBRAS

750.

A afirmação é **verdadeira**, pois quando um objeto é exposto a uma situação luminosa resulta uma sombra projetada sobre uma qualquer superfície. Essa sombra existe, precisamente, por haver uma superfície (plano de projeção) sobre a qual aquela se projeta, resultado da passagem, pelo objeto, de um feixe luminoso (feixe de retas projetantes) oriundo de uma qualquer fonte luminosa (centro de projeção) – a sombra do objeto é, assim, a projeção do objeto nessa superfície. Assim sendo, temos: a fonte luminosa é o centro de projeção, os raios luminosos (ou raios luz/sombra) são as retas projetantes e o plano onde se projeta a sombra é o plano de projeção.

751.

Por **sombra projetada de um ponto num plano** entende-se o ponto de interseção do raio luminoso que passa pelo ponto com esse plano.

752.

Por **raio luminoso** (ou **raio luz/sombra**) entende-se toda a reta que passa por uma qualquer *fonte luminosa*.

753.

Para se determinar a **sombra projetada de um ponto num plano** conduz-se, por esse ponto, um raio luminoso (ou raio luz/sombra) – o ponto de interseção do raio luminoso com o plano é a **sombra projetada do ponto nesse plano**.

754.

Por **fonte luminosa** entende-se todo o corpo que emite luz própria, ou seja, que emite radiações em forma de luz.

755.

A diferença entre **foco luminoso** e **direção luminosa** é a distância a que a *fonte luminosa* se situa da superfície sobre a qual se projeta a sombra (e a consequente posição relativa dos raios luminosos). Assim sendo, **foco luminoso** é a situação em que a *fonte luminosa* está situada a uma **distância finita**, pelo que os raios luminosos (ou raios luz/sombra) são **concorrentes entre si** (no *foco luminoso*). Por outro lado, uma **direção luminosa** é a situação em que a *fonte luminosa* está situada a uma **distância infinita** e em que os raios luminosos (ou raios luz/sombra) são **paralelos entre si** (por serem concorrentes num ponto do infinito).

756.

Por **direção convencional da luz** (ou **direção luminosa convencional**) entende-se a **direção luminosa** considerada ideal para as pessoas dexas escreverem, por não produzir sombra sobre a escrita – a luz provém de cima, da esquerda e de trás. As projeções da **direção convencional da luz** fazem, ambas, ângulos de  $45^\circ$  (a.e.) com o eixo X.

757.

A amplitude do ângulo que a **direção convencional da luz** faz com ambos os planos de projeção é de cerca de  $35^\circ 26'$  (que convencionalmente se representa por  $\varphi^\circ$ ). Esse é, afinal, o ângulo de incidência da **direção convencional da luz** sobre o plano da escrita, que é um plano horizontal (ver resposta à questão anterior).

758.

**Dados:**

A direção convencional da luz faz o mesmo ângulo com os dois planos de projeção. Assim, optou-se por se determinar o ângulo que a direção convencional da luz faz com o Plano Frontal de Projeção. Para tal conduziu-se, em primeiro lugar, um raio luminoso  $l$ , qualquer – um raio luminoso passante. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo X, em ambas as projeções.

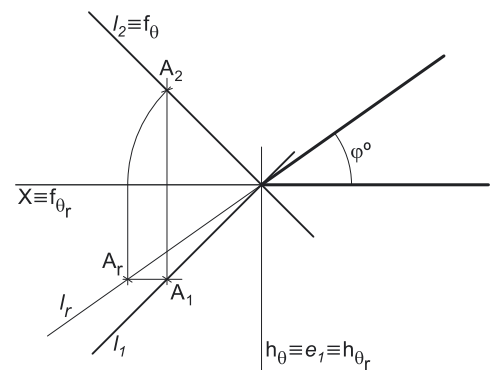
**Resolução:**

Determinemos o ângulo pretendido com o recurso ao **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa-se em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapa 1.** Pelo raio luminoso  $l$  conduziu-se um plano  $\theta$ , ortogonal ao Plano Frontal de Projeção. O plano  $\theta$  é o plano projetante frontal do raio luminoso  $l$ .

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos é o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) que já foi determinado.

**Etapa 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo entre o raio luminoso  $l$  e o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) é, assim, o ângulo pretendido.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ângulo entre o raio luminoso  $l$  e o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_0$ ) está contido no plano  $\theta$ . O plano que contém o ângulo é o plano de topo  $\theta$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo pretendido não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**.

Optou-se por rebater o plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, começou-se por se identificar a charneira do rebatimento (a reta  $e$ ), que é o traço horizontal do plano  $\theta$ .

O traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_0$ ) em rebatimento fica sobre o eixo  $X$  pelo que se tem imediatamente  $X \equiv f_{0r}$ . Para definir o raio luminoso  $l$  em rebatimento (a reta  $l_r$ ) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

O ponto de concorrência do raio luminoso  $l$  com o eixo  $X$  (que não se identificou) é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio) – já temos um ponto para definir o raio luminoso  $l$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, representou-se um ponto  $A$ , qualquer, pertencente ao raio luminoso  $l$ , e rebateu-se o ponto  $A$ , obtendo  $A_r$  – o raio luminoso em rebatimento é  $l_r$ , que fica definido por dois pontos (o ponto  $A_r$  e o ponto de concorrência com o eixo  $X$ ).

A verdadeira grandeza do ângulo entre as retas  $l$  e  $f_0$  está em qualquer um dos dois menores ângulos formados entre as retas  $l_r$  e  $f_{0r}$ . Representou-se convenientemente um desses dois ângulos, e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com a indicação  $\varphi^\circ$  (recorde que a letra  $\varphi$  é a letra utilizada para se representar a verdadeira amplitude do ângulo que a direção convencional da luz faz com os planos de projeção).

#### Traçado:

Os dados (as projeções do raio luminoso  $l$ ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza do ângulo (o objetivo final do exercício). Tendo em conta que um ângulo é limitado por duas semirretas, a identificação do pedido (a verdadeira grandeza do ângulo) processou-se, precisamente, indicando, a **forte**, os lados do ângulo assinalado. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do plano  $\theta$  ou das construções necessárias ao rebatimento do ponto  $A$ ), representaram-se a **leve**.

### 759.

Por **sombra projetada de um objeto num plano** entende-se a região do plano na qual não incidem os raios luminosos, por terem sido intercetados pela superfície do objeto ou, de uma outra forma, a zona do plano onde os **raios luz/sombra** incidem **em sombra**, depois de terem sido intercetados pelo objeto (opaco) e se terem transformado em raios de sombra.

### 760.

Por **sombra própria de um objeto** entende-se a parte (ou o conjunto das partes) do objeto na qual os raios luminosos não incidem (é a parte do objeto que se encontra **sombreada**).

### 761.

Por **sombra espacial** entende-se a porção do espaço compreendida entre o objeto (a parte em sombra do objeto – a sombra própria do objeto) e a sua sombra projetada, ou seja, a porção do espaço em que os raios luz/sombra, por terem sido intercetados pelo objeto, estão **em sombra**.

### 762.

Por **sombra real de um ponto** entende-se o ponto de interseção do raio luminoso que passa pelo ponto com a primeira superfície opaca que encontra depois de passar pelo ponto – é a sombra existente do ponto.

### 763.

Por **sombra virtual de um ponto** entende-se o ponto de interseção do raio luminoso que passa pelo ponto com toda e qualquer superfície após originar a sombra real do ponto – é toda e qualquer sombra imaginária do ponto.

### 764.

$A_{s1}$  refere-se à **sombra real** do ponto  $A$  (porque é  $A_s$ ) e situa-se no Plano Horizontal de Projeção (porque tem o índice «1», que se refere às projeções horizontais, que se situam no Plano Horizontal de Projeção. Assim,  $A_{s1}$ , sendo uma **sombra real** que se situa no Plano Horizontal de Projeção,  $A_{s1}$  situa-se necessariamente no **SPHA** (que é uma das faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

$A_{v2}$  refere-se à **sombra virtual** do ponto  $A$  (porque é  $A_v$ ) e situa-se no Plano Frontal de Projeção (porque tem o índice «2», que se refere às projeções frontais, que se situam no Plano Frontal de Projeção. Assim,  $A_{v2}$ , sendo uma **sombra virtual** que se situa no Plano Frontal de Projeção,  $A_{v2}$  situa-se necessariamente no **SPFI** (que não é uma face do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

**765.**

A **sombra real** de um ponto situa-se necessariamente na **primeira superfície** que o raio luminoso intersesta, depois de passar pelo ponto – por isso mesmo, **essa sombra real é única**. Tendo em conta os conteúdos da disciplina neste nível de escolaridade, essa primeira superfície é necessariamente uma das faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro (o **SPHA** ou o **SPFS**). Em contrapartida, depois dessa primeira superfície (que, neste nível de escolaridade, são apenas o **SPHA** ou o **SPFS**), o raio luminoso pode intersestar **uma infinidade de outras superfícies**, nas quais seja necessário determinar outras sombras desse ponto. Todas essas sombras, sejam quantas forem, por não existirem na prática, são necessariamente **sombras virtuais**, que podem, ser várias, em função das superfícies nas quais seja necessário determinar sombras desse ponto.

**766.**

As **sombras reais** de quaisquer pontos situam-se necessariamente nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro, u seja, no **SPHA** ou no **SPFS**.

**767.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P** e o foco luminoso **L**, pelas respectivas projeções, em função das respectivas coordenadas.

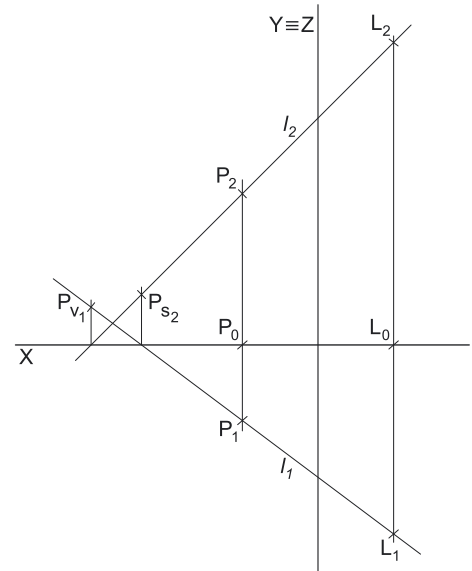
**Resolução:**

Para determinar as sombras real e virtual do ponto **P** conduziu-se, pelo ponto **P**, um raio luminoso **l**, que passa pelo foco luminoso **L** – o raio luminoso **l** está definido por dois pontos (os pontos **P** e **L**). Em seguida, determinaram-se os traços do raio luminoso **l** nos planos de projeção – o seu traço frontal situa-se no **SPFS** e o seu traço horizontal situa-se no **SPHP**. Atendendo a que as sombras reais se situam sempre no **SPHA** ou no **SPFS** (as faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro), o traço frontal do raio luminoso **l** (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** do ponto **P** ( $P_s$ ) e o traço horizontal do raio luminoso **l** (que se situa no **SPHP**) é a **sombra virtual** do ponto **P** ( $P_v$ ).

Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **P** ( $P_s$ ) se situa no **SPFS** (trata-se da sua projeção frontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $P_{s2}$ . Tendo em conta que a **sombra virtual** do ponto **P** ( $P_v$ ) se situa no **SPHP** (trata-se de uma projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $P_{v1}$ . Note que se omitiram as notações referentes às projeções das sombras (real e virtual) que se situam no eixo **X**, por estas não serem necessárias.

**Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido (as sombras real e virtual do ponto **P**) são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso **l**), representaram-se a **leve**.

**768.****Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **M**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas.

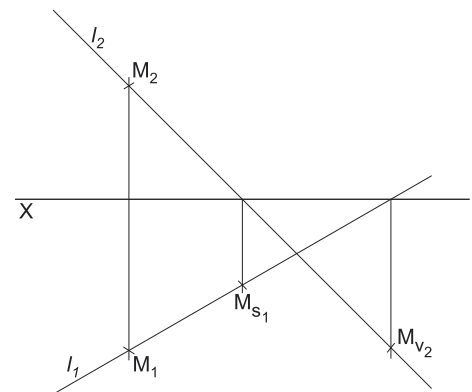
**Resolução:**

Para determinar as sombras real e virtual do ponto **M** conduziu-se, pelo ponto **M**, um raio luminoso **l** com a direção dada (a direção das suas projeções) – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **M**) e por uma direção (a direção fornecida). Em seguida, determinaram-se os traços do raio luminoso **l** nos planos de projeção – o seu traço horizontal situa-se no **SPHA** e o seu traço frontal situa-se no **SPFI**. Atendendo a que as sombras reais se situam sempre no **SPHA** ou no **SPFS** (as faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro), o traço horizontal do raio luminoso **l** (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** do ponto **M** ( $M_s$ ) e o traço frontal do raio luminoso **l** (que se situa no **SPFI**) é a **sombra virtual** do ponto **M** ( $M_v$ ).

Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **M** ( $M_s$ ) se situa no **SPHA** (trata-se da sua projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $M_{s1}$ . Tendo em conta que a **sombra virtual** do ponto **M** ( $M_v$ ) se situa no **SPFI** (trata-se de uma projeção frontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $M_{v2}$ . Note que se omitiram as notações referentes às projeções das sombras (real e virtual) que se situam no eixo **X**, por estas não serem necessárias.

**Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O pedido (as sombras real e virtual do ponto **M**) são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso **l**), representaram-se a **leve**.





## 769.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

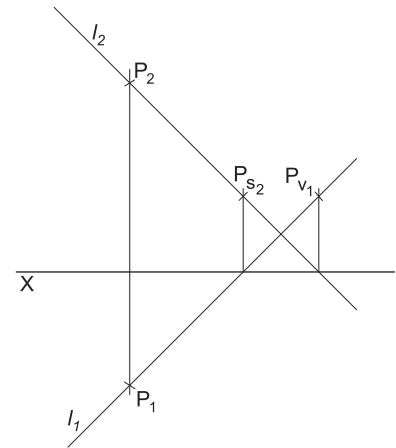
Para determinar as sombras real e virtual do ponto **P** conduziu-se, pelo ponto **P**, um raio luminoso  $l$  com a direção dada (a direção das suas projeções) – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (a direção convencional da luz).

Em seguida, determinaram-se os traços do raio luminoso  $l$  nos planos de projeção – o seu traço frontal situa-se no **SPFS** e o seu traço horizontal situa-se no **SPHP**. Atendendo a que as sombras reais se situam sempre no **SPHA** ou no **SPFS** (as faces do  $1^a$  Diedro), o traço frontal do raio luminoso  $l$  (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** do ponto **P** ( $P_s$ ) e o traço horizontal do raio luminoso  $l$  (que se situa no **SPHP**) é a **sombra virtual** do ponto **P** ( $P_v$ ).

Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **P** ( $P_s$ ) se situa no **SPFS** (trata-se da sua projeção frontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $P_{s2}$ . Tendo em conta que a **sombra virtual** do ponto **P** ( $P_v$ ) se situa no **SPHP** (trata-se de uma projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $P_{v1}$ . Note que se omitiram as notações referentes às projeções das sombras (real e virtual) que se situam no eixo **X**, por estas não serem necessárias.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O pedido (as sombras real e virtual do ponto **M**) são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso  $l$ ), representaram-se a **leve**.



## 770.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

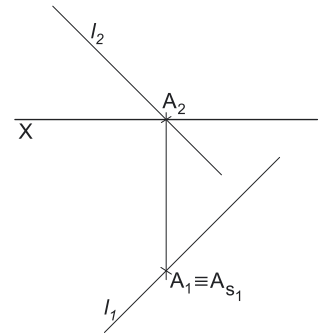
Para determinar a sombra real do ponto **A** conduziu-se, pelo ponto **A**, um raio luminoso  $l$  com a direção dada (a direção das suas projeções) – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção convencional da luz).

Em seguida, constatou-se que o ponto **A** é o próprio traço horizontal do raio luminoso  $l$  – uma vez que o ponto **A** se situa no **SPHA**, a **sombra real** do ponto **A** ( $A_s$ ) é o próprio ponto **A**. Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **A** ( $A_s$ ) se situa no **SPHA** (trata-se da sua projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $A_{s1}$ . Note que se omitiu a notação referente à projeção frontal da sombra (que se situa no eixo **X**), por não ser necessária.

**Conclusão:** a sombra real de qualquer ponto do Plano Horizontal de Projeção é o próprio ponto, ou seja, está coincidente com a projeção horizontal do ponto.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O pedido (a sombra real do ponto **A**) é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso  $l$ ), representaram-se a **leve**.



## 771.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **B**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

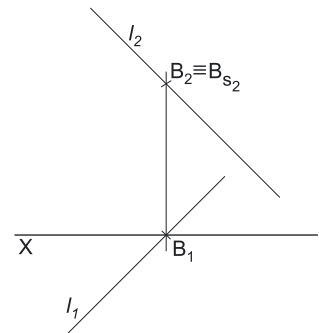
Para determinar a sombra real do ponto **B** conduziu-se, pelo ponto **B**, um raio luminoso  $l$  com a direção dada (a direção das suas projeções) – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (a direção convencional da luz).

Em seguida, constatou-se que o ponto **B** é o próprio traço frontal do raio luminoso  $l$  – uma vez que o ponto **B** se situa no **SPFS**, a **sombra real** do ponto **B** ( $B_s$ ) é o próprio ponto **B**. Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **B** ( $B_s$ ) se situa no **SPFS** (trata-se da sua projeção frontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $B_{s2}$ . Note que se omitiu a notação referente à projeção horizontal da sombra (que se situa no eixo **X**), por não ser necessária.

**Conclusão:** a sombra real de qualquer ponto do Plano Frontal de Projeção é o próprio ponto, ou seja, está coincidente com a projeção frontal do ponto.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O pedido (a sombra real do ponto **B**) é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso  $l$ ), representaram-se a **leve**.





## 774.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **G**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas.

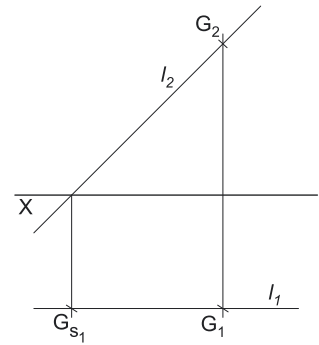
### Resolução:

Para determinar as sombras real e virtual do ponto **G** conduziu-se, pelo ponto **G**, um raio luminoso  $l$  com a direção dada – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **G**) e por uma direção (a direção fornecida). Em seguida, determinaram-se os traços do raio luminoso  $l$  nos planos de projeção. O traço horizontal do raio luminoso situa-se no **SPHA** – atendendo a que as sombras reais se situam sempre no **SPHA** ou no **SPFS** (as faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro), o traço horizontal do raio luminoso  $l$  (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** do ponto **G** ( $G_s$ ). Por outro lado, atendendo a que o raio luminoso  $l$  é uma reta frontal (de frente), que é paralela ao Plano Frontal de Projeção, constata-se que o raio luminoso não intersesta o Plano Frontal de Projeção, pelo que o ponto **G** não tem sombra virtual.

Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **G** ( $G_s$ ) se situa no **SPHA** (trata-se da sua projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $G_{s1}$ . Note que se omitiu a notação referente à projeção da sombra real que se situa no eixo **X**, por não ser necessária.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O pedido (a sombra real do ponto **G**) é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso  $l$ ), representaram-se a **leve**.



## 775.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **A** e o foco luminoso **L**, pelas respetivas projeções, em função das respetivas coordenadas.

### Resolução:

Para determinar a sombra real do ponto **A** conduziu-se, pelo ponto **A**, um raio luminoso  $l$ , que passa pelo foco luminoso **L** – o raio luminoso  $l$  está definido por dois pontos (os pontos **A** e **L**). Para determinar as sombras (real e virtual) do ponto **A** há que, em seguida, determinar os traços do raio luminoso  $l$  nos planos de projeção. O raio luminoso  $l$  é uma **reta de perfil**, cujas projeções **não verificam** o **Crítério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, determinar quaisquer outros pontos do raio luminoso  $l$  para além dos pontos conhecidos (o ponto **A** e o ponto **L**), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**.

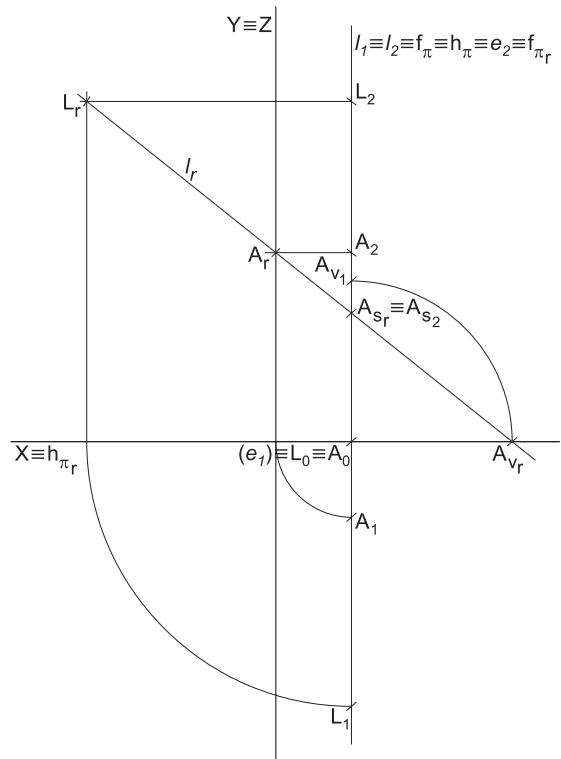
Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil que contém o raio luminoso  $l$ . Nesse sentido, conduziu-se, pelo raio luminoso  $l$ , um plano de perfil  $\pi$  e rebateu-se o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi  $f_\pi$ ). Rebateram-se os pontos **A** e **L**, o que nos permitiu desenhar o raio luminoso  $l$  em rebatimento –  $l_r$  está definido por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $L_r$ ). Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os traços do raio luminoso  $l$  nos planos de projeção.

$A_s$  é a **sombra real** do ponto **A** e é o traço frontal do raio luminoso  $l$  (porque tem cota positiva – situa-se no **SPFS**).  $A_v$  é a **sombra virtual** do ponto **A** e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$  (porque tem afastamento negativo – situa-se no **SPHP**).  $A_{sr}$  é a **sombra real** do ponto **A** em rebatimento e  $A_{vr}$  é a **sombra virtual** do ponto **A** em rebatimento).

Em seguida, inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções das sombras real e virtual do ponto **A**. Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **A** ( $A_s$ ) se situa no **SPFS** (trata-se da sua projeção frontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $A_{s2}$ . Tendo em conta que a **sombra virtual** do ponto **A** ( $A_v$ ) se situa no **SPHP** (trata-se de uma projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $A_{v1}$ . Note que se omitiram as notações referentes às projeções das sombras (real e virtual) que se situam no eixo **X**, por estas não serem necessárias.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido (as sombras real e virtual do ponto **A**) são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso  $l$ , do plano  $\pi$  ou das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, por exemplo), representaram-se a **leve**.



**776.****Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **M**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas.

**Resolução:**

Para determinar a sombra real do ponto **M** conduziu-se, pelo ponto **M**, um raio luminoso  $l$  com a direção luminosa dada – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **M**) e pela sua direção (a direção dada). Para determinar as sombras (real e virtual) do ponto **M** há que, em seguida, determinar os traços do raio luminoso  $l$  nos planos de projeção. O raio luminoso  $l$  é uma **reta de perfil**, cujas projeções **não verificam o Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, determinar quaisquer outros pontos do raio luminoso  $l$  para além do único ponto conhecido (o ponto **M**), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**.

Por outro lado, salienta-se que é dado o ângulo que o raio luminoso faz com o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo, que está contido num plano de perfil (um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção e que contém o raio luminoso  $l$ ), não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, porque o plano que o contém não é paralelo a qualquer dos planos de projeção.

Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção. Substituiu-se o Plano Frontal de Projeção (**plano 2**) por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo ao raio luminoso  $l$ . Nesse sentido, **mantêm-se as projeções horizontais e as cotas** (porque se manteve o Plano Horizontal de Projeção) e **alteram-se as projeções frontais e os afastamentos** (porque se substituiu o Plano Frontal de Projeção). No novo diedro de projeção, formado pelo **plano 1** (o Plano Horizontal de Projeção) e pelo **plano 4**, o raio luminoso  $l$  é uma reta frontal (de frente), pelo que o ângulo que o raio luminoso faz com o Plano Horizontal de Projeção se projeta em verdadeira grandeza no novo plano de projeção (o **plano 4**).

Determinou-se a projeção do ponto **M** no **plano 4** ( $M_4$ ), em função da sua cota, que se manteve. Em seguida, por  $M_4$  conduziu-se  $l_4$  (a projeção do raio luminoso  $l$  no **plano 4**), fazendo, com o Plano Horizontal de Projeção, o ângulo pedido. Note que, das duas hipóteses de medir o ângulo, aquela que a solução apresenta é a única que respeita os dados do enunciado – a sombra real do ponto **M** tem afastamento inferior a **M**. Por fim, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), determinaram-se os traços do raio luminoso  $l$  nos planos de projeção.

$M_s$  é a **sombra real** do ponto **M** e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$  (porque tem afastamento positivo – situa-se no **SPHA**).  $M_v$  é a **sombra virtual** do ponto **M** e é o traço frontal do raio luminoso  $l$  (porque tem cota negativa – situa-se no **SPFI**).  $M_{s_4}$  é a projeção da **sombra real** do ponto **M** no **plano 4** e  $M_{v_4}$  é a projeção da **sombra virtual** do ponto **M** no **plano 4**.

Em seguida, determinaram-se as projeções das sombras real e virtual do ponto **M** no diedro de projeção inicial. A determinação da projeção horizontal de  $M_s$  é imediata. A projeção frontal de  $M_v$  determinou-se em função da sua cota, que se manteve (e que é negativa). Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **M** ( $M_s$ ) se situa no **SPHA** (trata-se da sua projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $M_{s_1}$ . Tendo em conta que a **sombra virtual** do ponto **M** ( $M_v$ ) se situa no **SPFI** (trata-se de uma projeção frontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice –  $M_{v_2}$ . Note que se omitiram as notações referentes às projeções das sombras (real e virtual) que se situam no eixo **X**, por estas não serem necessárias.

**Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O pedido (as sombras real e virtual do ponto **M**) são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso  $l$  ou da projeção do raio luminoso  $l$  no **plano 4**), representaram-se a **leve**.

**777.**

Por **sombra projetada de um segmento de reta no Plano Horizontal de Projeção** entende-se o lugar geométrico das sombras projetadas (no Plano Horizontal de Projeção) de todos os pontos do segmento de reta.

**778.**

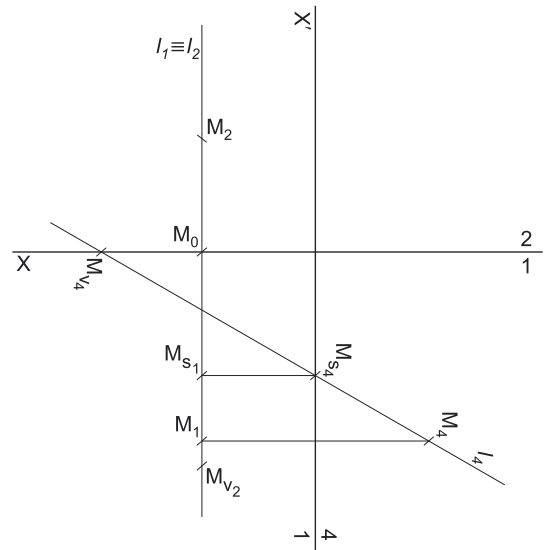
Por **sombra projetada de um segmento de reta no Plano Frontal de Projeção** entende-se o lugar geométrico das sombras projetadas (no Plano Frontal de Projeção) de todos os pontos do segmento de reta.

**779.**

Por **sombra real** de um segmento de reta entende-se a sombra projetada do segmento de reta nas faces do  $1^a$  Diedro, ou seja, a sombra do segmento que se situa no **SPHA** e/ou no **SPFS**.

**780.**

Por **ponto de quebra** na sombra de um segmento de reta entende-se o ponto da sombra do segmento que se situa no eixo **X** e é, precisamente, o ponto em que a **sombra real** do segmento deixa de estar contida no **SPHA** e passa a estar contida no **SPFS**, ou vice-versa.



## 781.

A sombra projetada de um determinado segmento de reta admite a existência de um **ponto de quebra** sempre que as **sombras reais** dos dois extremos do segmento se situam **em planos de projeção distintos**.

## 782.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[AB]**. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

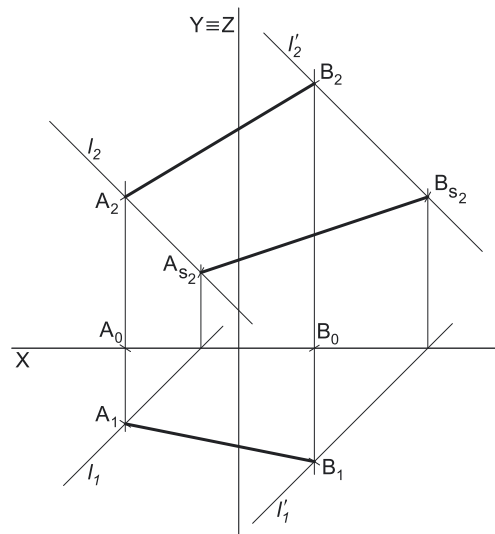
### Resolução:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **A** e **B** (os extremos do segmento) nos Planos de P projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **A** –  $A_{s2}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **B** –  $B_{s2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l'$ . Os raios luminosos  $l$  e  $l'$  são paralelos entre si e são paralelos à direção convencional da luz.

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se no mesmo plano de projeção (o Plano Frontal de Projeção), pelo que a sombra projetada do segmento de reta se situa, na totalidade, no **SPFS**. O segmento de reta  $[A_{s2}B_{s2}]$  é a **sombra projetada (real)** do segmento **[AB]** nos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[AB]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.



Note que, apesar de o segmento de reta **[AB]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 783.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **C** e **D**, pelas respectivas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[CD]**. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

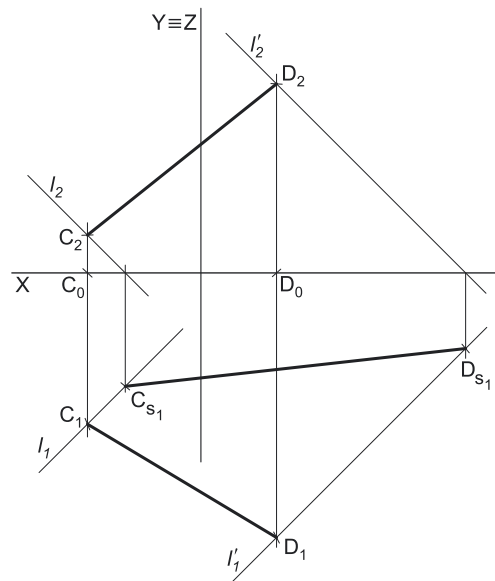
### Resolução:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **C** e **D** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **C** –  $C_{s1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **D** –  $D_{s1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l'$ . Os raios luminosos  $l$  e  $l'$  são paralelos entre si e são paralelos à direção convencional da luz.

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se no mesmo plano de projeção (o Plano Horizontal de Projeção), pelo que a sombra projetada do segmento de reta se situa, na totalidade, no **SPHA**. O segmento de reta  $[C_{s1}D_{s1}]$  é a **sombra projetada (real)** do segmento **[CD]** nos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[CD]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.



Note que, apesar de o segmento de reta **[CD]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

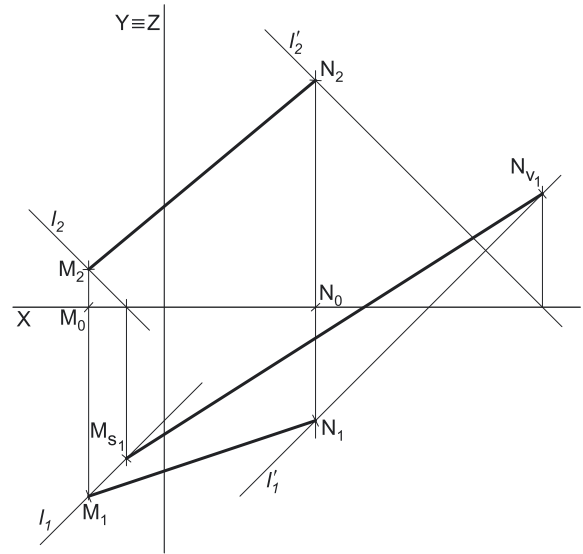
**784.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M** e **N**, pelas respectivas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[MN]**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

Em seguida, determinaram-se as **sombras projetadas no Plano Horizontal de Projeção** dos pontos **M** e **N** (os extremos do segmento). Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta ***l*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **M** – ***M<sub>s1</sub>*** é a **sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção** do ponto **M** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso ***l***. A reta ***l'*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **N** – ***N<sub>v1</sub>*** é a **sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção** do ponto **N** (situa-se no **SPHP**) e é o traço horizontal do raio luminoso ***l'***. Os raios luminosos ***l*** e ***l'*** são paralelos entre si e são paralelos à direção convencional da luz. ***M<sub>s1</sub>*** é a **sombra real** do ponto **M** e ***N<sub>v1</sub>*** é a **sombra virtual** do ponto **N**.

Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[*M<sub>s1</sub>N<sub>v1</sub>*]**, que é a **sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção** do segmento **[MN]**. A parte do segmento **[*M<sub>s1</sub>N<sub>v1</sub>*]** que se situa para cima do eixo **X** é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento **[MN]** no Plano Horizontal de Projeção (pois situa-se no **SPHP**). A parte do segmento **[*M<sub>s1</sub>N<sub>v1</sub>*]** que se situa para baixo do eixo **X** é a **parte real** da sombra projetada do segmento **[MN]** no Plano Horizontal de Projeção (pois situa-se no **SPHA**).

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[MN]** e a sua **sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção** (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[MN]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

**785.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M** e **N**, pelas respectivas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[MN]**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

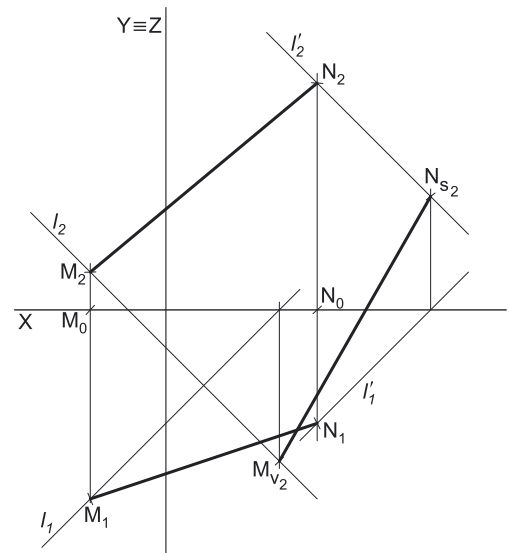
Em seguida, determinaram-se as **sombras projetadas no Plano Frontal de Projeção** dos pontos **M** e **N** (os extremos do segmento). Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta ***l*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **M** – ***M<sub>v2</sub>*** é a **sombra projetada no Plano Frontal de Projeção** do ponto **M** (situa-se no **SPFI**) e é o traço frontal do raio luminoso ***l***. A reta ***l'*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **N** – ***N<sub>s2</sub>*** é a **sombra projetada no Plano Frontal de Projeção** do ponto **N** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso ***l'***. Os raios luminosos ***l*** e ***l'*** são paralelos entre si e são paralelos à direção convencional da luz. ***M<sub>v2</sub>*** é a **sombra virtual** do ponto **M** e ***N<sub>s2</sub>*** é a **sombra real** do ponto **N**.

Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[*M<sub>v2</sub>N<sub>s2</sub>*]**, que é a **sombra projetada no Plano Frontal de Projeção** do segmento **[MN]**. A parte do segmento **[*M<sub>v2</sub>N<sub>s2</sub>*]** que se situa para baixo do eixo **X** é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento **[MN]** no Plano Frontal de Projeção (pois situa-se no **SPFI**). A parte do segmento **[*M<sub>v2</sub>N<sub>s2</sub>*]** que se situa para cima do eixo **X** é a **parte real** da sombra projetada do segmento **[MN]** no Plano Frontal de Projeção (pois situa-se no **SPFS**).

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[MN]** e a sua **sombra projetada no Plano Frontal de Projeção** (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[MN]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.





## 786.

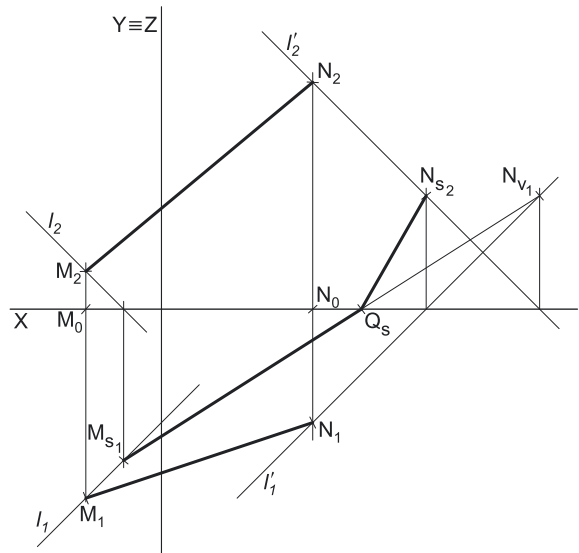
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M** e **N**, pelas respetivas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[MN]**. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **M** e **N** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **M** –  $M_{s1}$  é a sombra real do ponto **M** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **N** –  $N_{s2}$  é a sombra real do ponto **N** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l'$ . Os raios luminosos  $l$  e  $l'$  são paralelos entre si e são paralelos à direção convencional da luz.

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **N** –  $N_{v1}$ ,  $N_{v1}$  é a sombra virtual do ponto **N** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso  $l'$ . O segmento  $[M_{s1}N_{v1}]$  é, assim, a sombra projetada do segmento **[MN]** no Plano Horizontal de Projeção. O ponto de interseção do segmento  $[M_{s1}N_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento).



$Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[MN]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q_sN_{v1}]$  é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento **[MN]** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[M_{s1}Q_s]$  é a **parte real** da sombra projetada do segmento **[MN]** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[Q_sN_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do segmento **[MN]** no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada aberta  $[M_{s1}Q_sN_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento **[MN]** nos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[MN]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[MN]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 787.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, bem como o foco luminoso **L**, pelas respetivas projeções, em função das respetivas coordenadas, e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[AB]**.

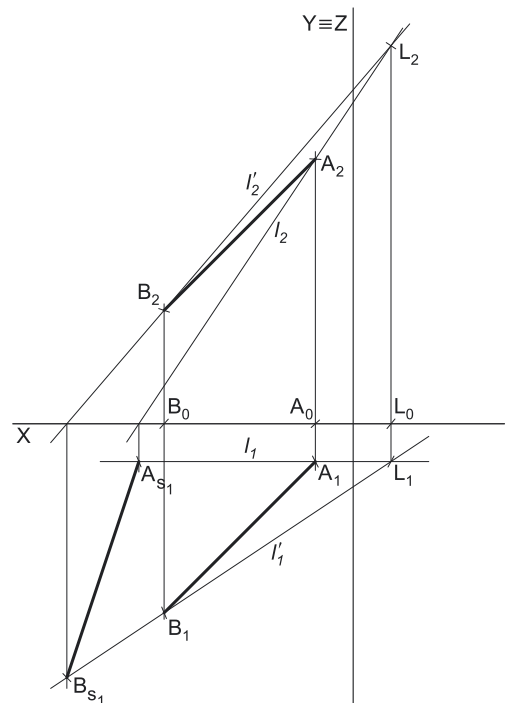
### Resolução:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **A** e **B** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **A** –  $A_{s1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **B** –  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l'$ . Os raios luminosos  $l$  e  $l'$  são concorrentes entre si no foco luminoso **L**.

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se no mesmo plano de projeção (o Plano Horizontal de Projeção), pelo que a sombra projetada do segmento de reta se situa, na totalidade, no **SPHA** – a sombra do segmento **não admite a existência** de **pontos de quebra**. O segmento de reta  $[A_{s1}B_{s1}]$  é a **sombra projetada (real)** do segmento **[AB]** nos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[AB]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que, apesar de o segmento de reta **[AB]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 788.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função das respetivas coordenadas, e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[AB]**. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

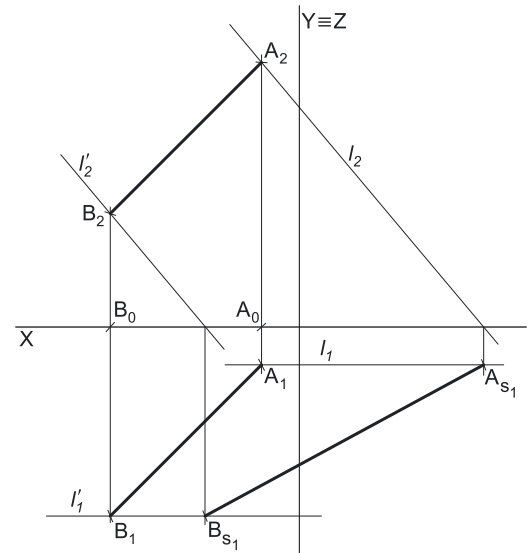
### Resolução:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **A** e **B** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **A** –  $A_{s1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **B** –  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l'$ . Os raios luminosos  $l$  e  $l'$  são paralelos entre si e têm a direção luminosa dada no enunciado.

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se no mesmo plano de projeção (o Plano Horizontal de Projeção), pelo que a sombra projetada do segmento de reta se situa, na totalidade, no **SPHA** – a sombra do segmento **não admite a existência de pontos de quebra**. O segmento de reta  $[A_{s1}B_{s1}]$  é a **sombra projetada (real)** do segmento **[AB]** nos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[AB]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.



Note que, apesar de o segmento de reta **[AB]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 789.

### Dados:

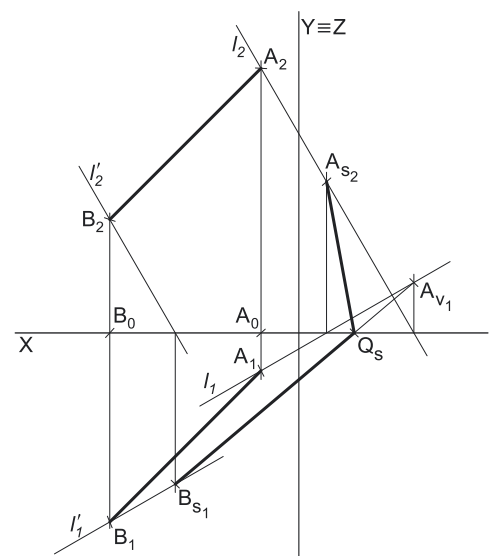
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função das respetivas coordenadas, e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[AB]**.

### Resolução:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **A** e **B** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **A** –  $A_{s2}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **B** –  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l'$ . Os raios luminosos  $l$  e  $l'$  são paralelos entre si e têm a direção luminosa dada no enunciado.

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência de um ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **A** –  $A_{v1}$ .  $A_{v1}$  é a sombra virtual do ponto **A** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . O segmento  $[B_{s1}A_{v1}]$  é, assim, a sombra projetada do segmento **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção. O ponto de interseção do segmento  $[B_{s1}A_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento).

$Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[AB]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q_sA_{v1}]$  é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[B_{s1}Q_s]$  é a **parte real** da sombra projetada do segmento **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[Q_sA_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do segmento **[AB]** no Plano Frontal de Projeção.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A linha quebrada aberta  $[B_{s_1}Q_sA_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[AB]$  nos planos de projeção.

## Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta  $[AB]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta  $[AB]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 790.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $R$ , pelas suas projeções, em função das suas coordenadas, e desenhou-se a projeção horizontal da reta suporte do segmento de reta  $[RS]$ , respeitando o ângulo dado. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do segmento de reta $[RS]$ :

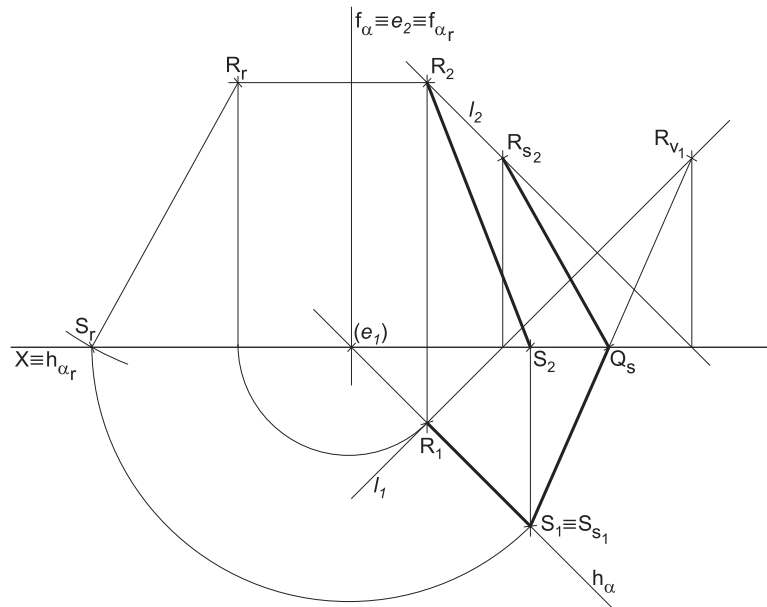
O segmento de reta  $[RS]$  é um segmento de reta oblíquo, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que **não se projeta em verdadeira grandeza** em nenhum dos planos de projeção – não é possível medir os 8 cm do comprimento do segmento em nenhuma das suas projeções, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Assim, optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal do segmento de reta, mas poderia ter-se recorrido, por exemplo, a uma mudança do diedro de projeção.

Nesse sentido, conduziu-se, pelo segmento, um plano  $\alpha$  – o plano projetante horizontal do segmento. O traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_{\alpha_r}$ ) contém a projeção horizontal da reta suporte do segmento, previamente desenhada. Rebateu-se o plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $f_{\alpha}$  – tem-se, imediatamente,  $f_{\alpha} \equiv e_2 \equiv f_{\alpha_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo do rebatimento. Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\alpha$  e determinou-se  $R_r$  (o ponto  $R$  rebatido). Em rebatimento, com o compasso, fazendo centro em  $R_r$  e com 8 cm de raio (o comprimento do segmento), determinou-se  $S_r$  sobre  $h_{\alpha_r}$  (que se situa no eixo  $X$ ). Tenha em atenção que o enunciado refere que o ponto  $S$  tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_{\alpha_r}$ . O segmento  $[R_rS_r]$  é o segmento  $[RS]$  em rebatimento. Invertendo o rebatimento, determinaram-se as projeções do ponto  $S$  e do segmento  $[RS]$ .

#### Determinação da sombra projetada do segmento de reta $[RS]$ :

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos  $R$  e  $S$  (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. O ponto  $S$  é um ponto do Plano Horizontal de Projeção (situa-se no **SPHA**), pelo que a sua **sombra real** está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $S_{s_1} \equiv S_1$ . Pelo ponto  $R$  conduziu-se o raio luminoso  $l$ , com a direção luminosa dada (a direção convencional da luz) –  $R_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $R$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l$ .

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto  $R$  –  $R_{v_1}$ .  $R_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto  $R$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . O segmento  $[S_{s_1}R_{v_1}]$  é, assim, a sombra projetada do segmento  $[RS]$  no Plano Horizontal de Projeção. O ponto de interseção do segmento  $[S_{s_1}R_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

$Q_s$  é a sombra de um ponto  $Q$ , do segmento  $[RS]$ , cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q_sR_{v1}]$  é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento  $[RS]$  no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[S_{s1}Q_s]$  é a **parte real** da sombra projetada do segmento  $[RS]$  no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[Q_sR_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do segmento  $[RS]$  no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada aberta  $[S_{s1}Q_sR_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[RS]$  nos planos de projeção.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta  $[RS]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, do plano  $\alpha$ , das projeções horizontais dos arcos do rebatimento ou, ainda, do segmento  $[RS]$  em rebatimento), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta  $[RS]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 791.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $R$  e  $S$ , pelas respetivas projeções, em função das respetivas coordenadas, e desenharam-se as projeções do segmento de reta  $[RS]$ . A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

#### Resolução:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos  $R$  e  $S$  (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto  $R - R_{s2}$  é a sombra real do ponto  $R$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto  $S - S_{s1}$  é a sombra real do ponto  $S$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l'$ . Os raios luminosos  $l$  e  $l'$  são paralelos entre si e têm a direção luminosa dada no enunciado (a direção convencional da luz).

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto  $R - R_{v1}$ .  $R_{v1}$  é a sombra virtual do ponto  $R$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . O segmento  $[S_{s1}R_{v1}]$  é, assim, a sombra projetada do segmento  $[RS]$  no Plano Horizontal de Projeção. O ponto de interseção do segmento  $[S_{s1}R_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento).

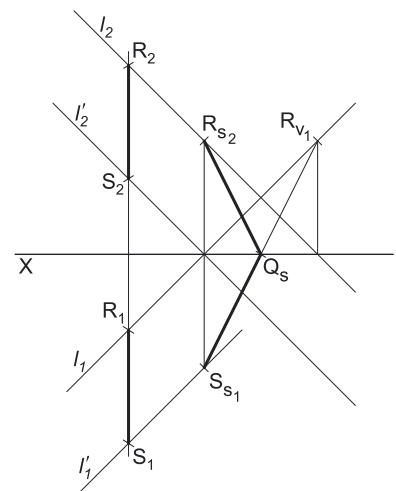
$Q_s$  é a sombra de um ponto  $Q$ , do segmento  $[RS]$ , cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q_sR_{v1}]$  é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento  $[RS]$  no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[S_{s1}Q_s]$  é a **parte real** da sombra projetada do segmento  $[RS]$  no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[Q_sR_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do segmento  $[RS]$  no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada aberta  $[S_{s1}Q_sR_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[RS]$  nos planos de projeção.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta  $[RS]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta  $[RS]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 792.

### Dados:

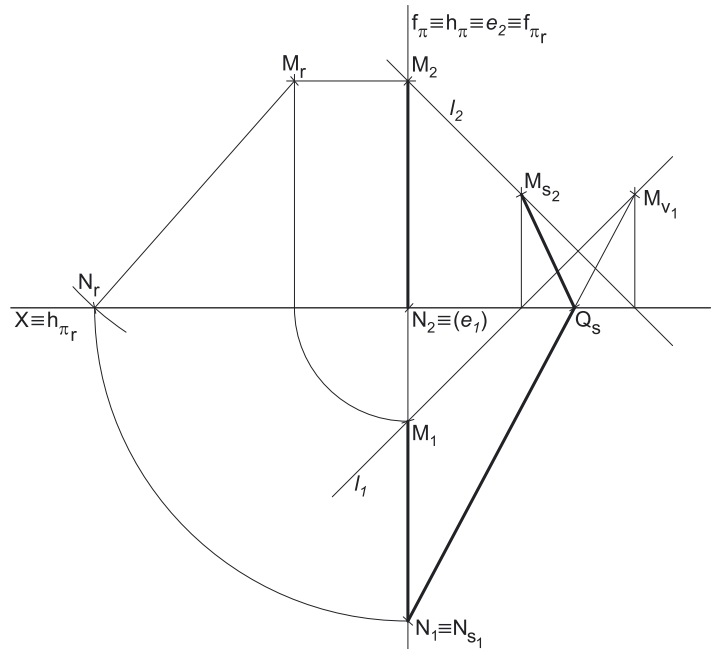
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **M**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas, bem como a projeção frontal do ponto **N** ( $N_2$ ), que se situa no eixo **X**, pois o ponto **N** tem cota nula (é dado no enunciado). Tendo em conta que o segmento de reta **[MN]** é de perfil, as projeções dos dois pontos situam-se na mesma linha de chamada. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do segmento de reta **[MN]**:

O segmento de reta **[MN]** é um segmento de reta de perfil, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que **não se projeta em verdadeira grandeza** em nenhum dos planos de projeção – não é possível medir os 8 cm do comprimento do segmento em nenhuma das suas projeções, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Assim, optou-se pelo rebatimento do plano projetante do segmento de reta, mas poderia ter-se recorrido, por exemplo, a uma mudança do diedro de projeção.

Nesse sentido, conduziu-se, pelo segmento, o plano  $\pi$ , que é o plano de perfil que contém o segmento (o plano projetante do segmento), que se representou pelos seus traços. O plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que os seus traços contêm as projeções homónimas do ponto **M**. Rebateu-se o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $f_\pi$  – tem-se, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo do rebatimento. Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  e determinou-se  $M_r$  (o ponto **M** rebatido). Em rebatimento, com o compasso, fazendo centro em  $M_r$  e com 8 cm de raio (o comprimento do segmento), determinou-se  $N_r$  sobre  $h_{\pi_r}$  (que se situa no eixo **X**). Saliencia-se que o ponto **N** tem cota nula, pelo que o ponto **N** é necessariamente um ponto de  $h_{\pi_r}$ . O segmento  $[M_r N_r]$  é o segmento **[MN]** em rebatimento. Invertendo o rebatimento, determinou-se a projeção horizontal do ponto **N** e desenharam-se as projeções do segmento **[MN]**.



#### Determinação da sombra projetada do segmento de reta **[MN]**:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **M** e **N** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. O ponto **N** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção (situa-se no **SPHA**), pelo que a sua **sombra real** está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $N_{s1} \equiv N_1$ . Pelo ponto **M** conduziu-se o raio luminoso  $l$ , com a direção luminosa dada (a direção convencional da luz) –  $M_{s2}$  é a sombra real do ponto **M** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l$ .

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **M** –  $M_{v1}$ .  $M_{v1}$  é a sombra virtual do ponto **M** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . O segmento  $[N_{s1} M_{v1}]$  é, assim, a sombra projetada do segmento **[MN]** no Plano Horizontal de Projeção. O ponto de interseção do segmento  $[N_{s1} M_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento).

$Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[MN]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q_s M_{v1}]$  é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento **[MN]** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[N_{s1} Q_s]$  é a **parte real** da sombra projetada do segmento **[MN]** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[Q_s M_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do segmento **[MN]** no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada aberta  $[N_{s1} Q_s M_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento **[MN]** nos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[MN]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, do plano  $\pi$ , das projeções horizontais dos arcos do rebatimento ou, ainda, do segmento **[MN]** em rebatimento), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[MN]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

**793.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função das respetivas coordenadas, e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[AB]**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **A** e **B** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta ***l*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **A** – **A<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso ***l***. A reta ***l'*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **B** – **B<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso ***l'***. Os raios luminosos ***l*** e ***l'*** são paralelos entre si e são paralelos à direção luminosa dada (a direção convencional da luz).

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se no mesmo plano de projeção (o Plano Horizontal de Projeção), pelo que a sombra projetada do segmento de reta se situa, na totalidade, no **SPHA** (a sombra do segmento **não admite** a existência de pontos de quebra). O segmento de reta **[A<sub>s1</sub>B<sub>s1</sub>]** é a **sombra projetada (real)** do segmento **[AB]** nos planos de projeção.

Note que o segmento de reta **[A<sub>s1</sub>B<sub>s1</sub>]** é paralelo ao segmento **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>]**, que é a projeção horizontal do segmento **[AB]**, que é um segmento de reta horizontal (de nível) – a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção do segmento de reta é, assim, paralela ao próprio segmento de reta.

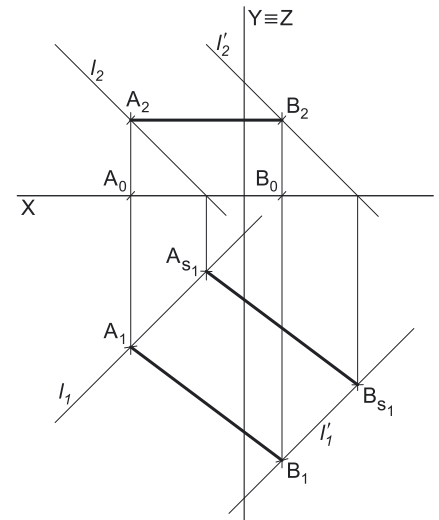
**Conclusão:**

A sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de qualquer segmento de reta paralelo ao Plano Horizontal de Projeção é necessariamente paralela ao próprio segmento (e à sua projeção horizontal). Esta conclusão tem a sua justificação no **plano luz/sombra** que contém o segmento. De facto, a sombra de um qualquer de segmento no Plano Horizontal de Projeção está sobre o traço horizontal do **plano luz/sombra** que o contém (a reta de interseção do plano luz/sombra que contém o segmento com o Plano Horizontal de Projeção). Tendo em conta que retas horizontais (de nível) de um plano são todas paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, qualquer segmento de reta horizontal (de nível) é **necessariamente** paralela à sua sombra no Plano Horizontal de Projeção.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[AB]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[AB]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

**794.****Dados:**

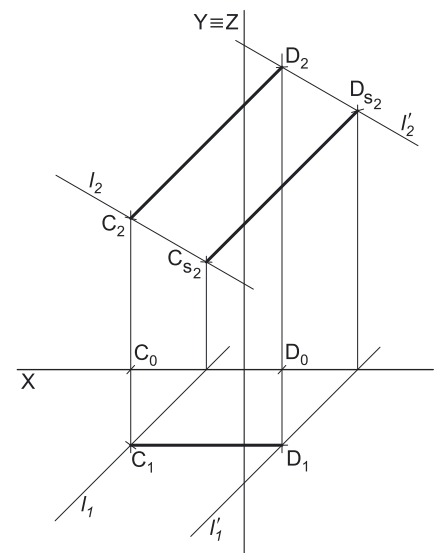
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **C** e **D**, pelas respetivas projeções, em função das respetivas coordenadas, e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[CD]**.

**Resolução:**

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **C** e **D** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta ***l*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **C** – **C<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso ***l***. A reta ***l'*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **D** – **D<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso ***l'***. Os raios luminosos ***l*** e ***l'*** são paralelos entre si e são paralelos à direção luminosa dada (a direção dada no enunciado).

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se no mesmo plano de projeção (o Plano Frontal de Projeção), pelo que a sombra projetada do segmento de reta se situa, na totalidade, no **SPFS** (a sombra do segmento **não admite** a existência de pontos de quebra). O segmento de reta **[C<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>]** é a **sombra projetada (real)** do segmento **[CD]** nos planos de projeção.

Note que o segmento de reta **[C<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>]** é paralelo ao segmento **[C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**, que é a projeção frontal do segmento **[CD]**, que é um segmento de reta frontal (de frente) – a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção do segmento de reta é, assim, paralela ao próprio segmento de reta.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Conclusão:

A sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de qualquer segmento de reta paralelo ao Plano Frontal de Projeção é necessariamente paralela ao próprio segmento (e à sua projeção frontal). Esta conclusão tem a sua justificação no **plano luz/sombra** que contém o segmento. De facto, a sombra de um qualquer de segmento no Plano Frontal de Projeção está sobre o traço frontal do **plano luz/sombra** que o contém (a reta de interseção do plano luz/sombra que contém o segmento com o Plano Frontal de Projeção). Tendo em conta que retas frontais (de frente) de um plano são todas paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, qualquer segmento de reta frontal (de frente) é **necessariamente** paralelo à sua sombra no Plano Frontal de Projeção.

## Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[CD]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[CD]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 795.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **R**, pelas suas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções da reta **h**, a reta suporte do segmento **[RS]** (também em função dos dados). A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do segmento:

A reta **h** (a reta suporte do segmento **[RS]**) é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o segmento se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, sobre **h<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **h**), a partir de **R<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **R**), mediram-se os 7 cm (o comprimento do segmento), o que nos permitiu determinar **S<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **S**), sobre **h<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **h**). Note que se garantiu que **S** tem afastamento positivo, para que o segmento se situe no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro, como é expressamente referido no enunciado. A projeção frontal do ponto **S** (**S<sub>2</sub>**) situa-se sobre a projeção frontal da reta **h** (**h<sub>2</sub>**).

Em seguida, desenharam-se as projeções do segmento de reta **[RS]**.

#### Determinação da sombra projetada do segmento:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **R** e **S** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta **l** é o raio luminoso que passa pelo ponto **R** – **R<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **R** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso **l**. A reta **l'** é o raio luminoso que passa pelo ponto **S** – **S<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **S** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso **l'**. Os raios luminosos **l** e **l'** são paralelos entre si e são paralelos à direção luminosa dada (a direção convencional da luz).

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que o segmento de reta **[RS]** é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento.

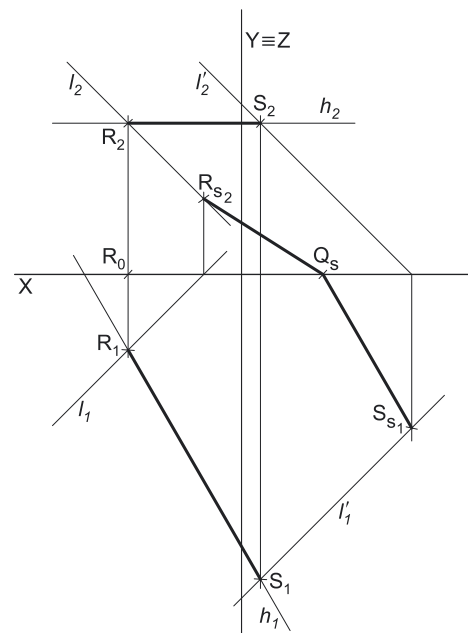
Assim, por **S<sub>s1</sub>** (a sombra real do ponto **S**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[R<sub>1</sub>S<sub>1</sub>]** (a projeção horizontal do segmento) até ao eixo **X**, onde se situa **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento **[RS]**). **Q<sub>s</sub>** é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[RS]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias.

O segmento **[Q<sub>s</sub>S<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[RS]** no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, desenhou-se o segmento **[R<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>]**, que é a **sombra real** do segmento de reta **[RS]** no Plano Frontal de Projeção. A linha quebrada aberta **[R<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>S<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[RS]** nos planos de projeção.

## Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[RS]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta **h** e das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[RS]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 796.

**Dados:**

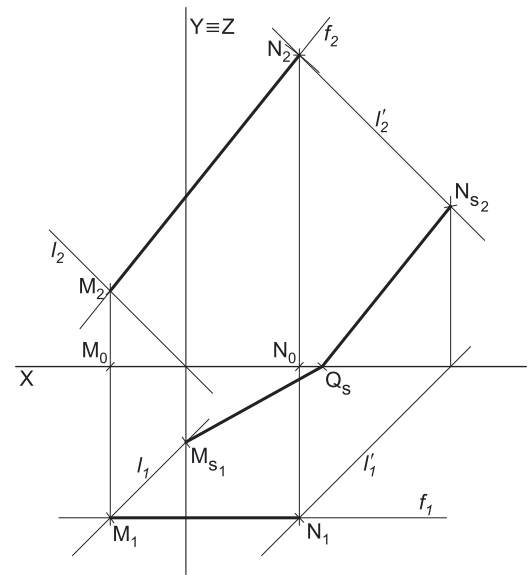
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **M**, pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção horizontal do ponto **N** ( $N_1$ ), bem como desenhar  $f_1$ , a projeção horizontal da reta suporte do segmento de reta (a reta **f**). A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do segmento:*

A reta **f** (a reta suporte do segmento **[MN]**) é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o segmento se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $M_2$  (a projeção frontal do ponto **M**) e com 8 cm de raio, determinou-se  $N_2$  (a projeção frontal do ponto **N**), na respetiva linha de chamada. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da reta **f** ( $f_2$ ), que está definida por dois pontos –  $M_2$  e  $N_2$ . Por fim, desenharam-se as projeções do segmento de reta **[MN]**.

*Determinação da sombra projetada do segmento:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **M** e **N** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **M** –  $M_{s1}$  é a sombra real do ponto **M** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **N** –  $N_{s2}$  é a sombra real do ponto **N** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l'$ . Os raios luminosos  $l$  e  $l'$  são paralelos entre si e são paralelos à direção luminosa dada (a direção convencional da luz).



As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que o segmento de reta **[MN]** é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento.

Assim, por  $N_{s2}$  (a sombra real do ponto **N**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[M_2N_2]$  (a projeção frontal do segmento) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[MN]**).  $Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[MN]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias.

O segmento  $[Q_sN_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento **[MN]** no Plano Frontal de Projeção. Em seguida, desenhou-se o segmento  $[M_{s1}Q_s]$ , que é a **sombra real** do segmento de reta **[MN]** no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[M_{s1}Q_sN_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento **[MN]** nos planos de projeção.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[MN]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta **f** e das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[MN]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 797.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M** e **L** (o foco luminoso), pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção horizontal do ponto **N** ( $N_1$ ), bem como desenhar  $f_1$ , a projeção horizontal da reta suporte do segmento de reta (a reta  $f$ ).

### Resolução:

#### Determinação das projeções do segmento:

A reta  $f$  (a reta suporte do segmento  $[MN]$ ) é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o segmento se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $M_2$  (a projeção frontal do ponto **M**) e com 8 cm de raio, determinou-se  $N_2$  (a projeção frontal do ponto **N**), na respetiva linha de chamada. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da reta  $f(f_2)$ , que está definida por dois pontos –  $M_2$  e  $N_2$ . Por fim, desenharam-se as projeções do segmento de reta  $[MN]$ .

#### Determinação da sombra projetada do segmento:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **M** e **N** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **M** (e pelo foco luminoso **L**) –  $M_{s1}$  é a sombra real do ponto **M** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **N** (e pelo foco luminoso **L**) –  $N_{s2}$  é a sombra real do ponto **N** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l'$ .

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que o segmento de reta  $[MN]$  é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento.

Assim, por  $N_{s2}$  (a sombra real do ponto **N**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[M_2N_2]$  (a projeção frontal do segmento) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[MN]$ ).  $Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do segmento  $[MN]$ , cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias.

O segmento  $[Q_sN_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[MN]$  no Plano Frontal de Projeção. Em seguida, desenhou-se o segmento  $[M_{s1}Q_s]$ , que é a **sombra real** do segmento de reta  $[MN]$  no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[M_{s1}Q_sN_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[MN]$  nos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta  $[MN]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta  $f$  e das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta  $[MN]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 798.

### Dados:

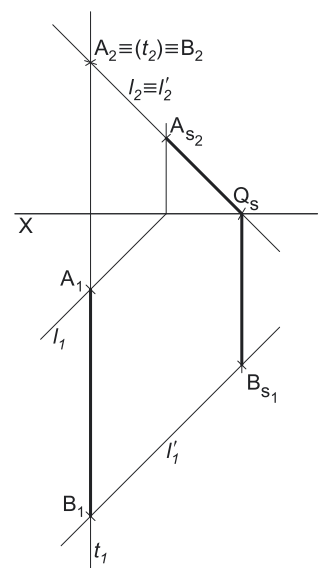
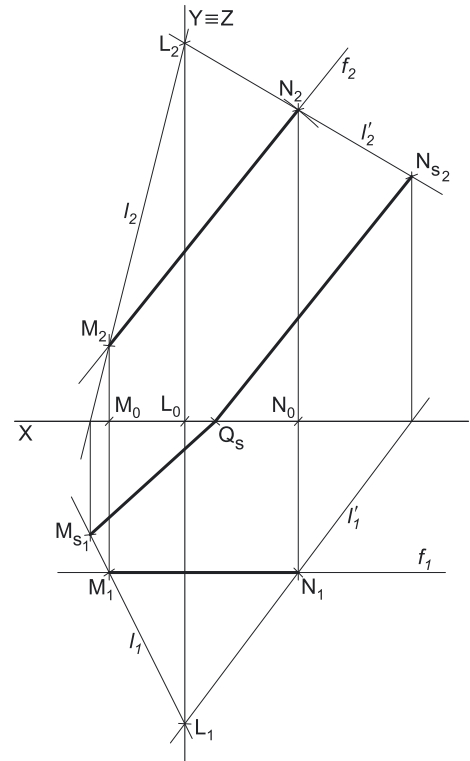
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções da reta  $t$ , a reta suporte do segmento  $[AB]$ . A reta  $t$  é uma reta de topo (uma reta projetante frontal), pelo que a sua projeção frontal ( $t_2$ ) se reduz a um único ponto, sobre a projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ). A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do segmento:

Tendo em conta que os dois pontos (o ponto **A** e o ponto **B**) se situam na mesma projetante frontal (a reta  $t$ ) a projeção frontal do ponto **B** ( $B_2$ ) tem determinação imediata, pois está coincidente com as projeções frontais do ponto **A** e da reta  $t$  – tem-se, imediatamente  $B_2 \equiv (t_2) \equiv A_2$ .

A reta  $t$  (a reta suporte do segmento  $[AB]$ ) é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o segmento se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, sobre  $t_1$  (a projeção horizontal da reta  $t$ ), a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), mediram-se os 6 cm (o comprimento do segmento), o que nos permitiu determinar  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**). Note que se garantiu que **B** tem afastamento positivo, para que o segmento se situe no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como é expressamente referido no enunciado. Em seguida, desenhou-se a projeção horizontal do segmento de reta  $[AB]$  (a sua projeção frontal reduz-se a um único ponto).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação da sombra projetada do segmento:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **A** e **B** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **A** –  $A_{s2}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **B** –  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l'$ . Os raios luminosos  $l$  e  $l'$  são paralelos entre si e são paralelos à direção luminosa dada (a direção convencional da luz).

Note que as projeções frontais dos dois raios luminosos estão necessariamente coincidentes.

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que o segmento de reta **[AB]** é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento.

Recorde que uma reta de topo é **um caso particular das retas horizontais (de nível)** – uma reta de topoé, afinal, uma reta horizontal (de nível) que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção.

Assim, por  $B_{s1}$  (a sombra real do ponto **B**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_1B_1]$  (a projeção horizontal do segmento) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AB]**).  $Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[RS]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias.

O segmento  $[Q_sB_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, desenhou-se o segmento  $[A_{s2}Q_s]$ , que é a **sombra real** do segmento de reta **[AB]** no Plano Frontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[A_{s2}Q_sB_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento **[AB]** nos planos de projeção.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[AB]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta  $t$  e das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[AB]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 799.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções da reta  $v$ , a reta suporte do segmento **[PQ]**. A reta  $v$  é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal), pelo que a sua projeção horizontal ( $v_1$ ) se reduz a um único ponto, sobre a projeção horizontal do ponto **P** ( $P_1$ ). A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do segmento:

Tendo em conta que os dois pontos (o ponto **P** e o ponto **Q**) se situam na mesma projetante horizontal (a reta  $v$ ) a projeção horizontal do ponto **Q** ( $Q_1$ ) tem determinação imediata, pois está coincidente com as projeções horizontais do ponto **P** e da reta  $v$  – tem-se, imediatamente  $Q_1 \equiv (v_1) \equiv P_1$ .

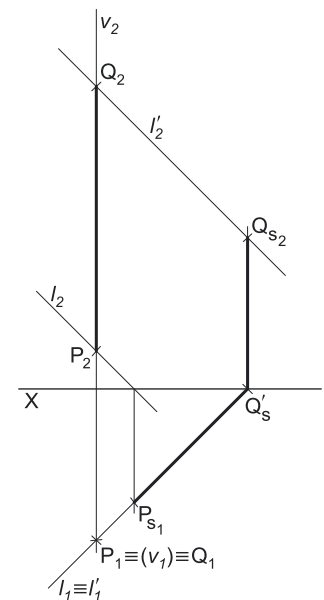
A reta  $v$  (a reta suporte do segmento **[PQ]**) é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o segmento se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, sobre  $v_2$  (a projeção frontal da reta  $v$ ), a partir de  $P_2$  (a projeção frontal do ponto **P**), mediram-se os 7 cm (o comprimento do segmento), o que nos permitiu determinar  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto **Q**). Note que se garantiu que **Q** tem cota positiva, para que o segmento se situe no espaço do  $1^a$  Diedro, como é expressamente referido no enunciado. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal do segmento de reta **[PQ]** (a sua projeção horizontal reduz-se a um único ponto).

##### Determinação da sombra projetada do segmento:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **P** e **Q** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **P** –  $P_{s1}$  é a sombra real do ponto **P** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto **Q** –  $Q_{s2}$  é a sombra real do ponto **Q** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l'$ . Os raios luminosos  $l$  e  $l'$  são paralelos entre si e são paralelos à direção luminosa dada (a direção convencional da luz).

Note que as projeções horizontais dos dois raios luminosos estão necessariamente coincidentes.

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que o segmento de reta **[PQ]** é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Recorde que uma reta vertical é **um caso particular das retas frontais (de frente)** – uma reta vertical é, afinal, uma reta frontal (de frente) que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção.

Assim, por  $Q_{s2}$  (a sombra real do ponto  $Q$ , que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[P_2Q_2]$  (a projeção frontal do segmento) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[PQ]$ ).  $Q'_s$  é a sombra de um ponto  $Q'$ , do segmento  $[PQ]$ , cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias.

O segmento  $[Q'_sQ_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[PQ]$  no Plano Frontal de Projeção. Em seguida, desenhou-se o segmento  $[P_{s1}Q'_s]$ , que é a **sombra real** do segmento de reta  $[PQ]$  no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[P_{s1}Q'_sQ_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[PQ]$  nos planos de projeção.

## Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta  $[PQ]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta  $t$  e das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta  $[PQ]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 800.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta  $h$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $A$  – o ponto  $A$  é o ponto da reta  $h$  que tem 1 cm de afastamento. Por fim, os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção horizontal da reta  $f$  ( $f_1$ ), em função do seu afastamento. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções dos segmentos de reta:

Os dois segmentos de reta são concorrentes, pelo que as respetivas retas suporte também são concorrentes. Nesse sentido, determinaram-se as projeções do ponto de concorrência das retas  $h$  e  $f$  (o ponto  $P$ ), o que nos permitiu, em seguida, desenhar a a projeção frontal da reta  $f$  ( $f_2$ ), em função dos dados (o ângulo que a reta  $f$  faz com o Plano Horizontal de Projeção).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $C$ , que é o ponto da reta  $f$  que tem 1 cm de cota. A reta  $f$  (a reta suporte do segmento  $[CD]$ ) é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o segmento  $[CD]$  se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ), a partir de  $C_2$  (a projeção frontal do ponto  $C$ ), mediram-se os 7 cm (o comprimento do segmento), o que nos permitiu determinar  $D_2$  (a projeção frontal do ponto  $D$ ), sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ). Note que se garantiu que  $D$  tem cota positiva, para que o segmento se situe no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como é expressamente referido no enunciado. A projeção horizontal do ponto  $D$  ( $D_1$ ) situa-se sobre a projeção horizontal da reta  $f$  ( $f_1$ ).

Pelo seu lado, a reta  $h$  (a reta suporte do segmento  $[AB]$ ) é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o segmento  $[AB]$  se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, sobre  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ), a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), mediram-se os 7 cm (o comprimento do segmento), o que nos permitiu determinar  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ), sobre  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). Note que se garantiu que  $B$  tem afastamento positivo, para que o segmento se situe no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como é expressamente referido no enunciado. A projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ) situa-se sobre a projeção frontal da reta  $h$  ( $h_2$ ).

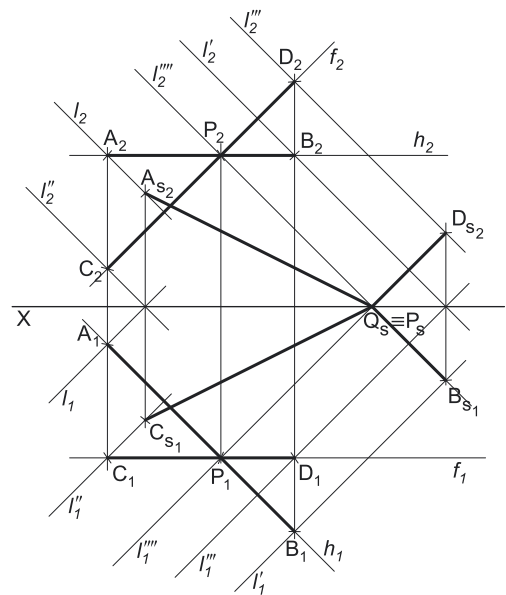
Por fim, desenharam-se as projeções dos segmentos de reta  $[AB]$  e  $[CD]$ .

#### Determinação da sombra projetada do segmento de reta $[AB]$ :

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos  $A$  e  $B$  (os extremos do segmento de reta  $[AB]$ ) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto  $A$  –  $A_{s2}$  é a sombra real do ponto  $A$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto  $B$  –  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto  $B$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l'$ . Os raios luminosos  $l$  e  $l'$  são paralelos entre si e são paralelos à direção luminosa dada (a direção convencional da luz).

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que o segmento de reta  $[AB]$  é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento.

Assim, por  $B_{s1}$  (a sombra real do ponto  $B$ , que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_1B_1]$  (a projeção horizontal do segmento) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[AB]$ ).  $Q_s$  é a sombra de um ponto  $Q$ , do segmento  $[AB]$ , cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O segmento  $[Q_s B_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[AB]$  no Plano Horizontal de Projecção. Em seguida, desenhou-se o segmento  $[A_{s2} Q_s]$ , que é a **sombra real** do segmento de reta  $[AB]$  no Plano Frontal de Projecção. A linha quebrada aberta  $[A_{s2} Q_s B_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[AB]$  nos planos de projecção.

*Determinação da sombra projetada do segmento de reta  $[CD]$ :*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **C** e **D** (os extremos do segmento de reta  $[CD]$ ) nos Planos de Projecção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l''$  é o raio luminoso que passa pelo ponto  $C - C_{s1}$  e a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l''$ . A reta  $l'''$  é o raio luminoso que passa pelo ponto  $D - D_{s2}$  e a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l'''$ . Os raios luminosos  $l''$  e  $l'''$  são paralelos entre si e são paralelos à direção luminosa dada (a direção convencional da luz).

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projecção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que o segmento de reta  $[CD]$  é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projecção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento.

Assim, por  $D_{s2}$  (a sombra real do ponto **D**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[C_2 D_2]$  (a projecção frontal do segmento) até ao eixo **X**, onde se situa o ponto de quebra da sombra do segmento  $[CD]$  – note que o ponto de quebra da sombra do segmento de reta  $[CD]$  é, **nesta situação**, o ponto de quebra da sombra do segmento de reta  $[AB]$ , que já tinha sido determinado. Assim,  $Q_s$  é o ponto de quebra da sombra do segmento de reta  $[CD]$  e é a sombra de um ponto **Q**, do segmento  $[CD]$ . Por outro lado, uma vez que o ponto de quebra das sombras dos dois segmentos de reta é **o mesmo ponto**, conclui-se que existe um ponto pertencente a ambos os segmentos de reta cuja sombra é  $Q_s$  – esse ponto só pode ser o ponto **P**, que é o único ponto que pertence simultaneamente aos dois segmentos de reta (**P** é o ponto de concorrência dos dois segmentos de reta).

Assim, para confirmar esse facto, conduziu-se, pelo ponto **P**, um raio luminoso  $l''''$  e constatou-se que  $Q_s$  é a sombra do próprio ponto **P**, o que se identificou no desenho –  $P_s \equiv Q_s$ .

O segmento  $[Q_s D_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[CD]$  no Plano Frontal de Projecção. Em seguida, desenhou-se o segmento  $[C_{s1} Q_s]$ , que é a **sombra real** do segmento de reta  $[CD]$  no Plano Horizontal de Projecção. A linha quebrada aberta  $[C_{s1} Q_s D_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[CD]$  nos planos de projecção.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – os segmentos de reta  $[AB]$  e  $[CD]$  e as respetivas sombras projetadas nos planos de projecção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta **f**, da reta **h** e das projecções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de os segmentos de reta  $[AB]$  e  $[CD]$  serem **dados** e as respetivas sombras serem **pedidas**, na prática, as sombras **não existiriam** sem os segmentos. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado (os dois segmentos de reta, neste caso), o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projecções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 801.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projecções, em função dos dados. Em seguida, representou-se a reta **p** (a reta suporte do segmento de reta  $[AB]$ ), pelas suas projecções. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projecções.

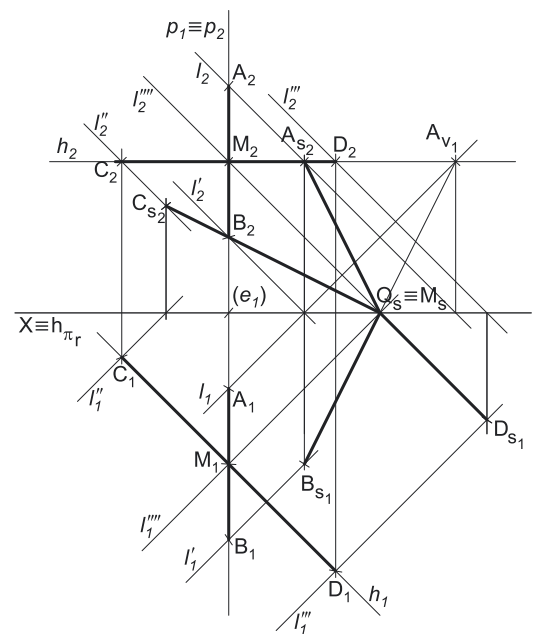
**Resolução:**

*Determinação das projecções dos segmentos de reta:*

Os dois segmentos de reta bissectam-se, pelo que o ponto médio do segmento de reta  $[AB]$  é, também, o ponto médio do segmento de reta  $[CD]$ . Nesse sentido, determinaram-se as projecções do ponto **M**, o ponto médio do segmento de reta  $[AB]$ . Note que se poderia ter recorrido a um processo geométrico auxiliar, para determinar o ponto **M** em rebatimento, mas, na realidade, tal não é necessário – a projecção horizontal do ponto **M** ( $M_1$ ) é, de forma imediata, o ponto médio da projecção horizontal do segmento de reta (o segmento  $[A_1 B_1]$ ), tal como a projecção frontal do ponto **M** ( $M_2$ ) é o ponto médio da projecção frontal do segmento de reta (o segmento  $[A_2 B_2]$ ).

Em seguida, pelas projecções do ponto **M** conduziram-se as projecções homónimas da reta **h**, a reta suporte do segmento de reta  $[CD]$  – a reta **h** está, assim, definida por um ponto (o ponto **M**) e por uma direção (a direção dada no enunciado).

Pelo seu lado, a reta **h** (a reta suporte do segmento  $[CD]$ ) é paralela ao Plano Horizontal de Projecção, pelo que o segmento  $[cd]$  se projeta em verdadeira grandeza em projecção horizontal. Assim, sobre  $h_1$  (a projecção horizontal da reta **h**), a partir de  $M_1$  (a projecção horizontal do ponto **M**), mediram-se 4 cm (metade do comprimento do segmento), o que nos permitiu determinar  $C_1$  (a projecção horizontal do ponto **C**), sobre  $h_1$  (a projecção horizontal da reta **h**). Note que o enunciado é omissivo em relação aos pontos **C** e **D**, pelo que se optou por fazer com que **C** seja o extremo de menor afastamento do segmento de reta  $[CD]$ . A projecção frontal do ponto **C** ( $C_2$ ) situa-se sobre a projecção frontal da reta **h** ( $h_2$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

De forma semelhante, sobre  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ), a partir de  $M_1$  (a projeção horizontal do ponto  $M$ ), mediram-se novamente 4 cm (metade do comprimento do segmento), na direção oposta à anterior, o que nos permitiu determinar  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto  $D$ ), sobre  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ). Note que, neste caso, o ponto  $D$  é o extremo de maior afastamento do segmento de reta  $[CD]$ . A projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ) situa-se sobre a projeção frontal da reta  $h$  ( $h_2$ ).

Por fim, desenharam-se as projeções dos segmentos de reta  $[AB]$  e  $[CD]$ .

#### Determinação da sombra projetada do segmento de reta $[AB]$ :

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos  $A$  e  $B$  (os extremos do segmento de reta  $[AB]$ ) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l$  é o raio luminoso que passa pelo ponto  $A - A_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $A$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l$ . A reta  $l'$  é o raio luminoso que passa pelo ponto  $B - B_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $B$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l'$ . Os raios luminosos  $l$  e  $l'$  são paralelos entre si e são paralelos à direção luminosa dada (a direção convencional da luz).

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que o segmento de reta  $[AB]$  é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento.

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto  $A - A_{v_1}$ .  $A_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto  $A$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . O segmento  $[B_{s_1}A_{v_1}]$  é, assim, a sombra projetada do segmento  $[AB]$  no Plano Horizontal de Projeção. O ponto de interseção do segmento  $[B_{s_1}A_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento).

$Q_s$  é a sombra de um ponto  $Q$ , do segmento  $[AB]$ , cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q_sA_{v_1}]$  é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento  $[AB]$  no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[B_{s_1}Q_s]$  é a **parte real** da sombra projetada do segmento  $[AB]$  no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[Q_sA_{s_2}]$  é a **parte real** da sombra do segmento  $[AB]$  no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada aberta  $[B_{s_1}Q_sA_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[AB]$  nos planos de projeção.

#### Determinação da sombra projetada do segmento de reta $[CD]$ :

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos  $C$  e  $D$  (os extremos do segmento de reta  $[CD]$ ) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta  $l''$  é o raio luminoso que passa pelo ponto  $C - C_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $C$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l''$ . A reta  $l'''$  é o raio luminoso que passa pelo ponto  $D - D_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $D$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l'''$ . Os raios luminosos  $l''$  e  $l'''$  são paralelos entre si e são paralelos à direção luminosa dada (a direção convencional da luz).

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que o segmento de reta  $[CD]$  é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento.

Assim, por  $D_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $D$ , que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[C_1D_1]$  (a projeção horizontal do segmento) até ao eixo  $X$ , onde se situa o ponto de quebra da sombra do segmento  $[CD]$  – note que o ponto de quebra da sombra do segmento de reta  $[CD]$  é, **nesta situação**, o ponto de quebra da sombra do segmento de reta  $[AB]$ , que já tinha sido determinado. Assim,  $Q_s$  é o ponto de quebra da sombra do segmento de reta  $[CD]$  e é a sombra de um ponto  $Q$ , do segmento  $[CD]$ . Por outro lado, uma vez que o ponto de quebra das sombras dos dois segmentos de reta é **o mesmo ponto**, conclui-se que existe um ponto pertencente a ambos os segmentos de reta cuja sombra é  $Q_s$  – esse ponto só pode ser o ponto  $M$ , que é o único ponto que pertence simultaneamente aos dois segmentos de reta ( $M$  é o ponto de concorrência dos dois segmentos de reta).

Assim, para confirmar esse facto, conduziu-se, pelo ponto  $M$ , um raio luminoso  $l''''$  e constatou-se que  $Q_s$  é a sombra do próprio ponto  $M$ , o que se identificou no desenho –  $M_s \equiv Q_s$ .

O segmento  $[Q_sD_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[CD]$  no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, desenhou-se o segmento  $[C_{s_2}Q_s]$ , que é a **sombra real** do segmento de reta  $[CD]$  no Plano Frontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[C_{s_2}Q_sD_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[CD]$  nos planos de projeção.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – os segmentos de reta  $[AB]$  e  $[CD]$  e as respetivas sombras projetadas nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta  $p$ , da reta  $h$  e das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de os segmentos de reta  $[AB]$  e  $[CD]$  serem **dados** e as respetivas sombras serem **pedidas**, na prática, as sombras **não existiriam** sem os segmentos. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado (os dois segmentos de reta, neste caso), o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 802.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **H** e **F**, pelas respectivas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta **r**. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do  $1^\circ$  Diedro (nas faces do  $1^\circ$  Diedro), a parte da reta suscetível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no  $1^\circ$  Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no  $1^\circ$  Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Uma vez que os dois pontos que definem a reta **r** são os traços da reta **r** nos planos de projeção (os pontos **F** e **H**), identificou-se imediatamente a parte da reta que se situa no  $1^\circ$  Diedro. O segmento **[FH]** é a parte da reta que se situa no  $1^\circ$  Diedro – a parte da reta suscetível de produzir sombra nas faces do  $1^\circ$  Diedro. Assim, a sombra projetada da reta corresponde, na prática, à sombra projetada do segmento de reta **[FH]**. Em seguida, determinou-se a sombra do segmento de reta **[FH]**.

O ponto **F** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $F_{s2} \equiv F_2$ . O ponto **H** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $H_{s1} \equiv H_1$ .

As sombras reais dos dois extremos do segmento **[FH]** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **F**. A reta **l** é o raio luminoso que passa pelo ponto **F** –  $F_{v1}$  é a sombra virtual do ponto **F** (situa-se no **SPHP**) e é o traço horizontal do raio luminoso **l**. O raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (a direção convencional da luz).

O segmento  $[H_{s1}F_{v1}]$  é, assim, a sombra projetada do segmento **[FH]** no Plano Horizontal de Projeção. O ponto de interseção do segmento  $[H_{s1}F_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento).

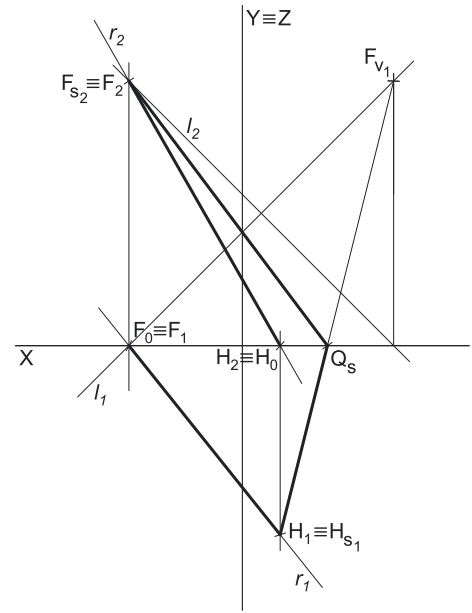
$Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[FH]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q_sF_{v1}]$  é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento **[FH]** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[H_{s1}Q_s]$  é a **parte real** da sombra projetada do segmento **[FH]** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[Q_sF_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do segmento **[FH]** no Plano Frontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[H_{s1}Q_sF_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento **[FH]** nos planos de projeção.

Assim, a linha quebrada aberta  $[H_{s1}Q_sF_{s2}]$  é a **sombra real** da reta **r** nos planos de projeção.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[FH]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta **r**, apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que as suas projeções se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a reta **r** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra da reta **não existiria** sem a reta (a parte da reta que produz sombra no espaço do  $1^\circ$  Diedro). Assim, nos exercícios de sombras (como nesta situação), apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto (o segmento de reta **[FH]**, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 803.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas suas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta **r**. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do  $1^\circ$  Diedro (nas faces do  $1^\circ$  Diedro), a parte da reta suscetível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no  $1^\circ$  Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no  $1^\circ$  Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **r** nos planos de projeção (os pontos **F** e **H**) e identificou-se a parte da reta que se situa no  $1^\circ$  Diedro – a semirreta **H $\dot{B}$**  (a semirreta que se situa para a direita do ponto **H**). Note que o ponto **H** se situa no **SPHA** (que é uma das faces do  $1^\circ$  Diedro) e que o ponto **F** se situa no **SPFI** (que não é qualquer das faces do  $1^\circ$  Diedro). Assim, a sombra projetada (real) da reta **r** corresponde, na prática, à sombra projetada da semirreta **H $\dot{B}$** . Assim, determinou-se a sombra da semirreta **H $\dot{B}$** .

O ponto **H** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $H_{s1} \equiv H_1$ . Em seguida, determinou-se a sombra real do ponto **A**. Para tal, conduziu-se, pelo ponto **A**, um raio luminoso  $l - A_{s1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso **l**. O raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção convencional da luz).

As sombras reais dos dois pontos (**H** e **A**) situam-se no mesmo Plano de Projeção, pelo que se conduziu uma linha reta pelos pontos  $H_{s1}$  e  $A_{s1}$  – essa linha reta interseca o eixo **X** (no ponto  $Q_s$ ), pelo que se conclui que a semirreta **H $\dot{B}$**  produz sombra em Planos de Projeção distintos (a sombra projetada da semirreta **H $\dot{B}$**  admite necessariamente a existência de um ponto de quebra). Nesse sentido, o ponto  $Q_s$  é, imediatamente, o ponto de quebra da sombra da semirreta.

Assim, desenhou-se o segmento de reta  $[H_{s1}, Q_s]$ , que é a sombra real da semirreta **H $\dot{B}$**  no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**).

Para determinar a sombra que a semirreta **H $\dot{B}$**  produz no **SPFS** recorreu-se a uma sombra (no Plano Frontal de Projeção) de um ponto qualquer da reta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer à sombra do ponto **F** (o traço frontal da reta) no Plano Frontal de Projeção. O traço frontal da reta **r** (o ponto **F**) situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – uma vez que o ponto **F** se situa no **SPFI**, a sombra projetada do ponto **F** no Plano Frontal de Projeção é uma **sombra virtual** (tem-se imediatamente  $F_{v2} \equiv F_2$ ).

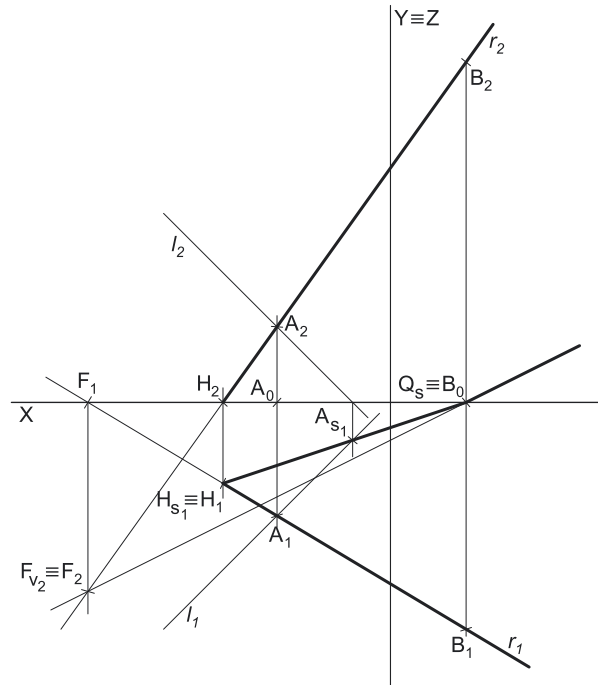
Em seguida, desenhou-se a reta que passa por  $F_{v2}$  e por  $Q_s$  – essa reta é a sombra projetada da reta **r** no Plano Frontal de Projeção, sendo que a parte da reta que se situa para cima do eixo **X** é a **parte real** dessa sombra (porque se situa no **SPFS**). Por oposição, a parte dessa reta que se situa para baixo do eixo **X** é a **parte virtual** dessa sombra (porque se situa no **SPFI**).

Assim, a semirreta com extremo em  $Q_s$  e que está para cima do eixo **X** (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** semirreta **H $\dot{B}$**  no Plano Frontal de Projeção. O segmento de reta  $[H_{s1}, Q_s]$  (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** semirreta **H $\dot{B}$**  no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada infinita que tem um extremo em  $H_{s1}$ , um vértice em  $Q_s$  e que se situa para a direita de  $Q_s$  é a **sombra real** da reta **r** nos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y  $\equiv$  Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a semirreta **H $\dot{B}$**  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta **r**, apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso **l**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a reta **r** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra da reta **não existiria** sem a reta (a parte da reta que produz sombra no espaço do  $1^\circ$  Diedro). Assim, nos exercícios de sombras (como nesta situação), apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto (a semirreta **H $\dot{B}$** , neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 804.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta **m**. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do  $1^\circ$  Diedro (nas faces do  $1^\circ$  Diedro), a parte da reta suscetível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no  $1^\circ$  Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no  $1^\circ$  Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **m** nos planos de projeção (os pontos **F** e **H**) e identificou-se a parte da reta que se situa no  $1^\circ$  Diedro. O segmento **[FH]** é a parte da reta que se situa no  $1^\circ$  Diedro – a parte da reta suscetível de produzir sombra nas faces do  $1^\circ$  Diedro. Assim, a sombra projetada da reta corresponde, na prática, à sombra projetada do segmento de reta **[FH]**. Em seguida, determinou-se a sombra do segmento de reta **[FH]**.

O ponto **F** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $F_{s_2} \equiv F_2$ . O ponto **H** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $H_{s_1} \equiv H_1$ .

As sombras reais dos dois extremos do segmento **[FH]** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra real do ponto **A**. A reta **l** é o raio luminoso que passa pelo ponto **A** –  $A_{s_2}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso **l**. O raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção convencional da luz).

A sombra projetada do segmento **[FH]** tem necessariamente que passar por  $A_{s_2}$ . Assim, desenhou-se um segmento de reta com um extremo em  $F_{s_2}$ , passando por  $A_{s_2}$  e com o outro extremo no eixo **X** – esse extremo é o ponto  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento).

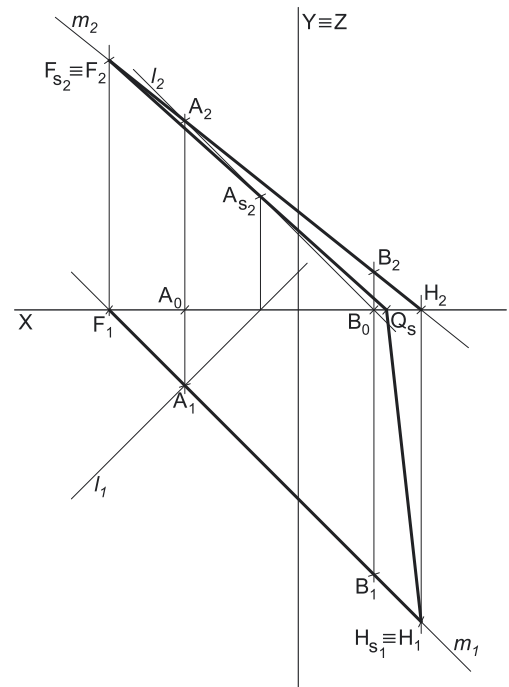
$Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[FH]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[F_{s_2}Q_s]$  (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** do segmento **[FH]** no Plano Frontal de Projeção. O segmento  $[Q_sH_{s_1}]$  (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** do segmento **[FH]** no Plano Horizontal de Projeção.

A linha quebrada aberta  $[F_{s_2}Q_sH_{s_1}]$  é a **sombra real** da reta **m** nos planos de projeção.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[FH]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta **m**, apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que as suas projeções se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a reta **m** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra da reta **não existiria** sem a reta (a parte da reta que produz sombra no espaço do  $1^\circ$  Diedro). Assim, nos exercícios de sombras (como nesta situação), apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto (o segmento de reta **[FH]**, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 805.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **L** (o foco luminoso), pelas respectivas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta **m**.

### Resolução:

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro (nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro), a parte da reta suscetível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **m** nos planos de projeção (os pontos **F** e **H**) e identificou-se a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro. O segmento **[FH]** é a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro – a parte da reta suscetível de produzir sombra nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro. Assim, a sombra projetada da reta corresponde, na prática, à sombra projetada do segmento de reta **[FH]**. Em seguida, determinou-se a sombra do segmento de reta **[FH]**.

O ponto **F** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $F_{s_2} \equiv F_2$ . O ponto **H** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $H_{s_1} \equiv H_1$ .

As sombras reais dos dois extremos do segmento **[FH]** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra real do ponto **B**. A reta **l** é o raio luminoso que passa pelo ponto **B** –  $B_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso **l**. O raio luminoso **l** está definido por dois pontos – o ponto **B** e o ponto **L** (o foco luminoso).

A sombra projetada do segmento **[FH]** tem necessariamente que passar por  $B_{s_1}$ . Assim, desenhou-se um segmento de reta com um extremo em  $H_{s_1}$ , passando por  $B_{s_1}$  e com o outro extremo no eixo **X** – esse extremo é o ponto  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento).

$Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[FH]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[F_{s_2}Q_s]$  (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** do segmento **[FH]** no Plano Frontal de Projeção. O segmento  $[Q_sH_{s_1}]$  (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** do segmento **[FH]** no Plano Horizontal de Projeção.

A linha quebrada aberta  $[F_{s_2}Q_sH_{s_1}]$  é a **sombra real** da reta **m** nos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[FH]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta **m**, apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que as suas projeções se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a reta **m** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra da reta **não existiria** sem a reta (a parte da reta que produz sombra no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro). Assim, nos exercícios de sombras (como nesta situação), apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto (o segmento de reta **[FH]**, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

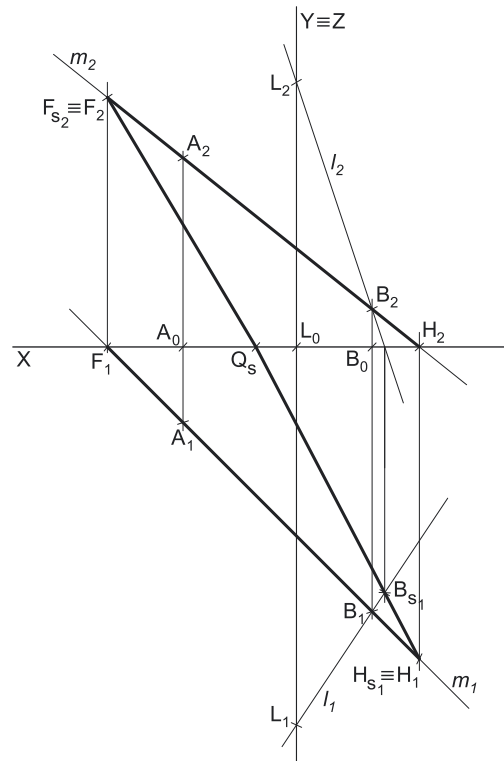
## 806.

Especialmente, para determinar a **sombra de projetada uma reta num plano** conduz-se, pela reta, um plano luz/sombra (ou plano luminoso) – a reta de interseção do plano luz/sombra com esse plano contém a sombra projetada da reta nesse plano.

## 807.

O **plano luz/sombra** de qualquer reta contém **necessariamente** a reta dada e a **fonte luminosa**, onde quer que esta se situe (quer se situe a uma distância finita quer se situe a uma distância infinita).

Assim, considerando uma **direção luminosa** (em que a **fonte luminosa** está situada a uma distância infinita), o **plano luz/sombra** da reta **r** está definido por **duas retas concorrentes** – a reta **r** e um raio luz/sombra (ou raio luminoso) qualquer, concorrente com a reta **r** e com a direção luminosa dada.



**808.**

O plano luz/sombra de qualquer reta contém necessariamente a reta dada e a fonte luminosa, onde quer que esta se situe (quer se situe a uma distância finita quer se situe a uma distância infinita).

Assim, considerando um foco luminoso L (em que a fonte luminosa está situada a uma distância finita), o plano luz/sombra da reta r está definido por uma reta (a reta r) e um ponto exterior à reta (o foco luminoso L).

No entanto, considerando que, pelo ponto L, é possível conduzir infinitos raios luminosos concorrentes com a reta r, pode considerar-se que, mesmo nesse caso, o plano luz/sombra da reta r continua a estar definido por duas retas concorrentes – a reta r e um raio luminoso qualquer, concorrente com a reta r (e passando pelo foco luminoso L).

**809.**

**Dados:**

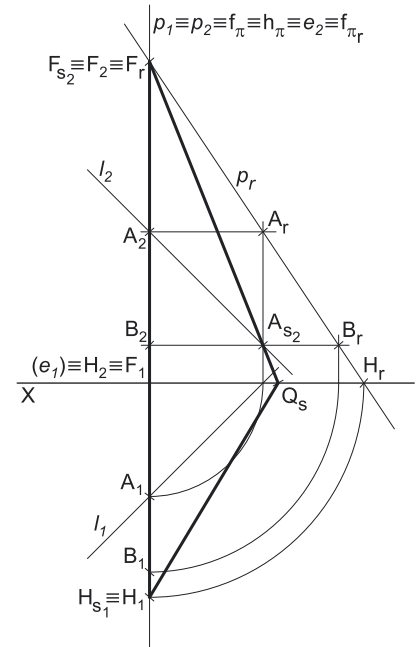
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos A e B, pelas respetivas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta p. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo X, em ambas as projeções.

**Resolução:**

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do 1ª Diedro (nas faces do 1ª Diedro), a parte da reta suscetível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no 1ª Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no 1ª Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Para tal, há que determinar os traços da reta p nos planos de projeção. Salienta-se que a reta p é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o Critério de Reversibilidade, pelo que a determinação dos traços da reta p nos planos de projeção não é direta – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, por exemplo. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano de perfil (o plano projetante da reta), mas poderia ter-se recorrido, por exemplo, a uma mudança do diedro de projeção.

Nesse sentido, conduziu-se, pela reta p, o plano π, que é o plano de perfil que contém a reta (o plano projetante da reta), que se representou pelos seus traços. O plano π é um plano duplamente projetante, pelo que os seus traços contêm as projeções homónimas da reta p. Rebateu-se o plano π para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi f\_π – tem-se, imediatamente, f\_π ≡ e\_2 ≡ f\_πr. Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo do rebatimento. Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano π e determinaram-se A\_r (o ponto A rebatido) e B\_r (o ponto B rebatido). Em seguida, desenhou-se a reta p\_r (a reta p rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos A\_r e B\_r.



A reta p é uma reta do plano π, pelo que tem de verificar a Condição para que uma reta pertença a um plano, em relação ao plano π (tanto no espaço, como em projeções como em rebatimento). Assim, o traço frontal da reta p (o ponto F) tem de estar sobre o traço frontal do plano π (f\_π) pelo que, em rebatimento, o ponto F\_r tem de estar sobre f\_πr (o traço frontal do plano π em rebatimento). Nesse sentido, determinou-se o ponto F\_r (o traço frontal da reta p em rebatimento), que é o ponto de concorrência da reta p\_r (a reta p rebatida) com f\_πr. De forma semelhante, o traço horizontal da reta p (o ponto H) tem de estar sobre o traço horizontal do plano π (h\_π) pelo que, em rebatimento, o ponto H\_r tem de estar sobre h\_πr (o traço horizontal do plano π em rebatimento). Nesse sentido, determinou-se o ponto H\_r (o traço horizontal da reta p em rebatimento), que é o ponto de concorrência da reta p\_r (a reta p rebatida) com h\_πr.

Em seguida, inverteu-se o rebatimento. O ponto F é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, F\_2 ≡ F\_r. Desenhou-se o arco do rebatimento do ponto H (que está contido no Plano Horizontal de Projeção e roda em sentido contrário ao do rebatimento dos pontos A e B) e determinou-se H\_1 (a projeção horizontal do ponto H) sobre a projeção horizontal da reta p (p\_1).

Após a determinação dos traços da reta nos planos de projeção, identificou-se a parte da reta que se situa no espaço do 1ª Diedro – o segmento de reta [FH]. A sombra projetada da reta p nos planos de projeção é, assim, a sombra do segmento de reta [FH] nos planos de projeção.

O ponto F é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, F\_s2 ≡ F\_2. O ponto H é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, H\_s1 ≡ H\_1. As sombras reais dos dois extremos do segmento [FH] situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta admite necessariamente a existência de um ponto de quebra.

Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra real do ponto A. A reta l é o raio luminoso que passa pelo ponto A – A\_s2 é a sombra real do ponto A (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso l. O raio luminoso l está definido por um ponto – (o ponto A) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

A sombra projetada do segmento [FH] tem necessariamente que passar por A\_s2. Assim, desenhou-se um segmento de reta com um extremo em F\_s2, passando por A\_s2 e com o outro extremo no eixo X – esse extremo é o ponto Q\_s (o ponto de quebra da sombra do segmento).

Q\_s é a sombra de um ponto Q, do segmento [FH], cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento [F\_s2Q\_s] (que se situa no SPFS) é a sombra real do segmento [FH] no Plano Frontal de Projeção. O segmento [Q\_sH\_s1] (que se situa no SPHA) é a sombra real do segmento [FH] no Plano Horizontal de Projeção.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A linha quebrada aberta  $[F_{s_2}Q_sH_{s_1}]$  é a **sombra real** da reta  $m$  nos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta  $[FH]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta  $p$ , apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares – caso do plano  $\pi$ , de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  (para a determinação dos traços da reta  $p$ ) e, ainda, das projeções do raio luminoso  $l$ .

Note que, apesar de a reta  $p$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra da reta **não existiria** sem a reta (a parte da reta que produz sombra no espaço do  $1^a$  Diedro). Assim, nos exercícios de sombras (como nesta situação), apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto (o segmento de reta  $[FH]$ , neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 810.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$  e  $B$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta  $p$ . A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

### Resolução:

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do  $1^a$  Diedro (nas faces do  $1^a$  Diedro), a parte da reta suscetível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no  $1^a$  Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no  $1^a$  Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Para tal, há que determinar os traços da reta  $p$  nos planos de projeção. Salienta-se que a reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a determinação dos traços da reta  $p$  nos planos de projeção não é direta – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, à semelhança do efetuado no exercício anterior. No entanto, e conforme o enunciado pede expressamente, recorreu-se ao **plano luz/sombra** da reta – a sombra da reta nos planos de projeção está necessariamente contida nos traços do plano luz/sombra da reta.

O **plano luz/sombra** da reta  $p$  está definido por **duas retas concorrentes** – a reta  $p$  e um raio luminoso concorrente com a reta  $p$ . Assim, pelo ponto  $A$  conduziu-se um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (a direção luminosa convencional). O plano luz/sombra da reta  $p$  está definido por duas retas concorrentes no ponto  $A$  – a reta  $p$  e o raio luminoso  $l$ . Determinemos os traços do plano luz/sombra da reta  $p$  (o plano  $\lambda$ ), nos quais estará contida a sombra projetada da reta  $p$ .

Começamos por determinar o seu traço frontal ( $f_\lambda$ ). Para tal, determinou-se a sombra real do ponto  $A - A_{s_2}$  é a **sombra real** do ponto  $A$  (situa-se no **SPFS**) e é o **traço frontal** do raio luminoso  $l$ . Já temos um ponto para definir  $f_\lambda$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano  $\lambda$  são insuficientes para definir a reta  $f_\lambda$  (o traço frontal do plano  $\lambda$ ), pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\lambda$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

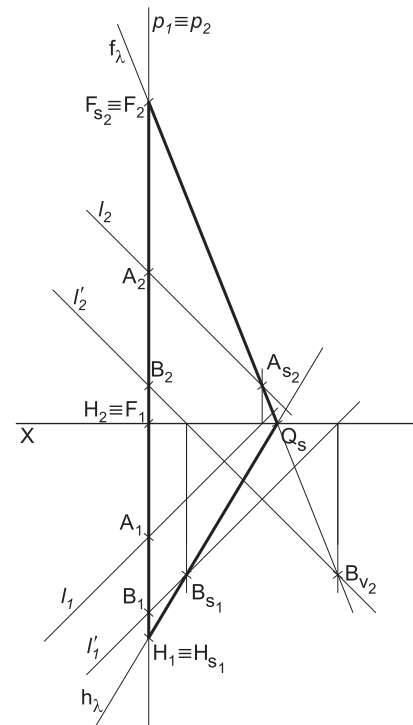
Recorreu-se ao raio luminoso  $l'$ , como reta auxiliar do plano, passando pelo ponto  $B$ . O raio luminoso  $l'$  está definido por um ponto (o ponto  $N$  – o seu ponto de concorrência com a reta  $p$ ) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a sombra real do ponto  $B - B_{s_1}$  é a **sombra real** do ponto  $B$  (situa-se no **SPHA**) e é o **traço horizontal** do raio luminoso  $l'$ . Depois, determinou-se a sombra virtual do ponto  $B - B_{v_2}$  é a **sombra virtual** do ponto  $B$  (situa-se no **SPFI**) e é o **traço frontal** do raio luminoso  $l'$ .

Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\lambda$  (o traço frontal do plano  $\lambda$ ), que está definido por dois pontos – os pontos  $A_{s_2}$  e  $B_{v_2}$  (que são os **traços frontais** dos raios luminosos  $l$  e  $l'$ , respetivamente).

Determinemos, em seguida, o traço horizontal do plano  $\lambda$  ( $h_\lambda$ ). Já temos um ponto para definir  $h_\lambda$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (um ponto do eixo  $X$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A sombra real do ponto  $B$  ( $B_{s_1}$ ) é o **traço horizontal** do raio luminoso  $l'$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\lambda$  –  $h_\lambda$  está definido por dois pontos (o ponto  $B_{s_1}$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\lambda$ ).

Como a reta  $p$  pertence ao plano  $\lambda$ , os seus traços têm de estar sobre os traços homónimos do plano – este raciocínio permitiu-nos determinar os traços da reta  $p$  nos planos de projeção (os pontos  $F$  e  $H$ ), sobre os traços homónimos do plano. O ponto  $F$  situa-se no **SPFS** (tem cota positiva) e o ponto  $H$  situa-se no **SPHA** (tem afastamento positivo). Assim, a parte da reta que produz sombra (a parte da reta que se situa no espaço do  $1^a$  Diedro) é o segmento de reta  $[FH]$  (a parte da reta que se situa no espaço do  $1^a$  Diedro). A sombra projetada da reta  $p$  nos planos de projeção é, assim, a sombra do segmento de reta  $[FH]$  nos planos de projeção.

O ponto  $F$  é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $F_{s_2} \equiv F_2$ . O ponto  $H$  é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $H_{s_1} \equiv H_1$ . As sombras reais dos dois extremos do segmento  $[FH]$  situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que a sombra projetada da reta  $p$  está contida nos traços do plano  $\lambda$  (o plano luz/sombra da reta) nos planos de projeção, o ponto de concorrência dos dois traços do plano é, necessariamente, o ponto de quebra da sombra da reta  $p$ . Nesse sentido, identificou-se o ponto de concorrência dos traços do plano  $\lambda$  como  $Q_s - Q_s$  é a sombra de um ponto  $Q$ , do segmento  $[FH]$ , cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[H_s, Q_s]$  (que está contido em  $h_\lambda$ ) é a **sombra real** do segmento  $[FH]$  no Plano Horizontal de Projeção. O segmento  $[Q_s F_{s2}]$  (que está contido em  $f_\lambda$ ) é a **sombra real** do segmento  $[FH]$  no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada aberta  $[H_s, Q_s F_{s2}]$  é a **sombra real** da reta  $p$  nos planos de projeção.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta  $[FH]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta  $p$ , apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traços do plano  $\lambda$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a reta  $p$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra da reta **não existiria** sem a reta (a parte da reta que produz sombra no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro). Assim, nos exercícios de sombras (como nesta situação), apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto (o segmento de reta  $[FH]$ , neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 811.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $L$  (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta  $p$ .

#### Resolução:

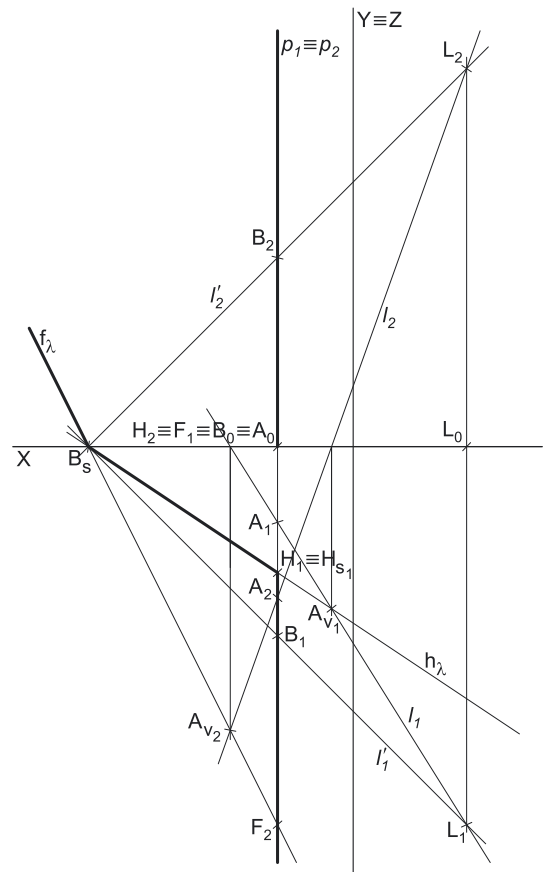
Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro (nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro), a parte da reta suscetível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Para tal, há que determinar os traços da reta  $p$  nos planos de projeção. Salienta-se que a reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a determinação dos traços da reta  $p$  nos planos de projeção não é direta – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar (o **rebatimento do plano de perfil**, ou uma **mudança do diedro de projeção**, por exemplo). No entanto, optou-se por uma resolução que economiza bastante traçado e que consiste em conduzir, pela reta, o respetivo **plano luz/sombra** – a sombra da reta nos planos de projeção está contida nos traços do plano luz/sombra da reta.

O **plano luz/sombra** da reta  $p$  está definido, nesta situação, por **uma reta** (a reta  $p$ ) e um **ponto exterior à reta** (o foco luminoso  $L$ ). No entanto, o **plano luz/sombra** da reta pode também estar definido por **duas retas concorrentes** – a reta  $p$  e um raio luminoso qualquer, concorrente com a reta  $p$ . Assim, pelo ponto  $A$  conduziu-se um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por dois pontos (o ponto  $A$  e o foco luminoso  $L$ ). O plano luz/sombra da reta  $p$  está, agora, definido por duas retas concorrentes no ponto  $A$  – a reta  $p$  e o raio luminoso  $l$ . Determinemos os traços do plano luz/sombra da reta  $p$  (o plano  $\lambda$ ), nos quais estará contida a sombra projetada da reta  $p$ .

Começamos por determinar o seu traço horizontal ( $h_\lambda$ ). Para tal, determinou-se a sombra do ponto  $A$  no Plano Horizontal de Projeção. Note que o ponto  $A$  **não se situa** no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro, pelo que o ponto  $A$  **não tem sombra real** – qualquer sombra do ponto  $A$  é necessariamente uma **sombra virtual**. Assim,  $A_{v1}$  é uma **sombra virtual** do ponto  $A$ , situa-se no **SPHA** e é o **traço horizontal** do raio luminoso  $l$ . Já temos um ponto para definir  $h_\lambda$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano  $\lambda$  são insuficientes para definir a reta  $h_\lambda$  (o traço horizontal do plano  $\lambda$ ), pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\lambda$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se ao raio luminoso  $l'$ , como reta auxiliar do plano, passando pelo ponto  $B$ . O raio luminoso  $l'$  está definido por dois pontos – o ponto  $B$  (o seu ponto de concorrência com a reta  $p$ ) e o ponto  $L$  (o foco luminoso). Note que o raio luminoso  $l'$  é necessariamente uma **reta passante**. Em seguida, determinou-se a sombra real do ponto  $B$  –  $B_s$  é a **sombra real** do ponto  $B$  e situa-se no eixo  $X$  (situa-se tanto no **SPHA** como no **SPFS**), pelo que  $B_s$  é, simultaneamente, o **traço horizontal** do raio luminoso  $l'$  e o **traço frontal** do raio luminoso  $l'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $h_\lambda$  (o traço frontal do plano  $\lambda$ ), que está definido por dois pontos – os pontos  $A_{v1}$  e  $B_s$  (que são os **traços horizontais** dos raios luminosos  $l$  e  $l'$ , respetivamente).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinemos, em seguida, o traço horizontal do plano  $\lambda$  ( $h_\lambda$ ). Já temos um ponto para definir  $f_\lambda$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é o ponto  $B_s$ , pois  $B_s$  situa-se no eixo  $X$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se a sombra do ponto  $A$  no Plano Frontal de Projeção (que é uma outra **sombra virtual** do ponto  $A$ ) –  $A_{v2}$  é outra sombra virtual do ponto  $A$  e é o **traço frontal** do raio luminoso  $l$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_\lambda$  –  $f_\lambda$  está definido por dois pontos (o ponto  $A_{v2}$  e o ponto  $B_s$ , que são os **traços frontais** dos raios luminosos  $l$  e  $l'$ , respetivamente).

Como a reta  $p$  pertence ao plano  $\lambda$ , os seus traços têm de estar sobre os traços homónimos do plano – este raciocínio permitiu-nos determinar os traços da reta  $p$  nos planos de projeção (os pontos  $F$  e  $H$ ), sobre os traços homónimos do plano. O ponto  $F$  situa-se no **SPFI** (tem cota negativa) e o ponto  $H$  situa-se no **SPHA** (tem afastamento positivo). Assim, a parte da reta que produz sombra (a parte da reta que se situa no espaço do  $1^a$  Diedro) é a **semirreta  $\dot{H}B$** . Sublinha-se que o ponto  $A$  **não se situa** no espaço do  $1^a$  Diedro (o ponto  $A$  é um ponto do  $4^a$  Diedro), por oposição do ponto  $B$  que se situa efetivamente no  $1^a$  Diedro. Assim, tendo em conta que o ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $p$ ) se situa no **SPHA** e que o ponto  $B$  se situa no  $1^a$  Diedro, a parte da reta que se situa no espaço do  $1^a$  Diedro é, efetivamente, a semirreta  $\dot{H}B$ .

A sombra projetada da reta  $p$  nos planos de projeção é, assim, a sombra da semirreta  $\dot{H}B$  nos planos de projeção.

Uma vez que o traço frontal do plano  $\lambda$  (o plano luz/sombra da reta  $p$ ) contém a sombra projetada da reta no Plano Frontal de Projeção, a parte de  $f_\lambda$  (o traço frontal do plano  $\lambda$ ) que se situa para cima do eixo  $X$  é a **parte real** dessa sombra (porque se situa no **SPFS**). Por oposição, a parte de  $f_\lambda$  (o traço frontal do plano  $\lambda$ ) que se situa para baixo do eixo  $X$  é a **parte virtual** dessa sombra (porque se situa no **SPFI**). Por outro lado, atendendo a que  $B_s$  se situa no eixo  $X$ ,  $B_s$  é, imediatamente, o ponto de quebra da sombra da reta  $p$ .

Assim, a semirreta com extremo em  $B_s$  e que está para cima do eixo  $X$  (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** semirreta  $\dot{H}B$  no Plano Frontal de Projeção. O segmento de reta  $[H_s, B_s]$  (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** semirreta  $\dot{H}B$  no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada infinita que tem um extremo em  $H_s$ , um vértice em  $B_s$  e que se situa para a esquerda de  $B_s$  é a **sombra real** da reta  $p$  nos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – as projeções da semirreta  $\dot{H}B$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta  $p$ , apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traços do plano  $\lambda$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a reta  $p$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra da reta **não existiria** sem a reta (a parte da reta que produz sombra no espaço do  $1^a$  Diedro). Assim, nos exercícios de sombras (como nesta situação), apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto (a semirreta  $\dot{H}B$ , neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 812.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto  $A$  e a reta  $f$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (a direção dada no enunciado). A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

### Resolução:

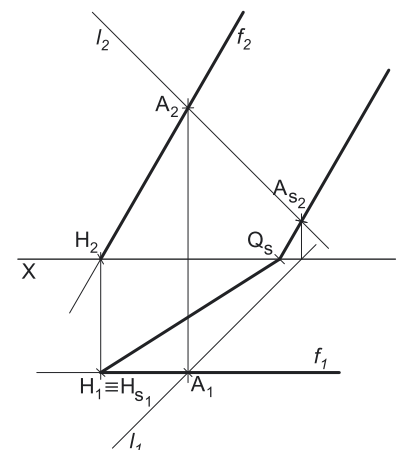
Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do  $1^a$  Diedro (nas faces do  $1^a$  Diedro), a parte da reta suscetível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no  $1^a$  Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no  $1^a$  Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da reta  $f$  (o ponto  $H$ ) e identificou-se a parte da reta que se situa no  $1^a$  Diedro – a semirreta que se situa para a direita do ponto  $H$  (a parte da reta suscetível de produzir sombra nas faces do  $1^a$  Diedro – a parte da reta que tem cota positiva). Assim, a sombra projetada da reta corresponde, na prática, à sombra projetada da semirreta  $\dot{H}A$ . Assim, determinou-se a sombra da semirreta  $\dot{H}A$ .

O ponto  $H$  é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $H_{s1} \equiv H_1$ . Em seguida, determinou-se a sombra real do ponto  $A$ . Para tal, conduziu-se, pelo ponto  $A$ , um raio luminoso  $l - A_{s2}$  é a sombra real do ponto  $A$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l$ . O raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $A$ ) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

As sombras reais dos dois pontos ( $H$  e  $A$ ) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da semirreta  $\dot{H}A$  **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que a reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de uma reta frontal (de frente) é paralela à própria reta.

A sombra projetada da semirreta  $\dot{H}A$  no Plano Frontal de Projeção tem necessariamente que passar por  $A_{s2}$ . Assim, desenhou-se uma semirreta paralela a  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ) e passando por  $A_{s2}$ , com o seu extremo no eixo  $X$  – o extremo da semirreta é o ponto  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra da semirreta).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

$Q_s$  é a sombra de um ponto  $Q$ , da semirreta  $\hat{H}A$  cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. A semirreta  $\hat{Q}_sA_{s_2}$  (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** semirreta  $\hat{H}A$  no Plano Frontal de Projeção. O segmento  $[H_{s_1}Q_s]$  (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** semirreta  $\hat{H}A$  no Plano Horizontal de Projeção.

A linha quebrada infinita que tem um extremo em  $H_{s_1}$ , um vértice em  $Q_s$  e que passa por  $A_{s_2}$  é a **sombra real** da reta  $f$  nos planos de projeção.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a semirreta  $\hat{H}A$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta  $f$ , apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a reta  $f$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra da reta **não existiria** sem a reta (a parte da reta que produz sombra no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro). Assim, nos exercícios de sombras (como nesta situação), apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto (a semirreta  $\hat{H}A$ , neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 813.

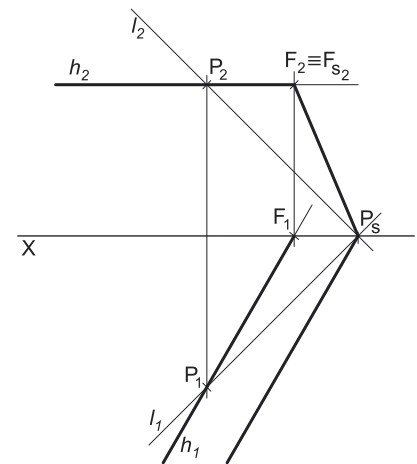
#### Dados:

O ponto  $P$  pertence à reta  $h$ , pelo que tem necessariamente 4 cm de cota (a cota da reta  $h$ ). Por outro lado, atendendo a que pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , o ponto  $P$  tem, também, 4 cm de afastamento. Assim, representaram-se o ponto  $P$  e a reta  $h$ , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (a direção dada no enunciado). A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

#### Resolução:

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro (nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro), a parte da reta suscetível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta  $h$  (o ponto  $F$ ) e identificou-se a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro – a semirreta que se situa para a esquerda do ponto  $F$  (a parte da reta suscetível de produzir sombra nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro – a parte da reta que tem afastamento positivo). Assim, a sombra projetada da reta corresponde, na prática, à sombra projetada da semirreta  $\hat{F}P$ . Assim, determinou-se a sombra da semirreta  $\hat{F}P$ .



O ponto  $F$  é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $F_{s_2} \equiv F_2$ . Em seguida, determinou-se a sombra real do ponto  $P$ . Para tal, conduziu-se, pelo ponto  $P$ , um raio luminoso  $l$ , que é necessariamente uma **reta passante**. Em seguida, determinou-se a sombra real do ponto  $P - P_s$  é a **sombra real** do ponto  $P$  e situa-se no eixo  $X$  (situa-se tanto no **SPHA** como no **SPFS**), pelo que  $P_s$  é, simultaneamente, o **traço horizontal** do raio luminoso  $l$  e o **traço frontal** do raio luminoso  $l$ . Por outro lado, atendendo a que  $B_s$  se situa no eixo  $X$ ,  $B_s$  é, imediatamente, o ponto de quebra da sombra da reta  $h$ .

Uma vez que a reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível), e atendendo a que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de uma reta horizontal (de nível) é paralela à própria reta, sabe-se que a sombra projetada da reta  $h$  no **SPHA** é paralela à própria reta (e paralela a  $h_1$ , a projeção horizontal da reta  $h$ ).

Assim, desenhou-se uma semirreta paralela a  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) e passando por  $P_s$ , que é o ponto de quebra da sombra da semirreta. A semirreta que tem o extremo em  $P_s$  e que se situa para baixo do eixo  $X$  (situa-se no **SPHA**) é a **sombra real** semirreta  $\hat{F}P$  no Plano Horizontal de Projeção. O segmento de reta  $[F_{s_2}P_s]$  (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** semirreta  $\hat{F}P$  no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada infinita que tem um extremo em  $F_{s_2}$ , um vértice em  $Q_s$  e que prossegue para a esquerda de  $P_s$  é a **sombra real** da reta  $h$  nos planos de projeção.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a semirreta  $\hat{F}P$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta  $h$ , apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a reta  $h$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra da reta **não existiria** sem a reta (a parte da reta que produz sombra no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro). Assim, nos exercícios de sombras (como nesta situação), apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto (a semirreta  $\hat{F}P$ , neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 814.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **A** e a reta **v**, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro (nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro), a parte da reta suscetível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Nesse sentido, determinou-se o traço horizontal da reta **v** (o ponto **H**) e identificou-se a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro – a semirreta que se situa para cima do ponto **H** (a parte da reta suscetível de produzir sombra nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro – a parte da reta que tem cota positiva). Assim, a sombra projetada da reta corresponde, na prática, à sombra projetada da semirreta **HĀ**. Assim, determinou-se a sombra da semirreta **HĀ**.

O ponto **H** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $H_{s1} \equiv H_1$ . Em seguida, determinou-se a sombra real do ponto **A**. Para tal, conduziu-se, pelo ponto **A**, um raio luminoso  $l - A_{s2}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l$ . O raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).

As sombras reais dos dois pontos (**H** e **A**) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da semirreta **HĀ** admite necessariamente a existência de um ponto de quebra. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que a reta **v** é uma reta frontal (é um caso particular das retas frontais) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de uma reta frontal (de frente) é paralela à própria reta.

A sombra projetada da semirreta **HĀ** no Plano Frontal de Projeção tem necessariamente que passar por  $A_{s2}$ . Assim, desenhou-se uma semirreta paralela a  $v_2$  (a projeção frontal da reta **v**) e passando por  $A_{s2}$ , com o seu extremo no eixo **X** – o extremo da semirreta é o ponto  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra da semirreta).

$Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, da semirreta **HĀ**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. A semirreta  $Q_s A_{s2}$  (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** semirreta **HĀ** no Plano Frontal de Projeção. O segmento  $[H_1 Q_s]$  (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** semirreta **HĀ** no Plano Horizontal de Projeção.

A linha quebrada infinita que tem um extremo em  $H_{s1}$ , um vértice em  $Q_s$  e que passa por  $A_{s2}$  é a **sombra real** da reta **v** nos planos de projeção.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a semirreta **HĀ** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta **v**, apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a reta **v** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra da reta **não existiria** sem a reta (a parte da reta que produz sombra no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro). Assim, nos exercícios de sombras (como nesta situação), apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto (a semirreta **HĀ**, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 815.

### Dados:

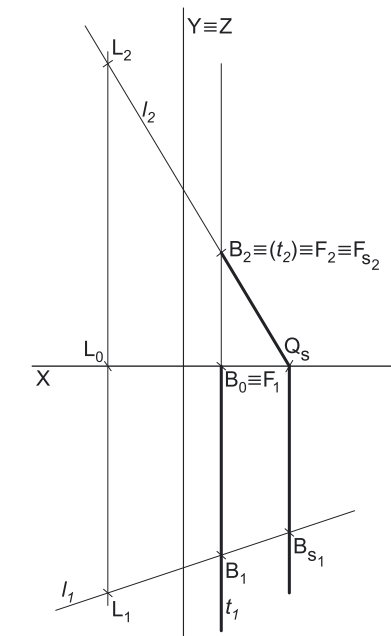
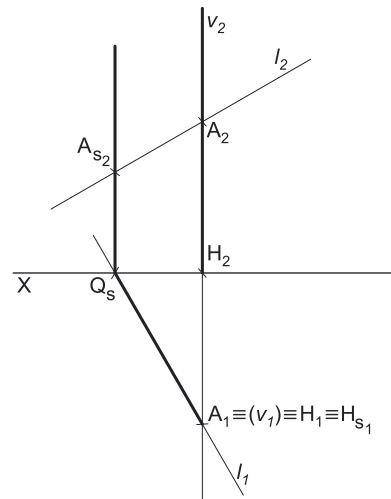
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **B** e **L** (o foco luminoso), bem como a reta **t**, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro (nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro), a parte da reta suscetível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Nesse sentido, determinou-se o traço frontal da reta **t** (o ponto **F**) e identificou-se a parte da reta que se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro – a semirreta que se situa para a frente do ponto **F** (a parte da reta suscetível de produzir sombra nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro – a parte da reta que tem afastamento positivo). Assim, a sombra projetada da reta corresponde, na prática, à sombra projetada da semirreta **FĀ**. Assim, determinou-se a sombra da semirreta **FĀ**.

O ponto **F** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $F_{s2} \equiv F_2$ . Em seguida, determinou-se a sombra real do ponto **B**. Para tal, conduziu-se, pelo ponto **B**, um raio luminoso  $l - B_{s1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . O raio luminoso  $l$  está definido por dois pontos – o ponto **B** e o ponto **L** (o foco luminoso).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As sombras reais dos dois pontos (**F** e **B**) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da semirreta **FB** admite necessariamente a existência de um ponto de quebra. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que a reta **t** é uma reta horizontal (é um caso particular das retas horizontais) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de uma reta horizontal (de nível) é paralela à própria reta.

A sombra projetada da semirreta **FB** no Plano Horizontal de Projeção tem necessariamente que passar por **B<sub>s1</sub>**. Assim, desenhou-se uma semirreta paralela a **t<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **t**) e passando por **B<sub>s1</sub>**, com o seu extremo no eixo **X** – o extremo da semirreta é o ponto **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra da semirreta).

**Q<sub>s</sub>** é a sombra de um ponto **Q**, da semirreta **FB**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. A semirreta **Q<sub>s</sub>B<sub>s1</sub>** (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** semirreta **FB** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento [**F<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>**] (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** semirreta **FB** no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada infinita que tem um extremo em **F<sub>s2</sub>**, um vértice em **Q<sub>s</sub>** e que passa por **B<sub>s1</sub>** é a **sombra real** da reta **t** nos planos de projeção.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a semirreta **FB** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta **t**, apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a reta **t** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra da reta **não existiria** sem a reta (a parte da reta que produz sombra no espaço do *1<sup>o</sup> Diedro*). Assim, nos exercícios de sombras (como nesta situação), apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto (a semirreta **FB**, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 816.

São conhecidos dois métodos para a determinação dos pontos de quebra da sombra de uma figura plana – o **método das sombras virtuais** e o **método do plano luz/sombra passante**.

## 817.

Apesar de os dois métodos serem **universais**, na realidade o **método das sombras virtuais** apresenta graves deficiências quando aplicado à **sombra de círculos**. Assim, o **método do plano luz/sombra passante**, na situação de sombra de **círculos**, apresenta grandes vantagens que se prendem, sobretudo, com o rigor e a eficácia. Nesse sentido, poder-se-á dizer que o **único método absolutamente universal** é o **método do plano luz/sombra passante**, cuja aplicação à determinação dos pontos de quebra de figuras planas é indistinta, quer se trate da sombra de **polígonos** quer se trate da sombra de **círculos**.

Já a aplicação do **método das sombras virtuais** se deve restringir à determinação dos pontos de quebra da sombra de **polígonos**.

## 818.

Por **plano luz/sombra passante** entende-se o lugar geométrico dos pontos do espaço que produzem sombra no eixo **X**, considerando uma qualquer situação luminosa, ou seja, o plano definido por todos esses pontos. Assim sendo, o **plano luz/sombra passante** é um **plano passante** que contém necessariamente o eixo **X** e a fonte luminosa, quer esta se situe a uma distância finita ou a uma distância infinita.

## 819.

O **plano luz/sombra passante** é um **plano passante** que contém necessariamente o eixo **X** e a fonte luminosa, quer esta se situe a uma distância finita ou a uma distância infinita. No caso de se tratar de uma **direção luminosa l**, em que a **fonte luminosa** se situa a uma distância infinita, o **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e um qualquer raio luminoso concorrente com o eixo **X**.

## 820.

O **plano luz/sombra passante** é um **plano passante** que contém necessariamente o eixo **X** e a fonte luminosa, quer esta se situe a uma distância finita ou a uma distância infinita. No caso de se tratar de um **foco luminoso L**, em que a **fonte luminosa** se situa a uma distância finita, o plano luz/sombra passante está definido por uma reta (o eixo **X**) e um ponto exterior à reta (o foco luminoso **L**).

## 821.

O **método do plano luz/sombra passante** consiste em determinar a reta de interseção do plano que contém a figura com o **plano luz/sombra passante** – os pontos de interseção dessa reta com a figura são, imediatamente, os pontos da figura cujas sombras se situam no eixo **X** (sombras essas que são os **pontos de quebra** da sombra da figura).



## 822.

As vantagens do recurso ao **método do plano luz/sombra passante** na determinação da sombra de figuras planas prendem-se com a possibilidade da determinação prévia dos pontos da figura cujas sombras são os pontos de quebra da sombra da figura, antecedendo a determinação da própria sombra da figura plana. Se bem que o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** não apresente grandes vantagens na sombra de **polígonos** em relação a outros processos (nomeadamente em relação ao **método das sombras virtuais**), o mesmo já não se passa no caso da sombra de **círculos** e **circunferências**, em que o recurso ao **plano luz/sombra passante** nos permite, em simultâneo, determinar os pontos das figuras cujas sombras serão os pontos de quebra (com particular rigor), bem como identificar as partes das figuras que produzem sombra num ou noutro plano de projeção.

## 823.

O **processo para a identificação da sombra própria de uma figura** consiste em, considerando um movimento rotativo qualquer, fazer a sequência dos vértices da figura e da figura-sombra, a partir de um mesmo vértice, e analisar a ordem das duas sequências.

1. Se as duas sequências apresentarem os vértices correspondentes **pela mesma ordem**, a face visível da figura está **iluminada**.
2. Se as duas sequências apresentarem os vértices correspondentes **por ordens diferentes**, a face visível está **sombreada** (em **sombra própria**).

## 824.

A sombra projetada da figura no Plano Horizontal de Projeção será uma **ampliação** sempre que a situação luminosa for um **foco luminoso**. A sombra projetada da figura no Plano Horizontal de Projeção será uma **isometria** sempre que a situação luminosa for uma **direção luminosa**.

### NOTA MUITO IMPORTANTE:

A representação das partes visíveis das **sombras projetadas e das sombras próprias das figuras planas e/ou sólidos** pode processar-se de formas distintas. De uma forma geral, e tendo em conta o que é expressamente pedido nos Exames Nacionais da disciplina, essa representação pode ser feita com o preenchimento das áreas do desenho referentes às sombras com um **tracejado** ou através de uma **mancha clara e uniforme**, a grafite, que não oculte os traçados auxiliares que se encontram na área em sombra.

No caso do recurso à **mancha**, aconselha-se que essa mancha seja feita com o recurso a um *esfuminho*.

No caso do recurso ao **tracejado**, e com vista a uma boa representação gráfica das áreas em sombra a que se refere o **tracejado**, aconselha-se que o mesmo seja executado a **leve** e com grande regularidade, com as linhas paralelas sempre à mesma distância entre si (cerca de 1 mm de distância uns dos outros). Por fim, no que respeita à **direção do tracejado**, tem sido prática corrente, nos Exames Nacionais, definir as direções pretendidas que são consonantes com as expressas nas **páginas 119 e 120 do Volume 2 do Manual**. No entanto, salienta-se o facto de não haver nenhuma convenção universal sobre a direção do **tracejado** na representação dos diferentes tipos de sombra.

De qualquer forma, nos Exames Nacionais é dada ao examinando a possibilidade de optar pela representação que entender – **tracejado** ou **mancha**. Nesse sentido, sugere-se que o aluno pratique intensamente os dois tipos de representação, mas que eleja um dos dois como a sua representação preferencial (aquele com o qual melhor se identificar), para o praticar mais intensamente e com ele estar mais familiarizado no dia do Exame.

Neste **Livro de Exercícios**, por uma questão prática, optou-se por recorrer indistintamente à **mancha** ou ao **tracejado**, na identificação das áreas visíveis de sombra.

## 825.

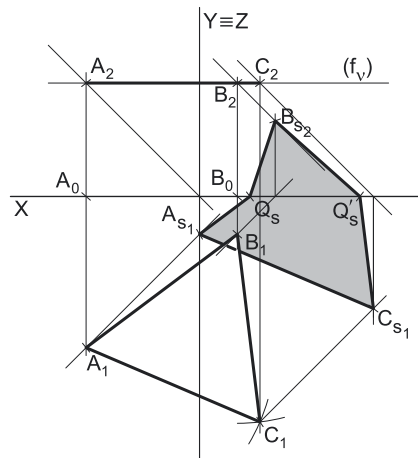
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\nu$  (o plano horizontal que contém a figura) pelo seu traço frontal. O plano  $\nu$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_\nu$ ) passa por  $A_2$  e por  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $\nu$  não tem traço horizontal (é paralelo a Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do triângulo [ABC]:

O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano  $\nu$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**) e de  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**) construiu-se a projeção horizontal do triângulo (em verdadeira grandeza), o que nos permitiu determinar  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**).  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**) situa-se sobre  $f_\nu$ , (o traço frontal do plano  $\nu$ ), pois o plano  $\nu$  é um plano projetante frontal. Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra do triângulo [ABC] nos planos de projeção:*

Em primeiro lugar, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam (e que não se identificaram, para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do triângulo) e por uma direção (a direção convencional da luz).

$A_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **A**.  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**.

As sombras reais dos três vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do triângulo é limitada pelas sombras projetadas dos lados do triângulo nos planos de projeção e os lados do triângulo são segmentos de reta.

$A_{s_1}$  e  $C_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[AC]** do triângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_1}C_{s_1}]$  é a sombra projetada do lado **[AC]** do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPFHA**). O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AB]** e **[BC]** do triângulo – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  teve-se em conta que o lado **[AB]** do triângulo é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A_{s_1}$  (a sombra real do ponto **A**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_1B_1]$  (a projeção horizontal do segmento **[AB]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AB]**) –  $Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do lado **[AB]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q_sB_{s_2}]$  é a **parte real** da sombra do lado **[AB]** no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[A_{s_1}Q_s]$  é a **parte real** da sombra do lado **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}]$  é a **sombra real** do lado **[AB]** nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  teve-se em conta que o lado **[BC]** do triângulo é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s_1}$  (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[B_1C_1]$  (a projeção horizontal do segmento **[BC]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[BC]**) –  $Q'_s$  é a sombra de um ponto **Q'**, do lado **[BC]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[B_{s_2}Q'_s]$  é a **parte real** da sombra do lado **[BC]** no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[Q'_sC_{s_1}]$  é a **parte real** da sombra do lado **[BC]** no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[B_{s_2}Q'_sC_{s_1}]$  é a **sombra real** do lado **[BC]** nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}Q'_sC_{s_1}]$  é a **sombra real** do triângulo **[ABC]** nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do triângulo. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}Q'_sC_{s_1}]$  e o triângulo  $[A_1B_1C_1]$  – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do triângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o triângulo **[ABC]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano  $\nu$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo **[ABC]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o triângulo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o triângulo **[ABC]**, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objeto e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 826.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a figura) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $A_2$  e por  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo a Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

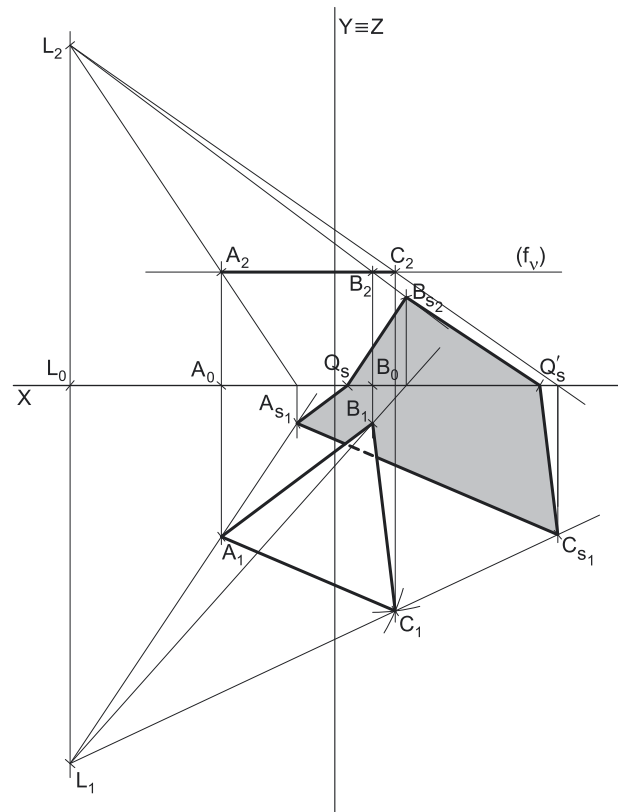
#### Determinação das projeções do triângulo $[ABC]$ :

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $v$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**) e de  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**) construiu-se a projeção horizontal do triângulo (em verdadeira grandeza), o que nos permitiu determinar  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**).  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**) situa-se sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura.

#### Determinação da sombra do triângulo $[ABC]$ nos planos de projeção:

Em primeiro lugar, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam (e que não se identificaram, para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por dois pontos – o respetivo vértice do triângulo e o foco luminoso **L**.

$A_{s1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **A**.  $B_{s2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**.  $C_{s1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**.



As sombras reais dos três vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do triângulo é limitada pelas sombras projetadas dos lados do triângulo nos planos de projeção e os lados do triângulo são segmentos de reta.

$A_{s1}$  e  $C_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado  $[AC]$  do triângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s1}C_{s1}]$  é a sombra projetada do lado  $[AC]$  do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPFHA**). O mesmo já não acontece em relação aos lados  $[AB]$  e  $[BC]$  do triângulo – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s1}$  e  $B_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C_{s1}$  e  $B_{s2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s1}$  e  $B_{s2}$  teve-se em conta que o lado  $[AB]$  do triângulo é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A_{s1}$  (a sombra real do ponto **A**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_1B_1]$  (a projeção horizontal do segmento  $[AB]$ ) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[AB]$ ) –  $Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do lado  $[AB]$ , cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q_sB_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do lado  $[AB]$  no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[A_{s1}Q_s]$  é a **parte real** da sombra do lado  $[AB]$  no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[A_{s1}Q_sB_{s2}]$  é a **sombra real** do lado  $[AB]$  nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s1}$  e  $B_{s2}$  teve-se em conta que o lado  $[BC]$  do triângulo é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s1}$  (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[B_1C_1]$  (a projeção horizontal do segmento  $[BC]$ ) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[BC]$ ) –  $Q'_s$  é a sombra de um ponto **Q'**, do lado  $[BC]$ , cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[B_{s2}Q'_s]$  é a **parte real** da sombra do lado  $[BC]$  no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[Q'_sC_{s1}]$  é a **parte real** da sombra do lado  $[BC]$  no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[B_{s2}Q'_sC_{s1}]$  é a **sombra real** do lado  $[BC]$  nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s1}Q_sB_{s2}Q'_sC_{s1}]$  é a **sombra real** do triângulo  $[ABC]$  nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do triângulo. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s1}Q_sB_{s2}Q'_sC_{s1}]$  e o triângulo  $[A_1B_1C_1]$  – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do triângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o triângulo  $[ABC]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo  $[ABC]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o triângulo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o triângulo  $[ABC]$ , neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 827.

### Dados:

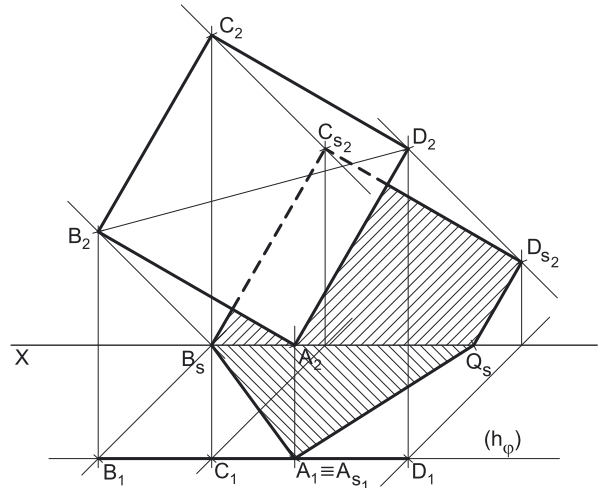
Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do quadrado $[ABCD]$ :

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $\varphi$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não tem deformação). Assim, a partir de  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ), mediu-se (em verdadeira grandeza) o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com o Plano Horizontal de Projeção, o que nos permitiu desenhar a projeção frontal da reta suporte do lado  $[AB]$ . Sobre essa reta mediram-se os 6 cm (a medida do lado do quadrado) e determinou-se  $B_2$ , a projeção frontal do ponto  $B$ .

A partir de  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente), construiu-se a projeção frontal do quadrado, garantindo-se que a figura se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro (como o enunciado pede expressamente), o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos outros dois vértices do quadrado (os pontos  $C$  e  $D$ ) – as suas projeções horizontais situam-se sobre  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.



Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção horizontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

#### Determinação da sombra do quadrado $[ABCD]$ nos planos de projeção:

Em primeiro lugar, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto  $A$  é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s1} \equiv A_1$  (situa-se no **SPHA**).  $C_{s2}$  é a sombra real do ponto  $C$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $C$ .  $D_{s2}$  é a sombra real do ponto  $D$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $D$ .

Por fim, há a referir que o raio luminoso que passa pelo ponto  $B$  é uma **reta passante**, pelo que  $B_s$  (a **sombra real** do ponto  $B$ ) se situa no eixo  $X$  (situa-se tanto no **SPFS** como no **SPHA**). Nesse sentido,  $B_s$  é o **traço frontal** do raio luminoso que passa pelo ponto  $B$  como é, também, o **traço horizontal** desse mesmo raio luminoso.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do quadrado é limitada pelas sombras projetadas dos lados do quadrado nos planos de projeção e os lados do quadrado são segmentos de reta. Sublinha-se que  $B_s$ , situando-se no eixo  $X$ , é, de forma imediata, um **ponto de quebra** da sombra do quadrado (pois é uma sombra que se situa em ambos os Planos de Projeção).

$C_{s2}$  e  $D_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado  $[CD]$  do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s2}D_{s2}]$  é a sombra projetada do lado  $[CD]$  do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).  $C_{s2}$  e  $B_s$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado  $[BC]$  do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_sC_{s2}]$  é a sombra projetada do lado  $[BC]$  do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).  $A_{s1}$  e  $B_s$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado  $[AB]$  do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s1}B_s]$  é a sombra projetada do lado  $[AB]$  do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O mesmo já não acontece em relação ao lado [AD] do quadrado – de facto, existe necessariamente um outro **ponto de quebra** entre  $A_{s1}$  e  $D_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s1}$  e  $D_{s2}$  teve-se em conta que o lado [AD] do quadrado é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $D_{s2}$  (a sombra real do ponto D, que se situa no SPFS) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_2D_2]$  (a projeção frontal do segmento [AD]) até ao eixo X, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [AD]) –  $Q_s$  é a sombra de um ponto Q, do lado [AD], cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q_sD_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do lado [AD] no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[A_{s1}Q_s]$  é a **parte real** da sombra do lado [AD] no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[A_{s1}Q_sD_{s2}]$  é a **sombra real** do lado [AD] nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s1}B_sC_{s2}D_{s2}Q_s]$  é a **sombra real** do quadrado [ABCD] nos planos de projeção. O segmento  $[B_sQ_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do quadrado.

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s1}B_sC_{s2}D_{s2}Q_s]$  e o quadrado  $[A_2B_2C_2D_2]$  – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com **tracejado**. Este foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções. A direção luminosa convencional, em projeção horizontal, faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para a esquerda) com o eixo X, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte da sombra do quadrado que se situa no SPHA) faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para a direita) com o eixo X. A direção luminosa convencional, em projeção frontal, faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para a esquerda) com o eixo X, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte visível da sombra do quadrado que se situa no SPFS) faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para a direita) com o eixo X.

### Traçado:

O eixo X, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o quadrado [ABCD] e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano  $\phi$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou da construção da projeção frontal do quadrado), representaram-se a **leve**. O tracejado que preenche a área visível da sombra projetada do quadrado executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado [ABCD] ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado [ABCD], neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 828.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto A, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ) passa por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto A). O plano  $\phi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo X, em ambas as projeções.

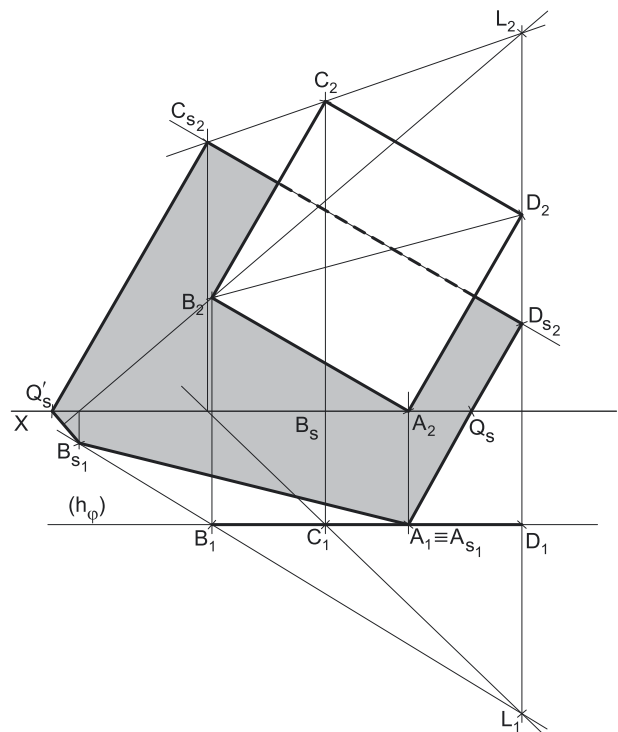
### Resolução:

#### Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\phi$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não tem deformação). Assim, a partir de  $A_2$  (a projeção frontal do ponto A), mediu-se (em verdadeira grandeza) o ângulo que o lado [AB] faz com o Plano Horizontal de Projeção, o que nos permitiu desenhar a projeção frontal da reta suporte do lado [AB]. Sobre essa reta mediram-se os 6 cm (a medida do lado do quadrado) e determinou-se  $B_2$ , a projeção frontal do ponto B.

A partir de  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos A e B, respetivamente), construiu-se a projeção frontal do quadrado, garantindo-se que a figura se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro (como o enunciado pede expressamente), o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos outros dois vértices do quadrado (os pontos C e D) – as suas projeções horizontais situam-se sobre  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção horizontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\phi$  ( $h_\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra do quadrado [ABCD] nos planos de projeção:*

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **L** (o oco luminoso), pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **L** situa-se no mesmo plano de perfil do ponto **D**, pelo que as projeções dos dois pontos se situam na mesma linha de chamada. Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por dois pontos – o respetivo vértice do quadrado e o ponto **L** (o foco luminoso).

O ponto **A** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s1} \equiv A_1$  (situa-se no **SPHA**).  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**.  $C_{s2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **D**.

Por fim, há a referir que o raio luminoso que passa pelo ponto **D** é uma **reta de perfil**, cujas projeções não verificam o **Crítério de Reversibilidade**. Assim, não é possível, de forma imediata, determinar a sombra do ponto **D** nos planos de projeção nem saber, sequer, se a sombra se situa no **SPHA** ou no **SPFS**. De facto, para se determinar o ponto de interseção deste raio luminoso com os planos de projeção é necessário, à partida, o recurso a um **processo geométrico auxiliar** (nomeadamente o recurso ao **rebatimento do plano de perfil** ou a uma **mudança do diedro de projeção**). No entanto, optou-se por uma outra situação, bastante mais simples, como em seguida, se expõe.

Há que ter em conta que o lado **[CD]** do quadrado é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s2}$  (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[C_2D_2]$  (a projeção frontal do segmento **[CD]**) até à linha de chamada dos pontos **D** e **L** – o ponto em que essa reta interseca a linha de chamada do ponto **D** (e do ponto **L**) é  $D_{s2}$ , que é a sombra do ponto **D** no Plano Frontal de Projeção. Uma vez que  $D_{s2}$  tem cota positiva, conclui-se que  $D_{s2}$  se situa no **SPFS**, pelo que  $D_{s2}$  é a **sombra real** do ponto **D**.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do quadrado é limitada pelas sombras projetadas dos lados do quadrado nos planos de projeção e os lados do quadrado são segmentos de reta. A sombra projetada do lado **[CD]** é o segmento  $[C_2D_2]$ , já determinado – este segmento situa-se na totalidade no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[CD]** não admite a existência de pontos de quebra.

$A_{s1}$  e  $B_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[AB]** do quadrado também não admite a existência de pontos de quebra – o segmento de reta  $[A_{s1}B_{s1}]$  é a sombra projetada do lado **[AB]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AD]** e **[BC]** do quadrado – de facto, existe necessariamente um **ponto de quebra** entre  $A_{s1}$  e  $D_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos), tal como existe um outro **ponto de quebra** entre  $B_{s1}$  e  $C_{s2}$  (que também se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s1}$  e  $D_{s2}$  teve-se em conta que o lado **[AD]** do quadrado é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $D_{s2}$  (a sombra real do ponto **D**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_2D_2]$  (a projeção frontal do segmento **[AD]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AD]**) –  $Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do lado **[AD]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q_sD_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do lado **[AD]** no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[A_{s1}Q_s]$  é a **parte real** da sombra do lado **[AD]** no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[A_{s1}Q_sD_{s2}]$  é a **sombra real** do lado **[AD]** nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s1}$  e  $C_{s2}$  teve-se em conta que o lado **[BC]** do quadrado é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s2}$  (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[B_2C_2]$  (a projeção frontal do segmento **[BC]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[BC]**) –  $Q'_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do lado **[BC]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q'_sC_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do lado **[BC]** no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[Q'_sB_{s1}]$  é a **parte real** da sombra do lado **[BC]** no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[B_{s1}Q'_sC_{s2}]$  é a **sombra real** do lado **[BC]** nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s1}B_{s1}Q'_sC_{s2}D_{s2}Q_s]$  é a **sombra real** do quadrado **[ABCD]** nos planos de projeção. O segmento  $[Q'_sQ_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do quadrado.

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s1}B_{s1}Q'_sC_{s2}D_{s2}Q_s]$  e o quadrado  $[A_2B_2C_2D_2]$  – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o quadrado **[ABCD]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano  $\phi$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou da construção da projeção frontal do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado **[ABCD]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado **[ABCD]**, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 829.

### Dados:

Os dados permitiram-nos inferir a coordenadas do ponto **O** (o centro da circunferência circunscrita ao pentágono). De facto, uma vez que a circunferência circunscrita ao pentágono é tangente ao Plano Frontal de Projeção e tem 3,5 cm de raio, depreende-se que o ponto **O** (o seu centro) tem 3,5 cm de afastamento. Por outro lado, atendendo a que o ponto **O** pertence ao  $\beta_{1/3}$  (o bisetor dos diedros ímpares), sabe-se imediatamente que o notório ponto **O** tem cota igual ao afastamento (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**) – o ponto **O** tem 3,5 cm de afastamento e 3,5 cm de cota.

Assim, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas. Em seguida, representou-se o plano  $\nu$  (o plano horizontal que contém a figura) pelo seu traço frontal. O plano  $\nu$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{\nu}$ ) passa por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**). O plano  $\nu$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do pentágono [ABCDE]:

O plano que contém o pentágono [ABCDE] (o plano  $\nu$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao pentágono (que é tangente ao eixo **X**).

O vértice **A**, do pentágono, tem afastamento nulo, pelo que o ponto **A** é o ponto em que a circunferência é tangente ao Plano Frontal de Projeção – este raciocínio permitiu-nos, de imediato, determinar as projeções do ponto **A** e efetuar os traçados necessários à construção da projeção horizontal do polígono. Esta construção permitiu-nos, pelo seu lado, determinar as projeções horizontais dos outros quatro vértices do pentágono, cujas projeções frontais se situam sobre  $f_{\nu}$  (o traço frontal do plano  $\nu$ ), pois o plano  $\nu$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção frontal do pentágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\nu$  ( $f_{\nu}$ ), pois o plano  $\nu$  é um plano projetante frontal.

#### Determinação da sombra do pentágono [ABCDE] nos planos de projeção:

Em primeiro lugar, determinaram-se as **sombras reais** dos cinco vértices do pentágono – os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do pentágono) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

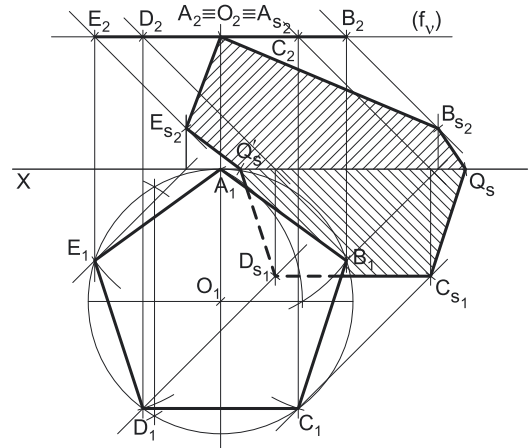
O ponto **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s2} \equiv A_2$  (situa-se no **SPFS**).  $B_{s2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**.  $E_{s2}$  é a sombra real do ponto **E** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **E**.  $C_{s1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**.  $D_{s1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **D**.

As sombras reais dos cinco vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do pentágono **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do pentágono é limitada pelas sombras projetadas dos lados do pentágono nos planos de projeção e os lados da figura são segmentos de reta.

$A_{s2}$  e  $B_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [AB] do pentágono não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $A_{s2}B_{s2}$ ] é a sombra projetada do lado [AB] do pentágono (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).  $A_{s2}$  e  $E_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [AE] do pentágono não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $A_{s2}E_{s2}$ ] é a sombra projetada do lado [AE] do pentágono (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).  $C_{s1}$  e  $D_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado [CD] do pentágono não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $C_{s1}D_{s1}$ ] é a sombra projetada do lado [CD] do pentágono (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados [BC] e [DE] do pentágono – de facto, existe necessariamente um **ponto de quebra** entre  $B_{s2}$  e  $C_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos), bem como um outro **ponto de quebra** entre  $D_{s1}$  e  $E_{s2}$  (que também se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s2}$  e  $C_{s1}$  teve-se em conta que o lado [BC] do pentágono é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s1}$  (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a [ $B_1C_1$ ] (a projeção horizontal do segmento [BC]) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [BC]) –  $Q_s$  é a sombra de um ponto **Q**, do lado [BC], cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento [ $C_{s1}Q_s$ ] é a **parte real** da sombra do lado [BC] no Plano Horizontal de Projeção e o segmento [ $B_{s2}Q_s$ ] é a **parte real** da sombra do lado [BC] no Plano Frontal de Projeção. A linha quebrada aberta [ $C_{s1}Q_sB_{s2}$ ] é a **sombra real** do lado [BC] nos planos de projeção.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $E_{s2}$  e  $D_{s1}$  teve-se em conta que o lado [DE] do pentágono é outro segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $D_{s1}$  (a sombra real do ponto D, que se situa no SPHA) conduziu-se uma reta paralela a  $[D_1E_1]$  (a projeção horizontal do segmento [DE]) até ao eixo X, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [DE]) –  $Q'_s$  é a sombra de um ponto  $Q'$ , do lado [DE], cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento  $[Q'_sD_{s1}]$  é a **parte real** da sombra do lado [DE] no Plano Horizontal de Projeção e o segmento  $[Q'_sE_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do lado [DE] no Plano Frontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[D_{s1}Q'_sE_{s2}]$  é a **sombra real** do lado [DE] nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s1}B_{s2}Q'_sC_{s1}D_{s1}Q'_sE_{s2}]$  é a **sombra real** do pentágono [ABCDE] nos planos de projeção. O segmento  $[Q'_sQ_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do pentágono.

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s1}B_{s2}Q'_sC_{s1}D_{s1}Q'_sE_{s2}]$  e o pentágono  $[A_1B_1C_1D_1E_1]$  – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do pentágono estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com **tracejado**. Este foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções. A direção luminosa convencional, em projeção horizontal, faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para a esquerda) com o eixo X, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte da sombra do quadrado que se situa no SPHA) faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para a direita) com o eixo X. A direção luminosa convencional, em projeção frontal, faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para a esquerda) com o eixo X, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte visível da sombra do quadrado que se situa no SPFS) faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para a direita) com o eixo X.

#### Traçado:

O eixo X, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o pentágono [ABCDE] e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano v (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou da construção da projeção frontal do pentágono), representaram-se a **leve**. O tracejado que preenche a área visível da sombra projetada do quadrado executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de o pentágono [ABCDE] ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o pentágono. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o pentágono [ABCDE], neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 830.

#### Dados:

Os dados permitiram-nos inferir a coordenadas do ponto O (o centro da circunferência circunscrita ao pentágono). De facto, uma vez que a circunferência circunscrita ao pentágono é tangente ao Plano Frontal de Projeção e tem 3,5 cm de raio, depreende-se que o ponto O (o seu centro) tem 3,5 cm de afastamento. Por outro lado, atendendo a que o ponto O pertence ao  $\beta_{1/3}$  (o bissetor dos diedros ímpares), sabe-se imediatamente que o ponto O tem cota igual ao afastamento (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo X) – o ponto O tem 3,5 cm de afastamento e 3,5 cm de cota.

Assim, representou-se o ponto O, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas. Em seguida, representou-se o plano v (o plano horizontal que contém a figura) pelo seu traço frontal. O plano v é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto O). O plano v não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

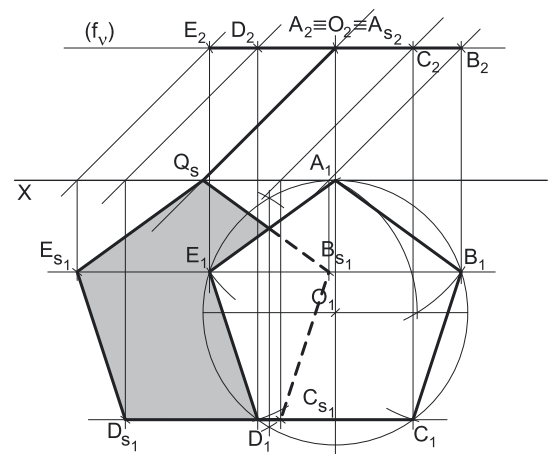
#### Resolução:

##### Determinação das projeções do pentágono [ABCDE]:

O plano que contém o pentágono [ABCDE] (o plano v) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto O) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao pentágono (que é tangente ao eixo X).

O vértice A, do pentágono, tem afastamento nulo, pelo que o ponto A é o ponto em que a circunferência é tangente ao Plano Frontal de Projeção – este raciocínio permitiu-nos, de imediato, determinar as projeções do ponto A e efetuar os traçados necessários à construção da projeção horizontal do polígono. Esta construção permitiu-nos, pelo seu lado, determinar as projeções horizontais dos outros quatro vértices do pentágono, cujas projeções frontais se situam sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano v), pois o plano v é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção frontal do pentágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano v ( $f_v$ ), pois o plano v é um plano projetante frontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra do pentágono [ABCDE] nos planos de projeção:*

Em primeiro lugar, determinaram-se as **sombras reais** dos cinco vértices do pentágono – os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do pentágono) e por uma direção (a direção luminosa frontal dada no enunciado).

O ponto **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s2} \equiv A_2$  (situa-se no **SPFS**).  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**.  $C_{s1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**.  $D_{s1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **D**.  $E_{s1}$  é a sombra real do ponto **E** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **E**.

As sombras reais dos cinco vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do pentágono **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do pentágono é limitada pelas sombras projetadas dos lados do pentágono nos planos de projeção e os lados da figura são segmentos de reta.

$B_{s1}$  e  $C_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[BC]** do pentágono não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s1}C_{s1}]$  é a sombra projetada do lado **[BC]** do pentágono (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).  $C_{s1}$  e  $D_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[CD]** do pentágono não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s1}D_{s1}]$  é a sombra projetada do lado **[CD]** do pentágono (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).  $D_{s1}$  e  $E_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[DE]** do pentágono não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[D_{s1}E_{s1}]$  é a sombra projetada do lado **[DE]** do pentágono (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AB]** e **[AE]** do pentágono – de facto, existe necessariamente um **ponto de quebra** entre  $A_{s2}$  e  $B_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos), bem como um outro **ponto de quebra** entre  $A_{s1}$  e  $E_{s1}$  (que também se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s2}$  e  $B_{s1}$  teve-se em conta que o lado **[AB]** do pentágono é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B_{s1}$  (a sombra real do ponto **B**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_1B_1]$  (a projeção horizontal do segmento **[AB]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AB]**). O segmento  $[Q_sB_{s1}]$  é a **parte real** da sombra do lado **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção e o segmento  $[Q_sA_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do lado **[AB]** no Plano Frontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[A_{s2}Q_sB_{s1}]$  é a **sombra real** do lado **[AB]** nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s2}$  e  $E_{s1}$  teve-se em conta que o lado **[AE]** do pentágono é outro segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $E_{s1}$  (a sombra real do ponto **E**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_1E_1]$  (a projeção horizontal do segmento **[AE]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AE]**). Note que, nesta situação, o ponto de quebra da sombra do lado **[AE]** é o mesmo ponto de quebra da sombra do lado **[AB]** do pentágono – o ponto  $Q_s$ . O segmento  $[Q_sE_{s1}]$  é a **parte real** da sombra do lado **[AE]** no Plano Horizontal de Projeção e o segmento  $[Q_sA_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do lado **[AE]** no Plano Frontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[A_{s2}Q_sE_{s1}]$  é a **sombra real** do lado **[AE]** nos planos de projeção.

Note que, **nesta situação particular**, acontece um fenómeno particular nas sombras – é a que sombra do ponto **A** é «arrastada» ao longo do raio luminoso que passa pelo ponto **A** até ao eixo **X**, onde se situa o ponto  $Q_s$ . Assim, o ponto  $Q_s$  é, na prática, uma **sombra virtual** do ponto **A** e, por outro lado, a sombra do ponto **A** não é um único ponto (como habitualmente) mas, sim, um segmento de reta – o segmento de reta  $[A_{s2}Q_s]$ .

Esta situação tem uma justificação teórica bastante plausível – para se determinar a sombra de um ponto **A** (que é considerado opaco) conduz-se, por esse ponto, um **raio luz/sombra em luz** que, ao passar pelo ponto, se transforma num **raio de sombra**. Portanto, o **raio luz/sombra**, ao passar pelo ponto **A**, é transformado em **raio de sombra** e o segmento de reta  $[A_{s2}Q_s]$  é um segmento desse **raio luz/sombra** já transformado em **raio de sombra**.

O pentágono  $[Q_sB_{s1}C_{s1}D_{s1}E_{s1}]$ , a que acresce o segmento de reta  $[Q_sA_{s2}]$ , é a **sombra real** do pentágono **[ABCDE]** nos planos de projeção.

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o pentágono  $[Q_sB_{s1}C_{s1}D_{s1}E_{s1}]$  e o pentágono  $[A_1B_1C_1D_1E_1]$  – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do pentágono estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do pentágono com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o pentágono **[ABCDE]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou da construção da projeção frontal do pentágono), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o pentágono **[ABCDE]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o pentágono. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o pentágono **[ABCDE]**, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

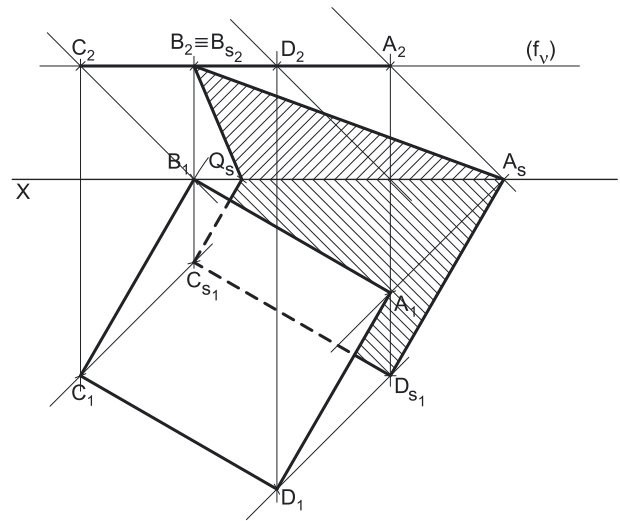
## 831.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **A** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). Em seguida, representou-se o plano  $\nu$  (o plano horizontal que contém a figura) pelo seu traço frontal. O plano  $\nu$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por **A**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **A**). O plano  $\nu$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:*

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\nu$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, com o compasso, fazendo centro em **A**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **A**) e com 6 cm de raio (a medida do lado do quadrado), determinou-se **B**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **B**) sobre o eixo **X** – o ponto **B** tem afastamento nulo. Note que se garantiu que o ponto **B** se situa á esquerda do ponto **A**, como o enunciado refere expressamente.



A partir de **A**<sub>1</sub> e **B**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção frontal horizontal do quadrado (em verdadeira grandeza), garantindo-se que a figura se situa no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro (como o enunciado pede expressamente), o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado (os pontos **C** e **D**) – as suas projeções frontais situam-se sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $\nu$ ), pois o plano  $\nu$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\nu$  ( $f_v$ ), pois o plano  $\nu$  é um plano projetante frontal.

*Determinação da sombra do quadrado [ABCD] nos planos de projeção:*

Em primeiro lugar, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **B** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, **B**<sub>s2</sub>  $\equiv$  **B**<sub>2</sub> (situa-se no **SPFS**). **C**<sub>s1</sub> é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**. **D**<sub>s1</sub> é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **D**.

Por fim, há a referir que o raio luminoso que passa pelo ponto **A** é uma **reta passante**, pelo que **A**<sub>s</sub> (a **sombra real** do ponto **A**) se situa no eixo **X** (situa-se tanto no **SPFS** como no **SPHA**). Nesse sentido, **A**<sub>s</sub> é o **traço frontal** do raio luminoso que passa pelo ponto **A** como é, também, o **traço horizontal** desse mesmo raio luminoso.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do quadrado é limitada pelas sombras projetadas dos lados do quadrado nos planos de projeção e os lados do quadrado são segmentos de reta. Sublinha-se que **A**<sub>s</sub>, situando-se no eixo **X**, é, de forma imediata, um **ponto de quebra** da sombra do quadrado (pois é uma sombra que se situa em ambos os Planos de Projeção).

**C**<sub>s1</sub> e **D**<sub>s1</sub> situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado [CD] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [**C**<sub>s1</sub>**D**<sub>s1</sub>] é a sombra projetada do lado [CD] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**). **D**<sub>s1</sub> e **A**<sub>s</sub> situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado [AD] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [**A**<sub>s</sub>**D**<sub>s1</sub>] é a sombra projetada do lado [AD] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**). **A**<sub>s</sub> e **B**<sub>s2</sub> situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [AB] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [**A**<sub>s</sub>**B**<sub>s2</sub>] é a sombra projetada do lado [AB] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).

O mesmo já não acontece em relação ao lado [BC] do quadrado – de facto, existe necessariamente um outro **ponto de quebra** entre **C**<sub>s1</sub> e **B**<sub>s2</sub> (que se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre **C**<sub>s1</sub> e **B**<sub>s2</sub> teve-se em conta que o lado [BC] do quadrado é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento. Assim, por **C**<sub>s1</sub> (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a [**B**<sub>1</sub>**C**<sub>1</sub>] (a projeção horizontal do segmento [BC]) até ao eixo **X**, onde se situa **Q**<sub>s</sub> (o ponto de quebra da sombra do segmento [BC]). O segmento [**Q**<sub>s</sub>**C**<sub>s1</sub>] é a **parte real** da sombra do lado [BC] no Plano Horizontal de Projeção e o segmento [**B**<sub>s2</sub>**Q**<sub>s</sub>] é a **parte real** da sombra do lado [BC] no Plano Frontal de Projeção. A linha quebrada aberta [**C**<sub>s1</sub>**Q**<sub>s</sub>**B**<sub>s2</sub>] é a **sombra real** do lado [BC] nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada [**A**<sub>s</sub>**B**<sub>s2</sub>**Q**<sub>s</sub>**C**<sub>s1</sub>**D**<sub>s1</sub>] é a **sombra real** do quadrado [ABCD] nos planos de projeção. O segmento [**Q**<sub>s</sub>**A**<sub>s</sub>] é a **linha de quebra** da sombra do quadrado.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_s B_{s2} Q_s C_{s1} D_{s1}]$  e o quadrado  $[A_1 B_1 C_1 D_1]$  – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com **tracejado**. Este foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções. A direção luminosa convencional, em projeção horizontal, faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a esquerda**) com o eixo  $X$ , pelo que o **tracejado** (que preenche a parte da sombra do quadrado que se situa no **SPHA**) faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a direita**) com o eixo  $X$ . A direção luminosa convencional, em projeção frontal, faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a esquerda**) com o eixo  $X$ , pelo que o **tracejado** (que preenche a parte visível da sombra do quadrado que se situa no **SPFS**) faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a direita**) com o eixo  $X$ .

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou da construção da projeção horizontal do quadrado), representaram-se a **leve**. O tracejado que preenche a área visível da sombra projetada do quadrado executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado  $[ABCD]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado  $[ABCD]$ , neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 832.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do retângulo $[ABCD]$ :

Os dados permitiram-nos localizar a **sombra real** do ponto  $B$  (que se situa no **SPFS** e, por isso mesmo, é  $B_{s2}$ ), em **termos de abscissa**. Atendendo a que  $B_{s2}$  se situa no **SPFS**, sabe-se imediatamente que  $B_{s2}$  é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $B$ . Nesse sentido,  $B_{s2}$  é o ponto do raio luminoso  $l$  que tem afastamento nulo, o que nos permitiu conduzir a projeção horizontal do raio luminoso  $l$  ( $l_1$ ) que passa pelo ponto  $B$ .

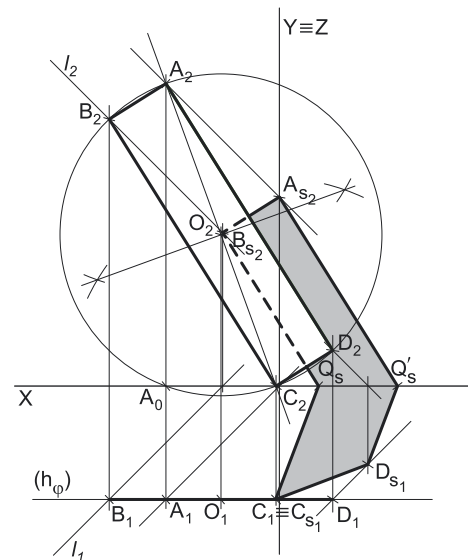
O ponto  $B$  é o ponto do raio luminoso  $l$  que pertence ao plano  $\varphi$  – o ponto  $B$  é, assim, o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\varphi$ . Nesse sentido, foi possível determinar  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ), que se situa necessariamente sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

O plano que contém o retângulo  $[ABCD]$  (o plano  $\varphi$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o retângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não tem deformação). Assim, a partir de  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ), mediu-se (em verdadeira grandeza) o ângulo que a diagonal  $[AC]$  faz com o Plano Horizontal de Projeção, o que nos permitiu desenhar a projeção frontal da reta suporte da diagonal  $[AC]$ . O ponto  $C$  é o ponto dessa reta que tem cota nula, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $C$ .

A partir de  $A_2$  e  $C_2$  (as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente), construiu-se a projeção frontal do retângulo, para o que foi necessário a prévia inscrição da figura numa circunferência. Nesse sentido, determinou-se  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ), que é o ponto médio do segmento de reta  $[A_2 C_2]$ . O ponto  $O$  é o centro da circunferência circunscrita ao retângulo. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) e raio até  $A_2$  ou  $C_2$  (as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente), desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao polígono.

A partir da projeção horizontal do ponto  $B$  ( $B_1$ ), determinou-se a sua projeção frontal ( $B_2$ ), que se situa sobre a projeção frontal da circunferência – das duas hipóteses de situar  $B_2$  sobre a circunferência, apenas a que tem maior cota garante que a sombra do ponto  $B$  se situa no **SPFS** (como o enunciado refere expressamente). De facto, caso  $B$  fosse, daqueles dois pontos, o ponto de menor cota, a **sombra real** do ponto  $B$  situar-se-ia no **SPHA** e não teria a abscissa dada no enunciado.

Por fim, concluiu-se a construção do retângulo, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do último vértice do polígono – o ponto  $D$ . Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção horizontal do retângulo reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra do retângulo [ABCD] nos planos de projeção:*

Em primeiro lugar, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do retângulo – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **C** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $C_{s1} \equiv C_1$  (situa-se no **SPHA**).  $A_{s2}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **A**.  $B_{s2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B** (o raio luminoso **l**).  $D_{s1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **D**.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do retângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do retângulo é limitada pelas sombras projetadas dos lados do retângulo nos planos de projeção e os lados do retângulo são segmentos de reta.

$C_{s1}$  e  $D_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[CD]** do retângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s1}D_{s1}]$  é a sombra projetada do lado **[CD]** do retângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).  $A_{s2}$  e  $B_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[AB]** do retângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s2}B_{s2}]$  é a sombra projetada do lado **[AB]** do retângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados **[BC]** e **[AD]** do quadrado – de facto, existe necessariamente um **ponto de quebra** entre  $B_{s2}$  e  $C_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos), bem como um outro **ponto de quebra** entre  $A_{s2}$  e  $D_{s1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s2}$  e  $C_{s1}$  teve-se em conta que o lado **[BC]** do retângulo é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B_{s2}$  (a sombra real do ponto **B**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[B_2C_2]$  (a projeção frontal do segmento **[BC]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[BC]**). O segmento  $[B_{s2}Q_s]$  é a **parte real** da sombra do lado **[BC]** no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[Q_sC_{s1}]$  é a **parte real** da sombra do lado **[BC]** no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[B_{s2}Q_sC_{s1}]$  é a **sombra real** do lado **[BC]** nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s2}$  e  $D_{s1}$  teve-se igualmente em conta que o lado **[AD]** do retângulo é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A_{s2}$  (a sombra real do ponto **A**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_2D_2]$  (a projeção frontal do segmento **[AD]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AD]**). O segmento  $[A_{s2}Q'_s]$  é a **parte real** da sombra do lado **[AD]** no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[Q'_sD_{s1}]$  é a **parte real** da sombra do lado **[AD]** no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[A_{s2}Q'_sD_{s1}]$  é a **sombra real** do lado **[AD]** nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s2}Q'_sD_{s1}C_{s1}Q_sB_{s2}]$  é a **sombra real** do retângulo **[ABCD]** nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do retângulo.

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s2}Q'_sD_{s1}C_{s1}Q_sB_{s2}]$  e o retângulo  $[A_2B_2C_2D_2]$  – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do retângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do retângulo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o retângulo **[ABCD]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou da construção da projeção frontal do retângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o retângulo **[ABCD]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o retângulo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o retângulo **[ABCD]**, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 833.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a figura) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar a projeção frontal do ponto **B** ( $B_2$ ), que se situa sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Representou-se, ainda, a **sombra real** do ponto **B**, que se situa no **SPFS** –  $B_{s2}$ . Tenha em conta que, dadas as informações fornecidas, no enunciado, sobre a **sombra real** do ponto **B**, se depreende que a **sombra real** do ponto **B** se situa no **SPFS** e não no **SPHA**, pelo que a sombra real do ponto **B** é  $B_{s2}$  e não  $B_{s1}$ .

Sublinha-se o facto de, no enunciado, não ser dada qualquer informação sobre a direção luminosa.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do triângulo [ABC]:

Atendendo a que  $B_{s2}$  se situa no **SPFS**, sabe-se imediatamente que  $B_{s2}$  é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**. Nesse sentido, por  $B_{s2}$  conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso  $l$  ( $l_2$ ). Note que  $l_2$  (a projeção frontal do raio luminoso  $l$ ) está definida por dois pontos – o ponto  $B_2$  (a projeção frontal do ponto **B**) e  $B_{s2}$  (a **sombra real** do ponto **B**).

Tendo em conta que não é dada qualquer informação sobre a direção luminosa, o procedimento anterior permitiu-nos determinar a direção da projeção frontal da direção luminosa – é a direção da projeção frontal do raio luminoso  $l$  ( $l_2$ ). Assim, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**) conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso  $l'$  ( $l'_2$ ), que é o raio luminoso que passa pelo ponto **A**. Este procedimento permitiu-nos determinar, em seguida, a **sombra real** do ponto **A** ( $A_{s1}$ ), que é o traço horizontal do raio luminoso  $l'$ . Tenha em conta que, dadas as informações fornecidas, no enunciado, sobre a **sombra real** do ponto **A** (o seu afastamento), se depreende que a **sombra real** do ponto **A** se situa no **SPHA** e não no **SPFS**, pelo que a sombra real do ponto **A** é  $A_{s1}$  e não  $A_{s2}$ .

Por fim, por  $A_{s1}$  conduziu-se a projeção horizontal do raio luminoso  $l'$  ( $l'_1$ ). Note que  $l'_1$  (a projeção horizontal do raio luminoso  $l'$ ) está definida por dois pontos – o ponto  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**) e  $A_{s1}$  (a **sombra real** do ponto **A**). Este procedimento permitiu-nos, enfim, determinar a direção da projeção horizontal da direção luminosa – é a direção da projeção horizontal do raio luminoso  $l'$  ( $l'_1$ ).

Finalmente, atendendo a que  $B_{s2}$  é o traço frontal do raio luminoso  $l$  (o ponto do raio luminoso  $l$  que tem afastamento nulo), foi possível desenhar a projeção horizontal do raio luminoso  $l$  ( $l_1$ ), paralela a  $l'_1$  (a projeção horizontal do raio luminoso  $l'$ ), o que nos permitiu determinar  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**), na linha de chamada de  $B_2$ .

Tendo em conta que o exposto anteriormente nos permitiu determinar as projeções do ponto **B** (que não eram dadas), bem como a direção luminosa considerada (que também não era dada de uma forma direta), foi possível, finalmente, prosseguir com a resolução do exercício.

O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano  $v$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, a partir de  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente) construiu-se a projeção horizontal do triângulo (em verdadeira grandeza), o que nos permitiu determinar  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**).  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**) situa-se sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura, cuja projeção frontal se reduz a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

#### Determinação da sombra do triângulo [ABC] nos planos de projeção:

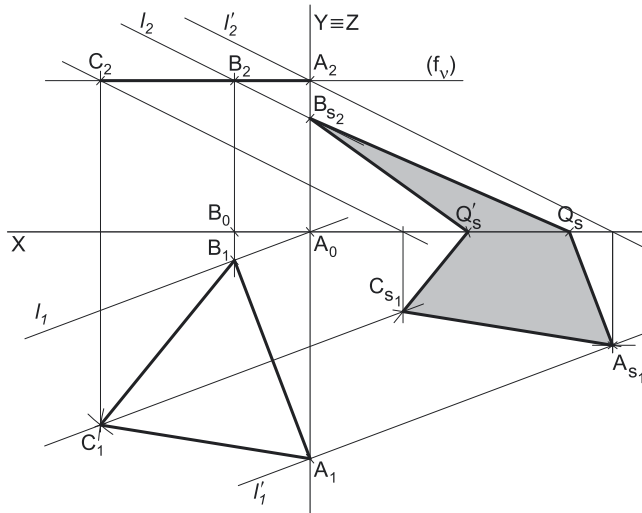
Em primeiro lugar, determinou-se a **sombra real** do vértice **C** do triângulo (a única sombra em falta, uma vez que as sombras reais dos vértices **A** e **B** já tinham sido determinadas anteriormente). Para tal conduziu-se, pelo ponto **C**, o raio luminoso que por ele passa (e que não se identificou, porque não é absolutamente necessária a sua identificação). O raio luminoso está definido por um ponto (o ponto **C**) e pela sua direção (a direção luminosa determinada anteriormente – é paralelo aos raios luminosos  $l$  e  $l'$ ). Assim,  $C_{s1}$  é a **sombra real** do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**.

As sombras reais dos três vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do triângulo é limitada pelas sombras projetadas dos lados do triângulo nos planos de projeção e os lados do triângulo são segmentos de reta.

$A_{s1}$  e  $C_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado [AC] do triângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $A_{s1}C_{s1}$ ] é a sombra projetada do lado [AC] do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPPHA**). O mesmo já não acontece em relação aos lados [AB] e [BC] do triângulo – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s1}$  e  $B_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C_{s1}$  e  $B_{s2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s1}$  e  $B_{s2}$  teve-se em conta que o lado [AB] do triângulo é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A_{s1}$  (a sombra real do ponto **A**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a [ $A_1B_1$ ] (a projeção horizontal do segmento [AB]) até ao eixo X, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [AB]). O segmento [ $Q_sB_{s2}$ ] é a **parte real** da sombra do lado [AB] no Plano Frontal de Projeção e o segmento [ $A_{s1}Q_s$ ] é a **parte real** da sombra do lado [AB] no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta [ $A_{s1}Q_sB_{s2}$ ] é a **sombra real** do lado [AB] nos planos de projeção.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s1}$  e  $B_{s2}$  teve-se em conta que o lado [BC] do triângulo é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s1}$  (a sombra real do ponto C, que se situa no SPHA) conduziu-se uma reta paralela a  $[B_1C_1]$  (a projeção horizontal do segmento [BC]) até ao eixo X, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [BC]). O segmento  $[B_{s2}Q'_s]$  é a **parte real** da sombra do lado [BC] no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[Q'_sC_{s1}]$  é a **parte real** da sombra do lado [BC] no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[B_{s2}Q'_sC_{s1}]$  é a **sombra real** do lado [BC] nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s1}Q_sB_{s2}Q'_sC_{s1}]$  é a **sombra real** do triângulo [ABC] nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do triângulo. Salienta-se que **não existe qualquer sobreposição** entre o polígono  $[A_{s1}Q_sB_{s2}Q'_sC_{s1}]$  e o triângulo  $[A_1B_1C_1]$ , pelo que não há qualquer parte da sombra do triângulo que esteja oculta pela própria figura.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo (a totalidade da sua sombra) com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Traçado:

O eixo X, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o triângulo [ABC] e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano v (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo [ABC] ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o triângulo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o triângulo [ABC], neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 834.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto O, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano v (o plano horizontal que contém a figura) pelo seu traço frontal. O plano v é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto O). O plano v não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo X, em ambas as projeções.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do círculo:

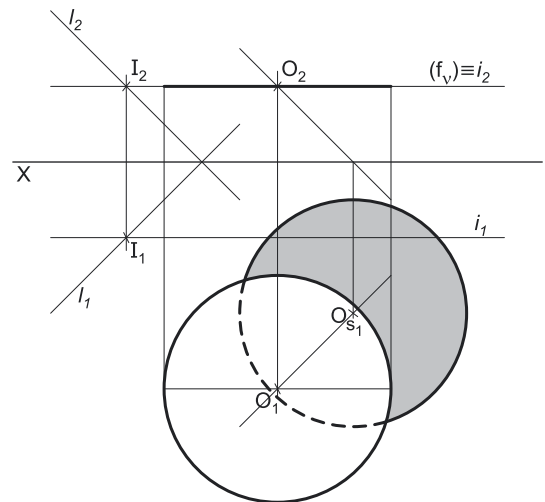
O plano que contém o círculo (o plano n) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o círculo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do círculo está em verdadeira grandeza). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção frontal do ponto O) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a figura, em verdadeira grandeza. O plano v é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal do círculo se reduz a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano – a projeção frontal do círculo corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal.

##### Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo X).

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo X e o raio luminoso  $l$ , passante (concorrente com o eixo X). O raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo X, que não se identificou) e por uma direção (a direção convencional da luz). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a figura) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano v são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano v é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizontal. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com plano v – o ponto I. O ponto I foi determinado diretamente, a partir da sua projeção frontal, pois o plano v é um plano projetante frontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano projetante frontal). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto I) e por uma direção (é fronto-horizontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $i$  é exterior ao círculo, pelo que a sombra da figura não apresenta pontos de quebra – a sombra do círculo situar-se-á na totalidade no **SPHA** ou no **SPFS**. Para saber em qual dos planos se situa a sombra da figura, é necessário determinar a **sombra real** do centro do círculo – o ponto **O**. Nesse sentido conduziu-se, pelo ponto **O**, o raio luminoso que por ele passa (e que não se identificou) – esse raio luminoso está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção luminosa convencional).  $O_{s1}$  é a **sombra real** do ponto **O** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **O**.

$O_{s1}$  situa-se no **SPHA**, o que nos permite concluir que a sombra do círculo (que não tem pontos de quebra) se situa, na totalidade, no **SPHA** – tendo em conta que o plano que contém o círculo (o plano  $v$ ) é **paralelo** ao Plano Horizontal de Projeção, a sombra do círculo no Plano Horizontal de Projeção é um outro círculo, geometricamente igual ao círculo dado (com o mesmo raio). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_{s1}$  e com 3 cm de raio (o raio do círculo dado) desenhou-se o círculo que é a sombra projetada da figura no **SPHA**.

Salienta-se que existe uma sobreposição entre os dois círculos (a projeção horizontal do círculo dado e o círculo que é a sombra da figura) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do círculo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do círculo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso  $l$  e da reta  $i$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 835.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a figura) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

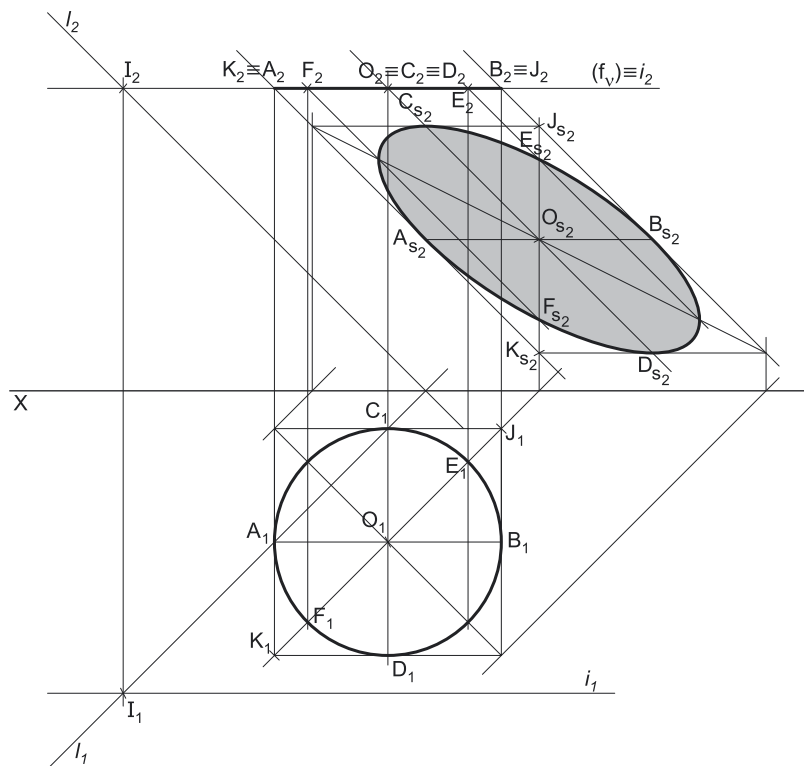
### Resolução:

#### Determinação das projeções do círculo:

O plano que contém o círculo (o plano  $n$ ) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o círculo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do círculo está em verdadeira grandeza). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência que delimita a figura, em verdadeira grandeza. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal do círculo reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano ( $f_v$ ) – a projeção frontal do círculo corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal.

#### Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo **X**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l** está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a figura) – a reta **i**.

Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $\nu$  é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta **i** é, assim, uma reta fronto-horizonta. Já temos uma direção para definir a reta **i**. Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com plano  $\nu$  – o ponto **I**. O ponto **I** foi determinado diretamente, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $\nu$  é um plano projetante frontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano projetante frontal). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i** – a reta **i** está definida por um ponto (o ponto **I**) e por uma direção (é fronto-horizonta).

A reta **i** é exterior ao círculo, pelo que a sombra da figura não apresenta pontos de quebra – a sombra do círculo situar-se-á na totalidade no **SPHA** ou no **SPFS**. Para saber em qual dos planos se situa a sombra da figura, é necessário determinar a **sombra real** do centro do círculo – o ponto **O**. Nesse sentido conduziu-se, pelo ponto **O**, o raio luminoso que por ele passa (e que não se identificou) – esse raio luminoso está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado). **O<sub>s2</sub>** é a **sombra real** do ponto **O** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa.

**O<sub>s2</sub>** situa-se no **SPFS**, o que nos permite concluir que a sombra do círculo (que não tem pontos de quebra) se situa, na totalidade, no **SPFS** – tendo em conta que o plano que contém o círculo (o plano  $\nu$ ) **não é paralelo** ao Plano Frontal de Projeção, a sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção **não é um círculo**. Assim, a sombra projetada do círculo no **SPFS** é necessariamente uma **elipse** (um círculo com deformação), que é uma **curva de erro** e cujo desenho (à mão livre) requer um mínimo de **oito pontos** e, tanto quanto possível, o paralelogramo envolvente.

Nesse sentido, começemos por inscrever o círculo num quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida, as respetivas diagonais e medianas. Os pontos **A**, **B**, **C** e **D** são os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

A sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção é um paralelogramo – a elipse estará inscrita neste paralelogramo. A sombra do quadrado determinou-se a partir das sombras de dois dos seus vértices, apenas – optou-se por recorrer aos pontos **J** e **K** (os extremos de uma das diagonais do quadrado). **J<sub>s2</sub>** e **K<sub>s2</sub>** são as sombras reais dos vértices **J** e **K** e situam-se no **SPFS**. A diagonal [**JK**] passa pelo ponto **O**, pelo que o segmento [**J<sub>s2</sub>K<sub>s2</sub>**] passa necessariamente por **O<sub>s2</sub>**.

O vértice **J** é o vértice comum a dois lados do quadrado – um lado de topo e um lado fronto-horizonta. A sombra do lado de topo que contém o vértice **J** está contida no traço frontal do plano luz/sombra que contém esse lado – trata-se de um plano de topo (um plano projetante frontal). Assim, e como é possível observar, a sombra desse lado está sobre a projeção frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **J** (e que não se identificou) e que corresponde, na prática, à projeção frontal da direção luminosa. De forma semelhante, o vértice **K** é o vértice comum a outros dois lados do quadrado – outro lado de topo e outro lado fronto-horizonta. A sombra do lado de topo que contém o vértice **K** está contida no traço frontal do plano luz/sombra que contém esse lado – trata-se de um plano de topo (um plano projetante frontal). Assim, e como é possível observar, a sombra desse lado está sobre a projeção frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **K** (e que não se identificou) e que corresponde, na prática, à projeção frontal da direção luminosa. Já temos as retas suporte de dois dos lados do paralelogramo que é a sombra do quadrado.

O ponto **J** é o vértice mais à direita do lado fronto-horizonta de menor afastamento do quadrado – a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção desse lado é necessariamente paralela a esse lado (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a sombra projetada desse lado é também fronto-horizonta. Este raciocínio permitiu-nos desenhar a sombra projetada do lado de menor afastamento do quadrado e, dessa forma, determinar a sombra de mais um vértice do quadrado (o extremo esquerdo do seu lado de menor afastamento), sobre a sombra do lado de topo que passa por **K<sub>s2</sub>**. Repetiu-se o processo para o lado de maior afastamento do quadrado (de que **K** é o vértice mais à esquerda), que é igualmente fronto-horizonta, o que nos permitiu determinar a sombra do quarto vértice do quadrado e desenhar o paralelogramo que é a sombra do quadrado.

Em seguida, desenharam-se as medianas do paralelogramo (que passam por **O<sub>s1</sub>** e são paralelas aos lados do paralelogramo) bem como as suas diagonais (que passam por **O<sub>s1</sub>** e têm extremos nos vértices do paralelogramo). As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado. As diagonais do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das diagonais do quadrado.

**A<sub>s2</sub>**, **B<sub>s2</sub>**, **C<sub>s2</sub>** e **D<sub>s2</sub>** são, imediatamente, os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do polígono – são os pontos em que elipse será tangente aos lados do paralelogramo (uma vez que o círculo é tangente aos lados do quadrado em que se inscreve nos pontos **A**, **B**, **C** e **D**). Já temos **quatro pontos** para o desenho (à mão livre) da elipse, bem como o paralelogramo envolvente. Faltam-nos, ainda, outros quatro pontos. Esses quatro pontos são, necessariamente, as sombras dos pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado.

Os pontos **E** e **F** são os pontos em que a circunferência que delimita o círculo corta a diagonal [**JK**] do quadrado – as suas sombras (**E<sub>s2</sub>** e **F<sub>s2</sub>**) situar-se-ão necessariamente sobre a diagonal [**J<sub>s2</sub>K<sub>s2</sub>**] do paralelogramo (que é a sombra da diagonal [**JK**] do quadrado). Assim, pelas projeções frontais dos pontos **E** e **F** (**E<sub>2</sub>** e **F<sub>2</sub>**, respetivamente), conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam a diagonal [**J<sub>s2</sub>K<sub>s2</sub>**] do paralelogramo – os pontos **E<sub>s2</sub>** e **F<sub>s2</sub>**. Já temos mais **dois pontos** da elipse, o que perfaz um total de **seis pontos**.

O processo atrás exposto para os pontos **E** e **F** repetiu-se para os dois pontos em que a circunferência corta a outra diagonal do quadrado, o que nos permitiu determinar mais **dois pontos** da elipse. Sublinha-se que, para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações, se optou por omitir as notações referentes quer aos extremos da outra diagonal do quadrado, quer as referentes aos dois pontos em que a circunferência corta essa diagonal quer, ainda, as notações referentes às respetivas sombras.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os **oito pontos** determinados permitem-nos um desenho relativamente preciso da elipse, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da **elipse** aos lados do paralelogramo – a elipse é a sombra projetada do círculo nos planos de projeção. Nesta situação, a sombra do círculo é visível na sua totalidade, pois não existe qualquer sobreposição entre qualquer das projeções da figura e a sua sombra projetada. Assim, preencheu-se a **parte visível** (a totalidade) da sombra do círculo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha teve-se o cuidado necessário para que a mancha não ocultasse quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, da reta  $i$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção da elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 836.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do círculo:

O plano que contém o círculo (o plano  $\varphi$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o círculo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do círculo está em verdadeira grandeza). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a figura, em verdadeira grandeza. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal do círculo se reduz a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano ( $h_\varphi$ ) – a projeção horizontal do círculo corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal.

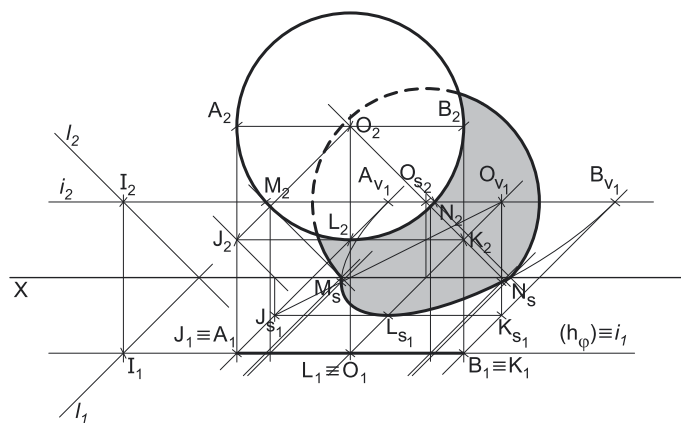
#### Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo **X**).

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso  $l$ , passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a figura) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $\varphi$  é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizontal. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com plano  $\varphi$  – o ponto **I**. O ponto **I** foi determinado diretamente, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano projetante horizontal). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto **I**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

A reta  $i$  é **secante** ao círculo, pelo que a sombra da figura **admite a existência de pontos de quebra** – a reta  $i$  corta a circunferência que delimita o círculo nos pontos **M** e **N**. As sombras destes pontos (que se situam no eixo **X**) serão, precisamente, os pontos de quebra da sombra da circunferência que delimita a figura. Note que não se determinaram as projeções horizontais dos pontos **M** e **N**, por estas não serem necessárias. Em seguida, pelas projeções frontais dos pontos **M** e **N** (**M<sub>2</sub>** e **N<sub>2</sub>**, respetivamente), conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que passam por aqueles pontos e determinaram-se as suas sombras, no eixo **X** – **M<sub>s</sub>** e **N<sub>s</sub>**. O segmento de reta [**M<sub>s</sub>N<sub>s</sub>**] é a linha de quebra da sombra do círculo.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Parte da sombra do círculo situa-se no **SPHA** e a outra parte da sua sombra situa-se no **SPFS** – a parte do círculo que se situa para cima da reta  $i$  produz sombra no **SPFS**, enquanto a parte do círculo que se situa para baixo da reta  $i$  produz sombra no **SPHA**.

*Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de um círculo geometricamente igual ao círculo dado. Assim, determinou-se a sombra real do ponto  $O - O_{s2}$  é a sombra real do ponto  $O$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_{s2}$  e com 3 cm de raio (o raio do círculo dado) desenhou-se a parte do círculo que é a sombra projetada da figura no **SPFS** – trata-se de um segmento de círculo limitado, inferiormente, pelo segmento de reta  $[M_s N_s]$ . Nesse sentido, o arco de circunferência desenhado tem de ter extremos em  $M_s$  e em  $N_s$ . Tenha em conta que a parte oculta da sombra (a parte da sombra que é invisível, por estar oculta pela própria figura) da sombra se identificou a traço interrompido.

*Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício anterior (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). A parte do círculo que produz sombra no **SPHA** é o arco menor  $\widehat{MN}$ .

Para determinar os pontos necessários a um desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva, começemos por inscrever o arco  $\widehat{MN}$  do círculo na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X** – note que, por uma questão de rigor (no desenho da curva), se inscreveu a semicircunferência que contém o arco  $\widehat{MN}$  na parte correspondente do quadrado, o que significa que se inscreveu essa semicircunferência num «meio quadrado». O lado superior desse «meio quadrado» é o diâmetro fronto-horizontal do círculo (o segmento de reta  $[AB]$ ) e o seu lado inferior (o lado  $[JK]$ ) é fronto-horizontal e é tangente ao círculo no seu ponto de menor cota (o ponto  $L$ ). Em seguida, desenhou-se, em projeção frontal, as partes das medianas e das diagonais do quadrado que existem nesse «meio quadrado». Tenha em conta que a atribuição de letras a todos aqueles pontos visou, sobretudo, uma melhor relação entre este relatório e a figura. Assim,  $[OL]$  é a parte da mediana vertical que está contida no «meio quadrado». Os segmentos  $[OJ]$  e  $[OK]$  são as partes das diagonais do quadrado que existem no «meio quadrado».

Os pontos **A**, **B** e **L** são os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do «meio quadrado». Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, bem como das partes correspondentes das medianas e diagonais atrás referidas.

Note que o «meio quadrado» a que se fez referência até agora é, na prática, um retângulo – o retângulo  $[ABJK]$ . A sombra do retângulo no Plano Horizontal de Projeção é um paralelogramo – o segmento da elipse estará inscrito neste paralelogramo. A sombra do retângulo determinou-se a partir das sombras de dois dos seus vértices.  $A_{v1}$  e  $B_{v1}$  são as **sombras virtuais** dos vértices **A** e **B** do retângulo e situam-se no **SPHP**.  $J_{s1}$  e  $K_{s1}$  são as **sombras reais** dos vértices **J** e **K** do retângulo e situam-se no **SPHA**. Determinou-se, ainda a sombra do ponto  $O$  (o centro do círculo) no Plano Horizontal de Projeção –  $O_{v1}$  é a sombra virtual do ponto  $O$  e situa-se no **SPHP**. Note que o segmento de reta  $[A_{v1}B_{v1}]$  passa necessariamente por  $O_{v1}$ .

Em seguida, desenharam-se a mediana  $[O_{v1}L_{s1}]$  do paralelogramo (que passa por  $O_{v1}$  e é paralela a dois lados do paralelogramo e que é a sombra do segmento  $[OL]$ ), bem como os segmentos  $[O_{v1}J_{s1}]$  e  $[O_{v1}K_{s1}]$  (que são as sombras dos segmentos  $[OJ]$  e  $[OK]$ ).

$A_{v1}$ ,  $B_{v1}$  e  $L_{s1}$  são, imediatamente, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados do paralelogramo (uma vez que a semicircunferência é tangente aos lados do quadrado em que se inscreve nos pontos **A**, **B** e **L**). Em seguida, determinaram-se as sombras dos pontos em que a circunferência que delimita o círculo corta os segmentos  $[OJ]$  e  $[OK]$  – as suas sombras situar-se-ão necessariamente sobre os segmentos  $[O_{v1}J_{s1}]$  e  $[O_{v1}K_{s1}]$  e foram determinadas a partir das suas projeções horizontais. Assim, pelas projeções horizontais daqueles dois pontos (que não se identificaram), conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas interseccionam os segmentos  $[O_{v1}J_{s1}]$  e  $[O_{v1}K_{s1}]$ . Salienta-se que, na situação apresentada, estes pontos ficam relativamente próximos de  $M_s$  e de  $N_s$  (os pontos de quebra da sombra da circunferência).

Os **cinco pontos** determinados (a que acrescem os pontos de quebra,  $M_s$  e  $N_s$ , perfazendo um total de **sete pontos**) permitem-nos um desenho relativamente preciso do segmento de elipse, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da curva aos lados do paralelogramo. Tenha em conta que a parte do segmento de elipse que se situa para cima do eixo **X** (para cima do segmento  $[M_s N_s]$ ), que é a linha de quebra da sombra do círculo) é uma **sombra virtual** e a sua utilidade foi exclusivamente para um correcto «lançamento» da curva à mão livre – é preciso ter a noção de como é que a curva continua (para lá do eixo **X**), para que a **parte real** da sombra (da **elipse**) tenha um desenho próximo da realidade.

A sombra projetada do círculo nos planos de projeção é, assim, uma figura com uma parte circular (a parte situada no **SPFS**) e uma parte elíptica (a parte situada no **SPHA**). Note que a parte oculta (a parte invisível) da sombra se identificou a traço interrompido. Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do círculo com uma **mancha clara e uniforme**, em ambas as projeções – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano  $\phi$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, da reta  $i$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 837.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se os pontos **O** e **L** (o foco luminoso), pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ) passa por **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano  $\phi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

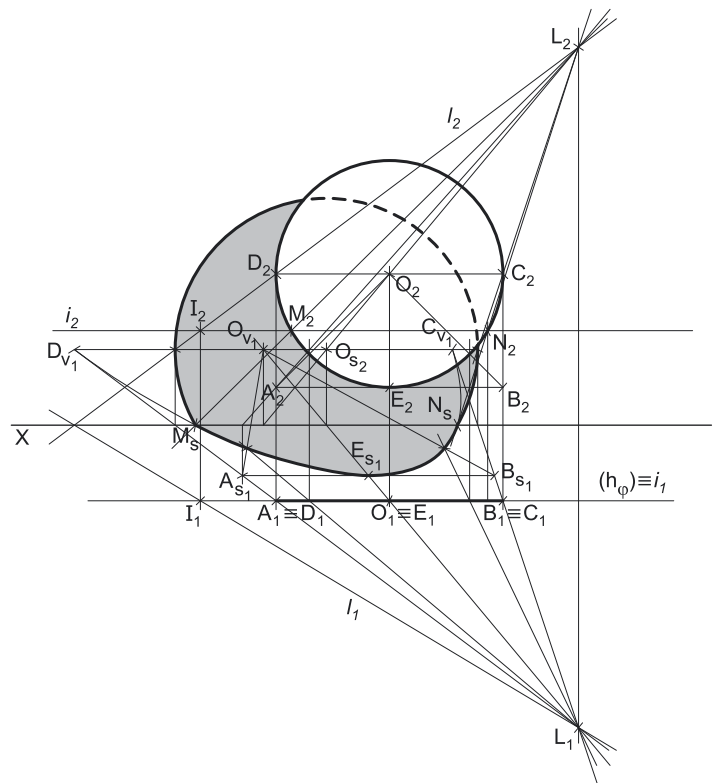
### Resolução:

#### Determinação das projeções do círculo:

O plano que contém o círculo (o plano  $\phi$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o círculo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do círculo está em verdadeira grandeza). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a figura, em verdadeira grandeza. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal do círculo se reduz a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano ( $h_\phi$ ) – a projeção horizontal do círculo corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal.

#### Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo **X**).



Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por uma reta (o eixo **X**) e um ponto exterior à reta (o foco luminoso **L**). No entanto, o **plano luz/sombra passante** pode estar definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e um raio luminoso passante qualquer (concorrente com o eixo **X**). Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um raio luminoso **l**, passante. O raio luminoso **l** está definido por dois pontos – o ponto **L** (o foco luminoso) o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que não se identificou). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\phi$  (o plano que contém a figura) – a reta **i**.

Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\phi$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $\phi$  é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta **i** é, assim, uma reta fronto-horizontal. Já temos uma direção para definir a reta **i**. Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com plano  $\phi$  – o ponto **I**. O ponto **I** foi determinado diretamente, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano projetante horizontal). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i** – a reta **i** está definida por um ponto (o ponto **I**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

A reta **i** é **secante** ao círculo, pelo que a sombra da figura **admite a existência de pontos de quebra** – a reta **i** corta a circunferência que delimita o círculo nos pontos **M** e **N**. As sombras destes pontos (que se situam no eixo **X**) serão, precisamente, os pontos de quebra da sombra da circunferência que delimita a figura. Note que não se determinaram as projeções horizontais dos pontos **M** e **N**, por estas não serem necessárias. Em seguida, pelas projeções frontais dos pontos **M** e **N** (**M**<sub>2</sub> e **N**<sub>2</sub>, respetivamente), conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que passam por aqueles pontos e determinaram-se as suas sombras, no eixo **X** – **M**<sub>s</sub> e **N**<sub>s</sub>. O segmento de reta [**M**<sub>s</sub>**N**<sub>s</sub>] é a linha de quebra da sombra do círculo.

Parte da sombra do círculo situa-se no **SPHA** e a outra parte da sua sombra situa-se no **SPFS** – a parte do círculo que se situa para cima da reta **i** produz sombra no **SPFS**, enquanto a parte do círculo que se situa para baixo da reta **i** produz sombra no **SPHA**.

#### Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção:

A **sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de um círculo ampliado em relação ao círculo dado. Começemos por determinar o centro desse outro círculo, que é a sombra do ponto **O** no Plano Frontal de Projeção – **O**<sub>s2</sub> é o traço frontal do raio luminoso que por passa pelo ponto **O** e situa-se no **SPFS**, pelo que é a sombra real do ponto **O**. Determinemos o raio desse círculo, recorrendo a um ponto desse círculo – esse ponto deverá ser a sombra de um ponto qualquer do círculo dado. Já temos dois pontos que são sombras de pontos do círculo – os pontos de quebra **M**<sub>s</sub> e **N**<sub>s</sub>. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>s2</sub> e com raio  $\overline{O_{s2}M_s} = \overline{O_{s2}N_s}$ , desenhou-se a parte do círculo que é a sombra projetada da figura no **SPFS** – trata-se de um segmento de círculo limitado, inferiormente, pelo segmento de reta [**M**<sub>s</sub>**N**<sub>s</sub>]. Tenha em conta que a parte oculta da sombra (a parte da sombra que é invisível, por estar oculta pela própria figura) da sombra se identificou a traço interrompido.

#### Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção:

A **sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **oval**, que é uma curva de erro. Note que, nos dois exercícios anteriores, em que era dada uma **direção luminosa**, a sombra (com deformação) do círculo era uma **elipse**. Já nesta situação, em que é dado um **foco luminoso**, a sombra (com deformação) do círculo é uma **oval**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **oval** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse**). A parte do círculo que produz sombra no **SPHA** é o **arco menor**  $\widehat{MN}$ , que é um arco da semicircunferência de menor cota.

Para determinar os pontos necessários a um desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva, começou-se por inscrever o arco  $\widehat{MN}$  do círculo na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X** – note que, por uma questão de rigor (no desenho da curva), se inscreveu a semicircunferência que contém o arco  $\widehat{MN}$  na parte correspondente do quadrado, o que significa que se inscreveu essa semicircunferência num «meio quadrado». O lado superior desse «meio quadrado» é o diâmetro fronto-horizontal do círculo (o segmento de reta  $[CD]$ ) e o seu lado inferior (o lado  $[AB]$ ) é fronto-horizontal e é tangente ao círculo no seu ponto de menor cota (o ponto **E**). Em seguida, desenhou-se, em projeção frontal, as partes das medianas e das diagonais do quadrado que existem nesse «meio quadrado». Tenha em conta que a atribuição de letras a todos aqueles pontos visou, sobretudo, uma melhor relação entre este relatório e a figura. Assim,  $[OE]$  é a parte da mediana vertical que está contida no «meio quadrado». Os segmentos  $[OA]$  e  $[OB]$  são as partes das diagonais do quadrado que existem no «meio quadrado».

Os pontos **C**, **D** e **E** são os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do «meio quadrado». Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, bem como das partes correspondentes das medianas e diagonais atrás referidas.

Note que o «meio quadrado» a que se fez referência até agora é, na prática, um retângulo – o retângulo  $[ABCD]$ . A sombra desse retângulo no Plano Horizontal de Projeção é um trapézio – a **oval** estará inscrita nesse trapézio. A sombra do quadrado determinou-se a partir das sombras dos seus dois vértices mais à esquerda – os pontos **A** e **D**.  $A_{s1}$  e  $D_{v1}$  são as sombras reais dos vértices **A** e **D** –  $A_{s1}$  situa-se no **SPHA** e  $D_{v1}$  situa-se no **SPHP**. O lado  $[AD]$  é vertical e a sua sombra está contida no traço horizontal do plano luz/sombra que contém o segmento  $[AD]$  – trata-se de um plano vertical (projetante horizontal). Assim, e como é possível observar, a sombra do lado  $[AD]$  está sobre a projeção horizontal dos raios luminosos que passam pelos dois pontos (que não se identificaram). De forma semelhante, a sombra do outro lado vertical do quadrado (o lado  $[BC]$ ) está igualmente sobre a projeção horizontal dos raios luminosos que passam pelos respetivos vértices. **A** é o vértice mais à esquerda do lado  $[AB]$  (o lado fronto-horizontal de menor cota do «meio quadrado») – a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção desse lado é necessariamente paralela a esse lado, pelo que a sombra projetada desse lado é fronto-horizontal e passa por  $A_{s1}$ . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a sombra projetada do lado  $[AB]$  e, dessa forma, determinar  $B_{s1}$ , que é a sombra de mais um vértice do «meio quadrado» (o vértice **B**). Repetiu-se o processo para o lado de maior cota do «meio quadrado» (o lado  $[CD]$ ), que é igualmente fronto-horizontal – a sua sombra é também fronto-horizontal e passa por  $D_{v1}$ , o que nos permitiu determinar  $C_{v1}$  (a sombra do vértice **C** do «meio quadrado») e, assim, desenhar o trapézio que é a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, desenharam-se a mediana  $[O_{v1}E_{s1}]$  do trapézio (que passa por  $O_{v1}$  e está sobre a projeção horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **O**), bem como os segmentos  $[O_{v1}A_{s1}]$  e  $[O_{v1}B_{s1}]$  (que são as sombras dos segmentos  $[OA]$  e  $[OB]$ ).

$C_{v1}$ ,  $D_{v1}$  e  $E_{s1}$  são, imediatamente, os pontos em que o segmento da **oval** será tangente aos lados do trapézio (uma vez que a semicircunferência é tangente aos lados do quadrado em que se inscreve nos pontos **C**, **D** e **E**). Em seguida, determinaram-se as sombras dos pontos em que a circunferência que delimita o círculo corta os segmentos  $[OA]$  e  $[OB]$  – as suas sombras situar-se-ão necessariamente sobre os segmentos  $[O_{v1}A_{s1}]$  e  $[O_{v1}B_{s1}]$  e foram determinadas a partir das suas projeções horizontais. Assim, pelas projeções horizontais daqueles dois pontos (que não se identificaram), conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas interseccionam os segmentos  $[O_{v1}A_{s1}]$  e  $[O_{v1}B_{s1}]$ .

Os **cinco pontos** determinados (a que acrescem os pontos de quebra,  $M_s$  e  $N_s$ , perfazendo um total de **sete pontos**) permitem-nos um desenho relativamente preciso do segmento da **oval**, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da curva aos lados do trapézio. Tenha em conta que a parte do segmento da oval que se situa para cima do eixo **X** (para cima do segmento  $[M_sN_s]$ , que é a linha de quebra da sombra do círculo) é uma **sombra virtual** e a sua utilidade foi exclusivamente para um correcto «lançamento» da curva à mão livre – é preciso ter a noção de como é que a curva continua (para lá do eixo **X**), para que a **parte real** da sombra (da **oval**) tenha um desenho próximo da realidade.

A sombra projetada do círculo nos planos de projeção é, assim, uma figura com uma parte circular (a parte situada no **SPFS**) e uma parte oval (a parte situada no **SPHA**). Note que a parte oculta (a parte invisível) da sombra se identificou a traço interrompido. Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do círculo com uma **mancha clara e uniforme**, em ambas as projeções – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano  $\phi$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, da reta  $i$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção da oval), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 838.

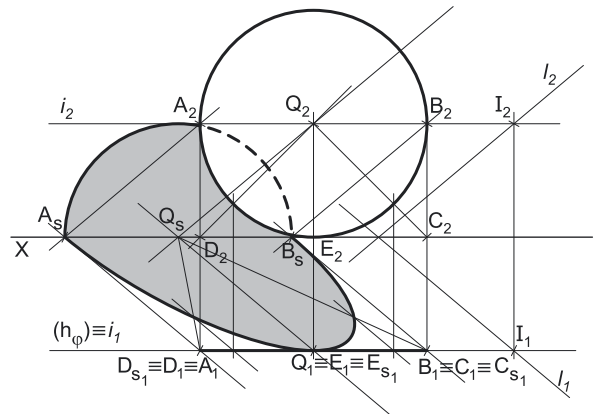
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **Q**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do círculo:

O plano que contém o círculo (o plano  $\varphi$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o círculo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do círculo está em verdadeira grandeza). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto **Q**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a figura, em verdadeira grandeza. Note que a circunferência é tangente ao eixo **X**, pois o seu raio é igual à cota do ponto **Q** (o seu centro). O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal do círculo se reduz a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano ( $h_\varphi$ ) – a projeção horizontal do círculo corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal.



#### Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo **X**).

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l** está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a figura) – a reta **i**.

Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $\varphi$  é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta **i** é, assim, uma reta fronto-horizontal. Já temos uma direção para definir a reta **i**. Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano  $\varphi$  – o ponto **I**. O ponto **I** foi determinado diretamente, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano projetante horizontal). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i** – a reta **i** está definida por um ponto (o ponto **I**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

A reta **i** é **secante** ao círculo, pelo que a sombra da figura **admite a existência de pontos de quebra** – a reta **i** corta a circunferência que delimita o círculo nos pontos **A** e **B**. Note que a reta **i** passa pelo ponto **Q** (o centro do círculo), pelo que **[AB]** é necessariamente um diâmetro da circunferência que delimita o círculo. As sombras dos pontos **A** e **B** (que se situam no eixo **X**) serão, precisamente, os pontos de quebra da sombra da circunferência que delimita a figura. Em seguida, pelas projeções frontais dos pontos **A** e **B** ( $A_2$  e  $B_2$ , respetivamente), conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que passam por aqueles pontos e determinaram-se as suas sombras, no eixo **X** –  $A_s$  e  $B_s$ . O segmento de reta  $[A_sB_s]$  é a linha de quebra da sombra do círculo.

Parte da sombra do círculo situa-se no **SPHA** e a outra parte da sua sombra situa-se no **SPFS** – a parte do círculo que se situa para cima da reta **i** produz sombra no **SPFS**, enquanto a parte do círculo que se situa para baixo da reta **i** produz sombra no **SPHA**.

#### Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção:

A **sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de um círculo geometricamente igual ao círculo dado. Assim, determinou-se a sombra real do ponto **Q** conduzindo, por **Q**, um raio luminoso com a direção luminosa dada no enunciado. Tendo em conta que esse raio luminoso é uma reta passante, a sombra real do ponto **Q** ( $Q_s$ ) situa-se necessariamente no eixo **X**. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $Q_s$  e com 3 cm de raio (o raio do círculo dado) desenhou-se a parte do círculo que é a sombra projetada da figura no **SPFS** – trata-se de um semicírculo limitado, inferiormente, pelo diâmetro  $[A_sB_s]$ . Nesse sentido, o arco de circunferência desenhado tem de ter extremos em  $A_s$  e em  $B_s$ . Tenha em conta que a parte oculta da sombra (a parte da sombra que é invisível, por estar oculta pela própria figura) da sombra se identificou a traço interrompido.

#### Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção:

A **sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício anterior (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). A parte do círculo que produz sombra no **SPHA** é o semicírculo **AB**.

Para determinar os pontos necessários a um desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva, comecemos por inscrever o semicírculo  $\widehat{AB}$  do círculo na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X** – a semicircunferência que delimita a figura ficou inscrita num «meio quadrado». O lado superior desse «meio quadrado» é o diâmetro **[AB]** e o seu lado inferior é o segmento de reta **[CD]** (que está contido no próprio traço horizontal do plano  $\varphi$ ). O lado **[CD]** é fronto-horizontal e é tangente ao círculo no seu ponto de menor cota (o ponto **E**). Em seguida, desenhou-se, em projeção frontal, as partes das medianas e das diagonais do quadrado que existem nesse «meio quadrado». Tenha em conta que a atribuição de letras a todos aqueles pontos visou, sobretudo, uma melhor relação entre este relatório e a figura. Assim, **[QE]** é a parte da mediana vertical que está contida no «meio quadrado». Os segmentos **[QC]** e **[QD]** são as partes das diagonais do quadrado que existem no «meio quadrado».

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os pontos **A**, **B** e **E** são os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do «meio quadrado». Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, bem como das partes correspondentes das medianas e diagonais atrás referidas.

Note que o «meio quadrado» a que se fez referência até agora é, na prática, um retângulo – o retângulo **[ABCD]**. A sombra do retângulo no Plano Horizontal de Projeção é um paralelogramo – o segmento da elipse estará inscrito neste paralelogramo. **A<sub>s</sub>** e **B<sub>s</sub>** são as **sombras reais** dos vértices **A** e **B** do retângulo e situam-se no eixo **X** (que é a reta limite do **SPHP**). O ponto **C** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que se tem imediatamente **C<sub>s1</sub> ≡ C<sub>1</sub>**. O ponto **D** é outro ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que também se tem **D<sub>s1</sub> ≡ D<sub>1</sub>** (situa-se no **SPHA**). O mesmo se passa com o ponto **E**, pelo que se tem **E<sub>s1</sub> ≡ E<sub>1</sub>** (situa-se no **SPHA**).

Em seguida, desenharam-se a mediana **[Q<sub>s</sub>E<sub>s1</sub>]** do paralelogramo, bem como os segmentos **[Q<sub>s</sub>C<sub>s1</sub>]** e **[Q<sub>s</sub>D<sub>s1</sub>]** (que são as sombras dos segmentos **[QC]** e **[QD]**).

**A<sub>s</sub>**, **B<sub>s</sub>** e **E<sub>s1</sub>** são, imediatamente, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados do paralelogramo (uma vez que a semicircunferência é tangente aos lados do quadrado em que se inscreve nos pontos **A**, **B** e **E**). Em seguida, determinaram-se as sombras dos pontos em que a circunferência que delimita o círculo corta os segmentos **[QC]** e **[QD]** – as suas sombras situar-se-ão necessariamente sobre os segmentos **[Q<sub>s</sub>C<sub>s1</sub>]** e **[Q<sub>s</sub>D<sub>s1</sub>]** e foram determinadas a partir das suas projeções horizontais. Assim, pelas projeções horizontais daqueles dois pontos (que não se identificaram), conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas interseccionam os segmentos **[Q<sub>s</sub>C<sub>s1</sub>]** e **[Q<sub>s</sub>D<sub>s1</sub>]**.

Os **cinco pontos** determinados permitem-nos um desenho relativamente preciso do segmento de elipse, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da curva aos lados do paralelogramo.

A sombra projetada do círculo nos planos de projeção é, assim, uma figura com uma parte circular (a parte situada no **SPFS**) e uma parte elíptica (a parte situada no **SPHA**). Note que a parte oculta (a parte invisível) da sombra se identificou a traço interrompido. Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do círculo com uma mancha clara e uniforme, em ambas as projeções – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano φ (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, da reta **i** e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 839.

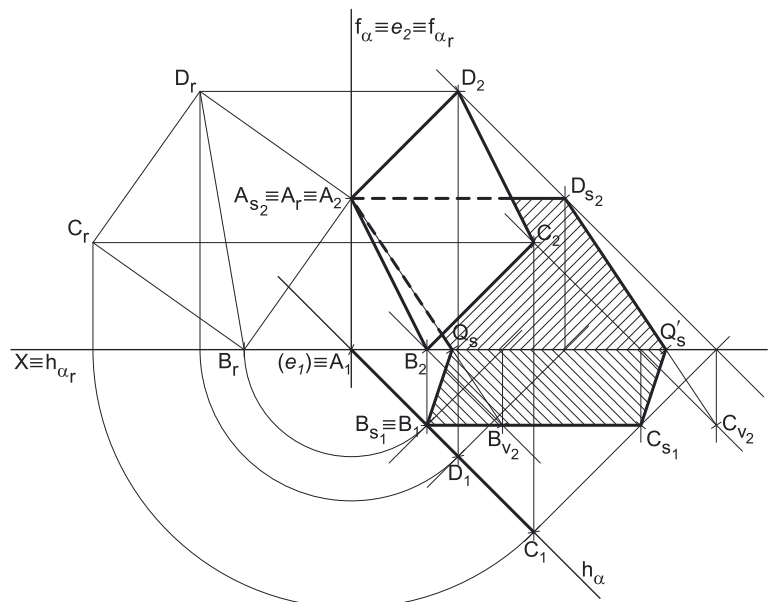
#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano α, pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, pertencentes ao plano α e em função dos dados. O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que o ponto **A** é necessariamente um ponto do traço frontal do plano α (**f<sub>α</sub>**) – o ponto **A** é o ponto de **f<sub>α</sub>** que tem 4 cm de cota. O ponto **B** tem cota nula, pelo que o ponto **B** é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano α (**h<sub>α</sub>**) – o ponto **B** é o ponto de **h<sub>α</sub>** que tem 2 cm de afastamento. O plano α é um plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais dos pontos **A** e **B** (**A<sub>1</sub>** e **B<sub>1</sub>**, respetivamente) se situam sobre o traço horizontal do plano α (**h<sub>α</sub>**). A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do quadrado **[ABCD]**:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano α) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura) para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $\mathbf{f}_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{f}_\alpha \equiv \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{f}_{\alpha_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo do rebatimento. O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{A}_r \equiv \mathbf{A}_2$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\alpha$  e determinou-se o ponto  $\mathbf{B}_r$  (o ponto **B** rebatido).

A partir de  $\mathbf{A}_r$  e de  $\mathbf{B}_r$ , construiu-se o quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento –  $\mathbf{C}_r$  e  $\mathbf{D}_r$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos **C** e **D**. A partir das duas projeções dos quatro vértices do quadrado, desenharam-se as duas projeções do polígono. Sublinha-se que a projeção horizontal do quadrado se reduz a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $\mathbf{h}_\alpha$ ), pois o plano que o contém (o plano  $\alpha$ ) é um plano projetante horizontal.

*Determinação da sombra do quadrado [ABCD] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção (situa-se no **SPFS**), pelo que a sua **sombra real** está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $\mathbf{A}_{s_2} \equiv \mathbf{A}_2$  (situa-se no **SPFS**). O ponto **B** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção (situa-se no **SPHA**), pelo que a sua **sombra real** está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $\mathbf{B}_{s_1} \equiv \mathbf{B}_1$  (situa-se no **SPFS**).  $\mathbf{C}_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $\mathbf{D}_{s_2}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D**.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$\mathbf{A}_{s_2}$  e  $\mathbf{D}_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [AD] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[\mathbf{A}_{s_2}\mathbf{D}_{s_2}]$  é a sombra projetada do lado [AD] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).  $\mathbf{B}_{s_1}$  e  $\mathbf{C}_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado [BC] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[\mathbf{B}_{s_1}\mathbf{C}_{s_1}]$  é a sombra projetada do lado [BC] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados [AB] e [CD] do quadrado – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $\mathbf{A}_{s_2}$  e  $\mathbf{B}_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $\mathbf{C}_{s_1}$  e  $\mathbf{D}_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar um dos pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **B** –  $\mathbf{B}_{v_2}$ .  $\mathbf{B}_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto **B** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**. O segmento  $[\mathbf{A}_{s_2}\mathbf{B}_{v_2}]$  é a sombra projetada do segmento [AB] no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[\mathbf{A}_{s_2}\mathbf{B}_{v_2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $\mathbf{Q}_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[\mathbf{A}_{s_2}\mathbf{Q}_s\mathbf{B}_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento [AB] (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.º Diedro).

Para determinar o outro ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **C** –  $\mathbf{C}_{v_2}$ .  $\mathbf{C}_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto **C** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**. O segmento  $[\mathbf{D}_{s_2}\mathbf{C}_{v_2}]$  é a sombra projetada do segmento [CD] no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[\mathbf{D}_{s_2}\mathbf{C}_{v_2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $\mathbf{Q}'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[\mathbf{D}_{s_2}\mathbf{Q}'_s\mathbf{C}_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento [CD] (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.º Diedro).

A linha quebrada fechada  $[\mathbf{A}_{s_2}\mathbf{Q}_s\mathbf{B}_{s_1}\mathbf{C}_{s_1}\mathbf{Q}'_s\mathbf{D}_{s_2}]$  é a **sombra real** do quadrado [ABCD] nos planos de projeção. O segmento  $[\mathbf{Q}_s\mathbf{Q}'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do quadrado. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[\mathbf{A}_{s_2}\mathbf{Q}_s\mathbf{B}_{s_1}\mathbf{C}_{s_1}\mathbf{Q}'_s\mathbf{D}_{s_2}]$  e o polígono  $[\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2\mathbf{D}_2]$  (a projeção frontal do quadrado) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com **tracejado**. Este foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções. A direção luminosa convencional, em projeção horizontal, faz ângulos de 45° (de abertura para **a esquerda**) com o eixo **X**, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte da sombra do quadrado que se situa no **SPHA**) faz ângulos de 45° (de abertura para **a direita**) com o eixo **X**. A direção luminosa convencional, em projeção frontal, faz ângulos de 45° (de abertura para **a esquerda**) com o eixo **X**, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte visível da sombra do quadrado que se situa no **SPFS**) faz ângulos de 45° (de abertura para **a direita**) com o eixo **X**.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado [ABCD]:*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em alguma das projeções, a face visível é a face sombreada.

A projeção horizontal do quadrado [ABCD] reduz-se a um segmento de reta, pelo que não é visível nenhuma das faces do polígono. Assim, em projeção horizontal não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do quadrado.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é:  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{D}_2$ ,  $\mathbf{C}_2$  e  $\mathbf{B}_2$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é:  $\mathbf{A}_{s_2}$ ,  $\mathbf{D}_{s_2}$ ,  $\mathbf{C}_{s_1}$  e  $\mathbf{B}_{s_1}$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**. O tracejado que preenche a parte visível da sombra projetada do quadrado (em ambas as projeções) executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado  $[ABCD]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado  $[ABCD]$ , nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 839A.

### Dados:

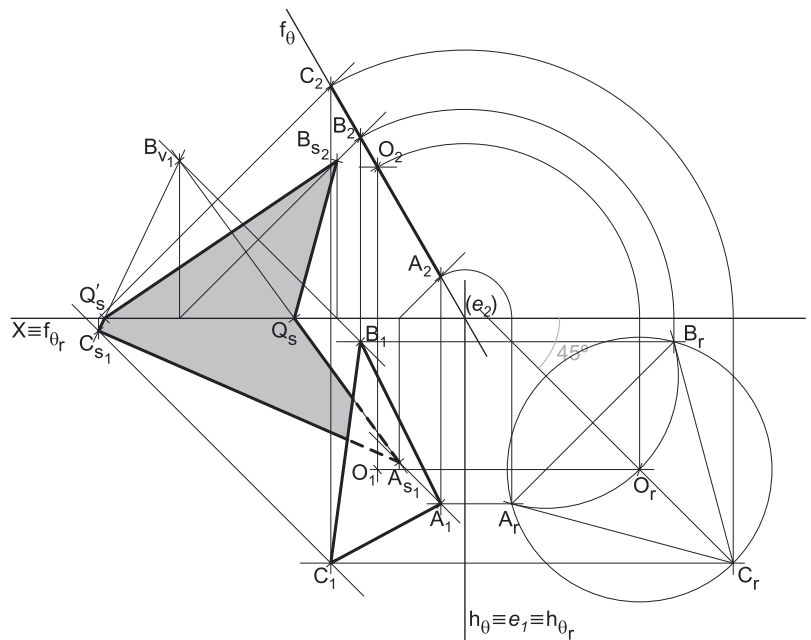
Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, pertencente ao plano  $\theta$  e em função dos dados. O ponto  $O$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $x$ ). O plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal do ponto  $O$  ( $O_2$ ) se situa sobre o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ).

### Resolução:

#### Determinação das projeções do triângulo $[ABC]$ :

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  (o plano que contém a figura) para o Plano Horizontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $h_\theta$  (o traço horizontal do plano) – tem-se, imediatamente,  $h_\theta \equiv e_1 \equiv h_{\theta_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos frontais (de frente), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos mantêm os seus afastamentos, ao longo do rebatimento. Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\theta$  e determinou-se o ponto  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido).



Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 3,5 cm de raio, desenhou-se, em rebatimento, a circunferência circunscrita ao triângulo e efetuaram-se os traçados necessários à construção do polígono, em função dos dados. O lado  $[AB]$  faz ângulo de  $45^\circ$  com os traços do plano pelo que, em rebatimento, o lado  $[A_r B_r]$  faz ângulos de  $45^\circ$  com os traços do plano  $\theta$  em rebatimento ( $f_{\theta_r}$  e  $h_{\theta_r}$ ). Nesse sentido, o **diâmetro inicial** (que nos permite iniciar a construção da figura) faz também ângulos de  $45^\circ$  com os traços do plano (em rebatimento). Das duas hipóteses para medir o ângulo de  $45^\circ$  do diâmetro inicial, a que a resolução apresenta é a única que nos garante que o vértice  $C$ , do triângulo, é o vértice mais distante do eixo  $X$ . A construção efetuada (e atrás explicada) permitiu-nos, dessa forma, determinar os três vértices do polígono, em rebatimento –  $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\theta$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos três pontos. A partir das duas projeções dos três vértices do triângulo, desenharam-se as duas projeções do polígono. Sublinha-se que a projeção frontal do triângulo se reduz a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), pois o plano que o contém (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal.

#### Determinação da sombra do triângulo $[ABC]$ nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do triângulo) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).

$A_{s1}$  é a sombra real do ponto  $A$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A$ .  $B_{s2}$  é a sombra real do ponto  $B$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $B$ .  $C_{s1}$  é a sombra real do ponto  $C$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $C$ . As sombras reais dos três vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

$A_{s_1}$  e  $C_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[AC]** do triângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_1}C_{s_1}]$  é a sombra projetada do lado **[AC]** do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AB]** e **[BC]** do triângulo – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra, recorreu-se à sombra virtual do ponto  $B - B_{v_1}$ .  $B_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto  $B$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $B$ . O segmento  $[A_{s_1}B_{v_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s_1}B_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento **[AB]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

Por outro lado, o segmento  $[C_{s_1}B_{v_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[BC]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C_{s_1}B_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[C_{s_1}Q'_sB_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento **[BC]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}Q'_sC_{s_1}]$  é a **sombra real** do triângulo **[ABC]** nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do triângulo. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}Q'_sC_{s_1}]$  e o polígono  $[A_1B_1C_1]$  (a projeção horizontal do triângulo) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do triângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha teve-se o cuidado necessário para que a mancha não ocultasse quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do triângulo [ABC]:*

O triângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em alguma das projeções, a face visível é a face sombreada.

A projeção frontal do triângulo **[ABC]** reduz-se a um segmento de reta, pelo que não é visível nenhuma das faces do polígono. Assim, em projeção frontal não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do triângulo.

Para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do triângulo, a partir do ponto  $A$ , é:  $A_1$ ,  $C_1$  e  $B_1$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice  $A$  (da sombra do vértice  $A$ ), é:  $A_{s_1}$ ,  $C_{s_1}$  e  $B_{s_2}$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o triângulo **[ABC]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\theta$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$  e necessários à construção das projeções do triângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo **[ABC]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o triângulo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o triângulo **[ABC]**, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 840.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. Sublinha-se que não é possível representar o ponto **O** (o centro da circunferência circunscrita ao pentágono) de uma forma direta, pelas suas projeções, pois não nos são dadas quaisquer coordenadas do ponto **O**. De facto, a única informação relativa ao ponto **O** é de que a circunferência em que o pentágono se inscreve é tangente aos dois planos de projeção. Ainda assim, essa informação apenas nos permite saber a cota do ponto **O** (que é igual ao raio da circunferência), mas não o seu afastamento. Assim, optou-se por prosseguir com o exercício, mesmo sem se determinarem as projeções do ponto **O**. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do pentágono [ABCDE]:*

O plano que contém o pentágono [ABCDE] (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o pentágono [ABCDE] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do pentágono apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\delta$  (o plano que contém a figura) para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $f_\delta$  (o traço frontal do plano) – tem-se, imediatamente,  $f_\delta \equiv e_2 \equiv f_{\delta_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento. Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\delta$ , o que nos permitiu determinar o ponto **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** rebatido).

De facto, tendo em conta que a circunferência circunscrita ao pentágono é tangente aos dois planos de projeção, sabe-se que, em rebatimento, a circunferência é tangente aos dois traços do plano  $\delta$ , rebatidos ( $f_{\delta_r}$  e  $h_{\delta_r}$ ). Assim, o ponto **O<sub>r</sub>** dista 4 cm (o raio da circunferência) de  $f_{\delta_r}$  e de  $h_{\delta_r}$ , o que nos permitiu determinar o ponto **O<sub>r</sub>**. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>r</sub>** e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono, que é tangente a  $f_{\delta_r}$  e a  $h_{\delta_r}$  (os traços do plano  $\delta$  em rebatimento).

O vértice **A**, do pentágono, tem afastamento nulo, pelo que **A** se situa no traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ). Nesse sentido, o ponto **A** é o ponto em que a circunferência é tangente a  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ), o que nos permitiu determinar **A<sub>r</sub>**. A partir de **A<sub>r</sub>**, efetuaram-se os traçados necessários à construção do pentágono em verdadeira grandeza (em rebatimento), o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono (em rebatimento). Note que se atendeu ao facto de o ponto **B** ser o vértice de maior cota do pentágono, como o enunciado refere expressamente.

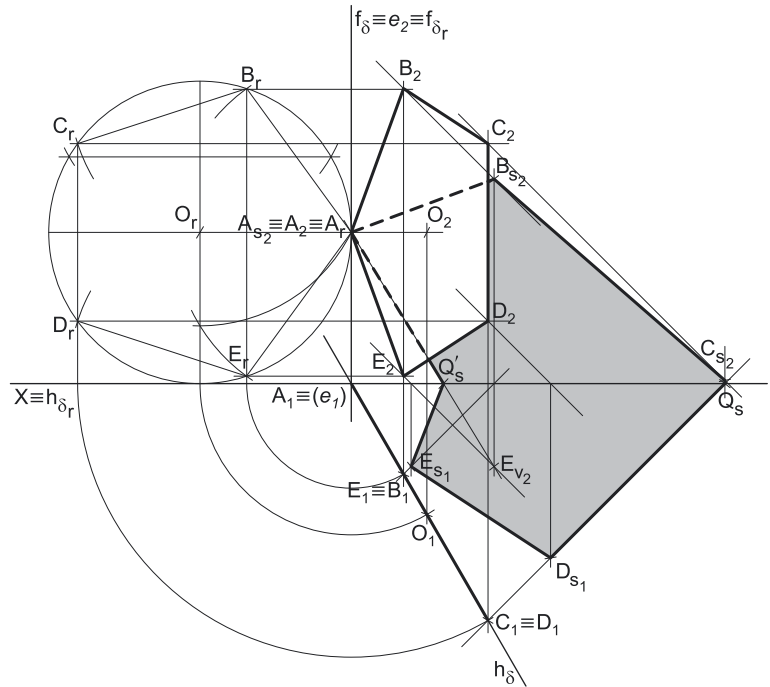
Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\delta$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos cinco vértices do pentágono. O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_2 \equiv A_r$ . A partir das duas projeções dos cinco vértices do pentágono, desenharam-se as duas projeções do polígono. Sublinha-se que a projeção horizontal do pentágono se reduz a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), pois o plano que o contém (o plano  $\delta$ ) é um plano projetante horizontal.

*Determinação da sombra do pentágono [ABCDE] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos cinco vértices do pentágono – os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do pentágono) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção (situa-se no **SPFS**), pelo que a sua **sombra real** está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $A_{s_2} \equiv A_2$  (situa-se no **SPFS**). **B<sub>s\_2</sub>** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**. **C<sub>s\_2</sub>** é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**. **D<sub>s\_1</sub>** é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**. **E<sub>s\_1</sub>** é a sombra real do ponto **E** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **E**. As sombras reais dos cinco vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do pentágono **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

**A<sub>s\_2</sub>** e **B<sub>s\_2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [AB] do pentágono não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [**A<sub>s\_2</sub>B<sub>s\_2</sub>**] é a sombra projetada do lado [AB] do pentágono (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). **B<sub>s\_2</sub>** e **C<sub>s\_2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [BC] do pentágono não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [**B<sub>s\_2</sub>C<sub>s\_2</sub>**] é a sombra projetada do lado [BC] do pentágono (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). **D<sub>s\_1</sub>** e **E<sub>s\_1</sub>** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado [DE] do pentágono não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [**D<sub>s\_1</sub>E<sub>s\_1</sub>**] é a sombra projetada do lado [DE] do pentágono (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O mesmo já não acontece em relação aos lados **[CD]** e **[AE]** do pentágono – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $C_{s2}$  e  $D_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $A_{s2}$  e  $E_{s1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s2}$  e  $D_{s1}$  teve-se em conta que o lado **[CD]** do pentágono é um segmento de reta vertical (paralelo ao Plano Frontal de Projeção) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta vertical é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s2}$  (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[C_2D_2]$  (a projeção frontal do segmento **[CD]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$ . A linha quebrada aberta  $[D_{s1}Q_sC_{s2}]$  é a **sombra real** do lado **[CD]** nos planos de projeção (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s2}$  e  $E_{s1}$ , recorreu-se à sombra virtual do ponto **E** –  $E_{v2}$ .  $E_{v2}$  é a sombra virtual do ponto **E** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **E**. O segmento  $[A_{s2}E_{v2}]$  é a sombra projetada do segmento **[AE]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s2}E_{v2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s2}Q'_sE_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento **[AE]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s2}B_{s2}C_{s2}Q_sD_{s1}E_{s1}Q'_s]$  é a **sombra real** do pentágono **[ABCDE]** nos planos de projeção. O segmento  $[Q'_sQ_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do pentágono. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s2}B_{s2}C_{s2}Q_sD_{s1}E_{s1}Q'_s]$  e o polígono  $[A_2B_2C_2D_2E_2]$  (a projeção frontal do pentágono) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do pentágono estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do pentágono com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha teve-se o cuidado necessário para que a mancha não ocultasse quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do pentágono **[ABCDE]**:*

O pentágono, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em alguma das projeções, a face visível é a face sombreada.

A projeção horizontal do pentágono **[ABCDE]** reduz-se a um segmento de reta, pelo que não é visível nenhuma das faces do polígono. Assim, em projeção horizontal não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do pentágono.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do pentágono, a partir do ponto **A**, é:  $A_2, B_2, C_2, D_2$  e  $E_2$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do pentágono, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é:  $A_{s2}, B_{s2}, C_{s2}, D_{s1}$  e  $E_{s1}$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do pentágono que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o pentágono **[ABCDE]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\delta$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\delta$  e necessários à construção das projeções do pentágono), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o pentágono **[ABCDE]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o pentágono. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o pentágono **[ABCDE]**, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 841.

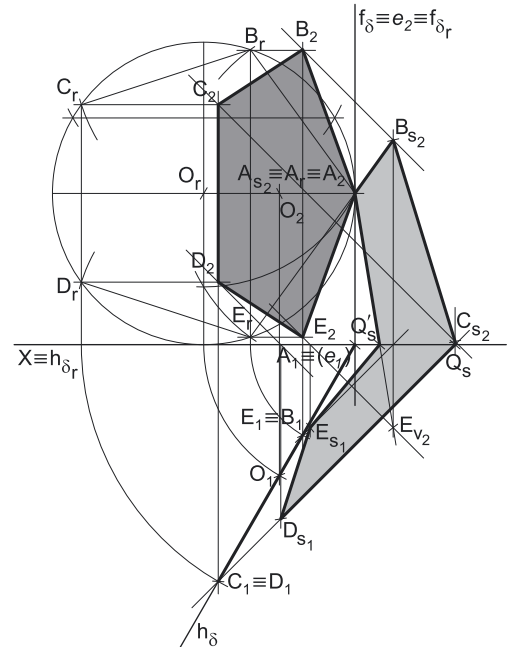
**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. Sublinha-se que não é possível representar o ponto **O** (o centro da circunferência circunscrita ao pentágono) de uma forma direta, pelas suas projeções, pois não nos são dadas quaisquer coordenadas do ponto **O**. De facto, a única informação relativa ao ponto **O** é de que a circunferência em que o pentágono se inscreve é tangente aos dois planos de projeção. Ainda assim, essa informação apenas nos permite saber a cota do ponto **O** (que é igual ao raio da circunferência), mas não o seu afastamento. Assim, optou-se por se prosseguir com o exercício, mesmo sem se determinarem as projeções do ponto **O**. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do pentágono [ABCDE]:*

O plano que contém o pentágono [ABCDE] (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o pentágono [ABCDE] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do pentágono apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\delta$  (o plano que contém a figura) para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $f_\delta$  (o traço frontal do plano) – tem-se, imediatamente,  $f_\delta \equiv e_2 \equiv f_{\delta_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento. Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\delta$ , o que nos permitiu determinar o ponto  $O_r$  (o ponto **O** rebatido).



De facto, tendo em conta que a circunferência circunscrita ao pentágono é tangente aos dois planos de projeção, sabe-se que, em rebatimento, a circunferência é tangente aos dois traços do plano  $\delta$ , rebatidos ( $f_{\delta_r}$  e  $h_{\delta_r}$ ). Assim, o ponto  $O_r$  dista 4 cm (o raio da circunferência) de  $f_{\delta_r}$  e de  $h_{\delta_r}$ , o que nos permitiu determinar o ponto  $O_r$ . Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono, que é tangente a  $f_{\delta_r}$  e a  $h_{\delta_r}$  (os traços do plano  $\delta$  em rebatimento).

O vértice **A**, do pentágono, tem afastamento nulo, pelo que **A** se situa no traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ). Nesse sentido, o ponto **A** é o ponto em que a circunferência é tangente a  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ), o que nos permitiu determinar  $A_r$ . A partir de  $A_r$  efetuaram-se os traçados necessários à construção do pentágono em verdadeira grandeza (em rebatimento), o que nos permitiu determinar os restantes vértices do polígono (em rebatimento). Note que se atendeu ao facto de o ponto **B** ser o vértice de maior cota do pentágono, como o enunciado refere expressamente.

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\delta$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos cinco vértices do pentágono. O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_2 \equiv A_r$ . A partir das duas projeções dos cinco vértices do pentágono, desenharam-se as duas projeções do polígono. Sublinha-se que a projeção horizontal do pentágono se reduz a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), pois o plano que o contém (o plano  $\delta$ ) é um plano projetante horizontal.

*Determinação da sombra do pentágono [ABCDE] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos cinco vértices do pentágono – os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do pentágono) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção (situa-se no **SPFS**), pelo que a sua **sombra real** está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $A_{s2} \equiv A_2$  (situa-se no **SPFS**).  $B_{s2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.  $D_{s1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.  $E_{s1}$  é a sombra real do ponto **E** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **E**. As sombras reais dos cinco vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do pentágono **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s2}$  e  $B_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [AB] do pentágono não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $A_{s2}B_{s2}$ ] é a sombra projetada do lado [AB] do pentágono (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).  $B_{s2}$  e  $C_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [BC] do pentágono não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $B_{s2}C_{s2}$ ] é a sombra projetada do lado [BC] do pentágono (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).  $D_{s1}$  e  $E_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado [DE] do pentágono não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $D_{s1}E_{s1}$ ] é a sombra projetada do lado [DE] do pentágono (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados [CD] e [AE] do pentágono – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $C_{s2}$  e  $D_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $A_{s2}$  e  $E_{s1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s2}$  e  $D_{s1}$  teve-se em conta que o lado  $[CD]$  do pentágono é um segmento de reta vertical (paralelo ao Plano Frontal de Projeção) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta vertical é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s2}$  (a sombra real do ponto  $C$ , que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[C_2D_2]$  (a projeção frontal do segmento  $[CD]$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q_s$ . A linha quebrada aberta  $[D_{s1}Q_sC_{s2}]$  é a **sombra real** do lado  $[CD]$  nos planos de projeção (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s2}$  e  $E_{s1}$ , recorreu-se à sombra virtual do ponto  $E - E_{v2}$ .  $E_{v2}$  é a sombra virtual do ponto  $E$  – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $E$ . O segmento  $[A_{s2}E_{v2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AE]$  no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s2}E_{v2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s2}Q'_sE_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[AE]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s2}B_{s2}C_{s2}Q_sD_{s1}E_{s1}Q'_s]$  é a **sombra real** do pentágono  $[ABCDE]$  nos planos de projeção. O segmento  $[Q'_sQ_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do pentágono. Salienta-se que não existe qualquer sobreposição entre o polígono  $[A_{s2}B_{s2}C_{s2}Q_sD_{s1}E_{s1}Q'_s]$  e qualquer das projeções do pentágono, pelo que a sombra do pentágono nunca está oculta pelo pentágono (não existe qualquer invisibilidade a assinalar).

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do pentágono com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha teve-se o cuidado necessário para que a mancha não ocultasse quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do pentágono  $[ABCDE]$ :*

O pentágono, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em alguma das projeções, a face visível é a face sombreada.

A projeção horizontal do pentágono  $[ABCDE]$  reduz-se a um segmento de reta, pelo que não é visível nenhuma das faces do polígono. Assim, em projeção horizontal não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do pentágono.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do pentágono, a partir do ponto  $A$ , é:  $A_2, E_2, D_2, C_2$  e  $B_2$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do pentágono, também a partir do vértice  $A$  (da sombra do vértice  $A$ ), é:  $A_{s2}, B_{s2}, C_{s2}, D_{s1}$  e  $E_{s1}$ . As duas sequências apresentam os vértices por ordens diferentes, pelo que a face do pentágono que é visível em projeção frontal está **em sombra** (em **sombra própria**).

Nesse sentido, preencheu-se a **sombra própria** do pentágono (a projeção frontal da figura) com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o pentágono  $[ABCDE]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\delta$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\delta$  e necessários à construção das projeções do pentágono), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o pentágono  $[ABCDE]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o pentágono. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o pentágono  $[ABCDE]$ , nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 842.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, pertencente ao plano  $\gamma$  e em função dos dados. O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que o ponto **A** é necessariamente um ponto do traço frontal do plano ( $f_\gamma$ ) – o ponto **A** é o ponto de  $f_\gamma$  que tem 6 cm de cota.

Note que é dado o ângulo que o lado **[AB]** faz com o Plano Horizontal de Projeção é um **ângulo real** e não um **ângulo em projeções** – o ângulo entre o lado **[AB]** e o Plano Horizontal de Projeção é o ângulo que o lado **[AB]** faz com o traço horizontal do plano ( $h_\gamma$ ) e está contido no plano  $\gamma$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo dado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, não é possível medir o ângulo dado diretamente, em nem projeção frontal nem em projeção horizontal.

**Resolução:***Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:*

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, e como acima se referiu, o ângulo que o lado **[AB]** faz com o Plano Horizontal de Projeção é um **ângulo real** (é o ângulo entre o lado **[AB]** e o o traço horizontal do plano  $\gamma - h_\gamma$ ) e está contido no plano  $\gamma$ . Uma vez que o plano que contém o ângulo (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, o ângulo dado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\gamma$  (o plano que contém a figura) para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano) – tem-se, imediatamente,  $f_\gamma \equiv e_2 \equiv f_{\gamma r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\gamma$ . O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_2$ . O ângulo que o lado **[AB]** faz com o Plano Horizontal de Projeção é o ângulo que o lado **[AB]** faz com  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ) – esse ângulo está em verdadeira grandeza em rebatimento, no ângulo entre a reta suporte de **[AB]** (em rebatimento) e  $h_{\gamma r}$ . Assim, por  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) conduziu-se uma reta (a reta suporte do lado **[AB]**) fazendo, com  $h_{\gamma r}$ , um ângulo de  $60^\circ$  e garantindo-se, ainda, que o ponto **B** tem afastamento positivo. Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de  $A_r$ , a que a resolução apresenta é aquela que garante que o ponto **B** tem cota inferior a **A** (pois **B** tem 1 cm de cota e **A** tem 6 cm de cota). Em seguida, determinou-se o ponto da reta suporte do lado **[AB]** que tem 1 cm de cota (que dista 1 cm do eixo **X**) e determinou-se  $B_r$ .

A partir de  $A_r$  e de  $B_r$ , construiu-se o quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento –  $C_r$  e  $D_r$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\gamma$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos **B**, **C** e **D**. A partir das duas projeções dos quatro vértices do quadrado, desenharam-se as duas projeções do polígono. Sublinha-se que a projeção horizontal do quadrado se reduz a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), pois o plano que o contém (o plano  $\gamma$ ) é um plano projetante horizontal.

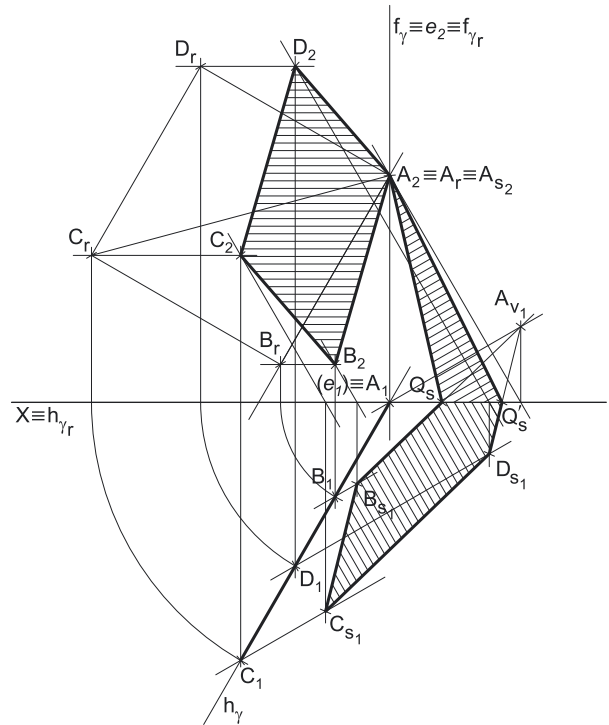
*Determinação da sombra do quadrado [ABCD] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do pentágono) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).

O ponto **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção (situa-se no **SPFS**), pelo que a sua **sombra real** está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $A_{s_2} \equiv A_2$  (situa-se no **SPFS**).  $B_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**. As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$B_{s_1}$  e  $C_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[BC]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s_1}C_{s_1}]$  é a sombra projetada do lado **[BC]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).  $C_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[CD]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s_1}D_{s_1}]$  é a sombra projetada do lado **[CD]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AB]** e **[AD]** do quadrado – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_2}$  e  $B_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_2}$  e  $D_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_2}$  e  $B_{s_1}$ , recorreu-se à sombra virtual do ponto  $A - A_{v_1}$ .  $A_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto  $A$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $A$ . O segmento  $[A_{v_1}B_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AB]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{v_1}B_{s_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s_2}Q_sB_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[AB]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.º Diedro).

A sombra virtual do ponto  $A$  ( $A_{v_1}$ ) permitiu-nos, ainda, determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_2}$  e  $D_{s_1}$ . O segmento  $[A_{v_1}D_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AD]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{v_1}D_{s_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s_2}Q'_sD_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[AD]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.º Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s_2}Q_sB_{s_1}C_{s_1}D_{s_1}Q'_s]$  é a **sombra real** do quadrado  $[ABCD]$  nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do quadrado. Salienta-se que não existe qualquer sobreposição entre o polígono  $[A_{s_2}Q_sB_{s_1}C_{s_1}D_{s_1}Q'_s]$  e qualquer das projeções do quadrado, pelo que a sombra do quadrado nunca está oculta pelo quadrado (não existe qualquer invisibilidade a assinalar).

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com **tracejado**. Este foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções. A direção luminosa convencional, em projeção horizontal, faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a esquerda**) com o eixo  $X$ , pelo que o **tracejado** (que preenche a parte da sombra do quadrado que se situa no **SPHA**) faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a direita**) com o eixo  $X$ . A direção luminosa convencional, em projeção frontal, faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a esquerda**) com o eixo  $X$ , pelo que o **tracejado** (que preenche a parte visível da sombra do quadrado que se situa no **SPFS**) faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a direita**) com o eixo  $X$ .

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado  $[ABCD]$ :*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em alguma das projeções, a face visível é a face sombreada.

A projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$  reduz-se a um segmento de reta, pelo que não é visível nenhuma das faces do polígono. Assim, em projeção horizontal não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do quadrado.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto  $A$ , é:  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice  $A$  (da sombra do vértice  $A$ ), é:  $A_{s_2}$ ,  $D_{s_1}$ ,  $C_{s_1}$  e  $B_{s_1}$ . As duas sequências apresentam os vértices por ordens diferentes, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **em sombra** (em **sombra própria**).

Nesse sentido, preencheu-se a **sombra própria** do quadrado (a projeção frontal da figura) com **tracejado**. Este foi executado paralelamente ao eixo  $X$  (por se tratar de uma **sombra própria**).

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\gamma$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\gamma$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**. O tracejado que preenche a parte visível da **sombra projetada** do quadrado (em ambas as projeções), bem como aquele que preenche a **sombra própria** da figura, executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado  $[ABCD]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado  $[ABCD]$ , nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 842A.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os pontos **A** e **C** estão contidos num plano de perfil, pelo que os dois pontos têm necessariamente a mesma abscissa. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a figura) pelos seus traços, contendo os pontos **A** e **C** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal contém as projeções frontais dos dois pontos, tal como o seu traço horizontal contém as projeções horizontais dos dois pontos. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:*

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  (o plano que contém o quadrado) para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $f_\pi$  (o traço frontal do plano) – tem-se, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos pontos **A** e **C**, obtendo **A<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**. A partir de **A<sub>r</sub>** e de **C<sub>r</sub>**, construiu-se o quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento – **B<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**. Estes dois vértices foram identificados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito. Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos **B** e **D** e desenhar as duas projeções do polígono. Sublinha-se que ambas as projeções do quadrado se reduzem a segmentos de reta, pois o plano que o contém (o plano  $\pi$ ) é duplamente projetante.

*Determinação da sombra do quadrado [ABCD] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

**A<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **A**. **B<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**. **C<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**. **D<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **D**. As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

**A<sub>s2</sub>** e **D<sub>s2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [AD] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [A<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>] é a sombra projetada do lado [AD] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). **B<sub>s1</sub>** e **C<sub>s1</sub>** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado [BC] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [B<sub>s1</sub>C<sub>s1</sub>] é a sombra projetada do lado [BC] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFHA**).

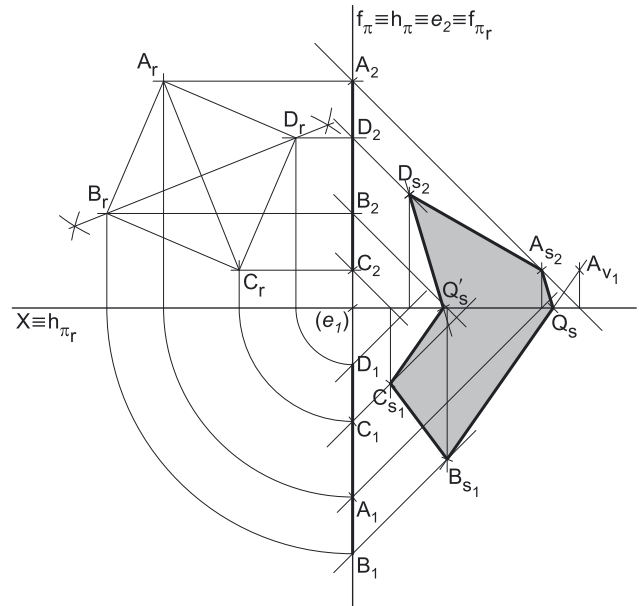
O mesmo já não acontece em relação aos lados [AB] e [CD] do quadrado – de facto, existe um ponto de quebra entre **A<sub>s2</sub>** e **B<sub>s1</sub>** (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre **C<sub>s1</sub>** e **D<sub>s2</sub>** (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre **A<sub>s2</sub>** e **B<sub>s1</sub>** recorreu-se à sombra virtual do ponto **A** – **A<sub>v1</sub>**. **A<sub>v1</sub>** é a sombra virtual do ponto **A** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **A**. O segmento [B<sub>s1</sub>A<sub>v1</sub>] é a sombra projetada do segmento [AB] no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento [B<sub>s1</sub>A<sub>v1</sub>] (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta [B<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>A<sub>s2</sub>] é a **sombra real** do segmento [AB] (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.<sup>a</sup> Diedro).

Para se determinar o ponto de quebra situado entre **C<sub>s1</sub>** e **D<sub>s2</sub>** poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto **C** ou à sombra virtual do ponto **D**, por exemplo, mas optou-se por uma situação diferente, com um raciocínio simples e com menos traçado. Os lados [AB] e [CD], do quadrado, são paralelos, pelo que as sombras projetadas daqueles dois lados em ambos os planos de projeção são igualmente paralelas (os **planos luz/sombra** que contém aqueles dois lados **são paralelos**, pois trata-se de uma **direção luminosa**).

Assim, por **C<sub>s1</sub>** (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPHA**), conduziu-se uma paralela ao segmento [B<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>] (a sombra projetada do segmento [AB] no **SPHA**), até ao eixo **X**, onde se situa **Q'<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do lado [CD] do quadrado). A linha quebrada aberta [C<sub>s1</sub>Q'<sub>s</sub>D<sub>s2</sub>] é a **sombra real** do segmento [CD] (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.<sup>a</sup> Diedro). Note que o segmento [Q'<sub>s</sub>D<sub>s2</sub>] (a sombra projetada do segmento [CD] no **SPFS**) é necessariamente paralelo ao segmento [Q<sub>s</sub>A<sub>s2</sub>] (a sombra projetada do segmento [AB] no **SPFS**), como atrás se referiu.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A linha quebrada fechada  $[A_{s2}Q_sB_{s1}C_{s1}Q'_sD_{s2}]$  é a **sombra real** do quadrado  $[ABCD]$  nos planos de projeção. O segmento  $[Q'_sQ_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do quadrado.

Nesta situação, a sombra do quadrado é visível na sua totalidade, pois não existe qualquer sobreposição entre qualquer das projeções da figura e a sua sombra projetada. Assim, preencheu-se a **parte visível** (a totalidade) da sombra do quadrado com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado  $[ABCD]$ :*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em alguma das projeções, a face visível é a face sombreada.

A projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$  reduz-se a um segmento de reta, pelo que não é visível nenhuma das faces do polígono. Assim, em projeção horizontal não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do quadrado. De forma semelhante, também a projeção frontal do quadrado  $[ABCD]$  se reduz a um segmento de reta, pelo que também não é visível nenhuma das faces do polígono em projeção frontal. Assim, em projeção frontal também não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do quadrado.

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado  $[ABCD]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado  $[ABCD]$ , neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 843.

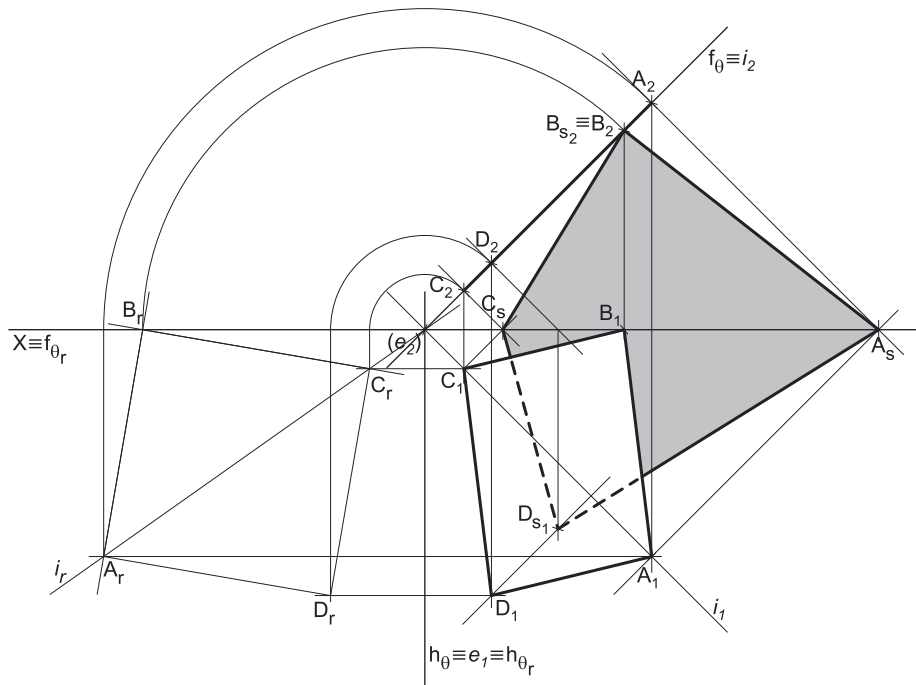
### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, pertencente ao plano  $\theta$  e em função dos dados. O ponto  $A$  é um ponto do plano  $\theta$ , pelo que a sua projeção frontal ( $A_2$ ) se situa sobre o traço frontal do plano ( $f_{\theta}$ ), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. Por outro lado, o ponto  $A$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ , pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

### Resolução:

*Determinação das projeções do quadrado  $[ABCD]$ :*

É dado que a diagonal  $[AC]$  do quadrado pertence ao  $\beta_{1/3}$ . Por outro lado, a diagonal  $[AC]$  do quadrado também pertence ao plano  $\theta$ , pois o quadrado está contido no plano  $\theta$ . Conclui-se, então, que os pontos  $A$  e  $C$  pertencem aos dois planos (o plano  $\theta$  e o  $\beta_{1/3}$ ), pelo que os dois pontos se situam na reta de interseção entre os dois planos. Nesse sentido determinaram-se as projeções da reta  $i$ , a reta de interseção entre os dois planos (que é, também, a reta suporte da diagonal  $[AC]$ ).



A reta  $i$ , porque pertence ao plano  $\theta$ , tem a sua projeção frontal ( $i_2$ ) sobre o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_{\theta}$ ), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. Por outro lado, a reta  $i$ , porque pertence ao  $\beta_{1/3}$ , tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$  (retas do  $\beta_{1/3}$  têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ), o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ), que passa, ainda, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ). Note que, na prática, a reta  $i$  está definida por dois pontos que pertencem simultaneamente aos dois planos – o ponto  $A$  e o ponto de concorrência dos traços do plano  $\theta$  (que não se identificou).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  (o plano que contém a figura) para o Plano Horizontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $h_\theta$  (o traço horizontal do plano) – tem-se, imediatamente,  $h_\theta \equiv e_f \equiv h_{0r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos frontais (de frente), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo do rebatimento.

Assim, efetuou-se o rebatimento do plano  $\theta$ , o que nos permitiu determinar  $A_r$  (o ponto **A** rebatido). Em seguida, desenhou-se a reta  $i_r$  (a reta *i* rebatida), que está definida por dois pontos – o ponto  $A_r$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é um ponto da charneira e que, por isso, roda sobre si próprio). Depois, efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado em verdadeira grandeza (em rebatimento), respeitando os dados –  $C_r$ , tem que se situar sobre a reta  $i_r$  (a reta *i* é a reta suporte da diagonal **[AC]**) e o ponto **B** tem afastamento nulo.

Nesse sentido, pelo ponto  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) conduziu-se uma reta fazendo, com a reta  $i_r$ , um ângulo de  $45^\circ$  – essa reta é a reta suporte do lado **[AB]** (os lados do quadrado fazem ângulos de  $45^\circ$  com as suas diagonais). O ponto de interseção dessa reta (a reta suporte do lado **[AB]**, em rebatimento) com o eixo  $X$  é  $B_r$  (o ponto **B** rebatido). Por  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular a  $[A_r B_r]$  e determinou-se  $C_r$  (o ponto **C** rebatido), sobre a reta  $i_r$ . Por fim, concluiu-se a construção do quadrado em rebatimento, o que nos permitiu determinar o último vértice do quadrado, em rebatimento –  $D_r$ .

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\theta$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos **B**, **C** e **D** (note que as projeções do ponto **C** se situam sobre as projeções homónimas da reta *i*). A partir das duas projeções dos quatro vértices do quadrado, desenharam-se as duas projeções do polígono. Sublinha-se que a projeção frontal do quadrado se reduz a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\theta$ , pois o plano que o contém (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal.

*Determinação da sombra do quadrado [ABCD] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do pentágono) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **B** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua **sombra real** está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $B_{s2} \equiv B_2$  (situa-se no **SPFS**).  $D_{s1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.

Há a referir que o raio luminoso que passa pelo ponto **A** é uma **reta passante**, pelo que  $A_s$  (a **sombra real** do ponto **A**) se situa no eixo  $X$  (situa-se tanto no **SPFS** como no **SPHA**). Nesse sentido,  $A_s$  é o **traço frontal** do raio luminoso que passa pelo ponto **A** como é, também, o **traço horizontal** desse mesmo raio luminoso. De forma semelhante, o raio luminoso que passa pelo ponto **C** é igualmente uma **reta passante**, pelo que  $C_s$  (a **sombra real** do ponto **C**) se situa ainda no eixo  $X$  (situa-se tanto no **SPFS** como no **SPHA**). Nesse sentido,  $C_s$  também é o **traço frontal** do raio luminoso que passa pelo ponto **C** como é, ainda, o **traço horizontal** desse mesmo raio luminoso.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do quadrado é limitada pelas sombras projetadas dos lados do quadrado nos planos de projeção e os lados do quadrado são segmentos de reta. Sublinha-se que  $A_s$ , situando-se no eixo  $X$ , é, de forma imediata, um **ponto de quebra** da sombra do quadrado (pois é uma sombra que se situa em ambos os Planos de Projeção). De forma semelhante,  $C_s$ , situando-se igualmente no eixo  $X$ , é, de forma imediata, o outro **ponto de quebra** da sombra do quadrado (pois é uma sombra que se situa em ambos os Planos de Projeção).

$A_s$  e  $B_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[AB]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_s B_{s2}]$  é a sombra projetada do lado **[AB]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).  $A_s$  e  $D_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[AD]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_s D_{s1}]$  é a sombra projetada do lado **[AD]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).  $B_{s2}$  e  $C_s$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[BC]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s2} C_s]$  é a sombra projetada do lado **[BC]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).  $C_s$  e  $D_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[CD]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_s D_{s1}]$  é a sombra projetada do lado **[CD]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

A linha quebrada fechada  $[A_s B_{s2} C_s D_{s1}]$  é a **sombra real** do quadrado **[ABCD]** nos planos de projeção. O segmento  $[C_s A_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do quadrado. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_s B_{s2} C_s D_{s1}]$  e o polígono  $[A_1 B_1 C_1 D_1]$  (a projeção horizontal do quadrado) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha teve-se o cuidado necessário para que a mancha não ocultasse quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado [ABCD]:*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em alguma das projeções, a face visível é a face sombreada.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A projeção frontal do quadrado **[ABCD]** reduz-se a um segmento de reta, pelo que não é visível nenhuma das faces do polígono. Assim, em projeção frontal não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do quadrado.

Para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> e B<sub>1</sub>**. A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s</sub>, D<sub>s1</sub>, C<sub>s</sub> e B<sub>s2</sub>**. As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o quadrado **[ABCD]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\theta$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado **[ABCD]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado **[ABCD]**, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 844.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\theta$ , pelos seus traços, em função dos dados e contendo o ponto **A**. O ponto **A** tem cota nula, pelo que é um ponto do traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_0$ ).

Note que é dado o ângulo que o lado **[AB]** faz com  $h_0$  (o traço horizontal do plano  $\theta$ ), que é um **ângulo real** e não um **ângulo em projeções** – o ângulo entre o lado **[AB]** e  $h_0$  está contido no plano  $\theta$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo dado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, não é possível medir o ângulo dado diretamente, em nem projeção frontal nem em projeção horizontal.

### Resolução:

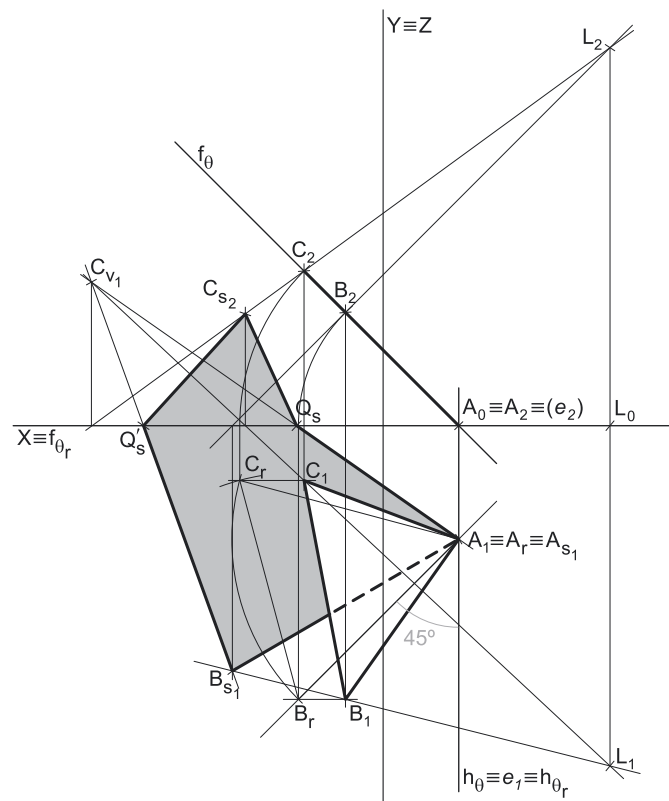
#### Determinação das projeções do triângulo **[ABC]**:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, e como acima se referiu, o ângulo que o lado **[AB]** faz com  $h_0$  é um **ângulo real** e está contido no plano  $\theta$ . Uma vez que o plano que contém o ângulo (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, o ângulo dado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  (o plano que contém a figura) para o Plano Horizontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $h_0$  (o traço horizontal do plano) – tem-se, imediatamente,  $h_0 \equiv e_1 \equiv h_{0r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos frontais (de frente), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo do rebatimento.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\theta$ . O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ . O ângulo que o lado **[AB]** faz com  $h_0$  está em verdadeira grandeza em rebatimento, no ângulo entre a reta suporte de **[AB]** (em rebatimento) e  $h_{0r}$ . Assim, por  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) conduziu-se uma reta (a reta suporte do lado **[AB]**) fazendo, com  $h_{0r}$ , um ângulo de  $45^\circ$  e garantindo-se, ainda, que o ponto **B** tem afastamento superior a **A**. Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de  $A_r$ , a que a resolução apresenta é aquela que garante que o ponto **B** tem afastamento superior a **A** e, em simultâneo, que o quadrado se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro (como o enunciado refere expressamente). Sobre a reta suporte de **[AB]**, em rebatimento, mediram-se os 5 cm (a medida do lado do triângulo), o que nos permitiu determinar  $B_r$  (o ponto **B** rebatido).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir de  $A_r$  e de  $B_r$ , construiu-se o triângulo em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar o terceiro vértice do polígono, em rebatimento –  $C_r$  (garantindo-se que o triângulo se situa no espaço do 1.º Diedro). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\theta$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos  $B$  e  $C$ . A partir das duas projeções dos três vértices do triângulo, desenharam-se as duas projeções do polígono. Sublinha-se que a projeção frontal do triângulo se reduz a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), pois o plano que o contém (o plano  $\theta$ ) é um plano projetante frontal.

*Determinação da sombra do triângulo [ABC] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por dois pontos – o respetivo vértice do pentágono e o ponto  $L$  (o foco luminoso).

O ponto  $A$  é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua **sombra real** está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $A_{s1} \equiv A_1$  (situa-se no **SPHA**).  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto  $B$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $B$ .  $C_{s2}$  é a sombra real do ponto  $C$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $C$ . As sombras reais dos três vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s1}$  e  $B_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado  $[AB]$  do triângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s1}B_{s1}]$  é a sombra projetada do lado  $[AB]$  do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados  $[AC]$  e  $[BC]$  do triângulo – de facto, existe um ponto de quebra entre  $A_{s1}$  e  $C_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e existe um outro ponto de quebra entre  $B_{s1}$  e  $C_{s2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s1}$  e  $C_{s2}$ , recorreu-se à sombra virtual do ponto  $C$  –  $C_{v1}$ .  $C_{v1}$  é a sombra virtual do ponto  $C$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $C$ . O segmento  $[C_{v1}A_{s1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AC]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C_{v1}A_{s1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[C_{s2}Q_sA_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[AC]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.º Diedro).

A sombra virtual do ponto  $C$  ( $C_{v1}$ ) permitiu-nos, ainda, determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s2}$  e  $B_{s1}$ . O segmento  $[C_{v1}B_{s1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BC]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C_{v1}B_{s1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[C_{s2}Q'_sB_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[BC]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.º Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s1}B_{s1}Q_sC_{s2}Q'_s]$  é a **sombra real** do triângulo  $[ABC]$  nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do triângulo. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s1}B_{s1}Q_sC_{s2}Q'_s]$  e o polígono  $[A_1B_1C_1]$  (a projeção horizontal do triângulo) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do triângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha teve-se o cuidado necessário para que a mancha não ocultasse quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do triângulo [ABC]:*

O triângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em alguma das projeções, a face visível é a face sombreada.

A projeção frontal do triângulo  $[ABC]$  reduz-se a um segmento de reta, pelo que não é visível nenhuma das faces do polígono. Assim, em projeção frontal, não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do triângulo.

Para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do triângulo, a partir do ponto  $A$ , é:  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice  $A$  (da sombra do vértice  $A$ ), é:  $A_{s1}$ ,  $B_{s1}$  e  $C_{s2}$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

**Traçado:**

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o triângulo  $[ABC]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\theta$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$  e necessários à construção das projeções do triângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo  $[ABC]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o triângulo  $[ABC]$ , nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 845.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano  $\pi$ , pelos seus traços, bem como a sombra do vértice **A** ( $A_s$ ), em função dos dados.  $A_s$  (a sombra do ponto **A**) situa-se no eixo **X**, 6 cm para a direita do plano  $\pi$ , conforme o enunciado refere expressamente. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do triângulo [ABC]:

Antes de mais, uma vez que não nos é dado qualquer vértice do triângulo, é necessário começar por determinar as projeções de um vértice qualquer do triângulo – o vértice **A**, neste caso. Assim, por  $A_s$  (a sombra real do ponto **A**) conduziu-se um raio luminoso  $l$ , que está definido por um ponto (o ponto  $A_s$ ) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\pi$  (o plano que contém o triângulo) – esse ponto é o ponto **A** (que é um ponto do raio luminoso e é, também um ponto do plano  $\pi$ ). O ponto **A** teve determinação direta em ambas as projeções, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi$ ).

Note que o ponto **A** é necessariamente um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pois pertence ao raio luminoso  $l$ , que é uma reta do  $\beta_{1/3}$  (o raio luminoso  $l$  tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**).

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção das projeções do triângulo. O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  (o plano que contém a figura) para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $f_\pi$  (o traço frontal do plano) – tem-se, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **A**, obtendo  $A_r$ . De acordo com o enunciado, o ponto **C** é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que o ponto **C** pertence simultaneamente aos dois planos (o plano  $\pi$  e o  $\beta_{1/3}$ ). Atendendo a que o ponto **A** é, também, um ponto que pertence aos dois planos (o plano  $\pi$  e o  $\beta_{1/3}$ ), depreende-se que o lado [AC], do triângulo, está contido na reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ . Nesse sentido, determinaram-se nas projeções da reta  $l$ , de forma imediata, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante.

Note que a reta  $l$  está, neste momento, definida por dois pontos (o ponto **A** e o ponto de concorrência dos traços do plano  $\pi$ ) e, ainda, pela sua direção (sabe-se que faz ângulos de  $45^\circ$  com os dois planos de projeção, atravessando os  $1^a$  e  $3^a$  Diedros). Assim, desenhou-se a reta  $l_r$  (a reta  $l$  em rebatimento), que passa por  $A_r$  e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é um ponto fixo, pois situa-se na charneira do rebatimento) e faz, com  $f_{\pi_r}$  e com  $h_{\pi_r}$ , ângulos de  $45^\circ$ .

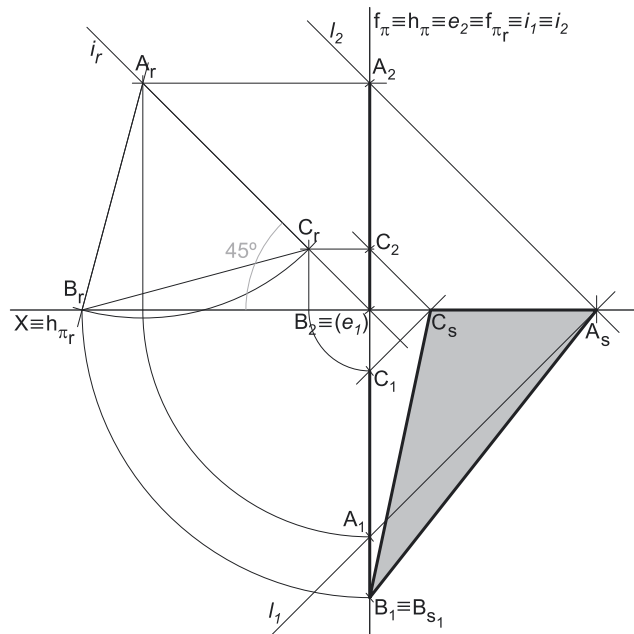
Em rebatimento, o segmento  $[A_r C_r]$  (o lado [AC], do triângulo, em rebatimento), tem de estar sobre a reta  $l_r$ . No entanto, não nos é dada a medida do lado do triângulo, pelo que não é possível determinar  $C_r$  (o ponto **C** rebatido), a partir de  $A_r$ . Apesar disso, sabe-se que os ângulos internos de qualquer triângulo equilátero têm, todos, uma amplitude de  $60^\circ$ . Assim, o lado  $[A_r B_r]$  (o lado [AB] do triângulo, em rebatimento) faz, com a reta  $l_r$ , (a reta suporte do lado  $[A_r C_r]$ ) um ângulo de  $60^\circ$ . Nesse sentido, a partir de  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) mediu-se um ângulo de  $60^\circ$ , o que nos permitiu desenhar a reta suporte do lado [AB], em rebatimento. Uma vez que o ponto **B** tem cota nula,  $B_r$  é o ponto em que aquela reta interseja  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ , em rebatimento). Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $A_r$  e com raio até  $B_r$ , transportou-se a medida do lado do triângulo para a reta  $l_r$ , o que nos permitiu determinar  $C_r$ .

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos **B** e **C** e desenhar as duas projeções do polígono. Sublinha-se que ambas as projeções do triângulo se reduzem a segmentos de reta, pois o plano que o contém (o plano  $\pi$ ) é duplamente projetante.

#### Determinação da sombra do triângulo [ABC] nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos vértices **B** e **C** do triângulo, cujas sombras ainda não são conhecidas (recorde que a sombra do ponto **A** era dada no enunciado). Para tal, conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do triângulo) e por uma direção (a direção convencional da luz).

O ponto **B** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua **sombra real** está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $B_{s1} \equiv B_1$  (situa-se no **SPHA**). O raio luminoso que passa pelo ponto **C** é um raio luminoso passante. Assim, a sombra real do ponto **C** ( $C_s$ ) situa-se necessariamente no eixo **X**. As sombras reais dos três vértices da figura situam-se no mesmo Plano de Projeção (o Plano Horizontal de Projeção), pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **não admite a existência de pontos de quebra**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

$A_s$  e  $C_s$  situam-se, ambas, no eixo  $X$ , pelo que a sombra do lado  $[AC]$  do triângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_sC_s]$  é a sombra projetada do lado  $[AC]$  do triângulo (e situa-se, na totalidade, no eixo  $X$ ).  $A_s$  e  $B_{s1}$  situam-se, ambas, no  $SPHA$ , pelo que a sombra do lado  $[AB]$  do triângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_sB_{s1}]$  é a sombra projetada do lado  $[AB]$  do triângulo (e situa-se, na totalidade, no  $SPHA$ ).  $C_s$  e  $B_{s1}$  situam-se, ambas, no  $SPHA$ , pelo que a sombra do lado  $[BC]$  do triângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s1}C_s]$  é a sombra projetada do lado  $[BC]$  do triângulo (e situa-se, na totalidade, no  $SPHA$ ).

O triângulo  $[A_sB_{s1}C_s]$  é a **sombra real** do triângulo  $[ABC]$  nos planos de projeção. Nesta situação, a sombra do triângulo é visível na sua totalidade, pois não existe qualquer sobreposição entre qualquer das projeções da figura e a sua sombra projetada. Assim, preencheu-se a **parte visível** (a totalidade) da sombra do triângulo com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do triângulo [RST]:*

O triângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em alguma das projeções, a face visível é a face sombreada.

A projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$  reduz-se a um segmento de reta, pelo que não é visível nenhuma das faces do polígono. Assim, em projeção horizontal não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do triângulo. De forma semelhante, também a projeção frontal do triângulo  $[ABC]$  se reduz a um segmento de reta, pelo que também não é visível nenhuma das faces do polígono em projeção frontal. Assim, em projeção frontal também não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do triângulo.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o triângulo  $[ABC]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  e necessários à construção das projeções do triângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo  $[ABC]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o triângulo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o triângulo  $[ABC]$ , neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 846.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ .

Para tal, desenharam-se as projeções da reta  $r$ , a reta que passa pelos pontos **A** e **C** e determinaram-se os seus traços nos planos de projeção – os pontos **F** e **H**. O ponto **F** é um ponto com afastamento nulo, pelo que já temos um ponto para definir  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com afastamento nulo, pelo que já temos a direção para definir  $f_p - f_p$  está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**). O ponto **H** é um ponto com cota nula, pelo que já temos um ponto para definir  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com cota nula, pelo que já temos a direção para definir  $h_p - h_p$  está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

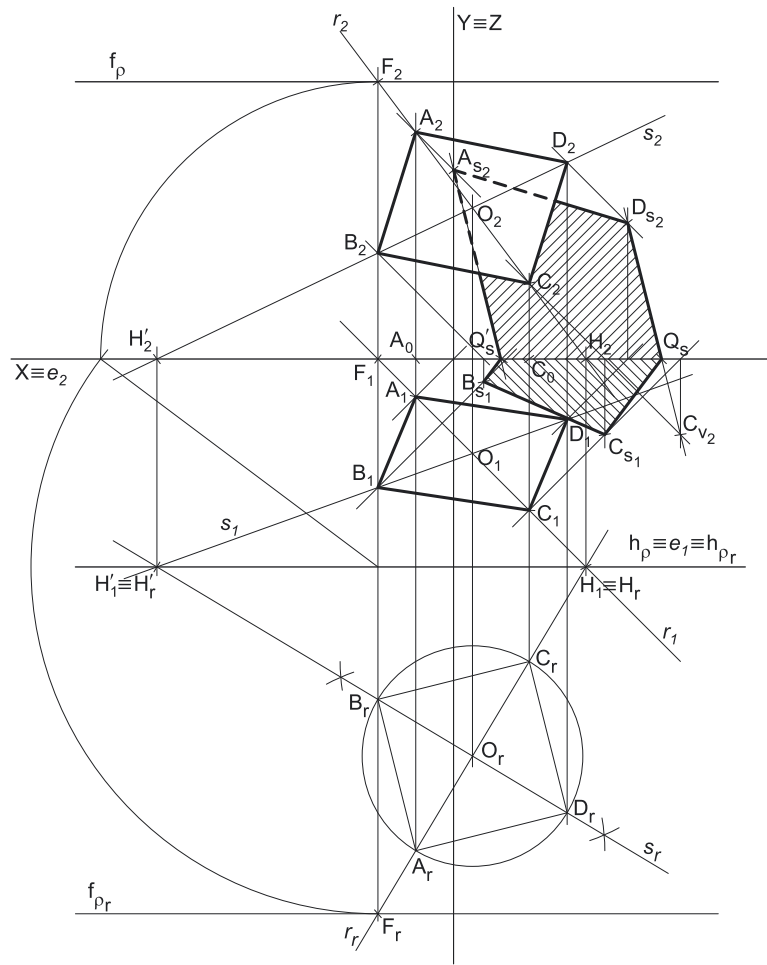
A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado [ABCD] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{p_r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a  $h_p$ ).



Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos uma direção para definir  $f_{p_r}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir  $f_{p_r}$ . Nesse sentido, há que rebater o ponto **F** (o traço frontal da reta  $r$ ), que é um ponto de  $f_p$ . O rebatimento do ponto **F** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziu-se, por  $F_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **F**). Com o compasso, fazendo centro em  $F_1$  e com raio até  $F_2$ , transportou-se a cota do ponto **F** para o eixo **X**, o que nos permitiu desenhar o triângulo do rebatimento do ponto **F** em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **F** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , onde se situa  $F_r$  (o ponto **F** rebatido). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{p_r}$ . Nesse sentido desenhou-se  $f_{p_r}$ , passando por  $F_r$  e paralelo ao eixo **X** –  $f_{p_r}$  está definido por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Em seguida, há que rebater os pontos **A** e **C**, para o que é necessário rebater uma reta do plano  $\rho$ , à qual aqueles dois pontos pertençam – a reta  $r$ , neste caso. Já temos um ponto para definir a reta  $r_r$  (a reta  $r$  em rebatimento) – o ponto  $F_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta  $r$  em rebatimento. O ponto **H** (o traço horizontal da reta  $r$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_r \equiv H_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em rebatimento – a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $H_r$  e por  $F_r$  (está definida por dois pontos).

Em seguida, por  $A_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $A_r$  sobre a reta  $r_r$ . De forma semelhante, por  $C_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $C_r$  sobre a reta  $r_r$ .

A partir dos pontos  $A_r$  e  $C_r$ , construiu-se o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento), para o que foi necessário a sua inscrição numa circunferência. Nesse sentido, determinou-se o centro da circunferência em rebatimento (o ponto  $O_r$ ), com o recurso à mediatriz do segmento de reta  $[A_r C_r]$ . Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$  ou  $C_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado, em rebatimento, e efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento ( $B_r$  e  $D_r$ ). Estes dois vértices foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$ , determinando-se as projeções dos pontos **B** e **D**. A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **D** e a determinação das respetivas projeções processou-se com o recurso a uma outra reta oblíqua do plano  $\rho$ , à qual os dois pontos pertencem – a reta **s**, que é a reta suporte da diagonal **[BD]** do quadrado. A reta **s<sub>r</sub>** (a reta **s** rebatida) está definida por dois pontos (os pontos **B<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**). Para definir a reta **s** em projeções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **H'**, o traço horizontal da reta **s**, que é um ponto de **h<sub>p</sub>** (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto **H'** situa-se sobre **h<sub>pr</sub>** – é o ponto de concorrência da reta **s<sub>r</sub>** com **h<sub>pr</sub>**. O ponto **H'** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **H'<sub>1</sub> ≡ H'<sub>r</sub>**. Já temos um ponto para definir a reta **s** em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta **s** é necessariamente concorrente com a reta **r** (que é a reta suporte da diagonal **[AC]** do quadrado) no ponto **O**. Assim, determinaram-se as projeções do ponto **O**. Para tal conduziu-se, por **O<sub>r</sub>**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto **O**, sobre as projeções homónimas da reta **r**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **s** em projeções – a reta **s** está definida por dois pontos (o ponto **H'** e o ponto **O**), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta **s**.

Em seguida, por **B<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto **B**, sobre as projeções homónimas da reta **s** (a reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **B** pertence). De forma semelhante, por **D<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto **D**, sobre as projeções homónimas da reta **s** (a reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **D** pertence).

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

*Determinação da sombra do quadrado [ABCD] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

**A<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A**. **B<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**. **C<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**. **D<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D**.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

**A<sub>s2</sub>** e **D<sub>s2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[AD]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do lado **[AD]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). **B<sub>s1</sub>** e **C<sub>s1</sub>** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[BC]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[B<sub>s1</sub>C<sub>s1</sub>]** é a sombra projetada do lado **[BC]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AB]** e **[CD]** do quadrado – de facto, um ponto de quebra situa-se entre **A<sub>s2</sub>** e **B<sub>s1</sub>** (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre **C<sub>s1</sub>** e **D<sub>s2</sub>** (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar um dos pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **C** – **C<sub>v2</sub>**. **C<sub>v2</sub>** é a sombra virtual do ponto **C** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**. O segmento **[D<sub>s2</sub>C<sub>v2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[CD]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[D<sub>s2</sub>C<sub>v2</sub>]** (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[D<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>C<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[CD]** (a sombra projetada do segmento nas faces do 1º Diedro).

Para determinar o outro ponto de quebra teve-se em conta que os lados **[AB]** e **[CD]** são paralelos e, tratando-se de uma direção luminosa, as sombras projetadas daqueles dois lados num mesmo plano de projeção são necessariamente paralelas. Assim, por **A<sub>s2</sub>** (a sombra real do ponto **A**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma paralela ao segmento de reta **[D<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>]** (a sombra do segmento de reta **[CD]** no **SPFS**) – o ponto de interseção dessa paralela com o eixo **X** é **Q'<sub>s</sub>**, o ponto de quebra da sombra do segmento de reta **[AB]**. A linha quebrada aberta **[A<sub>s2</sub>Q'<sub>s</sub>B<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[AB]** (a sombra projetada do segmento nas faces do 1º Diedro).

A linha quebrada fechada **[A<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>C<sub>s1</sub>B<sub>s1</sub>Q'<sub>s</sub>]** é a **sombra real** do quadrado **[ABCD]** nos planos de projeção. O segmento **[Q'<sub>s</sub>Q<sub>s</sub>]** é a **linha de quebra** da sombra do quadrado. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono **[A<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>C<sub>s1</sub>B<sub>s1</sub>Q'<sub>s</sub>]** e o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]** (a projeção frontal do quadrado) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em projeção frontal, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com **tracejado**. Este foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções. A direção luminosa convencional, em projeção horizontal, faz ângulos de 45° (de abertura para **a esquerda**) com o eixo **X**, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte da sombra projetada do quadrado que se situa no **SPHA**) faz ângulos de 45° (de abertura para **a direita**) com o eixo **X**. A direção luminosa convencional, em projeção frontal, faz ângulos de 45° (de abertura para **a esquerda**) com o eixo **X**, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte visível da sombra projetada do quadrado que se situa no **SPFS**) faz ângulos de 45° (de abertura para **a direita**) com o eixo **X**.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado [ABCD]:*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>2</sub>, D<sub>2</sub>, C<sub>2</sub> e B<sub>2</sub>**. A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s2</sub>, D<sub>s2</sub>, C<sub>s1</sub> e B<sub>s1</sub>**. As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> e B<sub>1</sub>**. A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s2</sub>, D<sub>s2</sub>, C<sub>s1</sub> e B<sub>s1</sub>**. As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o quadrado **[ABCD]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\rho$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**. O tracejado que preenche a parte visível da sombra projetada do quadrado (em ambas as projeções) executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado **[ABCD]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado **[ABCD]**, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 847.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ .

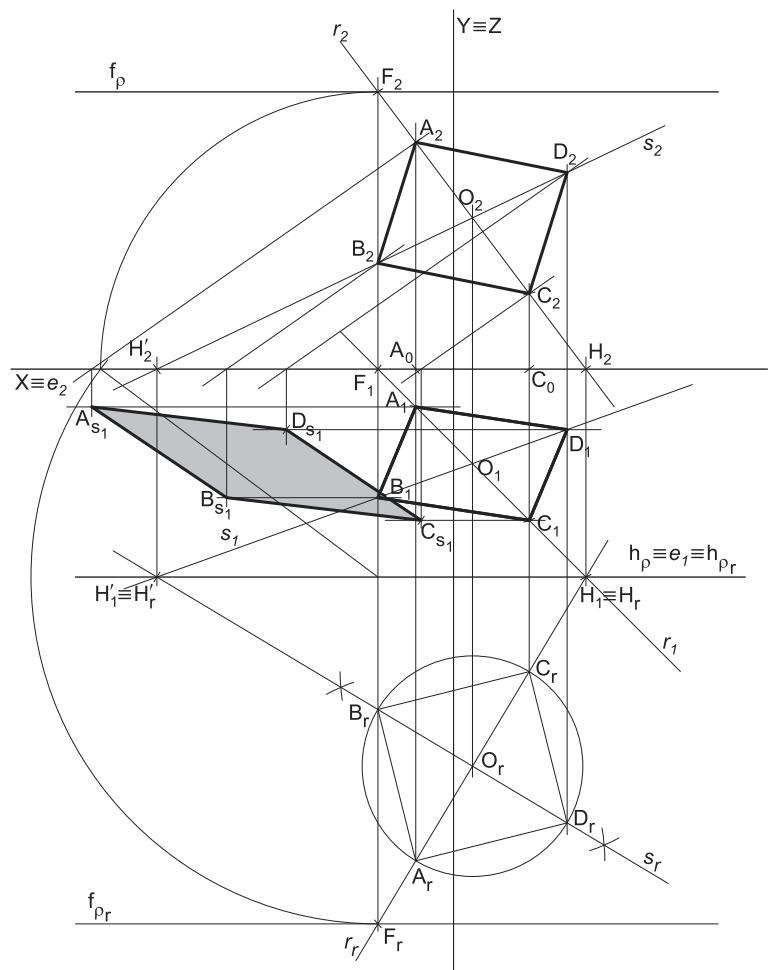
Para tal, desenharam-se as projeções da reta  $r$ , a reta que passa pelos pontos **A** e **C** e determinaram-se os seus traços nos planos de projeção – os pontos **F** e **H**. O ponto **F** é um ponto com afastamento nulo, pelo que já temos um ponto para definir  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com afastamento nulo, pelo que já temos a direção para definir  $f_p$  –  $f_p$  está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**). O ponto **H** é um ponto com cota nula, pelo que já temos um ponto para definir  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com cota nula, pelo que já temos a direção para definir  $h_p$  –  $h_p$  está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

### Resolução:

#### Determinação das projeções do quadrado **[ABCD]**:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{pr}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a  $h_p$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_\rho$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos uma direção para definir  $f_{pr}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir  $f_{pr}$ . Nesse sentido, há que rebater o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $r$ ), que é um ponto de  $f_\rho$ . O rebatimento do ponto  $F$  processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziu-se, por  $F_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ). Com o compasso, fazendo centro em  $F_1$  e com raio até  $F_2$ , transportou-se a cota do ponto  $F$  para o eixo  $X$ , o que nos permitiu desenhar o triângulo do rebatimento do ponto  $F$  em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto  $F$  em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , onde se situa  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{pr}$ . Nesse sentido desenhou-se  $f_{pr}$ , passando por  $F_r$  e paralelo ao eixo  $X$  –  $f_{pr}$  está definido por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizantal).

Em seguida, há que rebater os pontos  $A$  e  $C$ , para o que é necessário rebater uma reta do plano  $\rho$ , à qual aqueles dois pontos pertençam – a reta  $r$ , neste caso. Já temos um ponto para definir a reta  $r_r$  (a reta  $r$  em rebatimento) – o ponto  $F_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta  $r$  em rebatimento. O ponto  $H$  (o traço horizontal da reta  $r$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_r \equiv H_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em rebatimento – a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) passa por  $H_r$  e por  $F_r$  (está definida por dois pontos).

Em seguida, por  $A_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $A_r$  sobre a reta  $r_r$ . De forma semelhante, por  $C_1$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $C_r$  sobre a reta  $r_r$ .

A partir dos pontos  $A_r$  e  $C_r$ , construiu-se o quadrado  $[ABCD]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), para o que foi necessário a sua inscrição numa circunferência. Nesse sentido, determinou-se o centro da circunferência em rebatimento (o ponto  $O_r$ ), com o recurso à mediatriz do segmento de reta  $[A_rC_r]$ . Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$  ou  $C_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado, em rebatimento, e efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento ( $B_r$  e  $D_r$ ). Estes dois vértices foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$ , determinando-se as projeções dos pontos  $B$  e  $D$ . A inversão do rebatimento dos pontos  $B$  e  $D$  e a determinação das respetivas projeções processou-se com o recurso a uma outra reta oblíqua do plano  $\rho$ , à qual os dois pontos pertençam – a reta  $s$ , que é a reta suporte da diagonal  $[BD]$  do quadrado. A reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $D_r$ ). Para definir a reta  $s$  em projeções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $H'$ , o traço horizontal da reta  $s$ , que é um ponto de  $h_\rho$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto  $H'_r$  situa-se sobre  $h_{pr}$  – é o ponto de concorrência da reta  $s_r$  com  $h_{pr}$ . O ponto  $H'$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H'_1 \equiv H'_r$ . Já temos um ponto para definir a reta  $s$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta  $s$  é necessariamente concorrente com a reta  $r$  (que é a reta suporte da diagonal  $[AC]$  do quadrado) no ponto  $O$ . Assim, determinaram-se as projeções do ponto  $O$ . Para tal conduziu-se, por  $O_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto  $O$ , sobre as projeções homónimas da reta  $r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $s$  em projeções – a reta  $s$  está definida por dois pontos (o ponto  $H'$  e o ponto  $O$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $s$ .

Em seguida, por  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto  $B$ , sobre as projeções homónimas da reta  $s$  (a reta do plano  $\rho$  à qual o ponto  $B$  pertence). De forma semelhante, por  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto  $D$ , sobre as projeções homónimas da reta  $s$  (a reta do plano  $\rho$  à qual o ponto  $D$  pertence).

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do quadrado  $[ABCD]$ .

#### Determinação da sombra do quadrado $[ABCD]$ nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).

$A_{s1}$  é a sombra real do ponto  $A$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A$ .  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto  $B$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $B$ .  $C_{s1}$  é a sombra real do ponto  $C$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $C$ .  $D_{s1}$  é a sombra real do ponto  $D$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $D$ .

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se todas no mesmo plano de projeção, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **não admite a existência de pontos de quebra**. Assim, desenhou-se o paralelogramo  $[A_{s1}B_{s1}C_{s1}D_{s1}]$ , que é a **sombra real** do quadrado nos planos de projeção e se situa, na sua totalidade, no **SPHA**.

Salienta-se que existe uma ligeira sobreposição entre o polígono  $[A_{s1}B_{s1}C_{s1}D_{s1}]$  e o polígono  $[A_1B_1C_1D_1]$  (a projeção horizontal do quadrado) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em projeção horizontal, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado [ABCD]:*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>2</sub>, D<sub>2</sub>, C<sub>2</sub> e B<sub>2</sub>**. A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s1</sub>, D<sub>s1</sub>, C<sub>s1</sub> e B<sub>s1</sub>**. As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> e B<sub>1</sub>**. A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s1</sub>, D<sub>s1</sub>, C<sub>s1</sub> e B<sub>s1</sub>**. As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o quadrado [ABCD] e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\rho$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado [ABCD] ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado [ABCD], nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 848.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

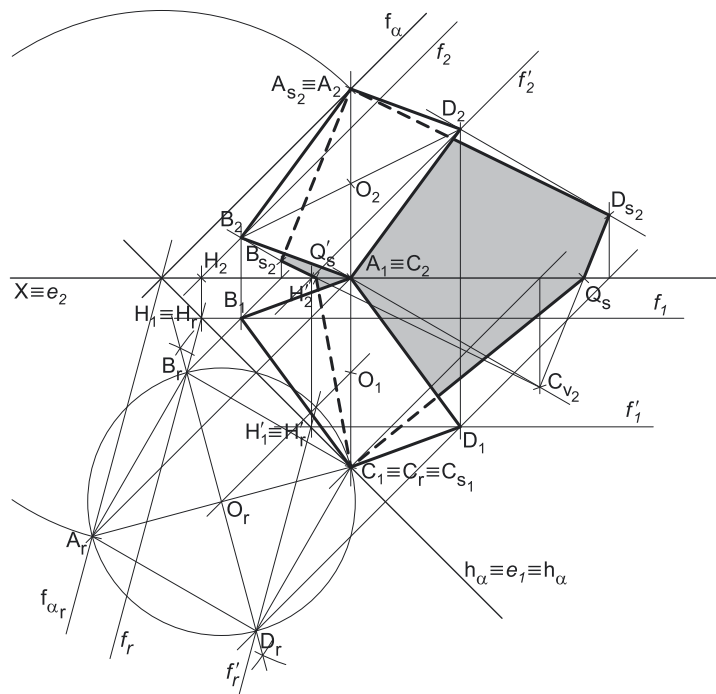
Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **C**, pertencentes ao plano  $\alpha$ . Os pontos **A** e **C**, para pertencerem ao plano  $\alpha$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto **A** é o ponto de  $f_\alpha$  que tem 5 cm de cota ( $f_\alpha$  é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). O ponto **C** tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ), pois  $h_\alpha$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula. O ponto **C** é, assim, o ponto de  $h_\alpha$  que se situa no mesmo plano de perfil do ponto **A** (pois a diagonal [AC] é de perfil).

**Resolução:**

*Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:*

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado [ABCD] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **C** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $C_r \equiv C_1$ . Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha_r}$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que é um ponto fixo (pois pertence à charneira). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto **A**, que é um ponto de  $f_{\alpha}$  e, simultaneamente, é um vértice do quadrado. Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por  $A_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **A**). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $A_1$ , determinando-se  $A_r$  (o ponto **A** rebatido). Em seguida, desenhou-se  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  rebatido), passando por  $A_r$  e concorrente com  $h_{\alpha_r}$  no eixo **X** (está definido por dois pontos).

A partir dos pontos  $A_r$  e  $C_r$ , construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), para o que foi necessário a sua inscrição numa circunferência. Nesse sentido, determinou-se o centro da circunferência em rebatimento (o ponto  $O_r$ ), com o recurso à mediatriz do segmento de reta **[A<sub>r</sub>C<sub>r</sub>]**. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$  ou  $C_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado, em rebatimento, e efetuaram-se os traços necessários à construção do quadrado, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento (**B<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**). Estes dois vértices foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

Para inverter o rebatimento do plano  $\alpha$  e determinar as projeções dos pontos **B** e **D**, é necessário o recurso a retas do plano  $\alpha$  às quais aqueles dois pontos pertencem. Assim, a inversão do rebatimento do ponto **B** processou-se com o recurso à reta **f**, frontal (de frente), do plano  $\alpha$ , à qual o ponto **B** pertence. A reta **f<sub>r</sub>** (a reta **f** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **B<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a  $f_{\alpha_r}$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **f**. O ponto **H** é o traço horizontal da reta **f** e é um ponto da charneira (que é  $h_{\alpha}$ ), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente  $H_r \equiv H_1$  (**H<sub>2</sub>** situa-se no eixo **X**). Já temos um ponto para definir a reta **f** em projeções – o ponto **H**. Já temos também a direção da reta **f** (que é a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta **f**.

Por fim, por **B<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f_1$  (a projeção horizontal da reta **f**) é **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**). A projeção frontal do ponto **B** (**B<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta **f**).

De forma semelhante, a inversão do rebatimento do ponto **D** processou-se com o recurso à reta **f'**, frontal (de frente), do plano  $\alpha$ , à qual o ponto **D** pertence. A reta **f'<sub>r</sub>** (a reta **f'** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **D<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a  $f_{\alpha_r}$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **f'**. O ponto **H'** é o traço horizontal da reta **f'** e é um ponto da charneira (que é  $h_{\alpha}$ ), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente  $H'_r \equiv H'_1$  (**H'<sub>2</sub>** situa-se no eixo **X**). Já temos um ponto para definir a reta **f'** em projeções – o ponto **H'**. Já temos também a direção da reta **f'** (que é a direção das retas frontais do plano  $\alpha$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta **f'**.

Por fim, por **D<sub>r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f'_1$  (a projeção horizontal da reta **f'**) é **D<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **D**). A projeção frontal do ponto **D** (**D<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $f'_2$  (a projeção frontal da reta **f'**).

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

#### Determinação da sombra do quadrado **[ABCD]** nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s2} \equiv A_2$  (situa-se no **SPFS**). O ponto **C** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $C_{s1} \equiv C_1$  (situa-se no **SPHA**).  $B_{s2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $D_{s2}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D**.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do retângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s2}$  e  $B_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[AB]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A<sub>s2</sub>B<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do lado **[AB]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).  $A_{s2}$  e  $D_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[AD]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do lado **[AD]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados **[BC]** e **[CD]** do quadrado – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $B_{s2}$  e  $C_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C_{s1}$  e  $D_{s2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar um dos pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **C** –  $C_{v2}$ .  $C_{v2}$  é a sombra virtual do ponto **C** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**. O segmento **[C<sub>v2</sub>D<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[CD]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[C<sub>v2</sub>D<sub>s2</sub>]** (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[C<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>D<sub>s2</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[CD]** (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.<sup>o</sup> Diedro).

A sombra virtual do ponto **C** ( $C_{v2}$ ) permitiu-nos, ainda, determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s1}$  e  $B_{s2}$ . O segmento **[B<sub>s2</sub>C<sub>v2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[BC]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[B<sub>s2</sub>C<sub>v2</sub>]** (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[B<sub>s2</sub>Q'<sub>s</sub>C<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[BC]** (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.<sup>o</sup> Diedro).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A linha quebrada fechada  $[A_{s_2}D_{s_2}Q_sC_{s_1}Q'_sB_{s_2}]$  é a **sombra real** do quadrado  $[ABCD]$  nos planos de projeção. O segmento  $[Q'_sQ_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do quadrado. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s_2}D_{s_2}Q_sC_{s_1}Q'_sB_{s_2}]$  e os polígonos  $[A_2B_2C_2D_2]$  (a projeção frontal do quadrado) e  $[A_1B_1C_1D_1]$  (a projeção horizontal do quadrado) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em ambas as projeções, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado  $[ABCD]$ :*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é:  $A_2, D_2, C_2$  e  $B_2$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é:  $A_{s_2}, D_{s_2}, C_{s_1}$  e  $B_{s_2}$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é:  $A_1, D_1, C_1$  e  $B_1$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é:  $A_{s_2}, D_{s_2}, C_{s_1}$  e  $B_{s_2}$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado  $[ABCD]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado  $[ABCD]$ , nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 849.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, desenharam-se os traços do plano  $\alpha$ .

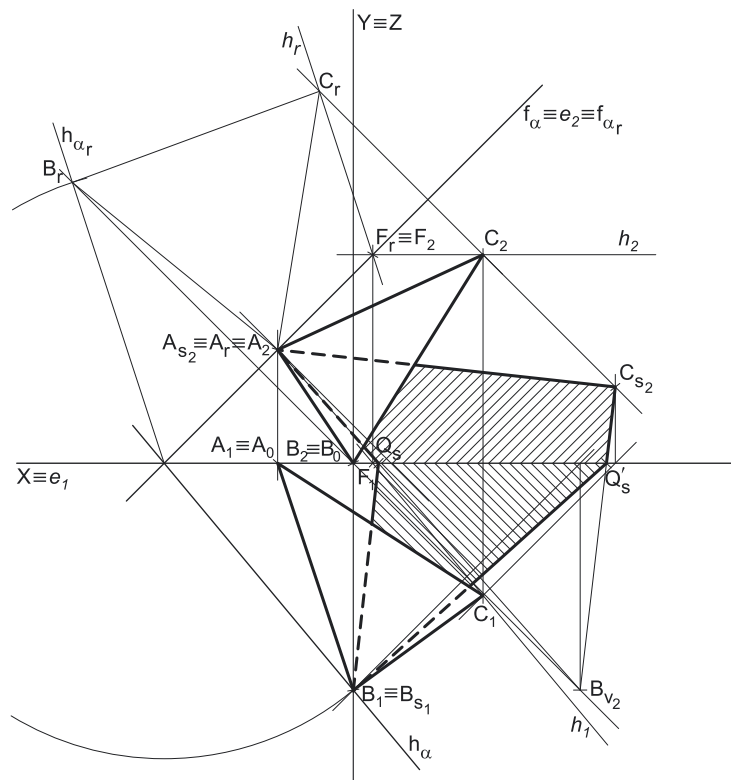
O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha}$ ) passa necessariamente pelo ponto **A**. O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha}$ ) está, assim, definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção dada no enunciado). O ponto **B** tem cota nula, pelo que o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_{\alpha}$ ) passa necessariamente pelo ponto **B**. O traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_{\alpha}$ ) está, assim, definido por dois pontos – o ponto **B** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X**).

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

*Determinação das projeções do triângulo  $[ABC]$ :*

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano – tem-se, imediatamente,  $f_{\alpha} \equiv e_2 \equiv f_{\alpha_r}$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a  $f_{\alpha}$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_2$ . Em seguida, rebateu-se o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $h_\alpha$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que é um ponto fixo (pois pertence à charneira). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto **B**, que é um ponto de  $h_\alpha$  e, simultaneamente, é um vértice do triângulo. Para rebater o ponto **B** conduziu-se, por  $B_2$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **B**). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**), desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $B_2$ , determinando-se  $B_r$  (o ponto **B** rebatido). Em seguida, desenhou-se  $h_{\alpha_r}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$  rebatido), passando por  $B_r$  e concorrente com  $f_{\alpha_r}$  no eixo **X** (está definido por dois pontos).

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o ponto  $C_r$ . Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções do ponto **C**. A inversão do rebatimento do ponto **C** processou-se com o recurso à reta  $h$ , horizontal (de nível), do plano  $\alpha$ , à qual o ponto **C** pertence. A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $C_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha_r}$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h$ . O ponto **F** é o traço frontal da reta  $h$  e é um ponto da charneira (que é  $f_\alpha$ ), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente  $F_r \equiv F_2$  ( $F_1$  situa-se no eixo **X**). Já temos um ponto para definir a reta  $h$  em projeções – o ponto **F**. Já temos também a direção da reta  $h$  (que é a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $h$ .

Por fim, por  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ) é  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**). A projeção horizontal do ponto **C** ( $C_1$ ) situa-se sobre  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ).

A partir das projeções dos três pontos (os pontos **A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

*Determinação da sombra do triângulo **[ABC]** nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos e que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s2} \equiv A_2$  (situa-se no **SPFS**). O ponto **B** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $B_{s1} \equiv B_1$  (situa-se no **SPHA**).  $C_{s2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.

As sombras reais dos três vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s2}$  e  $C_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[AC]** do triângulo não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s2}C_{s2}]$  é a sombra projetada do lado **[AC]** do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AB]** e **[BC]** do triângulo – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s2}$  e  $B_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $B_{s1}$  e  $C_{s2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **B** –  $B_{v2}$ .  $B_{v2}$  é a sombra virtual do ponto **B** – situa-se no **SPHP** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**. O segmento  $[A_{s2}B_{v2}]$  é a sombra projetada do segmento **[AB]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s2}B_{v2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s2}Q_sB_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento **[AB]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

O segmento  $[B_{v2}C_{s2}]$  é a sombra projetada do segmento **[BC]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[B_{v2}C_{s2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[B_{s1}Q'_sC_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento **[BC]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s2}C_{s2}Q_sB_{s1}Q'_s]$  é a **sombra real** do triângulo **[ABC]** nos planos de projeção. O segmento  $[Q'_sQ_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do triângulo. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s2}C_{s2}Q_sB_{s1}Q'_s]$  e os polígonos  $[A_2B_2C_2]$  (a projeção frontal do triângulo) e  $[A_1B_1C_1]$  (a projeção horizontal do triângulo) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do triângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em ambas as projeções, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com **tracejado**. Este foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções. A direção luminosa convencional, em projeção horizontal, faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a esquerda**) com o eixo **X**, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte da sombra projetada do triângulo que se situa no **SPHA**) faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a direita**) com o eixo **X**. A direção luminosa convencional, em projeção frontal, faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a esquerda**) com o eixo **X**, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte visível da sombra projetada do triângulo que se situa no **SPFS**) faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a direita**) com o eixo **X**.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do triângulo **[ABC]**:*

O triângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **seqüência dos vértices da projeção frontal** do triângulo, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>2</sub>, C<sub>2</sub> e B<sub>2</sub>**. A **seqüência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s2</sub>, C<sub>s2</sub> e B<sub>s1</sub>**. As duas seqüências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **seqüência dos vértices da projeção horizontal** do triângulo, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> e B<sub>1</sub>**. A **seqüência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s2</sub>, C<sub>s2</sub> e B<sub>s1</sub>**. As duas seqüências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o triângulo **[ABC]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**. O tracejado que preenche a parte visível da sombra projetada do triângulo (em ambas as projeções) executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo **[ABC]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o triângulo **[ABC]**, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 850.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal a  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **A**, pertencente ao plano  $\alpha$ . O ponto **A**, para pertencer ao plano  $\alpha$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). O ponto **A** tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ) – o ponto **A** é o ponto de  $h_\alpha$  que tem 5 cm de afastamento ( $h_\alpha$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

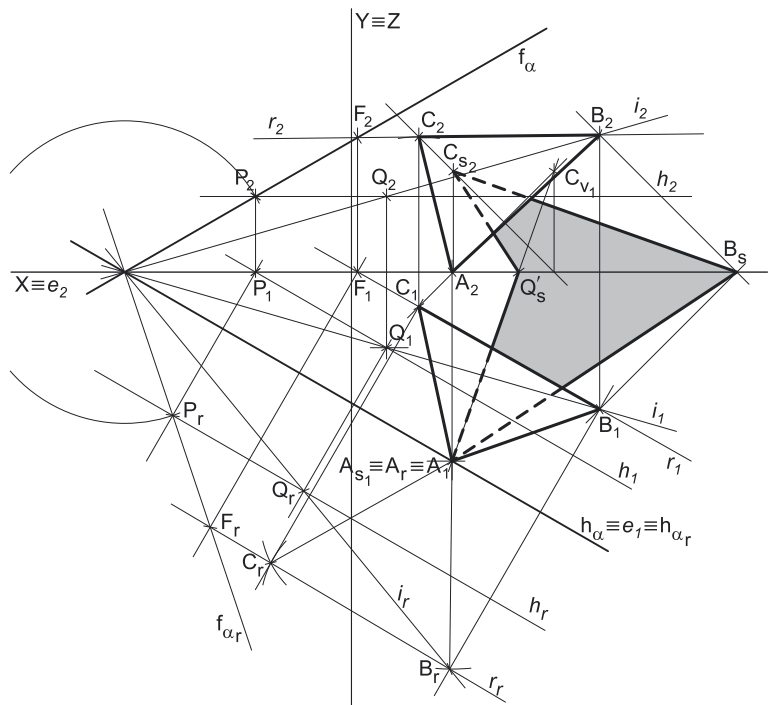
A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do triângulo **[ABC]**:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha r}$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$ . Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha r}$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que é um ponto fixo (pois pertence à charneira). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater um ponto **P**, qualquer, pertencente a  $f_\alpha$ , cujas projeções se determinaram imediatamente. Para rebater o ponto **P** conduziu-se, por  $P_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **P**). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $P_2$  (a projeção frontal do ponto **P**), desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $P_1$ , determinando-se  $P_r$  (o ponto **P** rebatido). Em seguida, desenhou-se  $f_{\alpha r}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$  rebatido), passando por  $P_r$  e concorrente com  $h_{\alpha r}$  no eixo **X** (está definido por dois pontos).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A construção do triângulo, em rebatimento, tem de respeitar os restantes dados do enunciado, nomeadamente o facto de o ponto **B** pertencer ao  $\beta_{1/3}$ . O ponto **B** é um ponto do  $\beta_{1/3}$  e pertence ao plano  $\alpha$ , pelo que é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos – o ponto **B** pertence necessariamente à reta de interseção entre os dois planos (a reta  $i$ ). Nesse sentido, é necessário, primeiramente, determinar as projeções da reta  $i$  (a reta de interseção do plano  $\alpha$  com o  $\beta_{1/3}$ ) e, depois, determinar a reta  $i$  em rebatimento (a reta  $i_r$ ).

Para definirmos a reta  $i$  (em projeções) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano é um ponto que pertence ao plano  $\alpha$  (pois pertence a duas retas do plano – os seus traços) e também pertence ao  $\beta_{1/3}$  (pois pertence a uma reta do  $\beta_{1/3}$  – o eixo  $X$ ). Assim, já temos um ponto para definir a reta  $i$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Os dados do plano  $\alpha$  são insuficientes para determinar o elemento em falta (o ponto ou a direção), pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano  $\alpha$ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $h$ , como reta auxiliar do plano  $\alpha$ , passando pelo ponto **P** (por uma questão de económica de traçados). A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e está definida por um ponto (o ponto **P**, que é o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$  – é paralela a  $h_{\alpha}$ ). Em seguida, determinou-se o ponto **Q**, o traço da reta  $h$  no  $\beta_{1/3}$ . O ponto **Q** pertence ao plano  $\alpha$  (pois pertence a uma reta do plano  $\alpha$  – a reta  $h$ ) e pertence, também, ao  $\beta_{1/3}$  (pois tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ), pelo que o ponto **Q** é um outro ponto que pertence simultaneamente aos dois planos. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ . A reta  $i$  está, assim, definida por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\alpha$  (que não se identificou) e o ponto **Q**.

Em seguida, é necessário rebater a reta  $i$ , o que se processa com o recurso a dois dos seus pontos (para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção). O ponto de concorrência dos traços do plano  $\alpha$  (que é um ponto da reta  $i$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – já temos um ponto para definir a reta  $i$  em rebatimento (a reta  $i_r$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, optou-se por rebater o ponto **Q**, que é o outro ponto que define a reta  $i$ . Para tal, há que rebater a reta  $h$ , que é uma reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto **Q** pertence.

Começamos, então, por definir a reta  $h_r$  (a reta  $h$  em rebatimento). Para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h$  passa pelo ponto **P** e já temos o ponto **P** rebatido, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $h_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, já temos a direção (que é a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ , em rebatimento). Assim desenhou-se a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida), passando por **P<sub>r</sub>** e paralela a  $h_{\alpha r}$  – a reta  $h_r$  está definida por um ponto (o ponto **P<sub>r</sub>**) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha r}$ ). Finalmente, conduzindo, por **Q<sub>r</sub>** (a projeção horizontal do ponto **Q**) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), determinou-se **Q<sub>r</sub>** sobre a reta  $h_r$ .

Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i_r$  (a reta  $i$  em rebatimento) – a reta  $i_r$  está definida por dois pontos (o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\alpha$  e o ponto **Q<sub>r</sub>**).

Por fim, com o compasso, fazendo centro em **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido), e com 5,5 cm de raio (a medida do lado do triângulo), determinou-se o ponto **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido), sobre a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida). O ponto **B** é, em rebatimento, o ponto da reta  $i$  que dista 5,5 cm do ponto **A** e que se situa à direita do ponto **A**, de forma a ser possível garantir que o ponto **B** seja o vértice mais à direita do triângulo (como o enunciado pede expressamente).

Finalmente, a partir dos pontos **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**, construiu-se o triângulo [ABC] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o ponto **C<sub>r</sub>** (garantindo-se que o triângulo se situa no espaço do 1.<sup>a</sup> Diedro e, ainda, que o ponto **B** é o vértice mais à direita do triângulo). Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos pontos **B** e **C**.

O ponto **B** é um ponto da reta  $i$ , pelo que as suas projeções têm de estar sobre as projeções homónimas da reta  $i$ . Assim, por **B<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $i_r$  (a projeção horizontal da reta  $i$ ) é **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**). A projeção frontal do ponto **B** (**B<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $i_2$  (a projeção frontal da reta  $i$ ).

A inversão do rebatimento do ponto **C** processou-se com o recurso à reta  $r$ , do plano  $\alpha$ , à qual o ponto **C** pertence. A reta  $r$  é a reta suporte do lado [BC] do triângulo. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos **B<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**. Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $r$ . O ponto **F** é o traço frontal da reta  $r$  e é um ponto de  $f_{\alpha}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ), pelo que **F<sub>r</sub>** (o ponto **F** rebatido) se situa sobre  $f_{\alpha r}$  – **F<sub>r</sub>** é, assim, o ponto de concorrência da reta  $r_r$  com  $f_{\alpha r}$ .

Para definirmos a reta  $r$  (em projeções) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. As projeções do ponto **B** já são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $r$  (em projeções). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, por **F<sub>r</sub>** (o ponto **F** rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar **F<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **F**) no eixo  $X$  – **F<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **F**) situa-se necessariamente sobre  $f_{\alpha}$ , pois o ponto **F** é um ponto de  $f_{\alpha}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – a reta  $r$ , em projeções, está definida por dois pontos (o ponto **B** e o ponto **F**), o que nos permitiu desenhar as suas projeções.

Por fim, por **C<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_r$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** (**C<sub>2</sub>**) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

A partir das projeções dos três pontos (os pontos **A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo [ABC].

*Determinação da sombra do triângulo [ABC] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O ponto **A** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s1} \equiv A_1$  (situa-se no **SPHA**). O raio luminoso que passa pelo ponto **B** é uma reta passante, pelo que  $B_s$  (a sombra real do ponto **B**) se situa no eixo  $X - B_s$  é, simultaneamente, o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B** ( $B_s$  situa-se tanto no **SPHA** como no **SPFS**).  $C_{s2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.

As sombras reais dos três vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Note que a sombra do ponto **B** ( $B_s$ ) se situa no eixo  $X$ , pelo que  $B_s$  é, de forma imediata, um dos pontos de quebra da sombra do triângulo.

$B_s$  e  $C_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[BC]** do triângulo não admite ponto de quebra – o segmento  $[C_{s2}B_s]$  é a sombra projetada do lado **[BC]** do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).  $B_s$  e  $A_1$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[AB]** do triângulo não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s1}B_s]$  é a sombra projetada do lado **[AB]** do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação ao lado **[AC]** do triângulo – de facto, existe um ponto de quebra entre  $A_{s1}$  e  $C_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos). Para se determinar o ponto de quebra, recorreu-se à sombra virtual do ponto **C** –  $C_{v1}$ .  $C_{v1}$  é a sombra virtual do ponto **C** – situa-se no **SPFI** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**. O segmento  $[A_{s1}C_{v1}]$  é a sombra projetada do segmento **[AC]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s1}C_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s1}Q'_sC_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento **[AC]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s1}Q'_sC_{s2}B_s]$  é a **sombra real** do triângulo **[ABC]** nos planos de projeção. O segmento  $[Q'_sB_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do triângulo. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s1}Q'_sC_{s2}B_s]$  e os triângulos  $[A_2B_2C_2]$  (a projeção frontal do triângulo) e  $[A_1B_1C_1]$  (a projeção horizontal do triângulo) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do triângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em ambas as projeções, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do triângulo **[ABC]**:*

O triângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do triângulo, a partir do ponto **A**, é:  $A_2$ ,  $C_2$  e  $B_2$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é:  $A_{s1}$ ,  $C_{s2}$  e  $B_s$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do triângulo, a partir do ponto **A**, é:  $A_1$ ,  $C_1$  e  $B_1$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é:  $A_{s1}$ ,  $C_{s2}$  e  $B_s$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o triângulo **[ABC]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo **[ABC]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o triângulo **[ABC]**, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 851.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\alpha$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\alpha$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal a  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais a  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $A$ , pertencente ao plano  $\alpha$ . O ponto  $A$ , para pertencer ao plano  $\alpha$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). A reta  $h$  é a reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , com 5 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto  $A$ . A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ ). O ponto  $A$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$  com 5 cm de cota, pelo que o ponto  $A$  tem, também, 5 cm de afastamento (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). Assim, o ponto  $A$  é o ponto da reta  $h$  que tem 5 cm de afastamento.

**Resolução:***Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:*

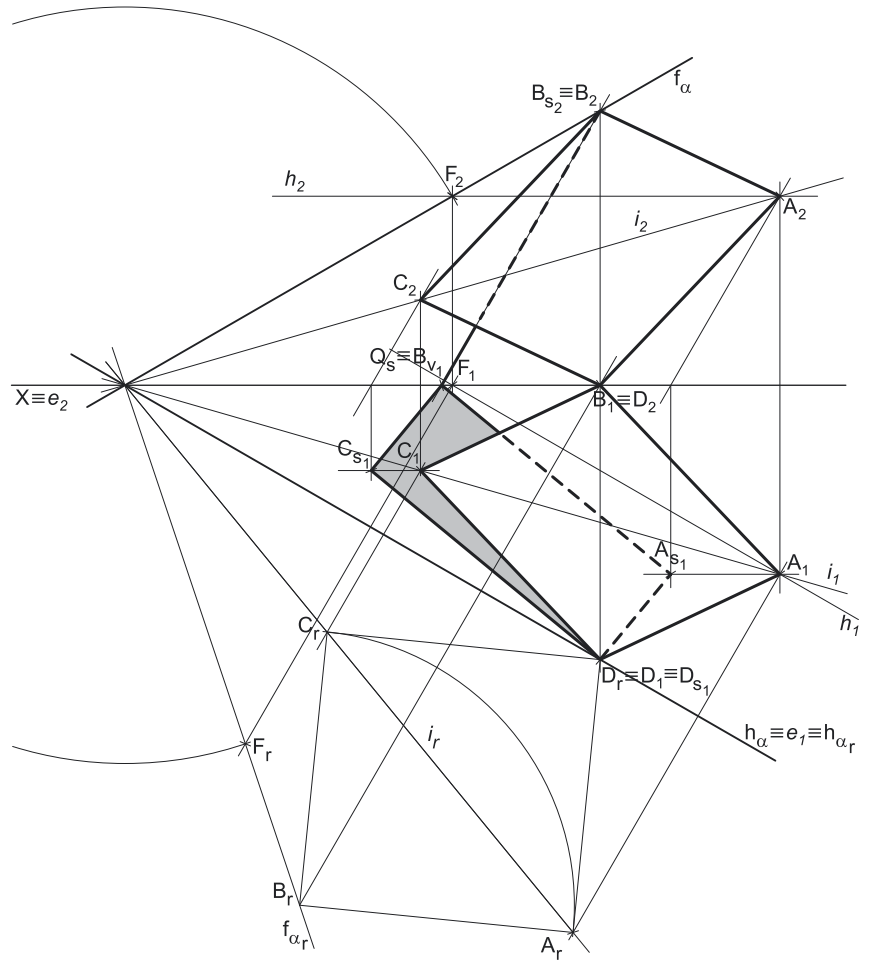
O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado [ABCD] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano – tem-se, imediatamente,  $h_{\alpha} \equiv e_1 \equiv h_{\alpha r}$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_{\alpha}$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha r}$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que é um ponto fixo (pois pertence à charneira). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $h$ , que é um ponto que pertence a  $f_{\alpha}$ . Para rebater o ponto  $F$  conduziu-se, por  $F_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ), desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , determinando-se  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Em seguida, desenhou-se  $f_{\alpha r}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$  rebatido), passando por  $F_r$  e concorrente com  $h_{\alpha r}$  no eixo  $X$  (está definido por dois pontos).

A construção do quadrado, em rebatimento, tem de respeitar os restantes dados do enunciado, nomeadamente o facto de a diagonal [AC] pertencer ao  $\beta_{1/3}$ . Os extremos da diagonal (os pontos  $A$  e  $C$ ) são dois pontos do  $\beta_{1/3}$  e pertencem também ao plano  $\alpha$ , pelo que são dois pontos que pertencem simultaneamente aos dois planos – os dois pontos pertencem necessariamente à reta de interseção entre os dois planos (a reta  $i$ ). Nesse sentido, é necessário, primeiramente, determinar as projeções da reta  $i$  (a reta de interseção do plano  $\alpha$  com o  $\beta_{1/3}$ ) e, depois, determinar a reta  $i$  em rebatimento (a reta  $i_r$ ).

Para definirmos a reta  $i$  (em projeções) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $A$  é um ponto que pertence aos dois planos, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $i$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, o ponto de concorrência dos dois traços do plano é um ponto que pertence ao plano  $\alpha$  (pois pertence a duas retas do plano – os seus traços) e também pertence ao  $\beta_{1/3}$  (pois pertence a uma reta do  $\beta_{1/3}$  – o eixo  $X$ ). Assim, já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ . A reta  $i$  está, assim, definida por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\alpha$  (que não se identificou) e o ponto  $A$ .

Em seguida, é necessário rebater a reta  $i$ , o que se processa com o recurso a dois dos seus pontos (para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção). O ponto de concorrência dos traços do plano  $\alpha$  (que é um ponto da reta  $i$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – já temos um ponto para definir a reta  $i$  em rebatimento (a reta  $i_r$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, optou-se por rebater o ponto  $A$ , que é o outro ponto que define a reta  $i$ . Para tal, há que rebater a reta  $h$ , que é uma reta do plano  $\alpha$  à qual o ponto  $A$  pertence.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Começamos, então, por definir a reta  $h_r$  (a reta  $h$  em rebatimento). Para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h$  passa pelo ponto  $F$  e já temos o ponto  $F$  rebatido, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $h_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, já temos a direção (que é a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$ , em rebatimento). Assim desenhou-se a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida), passando por  $F_r$  e paralela a  $h_{\alpha r}$  – a reta  $h_r$  está definida por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha r}$ ). Finalmente, conduzindo, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), determinou-se  $A_r$  sobre a reta  $h_r$ .

Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i_r$  (a reta  $i$  em rebatimento) – a reta  $i_r$  está definida por dois pontos (o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\alpha$  e o ponto  $A_r$ ).

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado  $[ABCD]$  em verdadeira grandeza, em rebatimento, a partir dos dados –  $C_r$  tem que se situar sobre a reta  $i_r$  (a reta  $i$  é a reta suporte da diagonal  $[AC]$ ) e o ponto  $B$  tem afastamento nulo (o ponto  $B_r$  tem de se situar sobre  $f_{\alpha r}$ ).

Nesse sentido, pelo ponto  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido) conduziu-se uma reta fazendo, com a reta  $i_r$ , um ângulo de  $45^\circ$  – essa reta é a reta suporte do lado  $[AB]$  (os lados do quadrado fazem ângulos de  $45^\circ$  com as suas diagonais). O ponto de interseção dessa reta (a reta suporte do lado  $[AB]$ , em rebatimento) com  $f_{\alpha r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  em rebatimento) é  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido). Por  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular a  $[A_r B_r]$  e determinou-se  $C_r$  (o ponto  $C$  rebatido), sobre a reta  $i_r$ . Por fim, concluiu-se a construção do quadrado em rebatimento, o que nos permitiu determinar o último vértice do quadrado, em rebatimento –  $D_r$ . Nesta situação, o ponto  $D_r$  (o ponto  $D$  rebatido) situa-se necessariamente sobre  $h_{\alpha r}$  (o traço horizontal do plano rebatido), pelo que  $D$  é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ).

Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\alpha$ , determinando-se as projeções dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$ . O ponto  $D$  é um ponto da charneira do rebatimento (que é  $h_\alpha$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $D_1 \equiv D_r$ .  $D_2$  (a projeção frontal do ponto  $D$ ) situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $D$  é um ponto com cota nula (pois pertence ao traço horizontal do plano).

O ponto  $C$  é um ponto da reta  $i$ , pelo que as suas projeções têm de estar sobre as projeções homónimas da reta  $i$ . Assim, por  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $i_1$  (a projeção horizontal da reta  $i$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ). A projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ) situa-se sobre  $i_2$  (a projeção frontal da reta  $i$ ).

O ponto  $B$  é um ponto do traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), pelo que é um ponto com afastamento nulo. Nesse sentido, por  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com o eixo  $X$  é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ). A projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ) situa-se sobre  $f_\alpha$ .

A partir das projeções dos quatro pontos (os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do quadrado  $[ABCD]$ .

### Determinação da sombra do quadrado $[ABCD]$ nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).

O ponto  $B$  é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $B_{s2} \equiv B_2$  (situa-se no **SPFS**). O ponto  $D$  é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $D_{s1} \equiv D_1$  (situa-se no **SPHA**).  $A_{s1}$  é a sombra real do ponto  $A$  (situa-se no **SPHA**) e  $A_{s2}$  é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A$ .  $C_{s1}$  é a sombra real do ponto  $C$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $C$ .

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s1}$  e  $D_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado  $[AD]$  do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s1} D_{s1}]$  é a sombra projetada do lado  $[AD]$  do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).  $C_{s1}$  e  $D_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado  $[CD]$  do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s1} D_{s1}]$  é a sombra projetada do lado  $[CD]$  do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados  $[AB]$  e  $[BC]$  do quadrado – de facto, existe necessariamente um **ponto de quebra** entre  $A_{s1}$  e  $B_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos), bem como um outro **ponto de quebra** entre  $B_{s2}$  e  $C_{s1}$  (que também se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s1}$  e  $B_{s2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto  $B$  –  $B_{v1}$ .  $B_{v1}$  é a sombra virtual do ponto  $B$ , situa-se no eixo  $X$  e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $B$ . Tendo em conta que  $B_{v1}$  se situa no eixo  $X$ ,  $B_{v1}$  é o próprio ponto de quebra da sombra do quadrado ( $Q_s$ ), o que se assinalou devidamente no desenho. O segmento  $[Q_s B_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do lado  $[AB]$  no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[Q_s A_{s1}]$  é a **parte real** da sombra do lado  $[AB]$  no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[A_{s1} Q_s B_{s2}]$  é a **sombra real** do lado  $[AB]$  nos planos de projeção.

Note que os lados  $[AB]$  e  $[CD]$ , do quadrado, são paralelos, e uma vez que se trata de uma direção luminosa, as sombras projetadas dos dois lados no mesmo plano de projeção (no **SPHA**, neste caso) são necessariamente paralelas.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s2}$  e  $C_{s1}$  recorreu-se, uma vez mais, à sombra virtual do ponto  $B$  ( $B_{v1}$ ). Mais uma vez, atendendo a que  $B_{v1}$  se situa no eixo  $X$ ,  $B_{v1}$  é o próprio ponto de quebra da sombra do quadrado ( $Q_s$ ). O segmento  $[Q_s B_{s2}]$  é a **parte real** da sombra do lado  $[BC]$  no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[Q_s C_{s1}]$  é a **parte real** da sombra do lado  $[BC]$  no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[C_{s1} Q_s B_{s2}]$  é a **sombra real** do lado  $[BC]$  nos planos de projeção.

Também aqui se verifica que os lados  $[AD]$  e  $[BC]$ , do quadrado, sendo paralelos e tratando-se de uma direção luminosa, as sombras projetadas dos dois lados no mesmo plano de projeção (no **SPHA**, neste caso) são necessariamente paralelas.

Note que, **nesta situação particular**, acontece um fenómeno particular nas sombras – é a que sombra do ponto  $B$  é «arrastada» ao longo do raio luminoso que passa pelo ponto  $B$  até ao eixo  $X$ , onde se situa o ponto  $Q_s$ . Assim, o ponto  $Q_s$  é uma **sombra virtual** do ponto  $B$  e, por outro lado, a sombra do ponto  $B$  não é um único ponto (como habitualmente) mas, sim, um segmento de reta – o segmento de reta  $[B_{s2} Q_s]$ .

Esta situação tem uma justificação teórica bastante plausível – para se determinar a sombra de um ponto  $B$  (que é considerado opaco) conduz-se, por esse ponto, um **raio luz/sombra em luz** que, ao passar pelo ponto, se transforma num **raio de sombra**. Portanto, o **raio luz/sombra**, ao passar pelo ponto  $B$ , é transformado em **raio de sombra** e o segmento de reta  $[B_{s2} Q_s]$  é um segmento desse **raio luz/sombra** já transformado em **raio de sombra**.

O paralelogramo  $[Q_s A_{s1} D_{s1} C_{s1}]$ , a que acresce o segmento de reta  $[Q_s B_{s2}]$ , é a **sombra real** do quadrado  $[ABCD]$  nos planos de projeção. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o paralelogramo  $[Q_s A_{s1} D_{s1} C_{s1}]$  e o polígono  $[A_1 B_1 C_1 D_1]$  (a projeção horizontal do quadrado), bem como uma outra sobreposição entre o segmento de reta  $[Q_s B_{s2}]$  e o polígono  $[A_2 B_2 C_2 D_2]$  (a projeção frontal do quadrado) – essas sobreposições correspondem ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em ambas as projeções, pelo é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado  $[ABCD]$ :*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto  $A$ , é:  $A_2, D_2, C_2$  e  $B_2$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice  $A$  (da sombra do vértice  $A$ ), é:  $A_{s1}, D_{s1}, C_{s1}$  e  $B_{s2}$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do quadrado, a partir do ponto  $A$ , é:  $A_1, D_1, C_1$  e  $B_1$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice  $A$  (da sombra do vértice  $A$ ), é:  $A_{s1}, D_{s1}, C_{s1}$  e  $B_{s2}$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado  $[ABCD]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado  $[ABCD]$ , nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 852.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ .

O ponto **A** é um ponto com cota nula, pelo que já temos um ponto para definir  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com cota nula, pelo que já temos a direção para definir  $h_p - h_p$  está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**). O plano  $\rho$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é um plano ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**). Nesse sentido, o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ) tem necessariamente 5 cm de cota (porque o traço horizontal do plano tem 5 cm de afastamento – o afastamento do ponto **A**).

Note que é dado o **ângulo** que o lado **[AB]** do quadrado faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do quadrado **[ABCD]**:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, também o **ângulo** que o lado **[AB]** do quadrado faz com o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio quadrado, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível a construção do quadrado (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{pr}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a  $h_p$ ).

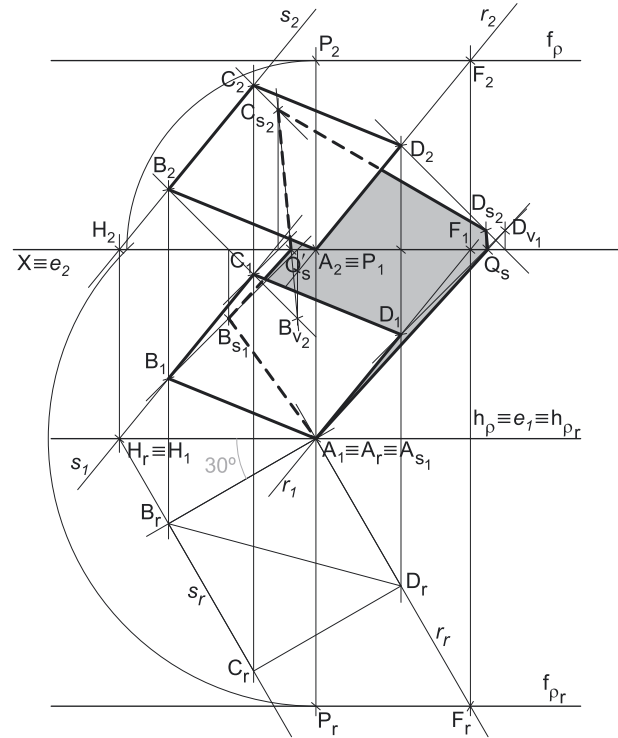
Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Já temos uma direção para definir  $f_{pr}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir  $f_{pr}$ . Nesse sentido, há que rebater um ponto qualquer do traço frontal do plano  $\rho$  – o ponto **P**. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por considerar que **P** é o ponto de  $f_p$  que se situa no mesmo plano de perfil do ponto **A**. O rebatimento do ponto **P** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziu-se, por  $P_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **P**). Com o compasso, fazendo centro em  $P_1$  e com raio até  $P_2$ , transportou-se a cota do ponto **P** para o eixo **X**, o que nos permitiu desenhar o triângulo do rebatimento do ponto **P** em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **P** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $P_1$ , onde se situa  $P_r$  (o ponto **P** rebatido). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{pr}$ . Nesse sentido, desenhou-se  $f_{pr}$ , passando por  $P_r$  e paralelo ao eixo **X** –  $f_{pr}$  está definido por um ponto (o ponto  $P_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$ . Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado **[AB]** faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) – é o ângulo que o segmento **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** faz com  $h_{pr}$ . Assim, por  $A_r$ , conduziu-se uma reta fazendo, com  $h_{pr}$ , um ângulo de  $30^\circ$  – essa reta é a reta suporte do lado **[AB]**, em rebatimento. Note que é dado que o vértice **B** do quadrado se situa à esquerda do vértice **A**, pelo que o ângulo tem de ter abertura para o lado esquerdo. Assim, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $30^\circ$  a partir de  $A_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante o que o enunciado pede expressamente.

Sobre a reta suporte do lado **[AB]**, em rebatimento, e a partir de  $A_r$ , mediram-se os 4,5 cm (a medida do lado do quadrado), o que nos permitiu determinar  $B_r$  (o ponto **B** rebatido). A partir de  $A_r$  e de  $B_r$ , foi possível efetuar os traçados necessários à construção do quadrado **[ABCD]** em rebatimento, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento –  $C_r$  e  $D_r$ .

Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$ , determinando-se as projeções dos pontos **B**, **C** e **D**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento do ponto **D** e a determinação das suas projecções processou-se com o recurso a uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , à qual o ponto **D** pertence – a reta  $r$ , que é a reta suporte do lado **[AD]** do quadrado. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos **A<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**). Para definir a reta  $r$  em projecções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. O ponto **A** é, de forma directa, o traço horizontal da reta  $r$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **F**, o traço frontal da reta  $r$ , que é um ponto de  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto **F<sub>r</sub>** situa-se sobre  $f_{pr}$  – é o ponto de concorrência da reta  $r_r$  com  $f_{pr}$ . Conduzindo, por **F<sub>r</sub>**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal a charneira que contém o arco do seu rebatimento), determinaram-se as projecções do ponto **F** – **F<sub>2</sub>** situa-se sobre  $f_p$  e **F<sub>1</sub>** situa-se no eixo **X**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projecções – a reta  $r$ , em projecções, está definida por dois pontos (o ponto **A** e o ponto **F**), o que nos permitiu desenhar as suas projecções.

Em seguida, por **D<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projecções do ponto **D**, sobre as projecções homónimas da reta  $r$  (a reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **D** pertence).

A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **C** e a determinação das respectivas projecções processou-se com o recurso a uma outra reta oblíqua do plano  $\rho$ , à qual os dois pontos pertencem – a reta  $s$ , que é a reta suporte do lado **[BC]** do quadrado. A reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos **B<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**). Para definir a reta  $s$  em projecções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A reta  $s$  é necessariamente paralela à reta  $r$  (que é a reta suporte do lado **[AD]** do quadrado), pelo que já temos uma direcção para definir a reta  $s$  em projecções. Falta-nos um ponto para definir a reta  $s$  (em projecções). Nesse sentido, determinou-se o ponto **H'**, o traço horizontal da reta  $s$ , que é um ponto de  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto **H'<sub>r</sub>** situa-se sobre  $h_{pr}$  – é o ponto de concorrência da reta  $s_r$  com  $h_{pr}$ . O ponto **H'** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **H'<sub>1</sub>**  $\equiv$  **H'<sub>r</sub>**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $s$  em projecções – a reta  $s$ , em projecções, está definida por um ponto (o ponto **H'**) e por uma direcção (é paralela à reta  $r$ ), o que nos permitiu desenhar as suas projecções.

Em seguida, por **B<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projecções do ponto **B**, sobre as projecções homónimas da reta  $s$  (a reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **B** pertence). De forma semelhante, por **C<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projecções do ponto **C**, sobre as projecções homónimas da reta  $s$  (a reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **C** pertence).

A partir das projecções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projecções do quadrado **[ABCD]**.

#### Determinação da sombra do quadrado **[ABCD]** nos planos de projecção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direcção (a direcção luminosa convencional).

O ponto **A** é um ponto do Plano Horizontal de Projecção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, **A<sub>s1</sub>**  $\equiv$  **A<sub>1</sub>**. **B<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**. **C<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**. **D<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D**.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projecção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

**C<sub>s2</sub>** e **D<sub>s2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[CD]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[C<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do lado **[CD]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). **A<sub>s1</sub>** e **B<sub>s1</sub>** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[AB]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A<sub>s1</sub>B<sub>s1</sub>]** é a sombra projetada do lado **[AB]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AD]** e **[BC]** do quadrado – de facto, um ponto de quebra situa-se entre **A<sub>s1</sub>** e **D<sub>s2</sub>** (que se situam em Planos de Projecção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre **B<sub>s1</sub>** e **C<sub>s2</sub>** (que se situam igualmente em Planos de Projecção distintos).

Para determinar um dos pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **D** – **D<sub>v1</sub>**. **D<sub>v1</sub>** é a sombra virtual do ponto **D** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **D**. O segmento **[A<sub>s1</sub>D<sub>v1</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[AD]** no Plano Horizontal de Projecção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de intersecção do segmento **[A<sub>s1</sub>D<sub>v1</sub>]** (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projecção) com o eixo **X** é **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[A<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>D<sub>s2</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[AD]** (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.<sup>o</sup> Diedro).

Para determinar o outro ponto de quebra teve-se em conta que os lados **[AD]** e **[BC]** são paralelos e, tratando-se de uma direcção luminosa, as sombras projetadas daqueles dois lados num mesmo plano de projecção são necessariamente paralelas. Assim, por **C<sub>s2</sub>** (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma paralela ao segmento de reta **[D<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>]** (a sombra do segmento de reta **[AD]** no **SPFS**) – o ponto de intersecção dessa paralela com o eixo **X** é **Q'<sub>s</sub>**, o ponto de quebra da sombra do segmento de reta **[BC]**. A linha quebrada aberta **[C<sub>s2</sub>Q'<sub>s</sub>B<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[BC]** (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.<sup>o</sup> Diedro).

A linha quebrada fechada **[A<sub>s1</sub>B<sub>s1</sub>Q'<sub>s</sub>C<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>]** é a **sombra real** do quadrado **[ABCD]** nos planos de projecção. O segmento **[Q'<sub>s</sub>Q<sub>s</sub>]** é a **linha de quebra** da sombra do quadrado. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono **[A<sub>s1</sub>B<sub>s1</sub>Q'<sub>s</sub>C<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>]** e os polígonos **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]** (a projecção frontal do quadrado) e **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** (a projecção horizontal do quadrado) – essas sobreposições correspondem ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em ambas as projecções, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado [ABCD]:*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **seqüência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>2</sub>, B<sub>2</sub>, C<sub>2</sub> e D<sub>2</sub>**. A **seqüência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s1</sub>, B<sub>s1</sub>, C<sub>s2</sub> e D<sub>s2</sub>**. As duas seqüências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **seqüência dos vértices da projeção horizontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> e D<sub>1</sub>**. A **seqüência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s1</sub>, B<sub>s1</sub>, C<sub>s2</sub> e D<sub>s2</sub>**. As duas seqüências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o quadrado **[ABCD]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\rho$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado **[ABCD]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado **[ABCD]**, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 853.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\delta$  é ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ , pelo que tem os seus traços coincidentes (planos ortogonais ao  $\beta_{2/4}$  têm os seus traços coincidentes).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **B**, pertencentes ao plano  $\delta$ . Os dois pontos, para pertencerem ao plano  $\delta$ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

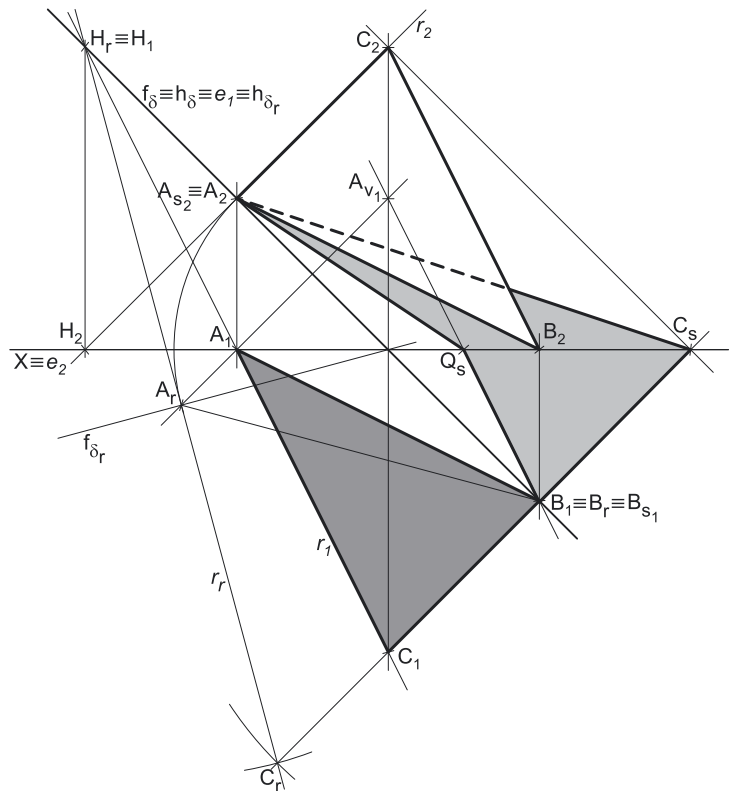
O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ) – o ponto **A** é o ponto de  $f_\delta$  que tem 4 cm de cota ( $f_\delta$  é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). O ponto **B** tem cota nula, pelo que é um ponto de  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ) – o ponto **B** é o ponto de  $h_\delta$  que tem 4 cm de afastamento ( $h_\delta$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

*Determinação das projeções do triângulo [ABC]:*

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\delta$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano – tem-se, imediatamente,  $h_\delta \equiv e_1 \equiv h_{\delta r}$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\delta$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **B** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $\mathbf{B}_r \equiv \mathbf{B}_1$ . Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\delta$  ( $\mathbf{f}_\delta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $\mathbf{f}_{\delta r}$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que é um ponto fixo (pois pertence à charneira). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto **A**, que é um ponto de  $\mathbf{f}_\delta$  e, simultaneamente, é um vértice do triângulo. Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por  $\mathbf{A}_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **A**). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $\mathbf{A}_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $\mathbf{A}_1$ , determinando-se  $\mathbf{A}_r$  (o ponto **A** rebatido). Em seguida, desenhou-se  $\mathbf{f}_{\delta r}$  (o traço frontal do plano  $\delta$  rebatido), passando por  $\mathbf{A}_r$  e concorrente com  $\mathbf{h}_{\delta r}$  no eixo **X** (está definido por dois pontos).

A partir dos pontos  $\mathbf{A}_r$  e  $\mathbf{B}_r$ , construiu-se o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o ponto  $\mathbf{C}_r$ . Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\delta$ , determinando-se as projeções do ponto **C**.

A inversão do rebatimento do ponto **C** processou-se com o recurso a uma reta do plano  $\delta$  à qual o ponto **C** pertence – a reta **r**, que é a reta suporte do lado **[AC]** do triângulo. A reta  $r_r$  (a reta **r** rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $\mathbf{A}_r$  e  $\mathbf{C}_r$ . Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **r**, para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **r** passa pelo ponto **A**, cujas projeções já são conhecidas, pelo que já temos um ponto para definir a reta **r** (em projeção). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Note que o ponto **A** é o traço frontal da reta **r**.

Nesse sentido, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **r**, que é um ponto de  $\mathbf{h}_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ). Assim, o ponto  $\mathbf{H}_r$  situa-se sobre  $\mathbf{h}_{\delta r}$  – é o ponto de concorrência da reta  $r_r$  com  $\mathbf{h}_{\delta r}$ . O ponto **H** é o traço horizontal da reta **r** e é um ponto da charneira (que é  $\mathbf{h}_\delta$ ), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente  $\mathbf{H}_r \equiv \mathbf{H}_1$  ( $\mathbf{H}_2$  situa-se no eixo **X**). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **r** em projeções – a reta **r** está, assim, definida por dois pontos (o ponto **A** e o ponto **H**), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta **r**.

Por fim, por  $\mathbf{C}_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_r$  (a projeção horizontal da reta **r**) é  $\mathbf{C}_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** ( $\mathbf{C}_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta **r**).

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

#### Determinação da sombra do triângulo **[ABC]** nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{A}_{s2} \equiv \mathbf{A}_2$  (situa-se no **SPFS**). O ponto **B** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{B}_{s1} \equiv \mathbf{B}_1$  (situa-se no **SPHA**). O raio luminoso que passa pelo ponto **C** é uma reta passante, pelo que a **sombra real** do ponto **C** ( $\mathbf{C}_s$ ) se situa no eixo **X** –  $\mathbf{C}_s$  é, simultaneamente, o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**.  $\mathbf{C}_s$  situa-se, assim, simultaneamente no **SPHS** e no **SPFS**.

As sombras reais dos três vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Nesse sentido,  $\mathbf{C}_s$  é, imediatamente, um dos pontos de quebra da sombra do triângulo.

$\mathbf{B}_{s1}$  e  $\mathbf{C}_s$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[BC]** do triângulo não admite ponto de quebra – o segmento  $[\mathbf{B}_{s1}\mathbf{C}_s]$  é a sombra projetada do lado **[BC]** do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).  $\mathbf{A}_{s2}$  e  $\mathbf{C}_s$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[AC]** do triângulo não admite ponto de quebra – o segmento  $[\mathbf{A}_{s2}\mathbf{C}_s]$  é a sombra projetada do lado **[AC]** do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).

O mesmo já não acontece em relação ao lado **[AB]** do triângulo – de facto, existe um ponto de quebra entre  $\mathbf{A}_{s2}$  e  $\mathbf{B}_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos). Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **A** –  $\mathbf{A}_{v1}$ .  $\mathbf{A}_{v1}$  é a sombra virtual do ponto **A** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **A**.

O segmento  $[\mathbf{A}_{v1}\mathbf{B}_{s1}]$  é a sombra projetada do segmento **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[\mathbf{A}_{v1}\mathbf{B}_{s1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $\mathbf{Q}_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AB]**). A linha quebrada aberta  $[\mathbf{A}_{s2}\mathbf{Q}_s\mathbf{B}_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento **[AB]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[\mathbf{A}_{s2}\mathbf{Q}_s\mathbf{B}_{s1}\mathbf{C}_s]$  é a **sombra real** do triângulo **[ABC]** nos planos de projeção. O segmento  $[\mathbf{Q}_s\mathbf{C}_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do triângulo. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[\mathbf{A}_{s2}\mathbf{Q}_s\mathbf{B}_{s1}\mathbf{C}_s]$  e o triângulo  $[\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2]$  (a projeção frontal do triângulo) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do triângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em projeção frontal, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do triângulo **[ABC]**:

O triângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em alguma das projeções, a face visível é a face sombreada.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **seqüência dos vértices da projeção frontal** do triângulo, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>2</sub>, C<sub>2</sub> e B<sub>2</sub>**. A **seqüência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s2</sub>, C<sub>s</sub> e B<sub>s1</sub>**. As duas seqüências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – mais uma vez considerou-se o sentido dos ponteiros do relógio. A **seqüência dos vértices da projeção horizontal** do triângulo, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub> e C<sub>1</sub>**. A **seqüência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s2</sub>, C<sub>s</sub> e B<sub>s1</sub>**. As duas seqüências apresentam os vértices por ordens diferentes, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção horizontal está **sombreada** (em **sombra própria**). Nesse sentido, preencheu-se a **sombra própria** do triângulo (a projeção horizontal da figura) com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o triângulo **[ABC]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\delta$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\delta$  e necessários à construção das projeções do triângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo **[ABC]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 854.

### Dados:

Em primeiro lugar, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, pertencente ao plano e em função dos dados – o ponto **A** tem cota nula, pelo que é um ponto do traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ).

Note que não nos é dada qualquer informação sobre o traço frontal do plano  $\rho$ , pelo que não é possível desenhar  $f_p$  – sabe-se, apenas, que o ponto **B** é um ponto do traço frontal do plano, pois **B** tem afastamento nulo.

Note que é dado o **ângulo** que o lado **[AB]** do triângulo faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

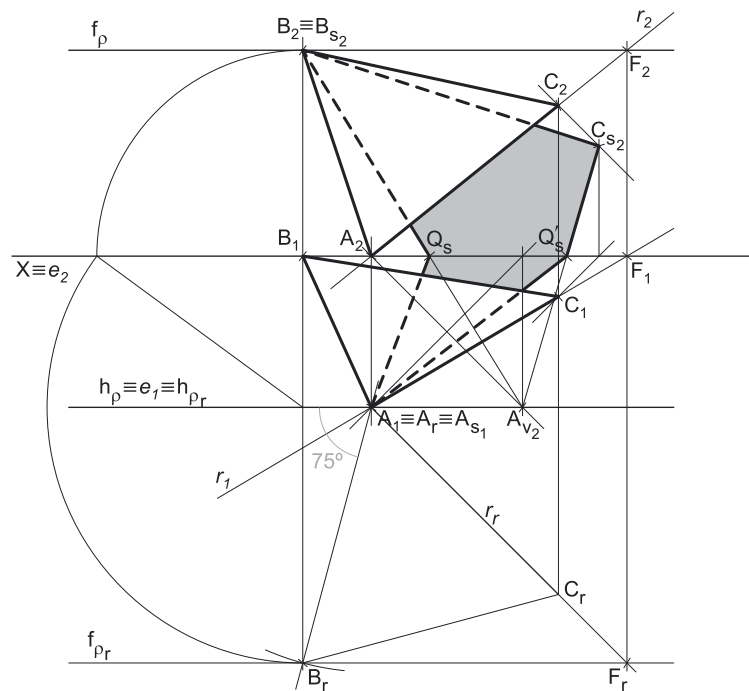
### Resolução:

#### Determinação das projeções do triângulo **[ABC]**:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, também o **ângulo** que o lado **[AB]** do triângulo faz com o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio triângulo, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível a construção do triângulo (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Note que não seria possível rebater o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção, pois ainda não é conhecido o seu traço frontal ( $f_p$ ) que, nesse caso, seria a charneira do rebatimento. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{pr}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a  $h_p$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $\mathbf{A}_r \equiv \mathbf{A}_1$ . Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado **[AB]** faz com  $\mathbf{h}_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) – é o ângulo que o segmento **[A<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** faz com  $\mathbf{h}_{pr}$ . Assim, por  $\mathbf{A}_r$  conduziu-se uma reta fazendo, com  $\mathbf{h}_{pr}$ , um ângulo de  $75^\circ$  – essa reta é a reta suporte do lado **[AB]**, em rebatimento. Note que é dado que o vértice **B** do retângulo se situa à esquerda do vértice **A**, pelo que o ângulo tem de ter abertura para o lado esquerdo. Assim, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $75^\circ$  a partir de  $\mathbf{A}_r$ , aquela que a resolução apresenta é a única que nos garante o que o enunciado pede expressamente.

Sobre a reta suporte do lado **[AB]**, em rebatimento, e a partir de  $\mathbf{A}_r$ , mediram-se os 7 cm (a medida do lado do triângulo), o que nos permitiu determinar  $\mathbf{B}_r$  (o ponto **B** rebatido). Uma vez que o ponto **B** tem afastamento nulo, o ponto **B** é, necessariamente, um ponto do traço frontal do plano  $\rho$ . Assim, desenhou-se o traço frontal do plano  $\rho$  em rebatimento ( $\mathbf{f}_{pr}$ ), passando por  $\mathbf{B}_r$  e paralelo ao eixo **X** –  $\mathbf{f}_{pr}$  está definido por um ponto (o ponto  $\mathbf{B}_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal). A partir de  $\mathbf{A}_r$  e de  $\mathbf{B}_r$ , foi possível efetuar os traçados necessários à construção do triângulo **[ABC]** em rebatimento, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar o terceiro vértice do polígono, rem rebatimento –  $\mathbf{C}_r$ .

Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$ , determinando-se as projeções dos pontos **B** e **C**. Tendo em conta que o ponto **B** é um ponto do traço frontal do plano  $\rho$  ( $\mathbf{f}_p$ ), que ainda não foi desenhado, é necessário inverter o rebatimento do plano  $\rho$  começando pelo ponto **B**. Assim, por  $\mathbf{B}_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento –  $\mathbf{B}_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**) é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com o eixo **X** (pois **B** tem afastamento nulo).

Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira (que é o centro do arco do rebatimento do ponto **B**) e com raio até  $\mathbf{B}_r$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **B** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), até ao eixo **X**, onde se situa o terceiro vértice do triângulo do rebatimento do ponto **B** – este procedimento permitiu-nos desenhar o triângulo do rebatimento do ponto **B**, em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **B**). Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $\mathbf{C}_r$  e com raio até ao terceiro vértice do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano de perfil, determinando-se  $\mathbf{B}_2$  (a projeção frontal do ponto **B**), sobre a perpendicular à charneira que passa por  $\mathbf{B}_r$ . Este procedimento permitiu-nos, finalmente, desenhar o traço frontal do plano  $\rho$  ( $\mathbf{f}_p$ ), que está definido por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (é fronto-horizontal). Tenha ainda em conta que se garantiu que o ponto **B** tem cota positiva, para se situe no espaço do  $1^\circ$  Diedro (para que o triângulo se situe no  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente).

A inversão do rebatimento do ponto **C** e a determinação das suas projeções processou-se com o recurso a uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , à qual o ponto **C** pertence – a reta  $\mathbf{r}$ , que é a reta suporte do lado **[AC]** do triângulo. A reta  $\mathbf{r}_r$  (a reta  $\mathbf{r}$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $\mathbf{A}_r$  e  $\mathbf{C}_r$ ). Para definir a reta  $\mathbf{r}$  em projeções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **A** é, de forma direta, o traço horizontal da reta  $\mathbf{r}$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $\mathbf{r}$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto  $\mathbf{F}$ , o traço frontal da reta  $\mathbf{r}$ , que é um ponto de  $\mathbf{f}_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto  $\mathbf{F}_r$  situa-se sobre  $\mathbf{f}_{pr}$  – é o ponto de concorrência da reta  $\mathbf{r}_r$  com  $\mathbf{f}_{pr}$ . Conduzindo, por  $\mathbf{F}_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal a charneira que contém o arco do seu rebatimento), determinaram-se as projeções do ponto **F** –  $\mathbf{F}_2$  situa-se sobre  $\mathbf{f}_p$  e  $\mathbf{F}_1$  situa-se no eixo **X**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $\mathbf{r}$  em projeções – a reta  $\mathbf{r}$ , em projeções, está definida por dois pontos (o ponto **A** e o ponto **F**), o que nos permitiu desenhar as suas projeções.

Em seguida, por  $\mathbf{C}_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto **C**, sobre as projeções homónimas da reta  $\mathbf{r}$  (a reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **C** pertence).

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

#### Determinação da sombra do triângulo **[ABC]** nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **A** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{A}_{s1} \equiv \mathbf{A}_1$  (situa-se no **SPHA**). O ponto **B** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{B}_{s2} \equiv \mathbf{B}_2$  (situa-se no **SPFS**).  $\mathbf{C}_{s2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.

As sombras reais dos três vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$\mathbf{B}_{s2}$  e  $\mathbf{C}_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[BC]** do triângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[B<sub>s2</sub>C<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do lado **[BC]** do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AB]** e **[AC]** do triângulo – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $\mathbf{A}_{s1}$  e  $\mathbf{B}_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $\mathbf{A}_{s1}$  e  $\mathbf{C}_{s2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra, recorreu-se à sombra virtual do ponto **A** –  $\mathbf{A}_{v2}$ .  $\mathbf{A}_{v2}$  é a sombra virtual do ponto **A** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **A**. O segmento **[A<sub>v2</sub>B<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[AB]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[A<sub>v2</sub>B<sub>s2</sub>]** (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $\mathbf{Q}_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[A<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>B<sub>s2</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[AB]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^\circ$  Diedro).

Por outro lado, o segmento **[C<sub>s2</sub>A<sub>v2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[AC]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[C<sub>s2</sub>A<sub>v2</sub>]** (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $\mathbf{Q}'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[A<sub>s1</sub>Q'<sub>s</sub>C<sub>s2</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[AC]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^\circ$  Diedro).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A linha quebrada fechada  $[A_{s_1} Q_s B_{s_2} C_{s_2} Q'_s]$  é a **sombra real** do triângulo  $[ABC]$  nos planos de projeção. O segmento  $[Q_s Q'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do triângulo. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s_1} Q_s B_{s_2} C_{s_2} Q'_s]$  e os triângulos  $[A_2 B_2 C_2]$  (a projeção frontal do triângulo) e  $[A_1 B_1 C_1]$  (a projeção horizontal do triângulo) – essas sobreposições correspondem ao facto de parte da sombra do triângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em ambas as projeções, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do triângulo  $[ABC]$ :*

O triângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do triângulo, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>2</sub>, B<sub>2</sub> e C<sub>2</sub>**. A **sequência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s1</sub>, B<sub>s2</sub> e C<sub>s2</sub>**. As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do triângulo, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub> e C<sub>1</sub>**. A **sequência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s1</sub>, B<sub>s2</sub> e C<sub>s2</sub>**. As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o triângulo  $[ABC]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\rho$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  e necessários à construção das projeções do triângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo  $[ABC]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o triângulo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o triângulo  $[ABC]$ , nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 855.

### Dados:

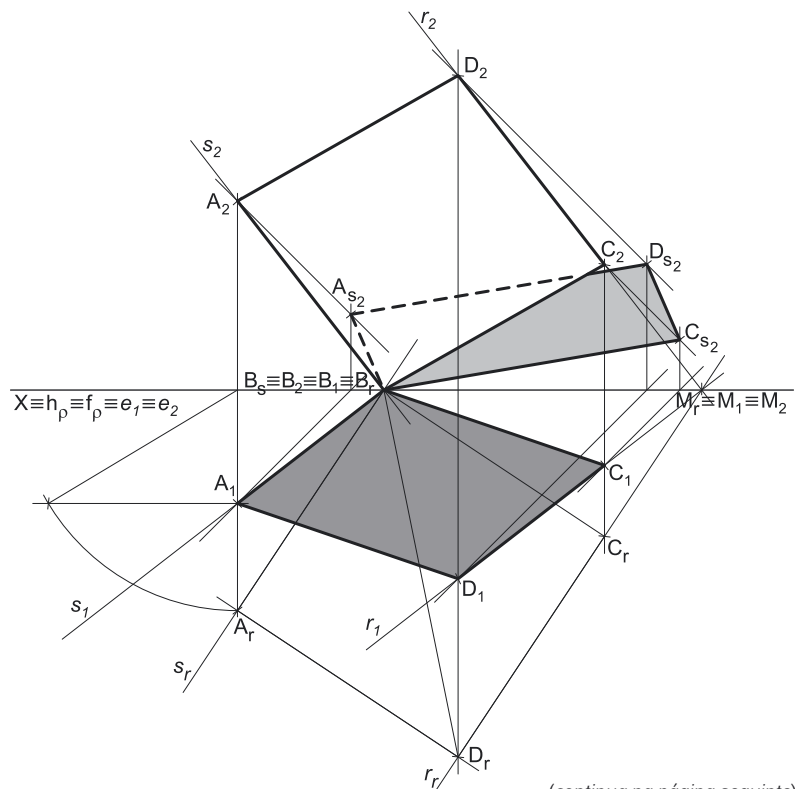
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

*Determinação das projeções do quadrado  $[ABCD]$ :*

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começou-se por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente  $X \equiv f_\rho \equiv h_\rho \equiv e_1 \equiv e_2$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (planos ortogonais ao eixo **X**).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Efetou-se o rebatimento do ponto **A**. O rebatimento do ponto **A** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziram-se, por **A**<sub>1</sub>, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira, e a partir de **A**<sub>1</sub>, mediu-se a cota do ponto **A**, o que nos permitiu construir o triângulo do rebatimento do ponto **A**, em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento (no eixo **X**) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por **A**<sub>1</sub>, onde se situa **A**<sub>r</sub> (o ponto **A** rebatido).

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **A**<sub>r</sub> (o ponto **A** rebatido) e com 7 cm de raio, determinou-se **B**<sub>r</sub> (o ponto **B** rebatido), no eixo **X**. A partir dos pontos **A**<sub>r</sub> e **B**<sub>r</sub>, efetuou-se a construção do quadrado, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices da figura (em rebatimento) – os pontos **C**<sub>r</sub> e **D**<sub>r</sub>. Note que se garantiu, na construção do quadrado, que a figura se situa, na totalidade, no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro.

Para se desenharem as projeções do quadrado, é necessário inverter o rebatimento do plano  $\rho$  e determinar as projeções dos vértices **B**, **C** e **D** do quadrado. O ponto **B** é um ponto da charneira (que é o eixo **X**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **B**<sub>1</sub>  $\equiv$  **B**<sub>2</sub>  $\equiv$  **B**<sub>r</sub>.

A inversão do rebatimento dos pontos **C** e **D** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$ , à qual aqueles dois pontos pertençam. Nesse sentido, recorreu-se à reta **r**, que é a reta suporte do lado **[CD]** do quadrado. A reta **r**<sub>r</sub> (a reta **r** rebatida) está definida por dois pontos – o ponto **C**<sub>r</sub> e o ponto **D**<sub>r</sub>. Em seguida, há que determinar as projeções da reta **r**, para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **r** é uma reta passante (concorrente com o eixo **X**), pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (o ponto **M**) é um ponto da charneira, que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **M**<sub>r</sub>  $\equiv$  **M**<sub>1</sub>  $\equiv$  **M**<sub>2</sub>. Já temos um ponto para definir a reta **r** em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta **r** (em projeções).

Os dados do plano são insuficientes para determinar o elemento em falta da reta **r**, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e por uma direção. O lado **[CD]** do quadrado é paralelo ao lado **[AB]**, o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento. Nesse sentido, recorreu-se à reta **s**, como reta auxiliar do plano – a reta **s** é a reta suporte do lado **[AB]** do quadrado. A reta **s**<sub>r</sub> (a reta **s** rebatida) está definida por dois pontos – os pontos **A**<sub>r</sub> e **B**<sub>r</sub>. Uma vez que as projeções dos pontos **A** e **B** já são conhecidas, foi possível desenhar as projeções da reta **s**, de forma imediata – a reta **s** (em projeções) está definida por dois pontos (os pontos **A** e **B**).

As retas **r** e **s** são paralelas, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **r** em projeções – a reta **r** está, assim, definida por um ponto (o ponto **M**) e por uma direção (é paralela à reta **s**), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta **r**.

Em seguida, por **C**<sub>r</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **r**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **r**) é **C**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** (**C**<sub>2</sub>) situa-se sobre **r**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **r**). De forma semelhante, por **D**<sub>r</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **r**<sub>1</sub> (a projeção horizontal da reta **r**) é **D**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **D**). A projeção frontal do ponto **D** (**D**<sub>2</sub>) situa-se sobre **r**<sub>2</sub> (a projeção frontal da reta **r**).

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

#### *Determinação da sombra do quadrado **[ABCD]** nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).

O ponto **B** é um ponto do eixo **X**, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, **B**<sub>s</sub>  $\equiv$  **B**<sub>1</sub>  $\equiv$  **B**<sub>2</sub> (**B**<sub>s</sub> situa-se tanto no **SPHA** como no **SPFS**). **A**<sub>s2</sub> é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A**. **C**<sub>s2</sub> é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**. **D**<sub>s2</sub> é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D**.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se todas no mesmo plano de projeção (o **SPFS**), pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **não admite a existência de pontos de quebra**. Assim, desenhou-se o paralelogramo **[A<sub>s2</sub>B<sub>s</sub>C<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>]**, que é a **sombra real** do quadrado nos planos de projeção e se situa, na sua totalidade, no **SPFS**.

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono **[A<sub>s2</sub>B<sub>s</sub>C<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>]** e o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]** (a projeção frontal do quadrado) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em projeção frontal, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### *Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado **[ABCD]**:*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A**<sub>2</sub>, **D**<sub>2</sub>, **C**<sub>2</sub> e **B**<sub>2</sub>. A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A**<sub>s2</sub>, **D**<sub>s2</sub>, **C**<sub>s2</sub> e **B**<sub>s</sub>. As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **seqüência dos vértices da projeção horizontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>**, **B<sub>1</sub>**, **C<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>**. A **seqüência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s2</sub>**, **D<sub>s2</sub>**, **C<sub>s2</sub>** e **B<sub>s</sub>**. As duas seqüências apresentam os vértices por ordens diferentes, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção horizontal está **em sombra** (em **sombra própria**).

Nesse sentido, preencheu-se a **sombra própria** do quadrado (a projeção horizontal da figura) com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam traços do plano  $\rho$ ). O pedido representou-se a **forte** – o quadrado **[ABCD]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado **[ABCD]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado **[ABCD]**, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 856.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano  $\rho$  está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

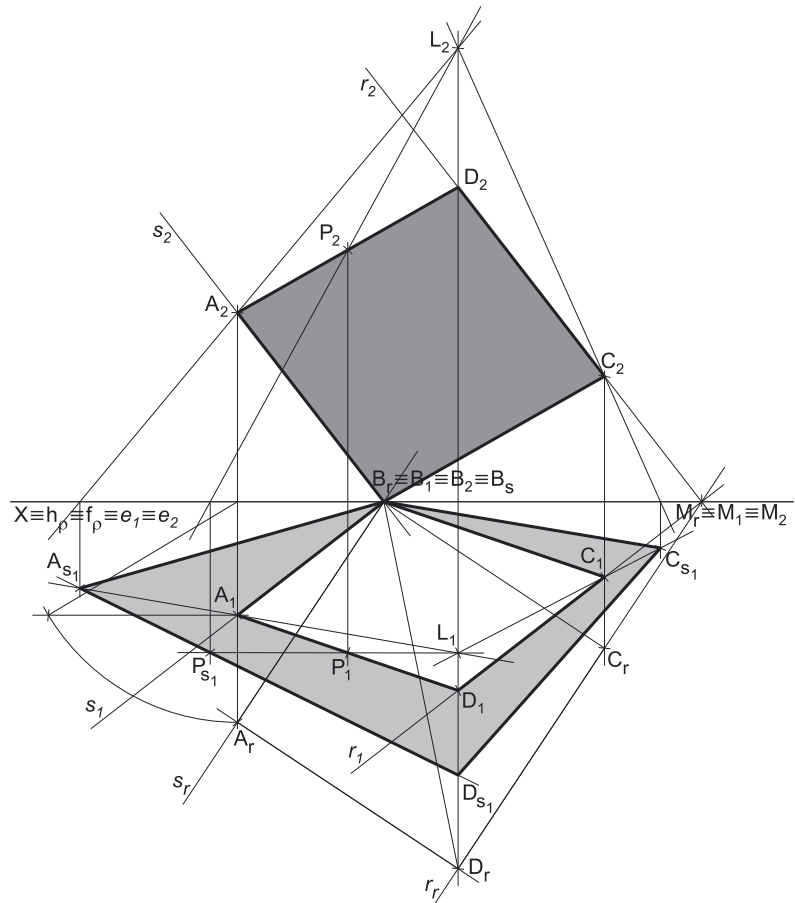
#### Determinação das projeções do quadrado **[ABCD]**:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começou-se por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_\rho$ ), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente  $X \equiv h_\rho \equiv f_\rho \equiv e_1 \equiv e_2$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (planos ortogonais ao eixo **X**).

Efetuu-se o rebatimento do ponto **A**. O rebatimento do ponto **A** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziram-se, por **A<sub>1</sub>**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira, e a partir de **A<sub>1</sub>**, mediu-se a cota do ponto **A**, o que nos permitiu construir o triângulo do rebatimento do ponto **A**, em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento (no eixo **X**) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por **A<sub>1</sub>**, onde se situa **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido).

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido) e com 7 cm de raio, determinou-se **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido), no eixo **X**. A partir dos pontos **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**, efetuou-se a construção do quadrado, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices da figura (em rebatimento) – os pontos **C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**. Note que se garantiu, na construção do quadrado, que a figura se situa, na totalidade, no espaço do 1ª Diedro.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para se desenharem as projeções do quadrado, é necessário inverter o rebatimento do plano  $\rho$  e determinar as projeções dos vértices **B**, **C** e **D** do quadrado. O ponto **B** é um ponto da charneira (que é o eixo **X**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $B_1 \equiv B_2 \equiv B_r$ .

A inversão do rebatimento dos pontos **C** e **D** processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\rho$ , à qual aqueles dois pontos pertençam. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $r$ , que é a reta suporte do lado **[CD]** do quadrado. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos – o ponto  $C_r$  e o ponto  $D_r$ . Em seguida, há que determinar as projeções da reta  $r$ , para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $r$  é uma reta passante (concorrente com o eixo **X**), pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (o ponto **M**) é um ponto da charneira, que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $M_r \equiv M_1 \equiv M_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $r$  (em projeções).

Os dados do plano são insuficientes para determinar o elemento em falta da reta  $r$ , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e por uma direção. O lado **[CD]** do quadrado é paralelo ao lado **[AB]**, o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $s$ , como reta auxiliar do plano – a reta  $s$  é a reta suporte do lado **[AB]** do quadrado. A reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $B_r$ . Uma vez que as projeções dos pontos **A** e **B** já são conhecidas, foi possível desenhar as projeções da reta  $s$ , de forma imediata – a reta  $s$  (em projeções) está definida por dois pontos (os pontos **A** e **B**).

As retas  $r$  e  $s$  são paralelas, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – a reta  $r$  está, assim, definida por um ponto (o ponto **M**) e por uma direção (é paralela à reta  $s$ ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $r$ .

Em seguida, por  $C_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_r$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** ( $C_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ). De forma semelhante, por  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $r_r$  (a projeção horizontal da reta  $r$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto **D**). A projeção frontal do ponto **D** ( $D_2$ ) situa-se sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

*Determinação da sombra do quadrado **[ABCD]** nos planos de projeção:*

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **L** (o oco luminoso), pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **L** situa-se no mesmo plano de perfil do ponto **D**, pelo que as projeções dos dois pontos se situam na mesma linha de chamada.

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por dois pontos – o foco luminoso **L** e o respetivo vértice do quadrado.

O ponto **B** é um ponto do eixo **X**, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $B_s \equiv B_1 \equiv B_2$  ( $B_s$  situa-se tanto no **SPHA** como no **SPFS**).  $A_{s1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $C_{s1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.

Há a referir que o raio luminoso que passa pelo ponto **D** é uma **reta de perfil**, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Assim, não é possível, de forma imediata, determinar a sombra do ponto **D** nos planos de projeção nem saber, sequer, se a sombra se situa no **SPHA** ou no **SPFS**. De facto, para se determinar o ponto de interseção deste raio luminoso com os planos de projeção é necessário, à partida, o recurso a um **processo geométrico auxiliar** (nomeadamente o recurso ao **rebatimento do plano de perfil** ou a uma **mudança do diedro de projeção**). No entanto, optou-se por uma outra situação, bastante mais simples, como em seguida, se expõe.

Recorreu-se a um ponto **P**, qualquer, pertencente ao segmento de reta **[AD]** (um dos lados do quadrado que tem extremo no ponto **D**). Em seguida, determinou-se a sombra real do ponto **P**.  $P_{s1}$  é a sombra real do ponto **P** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **P**. A sombra real do lado **[AD]** tem um extremo em  $A_{s1}$  (a sombra real do ponto **A**) e passa por  $P_{s1}$ , o que nos permitiu desenhar a reta suporte do segmento que é a sombra do lado **[AD]** – o ponto em que a reta suporte dessa sombra que se situa na linha de chamada do ponto **D** (e do foco luminoso **L**) é a sombra real do ponto **D**.

Conclui-se que a sombra real do ponto **D** se situa no **SPHA**, pelo que é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **D** –  $D_{s1}$  é a sombra real do ponto **D**.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se todas no mesmo plano de projeção (o **SPHA**), pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **não admite a existência de pontos de quebra**. Assim, desenhou-se o paralelogramo  $[A_{s1}B_{s1}C_{s1}D_{s1}]$ , que é a **sombra real** do quadrado nos planos de projeção e se situa, na sua totalidade, no **SPHA**.

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s1}B_{s1}C_{s1}D_{s1}]$  e o polígono  $[A_1B_1C_1D_1]$  (a projeção horizontal do quadrado) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em projeção horizontal, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado [ABCD]:*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>2</sub>, D<sub>2</sub>, C<sub>2</sub> e B<sub>2</sub>**. A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s1</sub>, B<sub>s</sub>, C<sub>s1</sub> e D<sub>s1</sub>**. As duas sequências apresentam os vértices por ordens diferentes, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **em sombra** (em **sombra própria**).

Nesse sentido, preencheu-se a **sombra própria** do quadrado (a projeção frontal da figura) com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> e D<sub>1</sub>**. A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s1</sub>, B<sub>s</sub>, C<sub>s1</sub> e D<sub>s1</sub>**. As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

**Traçado:**

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam traços do plano  $\rho$ ). O pedido representou-se a **forte** – o quadrado [ABCD] e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado [ABCD] ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado [ABCD], nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 857.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. O segmento de reta [AB] é um segmento de reta horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, a partir de **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**) mediu-se o ângulo dado com o eixo **X** e desenhou-se a reta suporte do segmento. Sobre essa reta, a partir de **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**), mediram-se os 7 cm (o comprimento do segmento) e determinou-se **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**). **B<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **B**) situa-se no eixo **X**, pois o segmento está contido no Plano Horizontal de Projeção.

Por fim, atendendo a que o segmento de reta [AB] é um lado de um triângulo equilátero [ABC] que está contido num plano  $\alpha$ , e uma vez que os pontos **A** e **B** são dois pontos desse plano, foi possível desenhar o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que está definido por dois pontos (os pontos **A** e **B**). Note que  $h_\alpha$  é, afinal, a reta suporte do segmento de reta [AB].

Os dados do enunciado não nos permitem determinar o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), pois o enunciado é totalmente omissivo a esse respeito.

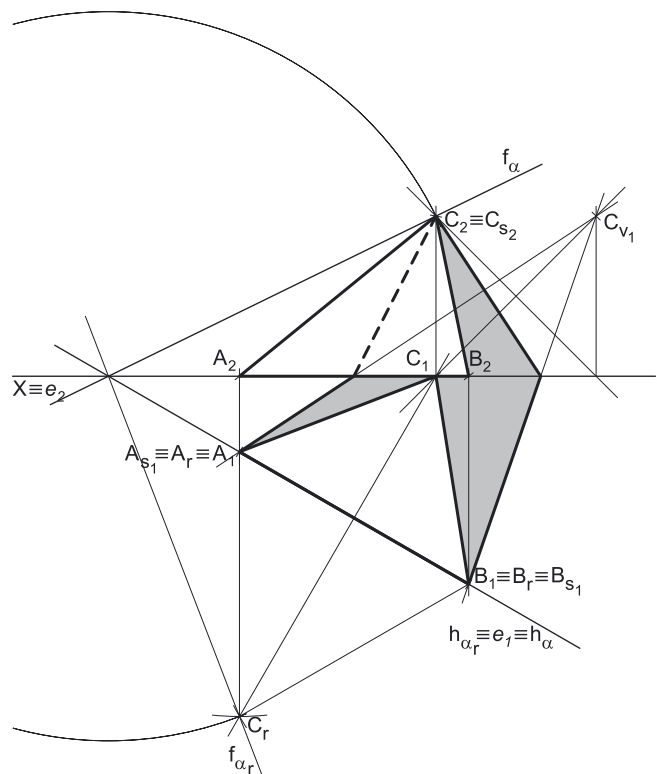
A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

*Determinação das projeções do triângulo [ABC]:*

O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo [ABC] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Note que não seria possível rebater o plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, pois não é conhecido o seu traço frontal ( $f_\alpha$ ) que, nesse caso, seria a charneira do rebatimento. Assim, começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\alpha$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **A** é um ponto de  $h_\alpha$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_1$ . O ponto **B** é outro ponto de  $h_\alpha$  (que é a charneira), pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $B_r \equiv B_1$ .

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano  $\alpha$  está em verdadeira grandeza. Assim, já é possível construir o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza, em rebatimento. Assim, a partir de  $A_r$  e  $B_r$  (os pontos **A** e **B** rebatidos, respetivamente), efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo **[ABC]** em rebatimento (em verdadeira grandeza), o que nos permitiu determinar o terceiro vértice do polígono em rebatimento – o ponto  $C_r$ . Note que, na construção do triângulo em rebatimento, se garantiu que o triângulo se situa, na sua totalidade, no espaço do  $1^\circ$  Diedro, como o enunciado refere expressamente.

Note que o ponto **C** tem afastamento nulo (é dado no enunciado), pelo que o ponto **C** é necessariamente um ponto de  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) – assim, a inversão do rebatimento do ponto **C** permitir-nos-á desenhar o traço frontal do plano ( $f_\alpha$ ).

Para inverter o rebatimento do ponto **C** conduziu-se, por  $C_r$  (o ponto **C** rebatido), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal a charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **C**) – o ponto de interseção dessa perpendicular à charneira com o eixo **X** é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**), pois o ponto **C** tem afastamento nulo. A partir de  $C_1$ , desenharam-se a linha de chamada do ponto **C**, perpendicular ao eixo **X**.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é o ponto de  $f_\alpha$  que é fixo, pois situa-se na charneira), e com raio até  $C_r$ , desenharam-se um arco (de transporte) até à linha de chamada do ponto **C**, onde se situa  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**). Este procedimento permitiu-nos, também, desenhar o traço frontal do plano  $\alpha$  –  $f_\alpha$  passa por  $C_2$  e é concorrente com  $h_\alpha$  no eixo **X**. Nesse sentido,  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) está definido por dois pontos – o ponto **C** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\alpha$ .

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

#### Determinação da sombra do triângulo **[ABC]** nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**. O ponto **A** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s1} \equiv A_1$  (situa-se no **SPHA**). O ponto **B** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $B_{s1} \equiv B_1$  (situa-se no **SPHA**). O ponto **C** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $C_{s2} \equiv C_2$  (situa-se no **SPFS**).

As sombras reais dos três vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s1}$  e  $B_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[AB]** do triângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s1}B_{s1}]$  é a sombra projetada do lado **[AB]** do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AC]** e **[BC]** do triângulo – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s1}$  e  $C_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $B_{s1}$  e  $C_{s2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra, recorreu-se à sombra virtual do ponto **C** ( $C_{v1}$ ), o que se processou conduzindo, pelo ponto **C**, um raio luminoso (que não se identificou) – o raio luminoso está definido por um ponto (o ponto **C**) e por uma direção (a direção convencional da luz).  $C_{v1}$  é a sombra virtual do ponto **C** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**.

O segmento  $[A_{s1}C_{v1}]$  é a sombra projetada do segmento **[AC]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s1}C_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s1}Q_sC_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento **[AC]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^\circ$  Diedro).

Por outro lado, o segmento  $[B_{s1}C_{v1}]$  é a sombra projetada do segmento **[BC]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[B_{s1}C_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[B_{s1}Q'_sC_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento **[BC]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^\circ$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s1}Q_sC_{s2}Q'_sB_{s1}]$  é a **sombra real** do triângulo **[ABC]** nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do triângulo. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s1}Q_sC_{s2}Q'_sB_{s1}]$  e os triângulos  $[A_2B_2C_2]$  (a projeção frontal do triângulo) e  $[A_1B_1C_1]$  (a projeção horizontal do triângulo) – essas sobreposições correspondem ao facto de parte da sombra do triângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em ambas as projeções, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do triângulo **[ABC]**:

O triângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do triângulo, a partir do ponto **A**, é:  $A_2$ ,  $C_2$  e  $B_2$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é:  $A_{s1}$ ,  $C_{s2}$  e  $B_{s1}$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **seqüência dos vértices da projeção horizontal** do triângulo, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> e B<sub>1</sub>**. A **seqüência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s1</sub>, C<sub>s2</sub> e B<sub>s1</sub>**. As duas seqüências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o triângulo **[ABC]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  e necessários à construção das projeções do triângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo **[ABC]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o triângulo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o triângulo **[ABC]**, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 858.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. Note que o ângulo  $\alpha$  que o enunciado se refere (o ângulo que os traços do plano fazem **entre si**) não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\delta$ .

Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**, o que significa que se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si, no espaço**, antes do rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção – não se trata do ângulo que os dois traços do plano fazem entre si, **na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **A**, pertencente ao plano  $\delta$ . O ponto **A**, para pertencer ao plano  $\delta$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, como o ponto **A** tem cota nula, é um ponto de  $h_\delta$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ) – o ponto **A** é, assim, o ponto de  $h_\delta$  que tem 3 cm de afastamento ( $h_\delta$  é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

### Resolução:

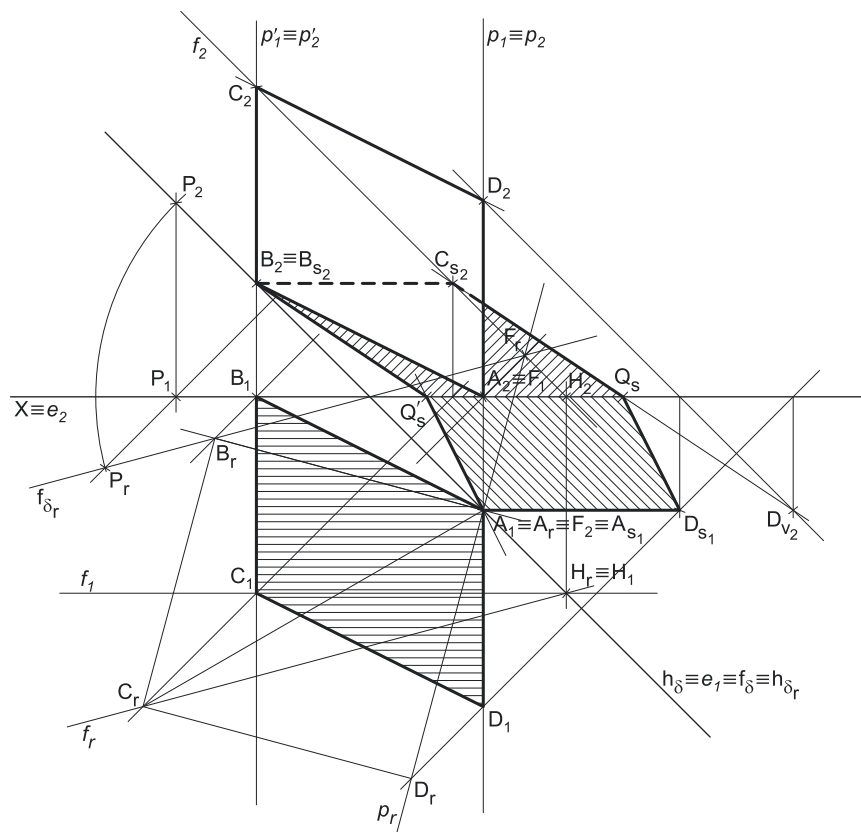
#### Determinação das projeções do quadrado **[ABCD]**:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\delta$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Note que não seria possível rebater o plano  $\delta$  para o Plano Frontal de Projeção, pois não é conhecido o seu traço frontal ( $f_\delta$ ) que, nesse caso, seria a charneira do rebatimento. Assim, começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\delta \equiv e_1 \equiv h_{\delta r}$  ( $e_1$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\delta$ ).

O ponto **A** é um ponto de  $h_\delta$  (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **A<sub>r</sub>  $\equiv$  A<sub>1</sub>**.

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano  $\delta$  está em verdadeira grandeza, nomeadamente o próprio ângulo que os traços do plano fazem **entre si**. Assim, em rebatimento, já é possível medir, em verdadeira grandeza, o ângulo que os dois traços do plano fazem **entre si**, o que nos permitiu desenhar  $f_{\delta r}$ , fazendo um ângulo de 120° com  $h_{\delta r}$  (como o enunciado refere expressamente).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por outro lado, também já é possível construir o quadrado  $[ABCD]$  em verdadeira grandeza, em rebatimento, em função dos dados. Tendo em conta que dois lados do quadrado estão contidos em retas de perfil e que  $B$  tem afastamento nulo, os lados de perfil do quadrado são os lados  $[BC]$  e  $[AD]$ . Assim, pelas projeções do ponto  $A$  conduziram-se, de forma imediata, as projeções da reta  $p$ , a reta suporte do lado  $[AD]$  do quadrado. O ponto  $A$  é, de forma imediata, o traço horizontal da reta  $p$  (o ponto  $A$  tem cota nula). Por outro lado, para que a reta  $p$  pertença ao plano  $\delta$ , o seu traço frontal tem de estar sobre o traço frontal do plano  $\delta$ .

Para tal, há que inverter o rebatimento do traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_\delta$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é um ponto fixo, pois situa-se na charneira). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto  $P$ , qualquer, do traço frontal do plano –  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido), que se situa sobre  $f_{\delta r}$  (o traço frontal do plano  $\delta$  rebatido).

A inversão do rebatimento do ponto  $P$  permitir-nos-á desenhar o traço frontal do plano ( $f_\delta$ ), pois o ponto  $P$  é um ponto do traço frontal do plano ( $f_\delta$ ). Para inverter o rebatimento do ponto  $P$  conduziu-se, por  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal a charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $P$ ) – o ponto de interseção dessa perpendicular à charneira com o eixo  $X$  é  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), pois o ponto  $P$  tem afastamento nulo. A partir de  $P_1$ , desenhou-se a linha de chamada do ponto  $P$ , perpendicular ao eixo  $X$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos dois traços do plano (que é o ponto de  $f_\delta$  que é fixo, pois situa-se na charneira), e com raio até  $P_r$ , desenhou-se um arco (de transporte) até à linha de chamada do ponto  $P$ , onde se situa  $P_2$  (a projeção frontal do ponto  $P$ ). Este procedimento permitiu-nos, também, desenhar o traço frontal do plano  $\delta$  –  $f_\delta$  passa por  $P_2$  e é concorrente com  $h_\delta$  no eixo  $X$ . Nesse sentido,  $f_\delta$  (o traço frontal do plano  $\delta$ ) está definido por dois pontos – o ponto  $P$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\delta$ . Salienta-se que, nesta situação particular, os traços do plano ficam coincidentes ( $f_\delta \equiv h_\delta$ ), pelo que se conclui que o plano  $\delta$  é um plano ortogonal ao  $\beta_{2/4}$ .

Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta  $p$  (o ponto  $F$ ), que se situa sobre o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ). Note que, nesta situação particular, as projeções do ponto  $F$  estão sobre as projeções de nome contrário do ponto  $A$ . A reta  $p$  está definida por dois pontos – o ponto  $A$  (o seu traço horizontal) e o ponto  $F$  (o seu traço frontal). Para ser possível construir o quadrado, é necessário rebater a reta, para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

O ponto  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido) já é um ponto da reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), pelo que já temos um ponto para definir a reta  $p$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, rebateu-se o ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $p$ ). Para tal conduziu-se, por  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F$ ) uma perpendicular à charneira e determinou-se  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido), sobre  $f_{\delta r}$  (o traço frontal do plano  $\delta$  rebatido). Por fim, desenhou-se a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $F_r$ .

Finalmente, foi possível efetuar a construção do quadrado  $[ABCD]$  em rebatimento. Tendo em conta que o lado  $[AD]$  (em rebatimento) se situa sobre a reta  $p_r$ , por  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido) conduziu-se uma perpendicular à reta  $p_r$ , o que nos permitiu determinar o ponto  $B_r$  (o ponto  $B$  rebatido) sobre  $f_{\delta r}$  (o traço frontal do plano  $\delta$  rebatido) – tendo em conta que o ponto  $B$  é um ponto com afastamento nulo, o ponto  $B$  é um ponto do traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ).

A partir dos pontos  $A_r$  e  $B_r$ , construiu-se o quadrado  $[ABCD]$  em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os outros dois vértices do polígono, em rebatimento –  $C_r$  e  $D_r$ . Note que, na construção do quadrado em rebatimento, se garantiu que o quadrado se situa, na sua totalidade, no espaço do  $1^a$  Diedro, como o enunciado refere expressamente. Tenha em conta que o segmento  $[A_r D_r]$  se situa sobre a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), o que nos garante que o quadrado tem dois lados de perfil.

A inversão do rebatimento do ponto  $C$  processa-se com o recurso a uma reta do plano  $\delta$  à qual o ponto  $C$  pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta  $f$ , uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$  passando pelo ponto  $C$ . A reta  $f_r$  (a reta  $f$  rebatida) está definida por um ponto (o ponto  $C_r$ ) e uma direção (é paralela a  $f_{\delta r}$ , pois é uma reta frontal do plano). O ponto  $H$  é o traço horizontal da reta  $f$  e situa-se no traço horizontal do plano ( $h_\delta$ ), pelo que  $H_r$  se situa sobre  $h_{\delta r}$  ( $H_r$  é o ponto de concorrência de  $f_r$  com  $h_{\delta r}$ ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $f$ , para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto  $H$  é um ponto da charneira (que é  $h_\delta$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_1 \equiv H$ , ( $H_2$  situa-se no eixo  $X$ , pois  $H$  tem cota nula). Já temos um ponto para definir a reta  $f$  em projeções – o ponto  $H$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $f$  é uma reta frontal (de frente) do plano  $\delta$ , e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $f$  (em projeções) – a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto  $H$ , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano  $\delta$ ).

Em seguida, pelo ponto  $C_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira. O ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ) é  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ) – a projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ) situa-se sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ), na linha de chamada de  $C_1$ .

Para inverter o rebatimento do ponto  $D$  conduziu-se, por  $D_r$  (o ponto  $D$  rebatido), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto  $D$ ) sobre  $p_1$  (a projeção horizontal da reta  $p$ ). Acontece que a reta  $p$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível de forma imediata, determinar a projeção frontal do ponto  $D$  ( $D_2$ ).

No entanto, sabe-se que os lados de um quadrado são paralelos dois a dois e que retas paralelas têm as projeções homónimas paralelas. Assim, o lado  $[CD]$  é necessariamente paralelo ao lado  $[AB]$ , pelo que os dois segmentos de reta têm as suas projeções horizontais paralelas entre si e têm, também, as suas projeções frontais paralelas entre si. Assim, por  $C_2$  (a projeção frontal do ponto  $C$ ) conduziu-se uma paralela a  $[A_2 B_2]$  (a projeção frontal do lado  $[AB]$ ) e determinou-se  $D_2$  (a projeção frontal do ponto  $D$ ) sobre  $p_2$  (a projeção frontal da reta  $p$ ).

A partir das projeções dos quatro pontos ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ), desenharam-se as projeções do retângulo  $[ABCD]$ .

*Determinação da sombra do quadrado  $[ABCD]$  nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O ponto **A** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s1} \equiv A_1$  (situa-se no **SPHA**). O ponto **B** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $B_{s2} \equiv B_2$  (situa-se no **SPFS**).  $C_{s2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.  $D_{s1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s1}$  e  $D_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[AD]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s1}D_{s1}]$  é a sombra projetada do lado **[AD]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).  $B_{s2}$  e  $C_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[BC]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s2}C_{s2}]$  é a sombra projetada do lado **[BC]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AB]** e **[CD]** do quadrado – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s1}$  e  $B_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C_{s2}$  e  $D_{s1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar um dos pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **D** –  $D_{v2}$ .  $D_{v2}$  é a sombra virtual do ponto **D** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **D**. O segmento  $[C_{s2}D_{v2}]$  é a sombra projetada do segmento **[CD]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C_{s2}D_{v2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[C_{s2}Q_sD_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento **[CD]** (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.º Diedro).

Para determinar o outro ponto de quebra teve-se em conta que os lados **[AB]** e **[CD]** são paralelos e, tratando-se de uma direção luminosa, as sombras projetadas daqueles dois lados num mesmo plano de projeção são necessariamente paralelas. Assim, por  $B_{s2}$  (a sombra real do ponto **B**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma paralela ao segmento de reta  $[C_{s2}Q_s]$  (a sombra do segmento de reta **[CD]** no **SPFS**) – o ponto de interseção dessa paralela com o eixo **X** é  $Q'_s$ , o ponto de quebra da sombra do segmento de reta **[AB]**. A linha quebrada aberta  $[A_{s1}Q'_sB_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento **[AB]** (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.º Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s1}Q'_sB_{s2}C_{s2}Q_sD_{s1}]$  é a **sombra real** do quadrado **[ABCD]** nos planos de projeção. O segmento  $[Q'_sQ_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do quadrado. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s1}Q'_sB_{s2}C_{s2}Q_sD_{s1}]$  e o polígono  $[A_2B_2C_2D_2]$  (a projeção frontal do quadrado) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em projeção frontal, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com **tracejado**. Este foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções. A direção luminosa convencional, em projeção horizontal, faz ângulos de 45° (de abertura para **a esquerda**) com o eixo **X**, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte da sombra projetada do quadrado que se situa no **SPHA**) faz ângulos de 45° (de abertura para **a direita**) com o eixo **X**. A direção luminosa convencional, em projeção frontal, faz ângulos de 45° (de abertura para **a esquerda**) com o eixo **X**, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte visível da sombra projetada do quadrado que se situa no **SPFS**) faz ângulos de 45° (de abertura para **a direita**) com o eixo **X**.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado **[ABCD]**:*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é:  $A_2, B_2, C_2$  e  $D_2$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é:  $A_{s1}, B_{s2}, C_{s2}$  e  $D_{s1}$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é:  $A_1, D_1, C_1$  e  $B_1$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é:  $A_{s1}, B_{s2}, C_{s2}$  e  $D_{s1}$ . As duas sequências apresentam os vértices por ordens diferentes, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção horizontal está **em sombra** (em **sombra própria**).

Nesse sentido, preencheu-se a **sombra própria** do quadrado (a projeção horizontal da figura) com **tracejado** – este foi executado paralelamente ao eixo **X**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o quadrado **[ABCD]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\delta$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\delta$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**. O tracejado que preenche a parte visível da sombra projetada do quadrado (em ambas as projeções), e também da sua sombra própria, executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado **[ABCD]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado **[ABCD]**, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 859.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\gamma$ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, pertencente ao plano  $\gamma$  e em função dos dados. O plano  $\gamma$  é um plano projetante horizontal e o ponto **A** pertence ao plano  $\gamma$ , pelo que a sua projeção horizontal ( $A_1$ ) se situa sobre o traço horizontal do plano ( $h_\gamma$ ). Por outro lado, o ponto **A** é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X** (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:*

O enunciado refere que o lado **[AB]** tem as suas projeções paralelas entre si. Uma vez que o segmento de reta **[AB]** está contido no plano  $\gamma$ , que é um plano projetante horizontal, sabe-se imediatamente que a sua projeção horizontal (o segmento de reta **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>]**) está sobre  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ). Assim, a projeção frontal do segmento de reta (o segmento de reta **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>]**) tem de ser paralelo a  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ). Por outro lado, é dado, também, que o ponto **B** tem afastamento nulo. Nesse sentido, o ponto **B** é um ponto de  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano). Assim, por **A<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**) conduziu-se uma paralela a  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ) e determinou-se **B<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **B**) sobre o traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ). **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**) situa-se necessariamente no eixo **X**, pois **B** tem afastamento nulo.

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\gamma$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\gamma$  (o plano que contém a figura) para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $f_\alpha$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_\alpha \equiv e_2 \equiv f_{\alpha r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo do rebatimento. O ponto **B** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $B_r \equiv B_2$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\gamma$  e determinou-se o ponto **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido).

A partir de **A<sub>r</sub>** e de **B<sub>r</sub>**, construiu-se o quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento – **C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**. Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\gamma$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos **C** e **D**. A partir das duas projeções dos quatro vértices do quadrado, desenharam-se as duas projeções do polígono. Sublinha-se que a projeção horizontal do quadrado se reduz a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), pois o plano que o contém (o plano  $\gamma$ ) é um plano projetante horizontal.

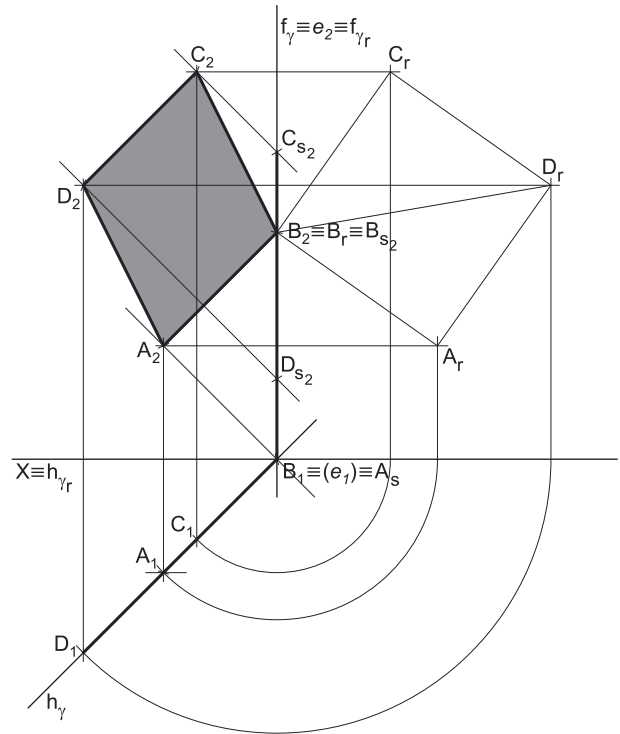
*Determinação da sombra do quadrado [ABCD] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Note que, **nesta situação particular**, as projeções horizontais de todos os raios luminosos estão coincidentes com o traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ). Tal deve-se ao facto de o plano  $\gamma$  conter a direção luminosa – o plano  $\gamma$  é, de facto, um **plano luminoso** (ou um **plano luz/sombra**).

O raio luminoso que passa pelo ponto **A** é uma reta passante, pelo que a **sombra real** do ponto **A** (**A<sub>s</sub>**) se situa no eixo **X** – **A<sub>s</sub>** é, simultaneamente, o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **A**. **A<sub>s</sub>** situa-se, assim, simultaneamente no **SPHS** e no **SPFS**. O ponto **B** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua **sombra real** está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente **B<sub>s2</sub>  $\equiv$  B<sub>2</sub>** (situa-se no **SPFS**). **C<sub>s2</sub>** é a **sombra real** do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**. **D<sub>s2</sub>** é a **sombra real** do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D**.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se no mesmo plano de projeção (o **SPFS**), pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **não admite a existência de pontos de quebra**. Assim, representou-se a sombra real do quadrado que se situa, na totalidade, no **SPFS**. Salienta-se que, **nesta situação particular**, a sombra real do quadrado **[ABCD]** se reduz a um segmento de reta (o segmento de reta **[A<sub>s</sub>C<sub>s2</sub>]**) sobre o traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ). Tal deve-se ao facto atrás referido de o plano  $\gamma$  ser um **plano luz/sombra** – um **plano projetante**, no **sistema de projeção das sombras**.

Uma vez que a sombra do quadrado se reduz a um segmento de reta, não existe qualquer **área visível de sombra** para preencher com mancha ou tracejado. Por outro lado, nesta situação também não se verifica qualquer sobreposição entre o quadrado e a sua sombra, pelo que também não existe qualquer invisibilidade a assinalar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado [ABCD]:*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em alguma das projeções, a face visível é a face sombreada.

No entanto, **nesta situação particular** (em que o quadrado está contido num plano luz/sombra), acontece que **ambas as faces do quadrado estão em sombra própria**. De facto, os raios luz/sombra que passam pelos diversos pontos da figura (e que estão contidos no plano  $\gamma$ ) são interceptados pelos lados [AD] e [CD] do quadrado, transformando-se, em seguida, em raios de sombra – **as duas faces** do quadrado estão, assim, **em sombra**, pois estão na **sombra espacial** dos lados [AD] e [CD] do quadrado. Sublinha-se que se trata de uma **situação particular** e diferente de todas as que, até agora, tinham sido apresentadas – em todas as situações abordadas se verifica que uma das faces da figura está iluminada (aquela sobre a qual incidem os raios luminosos em luz) e a outra está em sombra (sombra própria). Neste caso, são as duas faces da figura que estão em sombra própria, mas apenas uma delas é visível (em projeção frontal), o que se assinalou com uma mancha clara e uniforme.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o quadrado [ABCD] e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\gamma$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\gamma$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado [ABCD] ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado [ABCD], nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 860.

### Dados:

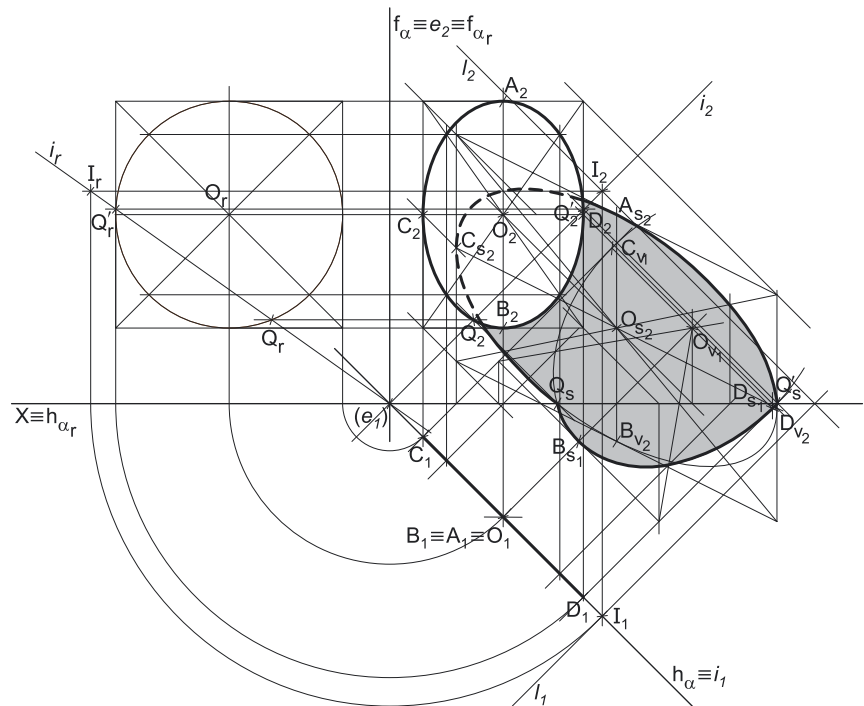
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\alpha$  (o plano vertical que contém a figura), pelos seus traços. O plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\alpha$ ) passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**). A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

*Determinação das projeções do círculo:*

O plano que contém o círculo (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o círculo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do círculo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por rebater o plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) – tem-se, imediatamente  $f_\alpha \equiv e_2 \equiv f_{\alpha r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (planos ortogonais a  $f_\alpha$ ), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.



Em seguida, rebateu-se o ponto **O**, o que nos permitiu determinar  $O_r$ . Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em rebatimento, em verdadeira grandeza. A projeção horizontal do círculo reduzir-se-á a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal. O mesmo já não acontece com a projeção frontal do círculo, que será uma **elipse**.

Assim, e atendendo a que uma **elipse** é uma curva de erro, é necessário ter em conta que o seu desenho requer alguns cuidados particulares, nomeadamente um mínimo de **oito pontos** e, se possível, os dois eixos e o paralelogramo envolvente. Sublinha-se que entre a circunferência em verdadeira grandeza e a sua transformada (a elipse que resulta da sua projeção) existe uma relação homológica, cujo eixo é a charneira do rebatimento ( $f_\alpha$ ). Assim, para se determinarem todos os elementos que nos permitem desenhar a **elipse** (que é a projeção frontal do círculo) com alguma precisão, inscreveu-se a circunferência (em rebatimento) num quadrado de lados paralelos ao eixo de homologia (o traço frontal do plano  $\alpha$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se as medianas e as diagonais do quadrado (em rebatimento) – note que as medianas do quadrado são, de forma imediata, dois dos diâmetros do círculo. Por outro lado, os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado dão-nos, imediatamente, os extremos dos dois eixos das elipses. Assim, a mediana **[AB]** (a mediana do quadrado que é paralela a  $f_{\alpha}$ ) é o diâmetro do círculo que não apresenta deformação em projeção frontal (por ser paralelo à charneira) – a sua projeção frontal será o eixo maior da elipse. Já a mediana **[CD]**, do quadrado (a mediana do quadrado que é perpendicular a  $f_{\alpha}$ ), é o diâmetro do círculo que apresentará a deformação máxima (por ser perpendicular à charneira), pelo que a sua projeção frontal será o eixo menor da elipse.

Para desenhar a projeção frontal do círculo há que, em primeiro lugar, determinar a projeção frontal do quadrado. Nesse sentido, inverteu-se o rebatimento dos vértices do quadrado (que não se identificaram, para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações) e construiu-se, de forma imediata, o **retângulo** que é a **projeção frontal do quadrado**.

A **projeção horizontal do quadrado** reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano (pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal) – o segmento de reta **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** é a projeção horizontal do diâmetro horizontal (de nível) do círculo (o diâmetro do círculo que é perpendicular a  $f_{\alpha}$ ). Nesse sentido, o segmento de reta **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** é, também, a projeção horizontal do quadrado e é, igualmente, a **projeção horizontal do próprio círculo**.

Em projeção frontal, desenharam-se as medianas **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>]** e **[C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]** do retângulo, passando por **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) e paralelas aos lados correspondentes do retângulo – aquelas medianas são as projeções frontais das medianas correspondentes do quadrado. Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções frontais dos pontos **A**, **B**, **C** e **D** (**A<sub>2</sub>**, **B<sub>2</sub>**, **C<sub>2</sub>** e **D<sub>2</sub>**, respetivamente), que são, de forma imediata, **quatro pontos** para o desenho da elipse – os **quatro pontos** nos quais a elipse será tangente aos lados do retângulo. Nesse sentido, **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>]** é o **eixo maior** da elipse e **[C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]** é o **eixo menor** da elipse.

Tendo em conta que já temos **quatro pontos** para o desenho da elipse, bem como os seus dois eixos e, ainda, o retângulo envolvente, ainda nos faltam outros **quatro pontos** da curva, para ser possível um desenho relativamente preciso (à mão livre) da mesma. Esses quatro pontos são os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado.

Nesse sentido, desenharam-se as diagonais do retângulo (que são as projeções frontais das diagonais do quadrado) e transportaram-se, para as diagonais do retângulo, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado (através de perpendiculares à charneira), o que nos permitiu determinar mais **quatro pontos** da elipse.

A partir dos **oito pontos** determinados, desenhou-se a elipse que é a projeção frontal do círculo, atendendo às situações de tangência da elipse aos lados do retângulo (e que forma atrás referidas).

*Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:*

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo **X**).

Nesse sentido, definiu-se o **plano luz/sombra passante** na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l** está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura) – a reta **i**.

Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **i** é necessariamente uma **reta oblíqua passante**, pois pertence a um plano passante (o **plano luz/sombra passante**). Assim, já temos um ponto para definir a reta **i** – o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que não se identificou e é o ponto de concorrência dos traços do plano  $\alpha$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta **i**. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano  $\alpha$  – o ponto **I**, que foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal (pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante frontal). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i** – a reta **i** está definida por dois pontos (o ponto **I** e o ponto de concorrência dos traços do plano  $\alpha$ ).

Tendo em conta que a projeção frontal da reta **i** (**i<sub>2</sub>**) corta a elipse (que é a projeção frontal do círculo), é possível concluir, de forma imediata, que a sombra do círculo nos planos de projeção admite pontos de quebra. Nesse sentido, é necessário determinar, de forma rigorosa, os pontos em que a reta **i** corta a circunferência que delimita o círculo – as sombras desses pontos serão, então, os pontos de quebra da sombra da circunferência. Tendo em conta que a projeção frontal do círculo é uma **elipse** (que foi desenhada à mão livre e, por isso mesmo, não tem um desenho rigoroso), não é possível determinar esses pontos a partir dos pontos em que a reta **i<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **i**) corta a elipse (a projeção frontal do círculo). Assim, há que resolver esta situação em rebatimento – no rebatimento efetuado para a construção da projeção frontal do círculo.

Assim, rebateu-se o ponto **I**, o que nos permitiu determinar **I<sub>r</sub>**. Em seguida, desenhou-se a reta **i<sub>r</sub>** (a reta **i** em rebatimento) – a reta **i<sub>r</sub>** está definida por dois pontos (o ponto **I<sub>r</sub>** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que é fixo, pois situa-se na charneira do rebatimento).

A reta **i<sub>r</sub>** é secante à circunferência nos pontos **Q<sub>r</sub>** e **Q'<sub>r</sub>**, pelo que já é possível identificar as partes do círculo que produzem sombra em cada um dos planos de projeção. O **arco maior QQ'** da circunferência (o arco **QAQ'**) produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é um segmento de elipse, pois o círculo não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. O **arco menor QQ'** da circunferência (o arco **QBQ'**) produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é outro segmento de elipse, pois o círculo também não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Para desenhar esses dois segmentos de elipse é necessário recorrer ao quadrado (de lados paralelos aos planos de projeção) em que se inscreveu a circunferência (para se construir a projeção frontal do círculo).

Por outro lado, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **Q** e **Q'** (não se determinaram as suas projeções horizontais, por não serem necessárias). Em seguida, pelas projeções frontais dos pontos **Q** e **Q'** (**Q<sub>2</sub>** e **Q'<sub>2</sub>**, respetivamente), conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que passam por aqueles pontos e determinaram-se as suas sombras, no eixo **X** – **Q<sub>s</sub>** e **Q'<sub>s</sub>**. O segmento de reta **[Q<sub>s</sub>Q'<sub>s</sub>]** é a linha de quebra da sombra do círculo.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). Como atrás se referiu, a parte do círculo que produz sombra no **SPFS** é o arco **QAQ'**.

Para determinar a sombra do arco **QAQ'** (que é, na realidade, a maior parte da circunferência), optou-se por determinar a sombra do círculo no Plano Frontal de Projeção, ou seja, optou-se por desenhar a **elipse completa** que é a sombra do círculo no Plano Frontal de Projeção (ainda que parte dessa sombra seja virtual). Nesse sentido, determinou-se a sombra do quadrado circunscrito à circunferência no Plano Frontal de Projeção, para o que foi necessário determinar a sombra do ponto **O** no Plano Frontal de Projeção – **O<sub>s2</sub>** é a sombra do ponto **O** no Plano Frontal de Projeção, é uma sombra real e situa-se no **SPFS**.

Para determinar a sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção, determinaram-se as sombras no Plano Frontal de Projeção dos seus quatro vértices (que não se identificaram). Note que o quadrado tem lados (e uma mediana) verticais, que são paralelos ao Plano Frontal de Projeção – assim, as suas sombras no Plano Frontal de Projeção são igualmente verticais. Estes procedimentos permitiram-nos desenhar a sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção, determinando-se, igualmente, as sombras das suas medianas e diagonais. Note que parte da sombra do quadrado que se determinou se situa no **SPFI** (é uma sombra virtual). O segmento [**A<sub>s2</sub>B<sub>v2</sub>**] é a sombra da mediana vertical do quadrado (e tem uma parte virtual). O segmento [**C<sub>s2</sub>D<sub>v2</sub>**] é a sombra da mediana horizontal (de nível) do quadrado (e também tem uma parte virtual).

Os pontos **A<sub>s2</sub>**, **B<sub>v2</sub>**, **C<sub>s2</sub>** e **D<sub>v2</sub>** são imediatamente, **quatro pontos** da elipse. Os dois pontos de quebra (**Q<sub>s</sub>** e **Q'<sub>s</sub>**) são mais **dois pontos** da elipse. Por fim, transportaram-se, para o paralelogramo (que é a sombra do quadrado), os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado, a partir das suas projeções horizontais, o que nos permitiu determinar mais **quatro pontos** da elipse.

Já temos um total de **dez pontos** para desenharmos a elipse – esses dez pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva é tangente aos lados do paralelogramo nos pontos **A<sub>s2</sub>**, **B<sub>v2</sub>**, **C<sub>s2</sub>** e **D<sub>s2</sub>**. Tenha em conta que a parte da elipse que se situa para baixo do eixo **X** (para baixo do segmento [**Q<sub>s</sub>Q'<sub>s</sub>**]) se refere a uma **sombra virtual** – a necessidade do desenho desta parte da elipse foi, apenas, o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através dela é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivesse desenhado esta parte da curva, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afectada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é outro segmento de uma **elipse**, que é outra curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer, mais uma vez, um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). Como atrás se referiu, a parte do círculo que produz sombra no **SPHA** é o arco **QBQ'**.

Para determinar a sombra do arco **QBQ'**, determinou-se a sombra (no Plano Horizontal de Projeção) da parte correspondente do quadrado circunscrito à circunferência – a parte correspondente do quadrado é um «meio quadrado», cujo lado superior é a mediana [**CD**]. Nesse sentido, determinou-se a sombra do ponto **O** no Plano Horizontal de Projeção – **O<sub>v1</sub>** é a sombra do ponto **O** no Plano Horizontal de Projeção, é uma sombra virtual e situa-se no **SPHP**. O «meio quadrado» tem lados (e a parte correspondente de uma mediana) verticais – as suas sombras no Plano Horizontal de Projeção estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos (têm a direção da direção convencional da luz, em projeção horizontal). O «meio quadrado» tem lados horizontais (de nível), que são paralelos ao Plano Horizontal de Projeção – assim, as suas sombras no Plano Horizontal de Projeção são igualmente horizontais (de nível). Estes raciocínios permitiram-nos desenhar a sombra do «meio quadrado» em que se inscreve o arco **QBQ'**, bem como as partes correspondentes das sombras das suas medianas e diagonais. Note que parte da sombra do «meio quadrado» que se determinou se situa no **SPHP** (é uma sombra virtual). O segmento [**O<sub>v1</sub>B<sub>s1</sub>**] é a sombra da mediana vertical do «meio quadrado» (e tem uma parte virtual). O segmento [**C<sub>v1</sub>D<sub>s1</sub>**] é a sombra do lado superior do «meio quadrado» (e também tem uma parte virtual). Note que a sombra do «meio quadrado» é um retângulo.

Os pontos **B<sub>s1</sub>**, **C<sub>v1</sub>** e **D<sub>s1</sub>** são imediatamente, **três pontos** do segmento de elipse. Os dois pontos de quebra (**Q<sub>s</sub>** e **Q'<sub>s</sub>**) são mais **dois pontos** do segmento da elipse. Por fim, desenharam-se as sombras das partes correspondentes das sombras das diagonais do «meio quadrado» e transportaram-se, para aquelas, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado, a partir das suas projeções horizontais, o que nos permitiu determinar mais **dois pontos** do segmento de elipse.

Já temos um total de **sete pontos** para desenharmos o segmento de elipse – esses sete pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva é tangente aos lados do retângulo nos pontos **B<sub>s1</sub>**, **C<sub>v1</sub>** e **D<sub>s1</sub>**. Tenha em conta que o troço de elipse que se situa para cima do eixo **X** (para cima do segmento [**Q<sub>s</sub>Q'<sub>s</sub>**]) se refere a uma **sombra virtual** – a necessidade deste troço foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através dele é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivesse desenhado este troço, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

A sombra projetada do círculo nos planos de projeção é, assim, uma figura com duas partes elípticas – as duas partes atrás referidas, que têm, em comum, o segmento de reta [**Q<sub>s</sub>Q'<sub>s</sub>**]. Note que, no contorno da sombra, se atendeu às situações de invisibilidades da sombra – a parte da sombra que está oculta pelo próprio círculo (em projeção frontal). Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do círculo com uma **mancha clara e uniforme**, em ambas as projeções – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse), representaram-se a **leve**.

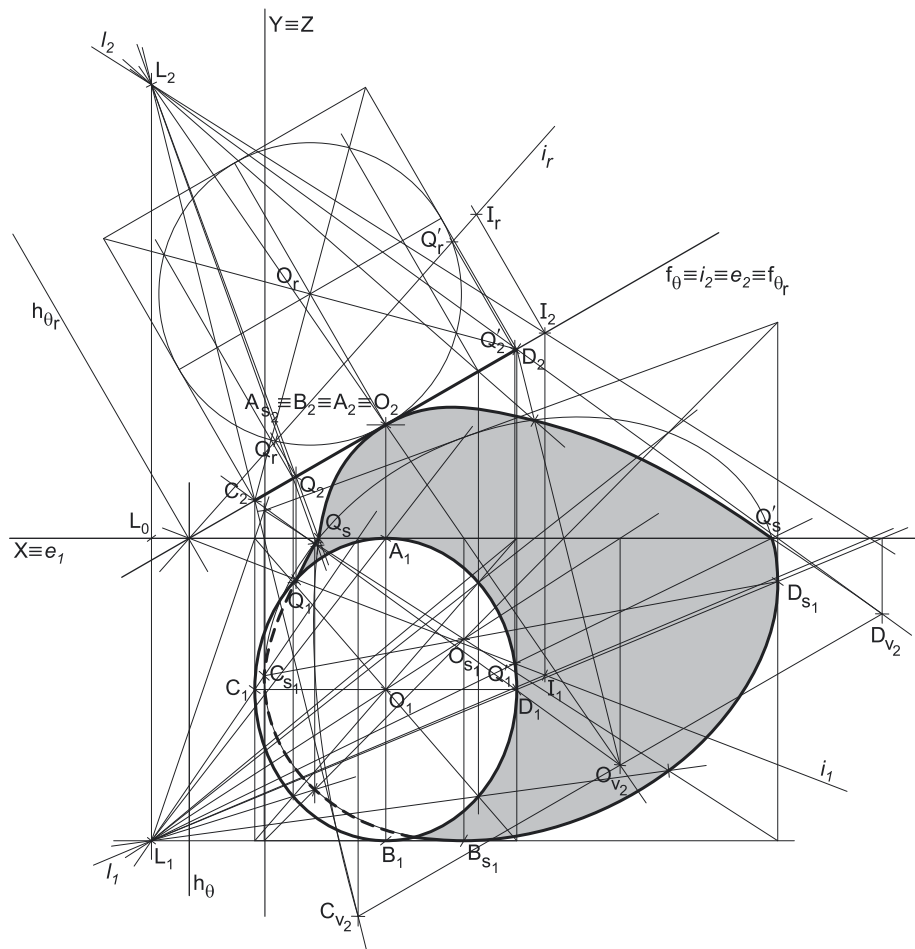
(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o círculo, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 861.



### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\theta$ , e os seus traços, em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados e pertencente ao plano  $\theta$ . O plano  $\theta$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ) se situa sobre o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ). Os dados permitiram-nos, ainda, representar o ponto **L** (o foco luminoso) pelas suas projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do círculo:

O plano que contém o círculo (o plano  $\theta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o círculo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do círculo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por rebater o plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ) – tem-se, imediatamente  $f_\theta \equiv e_2 \equiv f_{0r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos de topo (planos ortogonais a  $f_\theta$ ).

Em seguida, rebateu-se o ponto **O**, em função do seu afastamento (que é o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O**), sobre a qual se mediu o afastamento do ponto **O** (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**), o que nos permitiu determinar  $O_r$ . O círculo é tangente ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o seu raio é igual ao afastamento do ponto **O**. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 4 cm de raio (o afastamento do ponto **O**), desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em rebatimento, em verdadeira grandeza. Note que a circunferência é tangente ao traço frontal do plano  $\theta$  em rebatimento ( $f_{0r}$ ). A projeção frontal do círculo reduzir-se-á a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. O mesmo já não acontece com a projeção horizontal do círculo, que será uma **elipse**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, e atendendo a que uma **elipse** é uma curva de erro, é necessário ter em conta que o seu desenho requer alguns cuidados particulares, nomeadamente um mínimo de **oito pontos** e, se possível, os dois eixos e o paralelogramo envolvente. Sublinha-se que entre a circunferência em verdadeira grandeza e a sua transformada (a elipse que resulta da sua **projeção horizontal**) existe uma relação homológica, cujo eixo é o **traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ )**. Assim, para se determinarem todos os elementos que nos permitem desenhar a **elipse** (que é a projeção horizontal do círculo) com alguma precisão, inscreveu-se a circunferência (em rebatimento) num quadrado de lados paralelos ao eixo de homologia (o **traço horizontal do plano  $\theta$  em rebatimento –  $h_{\theta r}$** ). Note que um dos lados desse quadrado está sobre o traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), pois o círculo é tangente ao Plano Frontal de Projeção.

Em seguida, desenharam-se as medianas e as diagonais do quadrado (em rebatimento) – note que as medianas do quadrado são, de forma imediata, dois dos diâmetros do círculo. Por outro lado, os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado dão-nos, imediatamente, os extremos dos dois eixos das elipses. Assim, a mediana **[AB]** (a mediana do quadrado que é paralela a  $h_\theta$ ) é o diâmetro do círculo que não apresenta deformação em projeção horizontal (por ser paralelo ao eixo de homologia) – a sua projeção horizontal será o **eixo maior** da elipse. Já a mediana **[CD]**, do quadrado (a mediana do quadrado que é perpendicular a  $h_\theta$ ), é o diâmetro do círculo que apresentará a deformação máxima (por ser perpendicular ao eixo de homologia), pelo que a sua projeção frontal será o **eixo menor** da elipse.

Para desenhar a projeção horizontal do círculo há que, em primeiro lugar, determinar a projeção horizontal do quadrado. Nesse sentido, inverteu-se o rebatimento dos vértices do quadrado (que não se identificaram, para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), em função dos respetivos afastamentos, e construiu-se, de forma imediata, o **retângulo** que é a **projeção horizontal do quadrado**.

A **projeção frontal do quadrado** reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano (pois o plano  $\theta$  é um plano projetante horizontal) – o segmento de reta **[C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]** é a projeção frontal do diâmetro frontal (de frente) do círculo (o diâmetro do círculo que é perpendicular a  $h_\theta$ ). Nesse sentido, o segmento de reta **[C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]** é, também, a projeção frontal do quadrado e é, igualmente, a **projeção frontal do próprio círculo**.

Em projeção horizontal, desenharam-se as medianas **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>]** e **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** do retângulo, passando por **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) e paralelas aos lados correspondentes do retângulo – aquelas medianas são as projeções horizontais das medianas correspondentes do quadrado. Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções horizontais dos pontos **A, B, C e D** (**A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> e D<sub>1</sub>**, respetivamente), que são, de forma imediata, **quatro pontos** para o desenho da elipse – os **quatro pontos** nos quais a elipse será tangente aos lados do retângulo. Nesse sentido, **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>]** é o **eixo maior** da elipse e **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** é o **eixo menor** da elipse.

Tendo em conta que já temos **quatro pontos** para o desenho da elipse, bem como os seus dois eixos e, ainda, o retângulo envolvente, ainda nos faltam outros **quatro pontos** da curva, para ser possível um desenho relativamente preciso (à mão livre) da mesma. Esses quatro pontos são aqueles em que a circunferência corta as diagonais do quadrado.

Nesse sentido, recorrendo às perpendiculares à charneira que passam por aqueles pontos em rebatimento, determinaram-se as suas projeções frontais (que não se identificaram), que estão sobre  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ), pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal. Em seguida, desenharam-se as diagonais do retângulo (que são as projeções horizontais das diagonais do quadrado). Por fim, recorrendo às linhas de chamada daqueles pontos, determinaram-se as suas projeções horizontais (que também não se identificaram), sobre as projeções horizontais das diagonais do quadrado a que pertencem (que são, afinal, as diagonais do retângulo), o que nos permitiu determinar mais **quatro pontos** da elipse.

A partir dos **oito pontos** determinados, desenhou-se a elipse que é a projeção horizontal do círculo, atendendo às situações de tangência da elipse aos lados do retângulo (e que forma atrás referidas).

### *Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:*

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo **X**).

Nesse sentido, definiu-se o **plano luz/sombra passante** na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l** está definido por dois pontos (o foco luminoso **L** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\theta$  (o plano que contém a figura) – a reta **i**.

Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **i** é necessariamente uma **reta oblíqua passante**, pois pertence a um plano passante (o **plano luz/sombra passante**). Assim, já temos um ponto para definir a reta **i** – o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que não se identificou e é o ponto de concorrência dos traços do plano  $\theta$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta **i**. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com plano  $\theta$  – o ponto **I**, que foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção frontal (pois o plano  $\theta$  é um plano projetante frontal). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i** – a reta **i** está definida por dois pontos (o ponto **I** e o ponto de concorrência dos traços do plano  $\theta$ ).

Tendo em conta que a projeção horizontal da reta **i** (**i<sub>1</sub>**) corta a elipse (que é a projeção horizontal do círculo), é possível concluir, de forma imediata, que a sombra do círculo nos planos de projeção admite pontos de quebra. Nesse sentido, é necessário determinar, de forma rigorosa, os pontos em que a reta **i** corta a circunferência que delimita o círculo – as sombras desses pontos serão, então, os pontos de quebra da sombra da circunferência. Tendo em conta que a projeção horizontal do círculo é uma **elipse** (que foi desenhada à mão livre e, por isso mesmo, não tem um desenho rigoroso), não é possível determinar esses pontos a partir dos pontos em que a reta **i<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **i**) corta a elipse (a projeção horizontal do círculo). Assim, há que resolver esta situação em rebatimento – no rebatimento efetuado para a construção da projeção horizontal do círculo.

Assim, rebateu-se o ponto **I** (em função do seu afastamento, medido na perpendicular à charneira que passa por **I<sub>2</sub>**), o que nos permitiu determinar **I<sub>r</sub>**. Em seguida, desenhou-se a reta **i<sub>r</sub>** (a reta **i** em rebatimento) – a reta **i<sub>r</sub>** está definida por dois pontos (o ponto **I<sub>r</sub>** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que é fixo, pois situa-se na charneira do rebatimento).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $i_r$  é secante à circunferência nos pontos  $Q_r$  e  $Q'_r$ , pelo que já é possível identificar as partes do círculo que produzem sombra em cada um dos planos de projecção. O **arco maior  $QQ'$**  da circunferência (o arco  $QBQ'$ ) produz sombra no Plano Horizontal de Projecção (no **SPHA**) – essa sombra é um segmento de elipse, pois o círculo não é paralelo ao Plano Horizontal de Projecção. O **arco menor  $QQ'$**  da circunferência (o arco  $QAQ'$ ) produz sombra no Plano Frontal de Projecção (no **SPFS**) – essa sombra é outro segmento de elipse, pois o círculo também não é paralelo ao Plano Frontal de Projecção. Para desenhar esses dois segmentos de elipse é necessário recorrer ao quadrado (de lados paralelos aos planos de projecção) em que se inscreveu a circunferência (para se construir a projecção horizontal do círculo).

Por outro lado, inverteu-se o eb do plano  $\theta$ , de forma a ser possível determinar as projecções dos pontos  $Q$  e  $Q'$ , que se situam sobre as projecções homónimas da reta  $i$ . Em seguida, pelos pontos  $Q$  e  $Q'$  conduziram-se os raios luminosos que por eles passam e determinaram-se as suas sombras, que se situam no eixo  $X - Q_s$  e  $Q'_s$ . O segmento de reta  $[Q_s Q'_s]$  é a linha de quebra da sombra do círculo.

*Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projecção:*

A **sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projecção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). Como atrás se referiu, a parte do círculo que produz sombra no **SPHA** é o arco  $QBQ'$ .

Para determinar a sombra do arco  $QBQ'$ , optou-se por determinar a sombra da semicircunferência  $CBD$  no Plano Horizontal de Projecção – note que aquela semicircunferência corresponde, na realidade, à parte maior do arco que produz sombra no **SPHA**. Nesse sentido, e atendendo a que aquela semicircunferência se inscreve num «meio quadrado» (metade do quadrado necessário à construção da projecção horizontal do círculo), determinou-se a sombra desse «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projecção, para o que foi necessário determinar a sombra do ponto  $O$  no Plano Horizontal de Projecção –  $O_{s1}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Horizontal de Projecção, é uma sombra real e situa-se no **SPHA**.

Para determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projecção, determinaram-se as sombras no Plano Horizontal de Projecção dos seus quatro vértices – os pontos  $C$  e  $D$  são os seus vértices de menor afastamento mas não se identificaram os seus vértices de maior afastamento). Note que o «meio quadrado» tem dois lados (e a parte correspondente de uma mediana) de topo, que são paralelos ao Plano Horizontal de Projecção – assim, as suas sombras no Plano Horizontal de Projecção são igualmente de topo. Estes procedimentos permitiram-nos desenhar a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projecção (que é um trapézio), determinando-se, igualmente, as sombras das suas medianas e diagonais. O segmento  $[O_{s1} B_{s1}]$  é a sombra da mediana de topo do «meio quadrado» O segmento  $[C_{s1} D_{s1}]$  é a sombra do lado de menor afastamento do «meio quadrado».

Os pontos  $B_{s1}$ ,  $C_{s1}$  e  $D_{s1}$  são imediatamente, **três pontos** da elipse. Os dois pontos de quebra ( $Q_s$  e  $Q'_s$ ) são mais **dois pontos** da elipse. Por fim, transportaram-se, para o trapézio (que é a sombra do quadrado), os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado, a partir das suas projecções frontais (com o recurso às projecções frontais dos raios luminosos que por eles passam), o que nos permitiu determinar mais **dois pontos** da elipse.

Já temos um total de **sete pontos** para desenharmos o segmento de elipse – esses sete pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva é tangente aos lados do trapézio nos pontos  $B_{s1}$ ,  $C_{s1}$  e  $D_{s1}$ .

*Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projecção:*

A **sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projecção** (no **SPFS**) é outro segmento de uma **elipse**, que é outra curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer, mais uma vez, um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). Como atrás se referiu, a parte do círculo que produz sombra no **SPFS** é o arco  $QAQ'$ .

Para determinar a sombra do arco  $QAQ'$ , determinou-se a sombra (no Plano Frontal de Projecção) da parte correspondente do quadrado circunscrito à circunferência – a parte correspondente do quadrado é um «meio quadrado», cujo lado de maior afastamento é a mediana  $[CD]$  e cujo lado de menor afastamento está contido em  $f_0$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Nesse sentido, determinou-se a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projecção –  $O_{v2}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projecção, é uma sombra virtual e situa-se no **SPFI**. O «meio quadrado» tem lados (e a parte correspondente de uma mediana) de topo – as suas sombras no Plano Frontal de Projecção estão sobre as projecções frontais dos raios luminosos que passam por qualquer ponto daqueles segmentos de reta. O «meio quadrado» tem lados frontais (de frente), que são paralelos ao Plano Frontal de Projecção – assim, as suas sombras no Plano Frontal de Projecção são igualmente frontais (de frente). Estes raciocínios permitiram-nos desenhar a sombra do «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $QAQ'$ , bem como as partes correspondentes das sombras das suas medianas e diagonais. Note que parte da sombra do «meio quadrado» que se determinou se situa no **SPFI** (é uma sombra virtual). O segmento  $[O_{v2} A_{s2}]$  é a sombra da mediana de topo do «meio quadrado» (e tem uma parte virtual). O segmento  $[C_{v2} D_{v2}]$  é a sombra do lado de maior afastamento do «meio quadrado» (que é uma sombra virtual). Note que o ponto  $A$  (o ponto em que o círculo é tangente ao Plano Frontal de Projecção) é um ponto do Plano Frontal de Projecção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s2} \equiv A_2$ .

Os pontos  $A_{s2}$ ,  $C_{v2}$  e  $D_{v2}$  são, imediatamente, **três pontos** do segmento de elipse. Os dois pontos de quebra ( $Q_s$  e  $Q'_s$ ) são mais **dois pontos** do segmento da elipse. Por fim, desenharam-se as sombras das partes correspondentes das sombras das diagonais do «meio quadrado» e transportaram-se, para aquelas, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado, a partir das suas projecções frontais, o que nos permitiu determinar mais **dois pontos** do segmento de elipse.

Já temos um total de **sete pontos** para desenharmos o segmento de elipse – esses sete pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Tenha em conta que os dois troços de elipse que se situam para baixo do eixo  $X$  (para baixo do segmento  $[Q_s Q'_s]$ ) se referem a uma **sombra virtual** – a necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afectada de erros de execução.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A sombra projetada do círculo nos planos de projeção é, assim, uma figura com duas partes elípticas – as duas partes atrás referidas, que têm, em comum, o segmento de reta  $[Q_s Q'_s]$ . Note que, no contorno da sombra, se atendeu às situações de invisibilidades da sombra – a parte da sombra que está oculta pelo próprio círculo (em projeção horizontal). Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do círculo com uma **mancha clara e uniforme**, em ambas as projeções – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\theta$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\theta$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o círculo, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 862.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a figura) pelos seus traços. O plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que os seus traços passam pelas projeções homónimas do ponto **O**. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do círculo:

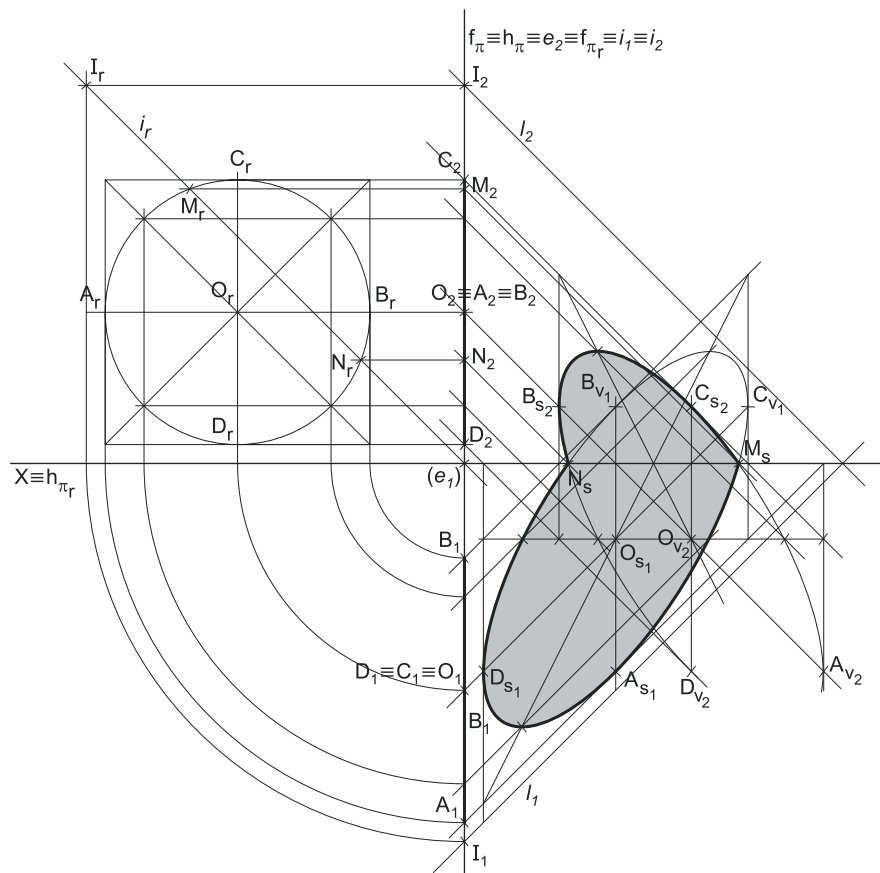
O plano que contém o círculo (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o círculo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo – tendo em conta que ambas as projeções sofrem a redução máxima, as duas projeções do círculo reduzem-se a segmentos de reta sobre os traços homónimos do plano  $\pi$ .

Assim, a **projeção horizontal do círculo** é um segmento de reta com 7 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) de que **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) é o seu ponto médio – a projeção horizontal do círculo corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a **projeção frontal do círculo** é um segmento de reta com 7 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) de que **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) é o seu ponto médio – a projeção frontal do círculo corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.

#### Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo **X**).

Nesse sentido, definiu-se o **plano luz/sombra passante** na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l** está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\pi$  (o plano que contém a figura) – a reta **i**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $i$  é necessariamente uma reta de perfil e é uma reta passante, pois pertence a um plano passante (o **plano luz/sombra passante**). Assim, já temos um ponto para definir a reta  $i$  – o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  (que não se identificou e é o ponto de concorrência dos traços do plano  $\pi$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta  $i$ . Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com plano  $\pi$  – o ponto  $I$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por dois pontos (o ponto  $I$  e o ponto de concorrência dos traços do plano  $\pi$ ).

Tento em conta que tanto o círculo como a reta  $i$  estão contidos num plano de perfil, as projeções das duas figuras não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível averiguar a posição da reta  $i$  em relação ao círculo. Assim, recorreu-se a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ), que se identificou em seguida – tem-se, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, rebateram-se os pontos  $O$  e  $I$ , o que nos permitiu determinar  $O_r$  e  $I_r$ . Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em rebatimento, em verdadeira grandeza. Em seguida, desenhou-se a reta  $i_r$  (a reta  $i$  em rebatimento) – a reta  $i_r$  está definida por dois pontos (o ponto  $I_r$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é fixo, pois situa-se na charneira do rebatimento).

A reta  $i_r$  é secante à circunferência nos pontos  $M_r$  e  $N_r$ , pelo que é possível concluir que o círculo produz sombra nos dois planos de projeção. O **arco maior  $\widehat{MN}$**  da circunferência produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é um segmento de elipse, pois o círculo não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O **arco menor  $\widehat{MN}$**  da circunferência produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é um segmento de elipse, pois o círculo não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Para desenhar esses dois segmentos de elipse é necessário inscrever a circunferência num quadrado de lados paralelos aos planos de projeção – lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ . Assim, efetuou-se a inscrição da circunferência num quadrado de lados paralelos aos traços do plano em rebatimento.

Em seguida, desenharam-se as medianas e as diagonais do quadrado, em rebatimento, e identificaram-se os pontos em que as medianas do quadrado se apoiam nos lados da figura – os pontos  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$  e  $D_r$ . Inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .  $[AB]$  é o diâmetro de topo do círculo e  $[CD]$  é o seu diâmetro vertical. Determinaram-se, ainda, as projeções frontais dos pontos  $M$  e  $N$  (não se determinaram as suas projeções horizontais, por não serem necessárias).

Pelas projeções frontais dos pontos  $M$  e  $N$  ( $M_2$  e  $N_2$ , respetivamente), conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que passam por aqueles pontos e determinaram-se as suas sombras, no eixo  $X$  –  $M_s$  e  $N_s$ . O segmento de reta  $[M_s N_s]$  é a linha de quebra da sombra do círculo.

*Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). Como atrás se referiu, a parte do círculo que produz sombra no **SPFS** é o arco **MCN**.

Para determinar a sombra do arco **MCN**, determinou-se a sombra (no Plano Frontal de Projeção) da parte correspondente do quadrado circunscrito à circunferência, para o que foi necessário determinar a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção –  $O_{v2}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção, é uma sombra virtual e situa-se no **SPFI**. O quadrado tem lados (e uma mediana) de topo – as suas sombras no Plano Frontal de Projeção estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos (têm a direção da direção convencional da luz, em projeção frontal). O quadrado tem lados (e uma mediana) verticais, que são paralelos ao Plano Frontal de Projeção – assim, as suas sombras no Plano Frontal de Projeção são igualmente verticais. Estes raciocínios permitiram-nos desenhar a sombra da parte do quadrado em que se inscreve o arco **MCN**, bem como as partes correspondentes das sombras das suas medianas e diagonais. Note que parte da sombra do quadrado que se determinou se situa no **SPFI** (é uma sombra virtual). O segmento  $[A_{v2} B_{s2}]$  é a sombra da mediana vertical do quadrado (e tem uma parte virtual). O segmento  $[C_{s2} D_{v2}]$  é a sombra da mediana de topo do quadrado (e também tem uma parte virtual).

Os pontos  $A_{v2}$ ,  $B_{s2}$ ,  $C_{s2}$  e  $D_{v2}$  são imediatamente, **quatro pontos** do segmento de elipse. Os dois pontos de quebra ( $M_s$  e  $N_s$ ) são mais **dois pontos** do segmento da elipse. Por fim, transportaram-se, para a sombra do paralelogramo, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado, a partir das suas projeções frontais, o que nos permitiu determinar mais **três pontos** do segmento de elipse.

Já temos um total de **nove pontos** para desenharmos o segmento de elipse – esses nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva é tangente aos lados do paralelogramo nos pontos  $A_{v2}$ ,  $B_{s2}$ ,  $C_{s2}$  e  $D_{v2}$ . Tenha em conta que os dois troços de elipse que se situam para baixo do eixo  $X$  (para baixo do segmento  $[M_s N_s]$ ) se referem a uma **sombra virtual** – a necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afectada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é outro segmento de uma **elipse**, que é outra curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer, mais uma vez, um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). Como atrás se referiu, a parte do círculo que produz sombra no **SPHA** é o arco **MAN**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para determinar a sombra do arco **MAN** (que é, na realidade, a maior parte da circunferência), optou-se por determinar a sombra do círculo no Plano Horizontal de Projeção, ou seja, optou-se por desenhar a **elipse completa** que é a sombra do círculo no Plano Horizontal de Projeção (ainda que parte dessa sombra seja virtual). Nesse sentido, determinou-se a sombra (no Plano Horizontal de Projeção) do quadrado circunscrito à circunferência, para o que foi necessário determinar a sombra do ponto **O** no Plano Horizontal de Projeção – **O<sub>s1</sub>**, é a sombra do ponto **O** no Plano Horizontal de Projeção, é uma sombra real e situa-se no **SPHA**.

O quadrado tem lados (e uma mediana) verticais – as suas sombras no Plano Horizontal de Projeção estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos (têm a direção da direção convencional da luz, em projeção horizontal). O quadrado tem lados (e uma mediana) de topo, que são paralelos ao Plano Horizontal de Projeção – assim, as suas sombras no Plano Horizontal de Projeção são igualmente de topo. Estes raciocínios permitiram-nos desenhar a sombra do quadrado em que se inscreve o arco **MAN**, bem como as sombras das suas medianas e diagonais. Note que parte da sombra do quadrado que se determinou se situa no **SPHP** (é uma sombra virtual). O segmento [**A<sub>s1</sub>B<sub>v1</sub>**] é a sombra da mediana de topo do quadrado (e tem uma parte virtual). O segmento [**C<sub>v1</sub>D<sub>s1</sub>**] é a sombra da mediana de topo do quadrado (e também tem uma parte virtual).

Os pontos **A<sub>s1</sub>**, **B<sub>v1</sub>**, **C<sub>v1</sub>** e **D<sub>s1</sub>** são imediatamente, **quatro pontos** da elipse. Os dois pontos de quebra (**M<sub>s</sub>** e **N<sub>s</sub>**) são mais **dois pontos** da elipse. Por fim, transportaram-se, para a sombra do paralelogramo, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado, a partir das suas projeções horizontais, o que nos permitiu determinar mais **quatro pontos** da elipse.

Já temos um total de **dez pontos** para desenharmos a elipse – esses dez pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva é tangente aos lados do paralelogramo nos pontos **A<sub>s1</sub>**, **B<sub>v1</sub>**, **C<sub>v1</sub>** e **D<sub>s1</sub>**. Tenha em conta que o troço da elipse que se situa para cima do eixo **X** (para cima do segmento [**M<sub>s</sub>N<sub>s</sub>**]) se refere a uma **sombra virtual** – a necessidade deste troço foi, apenas, o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através dele é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivesse desenhado esse troço, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afectada de erros de execução.

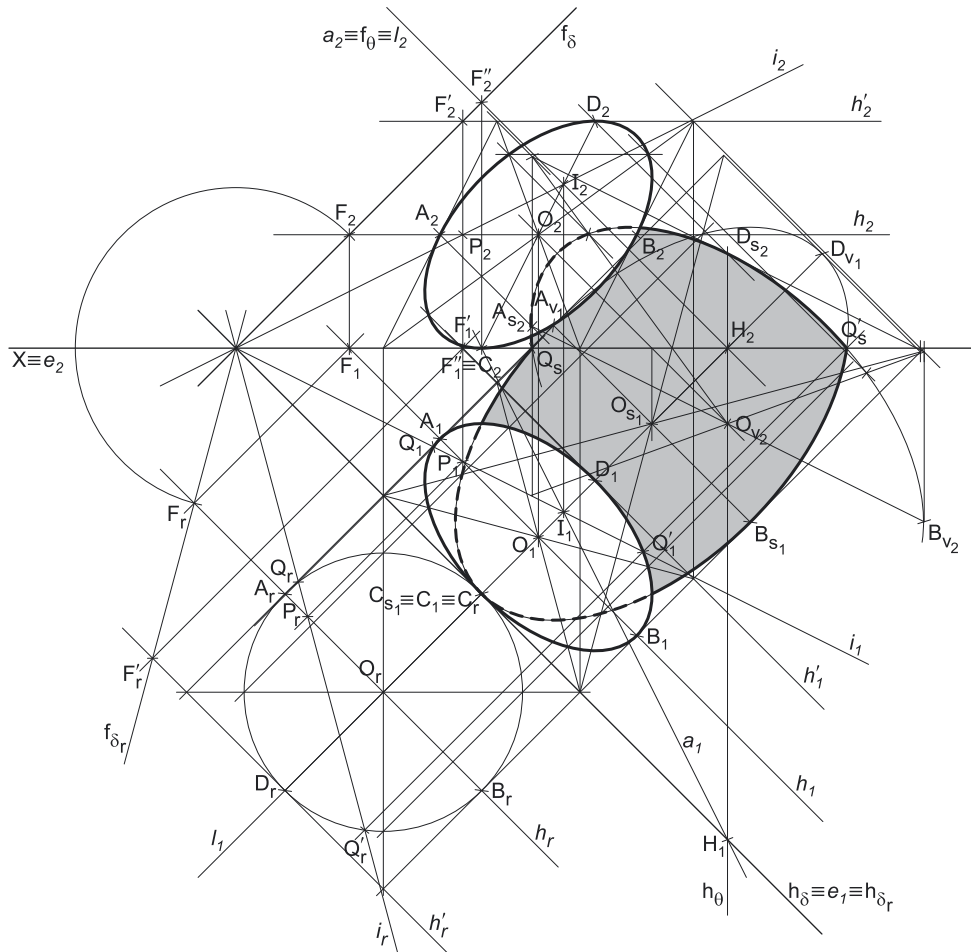
A sombra projetada do círculo nos planos de projeção é, assim, uma figura com duas partes elípticas – as duas partes atrás referidas, que têm, em comum, o segmento de reta [**M<sub>s</sub>N<sub>s</sub>**]. Uma vez que não existe qualquer invisibilidade (não há nenhuma parte da sombra que esteja oculta pelo círculo dado), preencheu-se a sombra do círculo com uma **mancha clara e uniforme**, em ambas as projeções – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o círculo, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

863.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\delta$ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano  $\delta$  tem os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ , pois é ortogonal ao  $\beta_{1/3}$  (planos ortogonais ao  $\beta_{1/3}$  têm os seus traços simétricos em relação ao eixo  $X$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $O$ , em função dos dados e pertencente ao plano.

O ponto  $O$ , porque pertence ao plano  $\delta$ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano**, em relação ao plano  $\delta$  (o ponto  $O$  tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano  $\delta$ ). Nesse sentido, recorreu-se a uma reta  $h$ , horizontal (de nível), pertencente ao plano  $\delta$  e com 3 cm de cota. A reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto  $F$ , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ). O ponto  $O$  é o ponto da reta  $h$  que tem 5 cm de afastamento.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do círculo:*

O plano que contém o círculo (o plano  $\delta$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o círculo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\delta$ , pelo rebatimento dos seus traços.

Nesse sentido, optou-se por rebater o plano  $\delta$  para o Plano Horizontal de Projeção. Começou-se por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $h_\delta \equiv e_1 \equiv h_{\delta r}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo  $X$ ). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_\delta$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\delta r}$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que é um ponto fixo (pois pertence à charneira). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto  $F$ , o traço frontal da reta  $h$ , que é um ponto de  $f_\delta$ . Para rebater o ponto  $F$  conduziu-se, por  $F_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto  $F$ ). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $F_2$  (a projeção frontal do ponto  $F$ ), desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $F_1$ , determinando-se  $F_r$  (o ponto  $F$  rebatido). Em seguida, desenhou-se  $f_{\delta r}$  (o traço horizontal do plano  $\delta$  rebatido), passando por  $F_r$  e concorrente com  $h_{\delta r}$  no eixo  $X$  (está definido por dois pontos).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

É agora necessário rebater o ponto  $O$ , que é o centro do círculo. Para tal, há que rebater a reta  $h$ , que é uma reta do plano  $\delta$  à qual o ponto  $O$  pertence. Começemos, então, por definir a reta  $h_r$  (a reta  $h$  em rebatimento). Para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h$  passa pelo ponto  $F$  (o seu traço frontal) e já temos o ponto  $F$  rebatido, pelo que já temos um ponto para definir a reta  $h_r$  – o ponto  $F_r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, já temos a direção (que é a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ , em rebatimento). Assim desenhou-se a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida), passando por  $F_r$  e paralela a  $h_{\delta r}$  – a reta  $h_r$  está definida por um ponto (o ponto  $F_r$ ) e por uma direção (é paralela a  $h_{\delta r}$ ). Finalmente, conduzindo, por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), determinou-se  $O_r$  sobre a reta  $h_r$ .

Atendendo a que o círculo é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, o círculo tem de ser tangente a  $h_{\delta}$  – em rebatimento, o círculo é tangente a  $h_{\delta r}$  (o traço horizontal do plano  $\delta$  em rebatimento). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $h_{\delta r}$ , desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em verdadeira grandeza, em rebatimento. Note que a circunferência é tangente a  $h_{\delta r}$  num ponto (que se situa no raio da circunferência que é perpendicular a  $h_{\delta r}$ ).

Em seguida, para se determinarem as duas projeções da figura, é necessário inverter o rebatimento do plano  $\delta$ . As **duas projeções** do círculo serão **elipses**. Assim, tratando-se de **duas elipses**, é necessário ter em conta que o desenho de cada uma requer alguns cuidados particulares, nomeadamente um mínimo de **oito pontos** e, se possível, os dois eixos (de cada uma) e o paralelogramo envolvente. Sublinha-se que entre a **circunferência em verdadeira grandeza** e a sua transformada (a elipse que resulta da sua **projeção horizontal**) existe uma relação homológica, cujo eixo é a charneira do rebatimento ( $h_{\delta}$ ). Assim, para se determinarem todos os elementos que nos permitem desenhar a **elipse** (que é a projeção horizontal do círculo) com alguma precisão, inscreveu-se a circunferência (em rebatimento) num quadrado de lados paralelos ao eixo de homologia (o traço horizontal do plano  $\delta$ ). Note que um dos lados do quadrado está contido em  $h_{\delta r}$ , pois a circunferência é tangente a  $h_{\delta r}$ .

Em seguida, desenharam-se as medianas e as diagonais do quadrado (em rebatimento) – os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado dão-nos, imediatamente, os extremos dos dois eixos da **elipse que é a projeção horizontal** do círculo. Nesse sentido, nomearam-se os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado –  $A_r$  e  $B_r$  são, em rebatimento, os extremos da mediana do quadrado que está contida na reta  $h_r$  (a mediana horizontal do quadrado), enquanto  $C_r$  e  $D_r$  são os extremos da mediana do quadrado que é perpendicular à reta  $h_r$ . Note que, atendendo a que as medianas  $[AB]$  e  $[CD]$  são perpendiculares entre si, e uma vez que a mediana  $[AB]$  está contida numa reta horizontal (a reta  $h$ ), a mediana  $[CD]$  está necessariamente contida numa reta de maior declive do plano  $\delta$ . Sublinha-se, ainda, que  $C$  é o ponto em que a circunferência é tangente a  $h_{\delta}$  (o traço horizontal do plano  $\delta$ ).

Assim, a mediana  $[AB]$  é o diâmetro cuja projeção horizontal é o **eixo maior da elipse que é a projeção horizontal** do círculo (por ser paralelo à charneira – não sofre qualquer deformação, em projeção horizontal), enquanto a mediana  $[CD]$  é o diâmetro cuja projeção horizontal é o **eixo menor da elipse que é a projeção horizontal** do círculo (por ser perpendicular à charneira do rebatimento – sofre a deformação máxima, em projeção horizontal).

No entanto, nenhuma destas medianas será, em projeção frontal, qualquer dos eixos da **elipse que é a projeção frontal do círculo**. De facto, para se determinarem as medianas que seriam os eixos da **elipse que é a projeção frontal do círculo**, seria necessário inscrever a circunferência num quadrado de lados paralelos ao traço frontal do plano ( $f_{\delta}$ ) que seria, nesse caso, o eixo da relação homológica entre a circunferência e a sua transformada (que é a projeção frontal da circunferência). Isso implicaria um acréscimo de traçados que não se consideram necessários nem justificáveis. Assim, a elipse que é a projeção frontal do círculo poderá ser construída a partir da projeção frontal do quadrado e de oito pontos da curva, mesmo sem o recurso aos dois eixos da elipse.

Para se desenharem as duas projeções do círculo há que, em primeiro lugar, determinar as duas projeções do quadrado. Um dos lados do quadrado (o seu lado inferior) está contido no traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_{\delta}$ ), pelo que as suas duas projeções se determinar de forma direta. O lado superior do quadrado está contido numa outra reta horizontal (de nível) – a reta  $h'$ . Nesse sentido, desenhou-se a reta  $h'_r$  (a reta  $h'$  em rebatimento) – para se determinarem as projeções do lado superior do quadrado, há que, em primeiro lugar, determinar as projeções da reta  $h'$ .

Para definirmos a reta  $h'$  (em projeções) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $h'$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\delta$ , pelo que já temos a sua direção – a direção das retas horizontais (de nível) do plano  $\delta$ . Falta-nos um ponto para definir a reta  $h'$  (em projeções). Nesse sentido, determinou-se o seu traço frontal em rebatimento – o ponto  $F'_r$  –  $F'_r$  é o ponto de concorrência da reta  $h'_r$  com  $f_{\delta r}$ . Em seguida, por  $F'_r$  (o ponto  $F'$  rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar  $F'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $F'$ ) no eixo  $X - F'_2$  (a projeção frontal do ponto  $F'$ ) situa-se necessariamente sobre  $f_{\delta}$ , pois o ponto  $F'$  é um ponto de  $f_{\delta}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $h'$  em projeções – a reta  $h'$ , em projeções, está definida por um ponto (o ponto  $F'$ ) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\delta$ ), o que nos permitiu desenhar as suas projeções.

Por fim, determinaram-se as projeções horizontais dos dois vértices superiores do quadrado (através das perpendiculares à charneira que por eles passam), sobre a projeção horizontal da reta  $h'$  ( $h'_1$ ) – as suas projeções frontais estão sobre a projeção frontal da reta  $h'$  ( $h'_2$ ). Por fim, a partir das duas projeções dos quatro vértices do quadrado, desenharam-se as suas duas projeções – a projeção horizontal do quadrado é um **retângulo** e a sua projeção frontal é um **paralelogramo**.

Em seguida, desenharam-se as diagonais do **retângulo que é a projeção horizontal do quadrado** (e que são as projeções horizontais das diagonais do quadrado), bem como as suas medianas (que são as projeções horizontais das medianas do quadrado). Note que as diagonais do retângulo se bissectam em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ). Por outro lado, os pontos em que as medianas do retângulo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, as projeções horizontais dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Assim,  $[A_1B_1]$  é o eixo maior da elipse e  $[C_1D_1]$  é o eixo menor da elipse. Já temos **quatro pontos da elipse que é a projeção horizontal do círculo**.

Por fim, transportaram-se, para as diagonais do retângulo, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado em rebatimento (através de perpendiculares à charneira), o que nos permitiu determinar mais **quatro pontos** da elipse. A partir dos **oito pontos** determinados, desenhou-se a elipse que é a projeção horizontal do círculo, atendendo às situações de tangência da elipse em relação aos lados do retângulo (a elipse é tangente aos lados do retângulo em  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, desenharam-se as diagonais do **paralelogramo que é a projeção frontal do quadrado** (e que são as projeções frontais das diagonais do quadrado), bem como as suas medianas (que são as projeções frontais das medianas do quadrado). Note que as diagonais do paralelogramo se bissectam em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ). Por outro lado, os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, as projeções frontais dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  ( $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ , respetivamente). Já temos, assim, **quatro pontos da elipse que é a projeção frontal do círculo**.

Por fim, transportaram-se, para as diagonais do paralelogramo, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado em rebatimento (a partir das suas projeções horizontais), o que nos permitiu determinar mais **quatro pontos** da elipse. A partir dos **oito pontos** determinados, desenhou-se a elipse que é a projeção frontal do círculo, atendendo às situações de tangência da elipse em relação aos lados do paralelogramo (a elipse é tangente aos lados do paralelogramo em  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ ).

*Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:*

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo  $X$ ).

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo  $X$  e o raio luminoso  $l$ , passante (concorrente com o eixo  $X$ ). O raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que não se identificou) e por uma direção (a direção convencional da luz). Por uma questão de economia de traçados, conduziu-se a projeção horizontal do raio luminoso  $l$  ( $l_1$ ) pela projeção horizontal do ponto  $O$  ( $O_1$ ). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\rho$  (o plano que contém a figura) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O plano  $\delta$  é um plano oblíquo e o plano luz/sombra passante é um plano passante, pelo que o ponto de concorrência dos traços do plano  $\delta$  (que não se identificou) é, imediatamente um ponto que pertence aos dois planos (é um ponto do eixo  $X$ , que é uma reta do plano passante). Já temos um ponto para definir a reta  $i$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta  $i$ .

Nesse sentido, determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\delta$  – o ponto  $I$ . Nem o raio luminoso  $l$  nem o plano  $\delta$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **2.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **3.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

1. Assim, conduziu-se, pelo raio luminoso  $l$ , o plano  $\theta$ , que é o plano projetante frontal da reta  $l$ .
2. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano  $\theta$  (o plano auxiliar) com o plano  $\delta$  (o plano dado) – a reta  $a$ . A reta  $a$  é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projeção).
3. O ponto de concorrência das retas  $l$  e  $a$  é o ponto de interseção da reta  $l$  com o plano  $\delta$  – o ponto  $I$ .

Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$ . A reta  $i$  está, assim, definida por dois pontos – o ponto  $I$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\delta$  (que não se identificou), os pontos que nos permitiram desenhar as duas projeções da reta  $i$ .

É possível constatar que a reta  $i$  é secante ao círculo, pelo que a sombra do círculo admite a existência de pontos de quebra. Estes, no entanto, não podem ser determinados diretamente em projeções, pois não é possível determinar pontos sobre uma curva de erro (uma elipse), que foi desenhada à mão livre. Tento em conta que tanto o círculo como a reta  $i$  estão contidos num plano oblíquo, há que recorrer a um processo geométrico auxiliar – optou-se por rebater a reta  $i$  para o rebatimento previamente efetuado do plano  $\delta$ .

Para definir a reta  $i$  em rebatimento (a reta  $i_r$ ) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $i$  é uma reta passante, que é concorrente com o eixo  $X$  no ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\delta$  – esse ponto é um ponto fixo (roda sobre si próprio), pois situa-se na charneira do rebatimento. Já temos um ponto para definir a reta  $i_r$  (a reta  $i$  em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto de concorrência da reta  $i$  com a reta  $h$  – o ponto  $P$ .

Em seguida, rebateu-se o ponto  $P$ . Para tal conduziu-se, por  $P_1$  (a projeção horizontal do ponto  $P$ ), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto em que a perpendicular à charneira interseca a reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) é  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido). Note que o ponto  $P$  é um ponto da reta  $h$ , pelo que  $P_r$  é um ponto da reta  $h_r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i_r$ . A reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) está definida por dois pontos – o ponto  $P_r$  e o ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\delta$  (que não se identificou e é um ponto fixo).

Assim, desenhou-se a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) e determinaram-se os pontos em que a reta  $i_r$  corta a circunferência, em rebatimento – os pontos  $Q_r$  e  $Q'_r$ .

Por fim, inverteu-se o rebatimento dos pontos  $Q_r$  e  $Q'_r$ , recorrendo às perpendiculares à charneira que por eles passam (e que correspondem aos planos de perfil que contêm os respetivos arcos do rebatimento) e determinaram-se as projeções horizontais dos pontos  $Q$  e  $Q'$  ( $Q_1$  e  $Q'_1$ , respetivamente), que se situam sobre a projeção horizontal da reta  $i$  ( $i_1$ ). Note que não se determinaram as projeções frontais dos pontos  $Q$  e  $Q'$ , por estas não serem necessárias. Por fim, pelas projeções horizontais dos pontos  $Q$  e  $Q'$  ( $Q_1$  e  $Q'_1$ , respetivamente), conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se as suas sombras ( $Q_s$  e  $Q'_s$ , respetivamente), que se situam no eixo  $X$  –  $Q_s$  e  $Q'_s$  são os pontos de quebra da sombra da circunferência. O segmento  $[Q_s Q'_s]$  e a linha de quebra da sombra do círculo.

A parte do círculo que se situa entre a reta  $i$  e o traço frontal do plano  $\delta$  ( $f_\delta$ ) produz sombra no **SPFS**. A parte do círculo que se situa entre a reta  $i$  e o traço horizontal do plano  $\delta$  ( $h_\delta$ ) produz sombra no **SPHA**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – é a sombra do arco  $\widehat{QDQ'}$ . Assim, o desenho (à mão livre) deste segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. Nesse sentido, optou-se por se determinar a sombra projetada, no Plano Frontal de Projeção, do «meio quadrado» em que parte daquele arco se inscreve.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras, no Plano Frontal de Projeção, do ponto **O** e dos vértices do «meio quadrado» – os dois vértices superiores do quadrado e os pontos **A** e **B**. Assim,  $O_{v2}$  é a sombra virtual do ponto **O** e situa-se no **SPFI**,  $A_{s2}$  é a sombra real do ponto **A** e situa-se no **SPFS** e  $B_{v2}$  é a sombra virtual do ponto **B** e situa-se no **SPFI**. Este procedimento permitiu-nos construir o paralelogramo que é a sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção. Determinou-se, ainda,  $D_{s2}$ , que é a sombra real do ponto **D** e se situa no **SPFS**.

$A_{s2}$ ,  $B_{v2}$  e  $D_{s2}$  são, imediatamente, três pontos do segmento de elipse, que é a sombra do círculo no Plano Frontal de Projeção.  $Q_s$  e  $Q'_s$  são mais dois pontos do segmento de elipse, pelo que já temos um total de **cinco pontos** para o desenho da curva.

No entanto, este número de pontos é ainda insuficiente para um desenho relativamente preciso (à mão livre) da curva. Nesse sentido, desenharam-se as partes correspondentes das sombras das diagonais do quadrado. Em seguida, transportou-se, para as sombras das diagonais do quadrado, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado. Este procedimento foi feito a partir das projeções frontais daqueles pontos, conduzindo, por eles, as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam. Com mais estes dois pontos, já temos um total de **sete pontos** para o desenho da curva, o que se considerou ser suficiente.

Assim, os **sete pontos** determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva é tangente aos lados do paralelogramo nos pontos  $A_{s2}$ ,  $B_{v2}$  e  $D_{s2}$ .

Tenha em conta que o arco  $\widehat{Q'_s B_{v2}}$  da elipse, porque se situa para baixo do eixo **X** (para baixo do segmento  $[Q_s Q'_s]$ ) se refere a uma **sombra virtual** – a necessidade deste troço da curva foi, apenas, o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através dele é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivesse desenhado este pequeno troço, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afectada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é outro segmento de uma **elipse**, que é, uma vez mais, uma curva de erro – é a sombra do arco  $\widehat{QCQ'}$ . Assim, o desenho (à mão livre) deste segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{QCQ'}$  (que é, na realidade, a maior parte da circunferência), optou-se por determinar a sombra do círculo no Plano Horizontal de Projeção, ou seja, optou-se por desenhar a **elipse completa** que é a sombra do círculo no Plano Horizontal de Projeção (ainda que parte dessa sombra seja virtual). Nesse sentido, determinou-se a sombra (no Plano Horizontal de Projeção) do quadrado circunscrito à circunferência, para o que foi necessário determinar a sombra do ponto **O** no Plano Horizontal de Projeção –  $O_{s1}$  é a sombra do ponto **O** no Plano Horizontal de Projeção, é uma sombra real e situa-se no **SPHA**.

A sombra do lado do quadrado que está contido no traço horizontal do plano está coincidente com esse mesmo lado. Nesse sentido, tem-se imediatamente  $C_{s1} \equiv C_1$ , pois o ponto **C** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, determinaram-se as sombras, no Plano Horizontal de Projeção, dos extremos do diâmetro  $[AB]$  e, ainda, do ponto **D**. Assim,  $A_{v1}$  é a sombra virtual do ponto **A** e situa-se no **SPHP**,  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto **B** e situa-se no **SPHA** e, por fim,  $D_{v1}$  é a sombra virtual do ponto **D** e situa-se no **SPHP**. Tendo em conta que o lado superior do quadrado é paralelo ao lado inferior (que está contido em  $H_3$ ), conduziu-se, por  $D_{s1}$ , a reta suporte da sombra do lado superior do quadrado, paralela a  $h_3$ . A partir das sombras dos vértices inferiores do quadrado e das sombras dos pontos **A** e **B** no Plano Horizontal de Projeção, foi possível desenhar as sombras dos outros dois lados do quadrado e, assim, construir o retângulo que é a sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projeção.

Os pontos  $A_{v1}$ ,  $B_{s1}$ ,  $C_{s1}$  e  $D_{v1}$  são, imediatamente, **quatro pontos** da elipse e são, também, os pontos em que a curva será tangente aos lados do retângulo. Note ainda que  $[C_{s1} D_{v1}]$  é o eixo maior da elipse e que  $[A_{v1} B_{s1}]$  é o eixo menor da elipse. A estes quatro pontos acrescem, ainda, os dois pontos de quebra, o que perfaz um total de **seis pontos**.

No entanto, este número de pontos é ainda insuficiente para um desenho relativamente preciso (à mão livre) da curva. Nesse sentido, desenharam-se as sombras das diagonais do quadrado, de forma direta. Em seguida, transportaram-se, para as sombras das diagonais do quadrado, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado. Este procedimento foi feito a partir das projeções horizontais daqueles pontos, conduzindo, por eles, as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam. Com mais estes quatro pontos, já temos um total de **dez pontos** para o desenho da curva, o que se considerou ser suficiente.

Assim, os **dez pontos** determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Tenha em conta que o troço da elipse que se situa para cima do eixo **X** (para cima do segmento  $[Q_s Q'_s]$ ) se refere a uma **sombra virtual** – a necessidade deste troço foi, apenas, o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através dele é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivesse desenhado esse troço, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afectada de erros de execução.

A sombra projetada do círculo nos planos de projeção é, assim, uma figura com duas partes elípticas – as duas partes atrás referidas, que têm, em comum, o segmento de reta  $[Q_s Q'_s]$ . Note que, no contorno da sombra, se atendeu às situações de invisibilidades da sombra (as partes da sombra que estão ocultas pelo próprio círculo, em ambas as projeções). Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do círculo com uma **mancha clara e uniforme** em ambas as projeções – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\delta$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\delta$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o círculo, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objeto e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 864.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\rho$ , pelo seu traço frontal, em função dos dados. Note que os dados não nos permitem representar o traço horizontal do plano  $\rho$ , pois não nos é dado o seu afastamento.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do círculo:

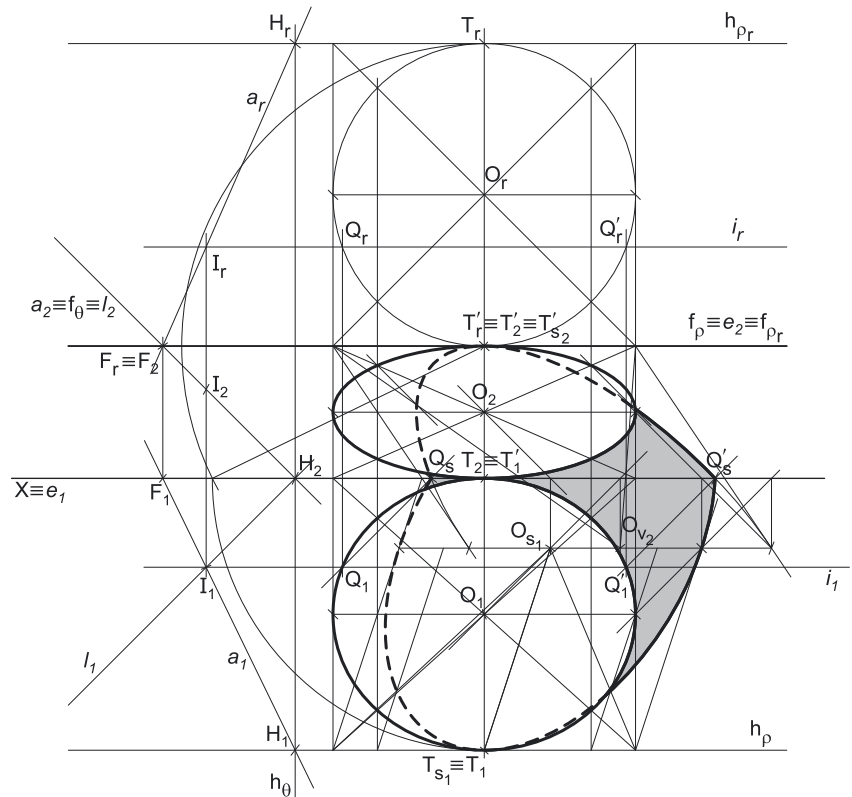
O plano que contém o círculo (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o círculo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\rho$ , pelo rebatimento dos seus traços.

Nesse sentido, optou-se por rebater o plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção. Começou-se por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $f_p \equiv e_2 \equiv f_{pr}$  ( $e_1$ , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil. Note que não seria possível rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, pois, nessa situação, a charneira do rebatimento seria o traço horizontal do plano ( $h_p$ ), que não é conhecido ainda (não é dado e ainda não foi determinado).

Em seguida, atendendo a que o círculo é tangente aos dois planos de projeção, o círculo tem necessariamente um diâmetro de perfil, cujos extremos se situarão sobre os traços do plano – a distância entre os dois traços do plano é igual à medida do raio do círculo, ou seja, 8 cm ( $2 \times 4$  cm). Nesse sentido, desenhou-se  $h_{pr}$ , paralelo ao eixo **X** (porque é fronto-horizontal) e situado a 8 cm de  $f_{pr}$  (o traço frontal do plano  $\rho$  rebatido) – essa é a distância entre os dois traços do plano, em **verdadeira grandeza**. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[TT']$  em rebatimento –  $[T_r T'_r]$ .

O segmento de reta  $[TT']$  é o diâmetro de perfil do círculo. O ponto **T** é o ponto em que o círculo é tangente ao traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ) e o ponto **T'** é o ponto em que o círculo é tangente ao traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ). Nesse sentido, o ponto **T** é o ponto do círculo que tem cota nula, enquanto o ponto **T'** é o ponto do círculo que tem afastamento nulo. Em seguida, determinou-se o ponto **O<sub>r</sub>**, que é o ponto médio do segmento de reta  $[T_r T'_r]$  – o ponto **O<sub>r</sub>** é o centro do círculo (o ponto **O**) em rebatimento. Por fim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>r</sub>** e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em verdadeira grandeza, em rebatimento – note que a circunferência passa necessariamente por **T<sub>r</sub>** e por **T'<sub>r</sub>**.

Para se determinarem as duas projeções da figura, é necessário inverter o rebatimento do plano  $\rho$ . Para tal é necessário, antes de mais, determinar o seu traço horizontal ( $h_p$ ), para o que é necessário inverter o rebatimento do ponto **T**. Para tal conduziu-se, por **T<sub>r</sub>**, uma perpendicular a charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **T**), o que nos permitiu determinar, de forma imediata, **T<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **T**), sobre o eixo **X** (pois o ponto **T** tem cota nula). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **T** (que se situa na charneira e é, na prática, o ponto **T'**) – é o ponto de interseção da charneira ( $f_p$ ) com a perpendicular à charneira que passa por **T<sub>r</sub>**. Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **T** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Com o compasso, fazendo centro em  $T_r$  e com raio até  $T_r$ , desenharam-se o arco do rebatimento do ponto  $T$  em verdadeira grandeza, até ao eixo  $X$ , o que nos permitiu construir o triângulo do rebatimento do ponto  $T$ , em verdadeira grandeza. O cateto do triângulo do rebatimento que se situa no eixo  $X$  é o afastamento do ponto  $T$ . Assim, com o compasso, fazendo centro em  $T_2$  (a projecção frontal do ponto  $T$ ) e com raio igual ao cateto do triângulo que está no eixo  $X$  (o afastamento do ponto  $T$ ), transportou-se o afastamento do ponto  $T$  para a perpendicular à charneira que passa por  $T_r$ , o que nos permitiu determinar  $T_1$  (a projecção horizontal do ponto  $T$ ). Este procedimento permitiu-nos, finalmente, desenhar o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ), que está definido por um ponto (o ponto  $T$ ) e por uma direcção (é fronto-horizontal). Tenha ainda em conta que se garantiu que o ponto  $T$  tem afastamento positivo, para se situe no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro (para que o círculo se situe no  $1^{\text{a}}$  Diedro, como o enunciado refere expressamente).

As duas projecções do círculo serão **elipses**. Assim, tratando-se de **duas elipses**, é necessário ter em conta que o desenho de cada uma requer alguns cuidados particulares, nomeadamente um mínimo de **oito pontos** e, se possível, os dois eixos (de cada uma) e o paralelogramo envolvente. Para tal inscreveu-se a circunferência (em rebatimento) num quadrado de lados paralelos aos traços do plano (em rebatimento). Note que um dos lados do quadrado está contido em  $f_{pr}$  e um outro lado está contido em  $h_{pr}$ .

Em seguida, desenharam-se as medianas e as diagonais do quadrado (em rebatimento) – os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado dão-nos, imediatamente, os extremos dos dois eixos das elipses – a mediana fronto-horizontal é o diâmetro cujas projecções são os eixos maiores das duas elipses (por ser paralelo à charneira – não sofre qualquer deformação, em projecções), enquanto a mediana de perfil (o segmento  $[T_r T'_r]$ ) é o diâmetro cujas projecções são os eixos menores das duas elipses (por ser perpendicular à charneira do rebatimento – sofre a deformação máxima, em projecções).

Para desenhar as duas projecções do círculo há que, em primeiro lugar, determinar as duas projecções do quadrado. As duas projecções do quadrado determinam-se de forma direta, pois dois dos lados estão contidos nos traços do plano (os lados fronto-horizontais) e os outros dois lados estão necessariamente contidos em retas de perfil – as duas projecções do quadrado são dois retângulos. Em seguida, desenharam-se as diagonais dos dois retângulos que são as projecções correspondentes das diagonais do quadrado – os pontos em que as diagonais dos retângulos se bissectam são as projecções homónimas do ponto  $O$  (o centro do círculo). Pelas projecções do ponto  $O$  conduziram-se, em seguida, as projecções homónimas da mediana fronto-horizontal do quadrado.

$T_1$  e  $T'_1$  (as projecções horizontais dos pontos  $T$  e  $T'$ , respetivamente) e os pontos em que a projecção horizontal da mediana fronto-horizontal se apoia nos lados de perfil do retângulo (que é a projecção horizontal do quadrado) são, mediamente, **quatro pontos** da elipse que é a projecção horizontal do círculo. As duas medianas do retângulo são, também, os dois eixos dessa elipse.  $T_2$  e  $T'_2$  (as projecções frontais dos pontos  $T$  e  $T'$ , respetivamente) e os pontos em que a projecção frontal da mediana fronto-horizontal se apoia nos lados de perfil do retângulo (que é a projecção frontal do quadrado) são, mediamente, **quatro pontos** da elipse que é a projecção frontal do círculo. As duas medianas do retângulo são, também, os dois eixos dessa elipse.

Por fim, transportaram-se, para as diagonais dos dois retângulos, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado (através de perpendiculares à charneira), o que nos permitiu determinar mais **quatro pontos** de cada uma das duas elipses. A partir dos **oito pontos** determinados, desenharam-se as duas elipses que são as projecções do círculo, atendendo às situações de tangência das elipses em relação aos lados dos retângulos.

### Determinação da sombra do círculo nos planos de projecção:

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo  $X$ ).

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo  $X$  e o raio luminoso  $l$ , passante (concorrente com o eixo  $X$ ). O raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que não se identificou) e por uma direcção (a direcção convencional da luz). Em seguida, determinou-se a reta de intersecção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\rho$  (o plano que contém a figura) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\rho$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de intersecção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $\rho$  é outro plano de rampa, pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizontal. Já temos uma direcção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Nesse sentido, há que determinar o ponto de intersecção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\rho$ .

Nem a reta  $l$  (o raio luminoso) nem o plano  $\rho$  são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da intersecção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **2.** determina-se a reta de intersecção do plano auxiliar com o plano dado; **3.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de intersecção da reta dada com o plano dado.

- Assim, conduziu-se, pelo raio luminoso  $l$ , o plano  $\theta$ , que é o plano projetante frontal do raio luminoso  $l$ .
- Em seguida, determinou-se a reta de intersecção do plano  $\theta$  (o plano auxiliar) com o plano  $\rho$  – a reta  $a$ . A reta  $a$  é a reta de intersecção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos  $F$  e  $H$  (os seus traços nos planos de projecção).
- O ponto de concorrência das retas  $l$  e  $a$  é o ponto de intersecção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\rho$  – o ponto  $I$ .

Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $I$ ) e por uma direcção (é fronto-horizontal), pelo que foi possível desenhar as duas projecções da reta  $i$ .

É possível constatar que a reta  $i$  é secante ao círculo, pelo que a sombra do círculo admite a existência de pontos de quebra. Estes, no entanto, não podem ser determinados diretamente em projecções, pois não é possível determinar pontos sobre uma curva de erro (uma elipse), que foi desenhada à mão livre. Tendo em conta que tanto o círculo como a reta  $i$  estão contidos num plano de rampa, há que recorrer a um processo geométrico auxiliar – optou-se por rebater a reta  $i$  para o rebatimento previamente efetuado do plano  $\rho$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, rebate-se a reta  $\alpha$ . O ponto  $F$  (o traço frontal da reta  $\alpha$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $F_r \equiv F_2$ . Em seguida, conduziu-se, pelo ponto  $H$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $H_r$  sobre  $h_{pr}$ . A reta  $\alpha_r$  (a reta  $\alpha$  rebatida) está definida por dois pontos – os pontos  $F_r$  e  $H_r$ . Em seguida, conduziu-se, pelo ponto  $I$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $I_r$  (o ponto  $I$  rebatido) sobre a reta  $\alpha_r$ . Pelo ponto  $I_r$  conduziu-se a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida), fronto-horizontal e determinaram-se os pontos em que a reta  $i_r$  corta a circunferência, em rebatimento – os pontos  $Q_r$  e  $Q'_r$ .

Por fim, inverteu-se o rebatimento dos pontos  $Q_r$  e  $Q'_r$ , recorrendo às perpendiculares à charneira que por eles passam (e que correspondem aos planos de perfil que contém os respetivos arcos do rebatimento) – as projeções dos pontos  $Q$  e  $Q'$  estão sobre as projeções homónimas da reta  $i$ . Em seguida, pelas projeções horizontais dos pontos  $Q$  e  $Q'$  ( $Q_1$  e  $Q'_1$ , respetivamente), conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se as suas sombras ( $Q_s$  e  $Q'_s$ , respetivamente), que se situam no eixo  $X$  –  $Q_s$  e  $Q'_s$  são os pontos de quebra da sombra da circunferência. O segmento  $[Q_s Q'_s]$  e a linha de quebra da sombra do círculo.

A parte do círculo que se situa entre a reta  $i$  e o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ) produz sombra no **SPFS**. A parte do círculo que se situa entre a reta  $i$  e o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_p$ ) produz sombra no **SPHA**.

*Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – é a sombra do arco  $\widehat{QT'Q'}$ . Assim, o desenho (à mão livre) deste segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. Nesse sentido, optou-se por se determinar a sombra projetada, no Plano Frontal de Projeção, do «meio quadrado» em que aquele arco se inscreve.

A sombra do lado do «meio quadrado» que está contido no traço frontal do plano está coincidente com esse mesmo lado. Em seguida, determinaram-se as sombras, no Plano Frontal de Projeção, do ponto  $O$  e dos extremos do diâmetro fronto-horizontal do círculo – as sombras destes três pontos no Plano Frontal de Projeção são sombras virtuais (situam-se no **SPFI**). Assim,  $O_{v2}$  é a sombra virtual do ponto  $O$  e situa-se no **SPFI**. Este procedimento permitiu-nos construir o paralelogramo que é a sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção.

As sombras dos dois extremos do lado inferior do paralelogramo (que é a sombra do diâmetro fronto-horizontal do círculo) são, imediatamente, dois pontos do segmento de elipse, que é a sombra do círculo no Plano Frontal de Projeção. O ponto  $T'$  situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $T'_2 \equiv T'_{s2}$ . Já temos **três pontos** do segmento de elipse. A estes três pontos acrescem, ainda, os dois pontos de quebra, o que perfaz um total de **cinco pontos**.

No entanto, este número de pontos é ainda insuficiente para um desenho relativamente preciso (à mão livre) da curva. Nesse sentido, desenharam-se as partes correspondentes da mediana de perfil (o segmento  $[O_{v2} T'_{s2}]$ ) e das partes correspondentes das diagonais do quadrado. Em seguida, transportaram-se, para as sombras das diagonais do quadrado, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado. Este procedimento foi feito a partir das projeções frontais daqueles pontos, conduzindo, por eles, as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam. Com mais estes dois pontos, já temos um total de **sete pontos** para o desenho da curva, o que se considerou ser suficiente.

Assim, os **sete pontos** determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Tenha em conta que os dois troços de elipse que se situam para baixo do eixo  $X$  (para baixo do segmento  $[Q_s Q'_s]$ ) se referem a uma **sombra virtual** – a necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afectada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é outro segmento de uma **elipse**, que é, uma vez mais, uma curva de erro – é a sombra do arco  $\widehat{QT'Q'}$ . Assim, o desenho (à mão livre) deste segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. Nesse sentido, optou-se por se determinar a sombra projetada, no Plano Horizontal de Projeção, do «meio quadrado» em que se inscreve a semicircunferência que integra aquele arco.

A sombra do lado do «meio quadrado» que está contido no traço horizontal do plano está coincidente com esse mesmo lado. Em seguida, determinaram-se as sombras, no Plano Horizontal de Projeção, do ponto  $O$  e dos extremos do diâmetro fronto-horizontal do círculo – as sombras destes três pontos no Plano Horizontal de Projeção são sombras reais (situam-se no **SPHA**). Assim,  $O_{s1}$  é a sombra real do ponto  $O$  e situa-se no **SPHA**. Este procedimento permitiu-nos construir o paralelogramo que é a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção.

As sombras dos dois extremos do lado superior do paralelogramo (que é a sombra do diâmetro fronto-horizontal do círculo) são, imediatamente, dois pontos do segmento de elipse, que é a sombra do círculo no Plano Horizontal de Projeção. O ponto  $T$  situa-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $T_1 \equiv T_{s1}$ . Já temos **três pontos** do segmento de elipse. A estes três pontos acrescem, ainda, os dois pontos de quebra, o que perfaz um total de **cinco pontos**.

No entanto, este número de pontos é ainda insuficiente para um desenho relativamente preciso (à mão livre) da curva. Nesse sentido, desenharam-se as partes correspondentes da mediana de perfil (o segmento  $[O_{s1} T_{s1}]$ ) e das partes correspondentes das diagonais do quadrado. Em seguida, transportou-se, para as sombras das diagonais do quadrado, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado. Este procedimento foi feito a partir das projeções horizontais daqueles pontos, conduzindo, por eles, as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam. Com mais estes dois pontos, já temos um total de **sete pontos** para o desenho da curva, o que se considerou ser suficiente.

Assim, os **sete pontos** determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A sombra projetada do círculo nos planos de projeção é, assim, uma figura com duas partes elípticas – note que, no contorno da sombra, se atendeu às situações de invisibilidades da sombra (as partes da sombra que estão ocultas pelo próprio círculo, em ambas as projeções). Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do círculo com uma **mancha clara e uniforme** em ambas as projeções – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

## Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\rho$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o círculo, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 865.

Por **sombra própria de um poliedro** entende-se o conjunto das faces do poliedro sobre as quais não incidem os raios luminosos. Pode-se dizer, também, que a **sombra própria de um poliedro** é o conjunto das faces do poliedro nas quais os raios luminosos incidem como **raios de sombra**, depois de terem sido interceptados por outras faces do poliedro (as faces que estão **iluminadas**, sobre as quais incidem os raios luminosos **em luz**).

A **sombra própria de um poliedro** é, assim, o conjunto das faces do poliedro que estão **sombreadas** (em **sombra própria**).

## 866.

Por **linha separatriz luz/sombra** entende-se a linha **fechada** que é constituída pelo conjunto das linhas/arestas da superfície do sólido que **separam** a parte iluminada do sólido da sua parte sombreada (em **sombra própria**).

A **linha separatriz luz/sombra** é, assim, a linha fechada **que separa** a parte iluminada de um sólido da parte do sólido que está em sombra (**sombra própria**) – é a sequência de todas as linhas da superfície do sólido que separam de forma sucessiva as partes da superfície sobre as quais incidem os raios luminosos (e que, por isso, estão iluminadas) daquelas onde estes não incidem (e que estão em sombra).

## 867.

A importância da **linha separatriz luz/sombra** na determinação da sombra de um sólido tem a ver com o facto de esta nos permitir identificar a **sombra própria do sólido** e, de forma sequente, determinar a **sombra projetada do sólido**.

Na realidade, e de uma forma imediata, a **linha separatriz luz/sombra** permite-nos identificar as partes do sólido que estão **em sombra** e, dessa forma, assinalar a **sombra própria do sólido**. Por outro lado, a **sombra da linha separatriz luz/sombra** é o contorno da **sombra projetada do sólido**, pelo que a correta identificação da linha separatriz luz/sombra é fundamental na determinação da sombra de sólidos.

## 868.

Por **planos tangentes luz/sombra** entendem-se os planos que contêm raios luminosos e que são tangentes (ou rasantes) a um dado sólido ao longo de uma geratriz (no caso dos cones e cilindros) ou aresta (no caso dos poliedros) da sua superfície lateral.

No caso de se tratar de um **foco luminoso**, os planos tangentes luz/sombra contêm o foco luminoso, pelo que contêm infinitos raios luminosos, concorrentes entre si (no foco luminoso). Já no caso de se tratar de uma **direção luminosa**, os planos tangentes luz/sombra contêm a direção luminosa (contêm infinitos raios luminosos paralelos entre si, com a direção luminosa dada).

## 869.

Por **geratriz separatriz luz/sombra** entende-se toda e qualquer geratriz da superfície lateral de um cone (ou de um cilindro) que **separe fisicamente** a parte da superfície lateral do sólido que está **iluminada** da parte da superfície que está **em sombra**.

## 870.

### Dados:

O processo para a determinação dos **planos tangentes (ou rasantes) luz/sombra** (com vista à identificação da **linha separatriz luz/sombra**), no caso de **cones e pirâmides**, executa-se em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do sólido (cone ou pirâmide), um raio luminoso  $l$  (que é a reta de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra); **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base do sólido – o ponto **I**; **3.** conduzem-se, pelo ponto **I**, as retas tangentes (ou rasantes) à base do sólido – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos planos tangentes luz/sombra com o plano da base do sólido); **4.** os pontos em que as retas  $t$  e  $t'$  são tangentes (ou rasantes) à base do sólido permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes/arestas laterais do sólido que integram a **linha separatriz luz/sombra**.

Salienta-se que, no caso de **cones e pirâmides**, o processo para a determinação dos **planos tangentes luz/sombra** é idêntico, quer se trate de um **foco luminoso** ou de uma **direção luminosa**.

## 871.

Há a referir que, tratando-se de uma **direção luminosa**, os **planos tangentes (ou rasantes) luz/sombra** são paralelos entre si, pelo que, em primeiro lugar, é necessário determinar a orientação dos **planos tangentes (ou rasantes) luz/sombra**. Assim, o processo para a determinação dos **planos tangentes (ou rasantes) luz/sombra** (com vista à identificação da **linha separatriz luz/sombra**), no caso de **prismas e cilindros** (e considerando uma **direção luminosa**), executa-se em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzem-se duas retas – uma reta paralela às geratrizes/arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa (as duas retas, porque são concorrentes, definem um plano  $\lambda$ , que tem a orientação dos dois planos tangentes luz/sombra); **2.** determina-se a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do sólido; **3.** conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do sólido que são paralelas à reta **i** – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano da base de referência do sólido); **4.** os pontos em que as retas **t** e **t'** são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do sólido permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes/arestas laterais que integram a **linha separatriz luz/sombra**.

## 872.

Há a referir que, tratando-se de um **foco luminoso**, os **planos tangentes (ou rasantes) luz/sombra** são secantes. Assim, o processo para a determinação dos **planos tangentes (ou rasantes) luz/sombra** (com vista à identificação da **linha separatriz luz/sombra**), no caso de **prismas e cilindros** (e considerando um **foco luminoso**), executa-se em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo foco luminoso, uma reta paralela às geratrizes/arestas laterais do sólido – a reta **i** (que é a reta de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra**); **2.** determina-se o ponto de interseção da reta **i** com o plano da base (de referência) do sólido – o ponto **I**; **3.** conduzem-se, pelo ponto **I**, as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do sólido – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano da base de referência do sólido); **4.** os pontos em que as retas **t** e **t'** são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do sólido permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes/arestas laterais do sólido que integram a **linha separatriz luz/sombra**.

## 873.

Segundo o **Crítério de Paralelismo entre planos**, dois planos são paralelos entre si se e só se duas retas concorrentes de um dos planos forem paralelas a duas retas concorrentes do outro plano, ou seja, se os dois planos tiverem, em comum, duas «famílias» de retas.

1. Sendo dada uma **direção luminosa**, os dois **planos tangentes luz/sombra** contém **necessariamente** a direção luminosa, que é uma «família» de retas – assim, os dois planos já têm, em comum, uma determinada «família» de retas (a «família» de retas da direção luminosa).
2. Por outro lado, qualquer **plano tangente** a um prisma contém **necessariamente** a «família» de retas das arestas laterais do sólido – assim, os dois planos já têm, em comum, uma outra «família» de retas (a «família» de retas das arestas laterais do prisma).  
Face ao exposto, os dois **planos tangentes luz/sombra** têm, em comum, duas «famílias» de retas, pelo que verificam o **Crítério de Paralelismo entre planos** – os dois planos são **necessariamente** paralelos.

## 874.

## Dados:

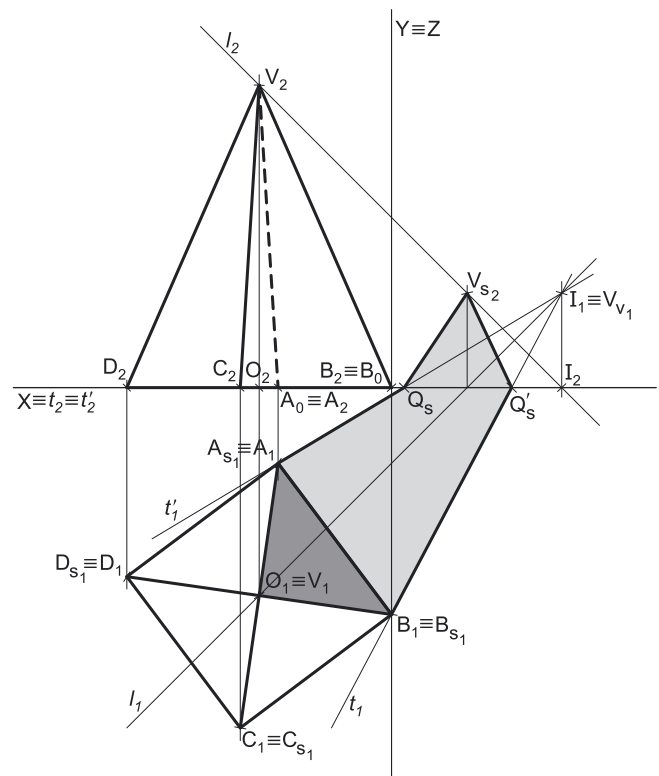
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

## Resolução:

*Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, a partir de **A<sub>1</sub>** e **B<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuou-se a construção do quadrado, em projeção horizontal, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado, bem como do seu centro (o ponto **O**). As projeções frontais de todos aqueles pontos situam-se no eixo **X**, pois o quadrado tem cota nula.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal) – tem-se, imediatamente, **V<sub>1</sub> ≡ O<sub>1</sub>** (pois os pontos **O** e **V** estão situados na mesma reta projetante horizontal). Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e que o plano da base tem cota nula, o vértice **V** tem 8 cm de cota ( $0 + 8 = 8$ ), o que nos permitiu determinar **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado  $[ABCD]$ , cuja projeção horizontal é o quadrado  $[A_1B_1C_1D_1]$ . Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice  $V$ . Este vértice, por ser o vértice de **maior cota** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são visíveis, em projeção horizontal.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDV]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2V_2]$ . Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice  $A$ . Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$ , da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção frontal), e a aresta lateral  $[AV]$ . A aresta lateral  $[CV]$  é **visível**, por se situar na parte visível do sólido (o vértice  $C$  é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto  $V$ ), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $V$ ) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ . O ponto  $I$  é, imediatamente, o traço horizontal do raio luminoso  $l$ , pois a base da pirâmide está contida no Plano Horizontal de Projeção.
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$ , que são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**.
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[AV]$  e  $[BV]$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[AV]$  e  $[BV]$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas  $[AV]$  e  $[BV]$  separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[BCV]$ ,  $[CDV]$  e  $[ADV]$  estão iluminadas enquanto a face lateral  $[ABV]$  está em sombra. A base da pirâmide também está em sombra, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[BCDAV]$ .

A **sombra própria** da pirâmide integra a face lateral  $[ABV]$  e a base da pirâmide. Em projeção horizontal, a face lateral  $[ABV]$  é visível e a base é invisível, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral  $[ABV]$ . Já em projeção frontal, nenhuma face em sombra é visível (nem a face lateral  $[ABV]$  nem a base da pirâmide), pelo que, em projeção frontal, não há lugar à identificação de sombra própria da pirâmide.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras reais estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $A_1 \equiv A_{s1}$ ,  $B_1 \equiv B_{s1}$ ,  $C_1 \equiv C_{s1}$  e  $D_1 \equiv D_{s1}$  (todas estas sombras se situam no **SPHA**).  $V_{s2}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso  $l$ . As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s1}$ ,  $B_{s1}$ ,  $C_{s1}$  e  $D_{s1}$  situam-se, todas, no **SPHA**, pelo que as sombras das arestas  $[AD]$ ,  $[BC]$  e  $[CD]$ , da base, não admitem a existência de pontos de quebra. O mesmo já não acontece em relação às arestas laterais  $[AV]$  e  $[BV]$  – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $V_{s2}$  e  $A_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $V_{s2}$  e  $B_{s1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto  $V - V_{v1}$ .  $V_{v1}$  é a sombra virtual do ponto  $V$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$  (note que  $V_{v1}$  é o próprio ponto  $I$ , nesta situação). O segmento  $[A_{s1}V_{v1}]$  é a sombra projetada da aresta  $[AV]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s1}V_{v1}]$  com o eixo  $X$  é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra da aresta  $[AV]$ ). A linha quebrada aberta  $[A_{s1}Q_sV_{s2}]$  é a **sombra real** da aresta  $[AV]$  (a sombra projetada da aresta nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

O segmento  $[B_{s1}V_{v1}]$  é a sombra projetada da aresta  $[BV]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[B_{s1}V_{v1}]$  com o eixo  $X$  é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra da aresta  $[BV]$ ). A linha quebrada aberta  $[B_{s1}Q'_sV_{s2}]$  é a **sombra real** da aresta  $[BV]$  (a sombra projetada da aresta nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s1}Q_sV_{s2}Q'_sB_{s1}C_{s1}D_{s1}]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a parte visível da sombra da pirâmide com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que a porção de sombra que está por baixo da base da pirâmide está oculta pelo sólido, pelo que é **invisível** (não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso **l**, dos traçados necessários à construção do quadrado ou, ainda, das retas **t** e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 875.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, a partir de **A**<sub>1</sub> e **B**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuou-se a construção do quadrado, em projeção horizontal, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado, bem como do seu centro (o ponto **O**). As projeções frontais de todos aqueles pontos situam-se no eixo **X**, pois o quadrado tem cota nula.

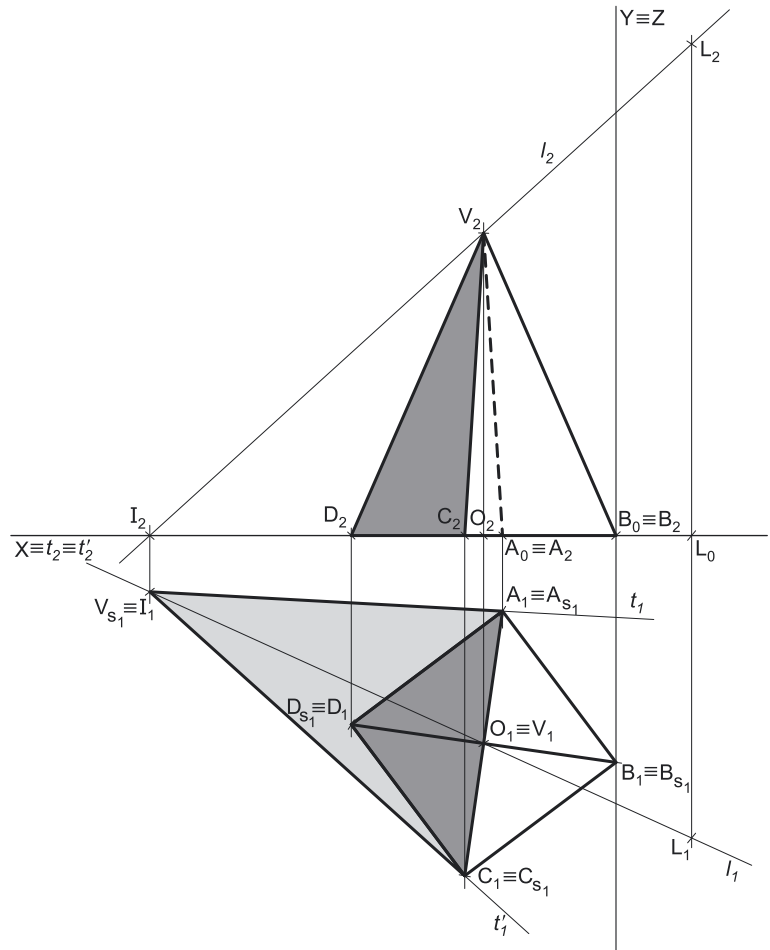
Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal) – tem-se, imediatamente, **V**<sub>1</sub>  $\equiv$  **O**<sub>1</sub> (pois os pontos **O** e **V** estão situados na mesma reta projetante horizontal). Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e que o plano da base tem cota nula, o vértice **V** tem 8 cm de cota (0 + 8 = 8), o que nos permitiu determinar **V**<sub>2</sub> (a projeção frontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado **[ABCD]**, cuja projeção horizontal é o quadrado **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **maior cota** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são visíveis, em projeção horizontal.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção frontal), e a aresta lateral **[AV]**. A aresta lateral **[CV]** é **visível**, por se situar na parte visível do sólido (o vértice **C** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por dois pontos (o ponto **V** e o foco luminoso **L**);
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é, imediatamente, o traço horizontal do raio luminoso  $l$ , pois a base da pirâmide está contida no Plano Horizontal de Projeção.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$ , que são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**.
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AV]** e **[CV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AV]** e **[CV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas **[AV]** e **[CV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da direita, onde se situa o foco luminoso), as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** estão iluminadas enquanto as faces laterais **[ADV]** e **[CDV]** estão em sombra. A base da pirâmide também está em sombra, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [AVCB]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[ADV]** e **[CDV]**, bem como a base da pirâmide. Em projeção horizontal, as faces laterais **[ADV]** e **[CDV]** são visíveis e a base é invisível, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se às faces laterais **[ADV]** e **[CDV]**. Já em projeção frontal, das faces da pirâmide que estão em sombra, a única que é visível é a face lateral **[CDV]**, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria a assinalar refere-se, apenas, à face lateral **[CDV]**.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos **A**, **B** e **C** situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras reais estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $A_1 \equiv A_{s_1}$ ,  $B_1 \equiv B_{s_1}$  e  $C_1 \equiv C_{s_1}$  (todas estas sombras se situam no **SPHA**).  $V_{s_1}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso  $l$  (note que  $V_{s_1}$  é o próprio ponto **I**, nesta situação). As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se todas no mesmo plano de projeção, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **não admite a existência de pontos de quebra**.

Assim, desenhou-se o contorno da **sombra projetada (real) da pirâmide nos planos de projeção**, que é o polígono  $[A_{s_1}V_{s_1}C_{s_1}B_{s_1}]$ . Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a parte visível da sombra da pirâmide com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que a porção de sombra que está por baixo da base da pirâmide está oculta pelo sólido, pelo que é **invisível** (não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**).

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso  $l$ , dos traçados necessários à construção do quadrado ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.





(continuação da página anterior)

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\varphi$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base) é um plano projetante horizontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $\varphi$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AV]** e **[CV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AV]** e **[CV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas **[AV]** e **[CV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** estão iluminadas enquanto as faces laterais **[CDV]** e **[ADV]** estão em sombra. A base da pirâmide também está em sombra, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [ABCV]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[CDV]** e **[ADV]** e a base da pirâmide. Em projeção horizontal, a face lateral **[CDV]** é visível, enquanto a base e a face lateral **[ADV]** são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral **[CDV]**. Já em projeção frontal, as duas faces laterais em sombra são visíveis (as faces laterais **[CDV]** e **[ADV]**), mas a base é invisível, pelo que a sombra própria a assinalar, em projeção frontal, é a referente às faces laterais **[CDV]** e **[ADV]**.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $V_{s1}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **V**.  $B_{s2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$B_{s2}$  e  $C_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[BC]**, da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[ $B_{s2}C_{s2}$ ]** é a sombra projetada do segmento **[BC]** e situa-se no **SPFS**.  $A_{s1}$  e  $V_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[AV]** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[ $A_{s1}V_{s1}$ ]** é a sombra projetada do segmento **[AV]** e situa-se no **SPHA**. O mesmo já não acontece em relação às arestas **[CV]** e **[AB]** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $V_{s1}$  e  $C_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $A_{s1}$  e  $B_{s2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s2}$  e  $V_{s1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **C** –  $C_{v1}$ .  $C_{v1}$  é a sombra virtual do ponto **C** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**. O segmento **[ $V_{s1}C_{v1}$ ]** é a sombra projetada do segmento **[CV]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[ $V_{s1}C_{v1}$ ]** (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[ $V_{s1}Q_sC_{s2}$ ]** é a **sombra real** da aresta lateral **[CV]**.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s1}$  e  $B_{s2}$  teve-se em conta que o lado **[AB]** do quadrado é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B_{s2}$  (a sombra real do ponto **B**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a **[ $A_2B_2$ ]** (a projeção frontal do segmento **[AB]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AB]**). A linha quebrada aberta **[ $A_{s1}Q'_sB_{s2}$ ]** é a **sombra real** da aresta **[AB]**, da base, nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada **[ $V_{s1}A_{s1}Q'_sB_{s2}C_{s2}Q_s$ ]** é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento **[ $Q_sQ'_s$ ]** é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em projeção frontal), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

## Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\varphi$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço horizontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do quadrado ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 877.

**Dados:**

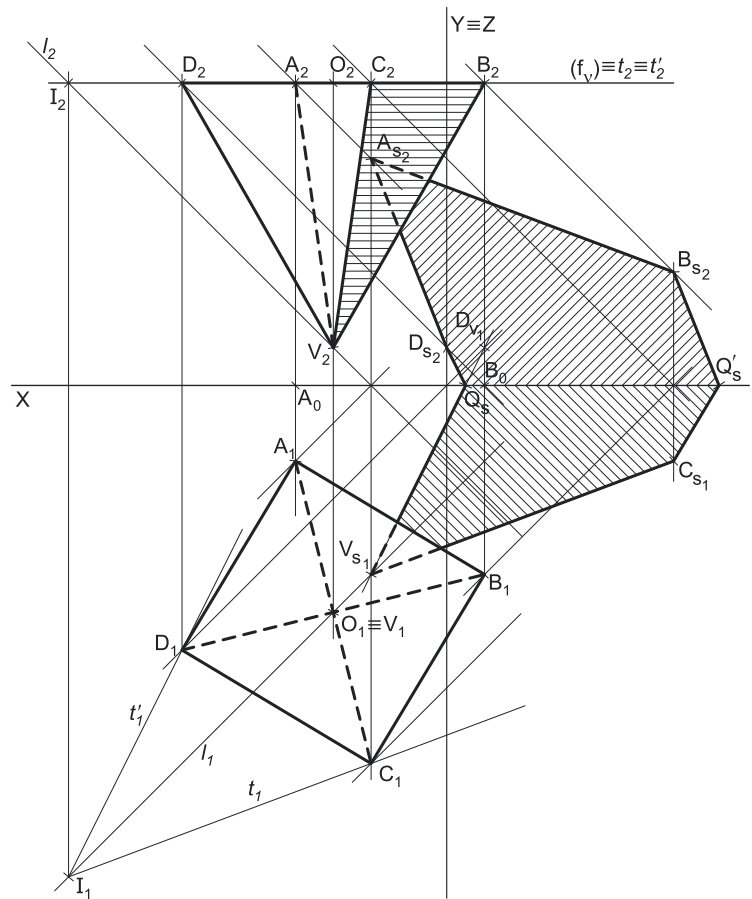
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado **[ABCD]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, a partir de  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do quadrado, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado ( $C_1$  e  $D_1$ ), bem como do ponto **O** ( $O_1$ ), sendo **O** o centro do quadrado. Note que os vértices **C** e **D** foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito. As projeções frontais dos pontos **O**, **C** e **D** estão sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.



Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal) – tem-se, imediatamente,  $V_1 \equiv O_1$  (pois os pontos **O** e **V** estão situados na mesma reta projetante horizontal). Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e que o plano da base tem 8 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **B**), o vértice **V** tem 1 cm de cota ( $8 - 7 = 1$ ), o que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do vértice **V**). Note que o vértice **V** tem cota inferior à base, para que seja invisível em projeção horizontal (como o enunciado pede expressamente). Em seguida, a partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado **[ABCD]**, cuja projeção horizontal é o quadrado **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são invisíveis, em projeção horizontal.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção frontal), e a aresta lateral **[AV]**. A aresta lateral **[CV]** é **visível**, por se situar na parte visível do sólido (o vértice **C** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\varphi$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  (o plano que contém a base) é um plano projetante frontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $v$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos **C** e **D**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[CV]** e **[DV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[CV]** e **[DV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As arestas [CV] e [DV] separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a base da pirâmide está iluminada, bem como a face lateral [CDV], enquanto as restantes faces laterais estão em sombra (as faces laterais [ADV], [ABV] e [BCV]). Nesse sentido, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [CVDAB]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais [ADV], [ABV] e [BCV]. Em projeção horizontal, todas as faces laterais da pirâmide são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, das três faces laterais em sombra, apenas a face lateral [BCV] é visível (as faces laterais [ADV] e [ABV] são invisíveis, em projeção frontal), pelo que a sombra própria a assinalar, em projeção frontal, é a referente à face lateral [BCV].

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com **tracejado**. Este foi executado paralelamente ao eixo X.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s_2}$  é a sombra real do ponto A (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por A.  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto B (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por B.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto C (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por C.  $D_{s_2}$  é a sombra real do ponto D (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por D.  $V_{s_1}$  é a sombra real do ponto V (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por V. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_2}$  e  $B_{s_2}$  situam-se, ambas, no SPFS, pelo que a sombra da aresta [AB], da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $A_{s_2}B_{s_2}$ ] é a sombra projetada do segmento [AB] e situa-se no SPFS.  $A_{s_2}$  e  $D_{s_2}$  situam-se, ambas, no SPFS, pelo que a sombra da aresta [AD], da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $A_{s_2}D_{s_2}$ ] é a sombra projetada do segmento [AD] e situa-se no SPFS.  $C_{s_1}$  e  $V_{s_1}$  situam-se, ambas, no SPHA, pelo que a sombra da aresta lateral [CV] não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $C_{s_1}V_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [CV] e situa-se no SPHA. O mesmo já não acontece em relação às arestas [DV] e [BC] – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $V_{s_1}$  e  $D_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $B_{s_2}$  e  $C_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $D_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto D –  $D_{v_1}$ .  $D_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto D – situa-se no SPHP e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto D. O segmento [ $V_{s_1}D_{v_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [DV] no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento [ $V_{s_1}D_{v_1}$ ] (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo X é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta [ $V_{s_1}Q_sD_{s_2}$ ] é a **sombra real** da aresta lateral [DV].

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  teve-se em conta que o lado [BC] do quadrado é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s_1}$  (a sombra real do ponto C, que se situa no SPHA) conduziu-se uma reta paralela a [ $B_1C_1$ ] (a projeção horizontal do segmento [BC]) até ao eixo X, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [BC]). A linha quebrada aberta [ $C_{s_1}Q'_sB_{s_2}$ ] é a **sombra real** da aresta [BC], da base, nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada [ $V_{s_1}Q_sD_{s_2}A_{s_2}B_{s_2}Q'_sC_{s_1}$ ] é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento [ $Q_sQ'_s$ ] é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em projeção frontal e também em projeção horizontal), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com **tracejado**. Este foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções. A direção luminosa convencional, em projeção horizontal, faz ângulos de 45° (de abertura para a esquerda) com o eixo X, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte visível da sombra projetada da pirâmide que se situa no SPHA) faz ângulos de 45° (de abertura para a direita) com o eixo X. A direção luminosa convencional, em projeção frontal, faz ângulos de 45° (de abertura para a esquerda) com o eixo X, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte visível da sombra da pirâmide que se situa no SPFS) faz ângulos de 45° (de abertura para a direita) com o eixo X.

## Traçado:

O eixo X, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo Y  $\equiv$  Z representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano v), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço frontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do quadrado ou, ainda, das retas t e t'), representaram-se a **leve**. O tracejado que preenche tanto a parte visível da sombra projetada da pirâmide como a sua sombra própria (em ambas as projeções) executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 878.

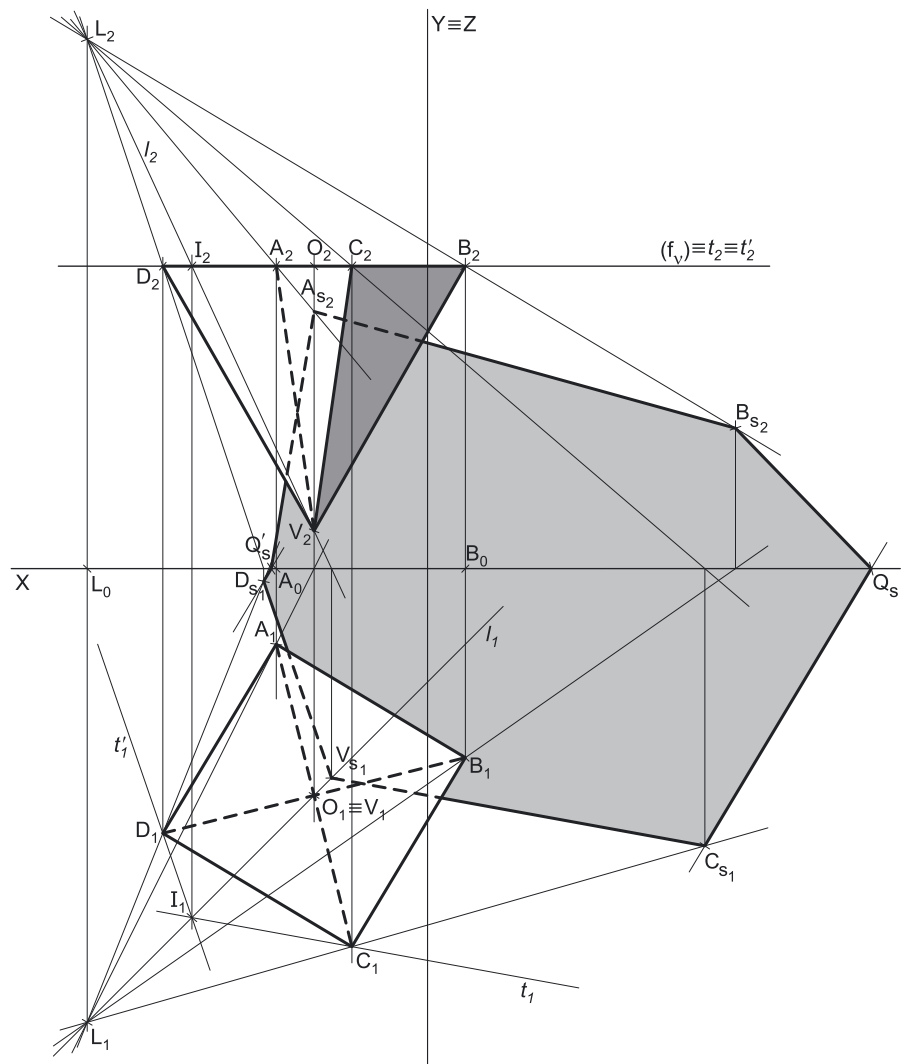
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **L** (o foco luminoso), pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado **[ABCD]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, a partir de  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do quadrado, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado ( $C_1$  e  $D_1$ ), bem como do ponto **O** ( $O_1$ ), sendo **O** o centro do quadrado. Note que os vértices **C** e **D** foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito. As projeções frontais dos pontos **O**, **C** e **D** estão sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.



Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal) – tem-se, imediatamente,  $V_1 \equiv O_1$  (pois os pontos **O** e **V** estão situados na mesma reta projetante horizontal). Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e que o plano da base tem 8 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **B**), o vértice **V** tem 1 cm de cota ( $8 - 7 = 1$ ), o que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do vértice **V**). Note que o vértice **V** tem cota inferior à base, para que seja invisível em projeção horizontal (como o enunciado pede expressamente). Em seguida, a partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado **[ABCD]**, cuja projeção horizontal é o quadrado **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são invisíveis, em projeção horizontal.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção frontal), e a aresta lateral **[AV]**. A aresta lateral **[CV]** é **visível**, por se situar na parte visível do sólido (o vértice **C** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por dois pontos (o ponto **V** e o foco luminoso **L**).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\varphi$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  (o plano que contém a base) é um plano projetante frontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $v$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos **C** e **D**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[CV]** e **[DV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[CV]** e **[DV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas **[CV]** e **[DV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a base da pirâmide está iluminada, bem como a face lateral **[CDV]**, enquanto as restantes faces laterais estão em sombra (as faces laterais **[ADV]**, **[ABV]** e **[BCV]**). Nesse sentido, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [CVDAB]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[ADV]**, **[ABV]** e **[BCV]**. Em projeção horizontal, todas as faces laterais da pirâmide são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, das três faces laterais em sombra, apenas a face lateral **[BCV]** é visível (as faces laterais **[ADV]** e **[ABV]** são invisíveis, em projeção frontal), pelo que a sombra própria a assinalar, em projeção frontal, é a referente à face lateral **[BCV]**.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s_2}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A**.  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.  $V_{s_1}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **V**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_2}$  e  $B_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[AB]**, da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[ $A_{s_2}B_{s_2}$ ]** é a sombra projetada do segmento **[AB]** e situa-se no **SPFS**.  $V_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[DV]** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[ $D_{s_1}V_{s_1}$ ]** é a sombra projetada do segmento **[DV]** e situa-se no **SPHA**.  $C_{s_1}$  e  $V_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[CV]** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[ $C_{s_1}V_{s_1}$ ]** é a sombra projetada do segmento **[CV]** e situa-se no **SPHA**. O mesmo já não acontece em relação às arestas **[AD]** e **[BC]** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $D_{s_1}$  e  $A_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $B_{s_2}$  e  $C_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  teve-se em conta que o lado **[BC]** do quadrado é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s_1}$  (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[ $B_1C_1$ ]** (a projeção horizontal do segmento **[BC]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[BC]**). A linha quebrada aberta **[ $C_{s_1}Q_sB_{s_2}$ ]** é a **sombra real** da aresta **[BC]**, da base, nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $D_{s_1}$  e  $A_{s_2}$  teve-se em conta que o lado **[AD]** do quadrado é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $D_{s_1}$  (a sombra real do ponto **D**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[ $A_1D_1$ ]** (a projeção horizontal do segmento **[AD]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AD]**). A linha quebrada aberta **[ $D_{s_1}Q'_sA_{s_2}$ ]** é a **sombra real** da aresta **[AD]**, da base, nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada **[ $V_{s_1}D_{s_1}Q'_sA_{s_2}B_{s_2}Q_sC_{s_1}$ ]** é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento **[ $Q_sQ'_s$ ]** é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em projeção frontal e também em projeção horizontal), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $v$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço frontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do quadrado ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 879.

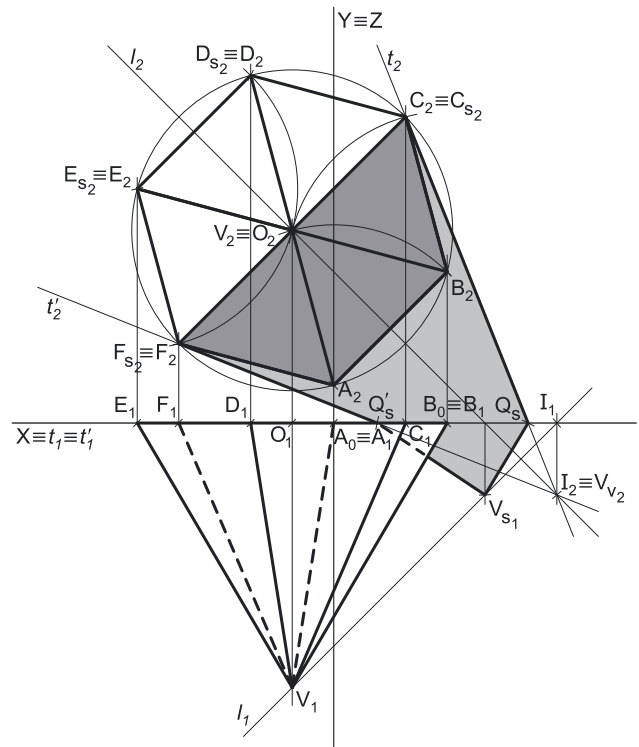
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o hexágono **[ABCDEF]**) está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que o hexágono **[ABCDEF]** está em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, a partir de **A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), determinou-se o ponto **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do centro da circunferência circunscrita ao hexágono) e desenhou-se a projeção horizontal da circunferência em que o polígono se inscreve – a circunferência tem centro em **O<sub>2</sub>** e raio até **A<sub>2</sub>** ou **B<sub>2</sub>**. Em seguida, construiu-se o hexágono **[ABCDEF]** em verdadeira grandeza (em projeção frontal), o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos restantes vértices do polígono. As projeções horizontais de todos aqueles pontos situam-se no eixo **X**, pois o hexágono tem afastamento nulo.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta de topo (uma reta projetante frontal) – tem-se, imediatamente, **V<sub>2</sub> ≡ O<sub>2</sub>** (pois os pontos **O** e **V** estão situados na mesma reta projetante frontal). Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e que o plano da base tem afastamento nulo, o vértice **V** tem 7 cm de afastamento ( $0 + 7 = 7$ ), o que nos permitiu determinar **V<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os sete vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.



O **contorno aparente frontal** é o hexágono **[ABCDEF]**, cuja projeção frontal é o hexágono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são visíveis, em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[BCDEV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **F**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[AF]** e **[EF]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção horizontal), e as arestas laterais **[AV]** e **[FV]**. As arestas laterais **[CV]** e **[DV]** são **visíveis**, por se situarem na parte visível do sólido (os vértices **C** e **D** são os vértices de maior cota da pirâmide).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I**, imediatamente, o traço frontal do raio luminoso **l**, pois a base da pirâmide está contida no Plano Frontal de Projeção.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas **t** e **t'**, que são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**.
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base da pirâmide nos pontos **C** e **F**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[CV]** e **[FV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[CV]** e **[FV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas **[CV]** e **[FV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais **[CDV]**, **[DEV]** e **[EFV]** estão iluminadas enquanto as faces laterais **[BCV]**, **[ABV]** e **[AFV]** estão em sombra. A base da pirâmide também está em sombra, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [CVFED]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[BCV]**, **[ABV]** e **[AFV]** e a base da pirâmide. Em projeção frontal, as três faces laterais em sombra são visíveis e a base é invisível, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas às três faces laterais em sombra. Já em projeção horizontal, nenhuma face em sombra é visível (nem qualquer das faces laterais **[BCV]**, **[ABV]** e **[AFV]** nem a base da pirâmide), pelo que, em projeção horizontal, não há lugar à identificação de sombra própria da pirâmide.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos **C**, **D**, **E** e **F** situam-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que as suas sombras reais estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $C_2 \equiv C_{s2}$ ,  $D_2 \equiv D_{s2}$ ,  $E_2 \equiv E_{s2}$  e  $F_2 \equiv F_{s2}$  (todas estas sombras se situam no **SPFS**).  $V_{s1}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso **l**. As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$C_{s2}$ ,  $D_{s2}$ ,  $E_{s2}$  e  $F_{s2}$  situam-se, todas, no **SPFS**, pelo que as sombras das arestas **[CD]**, **[DE]** e **[EF]**, da base, não admitem a existência de pontos de quebra. O mesmo já não acontece em relação às arestas laterais **[CV]** e **[FV]** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $C_{s2}$  e  $V_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $F_{s2}$  e  $V_{s1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **V** –  $V_{v2}$ .  $V_{v2}$  é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso **l** (note que  $V_{v2}$  é o próprio ponto **I**, nesta situação). O segmento  $[C_{s2}V_{v2}]$  é a sombra projetada da aresta **[CV]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C_{s2}V_{v2}]$  com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra da aresta **[CV]**). A linha quebrada aberta  $[C_{s2}Q_sV_{s1}]$  é a **sombra real** da aresta **[CV]** (a sombra projetada da aresta nas faces do  $1^a$  Diedro).

O segmento  $[F_{s2}V_{v2}]$  é a sombra projetada da aresta **[FV]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[F_{s2}V_{v2}]$  com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra da aresta **[FV]**). A linha quebrada aberta  $[F_{s2}Q'_sV_{s1}]$  é a **sombra real** da aresta **[FV]** (a sombra projetada da aresta nas faces do  $1^a$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[C_{s2}Q_sV_{s1}Q'_sF_{s2}E_{s2}D_{s2}]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a parte visível da sombra da pirâmide com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que a porção de sombra que está por baixo da base da pirâmide está oculta pelo sólido, pelo que é **invisível** (não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**).

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso **l**, dos traçados necessários à construção do hexágono ou, ainda, das retas **t** e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 880.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **A**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $O_2$  e  $A_2$  (as projeções frontais dos pontos **O** e **A**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o pentágono **[ABCDE]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o pentágono **[ABCDE]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita a pentágono. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal da figura, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos restantes quatro vértices do pentágono – **B**<sub>1</sub>, **C**<sub>1</sub>, **D**<sub>1</sub> e **E**<sub>1</sub>. Estes foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

Os procedimentos anteriores permitiram-nos desenhar as duas projeções da figura. A projeção frontal do pentágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

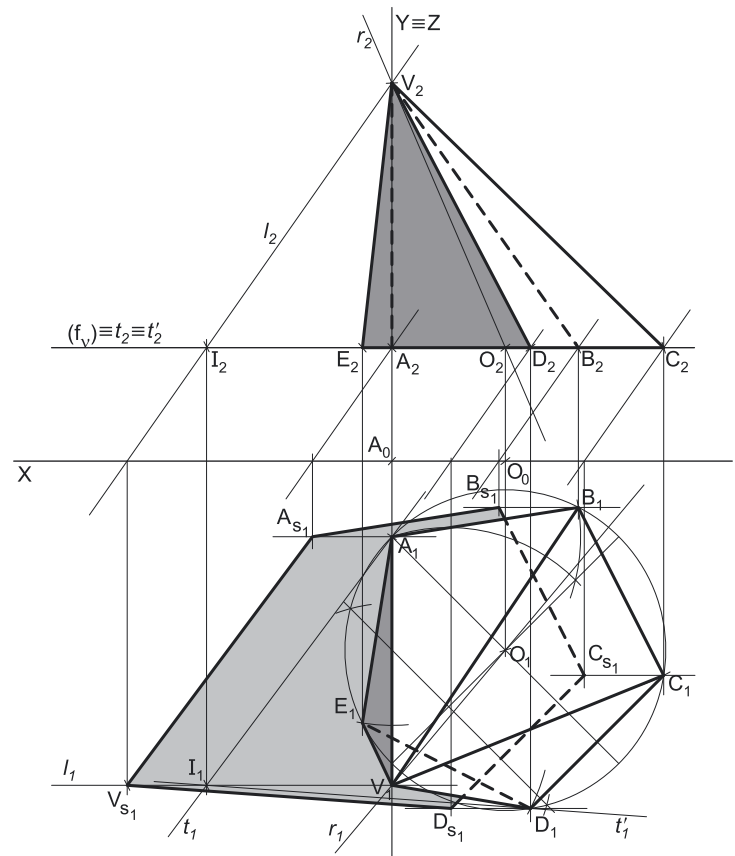
Em seguida, por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) conduziu-se  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ , a reta suporte do eixo da pirâmide), com o ângulo dado no enunciado. Este procedimento permitiu-nos, ainda, determinar  $V_1$  (a projeção horizontal do vértice da pirâmide), em função da sua abscissa –  $V_1$  é o ponto de  $r_1$  que tem abscissa nula. Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e que o plano da base tem 3 cm de cota (a cota dos pontos **O** e **A**), o vértice **V** tem 10 cm de cota ( $3 + 7 = 10$ ), o que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do vértice **V**). Note que foi possível, em seguida, desenhar a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ), pois a reta  $r$  está definida por dois pontos – os pontos **O** e **V**.

Em seguida, a partir das projeções de todos os seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABCDE]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>V<sub>1</sub>E<sub>1</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente horizontal da pirâmide. No entanto, a aresta **[DE]**, da base, é invisível (em projeção horizontal), pois separa duas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção horizontal – a base e a face lateral **[DEV]**. Por outro lado, as arestas **[AV]**, **[BV]** e **[CV]** são visíveis, em projeção horizontal, por se situarem na parte visível do sólido (são arestas que separam faces do sólido que são visíveis em projeção horizontal).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[CDEV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices **A** e **B**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[BC]** e **[AE]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção frontal), e as arestas laterais **[AV]** e **[BV]**. A aresta lateral **[DV]** é **visível**, por se situar na parte visível do sólido (o vértice **D** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $v$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  (o plano que contém a base) é um plano projetante frontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $v$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos **A** e **D**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AV]** e **[DV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AV]** e **[DV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas **[AV]** e **[DV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, do lado e da direita), as faces laterais **[ABV]**, **[BCV]** e **[CDV]** estão iluminadas enquanto as faces laterais **[AEV]** e **[DEV]** estão em sombra. A base da pirâmide também está em sombra, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [AVDCB]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[AEV]** e **[DEV]** e a base da pirâmide. Em projeção horizontal, a face lateral **[AEV]** é visível, enquanto a base e a face lateral **[DEV]** são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral **[AEV]**. Já em projeção frontal, a face lateral **[DEV]** é visível, enquanto a base e a face lateral **[AEV]** são invisíveis, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral **[DEV]**.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $B_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.  $V_{s_1}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **V**. As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se todas no mesmo plano de projeção, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **não admite a existência de pontos de quebra**.

Assim, desenhou-se o contorno da **sombra projetada (real) da pirâmide nos planos de projeção**, que é o polígono  $[A_{s_1}B_{s_1}C_{s_1}D_{s_1}V_{s_1}]$ . Desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a parte visível da sombra da pirâmide com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $v$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço frontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta  $r$ , das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do pentágono ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 881.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **A**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $O_2$  e  $A_2$  (as projeções frontais dos pontos **O** e **A**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o pentágono **[ABCDE]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o pentágono **[ABCDE]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita a pentágono. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal da figura, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos restantes quatro vértices do pentágono –  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  e  $E_1$ . Estes foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

Os procedimentos anteriores permitiram-nos desenhar as duas projeções da figura. A projeção frontal do pentágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

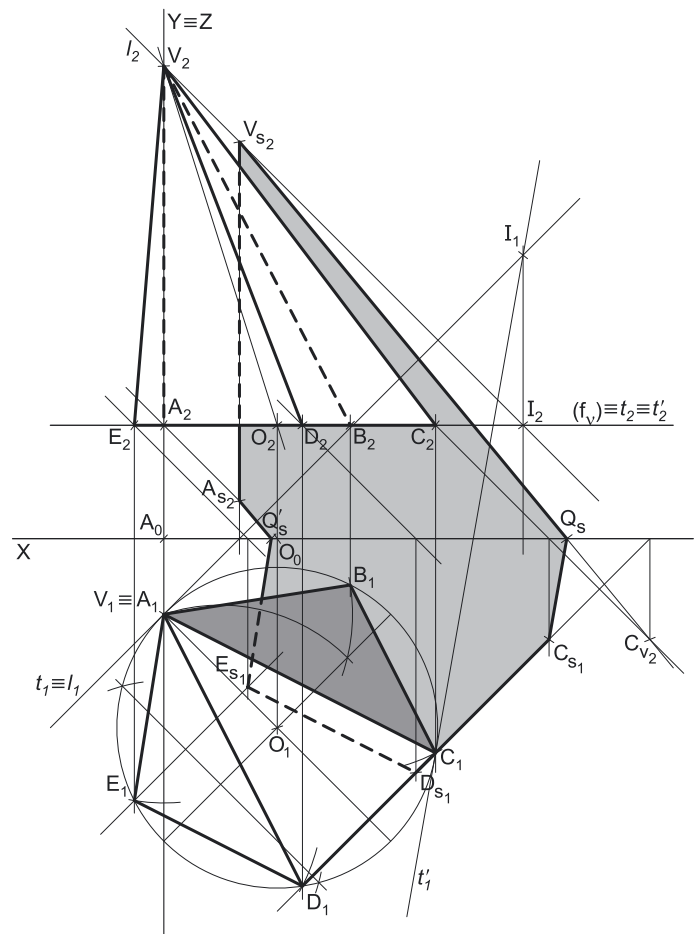
Uma vez que o ponto **V** (o vértice da pirâmide) se situa na mesma projetante horizontal do ponto **A** (é dado no enunciado), tem-se, imediatamente,  $V_1 \equiv A_1$  (pontos situados na mesma projetante horizontal têm as suas projeções horizontais coincidentes). Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 9,5 cm de altura e que o plano da base tem 3 cm de cota (a cota dos pontos **O** e **A**), o vértice **V** tem 12,5 cm de cota ( $3 + 9,5 = 12,5$ ), o que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[BCDEV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser um dos vértices de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AB]** e **[AE]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**). No entanto, a aresta lateral **[AV]** é projetante horizontal e as outras duas arestas estão ocultas, em projeção horizontal, por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar. Por outro lado, as arestas laterais **[CV]** e **[DV]** são visíveis (em projeção horizontal), por se situarem na parte visível do sólido (são arestas que separam faces da pirâmide que são visíveis, em projeção horizontal).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[CDEV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices **A** e **B**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[BC]** e **[AE]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção frontal), e as arestas laterais **[AV]** e **[BV]**. A aresta lateral **[DV]** é **visível**, por se situar na parte visível do sólido (o vértice **D** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $v$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  (o plano que contém a base) é um plano projetante frontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $v$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AV]** e **[CV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AV]** e **[CV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas **[AV]** e **[CV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais **[AEV]**, **[DEV]** e **[CDV]** estão iluminadas enquanto as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** estão em sombra. A base da pirâmide também está em sombra, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [AVCDE]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** e a base da pirâmide. Em projeção horizontal, a face lateral **[BCV]** é visível, enquanto a base e a face lateral **[ABV]** são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral **[BCV]**. Já em projeção frontal, todas as faces em sombra são invisíveis (a base incluída, pois é projetante frontal), pelo que, em projeção frontal, não há lugar à identificação de sombra própria.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção horizontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s_2}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A**.  $V_{s_2}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **V**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.  $E_{s_1}$  é a sombra real do ponto **E** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **E**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_2}$  e  $V_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral **[AV]** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[ $A_{s_2}V_{s_2}$ ]** é a sombra projetada do segmento **[AV]** e situa-se no **SPFS**.  $C_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[CD]**, da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[ $C_{s_1}D_{s_1}$ ]** é a sombra projetada do segmento **[CD]** e situa-se no **SPHA**.  $D_{s_1}$  e  $E_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[DE]**, da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[ $D_{s_1}E_{s_1}$ ]** é a sombra projetada do segmento **[DE]** e situa-se no **SPHA**. O mesmo já não acontece em relação às arestas **[CV]** e **[AE]** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $V_{s_2}$  e  $C_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_2}$  e  $E_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s_1}$  e  $V_{s_2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **C** –  $C_{v_2}$ .  $C_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto **C** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**. O segmento **[ $V_{s_2}C_{v_2}$ ]** é a sombra projetada do segmento **[CV]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[ $V_{s_2}C_{v_2}$ ]** (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[ $V_{s_2}Q_sC_{s_1}$ ]** é a **sombra real** da aresta lateral **[CV]**.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_2}$  e  $E_{s_1}$  teve-se em conta que o lado **[AE]** do pentágono é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $E_{s_1}$  (a sombra real do ponto **E**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[ $A_1E_1$ ]** (a projeção horizontal do segmento **[AE]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AE]**). A linha quebrada aberta **[ $A_{s_2}Q'_sE_{s_1}$ ]** é a **sombra real** da aresta **[AE]**, da base, nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada **[ $V_{s_2}A_{s_2}Q'_sE_{s_1}D_{s_1}C_{s_1}Q_s$ ]** é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento **[ $Q_sQ'_s$ ]** é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

## Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $v$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço frontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do pentágono ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 882.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por **A**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **A**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

A diagonal **[AC]**, do retângulo, é vertical, ou seja, é projetante horizontal, pelo que se tem, imediatamente, **C**<sub>1</sub>  $\equiv$  **A**<sub>1</sub> (os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes). Por outro lado, a diagonal **[AC]** é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, a partir de **A**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **A**), e na vertical que passa por **A**<sub>1</sub>, se mediram os 8 cm (o comprimento da diagonal), o que nos permitiu determinar **C**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **C**). Note que se garantiu que o ponto **C** tem cota positiva, para que se situe no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro (para que a pirâmide se situe no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro, como o enunciado refere expressamente).

A base da pirâmide (o retângulo **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que o retângulo **[ABCD]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não tem deformação). Assim, a partir de **A**<sub>2</sub> e **C**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), construiu-se a projeção frontal do retângulo, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do centro da circunferência circunscrita ao retângulo) – **O**<sub>2</sub> é o ponto médio do segmento de reta **[A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**, e determinou-se com o recurso à mediatriz daquele segmento.

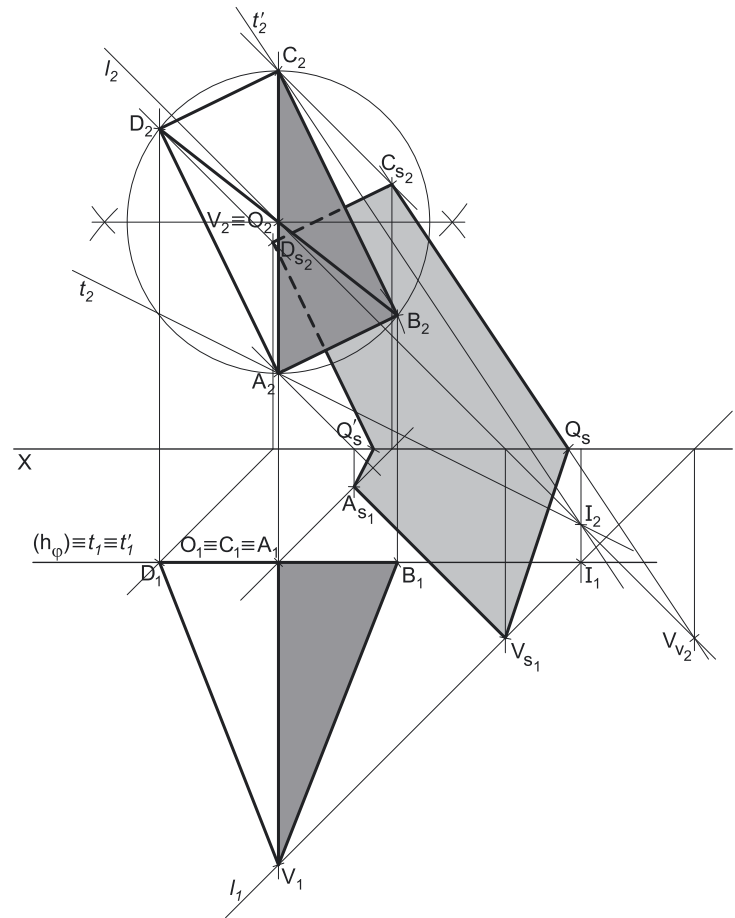
Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com raio até **A**<sub>2</sub> ou **C**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao retângulo. Em seguida, teve-se em conta que o lado **[AB]** mede 3,5 cm e que **B** se situa à direita do ponto **A**. Assim, com o compasso, fazendo centro em **A**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **A**) e com 3,5 cm de raio (a medida do lado **[AB]**), determinou-se **B**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **B**), sobre a circunferência e à direita do ponto **A**. Por fim, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção frontal do polígono, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do quarto vértice do retângulo – **D**<sub>2</sub>. As projeções horizontais dos pontos **O**, **B** e **D** estão sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção horizontal do retângulo reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Trata-se de uma **pirâmide reta**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta de topo (uma reta projetante frontal) – tem-se, imediatamente, **V**<sub>2</sub>  $\equiv$  **O**<sub>2</sub> (pois os pontos **O** e **V** estão situados na mesma reta projetante frontal). Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e que o plano da base tem 3 cm de afastamento (o afastamento do ponto **A**), o vértice **V** tem 11 cm de afastamento (3 + 8 = 11), o que nos permitiu determinar **V**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o retângulo **[ABCD]**, cuja projeção frontal é o retângulo **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são visíveis, em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[BCDV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção horizontal), e a aresta lateral **[AV]**. A aresta lateral **[CV]** é **visível**, por se situar na parte visível do sólido (o vértice **C** é o vértice de maior cota da pirâmide). Note que, nesta situação, a aresta **[AV]** (que é invisível em projeção horizontal), está, na realidade, oculta pela aresta lateral **[CV]**, que é visível em projeção horizontal.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\varphi$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base) é um plano projetante horizontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $\varphi$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AV]** e **[CV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AV]** e **[CV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas **[AV]** e **[CV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais **[ADV]** e **[CDV]** estão iluminadas enquanto as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** estão em sombra. A base da pirâmide também está em sombra, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [AVCD]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** e a base da pirâmide. Em projeção horizontal, a face lateral **[BCV]** é visível, enquanto a base e a face lateral **[ABV]** são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral **[BCV]**. Já em projeção frontal, as duas faces laterais em sombra são visíveis (as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]**), mas a base é invisível, pelo que a sombra própria a assinalar, em projeção frontal, é a referente às faces laterais **[ABV]** e **[BCV]**.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $V_{s1}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **V**.  $C_{s2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.  $D_{s2}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$C_{s2}$  e  $D_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[CD]**, da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s2}D_{s2}]$  é a sombra projetada do segmento **[CD]** e situa-se no **SPFS**.  $A_{s1}$  e  $V_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[AV]** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s1}V_{s1}]$  é a sombra projetada do segmento **[AV]** e situa-se no **SPHA**. O mesmo já não acontece em relação às arestas **[CV]** e **[AD]** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $V_{s1}$  e  $C_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $A_{s1}$  e  $D_{s2}$  (que se situam, igualmente, em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s2}$  e  $V_{s1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **V** –  $V_{v2}$ .  $V_{v2}$  é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **V**. O segmento  $[C_{s2}V_{v2}]$  é a sombra projetada do segmento **[CV]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C_{s2}V_{v2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[V_{s1}Q_sC_{s2}]$  é a **sombra real** da aresta lateral **[CV]**.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s1}$  e  $D_{s2}$  teve-se em conta que o lado **[AD]** do retângulo é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $D_{s2}$  (a sombra real do ponto **D**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_{s1}D_{s2}]$  (a projeção frontal do segmento **[AD]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AD]**). A linha quebrada aberta  $[A_{s1}Q'_sD_{s2}]$  é a **sombra real** da aresta **[AD]**, da base, nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[V_{s1}A_{s1}Q'_sD_{s2}C_{s2}Q_s]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em projeção frontal), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\varphi$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço horizontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do retângulo ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 883.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **V**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Os pontos **A** e **V** situam-se no mesmo plano de perfil, pelo que as suas projeções se situam na mesma linha de chamada. Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço horizontal. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ) passa por **A**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **A**). O plano  $\phi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

O segmento de reta **[AV]** é uma aresta lateral da pirâmide, cuja base está contida no plano  $\phi$  (que é um plano frontal). Por outro lado, trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta de topo (uma reta projetante frontal) – tem-se, imediatamente, **O**<sub>2</sub>  $\equiv$  **V**<sub>2</sub> (pois os pontos **O** e **V** estão situados na mesma reta projetante frontal). **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**) está sobre  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

A base da pirâmide (o triângulo **[ABC]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\phi$ ), pelo que o triângulo **[ABC]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não tem deformação). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com raio até **A**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **A**), desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao triângulo. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção frontal do triângulo, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos outros dois vértices do triângulo – **B**<sub>2</sub> e **C**<sub>2</sub>. As projeções horizontais dos pontos **B** e **C** estão sobre o traço horizontal do plano  $\phi$  ( $h_\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. Note que os vértices **B** e **C** foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção horizontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\phi$  ( $h_\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. Em seguida, a partir das projeções de todos os quatro vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

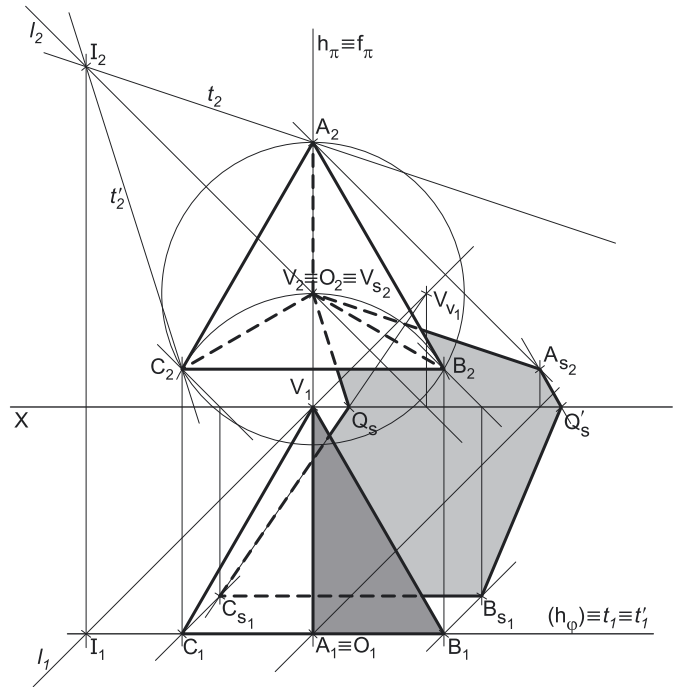
O **contorno aparente frontal** é o triângulo **[ABC]**, cuja projeção frontal é o triângulo **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são invisíveis, em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[BACV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente horizontal da pirâmide. No entanto, a aresta **[BC]**, da base, é invisível (em projeção horizontal), pois separa duas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção horizontal – a base e a face lateral **[BCV]**. No entanto, esta aresta está oculta (em projeção horizontal) por arestas do sólido que são visíveis, em projeção horizontal. Por outro lado, a aresta lateral **[AV]** é visível, em projeção horizontal, por se situar na parte visível do sólido (o ponto **A** é o vértice de maior cota da pirâmide).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano  $\phi$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\phi$  (o plano que contém a base) é um plano projetante horizontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $\phi$ ).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base da pirâmide nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AV]** e **[CV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AV]** e **[CV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As arestas [AV] e [CV] separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a face lateral [ACV] está iluminada enquanto as faces laterais [ABV] e [BCV] estão em sombra. A base da pirâmide também está iluminada, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [AVCB]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais [ABV] e [BCV]. Em projeção horizontal, a face lateral [ABV] é visível, enquanto a face lateral [BCV] é invisível, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral [ABV]. Já em projeção frontal, as duas faces laterais em sombra são invisíveis (as faces laterais [ABV] e [BCV]), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer sombra própria a assinalar.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

O ponto V é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $V_{s2} \equiv V_2$ .  $A_{s2}$  é a sombra real do ponto A (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por A.  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto B (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por B.  $C_{s1}$  é a sombra real do ponto C (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por C. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s2}$  e  $V_{s2}$  situam-se, ambas, no SPFS, pelo que a sombra da aresta lateral [AV] não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[V_{s2}A_{s2}]$  é a sombra projetada do segmento [AV] e situa-se no SPFS.  $B_{s1}$  e  $C_{s1}$  situam-se, ambas, no SPHA, pelo que a sombra da aresta [BC], da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s1}C_{s1}]$  é a sombra projetada do segmento [BC] e situa-se no SPHA. O mesmo já não acontece em relação às arestas [CV] e [AB] – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $C_{s1}$  e  $V_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $B_{s1}$  e  $A_{s2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s1}$  e  $V_{s2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto V –  $V_{v1}$ .  $V_{v1}$  é a sombra virtual do ponto V – situa-se no SPHP e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto V. O segmento  $[C_{s1}V_{v1}]$  é a sombra projetada do segmento [CV] no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C_{s1}V_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo X é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[V_{s2}Q_sC_{s1}]$  é a **sombra real** da aresta lateral [CV].

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s2}$  e  $B_{s1}$  teve-se em conta que o lado [AB] do triângulo é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A_{s2}$  (a sombra real do ponto A, que se situa no SPFS) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_2B_2]$  (a projeção frontal do segmento [AB]) até ao eixo X, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [AB]). A linha quebrada aberta  $[A_{s2}Q'_sB_{s1}]$  é a **sombra real** da aresta [AB], da base, nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[V_{s2}A_{s2}Q'_sB_{s1}C_{s1}Q_s]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pela própria pirâmide.

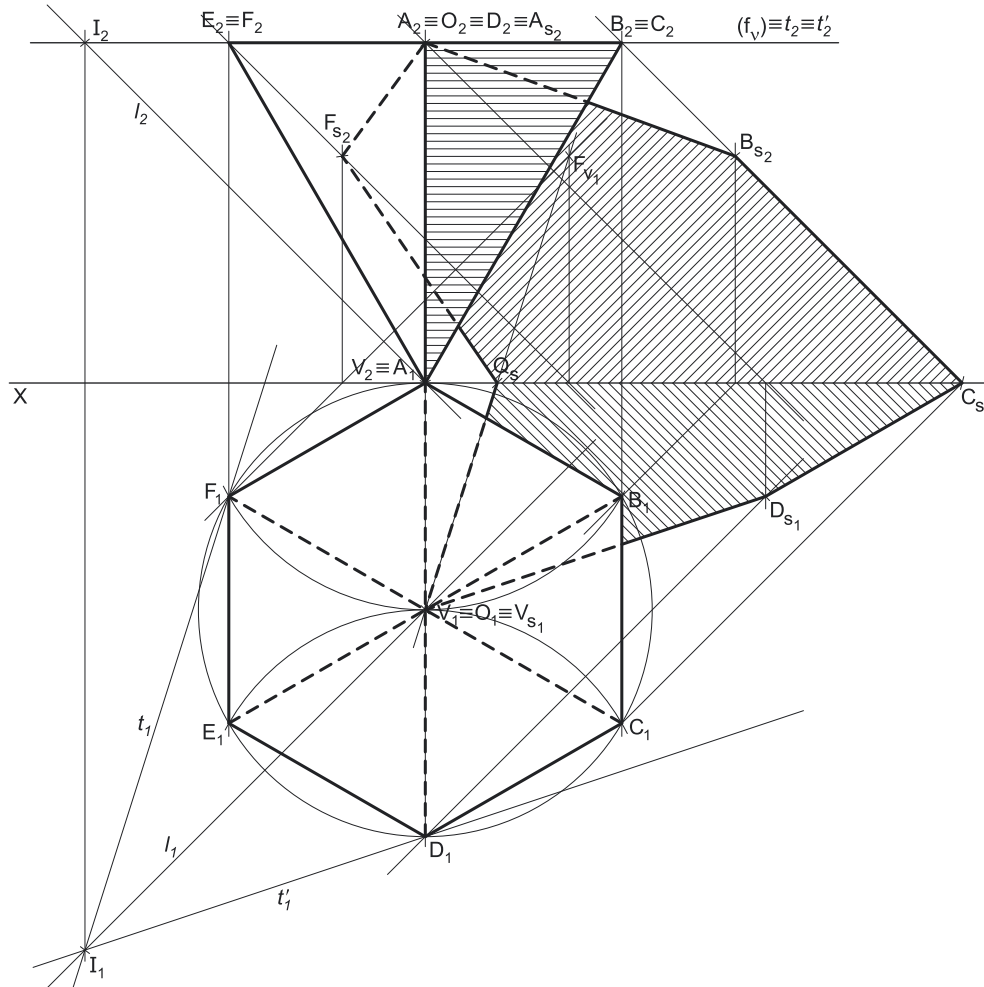
Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo X, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\varphi$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço horizontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do triângulo ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

884.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **V**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Os pontos **A** e **V** situam-se no mesmo plano de perfil, pelo que as suas projeções se situam na mesma linha de chamada. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

O segmento de reta **[AV]** é uma aresta lateral da pirâmide, cuja base está contida no plano  $v$  (que é um plano horizontal). Por outro lado, trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal) – tem-se, imediatamente,  $O_1 \equiv V_1$  (pois os pontos **O** e **V** estão situados na mesma reta projetante horizontal).  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) está sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

A base da pirâmide (o hexágono **[ABCDEF]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o hexágono **[ABCDEF]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao hexágono. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do hexágono, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos restantes cinco vértices do hexágono – **B**<sub>1</sub>, **C**<sub>1</sub>, **D**<sub>1</sub>, **E**<sub>1</sub> e **F**<sub>1</sub>. As projeções frontais daqueles pontos estão sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Note que os vértices **B**, **C**, **D**, **E** e **F** foram nomeados de forma arbitrária (mas sequencial), pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção frontal do hexágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Em seguida, a partir das projeções de todos os sete vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é o hexágono **[ABCDEF]**, cuja projeção horizontal é o hexágono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são invisíveis, em projeção horizontal.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [DECV], cuja projeção frontal é o polígono  $[C_2D_2E_2V_2]$ . Em projeção horizontal, existem três vértices que não integram o contorno aparente horizontal do sólido – os vértices **A**, **B** e **F**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são invisíveis (em projeção frontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [AB], [BC], [AF], e [EF], da base, e as arestas laterais [AV], [BV] e [FV]. No entanto, todas estas arestas estão ocultas (em projeção frontal) por arestas do sólido que são visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar. Note que as faces laterais [BCV] e [EFV] estão contidas em planos projetantes frontais. Salienta-se que a aresta lateral [CV] é visível, em projeção frontal, pois o vértice **C** é o vértice de maior afastamento do sólido.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $v$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  (o plano que contém a base) é um plano projetante frontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $v$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos **F** e **D**, respetivamente. Assim, as arestas laterais [FV] e [DV] são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais [FV] e [DV] são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas [FV] e [DV] separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais [EFV] e [DEV] estão iluminadas enquanto as faces laterais [AFV], [ABV], [BCV] e [CDV] estão em sombra. A base da pirâmide também está iluminada, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada** [DVFABC].

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais [ABV], [BCV], [CDV] e [AFV]. Em projeção frontal, a face lateral [CDV] é visível, enquanto as restantes faces laterais são todas invisíveis, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral [CDV]. Já em projeção horizontal, todas as faces laterais em sombra são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria a assinalar.

A **sombra própria** visível da pirâmide (em projeção frontal) foi assinalada com **tracejado**. Este foi executado paralelamente ao eixo **X**.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

O ponto **V** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $V_{s1} \equiv V_1$ . O ponto **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s2} \equiv A_2$ .  $B_{s2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**. O raio luminoso que passa pelo ponto **C** é uma reta passante, pelo que  $C_s$  (a sombra real do ponto **C**) se situa no eixo **X** –  $C_s$  é, simultaneamente, o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C** ( $C_s$  situa-se tanto no **SPHA** como no **SPFS**).  $D_{s1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.

As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Note que a sombra do ponto **C** ( $C_s$ ) se situa no eixo **X**, pelo que  $C_s$  é, de forma imediata, um dos pontos de quebra da sombra da pirâmide.

$A_{s2}$  e  $B_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta [AB], da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s2}B_{s2}]$  é a sombra projetada do segmento [AB] e situa-se no **SPFS**.  $A_{s2}$  e  $F_{s2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta [AF], da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s2}F_{s2}]$  é a sombra projetada do segmento [AF] e situa-se no **SPFS**.  $B_{s2}$  e  $C_s$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta [BC], da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s2}C_s]$  é a sombra projetada do segmento [BC] e situa-se no **SPFS**.

$C_s$  e  $D_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta [CD], da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_sD_{s1}]$  é a sombra projetada do segmento [CD] e situa-se no **SPHA**.  $D_{s1}$  e  $V_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral [DV] não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[V_{s1}D_{s1}]$  é a sombra projetada do segmento [DV] e situa-se no **SPHA**.

O mesmo já não acontece em relação à aresta lateral [FV] – de facto, existe um ponto de quebra entre  $F_{s2}$  e  $V_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos). Para determinar esse ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **F** –  $F_{v1}$ .  $F_{v1}$  é a sombra virtual do ponto **F** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **F**. O segmento  $[V_{s1}F_{v1}]$  é a sombra projetada do segmento [FV] no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[V_{s1}F_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[V_{s1}Q_sF_{s2}]$  é a **sombra real** da aresta lateral [FV].

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A linha quebrada fechada  $[V_{s1}Q_sF_{s2}A_{s2}B_{s2}C_{s2}D_{s1}]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sC_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pela própria pirâmide.

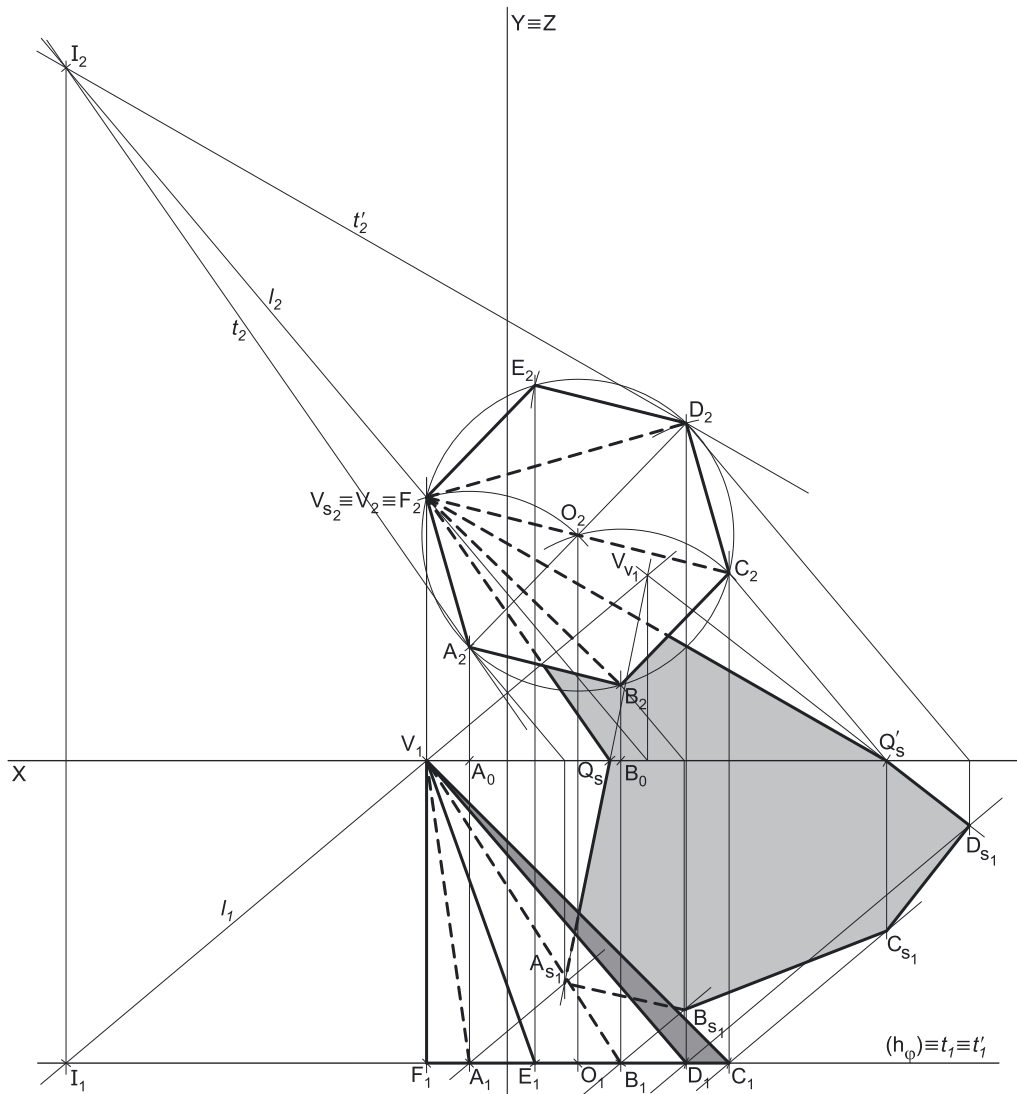
Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com **tracejado**. Este foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções. A direção luminosa convencional, em projeção horizontal, faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a esquerda**) com o eixo **X**, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte visível da sombra projetada da pirâmide que se situa no **SPHA**) faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a direita**) com o eixo **X**. A direção luminosa convencional, em projeção frontal, faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a esquerda**) com o eixo **X**, pelo que o **tracejado** (que preenche a parte visível da sombra da pirâmide que se situa no **SPFS**) faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para **a direita**) com o eixo **X**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\nu$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço frontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do hexágono ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**. O tracejado que preenche tanto a parte visível da sombra projetada da pirâmide como a sua sombra própria (em ambas as projeções) executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 885.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por **A**<sub>1</sub> e **B**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

## Resolução:

### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o hexágono **[ABCDEF]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que o hexágono **[ABCDEF]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não tem deformação). Assim, a partir de **A**<sub>2</sub> e **B**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), determinou-se o ponto **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do centro da circunferência circunscrita ao hexágono) e desenhou-se a projeção horizontal da circunferência em que o polígono se inscreve – a circunferência tem centro em **O**<sub>2</sub> e raio até **A**<sub>2</sub> ou **B**<sub>2</sub>. Em seguida, construiu-se o hexágono **[ABCDEF]** em verdadeira grandeza (em projeção frontal), o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos restantes vértices do polígono. Tenha em conta que se garantiu que o hexágono se situa no espaço do 1.<sup>ª</sup> Diedro, para que a pirâmide se situe no espaço do 1.<sup>ª</sup> Diedro, como o enunciado refere expressamente.

As projeções horizontais dos restantes vértices do hexágono estão sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. Note que os vértices do hexágono foram nomeados de forma sequencial, a partir dos vértices dados.

O vértice da pirâmide situa-se na mesma reta projetante frontal do vértice de maior abscissa da base, que é o vértice **F**. Daí que se tem, imediatamente, **V**<sub>2</sub>  $\equiv$  **F**<sub>2</sub>. Atendendo a que o vértice da pirâmide é invisível em projeção frontal, o vértice **V** tem de ter afastamento inferior à base. Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e que o plano da base tem 8 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **B**), o vértice **V** tem afastamento nulo ( $8 - 8 = 0$ ), o que nos permitiu determinar **V**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os sete vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o hexágono **[ABCDEF]**, cuja projeção frontal é o hexágono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são invisíveis, em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[CDEFV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **B**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[AF]** e **[BC]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção horizontal), e as arestas laterais **[AV]** e **[BV]**. As arestas laterais **[DV]** e **[EV]** são **visíveis**, por se situarem na parte visível do sólido (os vértices **D** e **E** são os vértices de maior cota da pirâmide).

### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano  $\varphi$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base) é um plano projetante horizontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $\varphi$ ).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base da pirâmide nos pontos **A** e **D**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AV]** e **[DV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AV]** e **[DV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas **[AV]** e **[DV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – as faces laterais **[AFV]**, **[EFV]** e **[DEV]** estão iluminadas enquanto as faces laterais **[ABV]**, **[BCV]** e **[CDV]** estão em sombra. A base da pirâmide também está iluminada, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [DVABC]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[ABV]**, **[BCV]** e **[CDV]**. Em projeção horizontal, a face lateral **[CDV]** é visível, enquanto as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral **[CDV]**. Já em projeção frontal, todas as faces laterais em sombra são invisíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer sombra própria a assinalar.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção horizontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Determinação da sombra projetada da pirâmide:

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **V** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $V_{s2} \equiv V_2$ .  $A_{s1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $D_{s1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s1}$  e  $B_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[AB]**, da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s1}B_{s1}]$  é a sombra projetada do segmento **[AB]** e situa-se no **SPHA**.  $B_{s1}$  e  $C_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[BC]**, da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s1}C_{s1}]$  é a sombra projetada do segmento **[BC]** e situa-se no **SPHA**.  $C_{s1}$  e  $D_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[CD]**, da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s1}D_{s1}]$  é a sombra projetada do segmento **[CD]** e situa-se no **SPHA**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas laterais **[AV]** e **[DV]** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s1}$  e  $V_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $D_{s1}$  e  $V_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos). Para se determinarem os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **V** –  $V_{v1}$ .  $V_{v1}$  é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **V**.

O segmento  $[A_{s1}V_{v1}]$  é a sombra projetada do segmento **[AV]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s1}V_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s1}Q_sV_{s2}]$  é a **sombra real** da aresta lateral **[AV]**. O segmento  $[D_{s1}V_{v1}]$  é a sombra projetada do segmento **[DV]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem também uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[D_{s1}V_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[D_{s1}Q'_sV_{s2}]$  é a **sombra real** da aresta lateral **[DV]**.

A linha quebrada fechada  $[V_{s2}Q_sA_{s1}B_{s1}C_{s1}D_{s1}Q'_s]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\phi$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço horizontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do hexágono ou, ainda, das retas **t** e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

**886.**

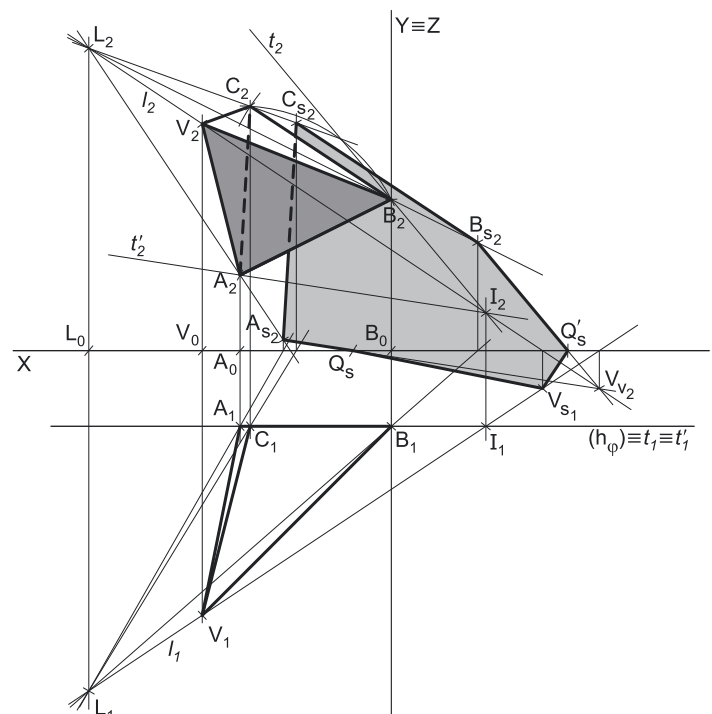
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A, B, V e L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço horizontal. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ) passa por  $A_1$  e por  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $\phi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:**

*Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o triângulo **[ABC]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\phi$ ), pelo que o triângulo **[ABC]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não tem deformação). Assim, a partir de  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo, o que nos permitiu determinar  $C_2$  (a projeção frontal do vértice **C**) e, ainda,  $O_2$  (a projeção frontal do centro do triângulo). Tenha em conta que se garantiu que o triângulo se situa no espaço do **1º Diedro**, para que a pirâmide se situe no espaço do **1º Diedro**, como o enunciado refere expressamente.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A projeção horizontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. Em seguida, a partir das projeções de todos os quatro vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ABCV]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2V_2]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente frontal da pirâmide. No entanto, a aresta  $[AC]$ , da base, é invisível (em projeção frontal), pois separa duas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – a base e a face lateral  $[ACV]$ . Por outro lado, a aresta lateral  $[BV]$  é visível, em projeção frontal, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal – as faces  $[ABV]$  e  $[BCV]$ ).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[BCAV]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1A_1V_1]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente horizontal da pirâmide. No entanto, a aresta  $[AB]$ , da base, é invisível (em projeção horizontal), pois separa duas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção horizontal – a base e a face lateral  $[ABV]$ . No entanto, esta aresta está oculta (em projeção horizontal) por arestas do sólido que são visíveis, em projeção horizontal. Por outro lado, a aresta lateral  $[CV]$  é visível, em projeção horizontal, por se situar na parte visível do sólido (o ponto **A** é o vértice de maior cota da pirâmide).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por dois pontos (o ponto **V** e o foco luminoso **L**).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\varphi$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base) é um plano projetante horizontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $\varphi$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos **B** e **A**, respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[AV]$  e  $[BV]$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[AV]$  e  $[BV]$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas  $[AV]$  e  $[BV]$  separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[ACV]$  e  $[BCV]$  estão iluminadas, enquanto a face lateral  $[ABV]$  e a base estão em sombra. Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[AVBC]$ .

A **sombra própria** da pirâmide integra a face lateral  $[ABV]$  e a base. Em projeção horizontal, a face lateral  $[ABV]$  é invisível, bem como a base (que é projetante horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, a face lateral  $[ABV]$  é visível, enquanto a base é invisível, pelo que, em projeção frontal, a única sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral  $[ABV]$ .

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s_2}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A**.  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.  $V_{s_1}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **V**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_2}$  e  $C_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[AC]$ , da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_2}C_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AC]$  e situa-se no **SPFS**.  $C_{s_2}$  e  $B_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[BC]$ , da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s_2}C_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BC]$  e situa-se no **SPFS**. O mesmo já não acontece em relação às arestas  $[AV]$  e  $[BV]$  – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $V_{s_1}$  e  $A_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $V_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para se determinarem os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **V** –  $V_{v_2}$ .  $V_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **V**. O segmento  $[A_{s_2}V_{v_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AV]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s_2}V_{v_2}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s_2}Q_sV_{s_1}]$  é a **sombra real** da aresta lateral  $[AV]$ . O segmento  $[C_{s_2}V_{v_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[CV]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C_{s_2}V_{v_2}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[C_{s_2}Q'_sV_{s_1}]$  é a **sombra real** da aresta lateral  $[CV]$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A linha quebrada fechada  $[V_{s1}Q_sA_{s2}C_{s2}B_{s2}Q'_s]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em projeção frontal), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\varphi$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço horizontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do triângulo ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 887.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **O** é o centro de uma circunferência com 4 cm de raio, que é está contida num plano frontal (de frente) e é tangente ao Plano Horizontal de Projeção. Dessa forma, a cota do ponto **O** é igual ao raio da circunferência – o ponto **O** tem 4 cm de cota. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do tetraedro:

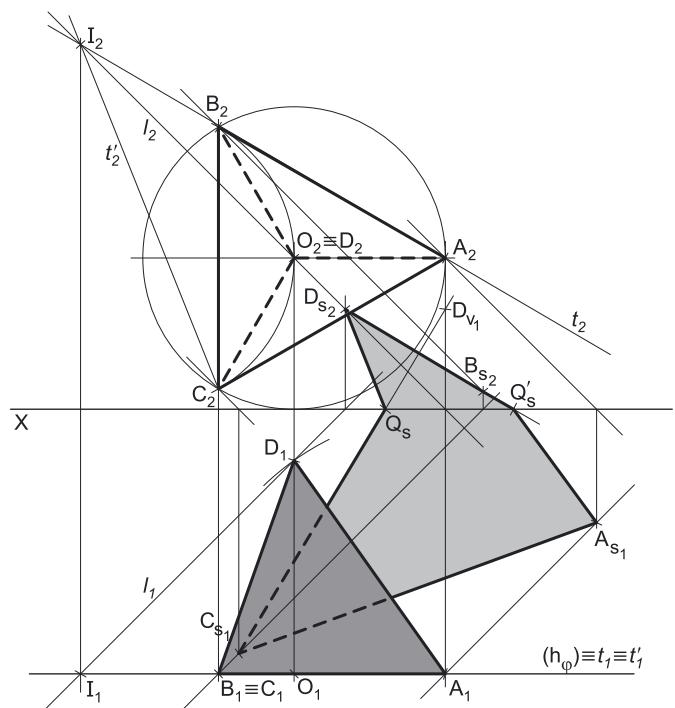
O triângulo equilátero  $[ABC]$  está contido num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não apresenta deformação). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao triângulo (que é tangente ao eixo **X**).

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção frontal do triângulo  $[ABC]$ , inscrita na circunferência, de acordo com os dados – o lado  $[BC]$  é vertical e é o lado mais à esquerda do triângulo. Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções frontais dos três vértices do triângulo, que foram nomeados de forma sequencial e atendendo às indicações fornecidas no enunciado – **B** é o vértice de maior cota do lado  $[BC]$ , pelo que **C** é o extremo inferior desse lado e **A** é o vértice mais à direita do triângulo.

A projeção frontal do triângulo situa-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Um tetraedro toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**, qualquer que seja a face que se considere como base. Assim, o vértice **D** (o quarto vértice do sólido) situa-se numa reta que passa pelo ponto **O** e que é ortogonal ao plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (que é o plano  $\varphi$ ), ou seja, situa-se na reta de topo (projetante frontal) que passa pelo ponto **O**. Dessa forma, tem-se, imediatamente  $D_2 \equiv O_2$ , pois os dois pontos situam-se na mesma reta projetante frontal.

Apesar de o tetraedro tomar a forma aparente de uma pirâmide triangular regular, não é conhecida a altura dessa pirâmide mas, sim, é adquirido o facto de que **todas as arestas de um tetraedro são iguais** (têm o mesmo comprimento), pois trata-se de um **poliedro regular**. Assim, é um facto que todas as arestas que convergem no vértice **D** (as arestas  $[AD]$ ,  $[BD]$  e  $[CD]$ ) têm o mesmo comprimento dos lados do triângulo  $[ABC]$  (que estão em verdadeira grandeza em projeção frontal). Analisando detalhadamente a posição daquelas três arestas, constata-se que a aresta  $[AV]$  é horizontal (de nível), pelo que é paralela ao Plano Horizontal de Projeção – a aresta  $[AV]$  projeta-se em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) e com raio igual à medida do lado do triângulo  $[ABC]$  (que está em verdadeira grandeza em projeção frontal), determinou-se  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto  $D$ ). Em seguida, a partir das duas projeções dos quatro vértices do tetraedro, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o triângulo  $[ABC]$ , cuja projeção frontal é o triângulo  $[A_2B_2C_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice  $D$ . Este, por ser o vértice de **menor afastamento** do tetraedro, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AD]$ ,  $[BD]$  e  $[CD]$  são invisíveis em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é o triângulo  $[ABD]$  (que é, na prática, a face  $[ABD]$ ), cuja projeção frontal é o triângulo  $[A_2B_2D_2]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice  $C$ . Este, por ser o vértice de **menor cota** do tetraedro, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AC]$ ,  $[BC]$  e  $[CD]$  são invisíveis em projeção horizontal. No entanto, as arestas  $[AC]$  e  $[CD]$  estão ocultas por arestas do tetraedro que são visíveis em projeção horizontal, e a aresta  $[BC]$  é projetante horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do tetraedro:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

Tendo em conta que um **tetraedro** toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**, efetuaram-se os procedimentos acima expostos, considerando-se que o vértice  $D$  é o vértice dessa pirâmide aparente e que o triângulo  $[ABC]$  é a sua base.

1. Conduziu-se, pelo vértice do sólido (o ponto  $D$ ), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $D$ ) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base (o triângulo  $[ABC]$ ) – o ponto  $I$ . O ponto  $I$  é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\varphi$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base) é um plano projetante horizontal.
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas rasantes à base do sólido (o triângulo  $[ABC]$ ) – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $\varphi$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base do sólido nos pontos  $B$  e  $C$ , respetivamente. Assim, as arestas  $[BD]$  e  $[CD]$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas  $[BD]$  e  $[CD]$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas  $[BD]$  e  $[CD]$  separam a parte da superfície lateral do tetraedro que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces  $[BCD]$  e  $[ABC]$  estão iluminadas, enquanto as faces  $[ABD]$  e  $[ACD]$  estão em sombra. Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada  $[BDCA]$** .

Sublinha-se que **nesta situação particular**, um dos planos é rasante ao sólido ao longo da face  $[ABD]$ . O que acontece, na realidade, é que a face  $[ABD]$  está contida num plano luz/sombra (o plano que é rasante ao sólido ao longo da aresta  $[BD]$ ). Assim, o plano luz/sombra contém a aresta  $[BD]$ , cuja sombra é «arrastada» ao longo de toda a face  $[ABD]$ . De facto, a face  $[ABD]$  situa-se, na sua totalidade, na **sombra espacial** da aresta  $[BD]$ .

Nesse sentido, a **sombra própria** do tetraedro integra as faces  $[ABD]$  e  $[ACD]$ . Em projeção horizontal, a face  $[ABD]$  é visível, enquanto a face  $[ACD]$  é invisível, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face  $[ABD]$ . Já em projeção frontal, as duas faces em sombra são invisíveis (as faces  $[ABD]$  e  $[ACD]$ ), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer sombra própria a assinalar.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção horizontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do tetraedro:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$D_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $D$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $D$ .  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $B$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $B$ .  $A_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $A$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A$ .  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $C$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $C$ . As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do tetraedro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$B_{s_2}$  e  $D_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[BD]$  não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[D_{s_2}B_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BD]$  e situa-se no **SPFS**.  $A_{s_1}$  e  $C_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[AC]$  não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s_1}A_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AC]$  e situa-se no **SPHA**. O mesmo já não acontece em relação às arestas  $[AB]$  e  $[CD]$  – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C_{s_1}$  e  $D_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s_1}$  e  $D_{s_2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto  $D - D_{v_1}$ .  $D_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto  $D$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $D$ . O segmento  $[C_{s_1}D_{v_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[CD]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C_{s_1}D_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[C_{s_1}Q_sD_{s_2}]$  é a **sombra real** da aresta  $[CD]$ .

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  teve-se em conta que o lado  $[AB]$  do triângulo é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $B$ , que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_2B_2]$  (a projeção frontal do segmento  $[AB]$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[AB]$ ). A linha quebrada aberta  $[B_{s_2}Q'_sA_{s_1}]$  é a **sombra real** da aresta  $[AB]$  nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[D_{s_2}B_{s_2}Q'_sA_{s_1}C_{s_1}Q_s]$  é a **sombra projetada** do tetraedro nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do tetraedro. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do tetraedro nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do tetraedro é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio sólido.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o tetraedro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a face  $[ABC]$  do tetraedro (o plano  $\varphi$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço horizontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do triângulo ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o tetraedro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o tetraedro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 888.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide), pelo seu traço frontal, em função dos dados. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, representou-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados e pertencente ao plano  $v$ . O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal do ponto  $A$  ( $A_2$ ) se situa sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ).

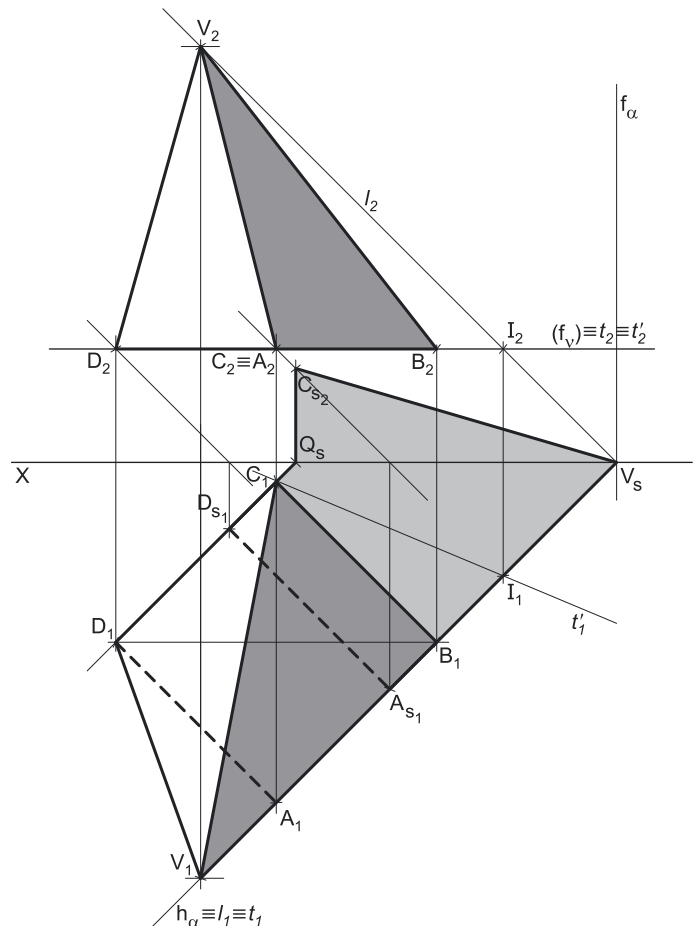
A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado  $[ABCD]$  se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), mediu-se (em verdadeira grandeza) o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com o Plano Frontal de Projeção (os lados do quadrado fazem ângulos de  $45^\circ$  com o Plano Frontal de Projeção, como o enunciado refere expressamente), o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta suporte do lado  $[AB]$ . Sobre essa reta mediram-se os 6 cm (a medida do lado do quadrado) e determinou-se  $B_1$ , a projeção horizontal do ponto  $B$ . Note que se garantiu que o vértice  $B$  se situa à direita do vértice  $A$  (que é o vértice de maior afastamento do quadrado), de acordo com as indicações fornecidas pelo enunciado.

A partir de  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do quadrado, (garantindo-se, uma vez mais, que  $A$  é o vértice de maior afastamento do polígono), o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado –  $C_1$  e  $D_1$ . As projeções frontais dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  situam-se sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Seguindo, uma vez mais, as indicações do enunciado, representou-se o plano  $\alpha$ , que é o plano projetante horizontal que contém a face lateral [ABV]. O plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal que contém os pontos **A** e **B** (dois vértices da face lateral [ABV]), pelo que o seu traço horizontal passa por  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O ponto **V** é, também ele, um ponto do plano  $\alpha$ , pelo que a sua projeção horizontal ( $V_1$ ) tem de se situar sobre  $h_\alpha$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ), pois o plano  $\alpha$  é um plano projetante horizontal –  $V_1$  é, assim, o ponto de  $h_\alpha$  que tem 11 cm de afastamento (o vértice da pirâmide tem 11 cm de afastamento).

Sublinha-se que, na realidade, não é necessária a representação do plano  $\alpha$  para a resolução do exercício, sendo suficiente que se mantenham os raciocínios atrás expostos. De facto, a representação do plano  $\alpha$  pelos seus traços no exercício teve a ver, apenas, com uma melhor relação entre os raciocínios expostos e a resolução gráfica apresentada.

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e que o plano da base tem 3 cm de cota (o cota dada no enunciado), o vértice **V** tem 11 cm de cota ( $3 + 8 = 11$ ), o que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do vértice **V**). Note que o ponto **V** tem 11 de afastamento e 11 cm de cota, pelo que o ponto **V** é necessariamente um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). Em seguida, a partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [BADV], cuja projeção frontal é o polígono [ $B_2A_2D_2V_2$ ]. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [BC] e [CD], da base (que estão ocultas, em projeção frontal, por arestas do sólido que são visíveis, em projeção frontal) e a aresta lateral [CV]. Já a aresta lateral [AV] é **visível** (em projeção frontal), pois separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal (os vértices **A** e **V** são os vértices de maior afastamento da pirâmide). Note ainda que, nesta situação, a aresta lateral [CV] está oculta (em projeção frontal) pela aresta lateral [AV], que é visível (em projeção frontal). Assim, em projeção frontal não existe qualquer invisibilidade a assinalar.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [BCDV], cuja projeção horizontal é o polígono [ $B_1C_1D_1V_1$ ]. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser um dos vértices de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [AB] e [AD], da base, e a aresta lateral [AV]. Note que a aresta [AB], da base, e a aresta lateral [AV] estão ocultas, em projeção horizontal, por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal. Assim, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta [AD], da base. Já a aresta lateral [CV] é **visível**, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção horizontal).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $v$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  (o plano que contém a base) é um plano projetante frontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $v$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais [AV] e [CV] são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais [AV] e [CV] são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas [AV] e [CV] separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais [ADV] e [CDV] estão iluminadas enquanto as faces laterais [ABV] e [BCV] estão em sombra. A base da pirâmide também está em sombra, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada** [AVDC].

Sublinha-se que **nesta situação particular**, um dos planos é rasante ao sólido ao longo da face lateral [ABV]. O que acontece, na realidade, é que a face lateral [ABV] está contida num plano luz/sombra (o plano  $\alpha$  é, afinal, um plano luz/sombra, pois contém a direção luminosa). Assim, o plano luz/sombra contém a aresta [AV], cuja sombra é «arrastada» ao longo de toda a face lateral [ABV]. De facto, a face lateral [ABD] situa-se, na sua totalidade, na **sombra espacial** da aresta [AV].

Nesse sentido, a **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais [ABV] e [BCV] e a base da pirâmide. Em projeção horizontal, a face lateral [BCV] é visível, enquanto a base e a face lateral [ABV] (que está contida num plano projetante horizontal) são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral [BCV]. Já em projeção frontal, a face lateral [ABV] é visível, enquanto a base e a face lateral [ABV] (que está contida num plano projetante horizontal) são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral [BCV].

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.  $C_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.  $V_s$  é a sombra real do ponto **V** e é, simultaneamente, o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **V**, que é uma reta passante, pelo que  $V_s$  se situa no eixo **X** ( $V_s$  situa-se simultaneamente no **SPHA** e no **SPFS**).

As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Note que  $V_s$ , porque se situa no eixo **X**, é, imediatamente, um dos pontos de quebra da sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** da pirâmide.

$A_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[AD]**, da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A<sub>s1</sub>D<sub>s1</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[AD]** e situa-se no **SPHA**.  $A_{s_1}$  e  $V_s$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[AV]** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A<sub>s1</sub>V<sub>s</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[AV]** e situa-se no **SPHA**.  $C_{s_2}$  e  $V_s$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral **[CV]** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[C<sub>s2</sub>V<sub>s</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[CV]** e situa-se no **SPFS**. O mesmo já não acontece em relação à aresta **[CD]**, da base – de facto, existe um ponto de quebra entre  $D_{s_1}$  e  $C_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).

Para se determinar o ponto de quebra situado teve-se em conta que o lado **[CD]** do quadrado é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $D_{s_1}$  (a sombra real do ponto **D**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** (a projeção horizontal do segmento **[CD]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[CD]**). A linha quebrada aberta **[D<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>C<sub>s2</sub>]** é a **sombra real** da aresta **[CD]**, da base, nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada **[V<sub>s</sub>A<sub>s1</sub>D<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>C<sub>s2</sub>]** é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento **[Q<sub>s</sub>V<sub>s</sub>]** é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano **v**), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço frontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do quadrado ou, ainda, das retas **t** e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 889.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por **A**<sub>1</sub> e por **C**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o retângulo **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que o retângulo **[ABCD]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não tem deformação). Assim, a partir de **A**<sub>2</sub> e **C**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), construiu-se a projeção frontal do retângulo, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do centro da circunferência circunscrita ao retângulo) – **O**<sub>2</sub> é o ponto médio do segmento de reta **[A**<sub>2</sub>**C**<sub>2</sub>], e determinou-se com o recurso à mediatriz daquele segmento.

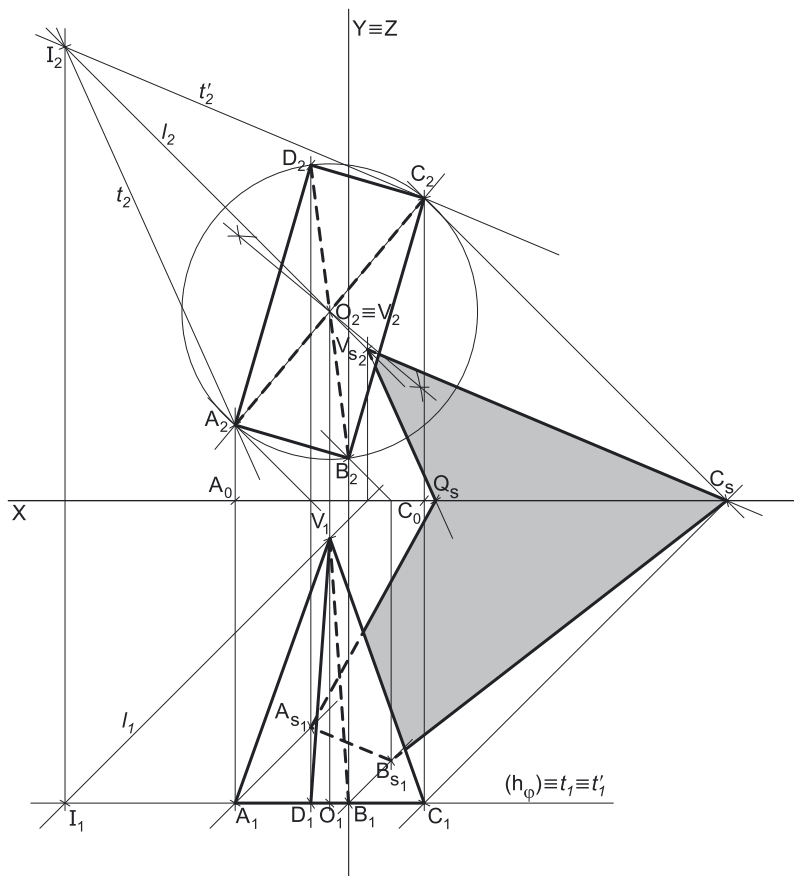
Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com raio até **A**<sub>2</sub> ou **C**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao retângulo. Em seguida, teve-se em conta que o vértice **B** tem abcissa nula e é o vértice inferior do retângulo (como o enunciado refere expressamente), o que nos permitiu determinar **B**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **B**), sobre a circunferência. Por fim, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção frontal do polígono, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do quarto vértice do retângulo – **D**<sub>2</sub>. As projeções horizontais dos pontos **O**, **B** e **D** estão sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção horizontal do retângulo reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Trata-se de uma **pirâmide reta**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta de topo (uma reta projetante frontal) – tem-se, imediatamente, **V**<sub>2</sub>  $\equiv$  **O**<sub>2</sub> (pois os pontos **O** e **V** estão situados na mesma reta projetante frontal). É dado, ainda, que o vértice da pirâmide é invisível em projeção frontal, pelo que o vértice **V** tem afastamento inferior ao plano  $\varphi$  (o plano que contém a base). Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e que o plano da base tem 8 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **C**), o vértice **V** tem 1 cm de afastamento ( $8 - 7 = 1$ ), o que nos permitiu determinar **V**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o retângulo **[ABCD]**, cuja projeção frontal é o retângulo **[A**<sub>2</sub>**B**<sub>2</sub>**C**<sub>2</sub>**D**<sub>2</sub>]. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são invisíveis, em projeção frontal.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ADCV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A**<sub>1</sub>**D**<sub>1</sub>**C**<sub>1</sub>**V**<sub>1</sub>]. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **B**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção horizontal), e a aresta lateral **[BV]**. A aresta lateral **[DV]** é **visível**, por se situar na parte visível do sólido (o vértice **D** é o vértice de maior cota da pirâmide).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto  $V$ ), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $V$ ) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ . O ponto  $I$  é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\varphi$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base) é um plano projetante horizontal.
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $\varphi$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[AV]$  e  $[CV]$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[AV]$  e  $[CV]$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas  $[AV]$  e  $[CV]$  separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[ADV]$  e  $[CDV]$  estão iluminadas enquanto as faces laterais  $[ABV]$  e  $[BCV]$  estão em sombra. A base da pirâmide também está em sombra, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[AVCB]$ .

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais  $[ABV]$  e  $[BCV]$  e a base da pirâmide. Em projeção horizontal, as duas faces laterais em sombra são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria visível a assinalar. Por outro lado, em projeção frontal, todas as faces laterais da pirâmide são invisíveis, pelo que as faces laterais em sombra também são invisíveis – assim, em projeção frontal também não há qualquer sombra própria visível a assinalar.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$V_{s2}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $V$ .  $A_{s1}$  é a sombra real do ponto  $A$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A$ .  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto  $B$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $B$ . O raio luminoso que passa pelo ponto  $C$  é uma reta passante, pelo que  $C_s$  (a sombra real do ponto  $C$ ) se situa no eixo  $X$  –  $C_s$  é, simultaneamente, o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $C$  ( $C_s$  situa-se tanto no **SPHA** como no **SPFS**).

As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Note que a sombra do ponto  $C$  ( $C_s$ ) se situa no eixo  $X$ , pelo que  $C_s$  é, de forma imediata, um dos pontos de quebra da sombra da pirâmide.

$A_{s1}$  e  $B_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[AB]$ , da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s1}B_{s1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AB]$  e situa-se no **SPHA**.  $B_{s1}$  e  $C_s$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[BC]$ , da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s1}C_s]$  é a sombra projetada do segmento  $[BC]$  e situa-se no **SPHA**.  $V_{s2}$  e  $C_s$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral  $[CV]$  não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[V_{s2}C_s]$  é a sombra projetada do segmento  $[CV]$  e situa-se no **SPFS**. O mesmo já não acontece em relação à aresta  $[AV]$  – de facto, existe um ponto de quebra entre  $V_{s2}$  e  $A_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s1}$  e  $V_{s2}$  poder-se-ia ter recorrido, por exemplo, à sombra virtual do ponto  $A$  ou à sombra virtual do ponto  $V$ . No entanto, optou-se por um raciocínio ligeiramente diferente mas muito mais simples em termos de traçado e que em seguida, se expõe.

A sombra projetada da aresta  $[AV]$  no Plano Frontal de Projeção está sobre o traço frontal do **plano tangente luz/sombra** que é rasante ao sólido ao longo da aresta lateral  $[AV]$ . Assim, a sombra projetada da aresta  $[AV]$  no Plano Frontal de Projeção está sobre uma reta frontal (de frente) desse plano, com afastamento nulo. E para definirmos essa reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A sombra real do ponto  $V$  ( $V_{s2}$ ) já é um ponto dessa reta, pelo que já temos um ponto para definir a reta – falta-nos outro ponto ou uma direção. Acontece que a reta  $t$  (a reta que é rasante à base do sólido no ponto  $A$ ) é uma reta frontal (de frente) desse plano, pelo que já temos a direção que nos faltava – a direção das retas frontais (de frente) do plano. A reta pretendida está definida por um ponto (o ponto  $V_{s2}$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $t$ ).

Assim, por  $V_{s2}$  conduziu-se uma paralela à reta  $t$  (à projeção frontal da reta  $t$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa o ponto  $Q_s$  – o ponto de quebra da sombra da aresta lateral  $[AV]$ . A linha quebrada aberta  $[A_{s1}Q_sV_{s2}]$  é a **sombra real** da aresta lateral  $[AV]$  nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[V_{s2}C_sB_{s1}A_{s1}Q_s]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sC_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)

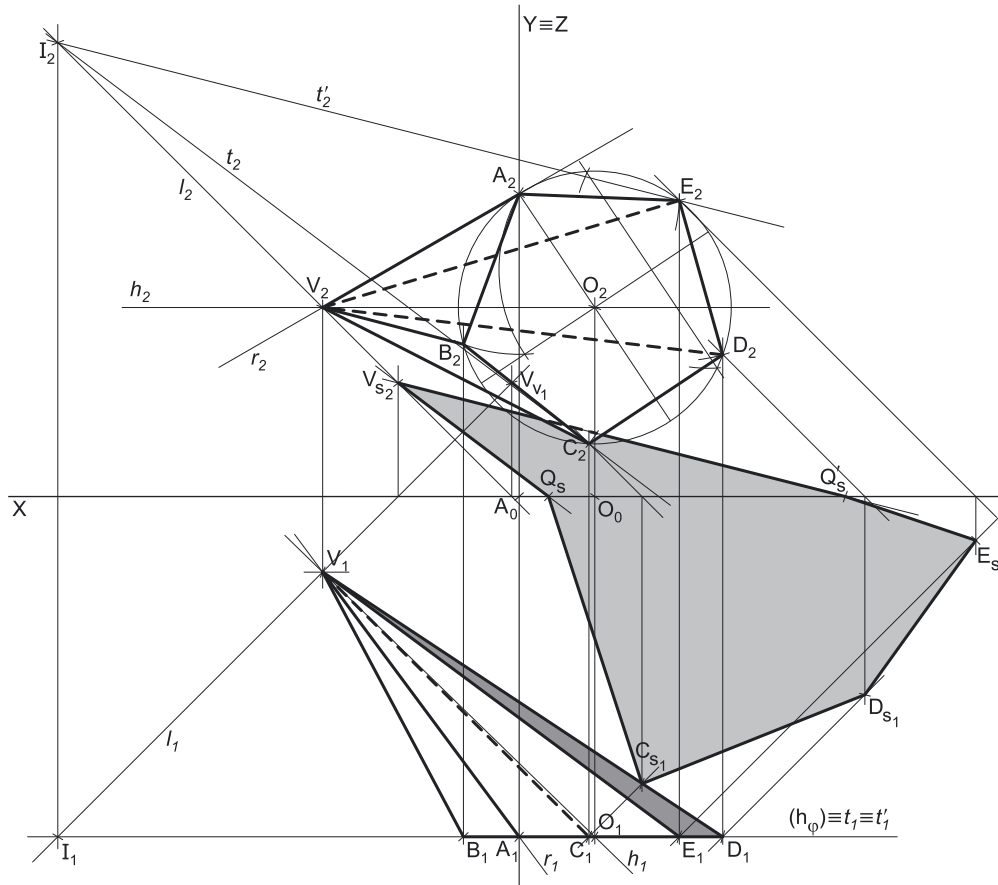
(continuação da página anterior)

## Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\phi$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço horizontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do retângulo ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 890.



## Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **O**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço horizontal. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ) passa por **A**<sub>1</sub> e **O**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **O**, respetivamente). O plano  $\phi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

## Resolução:

### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o pentágono **[ABCDE]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\phi$ ), pelo que o pentágono **[ABCDE]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não tem deformação). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com raio até **A**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **A**) desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao pentágono. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção frontal da figura, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos restantes quatro vértices do polígono – **B**<sub>2</sub>, **C**<sub>2</sub>, **D**<sub>2</sub> e **E**<sub>2</sub>. Estes foram nomeados sequencialmente, de acordo com as instruções dadas no enunciado – o vértice **B** situa-se à direita do vértice **A**.

As projeções horizontais dos restantes vértices do pentágono estão sobre o traço horizontal do plano  $\phi$  ( $h_\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se a projeção frontal da reta  $h$  (a reta suporte do eixo da pirâmide) e a projeção horizontal da reta  $r$  (a reta suporte da aresta lateral [AV]). A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível), que passa pelo ponto  $O$ , mas não é conhecida a sua direção. Por outro lado, o único dado referente à reta  $r$  é o relativo ao ângulo que a sua projeção horizontal faz com o eixo  $X$ .

No entanto, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre o vértice da pirâmide e o plano da base). E dado, ainda, que a base da pirâmide é visível em projeção frontal, pelo que o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base) tem afastamento superior ao vértice da pirâmide. Assim, uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e que o plano da base tem 9 cm de afastamento (o afastamento dos pontos  $A$  e  $O$ ), o vértice  $V$  tem 2 cm de afastamento ( $9 - 7 = 2$ ).

Nesse sentido, o ponto  $V$  é o ponto da reta  $r$  que tem 2 cm de afastamento, o que nos permitiu determinar a sua projeção horizontal ( $V_1$ ), sobre a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ). Por outro lado, o ponto  $V$  é um ponto da reta  $h$ , pelo que a sua projeção frontal ( $V_2$ ) está sobre a projeção frontal da reta  $h$  ( $h_2$ ). A partir das duas projeções do ponto  $V$ , foi possível desenhar as projeções em falta das duas retas – a projeção horizontal da reta  $h$  ( $h_1$ ) e a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ). A reta  $h$  está, assim, definida por dois pontos – o ponto  $O$  e o ponto  $V$ . A reta  $r$  está igualmente definida por dois pontos – o ponto  $A$  e o ponto  $V$ .

Em seguida, a partir das projeções de todos os seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada [AVCDE], cuja projeção frontal é o polígono [ $A_2V_2C_2D_2E_2$ ]. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice  $B$ . Este vértice, por ser um dos vértices de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [AB] e [BC], da base, e a aresta lateral [BV].

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [DEABV], cuja projeção horizontal é o polígono [ $D_1E_1A_1B_1V_1$ ]. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice  $C$ . Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [BC] e [CD], da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção horizontal), e a aresta lateral [CV]. As arestas laterais [AV] e [EV] são **visíveis**, por se situarem na parte visível do sólido (os vértices  $A$  e  $E$  são os vértices de maior cota da pirâmide).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto  $V$ ), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $V$ ) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ . O ponto  $I$  é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\varphi$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base) é um plano projetante horizontal.
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $\varphi$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos  $C$  e  $E$ , respetivamente. Assim, as arestas laterais [CV] e [EV] são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais [CV] e [EV] são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas [CV] e [EV] separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – as faces laterais [BCV], [ABV] e [AEV] estão iluminadas enquanto as faces laterais [CDV] e [DEV] estão em sombra. A base da pirâmide também está iluminada, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada** [CVED].

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais [CDV] e [DEV]. Em projeção horizontal, a face lateral [DEV] é visível, enquanto a face lateral [CDV] é invisível, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral [DEV]. Já em projeção frontal, todas as faces laterais em sombra são invisíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer sombra própria a assinalar.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção horizontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Determinação da sombra projetada da pirâmide:

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$V_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $V$ .  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $C$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $C$ .  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $D$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $D$ .  $E_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $E$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $E$ . As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$C_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta [CD], da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $C_{s_1}D_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [CD] e situa-se no **SPHA**.  $D_{s_1}$  e  $E_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta [DE], da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $D_{s_1}E_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [DE] e situa-se no **SPHA**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O mesmo já não acontece em relação às arestas laterais **[CV]** e **[EV]** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre **C<sub>s1</sub>** e **V<sub>s2</sub>** (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre **E<sub>s1</sub>** e **V<sub>s2</sub>** (que se situam em Planos de Projeção distintos). Para se determinarem os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **V – V<sub>v1</sub>**. **V<sub>v1</sub>** é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **V**.

O segmento **[C<sub>s1</sub>V<sub>v1</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[CV]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[C<sub>s1</sub>V<sub>v1</sub>]** (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[C<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>V<sub>s2</sub>]** é a **sombra real** da aresta lateral **[CV]**. O segmento **[E<sub>s1</sub>V<sub>v1</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[EV]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem também uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[E<sub>s1</sub>V<sub>v1</sub>]** (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é **Q'<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[E<sub>s1</sub>Q'<sub>s</sub>V<sub>s2</sub>]** é a **sombra real** da aresta lateral **[EV]**.

A linha quebrada fechada **[V<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>C<sub>s1</sub>D<sub>s1</sub>E<sub>s1</sub>Q'<sub>s</sub>]** é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento **[Q<sub>s</sub>Q'<sub>s</sub>]** é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às (ínfimas) invisibilidades verificadas – uma ínfima parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano φ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço horizontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do pentágono, das retas **h** e **r** ou, ainda, das retas **t** e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 891.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (**f<sub>v</sub>**) passa por **A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da pirâmide:

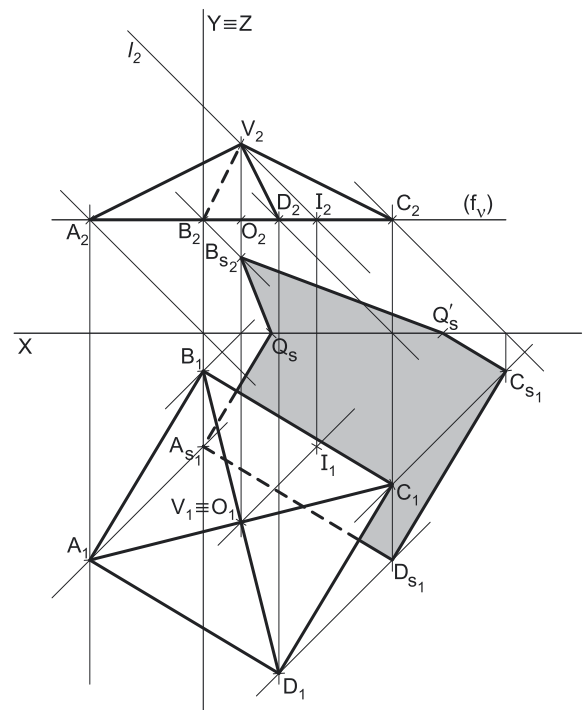
A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado **[ABCD]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, a partir de **A<sub>1</sub>** e **B<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do quadrado, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado – **C<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>**. As projeções frontais dos pontos **B**, **C** e **D** estão sobre o traço frontal do plano  $v$  (**f<sub>v</sub>**), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  (**f<sub>v</sub>**), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal) – tem-se, imediatamente, **V<sub>1</sub> ≡ O<sub>1</sub>** (pois os pontos **O** e **V** estão situados na mesma reta projetante horizontal). O vértice da pirâmide é visível em projeção horizontal (como o enunciado refere expressamente), pelo que o ponto **V** tem cota superior à cota do plano da base. Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 2 cm de altura e que o plano da base tem 3 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **B**), o vértice **V** tem 5 cm de cota (3 + 2 = 5), o que nos permitiu determinar **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado **[ABCD]**, cuja projeção horizontal é o quadrado **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **maior cota** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são visíveis, em projeção horizontal.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[AVCD]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2V_2C_2D_2]$ . Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **B**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção frontal), e a aresta lateral  $[BV]$ . A aresta lateral  $[DV]$  é **visível**, por se situar na parte visível do sólido (o vértice **D** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $v$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  (o plano que contém a base) é um plano projetante frontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide. No entanto, **nesta situação particular**, o ponto **I** situa-se no interior da base, pelo que **não há qualquer reta** que passe pelo ponto **I** e que seja rasante à base – qualquer reta que passe pelo ponto **I** é necessariamente **secante à base**.

Face ao exposto, conclui-se que não há qualquer **plano tangente luz/sombra** à pirâmide que passa pelo vértice. Assim, não há nenhuma aresta lateral da pirâmide que separa faces em luz de faces em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), **todas as faces laterais da pirâmide** estão iluminadas, enquanto a base da pirâmide está em sombra. Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha que delimita o quadrado da base** – o quadrado  $[ABCD]$ .

A **sombra própria** da pirâmide integra unicamente a base da pirâmide. Em projeção horizontal, a base da pirâmide é invisível, pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, a base da pirâmide é igualmente invisível (é projetante frontal), pelo que, em projeção frontal, também não há qualquer sombra própria visível a assinalar.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** (que é o quadrado  $[ABCD]$ ), nesta situação). Assim, há que determinar a sombra projetada do quadrado  $[ABCD]$  nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHS**, pelo que a sombra da aresta  $[AD]$ , da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_1}D_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AD]$  e situa-se no **SPHA**.  $C_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[CD]$ , da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[D_{s_1}C_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[CD]$  e situa-se no **SPHA**. O mesmo já não acontece em relação às arestas  $[AB]$  e  $[BC]$  – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  teve-se em conta que o lado  $[AB]$  do quadrado é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A_{s_1}$  (a sombra real do ponto **A**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_1B_1]$  (a projeção horizontal do segmento  $[AB]$ ) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[AB]$ ). A linha quebrada aberta  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}]$  é a **sombra real** da aresta  $[AB]$ , da base, nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  teve-se igualmente em conta que o lado  $[BC]$  do quadrado é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s_1}$  (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[B_1C_1]$  (a projeção horizontal do segmento  $[BC]$ ) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[BC]$ ). A linha quebrada aberta  $[B_{s_2}Q'_sC_{s_1}]$  é a **sombra real** da aresta  $[BC]$ , da base, nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}Q'_sC_{s_1}D_{s_1}]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $v$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço frontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados necessários à construção do quadrado), representaram-se a **leve**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 892.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

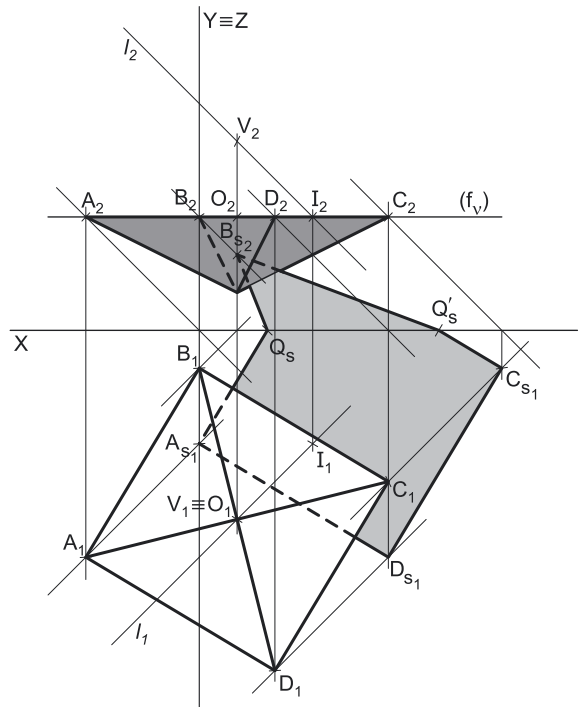
### Resolução:

#### Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado **[ABCD]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, a partir de  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do quadrado, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado –  $C_1$  e  $D_1$ . As projeções frontais dos pontos **B**, **C** e **D** estão sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal) – tem-se, imediatamente,  $V_1 \equiv O_1$  (pois os pontos **O** e **V** estão situados na mesma reta projetante horizontal). O vértice da pirâmide é invisível em projeção horizontal (como o enunciado refere expressamente), pelo que o ponto **V** tem cota inferior à cota do plano da base. Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base (que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base). Uma vez que a pirâmide tem 2 cm de altura e que o plano da base tem 3 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **B**), o vértice **V** tem 1 cm de cota ( $3 - 2 = 1$ ), o que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.



O **contorno aparente horizontal** é o quadrado **[ABCD]**, cuja projeção horizontal é o quadrado **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são invisíveis, em projeção horizontal.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[AVCD]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>V<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente frontal – o vértice **B**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção frontal), e a aresta lateral **[BV]**. A aresta lateral **[DV]** é **visível**, por se situar na parte visível do sólido (o vértice **D** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano  $v$  (o plano que contém a base) é um plano projetante frontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide. No entanto, **nesta situação particular**, o ponto **I** situa-se no interior da base, pelo que **não há qualquer reta** que passe pelo ponto **I** e que seja rasante à base – qualquer reta que passe pelo ponto **I** é necessariamente **secante à base**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Face ao exposto, conclui-se que não há qualquer **plano tangente luz/sombra** à pirâmide que passa pelo vértice. Assim, não há nenhuma aresta lateral da pirâmide que separa faces em luz de faces em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), **todas as faces laterais da pirâmide** estão em sombra, enquanto a base da pirâmide está iluminada. Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha que delimita o quadrado da base** – o quadrado [ABCD].

A **sombra própria** da pirâmide integra todas as faces laterais da pirâmide. Em projeção horizontal, todas as faces laterais da pirâmide são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, as faces laterais da pirâmide que são visíveis são as faces [ADV] e [CDV] pelo que, em projeção frontal, a sombra própria visível a assinalar é a referente àquelas duas faces laterais.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** (que é o quadrado [ABCD], nesta situação). Assim, há que determinar a sombra projetada do quadrado [ABCD] nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no SPHS, pelo que a sombra da aresta [AD], da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $A_{s_1}D_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [AD] e situa-se no SPHA.  $C_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no SPHA, pelo que a sombra da aresta [CD], da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $D_{s_1}C_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [CD] e situa-se no SPHA. O mesmo já não acontece em relação às arestas [AB] e [BC] – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  teve-se em conta que o lado [AB] do quadrado é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A_{s_1}$  (a sombra real do ponto **A**, que se situa no SPHA) conduziu-se uma reta paralela a [ $A_1B_1$ ] (a projeção horizontal do segmento [AB]) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [AB]). A linha quebrada aberta [ $A_{s_1}Q_sB_{s_2}$ ] é a **sombra real** da aresta [AB], da base, nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  teve-se igualmente em conta que o lado [BC] do quadrado é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s_1}$  (a sombra real do ponto **C**, que se situa no SPHA) conduziu-se uma reta paralela a [ $B_1C_1$ ] (a projeção horizontal do segmento [BC]) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [BC]). A linha quebrada aberta [ $B_{s_2}Q'_sC_{s_1}$ ] é a **sombra real** da aresta [BC], da base, nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada [ $A_{s_1}Q_sB_{s_2}Q'_sC_{s_1}D_{s_1}$ ] é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento [ $Q_sQ'_s$ ] é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\nu$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço frontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados necessários à construção do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

**Diferenças entre esta situação e a situação anterior:**

Em ambas as situações constata-se que **não há** umas faces laterais iluminadas e outras em sombra. A grande diferença entre as duas situações é que, na situação anterior, **todas as faces laterais da pirâmide estavam iluminadas**, sendo que a base era a única face da pirâmide que estava em sombra (a sombra própria da pirâmide compreendia, apenas, a base da pirâmide). Por oposição à situação anterior, nesta situação é a base que está iluminada enquanto **todas as faces laterais da pirâmide estão em sombra** (a sombra própria da pirâmide compreende todas as faces laterais da pirâmide).





(continuação da página anterior)

- Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o Plano Frontal de Projeção).
- As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[AA']$  e  $[BB']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

Uma vez que a base de referência está contida no próprio Plano Frontal de Projeção, sublinha-se que as retas  $t$  e  $t'$  são, de forma imediata, os traços frontais dos planos tangentes luz/sombra, o que se identificou no desenho. Por outro lado, os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  (os planos tangentes luz/sombra) são planos de topo (planos projetantes frontais) que estão identificados, apenas, pelos seus traços frontais, razão pela qual aqueles se identificaram entre parêntesis.

As arestas laterais  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[AA'C'C]$  e  $[BB'C'C]$  estão iluminadas, sendo que a base de maior afastamento (a base  $[A'B'C']$ ) também está iluminada. Já a face lateral  $[AA'B'B]$  está em sombra, tal como a base de menor afastamento do prisma (a base  $[ABC]$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[AA'B'BC]$ .

A **sombra própria** do prisma integra a face lateral  $[AA'B'B]$  e a base de menor afastamento (a base  $[ABC]$ ). Em projeção horizontal, tanto a face lateral  $[AA'B'B]$  como a base (que é projetante horizontal) são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer sombra própria visível a assinalar. Pelo seu lado, em projeção frontal, a base de menor afastamento é invisível, bem como a face lateral  $[AA'B'B]$  (que é projetante frontal), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer sombra própria visível a assinalar.

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  situam-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $A_{s_2} \equiv A_2$ ,  $B_{s_2} \equiv B_2$  e  $C_{s_2} \equiv C_2$ .  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $A'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A'$ .  $B'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $B'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $B'$ . As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_2}$  e  $C_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[AC]$  (da base de menor afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_2}C_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AC]$  e situa-se no **SPFS**.  $B_{s_2}$  e  $C_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[BC]$  (da base de menor afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s_2}B_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BC]$  e situa-se no **SPFS**.  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[A'B']$  (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A'_{s_1}B'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[A'B']$  e situa-se no **SPHA**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas laterais  $[AA']$  e  $[BB']$  – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_2}$  e  $A'_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $B_{s_2}$  e  $B'_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_2}$  e  $A'_{s_1}$  teve-se em conta que a aresta lateral  $[AA']$  é um segmento de reta de topo e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A'_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $A'$ , que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_1A'_1]$  (a projeção horizontal do segmento  $[AA']$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[AA']$ ). A linha quebrada aberta  $[A_{s_2}Q_sA'_{s_1}]$  é a **sombra real** da aresta lateral  $[AA']$  nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s_2}$  e  $B'_{s_1}$  teve-se igualmente em conta que a aresta lateral  $[BB']$  é um segmento de reta de topo e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B'_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $B'$ , que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[B_1B'_1]$  (a projeção horizontal do segmento  $[BB']$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[BB']$ ). A linha quebrada aberta  $[B_{s_2}Q'_sB'_{s_1}]$  é a **sombra real** da aresta lateral  $[BB']$  nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s_2}C_{s_2}B_{s_2}Q'_sB'_{s_1}A'_{s_1}Q_s]$  é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano que contém a base de maior afastamento do sólido, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do triângulo, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas  $i$ ,  $t$ , e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 894.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **L** (o foco luminoso), pelas respectivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

A base de menor afastamento do prisma (o triângulo **[ABC]**) está contida no Plano Frontal de Projeção (os pontos **A** e **B** têm afastamento nulo), pelo que o triângulo está em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, a partir de **A**<sub>2</sub> e **B**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuou-se a construção da projeção frontal do terceiro vértice do triângulo. A projeção horizontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta no eixo **X**, pois a figura está contida no Plano Frontal de Projeção (todos os seus vértices têm afastamento nulo).

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases, o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 6 cm de altura e a sua base de menor afastamento está contida no Plano Frontal de Projeção, o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 6 cm de afastamento ( $0 + 6 = 6$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas de topo (retas projetantes frontais). Assim, pelas projeções dos vértices do triângulo **[ABC]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram) e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $\varphi$  – esses pontos são os vértices do triângulo **[A'B'C']**, que é a base de maior afastamento do sólido. Note que se trata da interseção entre retas projetantes frontais (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, as projeções frontais dos vértices **A'**, **B'** e **C'** (**A'**<sub>2</sub>, **B'**<sub>2</sub> e **C'**<sub>2</sub>, respetivamente), estão coincidentes com as projeções frontais dos vértices correspondentes da base de menor afastamento (os vértices **A**, **B** e **C**, respetivamente).

A partir das projeções dos seis vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o triângulo **[A'B'C']**, cuja projeção frontal é o triângulo **[A'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – todos os vértices da base **[ABC]**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

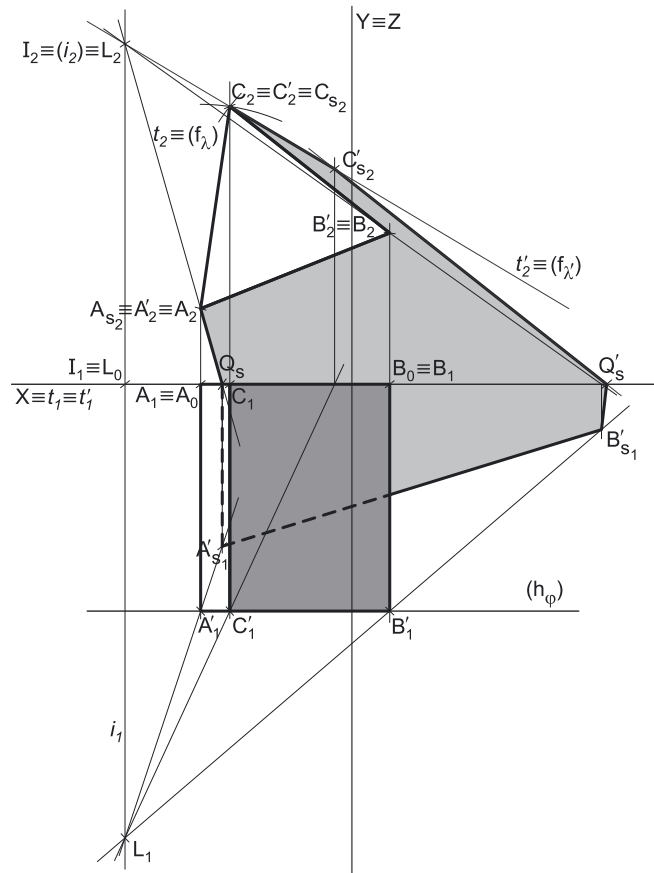
O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ACBB'C'A']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]**. Todos os vértices do prisma integram o contorno aparente horizontal. No entanto, as arestas **[AB]** (da base de menor afastamento) e **[A'B']** (da base de maior afastamento) são invisíveis, em projeção horizontal, pois separam faces que são invisíveis (em projeção horizontal). Apesar disso, aquelas duas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar. Já a aresta lateral **[CC']** é visível, em projeção horizontal, por se situar na parte visível do sólido (os vértices **C** e **C'** são os vértices de maior cota do prisma).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduziu-se, pelo foco luminoso, uma reta paralela às arestas laterais do prisma – a reta **i**, que está definida por um ponto (o ponto **L**) e por uma direção (a direção das arestas laterais do prisma – é uma reta de topo). **2.** Determinou-se o ponto de interseção a reta **i** com o plano da base (de referência) – o ponto **I**. Considerou-se que a base de referência é a base de menor afastamento do prisma (a base do prisma que está contida no Plano Frontal de Projeção). Assim, o ponto **I** é, imediatamente, o traço frontal da reta **i**. **3.** Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o Plano Frontal de Projeção). **4.** As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AA']** e **[CC']** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AA']** e **[CC']** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

1. Conduziu-se, pelo foco luminoso (o ponto **L**), uma reta paralela às arestas laterais do sólido – a reta **i**, que está definida por um ponto (o ponto **L**) e por uma direção (a direção das arestas laterais do prisma – é uma reta de topo).
2. Determinou-se o ponto de interseção a reta **i** com o plano da base (de referência) – o ponto **I**. Considerou-se que a base de referência é a base de menor afastamento do prisma (a base do prisma que está contida no Plano Frontal de Projeção). Assim, o ponto **I** é, imediatamente, o traço frontal da reta **i**.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o Plano Frontal de Projeção).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AA']** e **[CC']** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AA']** e **[CC']** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Uma vez que a base de referência está contida no próprio Plano Frontal de Projeção, sublinha-se que as retas  $t$  e  $t'$  são, de forma imediata, os traços frontais dos planos tangentes luz/sombra, o que se identificou no desenho. Por outro lado, os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  (os planos tangentes luz/sombra) são planos de topo (planos projetantes frontais) que estão identificados, apenas, pelos seus traços frontais, razão pela qual aqueles se identificaram entre parêntesis.

As arestas laterais  $[AA']$  e  $[CC']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda, onde se situa o foco luminoso), a face lateral  $[AA'C'C]$  está iluminada, bem como a base de maior afastamento do prisma (a base  $[A'B'C']$ ), enquanto as faces laterais  $[AA'C'C]$  e  $[BB'C'C]$  estão em sombra, tal como a base de menor afastamento do prisma (a base  $[ABC]$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[AA'B'C'C]$ .

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ , bem como a base de menor afastamento do sólido (a base  $[ABC]$ ). Em projeção horizontal, a face lateral  $[BB'C'C]$  é visível e a face  $[AA'B'B]$  é invisível, bem como a base de menor afastamento (que é projetante horizontal), pelo que, em projeção horizontal, a única sombra própria visível a assinalar refere-se à face lateral  $[BB'C'C]$ . Já em projeção frontal, todas as faces em sombra (as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$  e a base de menor afastamento do prisma – a base  $[ABC]$ ) são invisíveis, pelo que não existe qualquer sombra própria visível a assinalar, em projeção frontal.

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção horizontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

Os pontos  $A$  e  $C$  situam-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $A_{s_2} \equiv A_2$  e  $C_{s_2} \equiv C_2$ .  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $A'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A'$ .  $B'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $B'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $B'$ .  $C'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $C'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $C'$ . As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_2}$  e  $C_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[AC]$  (da base de menor afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_2}C_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AC]$  e situa-se no **SPFS**.  $C_{s_2}$  e  $C'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral  $[CC']$  não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s_2}C'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[CC']$  e situa-se no **SPFS**.  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[A'B']$  (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A'_{s_1}B'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[A'B']$  e situa-se no **SPHA**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas  $[AA']$  e  $[B'C']$  – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_2}$  e  $A'_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C'_{s_2}$  e  $B'_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_2}$  e  $A'_{s_1}$  teve-se em conta que a aresta lateral  $[AA']$  é um segmento de reta de topo e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A'_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $A'$ , que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_1A'_1]$  (a projeção horizontal do segmento  $[AA']$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[AA']$ ). A linha quebrada aberta  $[A_{s_2}Q_sA'_{s_1}]$  é a **sombra real** da aresta lateral  $[AA']$  nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C'_{s_2}$  e  $B'_{s_1}$  teve-se em conta que a aresta  $[B'C']$  (da base de maior afastamento do prisma) é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C'_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $C'$ , que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[C'_2B'_2]$  (a projeção frontal do segmento  $[B'C']$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[B'C']$ ). A linha quebrada aberta  $[C'_{s_2}Q'_sB'_{s_1}]$  é a **sombra real** da aresta  $[B'C']$  nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s_2}C_{s_2}C'_{s_2}Q'_sB'_{s_1}A'_{s_1}Q_s]$  é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano  $\rho$  (o plano que contém a base de maior afastamento do prisma), no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do triângulo ou, ainda, das retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 895.

### Dados:

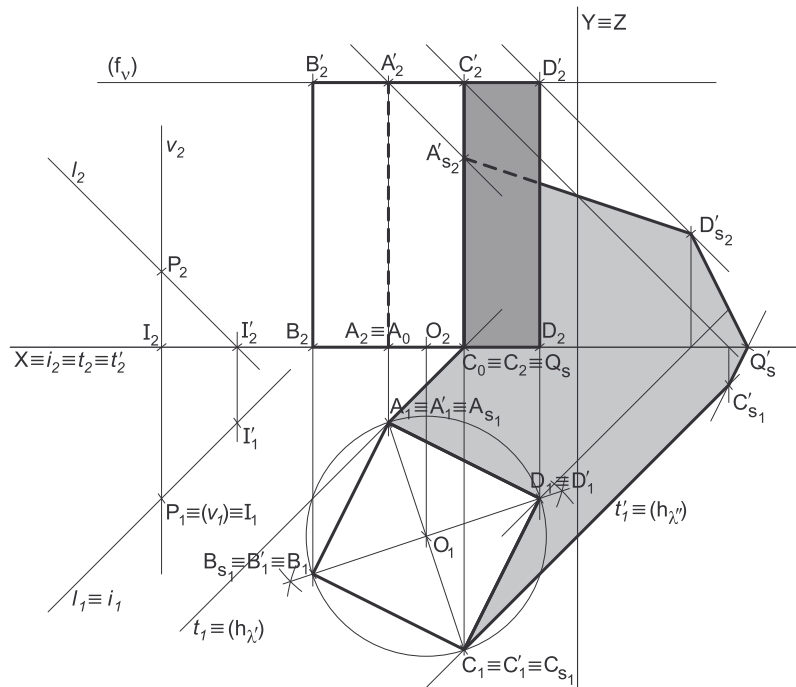
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

A base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida no Plano Horizontal de Projeção (os pontos **A** e **C** têm cota nula), pelo que o quadrado está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, a partir de **A**<sub>1</sub> e **C**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), efetuou-se a construção da projeção horizontal do quadrado, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do centro da circunferência circunscrita ao quadrado) – **O**<sub>1</sub> é o ponto médio do segmento de reta **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]**, e determinou-se com o recurso à mediatriz daquele segmento.

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do polígono – **B**<sub>1</sub> e **D**<sub>1</sub>. Estes foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta no eixo **X**, pois a figura está contida no Plano Horizontal de Projeção (todos os seus vértices têm cota nula).



A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases, o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 7 cm de altura e a sua base inferior está contida no Plano Horizontal de Projeção, o plano  $v$  (o plano que contém a base superior do sólido) tem 7 cm de cota ( $0 + 7 = 7$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal  $(f_v)$ . O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais). Assim, pelas projeções dos vértices do quadrado **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram) e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $v$  – esses pontos são os vértices do quadrado **[A'B'C'D']**, que é a base superior do sólido. Note que se trata da interseção entre retas projetantes horizontais (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ). Nesse sentido, as projeções horizontais dos vértices **A'**, **B'**, **C'** e **D'** (**A'**<sub>1</sub>, **B'**<sub>1</sub>, **C'**<sub>1</sub> e **D'**<sub>1</sub>, respetivamente), estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da base inferior (os vértices **A**, **B**, **C** e **D**, respetivamente).

A partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado **[A'B'C'D']**, cuja projeção horizontal é o quadrado **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – todos os vértices da base **[ABCD]**. Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes horizontais ou estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDD'C'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e **A'**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]** (da base inferior), **[A'B']** e **[A'D']** (da base superior) e a aresta lateral **[AA']**. No entanto, as arestas **[AB]**, **[AD]**, **[A'B']** e **[A'D']** estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral **[AA']**. Já a aresta lateral **[CC']** é visível, em projeção frontal, por se situar na parte visível do sólido (os vértices **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do prisma).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta ***i***, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta ***i***; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

**1.** Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $v$ , paralela às arestas laterais do sólido (a reta  $v$  é uma reta vertical), e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

- Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas retas  $v$  e  $l$ , com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base inferior – a base que está contida no Plano Horizontal de Projeção). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $v$  com o Plano Horizontal de Projeção – o traço horizontal da reta  $v$ ) e o ponto  $I'$  (o ponto de interseção da reta  $l$  com o Plano Horizontal de Projeção – o traço horizontal da reta  $l$ ).
- Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o Plano Horizontal de Projeção).
- As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[AA']$  e  $[CC']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[AA']$  e  $[CC']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

Uma vez que a base de referência está contida no próprio Plano Horizontal de Projeção, sublinha-se que as retas  $t$  e  $t'$  são, de forma imediata, os traços horizontais dos planos tangentes luz/sombra, o que se identificou no desenho. Por outro lado, os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  (os planos tangentes luz/sombra) são planos verticais (planos projetantes horizontais) que estão identificados, apenas, pelos seus traços horizontais, razão pela qual aqueles se identificaram entre parêntesis.

As arestas laterais  $[AA']$  e  $[CC']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$  estão iluminadas, sendo que a base superior (a base  $[A'B'C'D']$ ) também está iluminada. Já as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  estão em sombra, tal como a base inferior do prisma (a base  $[ABCD]$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[AA'D'C'CB]$ .

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  e a base inferior (a base  $[ABCD]$ ). Em projeção horizontal, tanto a base inferior, como as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  (que são projetantes horizontais) são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, a base inferior é invisível (é projetante frontal), bem como a face lateral  $[AA'D'D]$ . No entanto, a face lateral  $[CC'D'D]$  (que está em sombra) é visível, em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, a única sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral  $[CC'D'D]$ .

A **sombra própria** visível do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $A_{s_1} \equiv A_1$ ,  $B_{s_1} \equiv B_1$  e  $C_{s_1} \equiv C_1$ .  $C'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $C'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $C'$ .  $A'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $A'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $A'$ .  $D'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $D'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $D'$ . As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[AB]$  (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_1}B_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AB]$  e situa-se no **SPHA**.  $B_{s_1}$  e  $C_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[BC]$  (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s_1}C_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BC]$  e situa-se no **SPHA**.  $C_{s_1}$  e  $C'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral  $[CC']$  não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s_1}C'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[CC']$  e situa-se no **SPHA**.  $A'_{s_2}$  e  $D'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[A'D']$  (da base superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A'_{s_2}D'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[A'D']$  e situa-se no **SPFS**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas  $[AA']$  e  $[C'D']$  – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_1}$  e  $A'_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $D'_{s_2}$  e  $C'_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $A'_{s_2}$  teve-se em conta que a aresta lateral  $[AA']$  é um segmento de reta vertical e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A'_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $A'$ , que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_2A'_2]$  (a projeção frontal do segmento  $[AA']$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[AA']$ ). A linha quebrada aberta  $[A'_{s_2}Q_sA_{s_1}]$  é a **sombra real** da aresta lateral  $[AA']$  nos planos de projeção. Note que, **nesta situação**, o ponto  $Q_s$  fica necessariamente sobre a projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ), em função da particularidade de alguns dos dados deste exercício.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $D'_{s_2}$  e  $C'_{s_1}$  teve-se em conta que a aresta  $[C'D']$  (da base superior) é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C'_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $C'$ , que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[C'_1D'_1]$  (a projeção horizontal do segmento  $[C'D']$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[C'D']$ ). A linha quebrada aberta  $[C'_{s_1}Q'_sD'_{s_2}]$  é a **sombra real** da aresta  $[C'D']$  (da base superior) nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s_1}B_{s_1}C_{s_1}Q'_sD'_{s_2}A'_{s_2}Q_s]$  é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma. Sublinha-se que o segmento  $[A'_{s_2}Q_s]$ , do contorno da sombra projetada, sendo invisível (está por detrás do prisma), está oculto pela aresta lateral  $[CC']$  (em projeção frontal), pelo que, na realidade, aquela invisibilidade está oculta (e, por isso, não se assinala).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano que contém a base superior do sólido, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do quadrado, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas *i*, *t*, e *t'*), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 896.

### Dados:

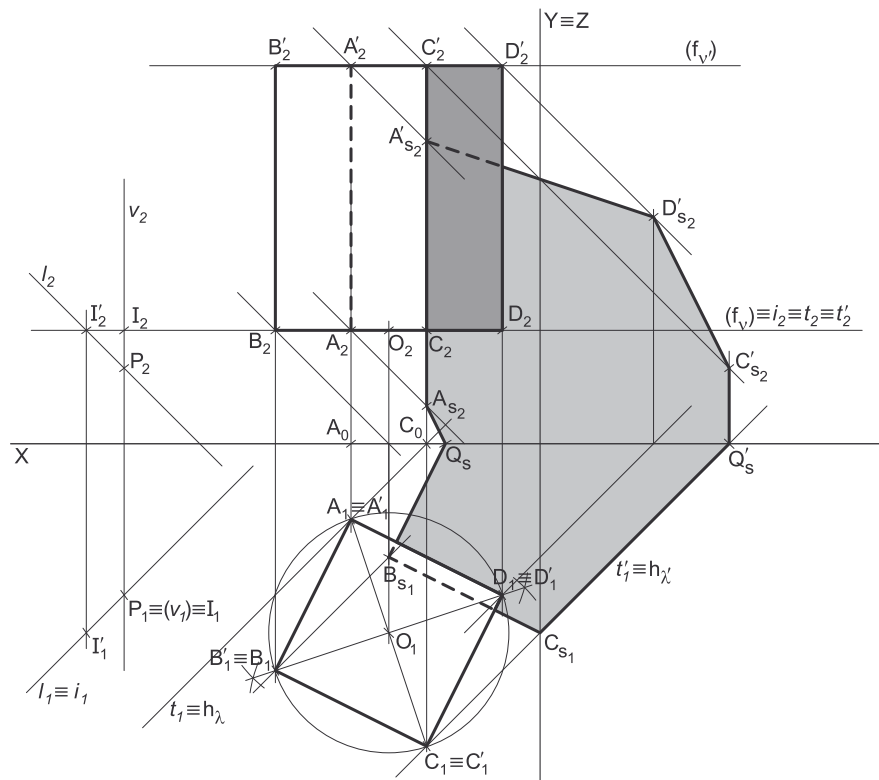
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano *v* (o plano horizontal que contém a base inferior do prisma) pelo seu traço frontal. O plano *v* é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por **A<sub>2</sub>** e **C<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente). O plano *v* não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

A base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano *v*), pelo que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do quadrado não apresenta deformação). Assim, a partir de **A<sub>1</sub>** e **C<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), efetuou-se a construção da projeção horizontal do quadrado, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do centro da circunferência circunscrita ao quadrado) – **O<sub>1</sub>** é o ponto médio do segmento de reta **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]**, e determinou-se com o recurso à mediatriz daquele segmento.



Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do polígono – **B<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>**. Estes foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano *v* ( $f_v$ ), pois o plano *v* é um plano projetante frontal.

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases, o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 7 cm de altura e o plano que contém a sua base inferior tem 3 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **C**), o plano *v'* (o plano que contém a base superior do sólido) tem 10 cm de cota (3 + 7 = 10). Nesse sentido, representou-se o plano *v'* (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O plano *v'* não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais). Assim, pelas projeções dos vértices do quadrado **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram) e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano *v'* (o plano que contém a base superior do sólido) – esses pontos são os vértices do quadrado **[A'B'C'D']**, que é a base superior do sólido. Note que se trata da interseção entre retas projetantes horizontais (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante frontal (o plano *v'*). Nesse sentido, as projeções horizontais dos vértices **A'**, **B'**, **C'** e **D'** (**A'<sub>1</sub>**, **B'<sub>1</sub>**, **C'<sub>1</sub>** e **D'<sub>1</sub>**, respetivamente), estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da base inferior (os vértices **A**, **B**, **C** e **D**, respetivamente).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado  $[A'B'C'D']$ , cuja projeção horizontal é o quadrado  $[A'_1B'_1C'_1D'_1]$ . Em projeção horizontal, existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – todos os vértices da base  $[ABCD]$ . Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes horizontais ou estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e **A'**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base inferior),  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da base superior) e a aresta lateral  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'D']$  estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral  $[AA']$ . Já a aresta lateral  $[CC']$  é visível, em projeção frontal, por se situar na parte visível do sólido (os vértices **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do prisma).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta *i*, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta *i*; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta *v*, paralela às arestas laterais do sólido (a reta *v* é uma reta vertical), e a reta *l* (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta *i*, a reta de interseção do plano definido pelas retas *v* e *l*, com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base inferior – a base que está contida no plano *v*). A reta *i* está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta *v* com o plano *v*) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta *l* com o plano *v*).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta *i* – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o plano *v*).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[AA']$  e  $[CC']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[AA']$  e  $[CC']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

As arestas laterais  $[AA']$  e  $[CC']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$  estão iluminadas, sendo que a base superior (a base  $[A'B'C'D']$ ) também está iluminada. Já as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  estão em sombra, tal como a base inferior do prisma (a base  $[ABCD]$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[AA'D'C'CB]$ .

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  e a base inferior (a base  $[ABCD]$ ). Em projeção horizontal, tanto a base inferior, como as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  (que são projetantes horizontais) são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, a base inferior é invisível (é projetante frontal), bem como a face lateral  $[AA'D'D]$ . No entanto, a face lateral  $[CC'D'D]$  (que está em sombra) é visível, em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, a única sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral  $[CC'D'D]$ .

A **sombra própria** visível do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$B_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $A_{s_2}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A**.  $A'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $D'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **D'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D'**.  $C'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C'**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$B_{s_1}$  e  $C_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[BC]$  (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s_1}C_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BC]$  e situa-se no **SPHA**.  $A_{s_2}$  e  $A'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral  $[AA']$  não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_2}A'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AA']$  e situa-se no **SPFS**.  $A'_{s_2}$  e  $D'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[A'D']$  (da base superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A'_{s_2}D'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[A'D']$  e situa-se no **SPFS**.  $D'_{s_2}$  e  $C'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[C'D']$  (da base superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C'_{s_2}D'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[C'D']$  e situa-se no **SPFS**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O mesmo já não acontece em relação às arestas  $[AB]$  e  $[CC']$  – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_2}$  e  $B_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C_{s_1}$  e  $C'_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_2}$  e  $B_{s_1}$  teve-se em conta que a aresta  $[AB]$  (da base inferior) é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $B$ , que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_1B_1]$  (a projeção horizontal do segmento  $[AB]$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[AB]$ ). A linha quebrada aberta  $[B_{s_1}Q_sA_{s_2}]$  é a **sombra real** da aresta  $[AB]$  (da base inferior) nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s_1}$  e  $C'_{s_2}$  teve-se em conta que a aresta lateral  $[CC']$  é um segmento de reta vertical e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C'_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $C'$ , que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[C_2C'_2]$  (a projeção frontal do segmento  $[CC']$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[CC']$ ). A linha quebrada aberta  $[C'_{s_2}Q'_sC_{s_1}]$  é a **sombra real** da aresta lateral  $[CC']$  nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[B_{s_1}Q_sA_{s_2}A'_2D'_2C'_2Q'_sC_{s_1}]$  é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma. Sublinha-se que a parte invisível do segmento  $[A'_{s_2}A_{s_2}]$ , do contorno da sombra projetada (que está por detrás do prisma), está oculto pela aresta lateral  $[CC']$  (em projeção frontal), pelo que, na realidade, aquela invisibilidade está oculta (e, por isso, não se assinala).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços frontais dos planos que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do quadrado, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas  $i$ ,  $t$ , e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 897.

### Dados:

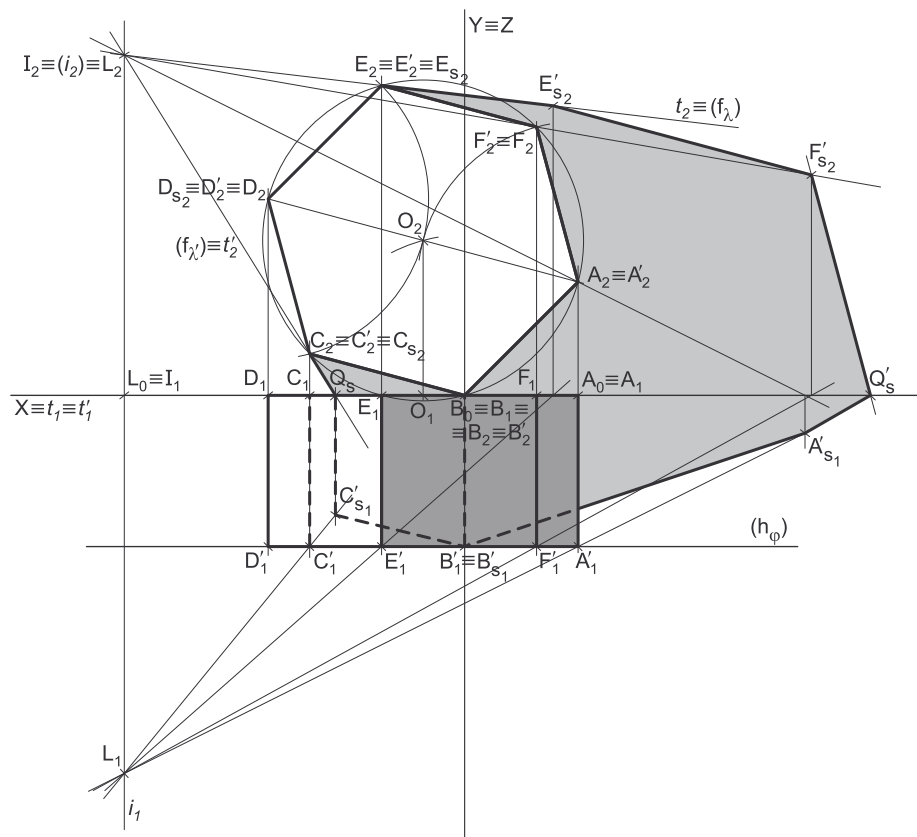
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $L$  (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

A base de menor afastamento do prisma (o hexágono  $[ABCDEF]$ ) está contida no Plano Frontal de Projeção (os pontos  $A$  e  $B$  têm afastamento nulo), pelo que o hexágono está em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, a partir de  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente), efetuou-se a construção da projeção frontal do hexágono, para o que foi necessário determinar, previamente,  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) – o ponto  $O$  é o centro da circunferência circunscrita ao hexágono.

Em seguida, concluiu-se a construção da projeção frontal do hexágono, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos restantes vértices da figura. Note que se garantiu que o hexágono se situa no espaço do  $1^a$  Diedro, para que o prisma se situe no espaço do  $1^a$  Diedro (como o enunciado pede expressamente). A projeção horizontal do hexágono reduz-se a um segmento de reta no eixo  $X$ , pois a figura está contida no Plano Frontal de Projeção (todos os seus vértices têm afastamento nulo).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases, o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 4 cm de altura e a sua base de menor afastamento está contida no Plano Frontal de Projeção, o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 4 cm de afastamento ( $0 + 4 = 4$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas de topo (retas projetantes frontais). Assim, pelas projeções dos vértices do hexágono [ABCDEF] conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram) e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $\varphi$  – esses pontos são os vértices do hexágono [A'B'C'D'E'F'], que é a base de maior afastamento do sólido. Note que se trata da interseção entre retas projetantes frontais (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, as projeções frontais dos vértices A', B', C', D', E' e F' (A'\_2, B'\_2, C'\_2, D'\_2, E'\_2 e F'\_2, respetivamente), estão coincidentes com as projeções frontais dos vértices correspondentes da base de menor afastamento (os vértices A, B, C, D, E e F, respetivamente).

A partir das projeções dos doze vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o hexágono [A'B'C'D'E'F'], cuja projeção frontal é o hexágono [A'\_2B'\_2C'\_2D'\_2E'\_2F'\_2]. Em projeção frontal existem seis vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – todos os vértices da base [ABCDEF]. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada [DEFAA'F'E'D'], cuja projeção horizontal é o polígono [D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>A<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>F'<sub>1</sub>E'<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>]. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices B, C, B' e C', que são os vértices de **menor cota** do prisma. Por isso mesmo, aqueles vértices são **invisíveis** (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [AB], [BC] e [CD] (da base [ABCDEF]) as arestas [A'B'], [B'C'] e [C'D'] (da base [A'B'C'D'E'F']) e ainda as arestas laterais [BB'] e [CC']. As arestas [AB], [BC], [CD], [A'B'], [B'C'] e [C'D'] estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal, é a referente às arestas laterais [BB'] e [CC']. Já as arestas laterais [EE'] e [FF'] são visíveis (em projeção horizontal), pois os vértices que as definem (os vértices E, F, E' e F') são os vértices de maior cota do prisma.

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo foco luminoso, uma reta paralela às arestas laterais do prisma – a reta *i*; **2.** determina-se o ponto de interseção da reta *i* com o plano da base (de referência) – o ponto I; **3.** pelo ponto I conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo foco luminoso (o ponto L), uma reta paralela às arestas laterais do sólido – a reta *i*, que está definida por um ponto (o ponto L) e por uma direção (a direção das arestas laterais do prisma – é uma reta de topo).
2. Determinou-se o ponto de interseção a reta *i* com o plano da base (de referência) – o ponto I. Considerou-se que a base de referência é a base de menor afastamento do prisma (a base do prisma que está contida no Plano Frontal de Projeção). Assim, o ponto I é, imediatamente, o traço frontal da reta *i*.
3. Pelo ponto I conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma – as retas *t* e *t'* (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o Plano Frontal de Projeção).
4. As retas *t* e *t'* são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos C e E, respetivamente. Assim, as arestas laterais [CC'] e [EE'] são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais [CC'] e [EE'] são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

Uma vez que a base de referência está contida no próprio Plano Frontal de Projeção, sublinha-se que as retas *t* e *t'* são, de forma imediata, os traços frontais dos planos tangentes luz/sombra, o que se identificou no desenho. Por outro lado, os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  (os planos tangentes luz/sombra) são planos de topo (planos projetantes frontais) que estão identificados, apenas, pelos seus traços frontais, razão pela qual aqueles se identificaram entre parêntesis.

As arestas laterais [CC'] e [EE'] separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda, onde se situa o foco luminoso), as faces laterais [CC'D'D] e [DD'E'E] estão iluminadas, bem como a base de maior afastamento (a base [A'B'C'D'E'F']) enquanto as faces laterais [AA'B'B], [BB'C'C], [AA'F'F] e [EE'F'F] estão em sombra, tal como a base de menor afastamento do prisma (a base [ABCDEF]). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada** [CC'B'A'F'E'ED].

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais [AA'B'B], [BB'C'C], [AA'F'F] e [EE'F'F], bem como a base de menor afastamento (a base [ABCDEF]). Em projeção horizontal, as faces laterais [AA'F'F] e [EE'F'F] são visíveis e as restantes faces em sombra são invisíveis (a base é projetante horizontal), pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar é a que se refere às faces laterais [AA'F'F] e [EE'F'F]. Já em projeção frontal, todas as faces em sombra (as faces laterais [AA'B'B], [BB'C'C], [AA'F'F] e [EE'F'F] e a base de menor afastamento do prisma – a base [ABCDEF]) são invisíveis, pelo que não existe qualquer sombra própria a assinalar, em projeção frontal. Note que as faces laterais [AA'B'B], [BB'C'C], [AA'F'F] e [EE'F'F] são projetantes frontais.

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção horizontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Determinação da sombra projetada do prisma:

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

Os pontos **C**, **D** e **E** situam-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $C_{s_2} \equiv C_2$ ,  $D_{s_2} \equiv D_2$  e  $E_{s_2} \equiv E_2$ . O ponto **B** situa-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $B_{s_1} \equiv B_1$ .  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $C'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C'**.  $E'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **E'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **E'**.  $F'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **F'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **F'**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$C_{s_2}$  e  $D_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta [**CD**] (da base de menor afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $C_{s_2}D_{s_2}$ ] é a sombra projetada do segmento [**CD**] e situa-se no **SPFS**.  $D_{s_2}$  e  $E_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta [**DE**] (da base de menor afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $D_{s_2}E_{s_2}$ ] é a sombra projetada do segmento [**DE**] e situa-se no **SPFS**.  $E_{s_2}$  e  $E'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral [**EE'**] não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $E_{s_2}E'_{s_2}$ ] é a sombra projetada do segmento [**EE'**] e situa-se no **SPFS**.

$A'_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta [**A'B'**] (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $A'_{s_1}B'_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [**A'B'**] e situa-se no **SPHA**.  $B'_{s_1}$  e  $C'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta [**B'C'**] (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $B'_{s_1}C'_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [**B'C'**] e situa-se no **SPHA**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas [**CC'**] e [**A'F'**] – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $C_{s_2}$  e  $A'_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $F'_{s_2}$  e  $A'_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s_2}$  e  $A'_{s_1}$  teve-se em conta que a aresta lateral [**CC'**] é um segmento de reta de topo e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C'_{s_1}$  (a sombra real do ponto **C'**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a [ $C_1C'_{s_1}$ ] (a projeção horizontal do segmento [**CC'**]) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [**CC'**]). A linha quebrada aberta [ $C_{s_2}Q_sC'_{s_1}$ ] é a **sombra real** da aresta lateral [**CC'**] nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $F'_{s_2}$  e  $A'_{s_1}$  teve-se em conta que a aresta [**A'F'**] (da base de maior afastamento do prisma) é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $F'_{s_2}$  (a sombra real do ponto **F'**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a [ $F'_2A'_2$ ] (a projeção frontal do segmento [**A'F'**]) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [**A'F'**]). A linha quebrada aberta [ $F'_{s_2}Q'_sA'_{s_1}$ ] é a **sombra real** da aresta [**A'F'**] nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada [ $C_{s_2}D_{s_2}E_{s_2}E'_{s_2}F'_{s_2}Q'_sA'_{s_1}B'_{s_1}C'_{s_1}Q_s$ ] é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento [ $Q_sQ'_s$ ] é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

## Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do prisma), no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do triângulo ou, ainda, das retas **i**, **t** e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 898.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a face inferior do cubo) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do cubo:*

A face inferior do cubo (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do quadrado não apresenta deformação). Assim, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), mediu-se o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com o Plano Frontal de Projeção, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta suporte do lado  $[AB]$ . Sobre essa reta, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), mediram-se os 5 cm (a medida do lado do quadrado) e determinou-se  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**), garantindo-se que **B** se situa no  $1^\circ$  Diedro (**B** tem afastamento positivo).

A partir de  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do quadrado, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do polígono –  $C_1$  e  $D_1$ . Note, uma vez mais, que se garantiu que o quadrado se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

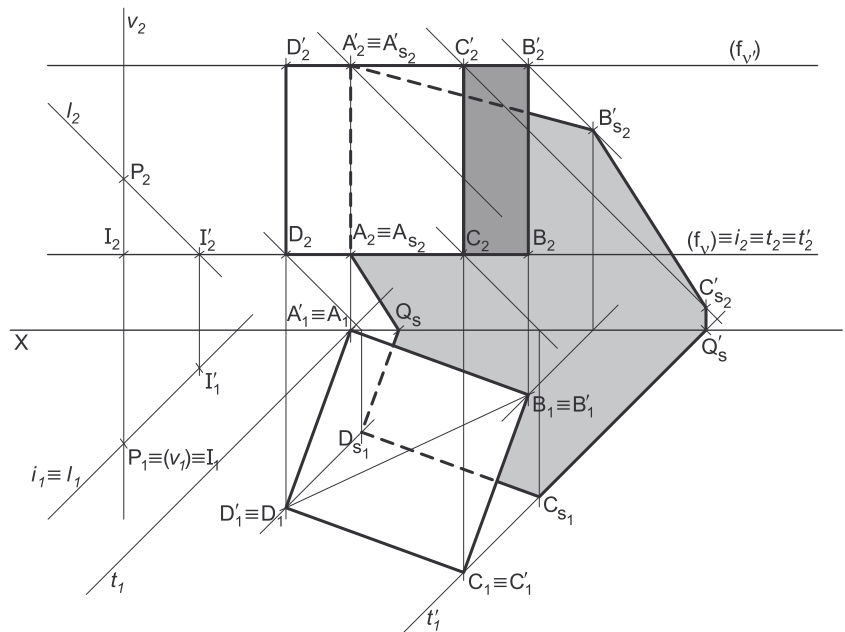
Um cubo toma a forma aparente de um **prisma quadrangular regular**, cuja altura é igual à medida da aresta das bases. Assim, a altura desse prisma é a distância entre os planos das duas bases (as duas faces horizontais do cubo), o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das duas faces horizontais. Dessa forma, a altura do cubo é 5 cm (a medida da aresta do cubo) e o plano que contém a sua face inferior tem 2 cm de cota (a cota do ponto **A**), pelo que o plano  $v'$  (o plano que contém a face superior do sólido) tem 7 cm de cota ( $2 + 5 = 7$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a face superior do sólido) pelo seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

As arestas do cubo que não estão contidas nas suas faces horizontais (de nível) são contidas em retas ortogonais aos planos que contém aquelas duas faces, ou seja, estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais). Assim, pelas projeções dos vértices do quadrado  $[ABCD]$  conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas verticais do cubo (que não se identificaram) e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $v'$  (o plano que contém a face superior do sólido) – esses pontos são os vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$ , que é a face superior do sólido. Note que se trata da interseção entre retas projetantes horizontais (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ). Nesse sentido, as projeções horizontais dos vértices **A'**, **B'**, **C'** e **D'** ( $A'_1$ ,  $B'_1$ ,  $C'_1$  e  $D'_1$ , respetivamente), estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da face inferior (os vértices **A**, **B**, **C** e **D**, respetivamente).

A partir das projeções dos oito vértices do cubo, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado  $[A'B'C'D']$ , cuja projeção horizontal é o quadrado  $[A'_1B'_1C'_1D'_1]$ . Em projeção horizontal, existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – todos os vértices da base  $[ABCD]$ . Estes, por serem os vértices de **menor cota** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes horizontais ou estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e **A'**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da face inferior),  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da face superior) e a aresta  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'D']$  estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta  $[AA']$ . Já a aresta  $[CC']$  é visível, em projeção frontal, por se situar na parte visível do sólido (os vértices **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do cubo).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cubo:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

Salienta-se que um cubo toma a forma aparente de um **prisma quadrangular regular**, pelo que a aplicação deste método geral é direta, com as adaptações necessárias em termos de terminologia.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **v**, paralela às arestas verticais do cubo (a reta **v** é uma reta vertical), e a reta **l** (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas retas **v** e **l**, com o plano da base (de referência) do cubo (considerou-se que a base de referência do cubo é a sua face inferior – a face que está contida no plano **v**). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **v** com o plano **v**) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o plano **v**).
3. Conduziram-se as retas rasantes à face inferior do cubo (a base de referência) que são paralelas à reta **i** – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o plano **v**).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do cubo nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas **[AA']** e **[CC']** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas **[AA']** e **[CC']** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

As arestas laterais **[AA']** e **[CC']** separam a parte da superfície lateral do cubo que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]** estão iluminadas, sendo que a face superior (a face **[A'B'C'D']**) também está iluminada. Já as faces **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]** estão em sombra, tal como a face inferior do cubo (a face **[ABCD]**). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [AA'B'C'D]**.

A **sombra própria** do cubo integra as faces **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]** e a face inferior (a face **[ABCD]**). Em projeção horizontal, tanto a face inferior, como as faces **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]** (que são projetantes horizontais) são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, a face inferior é invisível (é projetante frontal), bem como a face **[AA'B'B]**. No entanto, a face **[BB'C'C]** (que está em sombra) é visível, em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, a única sombra própria visível a assinalar é a referente à face **[BB'C'C]**.

A **sombra própria** visível do cubo foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

## Determinação da sombra projetada do cubo:

A **sombra projetada** do cubo é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

Os pontos **A** e **A'** situam-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $A_{s_2} \equiv A_2$  e  $A'_{s_2} \equiv A'_2$ .  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**.  $C'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C'**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cubo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$C_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[CD]** (da face inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[C<sub>s1</sub>D<sub>s1</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[CD]** e situa-se no **SPHA**.  $A_{s_2}$  e  $A'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[AA']** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A<sub>s2</sub>A'\_{s2}]** é a sombra projetada do segmento **[AA']** e situa-se no **SPFS**.  $A'_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[A'B']** (da face superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A'\_{s2}B'\_{s2}]** é a sombra projetada do segmento **[A'B']** e situa-se no **SPFS**.  $B'_{s_2}$  e  $C'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[B'C']** (da face superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[B'\_{s2}C'\_{s2}]** é a sombra projetada do segmento **[B'C']** e situa-se no **SPFS**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas **[AD]** e **[CC']** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_2}$  e  $D_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C_{s_1}$  e  $C'_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_2}$  e  $D_{s_1}$  teve-se em conta que a aresta **[AD]** (da face inferior) é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $D_{s_1}$  (a sombra real do ponto **D**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** (a projeção horizontal do segmento **[AD]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AD]**). A linha quebrada aberta **[A<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>D<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** da aresta **[AD]** (da face inferior) nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s_1}$  e  $C'_{s_2}$  teve-se em conta que a aresta **[CC']** é um segmento de reta vertical e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C'_{s_2}$  (a sombra real do ponto **C'**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a **[C<sub>2</sub>C'\_{s2}]** (a projeção frontal do segmento **[CC']**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[CC']**). A linha quebrada aberta **[C'\_{s2}Q'\_sC<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** da aresta **[CC']** nos planos de projeção.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A linha quebrada fechada  $[D_{s_1} Q_s A_{s_2} A'_s B'_s C'_s Q'_s C_{s_1}]$  é a **sombra projetada** do cubo nos planos de projeção. O segmento  $[Q_s Q'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do cubo. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do cubo nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cubo é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio cubo. Sublinha-se que o segmento  $[A'_s A_{s_2}]$ , do contorno da sombra projetada (que está por detrás do cubo), está oculto pela aresta lateral  $[AA']$  (em projeção frontal), que também é invisível em projeção frontal.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cubo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços frontais dos planos que contêm as faces horizontais (de nível) do cubo, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do quadrado, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cubo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cubo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cubo, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 899.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a face inferior do cubo) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal  $(f_v)$  passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

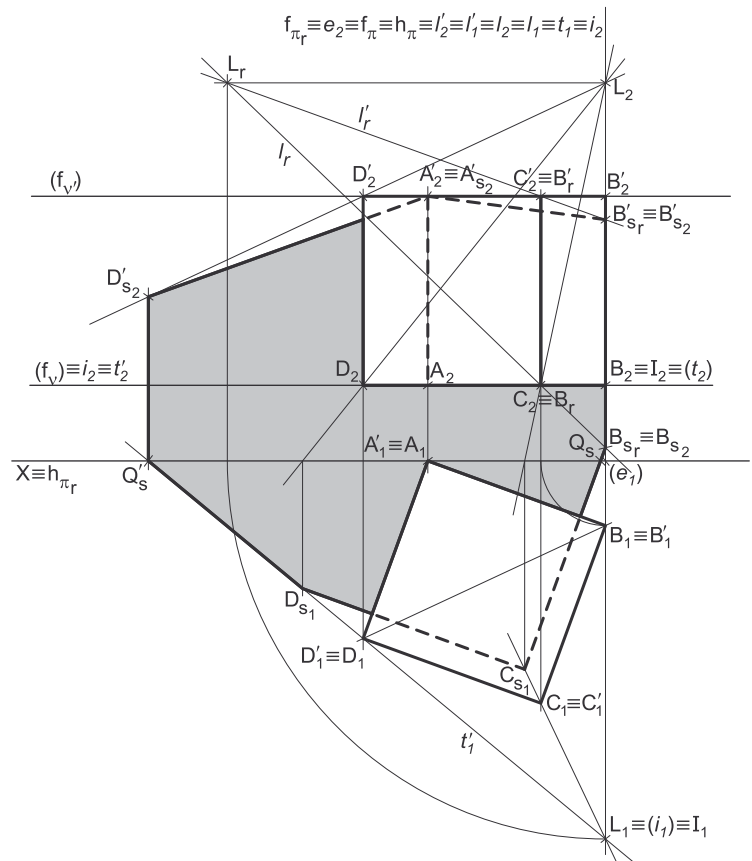
#### Determinação das projeções do cubo:

A face inferior do cubo (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do quadrado não apresenta deformação). Assim, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), mediu-se o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com o Plano Frontal de Projeção, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta suporte do lado  $[AB]$ . Sobre essa reta, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), mediram-se os 5 cm (a medida do lado do quadrado) e determinou-se  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**), garantindo-se que **B** se situa no  $1^{\text{a}}$  Diedro (**B** tem afastamento positivo).

A partir de  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do quadrado, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do polígono –  $C_1$  e  $D_1$ . Note, uma vez mais, que se garantiu que o quadrado se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Diedro. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$   $(f_v)$ , pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Um cubo toma a forma aparente de um **prisma quadrangular regular**, cuja altura é igual à medida da aresta das bases. Assim, a altura desse prisma é a distância entre os planos das duas bases (as duas faces horizontais do cubo), o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das duas faces horizontais.

Dessa forma, a altura do cubo é 5 cm (a medida da aresta do cubo) e o plano que contém a sua face inferior tem 2 cm de cota (a cota do ponto **A**), pelo que o plano  $v'$  (o plano que contém a face superior do sólido) tem 7 cm de cota ( $2 + 5 = 7$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a face superior do sólido) pelo seu traço frontal  $(f_{v'})$ . O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

As arestas do cubo que não estão contidas nas suas faces horizontais (de nível) são estão contidas em retas ortogonais aos planos que contêm aquelas duas faces, ou seja, estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais). Assim, pelas projeções dos vértices do quadrado  $[ABCD]$  conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas verticais do cubo (que não se identificaram) e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $v'$  (o plano que contém a face superior do sólido) – esses pontos são os vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$ , que é a face superior do sólido. Note que se trata da interseção entre retas projetantes horizontais (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ). Nesse sentido, as projeções horizontais dos vértices  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  ( $A'_1$ ,  $B'_1$ ,  $C'_1$  e  $D'_1$ , respetivamente), estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da face inferior (os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , respetivamente).

A partir das projeções dos oito vértices do cubo, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é o quadrado  $[A'_1B'_1C'_1D'_1]$ . Em projeção horizontal, existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – todos os vértices da base  $[ABCD]$ . Estes, por serem os vértices de **menor cota** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes horizontais ou estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $A$  e  $A'$ . Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da face inferior),  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da face superior) e a aresta  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'D']$  estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta  $[AA']$ . Já a aresta  $[CC']$  é visível, em projeção frontal, por se situar na parte visível do sólido (os vértices  $C$  e  $C'$  são os vértices de maior afastamento do cubo).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cubo:*

Em primeiro lugar, após a determinação das projeções do cubo, já foi possível determinar as projeções do ponto  $L$  (o foco luminoso), em função dos dados – o ponto  $L$  situa-se no mesmo plano de perfil do vértice  $B$ , do quadrado  $[ABCD]$  – as projeções do ponto  $L$  situam-se na mesma linha de chamada das projeções da aresta  $[BB']$  do cubo.

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo foco luminoso, uma reta paralela às arestas laterais do prisma – a reta  $i$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base (de referência) – o ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

Salienta-se que um cubo toma a forma aparente de um **prisma quadrangular regular**, pelo que a aplicação deste método geral é direta, com as adaptações necessárias em termos de terminologia.

1. Conduziu-se, pelo foco luminoso (o ponto  $L$ ), uma reta paralela às arestas laterais do sólido – a reta  $i$ , que está definida por um ponto (o ponto  $L$ ) e por uma direção (a direção das arestas verticais do cubo – é uma reta vertical).
2. Determinou-se o ponto de interseção a reta  $i$  com o plano da base (de referência) do cubo – o ponto  $I$ . Considerou-se que a base de referência do cubo é a sua face inferior do prisma (a face do cubo que está contida no plano  $v$ ). Assim, o ponto  $I$  é o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano  $v$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma (a face inferior do cubo) – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da face inferior do cubo – o plano  $v$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à face inferior do cubo (a base de de referência) nos pontos  $B$  e  $D$ , respetivamente. Assim, as arestas  $[BB']$  e  $[DD']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas  $[BB']$  e  $[DD']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas  $[BB']$  e  $[DD']$  separam a parte da superfície lateral do cubo que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e ligeiramente da direita, onde se situa o foco luminoso), as faces  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  estão iluminadas, sendo que a face superior (a face  $[A'B'C'D']$ ) também está iluminada. Já as faces  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$  estão em sombra, tal como a face inferior do cubo (a face  $[ABCD]$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[BB'A'D'DC]$ .

A **sombra própria** do cubo integra as faces  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$  e a face inferior (a face  $[ABCD]$ ). Em projeção horizontal, tanto a face inferior, como as faces  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$  (que são projetantes horizontais) são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer sombra própria visível a assinalar. De forma semelhante, em projeção frontal, tanto a face inferior (que é projetante frontal) como as faces  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$  são invisíveis, pelo que, em projeção frontal, também não há qualquer sombra própria visível a assinalar.

*Determinação da sombra projetada do cubo:*

A **sombra projetada** do cubo é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

O ponto  $A$  situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $A_{s_2} \equiv A_2$ .  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $D$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $D$ .  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $C$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $C$ .  $D'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $D'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $D'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se que os raios luminosos que passam pelos vértices **B** e **B'** da **linha separatriz luz/sombra** são de perfil, pelo que não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível determinar, de forma direta, os pontos em que aqueles intersejam os planos de projeção para, dessa forma, se determinarem as sombras reais dos pontos **B** e **B'**. O raio luminoso **l** é o raio luminoso que passa pelo ponto **B** e está definido por dois pontos – o ponto **B** e o foco luminoso **L**. O raio luminoso **l'** é o raio luminoso que passa pelo ponto **B'** e está definido por dois pontos – o ponto **B'** e o foco luminoso **L**.

Face ao exposto, para se determinarem as sombras projetadas dos pontos **B** e **B'** é necessário o recurso a raciocínios auxiliares ou o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo recurso a um processo geométrico auxiliar – o do **rebatimento do plano de perfil** (o plano que contém os dois raios luminosos). Assim, identificou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil) pelos seus traços. Optou-se por rebater o plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira do rebatimento, que são planos horizontais (de nível) – os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo dos seus rebatimentos.

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento dos pontos **B**, **B'** e **L**, o que nos permitiu determinar **B<sub>r</sub>**, **B'<sub>r</sub>** e **L<sub>r</sub>** (os pontos **B**, **B'** e **L** rebatidos, respetivamente). Em seguida, desenharam-se os raios luminosos **l** e **l'**, em rebatimento – **l<sub>r</sub>** e **l'<sub>r</sub>**. A reta **l<sub>r</sub>** está definida por dois pontos – os pontos **L<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**. A reta **l'<sub>r</sub>** está definida por dois pontos – os pontos **L<sub>r</sub>** e **B'<sub>r</sub>**.

Por fim, determinaram-se os traços das retas **l** e **l'**, em rebatimento – **B<sub>sr</sub>** é, em rebatimento, o traço frontal do raio luminoso **l** (tem cota positiva, pelo que se situa no **SPFS**) e, por isso mesmo, é a sombra real do ponto **B** (em rebatimento), tal como **B'<sub>sr</sub>** é, em rebatimento, o traço frontal do raio luminoso **l'** (tem cota positiva, pelo que se situa no **SPFS**) e, por isso mesmo, é a sombra real do ponto **B'** (em rebatimento). Em seguida, inverteu-se o rebatimento – tendo em conta que os pontos **B<sub>s</sub>** e **B'<sub>s</sub>** se situam na charneira do rebatimento, aqueles dois pontos são fixos (rodam sobre si próprios), pelo que se tem imediatamente **B<sub>s2</sub> ≡ B<sub>sr</sub>** e **B'<sub>s2</sub> ≡ B'<sub>sr</sub>**.

As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cubo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

**C<sub>s1</sub>** e **D<sub>s1</sub>** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[CD]** (da face inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[C<sub>s1</sub>D<sub>s1</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[CD]** e situa-se no **SPHA**. **B<sub>s2</sub>** e **B'<sub>s2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[BB']** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[B<sub>s2</sub>B'<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[BB']** e situa-se no **SPFS**. **A'<sub>s2</sub>** e **B'<sub>s2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[A'B']** (da face superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A'<sub>s2</sub>B'<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[A'B']** e situa-se no **SPFS**. **A'<sub>s2</sub>** e **D'<sub>s2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[A'D']** (da face superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A'<sub>s2</sub>D'<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[A'D']** e situa-se no **SPFS**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas **[BC]** e **[DD']** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre **B<sub>s2</sub>** e **C<sub>s1</sub>** (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre **D<sub>s1</sub>** e **D'<sub>s2</sub>** (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre **B<sub>s2</sub>** e **C<sub>s1</sub>** teve-se em conta que a aresta **[BC]** (da face inferior) é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por **C<sub>s1</sub>** (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[B<sub>s2</sub>C<sub>s1</sub>]** (a projeção horizontal do segmento **[BC]**) até ao eixo **X**, onde se situa **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento **[BC]**). A linha quebrada aberta **[B<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>C<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** da aresta **[BC]** (da face inferior) nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre **D<sub>s1</sub>** e **D'<sub>s2</sub>** teve-se em conta que a aresta **[DD']** é um segmento de reta vertical e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por **D'<sub>s2</sub>** (a sombra real do ponto **D'**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a **[D<sub>s1</sub>D'<sub>s2</sub>]** (a projeção frontal do segmento **[DD']**) até ao eixo **X**, onde se situa **Q'<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento **[DD']**). A linha quebrada aberta **[D'<sub>s2</sub>Q'<sub>s</sub>D<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** da aresta **[DD']** nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada **[C<sub>s1</sub>D<sub>s1</sub>Q'<sub>s</sub>D'<sub>s2</sub>A'<sub>s2</sub>B'<sub>s2</sub>B<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>]** é a **sombra projetada** do cubo nos planos de projeção. O segmento **[Q<sub>s</sub>Q'<sub>s</sub>]** é a **linha de quebra** da sombra do cubo. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do cubo nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cubo é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio cubo. Sublinha-se que a parte invisível do segmento **[B'<sub>s2</sub>B<sub>s2</sub>]**, do contorno da sombra projetada (que está por detrás do cubo), está oculto pela aresta lateral **[BB']** (em projeção frontal), pelo que, na realidade, aquela invisibilidade está oculta (e, por isso, não se assinala).

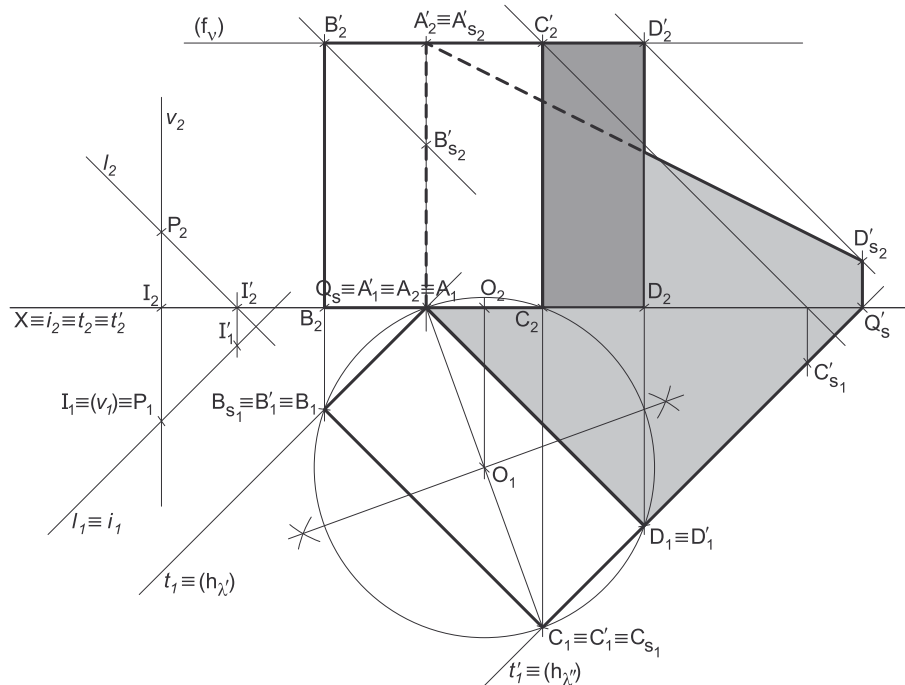
Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cubo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços frontais dos planos que contêm as faces horizontais (de nível) do cubo, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do quadrado, das retas **i**, **t**, e **t'** ou, ainda, todos os traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  (para a determinação das sombras reais dos pontos **B** e **B'**).

Note que, apesar de o cubo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cubo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cubo, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

900.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **A** é um ponto do eixo **X**, pois tem cota e afastamento nulos. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

*Determinação das projeções do paralelepípedo:*

Tendo em conta que o retângulo **[ABCD]** é a face inferior de um paralelepípedo, deduz-se que o sólido tem duas faces horizontais (de nível) – uma face inferior (o retângulo **[ABCD]**) e uma face superior.

Nesse sentido, e porque o ponto **A** tem cota nula, a face inferior do paralelepípedo (o retângulo **[ABCD]**) está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que o retângulo está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, a partir de **A1** (a projeção horizontal do ponto **A**), mediu-se o ângulo que a diagonal **[AC]** faz com o eixo **X**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta suporte da diagonal **[AC]**. Sobre essa reta, a partir de **A1** (a projeção horizontal do ponto **A**), mediram-se os 9 cm (a medida da diagonal **[AC]**) e determinou-se **C1** (a projeção horizontal do ponto **C**), garantindo-se que **C** se situa no 1º Diedro (**C** tem afastamento positivo).

A partir de **A1** e **C1** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), efetuou-se a construção da projeção horizontal do retângulo, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar **O1** (a projeção horizontal do centro da circunferência circunscrita ao retângulo) – **O1** é o ponto médio do segmento de reta **[A1C1]**, e determinou-se com o recurso à mediatriz daquele segmento. Com o compasso, fazendo centro em **O1** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até **A1** (a projeção horizontal do ponto **A**) ou **C1** (a projeção horizontal do ponto **C**), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao retângulo, e efetuaram-se os traçados necessários à construção do retângulo, inscrito na circunferência.

O lado **[AB]**, do retângulo, faz um ângulo de 45° (de abertura para a esquerda) com o eixo **X**. Assim, a partir de **A1** (a projeção horizontal do ponto **A**), mediu-se o ângulo que o lado **[AB]** do retângulo faz com o eixo **X**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar **B1** (a projeção horizontal do ponto **B**), sobre a circunferência circunscrita ao retângulo. Por fim, concluiu-se a construção do polígono, o que nos permitiu determinar **D1** (a projeção horizontal do vértice **D**, do retângulo). A projeção frontal do retângulo reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X**, pois todos os seus vértices têm cota nula.

Um paralelepípedo é um prisma reto, de base retangular e a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases (as faces horizontais do paralelepípedo, neste caso) – nesta situação, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das duas faces horizontais. Assim, porque o paralelepípedo tem 7 cm de altura e a sua face inferior está contida no Plano Horizontal de Projeção, o plano **v** (o plano que contém a face superior do sólido) tem 7 cm de cota (0 + 7 = 7). Nesse sentido, representou-se o plano **v** (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal **(fv)**. O plano **v** não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

Trata-se de um **prisma reto**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases (as faces horizontais), ou seja, estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais). Assim, pelas projeções dos vértices do retângulo **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram) e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano **v** – esses pontos são os vértices do retângulo **[A'B'C'D']**, que é a face superior do sólido. Note que se trata da interseção entre retas projetantes horizontais (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante frontal (o plano **v**). Nesse sentido, as projeções horizontais dos vértices **A', B', C'** e **D'** (**A'1, B'1, C'1** e **D'1**, respetivamente), estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da face inferior (os vértices **A, B, C** e **D**, respetivamente).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das projeções dos oito vértices do paralelepípedo, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é o retângulo  $[A'B'C'D']$ , cuja projeção horizontal é o retângulo  $[A'_1B'_1C'_1D'_1]$ . Em projeção horizontal, existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – todos os vértices da face  $[ABCD]$ . Estes, por serem os vértices de **menor cota** do paralelepípedo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes horizontais ou estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e **A'**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do paralelepípedo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da face inferior),  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da face superior) e a aresta lateral  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'D']$  estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral  $[AA']$ . Já a aresta lateral  $[CC']$  é visível, em projeção frontal, por se situar na parte visível do sólido (os vértices **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do prisma).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do paralelepípedo:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta *i*, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta *i*; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

Salienta-se que um paralelepípedo é, na prática, um **prisma reto**, pelo que a aplicação deste método geral é direta, com as adaptações necessárias em termos de terminologia.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta *v*, paralela às arestas laterais do sólido (a reta *v* é uma reta vertical), e a reta *l* (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta *i*, a reta de interseção do plano definido pelas retas *v* e *l*, com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do paralelepípedo é a sua face inferior – a face que está contida no Plano Horizontal de Projeção). A reta *i* está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta *v* com o Plano Horizontal de Projeção – o traço horizontal da reta *v*) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta *l* com o Plano Horizontal de Projeção – o traço horizontal da reta *l*).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta *i* – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o Plano Horizontal de Projeção).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do paralelepípedo nos pontos **B** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[BB']$  e  $[CC']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[BB']$  e  $[CC']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

Uma vez que a base de referência (a face inferior do sólido) está contida no próprio Plano Horizontal de Projeção, sublinha-se que as retas **t** e **t'** são, de forma imediata, os traços horizontais dos planos tangentes luz/sombra, o que se identificou no desenho. Por outro lado, os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  (os planos tangentes luz/sombra) são planos verticais (planos projetantes horizontais) que estão identificados, apenas, pelos seus traços horizontais, razão pela qual aqueles se identificaram entre parêntesis.

As arestas laterais  $[BB']$  e  $[CC']$  separam a parte da superfície lateral do paralelepípedo que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a face lateral  $[BB'C'C]$  está iluminada, sendo que a face superior (a face  $[A'B'C'D']$ ) também está iluminada. Já as faces laterais  $[AA'B'B]$ ,  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  estão em sombra, tal como a face inferior do paralelepípedo (a face  $[ABCD]$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[BB'A'D'C'C]$ .

Sublinha-se que **nesta situação particular**, os dois **planos tangentes luz/sombra** são rasantes ao sólido – um deles (o plano  $\lambda'$ ) é rasante ao sólido longo da face  $[AA'B'B]$  e o outro (o plano  $\lambda''$ ) é rasante ao sólido ao longo da face  $[CC'D'D]$ . O que acontece, na realidade, é que a face  $[AA'B'B]$  está contida num plano luz/sombra (o plano luz/sombra que é rasante ao sólido ao longo da aresta  $[BB']$ ), tal como a face  $[CC'D'D]$  está contida num plano luz/sombra (o plano luz/sombra que é rasante ao sólido ao longo da aresta  $[CC']$ ). Assim, um dos planos luz/sombra contém a aresta  $[BB']$ , cuja sombra é «arrastada» ao longo de toda a face  $[AA'B'B]$  – nesse sentido, a face  $[AA'B'B]$  situa-se, na sua totalidade, na **sombra espacial** da aresta  $[BB']$ . De forma semelhante, o outro plano luz/sombra contém a aresta  $[CC']$ , cuja sombra é «arrastada» ao longo de toda a face  $[CC'D'D]$  – nesse sentido, a face  $[CC'D'D]$  situa-se, na sua totalidade, na **sombra espacial** da aresta  $[CC']$ .

A **sombra própria** do paralelepípedo integra as faces laterais  $[AA'B'B]$ ,  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  e a face inferior (a face  $[ABCD]$ ). Em projeção horizontal, tanto a face inferior, como as faces laterais  $[AA'B'B]$ ,  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  (que são projetantes horizontais) são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não há qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, a face inferior é invisível (é projetante frontal), bem como as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$ . No entanto, a face lateral  $[CC'D'D]$  (que está em sombra) é visível, em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, a única sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral  $[CC'D'D]$ .

A **sombra própria** visível do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra projetada do paralelepípedo:*

A **sombra projetada** do paralelepípedo é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

Os pontos **B** e **C** situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $B_{s_1} \equiv B_1$  e  $C_{s_1} \equiv C_1$ . O ponto **A'** situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $A'_{s_2} \equiv A'_2$ .  $C'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C'**.  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**.  $D'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **D'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D'**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$B_{s_1}$  e  $C_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[BC]** (da face inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s_1}C_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[BC]** e situa-se no **SPHA**.  $C_{s_1}$  e  $C'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[CC']** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s_1}C'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[CC']** e situa-se no **SPHA**.

$A'_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[A'B']** (da face superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A'_{s_2}B'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento **[A'B']** e situa-se no **SPFS**.  $A'_{s_2}$  e  $D'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[A'D']** (da face superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A'_{s_2}D'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento **[A'D']** e situa-se no **SPFS**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas **[BB']** e **[C'D']** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $B_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $D'_{s_2}$  e  $C'_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  teve-se em conta que a aresta lateral **[BB']** é um segmento de reta vertical e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B'_{s_2}$  (a sombra real do ponto **B'**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[B_2B'_2]$  (a projeção frontal do segmento **[BB']**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[BB']**). A linha quebrada aberta  $[B'_{s_2}Q_sB_{s_1}]$  é a **sombra real** da aresta lateral **[BB']** nos planos de projeção. Note que, **nesta situação**, o ponto  $Q_s$  fica necessariamente sobre as projeções do ponto **A** ( $A_2 \equiv A_1$ ), em função da particularidade de alguns dos dados deste exercício.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $D'_{s_2}$  e  $C'_{s_1}$  teve-se em conta que a aresta **[C'D']** (da face superior) é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C'_{s_1}$  (a sombra real do ponto **C'**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[C'_1D'_1]$  (a projeção horizontal do segmento **[C'D']**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[C'D']**). A linha quebrada aberta  $[C'_{s_1}Q'_sD'_{s_2}]$  é a **sombra real** da aresta **[C'D']** (da face superior) nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[B_{s_1}C_{s_1}C'_{s_1}Q'_sD'_{s_2}A'_{s_2}B'_{s_2}Q_s]$  é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do paralelepípedo. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do paralelepípedo nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do paralelepípedo é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio paralelepípedo. Sublinha-se que o segmento  $[A'_{s_2}Q_s]$ , do contorno da sombra projetada, sendo invisível (está por detrás do paralelepípedo), está oculto pela aresta lateral **[AA']** (em projeção frontal), que também é invisível em projeção frontal.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o paralelepípedo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano que contém a face superior do sólido, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do retângulo, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas **i**, **t**, e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o paralelepípedo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o paralelepípedo, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

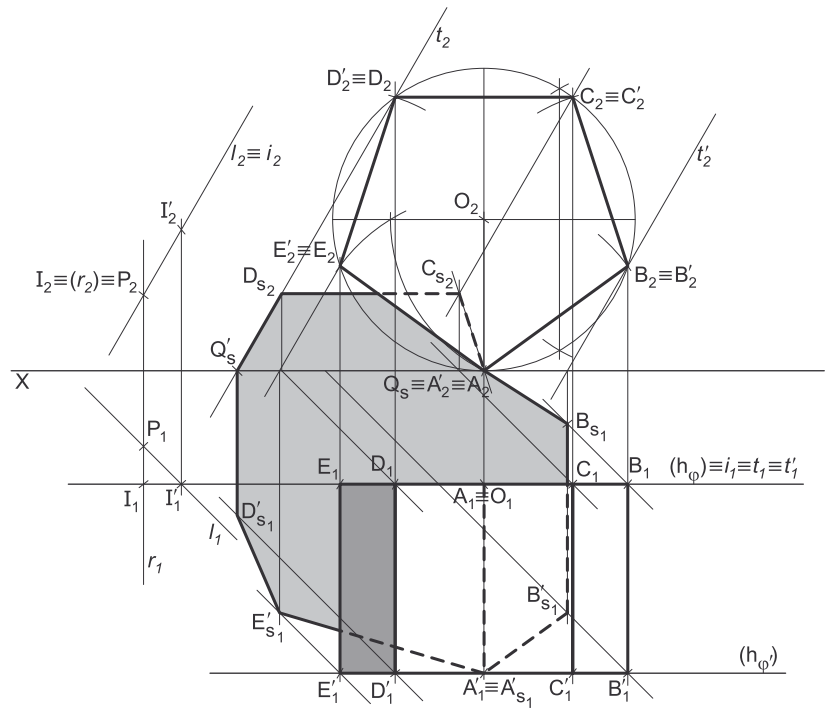
## 901.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do prisma) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções do prisma:*

A base de menor afastamento do prisma (o pentágono **[ABCDE]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do pentágono não apresenta deformação). Por outro lado, a circunferência circunscrita ao pentágono é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o seu raio é igual à cota do ponto **O**. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio (a cota do ponto **O**), desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao pentágono, que é tangente ao eixo **X**. Uma vez que o vértice **A**, do pentágono tem cota nula, o ponto **A** é o ponto em que a circunferência é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, o que nos permitiu determinar, de forma direta, a projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ), sobre a circunferência.



Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção frontal do pentágono, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos outros quatro vértices do polígono – **B**<sub>2</sub>, **C**<sub>2</sub>, **D**<sub>2</sub> e **E**<sub>2</sub>. Estes foram nomeados seguindo as indicações fornecidas no enunciado – **B** situa-se à direita de **A**. A projeção horizontal do pentágono reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 5 cm de altura e o plano que contém a sua base de menor afastamento tem 3 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**), o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 8 cm de afastamento (3 + 5 = 8). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ). O plano  $\varphi'$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas de topo (retas projetantes frontais). Assim, pelas projeções dos vértices do pentágono **[ABCDE]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram) e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) – esses pontos são os vértices do pentágono **[A'B'C'D'E']**, que é a base de maior afastamento do sólido. Note que se trata da interseção entre retas projetantes frontais (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ). Nesse sentido, as projeções frontais dos vértices **A'**, **B'**, **C'**, **D'** e **E'** (**A'**<sub>2</sub>, **B'**<sub>2</sub>, **C'**<sub>2</sub>, **D'**<sub>2</sub> e **E'**<sub>2</sub>, respetivamente), estão coincidentes com as projeções frontais dos vértices correspondentes da base de menor afastamento (os vértices **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, respetivamente).

A partir das projeções dos dez vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é o pentágono **[A'B'C'D'E']**, cuja projeção frontal é o pentágono **[A'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>E'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existem cinco vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – todos os vértices da base **[ABCDE]**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[BCDEE'D'C'B']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>E'<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **A'**. Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]** (da base de menor afastamento), **[A'B']** e **[A'D']** (da base de maior afastamento) e a aresta lateral **[AA']**. No entanto, as arestas **[AB]**, **[AD]**, **[A'B']** e **[A'D']** estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral **[AA']**. Já as arestas laterais **[CC']** e **[DD']** são visíveis, em projeção horizontal, por se situarem na parte visível do sólido (os vértices **C**, **C'**, **D** e **D'** são os vértices de maior cota do prisma).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **r**, paralela às arestas laterais do sólido (a reta **r** é uma reta de topo), e a reta **l** (um raio luminoso, com a direção luminosa dada no enunciado). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra
2. Determinou-se a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas retas **r** e **l**, com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base de menor afastamento – a base que está contida no plano  $\varphi$ ). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **r** com o plano  $\varphi$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o plano  $\varphi$ ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i** – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o plano  $\varphi$ ).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **D** e **B**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[DD']** e **[BB']** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[DD']** e **[BB']** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

As arestas laterais **[BB']** e **[DD']** separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da direita), as faces laterais **[BB'C'C]** e **[CC'D'D]** estão iluminadas, sendo que a base de maior afastamento (a base **[A'B'C'D'E']**) também está iluminada. Já as faces laterais **[AA'B'B]**, **[AA'E'E]** e **[DD'E'E]** estão em sombra, tal como a base de menor afastamento do prisma (a base **[ABCDE]**). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [BB'A'E'D'DC]**.

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais **[AA'B'B]**, **[AA'E'E]** e **[DD'E'E]** e a base de menor afastamento (a base **[ABCDE]**). Em projeção frontal, tanto a base de menor afastamento, como as faces laterais **[AA'B'B]**, **[AA'E'E]** e **[DD'E'E]** (que são projetantes frontais) são invisíveis, pelo que, em projeção frontal, não há qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção horizontal, a base de menor afastamento é invisível (é projetante horizontal), bem como as faces laterais **[AA'B'B]** e **[AA'E'E]**. No entanto, a face lateral **[DD'E'E]** (que está em sombra) é visível, em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, a única sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral **[DD'E'E]**.

A **sombra própria** visível do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção horizontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

O ponto **A'** situa-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $A'_{s_1} \equiv A'$ . **B'\_{s\_1}** é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'**. **B\_{s\_1}** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**. **D'\_{s\_1}** é a sombra real do ponto **D'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D'**. **E'\_{s\_1}** é a sombra real do ponto **E'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **E'**.

**C\_{s\_2}** é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**. **D\_{s\_2}** é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

**A'\_{s\_1}** e **B'\_{s\_1}** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[A'B']** (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A'\_{s\_1}B'\_{s\_1}]** é a sombra projetada do segmento **[A'B']** e situa-se no **SPHA**. **A'\_{s\_1}** e **E'\_{s\_1}** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[A'E']** (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A'\_{s\_1}E'\_{s\_1}]** é a sombra projetada do segmento **[A'E']** e situa-se no **SPHA**. **E'\_{s\_1}** e **D'\_{s\_1}** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[D'E']** (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[D'\_{s\_1}E'\_{s\_1}]** é a sombra projetada do segmento **[D'E']** e situa-se no **SPHA**. **B\_{s\_1}** e **B'\_{s\_1}** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[BB']** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[B\_{s\_1}B'\_{s\_1}]** é a sombra projetada do segmento **[BB']** e situa-se no **SPHA**.

**C\_{s\_2}** e **D\_{s\_2}** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[CD]** (da base de menor afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[C\_{s\_2}D\_{s\_2}]** é a sombra projetada do segmento **[CD]** e situa-se no **SPFS**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas **[BC]** e **[DD']** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre **C\_{s\_2}** e **B\_{s\_1}** (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre **D'\_{s\_1}** e **D\_{s\_2}** (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre **C\_{s\_2}** e **B\_{s\_1}** teve-se em conta que a aresta **[BC]** (da base de menor afastamento) é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por **C\_{s\_2}** (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a **[B\_2C\_2]** (a projeção frontal do segmento **[BC]**) até ao eixo **X**, onde se situa **Q\_s** (o ponto de quebra da sombra do segmento **[BC]**). A linha quebrada aberta **[C\_{s\_2}Q\_sB\_{s\_1}]** é a **sombra real** da aresta **[BC]** (da base de menor afastamento) nos planos de projeção.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A base inferior do prisma (o triângulo **[ABC]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do triângulo não apresenta deformação). Assim, a partir de  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuou-se a construção do triângulo, em projeção horizontal, o que nos permitiu determinar a projeção horizontal do terceiro vértice do triângulo –  $C_1$ . A projeção frontal da figura reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, pelas projeções do ponto **A** conduziram-se as projeções homónimas da reta  $f$ , a reta suporte da aresta lateral **[AA']**, com a direção dada no enunciado – a reta  $f$  está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção dada no enunciado). É dado, no enunciado, que as arestas do prisma medem 6 cm. A aresta lateral **[AA']** é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal), tal como as restantes arestas laterais do sólido. Assim, sobre  $f_2$  (a projeção frontal da reta  $f$ ) e a partir de  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**), mediram-se os 6 cm (o comprimento das arestas laterais do prisma) e determinou-se  $A'_2$  (a projeção frontal do vértice **A'**, da base superior) –  $A'_1$  (a projeção horizontal do ponto **A'**) está sobre  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ).

Em seguida, representou-se o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma) pelo seu traço frontal. O plano  $v'$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ) passa por  $A'_2$  (a projeção frontal do ponto **A'**). O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Por fim, pelas projeções dos outros dois vértices do triângulo **[ABC]** (os pontos **B** e **C**) conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), paralelas à reta  $f$ , e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $v'$  – esses pontos são os pontos  $B'$  e  $C'$  (os outros dois vértices do triângulo **[A'B'C']**, que é a base superior do sólido). Os pontos  $B'$  e  $C'$  tiveram determinação direta, a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ).

A partir das projeções dos seis vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ACC'B'A']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **B**. Este, por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base inferior, e a aresta lateral **[BB']**. No entanto, as arestas **[AB]** e **[BB']** estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis, em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta **[BC]**, da base inferior. Já a aresta **[A'C']**, da base superior, é visível, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (os pontos **A'** e **C'** são dois dos vértices de maior cota do prisma).

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ACBB'C'A']**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>B<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>]**. Todos os vértices do prisma pertencem ao contorno aparente frontal. No entanto, as arestas **[AB]** (da base inferior) e **[A'B']** (da base superior) são invisíveis, mas como estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar. Já a aresta lateral **[CC']** é visível (em projeção frontal), pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (os vértices **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do prisma).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $f'$  (paralela às arestas laterais do sólido) e a reta  $l$  (um raio luminoso com a direção luminosa convencional). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas retas  $f'$  e  $l$ , com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base inferior, que está contida no plano  $v$ ). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta  $f'$  com o plano  $v$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta  $l$  com o plano  $v$ ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o plano  $v$ ).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AA']** e **[CC']** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AA']** e **[CC']** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

As arestas laterais **[AA']** e **[CC']** separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a face lateral **[AA'C'C]** é a única face lateral iluminada, sendo que a base superior (a base **[A'B'C']**) também está iluminada. Já as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]** estão em sombra, tal como a base inferior do prisma (a base **[ABC]**). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [ACC'B'A']**.

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]**, bem como a base inferior do prisma (a base **[ABC]**). Em projeção frontal, a face lateral **[BB'C'C]** é visível e a face lateral **[AA'B'B]** é invisível, bem como a base inferior (que é projetante frontal), pelo que, em projeção frontal, a única sombra própria a assinalar refere-se à face lateral **[BB'C'C]**. Já em projeção horizontal, todas as faces em sombra (as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]** e a base inferior do prisma – a base **[ABC]**) são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria visível a assinalar.

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com **tracejado** (em projeção frontal) – este foi executado paralelamente ao eixo **X**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**.  $A_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $C'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C'**. As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A'_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta [**A'B'**] (da base superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $A'_{s_2}B'_{s_2}$ ] é a sombra projetada do segmento [**A'B'**] e situa-se no **SPFS**.  $A_{s_1}$  e  $C_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta [**AC**] (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $A_{s_1}C_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [**AC**] e situa-se no **SPHA**.  $C_{s_1}$  e  $C'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral [**CC'**] não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $C_{s_1}C'_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [**CC'**] e situa-se no **SPHA**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas [**AA'**] e [**B'C'**] – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A'_{s_2}$  e  $A_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $C'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $A'_{s_2}$  teve-se em conta que a aresta lateral [**AA'**] é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A'_{s_2}$  (a sombra real do ponto **A'**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a [ $A_2A'_2$ ] (a projeção frontal do segmento [**AA'**]) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [**AA'**]). A linha quebrada aberta [ $A_{s_1}Q_sA'_{s_2}$ ] é a **sombra real** da aresta lateral [**AA'**] nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  teve-se em conta que a aresta [**B'C'**] (da base superior) é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C'_{s_1}$  (a sombra real do ponto **C'**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a [ $B'_1C'_1$ ] (a projeção horizontal do segmento [**B'C'**]) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [**B'C'**]). A linha quebrada aberta [ $C'_{s_1}Q'_sB'_{s_2}$ ] é a **sombra real** da aresta [**B'C'**] (da base superior) nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada [ $A'_{s_2}B'_{s_2}Q'_sC'_{s_1}C_{s_1}A_{s_1}Q_s$ ] é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento [ $Q_sQ'_s$ ] é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pelo próprio prisma.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços horizontais dos planos que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do triângulo, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas **i**, **t**, e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 903.

### Dados:

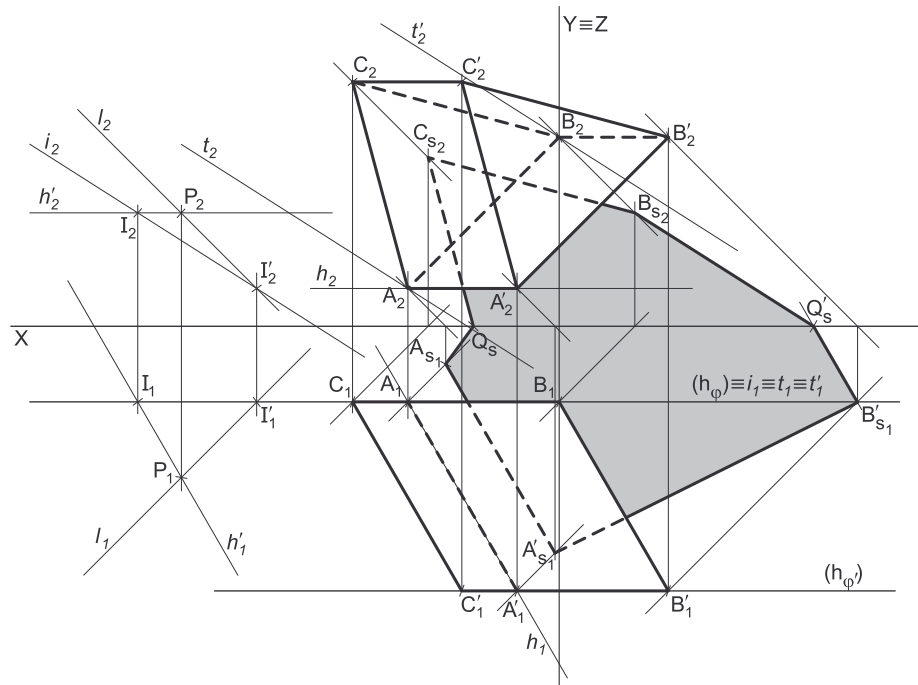
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do prisma) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

A base de menor afastamento do prisma (o triângulo **[ABC]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do triângulo não apresenta deformação). Assim, a partir de  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuou-se a construção do triângulo, em projeção frontal, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do terceiro vértice do triângulo –  $C_2$ . Note que se garantiu que o triângulo se situa no espaço do  $1^a$  Diedro (o ponto **C** tem cota positiva). A projeção horizontal da figura reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.



A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 5 cm de altura e o plano que contém a sua base de menor afastamento tem 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **B**), o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 7 cm de afastamento ( $2 + 5 = 7$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal ( $h_\varphi'$ ). O plano  $\varphi'$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções do ponto **A** conduziram-se as projeções homónimas da reta **h**, a reta suporte da aresta lateral **[AA']**, com a direção dada no enunciado – a reta **h** está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção dada no enunciado). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **A'**, o extremo de maior afastamento da aresta lateral **[AA']** – as projeções do ponto **A'** determinaram-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **h**) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

Por fim, pelas projeções dos outros dois vértices do triângulo **[ABC]** (os pontos **B** e **C**) conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), paralelas à reta **h**, e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $\varphi'$  – esses pontos são os pontos **B'** e **C'** (os outros dois vértices do triângulo **[A'B'C']**, que é a base de maior afastamento do sólido). À semelhança do ponto **A'**, os pontos **B'** e **C'** tiveram determinação direta, a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

A partir das projeções dos seis vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ACC'B'A']**, cuja projeção frontal é o polígono **[A2C2C'2B'2A'2]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **B**. Este, por ser um dos vértices de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base de menor afastamento, e a aresta lateral **[BB']**. Já a aresta **[A'C']**, da base de maior afastamento, é visível, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (os pontos **A'** e **C'** são dois dos vértices de maior afastamento do prisma).

O **contorno aparente horizontal** é o paralelogramo **[BB'C'C]** (que é, na prática, a face lateral **[BB'C'C]**), cuja projeção horizontal é o paralelogramo **[B1B'1C'1C1]**. Em projeção horizontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **A'**. Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[AC]** (da base de menor afastamento), **[A'B']** e **[A'C']** (da base de maior afastamento) e a aresta lateral **[AA']**. No entanto, as arestas **[AB]**, **[AC]**, **[A'B']** e **[A'C']** estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral **[AA']**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta *i*, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta *i*; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta *h'* (paralela às arestas laterais do sólido) e a reta *l* (um raio luminoso com a direção luminosa convencional). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta *i*, a reta de interseção do plano definido pelas retas *h'* e *l*, com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base de menor afastamento, que está contida no plano  $\phi$ ). A reta *i* está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta *h'* com o plano  $\phi$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta *l* com o plano  $\phi$ ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta *i* – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o plano  $\phi$ ).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **A** e **B**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AA']** e **[BB']** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AA']** e **[BB']** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

As arestas laterais **[AA']** e **[BB']** separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais **[AA'C'C]** e **[BB'C'C]** estão iluminadas, sendo que a base de maior afastamento (a base **[A'B'C']**) também está iluminada. Já a face lateral **[AA'B'B]** está em sombra, tal como a base de menor afastamento do prisma (a base **[ABC]**). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [AA'B'B]**.

A **sombra própria** do prisma integra a face lateral **[AA'B'B]**, bem como a base de menor afastamento do prisma (a base **[ABC]**). Em projeção horizontal, a face lateral **[AA'B'B]** é invisível, bem como a base de menor afastamento (que é projetante horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria visível a assinalar. Por outro lado, em projeção frontal, a face lateral **[AA'B'B]** e a base de menor afastamento do prisma (a base **[ABC]**) são também invisíveis, pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer sombra própria visível a assinalar.

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

**B<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**. **C<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**. **A<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**. **A'<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**. **B'<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

**B<sub>s2</sub>** e **C<sub>s2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[BC]** (da base de menor afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[B<sub>s2</sub>C<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[BC]** e situa-se no **SPFS**. **A'<sub>s1</sub>** e **B'<sub>s1</sub>** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[A'B']** (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A'<sub>s1</sub>B'<sub>s1</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[A'B']** e situa-se no **SPHA**. **A<sub>s1</sub>** e **A'<sub>s1</sub>** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[AA']** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A<sub>s1</sub>A'<sub>s1</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[AA']** e situa-se no **SPHA**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas **[AC]** e **[BB']** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre **A<sub>s1</sub>** e **C<sub>s2</sub>** (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre **B'<sub>s1</sub>** e **B<sub>s2</sub>** (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre **A<sub>s1</sub>** e **C<sub>s2</sub>** teve-se em conta que a aresta **[AC]** (da base de menor afastamento) é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por **C<sub>s2</sub>** (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a **[A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]** (a projeção frontal do segmento **[AC]**) até ao eixo **X**, onde se situa **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AC]**). A linha quebrada aberta **[A<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>C<sub>s2</sub>]** é a **sombra real** da aresta lateral **[AC]** nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre **B<sub>s1</sub>** e **B'<sub>s2</sub>** teve-se em conta que a aresta lateral **[BB']** é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por **B<sub>s1</sub>** (a sombra real do ponto **B**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>]** (a projeção horizontal do segmento **[BB']**) até ao eixo **X**, onde se situa **Q'<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento **[BB']**). A linha quebrada aberta **[B<sub>s1</sub>Q'<sub>s</sub>B'<sub>s2</sub>]** é a **sombra real** da aresta lateral **[BB']** nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada **[C<sub>s2</sub>B<sub>s2</sub>Q'<sub>s</sub>B'<sub>s1</sub>A'<sub>s1</sub>A<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>]** é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento **[Q<sub>s</sub>Q'<sub>s</sub>]** é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços horizontais dos planos que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do triângulo, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 904.

### Dados:

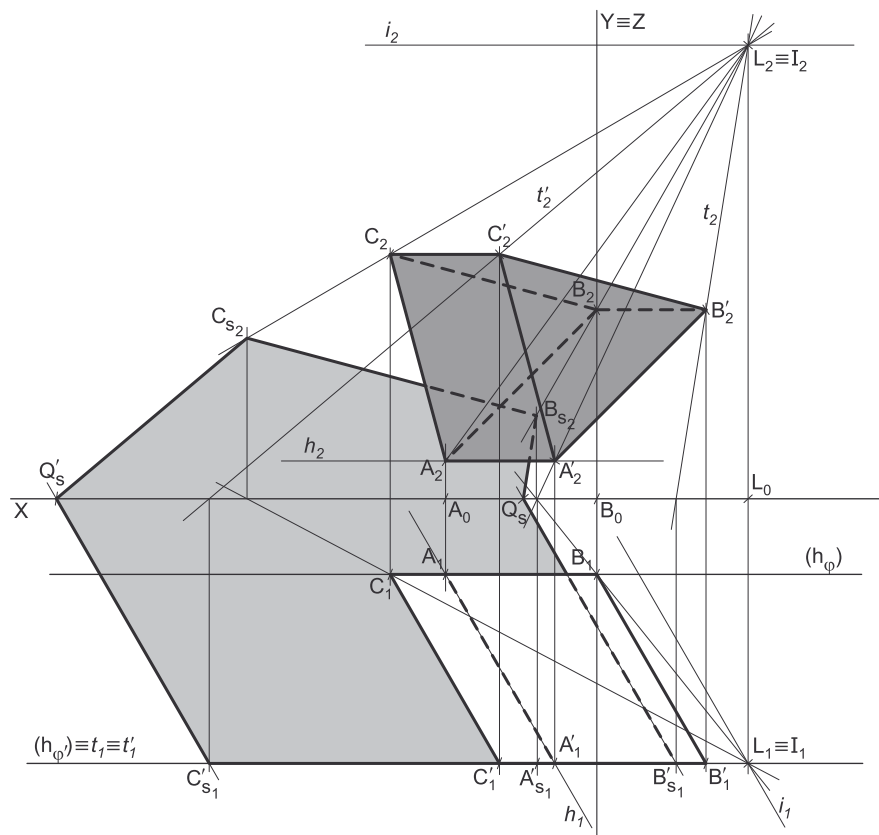
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do prisma) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

A base de menor afastamento do prisma (o triângulo **[ABC]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do triângulo não apresenta deformação). Assim, a partir de  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuou-se a construção do triângulo, em projeção frontal, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do terceiro vértice do triângulo –  $C_2$ . Note que se garantiu que o triângulo se situa no espaço do 1º Diedro (o ponto **C** tem cota positiva). A projeção horizontal da figura reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.



A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 5 cm de altura e o plano que contém a sua base de menor afastamento tem 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **B**), o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 7 cm de afastamento ( $2 + 5 = 7$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal ( $h_\varphi'$ ). O plano  $\varphi'$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções do ponto **A** conduziram-se as projeções homónimas da reta  $h$ , a reta suporte da aresta lateral **[AA']**, com a direção dada no enunciado – a reta  $h$  está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção dada no enunciado). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **A'**, o extremo de maior afastamento da aresta lateral **[AA']** – as projeções do ponto **A'** determinaram-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $h$ ) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

Por fim, pelas projeções dos outros dois vértices do triângulo **[ABC]** (os pontos **B** e **C**) conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), paralelas à reta  $h$ , e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $\varphi'$  – esses pontos são os pontos **B'** e **C'** (os outros dois vértices do triângulo **[A'B'C']**, que é a base de maior afastamento do sólido). À semelhança do ponto **A'**, os pontos **B'** e **C'** tiveram determinação direta, a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das projeções dos seis vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ACC'B'A']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2C_2C'_2B'_2A'_2]$ . Em projeção frontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **B**. Este, por ser um dos vértices de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base de menor afastamento, e a aresta lateral  $[BB']$ . Já a aresta  $[A'C']$ , da base de maior afastamento, é visível, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (os pontos **A'** e **C'** são dois dos vértices de maior afastamento do prisma).

O **contorno aparente horizontal** é o paralelogramo  $[BB'C'C]$  (que é, na prática, a face lateral  $[BB'C'C]$ ), cuja projeção horizontal é o paralelogramo  $[B_1B'_1C'_1C_1]$ . Em projeção horizontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **A'**. Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AC]$  (da base de menor afastamento),  $[A'B']$  e  $[A'C']$  (da base de maior afastamento) e a aresta lateral  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$ ,  $[AC]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'C']$  estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral  $[AA']$ .

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo foco luminoso, uma reta paralela às arestas laterais do prisma – a reta *i*; **2.** determina-se o ponto de interseção da reta *i* com o plano da base (de referência) – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

Note que, nesta situação particular, o foco luminoso **L** situa-se no plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do prisma – o plano  $\varphi'$ .

1. Conduziu-se, pelo foco luminoso (o ponto **L**), uma reta paralela às arestas laterais do sólido – a reta *i*, que está definida por um ponto (o ponto **L**) e por uma direção (a direção das arestas laterais do prisma – é uma reta horizontal).
2. Determinou-se o ponto de interseção a reta *i* com o plano da base (de referência) – o ponto **I**. Considerou-se que a base de referência é a base de maior afastamento do prisma (a base do prisma que está contida no plano  $\varphi'$ ). Assim, nesta situação (em que o foco luminoso está contido no plano  $\varphi'$ ), o ponto **I** é, de forma imediata, o próprio foco luminoso **L** (o que se assinalou devidamente no desenho).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o plano  $\varphi'$ ).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **B'** e **C'**, respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[BB']$  e  $[CC']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[BB']$  e  $[CC']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas laterais  $[BB']$  e  $[CC']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de lado e da direita, onde se situa o foco luminoso), a face lateral  $[BB'C'C]$  é a única face do prisma que está iluminada. Nesse sentido, as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'C'C]$  estão em sombra, tal como as duas bases. Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[BB'C'C]$  (que corresponde, na realidade, à face lateral  $[BB'C'C]$ ).

Sublinha-se que **nesta situação particular**, existe um **plano luz/sombra** que contém a base de maior afastamento do prisma (a base  $[A'B'C']$ ). Assim, esse plano luz/sombra contém a aresta  $[B'C']$  (da base de maior afastamento), cuja sombra é «arrastada» ao longo de toda a base  $[A'B'C']$  – nesse sentido, a base  $[A'B'C']$  situa-se, na sua totalidade, na **sombra espacial** da aresta  $[B'C']$ .

Face ao exposto, a **sombra própria** do prisma integra as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'C'C]$ , bem como as duas bases do prisma. Em projeção horizontal, as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'C'C]$  são invisíveis, bem como as duas bases (que são projetantes horizontais), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, a face lateral  $[AA'B'B]$  e a base de menor afastamento do prisma (a base  $[ABC]$ ) são invisíveis, mas a face lateral  $[AA'C'C]$  e a base de maior afastamento do prisma (a base  $[A'B'C']$ ) são visíveis, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral  $[AA'C'C]$  e à base de maior afastamento (a base  $[A'B'C']$ ).

A **sombra própria** visível do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Determinação da sombra projetada do prisma:

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.  $B'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'**.  $C'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C'**. As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$B_{s_2}$  e  $C_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[BC]$  (da base de menor afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s_2}C_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BC]$  e situa-se no **SPFS**.  $B'_{s_1}$  e  $C'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[B'C']$  (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B'_{s_1}C'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[B'C']$  e situa-se no **SPHA**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O mesmo já não acontece em relação às arestas **[BB']** e **[CC']** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre **B's<sub>1</sub>** e **B's<sub>2</sub>** (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre **C's<sub>1</sub>** e **C's<sub>2</sub>** (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre **B's<sub>1</sub>** e **B's<sub>2</sub>** teve-se em conta que a aresta lateral **[BB']** é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por **B's<sub>1</sub>** (a sombra real do ponto **B'**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>]** (a projeção horizontal do segmento **[BB']**) até ao eixo **X**, onde se situa **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento **[BB']**). A linha quebrada aberta **[B's<sub>1</sub>Q's<sub>1</sub>B's<sub>2</sub>]** é a **sombra real** da aresta lateral **[BB']** nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre **C's<sub>1</sub>** e **C's<sub>2</sub>** teve-se em conta que a aresta lateral **[CC']** é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por **C's<sub>1</sub>** (a sombra real do ponto **C'**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[C<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>]** (a projeção horizontal do segmento **[CC']**) até ao eixo **X**, onde se situa **Q's** (o ponto de quebra da sombra do segmento **[CC']**). A linha quebrada aberta **[C's<sub>1</sub>Q's<sub>1</sub>C's<sub>2</sub>]** é a **sombra real** da aresta lateral **[CC']** nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada **[C's<sub>2</sub>B's<sub>2</sub>Q's<sub>1</sub>B's<sub>1</sub>C's<sub>1</sub>Q's<sub>1</sub>]** é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento **[Q's<sub>1</sub>Q's<sub>2</sub>]** é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

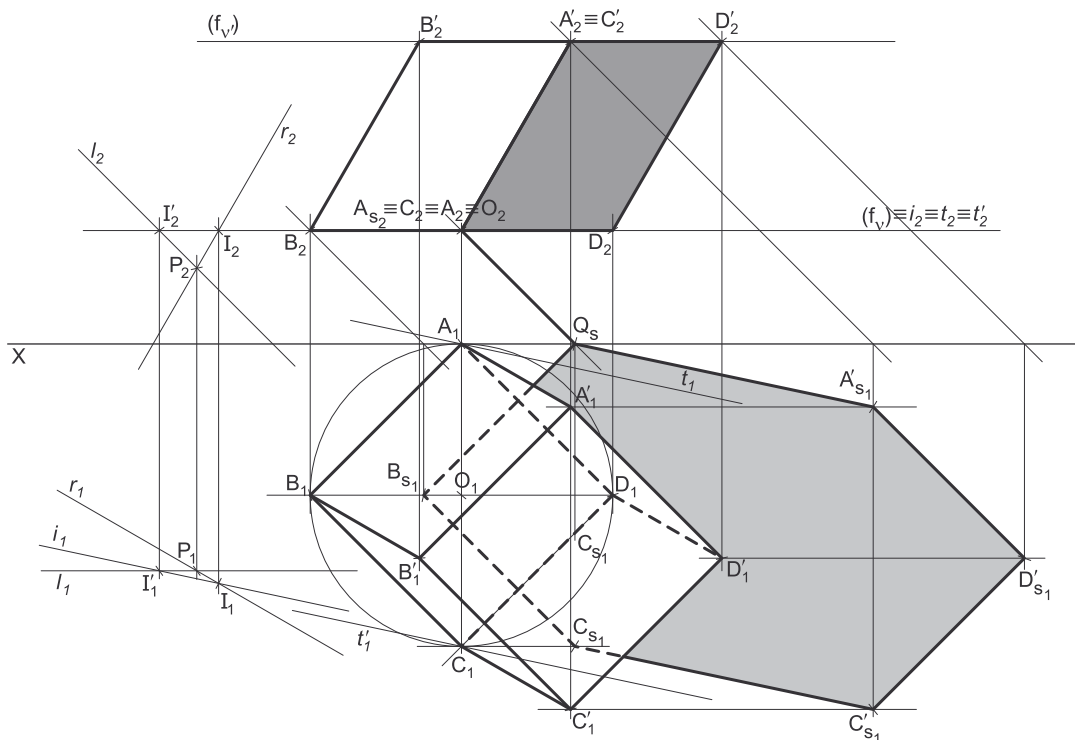
Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços horizontais dos planos que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do triângulo, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas **i**, **t**, e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 905.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base inferior do prisma) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do prisma:

A base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do pentágono não apresenta deformação). Por outro lado, a circunferência circunscrita ao quadrado é tangente ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o seu raio é igual ao afastamento do ponto **O**. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio (o afastamento do ponto **O**), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao quadrado, que é tangente ao eixo **X**. Uma vez que o vértice **A**, do quadrado, tem afastamento nulo, o ponto **A** é o ponto em que a circunferência é tangente ao Plano Frontal de Projeção, o que nos permitiu determinar, de forma direta, a projeção horizontal do ponto **A** ( $A_1$ ), sobre a circunferência.

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 5 cm de altura e o plano que contém a sua base inferior tem 3 cm de cota (a cota do ponto **O**), o plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do sólido) tem 8 cm de cota ( $3 + 5 = 8$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções dos quatro vértices do quadrado **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), com a direção dada no enunciado, e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $v'$  – esses pontos são os vértices do quadrado **[A'B'C'D']**, que é a base superior do sólido). Os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'** tiveram determinação direta, a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ).

A partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABCC'D'A']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices **D** e **B'**. O vértice **D**, por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AD]** e **[CD]**, da base inferior, e a aresta lateral **[DD']**. O vértice **B'**, por ser um dos vértices de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']** e **[B'C']**, da base superior, e a aresta lateral **[BB']**.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDD'C'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e **A'**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[AC]** (da base inferior), **[A'B']** e **[A'C']** (da base superior) e a aresta lateral **[AA']**. No entanto, as arestas **[AB]**, **[AC]**, **[A'B']** e **[A'C']** estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal. Por outro lado, a aresta lateral **[CC']** é visível (em projeção frontal), pois situa-se na parte visível do sólido (os pontos **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do prisma). Nesse sentido, a aresta lateral **[AA']**, sendo invisível, está oculta, em projeção frontal, pela aresta **[CC']**, que é visível, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar.

##### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **r** (paralela às arestas laterais do sólido) e a reta **l** (um raio luminoso com a direção luminosa frontal dada no enunciado). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra
2. Determinou-se a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas retas **r** e **l**, com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base inferior, que está contida no plano  $v$ ). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **r** com o plano  $v$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o plano  $v$ ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i** – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o plano  $v$ ).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AA']** e **[CC']** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AA']** e **[CC']** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

As arestas laterais **[AA']** e **[CC']** separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]** estão iluminadas, sendo que a base superior (a base **[A'B'C'D']**) também está iluminada. Já as faces laterais **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]** estão em sombra, tal como a base inferior do prisma (a base **[ABCD]**). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada** **[AA'D'C'CB]**.

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]**, bem como a base inferior do prisma (a base **[ABCD]**). Em projeção horizontal, tanto as duas faces laterais em sombra como a base inferior são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, a face lateral **[AA'D'D]** e a base inferior do prisma (a base **[ABCD]**, que é projetante frontal) são também invisíveis, mas a face lateral **[CC'D'D]** é visível, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral **[CC'D'D]**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

O ponto **A** situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $A_{s_2} \equiv A_2$ .  $B_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $C'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C'**.  $D'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D'**.  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**. As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$B_{s_1}$  e  $C_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[BC]** (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s_1}C_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[BC]** e situa-se no **SPHA**.  $C_{s_1}$  e  $C'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[CC']** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s_1}C'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[CC']** e situa-se no **SPHA**.  $C'_{s_1}$  e  $D'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[C'D']** (da base superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C'_{s_1}D'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[C'D']** e situa-se no **SPHA**.  $A'_{s_1}$  e  $D'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[A'D']** (da base superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A'_{s_1}D'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[A'D']** e situa-se no **SPHA**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas **[AB]** e **[AA']** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_2}$  e  $B_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_2}$  e  $A'_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_2}$  e  $B_{s_1}$  teve-se em conta que a aresta **[AB]** (da base inferior) é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B_{s_1}$  (a sombra real do ponto **B**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_1B_1]$  (a projeção horizontal do segmento **[AB]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AB]**). A linha quebrada aberta  $[B_{s_1}Q_sA_{s_2}]$  é a **sombra real** da aresta **[AB]** (da base inferior) nos planos de projeção.

Note que, **nesta situação particular**, acontece um fenómeno particular nas sombras – é a que sombra do ponto **A** é «arrastada» ao longo do raio luminoso que passa pelo ponto **A** até ao eixo **X**, onde se situa o ponto  $Q_s$ . Assim, o ponto  $Q_s$  é, na prática, uma **sombra virtual** do ponto **A** e, por outro lado, a sombra do ponto **A** não é um único ponto (como habitualmente) mas, sim, um segmento de reta – o segmento de reta  $[A_{s_2}Q_s]$ .

Esta situação tem uma justificação teórica bastante plausível – para se determinar a sombra de um ponto **A** (que é considerado opaco) conduz-se, por esse ponto, um **raio luz/sombra em luz** que, ao passar pelo ponto, se transforma num **raio de sombra**. Portanto, o **raio luz/sombra**, ao passar pelo ponto **A**, é transformado em **raio de sombra** e o segmento de reta  $[A_{s_2}Q_s]$  é um segmento desse **raio luz/sombra** já transformado em **raio de sombra**.

Assim, o ponto  $Q_s$  é, também o ponto de quebra da sombra do segmento **[AA']** – a linha quebrada aberta  $[A_{s_2}Q_sA'_{s_1}]$  é a **sombra real** da aresta lateral **[AA']** nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[B_{s_1}C_{s_1}C'_{s_1}D'_{s_1}A'_{s_1}Q_s]$ , a que acresce o segmento de reta  $[A_{s_2}Q_s]$ , é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pelo próprio prisma.

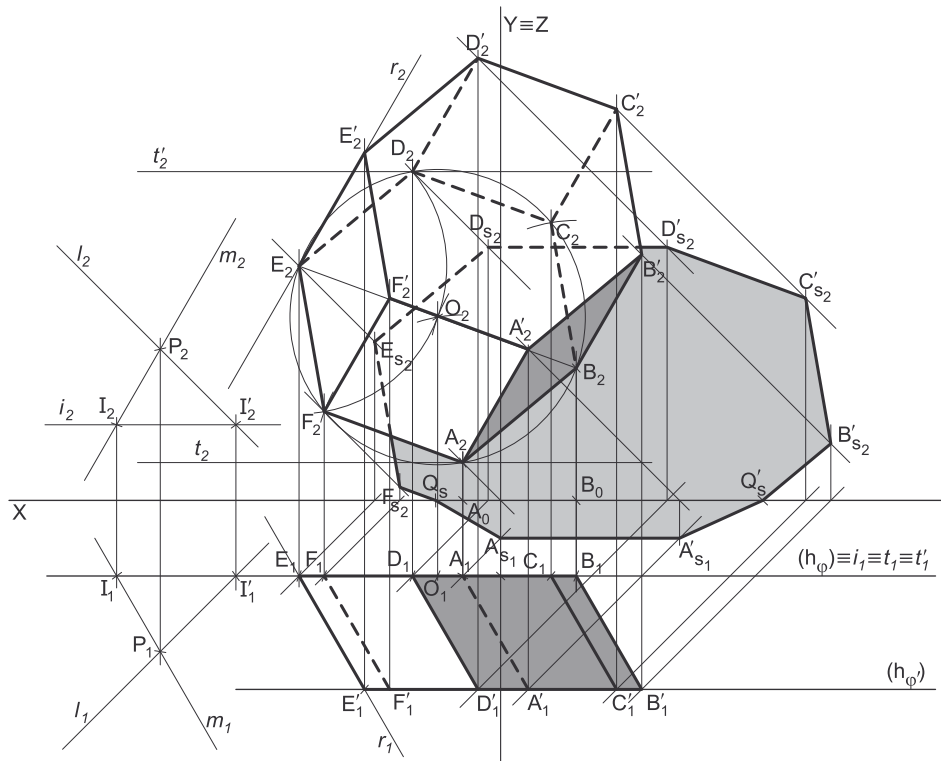
Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

## Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços frontais dos planos que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do quadrado, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas *i*, *t*, e *t'*), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

906.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do prisma) pelo seu traço horizontal. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ) passa por  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano  $\phi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do prisma:*

A base de menor afastamento do prisma (o hexágono **[ABCDEF]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\phi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do hexágono não apresenta deformação). Assim, a partir de  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), determinou-se o ponto  $O_2$  (a projeção frontal do centro da circunferência circunscrita ao hexágono) e desenhou-se a projeção frontal da circunferência em que o polígono se inscreve – a circunferência tem centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e raio até  $A_2$  ou  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). Em seguida, construiu-se o hexágono **[ABCDEF]** em verdadeira grandeza (em projeção frontal), o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos restantes vértices do polígono. A projeção horizontal da figura reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\phi$  ( $h_\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 3 cm de altura e o plano que contém a sua base de menor afastamento tem 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **B**), o plano  $\phi'$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 5 cm de afastamento ( $2 + 3 = 5$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\phi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal ( $h_{\phi'}$ ). O plano  $\phi'$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções do ponto **E** conduziram-se as projeções homónimas da reta  $r$ , a reta suporte da aresta lateral **[EE']**, com a direção dada no enunciado – a reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto **E**) e por uma direção (a direção dada no enunciado). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **E'**, o extremo de maior afastamento da aresta lateral **[EE']** – as projeções do ponto **E'** determinaram-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $r$ ) com um plano projetante horizontal (o plano  $\phi'$ ).

Por fim, pelos outros cinco vértices do hexágono **[ABCDEF]**, conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), paralelas à reta  $r$ , e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $\phi'$  – esses pontos são os restantes cinco vértices do hexágono **[A'B'C'D'E'F']**, que é a base de maior afastamento do sólido. À semelhança do ponto **E'**, os restantes vértices do hexágono **[A'B'C'D'E'F']** tiveram determinação direta, a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante horizontal (o plano  $\phi'$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A partir das projeções dos doze vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ABB'C'D'E'EF]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2B'_2C'_2D'_2E'_2E_2F_2]$ . Em projeção frontal, existem quatro vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices **C**, **D**, **A'** e **F'**. Os vértices **C** e **D**, por serem dos vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[BC]$ ,  $[CD]$  e  $[DE]$ , da base de menor afastamento, e as arestas laterais  $[CC']$  e  $[DD']$ . Os vértices **A'** e **F'**, por serem dos vértices de **maior afastamento** do prisma, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[A'B']$ ,  $[A'F']$  e  $[E'F']$ , da base de maior afastamento, e as arestas laterais  $[AA']$  e  $[FF']$ .

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[BCDEE'D'C'B']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1E_1E'_1D'_1C'_1B'_1]$ . Em projeção horizontal, existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A**, **A'**, **F** e **F'**. Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[AF]$  e  $[EF]$  (da base de menor afastamento),  $[A'B']$ ,  $[A'F']$  e  $[E'F']$  (da base de maior afastamento) e as arestas laterais  $[AA']$  e  $[FF']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$ ,  $[AF]$ ,  $[EF]$ ,  $[A'B']$ ,  $[A'F']$  e  $[E'F']$  estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, as invisibilidades a assinalar são as referentes às arestas laterais  $[AA']$  e  $[FF']$ . As arestas laterais  $[CC']$  e  $[DD']$ , por sua vez, são visíveis, em projeção horizontal, pois cada uma delas separa duas faces do sólido que são visíveis, em projeção horizontal.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **m** (paralela às arestas laterais do sólido) e a reta **l** (um raio luminoso com a direção luminosa convencional). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas retas **m** e **l**, com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base de menor afastamento, que está contida no plano  $\varphi$ ). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **m** com o plano  $\varphi$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o plano  $\varphi$ ). Note que, **nesta situação particular**, a reta **i** é, necessariamente, uma **reta fronto-horizontal**.
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i** – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o plano  $\varphi$ ).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **A** e **D**, respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[AA']$  e  $[DD']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[AA']$  e  $[DD']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

Note que, **nesta situação particular**, as retas **t** e **t'** são retas fronto-horizontais.

As arestas laterais  $[AA']$  e  $[DD']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[DD'EE]$ ,  $[EE'F'F]$  e  $[AA'F'F]$  estão iluminadas, sendo que a base de maior afastamento (a base  $[A'B'C'D'E'F']$ ) também está iluminada. Já as faces laterais  $[AA'B'B]$ ,  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  estão em sombra, tal como a base de menor afastamento do prisma (a base  $[ABCDEF]$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[AA'B'C'D'DEF]$ .

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais  $[AA'B'B]$ ,  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$ , bem como a base de menor afastamento do prisma (a base  $[ABCDEF]$ ). Em projeção horizontal, a face lateral  $[AA'B'B]$  é invisível, bem como a base de menor afastamento (que é projetante horizontal), sendo que as faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  são visíveis – assim, em projeção horizontal, a sombra própria visível a assinalar é a referente às faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$ . Por outro lado, em projeção frontal, a face lateral  $[AA'B'B]$  é visível, enquanto as faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  são invisíveis, bem como a base de menor afastamento – assim, em projeção frontal, a sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral  $[AA'B'B]$ .

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**.  $C'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C'**.  $D'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **D'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D'**.  $D_{s_2}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D**.  $E_{s_2}$  é a sombra real do ponto **E** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **E**.  $F_{s_2}$  é a sombra real do ponto **F** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **F**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_1}$  e  $A'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral  $[AA']$  não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AA']$  e situa-se no **SPHA**.  $B'_{s_2}$  e  $C'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[B'C']$  (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B'_{s_2}C'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[B'C']$  e situa-se no **SPFS**.  $C'_{s_2}$  e  $D'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[C'D']$  (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C'_{s_2}D'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[C'D']$  e situa-se no **SPFS**.  $D'_{s_2}$  e  $D_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral  $[DD']$  não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[D_{s_2}D'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[DD']$  e situa-se no **SPFS**.  $D_{s_2}$  e  $E_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[DE]$  (da base de menor afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[D_{s_2}E_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[DE]$  e situa-se no **SPFS**.  $E_{s_2}$  e  $F_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[EF]$  (da base de menor afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[E_{s_2}F_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[EF]$  e situa-se no **SPFS**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas  $[AF]$  e  $[A'B']$  – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_1}$  e  $F_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $F_{s_2}$  teve-se em conta que a aresta  $[AF]$  (da base de menor afastamento) é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $F_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $F$ , que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_2F_2]$  (a projeção frontal do segmento  $[AF]$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[AF]$ ). A linha quebrada aberta  $[A_{s_1}Q_sF_{s_2}]$  é a **sombra real** da aresta  $[AF]$  (da base de menor afastamento) nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  teve-se igualmente em conta que a aresta  $[A'B']$  (da base de maior afastamento) é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B'_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $B'$ , que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A'_2B'_2]$  (a projeção frontal do segmento  $[A'B']$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[A'B']$ ). A linha quebrada aberta  $[A'_{s_1}Q'_sB'_{s_2}]$  é a **sombra real** da aresta  $[A'B']$  (da base de maior afastamento) nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s_1}A'_{s_1}Q'_sB'_{s_2}C'_{s_2}D'_{s_2}D_{s_2}E_{s_2}F_{s_2}Q_s]$  é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços horizontais dos planos que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do hexágono, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas  $i$ ,  $t$ , e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 907.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base inferior do prisma) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

A base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do quadrado não apresenta deformação). Assim, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), mediu-se o ângulo que o lado **[AB]** faz com o Plano Frontal de Projeção, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta suporte do lado **[AB]**. Sobre essa reta, a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**), mediram-se os 5 cm (a medida do lado do quadrado) e determinou-se  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**), garantindo-se que **B** se situa no  $1^\circ$  Diedro (**B** tem afastamento positivo).

A partir de  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do quadrado, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do polígono –  $C_1$  e  $D_1$ . Note, uma vez mais, que se garantiu que o quadrado se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 5 cm de altura e o plano que contém a sua base inferior tem 1 cm de cota (a cota do ponto **A**), o plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do sólido) tem 6 cm de cota ( $1 + 5 = 6$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

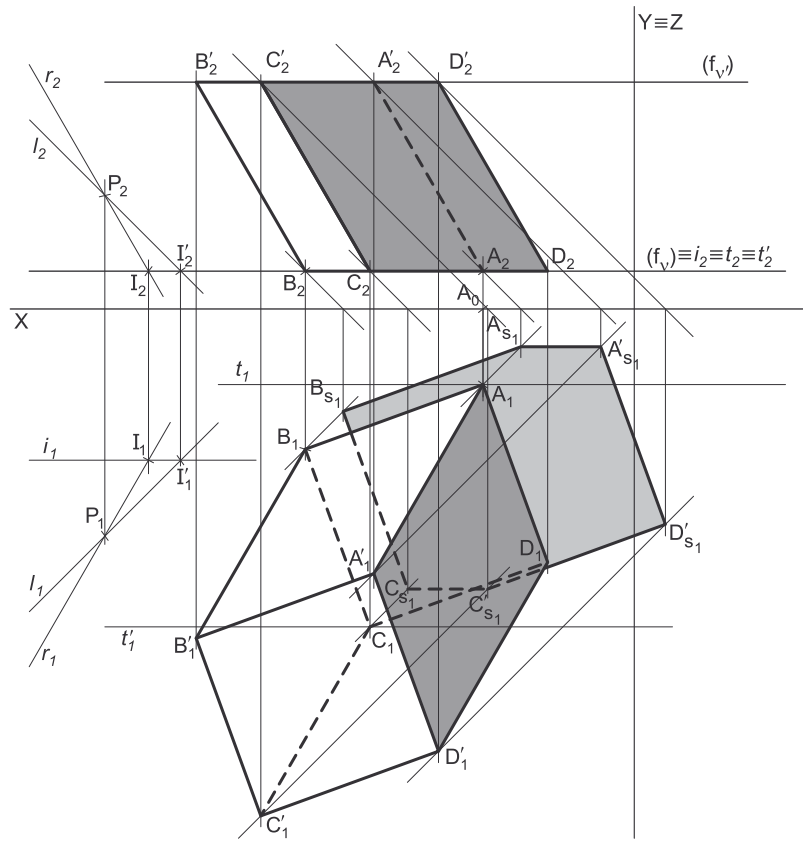
Em seguida, pelas projeções dos quatro vértices do quadrado **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), com a direção dada no enunciado – as arestas laterais do sólido fazem, em ambas as projeções, ângulos de  $60^\circ$  com o eixo **X** (de abertura para a esquerda), pois estão contidas em retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  (retas paralelas ao  $\beta_{1/3}$  são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

Depois, determinaram-se os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do prisma com o plano  $v'$  – esses pontos são os vértices do quadrado **[A'B'C'D']**, que é a base superior do sólido). Os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  tiveram determinação direta, a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ).

A partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABB'C'D'D]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices **C** e **A'**. O vértice **C**, por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base inferior, e a aresta lateral **[CC']**. O vértice **A'**, por ser um dos vértices de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']** e **[A'D']**, da base superior, e a aresta lateral **[AA']**.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BCDD'C'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e  $A'$ . Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[AC]** (da base inferior), **[A'B']** e **[A'C']** (da base superior) e a aresta lateral **[AA']**. No entanto, as arestas **[AB]**, **[AC]**, **[A'B']** e **[A'C']** estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral **[AA']**. Por outro lado, a aresta lateral **[CC']** é visível (em projeção frontal), pois situa-se na parte visível do sólido (os pontos **C** e  $C'$  são os vértices de maior afastamento do prisma).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta ***i***, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta ***i***; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **r** (paralela às arestas laterais do sólido) e a reta **l** (um raio luminoso com a direção luminosa convencional). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra
2. Determinou-se a reta ***i***, a reta de interseção do plano definido pelas retas **r** e **l**, com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base inferior, que está contida no plano  $\nu$ ). A reta ***i*** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **r** com o plano  $\nu$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o plano  $\nu$ ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta ***i*** – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o plano  $\nu$ ). Note que, nesta situação particular, a reta ***i*** é uma **reta fronto-horizontal**.
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AA']** e **[CC']** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AA']** e **[CC']** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

Note que, **nesta situação particular**, as retas **t** e **t'** são retas fronto-horizontais.

As arestas laterais **[AA']** e **[CC']** separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]** estão iluminadas, sendo que a base superior (a base **[A'B'C'D']**) também está iluminada. Já as faces laterais **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]** estão em sombra, tal como a base inferior do prisma (a base **[ABCD]**). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [AA'D'C'CB]**.

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]**, bem como a base inferior do prisma (a base **[ABCD]**). Em projeção horizontal, a face lateral **[CC'D'D]** e a base inferior do prisma (a base **[ABCD]**) são invisíveis, mas a face lateral **[AA'D'D]** é visível, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral **[AA'B'B]**. Já em projeção frontal, a face lateral **[AA'D'D]** e a base inferior do prisma (a base **[ABCD]**, que é projetante frontal) são invisíveis, mas a face lateral **[CC'D'D]** é visível, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral **[CC'D'D]**.

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

**A<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**. **A'<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**. **D'<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **D'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D'**. **C'<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C'**. **C<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**. **B<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.

As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se no mesmo Plano de Projeção, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **não admite a existência de pontos de quebra**.

Assim, o polígono **[A<sub>s1</sub>A'<sub>s1</sub>D'<sub>s1</sub>C'<sub>s1</sub>C<sub>s1</sub>B<sub>s1</sub>]** é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção (que se situa, na totalidade, no **SPHA**). Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pelo próprio prisma.

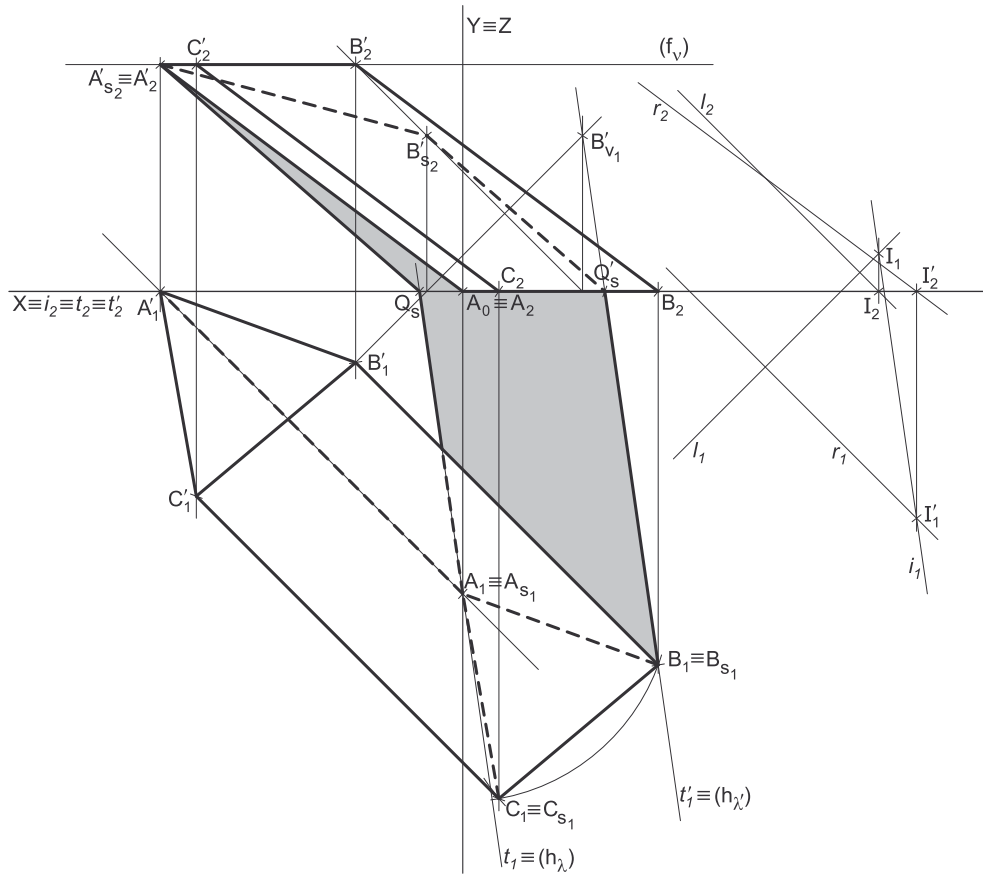
Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços frontais dos planos que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do quadrado, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas ***i***, **t**, e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

908.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

*Determinação das projeções do prisma:*

A base inferior do prisma (o triângulo **[ABC]**) está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que o triângulo está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do triângulo não apresenta deformação). Assim, a partir de **A**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **A**), mediu-se o ângulo que o lado **[AB]** faz com o eixo **X**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu desenhar a projeção horizontal da reta suporte do lado **[AB]**. Sobre essa reta, a partir de **A**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **A**), mediram-se os 5,5 cm (a medida do lado do triângulo) e determinou-se **B**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **B**), garantindo-se que **A** é o vértice de menor afastamento do triângulo (**B** tem afastamento superior a **A**).

A partir de **A**<sub>1</sub> e **B**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do triângulo, o que nos permitiu determinar a projeção horizontal do terceiro vértice do polígono – **C**<sub>1</sub>. Note, uma vez mais, que se garantiu que **A** é o vértice de menor afastamento do triângulo. A projeção frontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X**, pois todos os pontos do triângulo têm cota nula (o triângulo está contido no Plano Horizontal de Projeção).

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 6 cm de altura e o plano que contém a sua base inferior tem cota nula (é o Plano Horizontal de Projeção), o plano **v** (o plano que contém a base superior do sólido) tem 6 cm de cota (0 + 6 = 6). Nesse sentido, representou-se o plano **v** (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal (**f**<sub>v</sub>). O plano **v** não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções horizontais dos três vértices do triângulo **[ABC]** conduziram-se as projeções horizontais das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), com a direção dada no enunciado – as arestas laterais do sólido fazem, em projeção horizontal, ângulos de 45° (de abertura para a direita). De acordo com as indicações expressas no enunciado, o prisma situa-se no espaço do 1º Diedro e existe um vértice da base superior que tem afastamento nulo – esse vértice tem de ser o vértice de menor afastamento da base superior, ou seja, o extremo superior da aresta **[AA']**.

Assim, determinou-se a projeção horizontal do ponto **A'** (**A'**<sub>1</sub>), que se situa no eixo **X** (porque **A'** tem afastamento nulo) – **A'**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **A'**) situa-se sobre o traço frontal do plano **v** (**f**<sub>v</sub>), pois o plano **v** é um plano projetante frontal. Este procedimento permitiu-nos determinar a direção das projeções frontais das arestas laterais do sólido. Assim, pelas projeções frontais dos outros dois vértices do triângulo **[ABC]** (os pontos **B** e **C**) conduziram-se as projeções frontais das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), paralelas a **[A<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>]**. Depois, determinaram-se os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do prisma com o plano **v** – esses pontos são os vértices do triângulo **[A'B'C']**, que é a base superior do sólido). Os pontos **B'** e **C'** tiveram determinação direta, a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante frontal (o plano **v**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das projeções dos seis vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[BCC'A'B']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1C'_1A'_1B'_1]$ . Em projeção horizontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **A**. O vértice **A**, por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AC]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[AA']$ . A aresta  $[B'C']$ , da base superior, é visível (em projeção horizontal), pois separa duas faces visíveis, em projeção horizontal – a base  $[A'B'C']$  e a face lateral  $[BB'C'C]$ . Note que **B'** e **C'** são dos vértices de maior cota do prisma.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCAA'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2A_2A'_2C'_2B'_2]$ . Todos os vértices do prisma integram o contorno aparente frontal. No entanto, as arestas  $[AB]$  (da base inferior) e  $[A'B']$  (da base superior) são invisíveis, em projeção frontal, pois separam faces que são invisíveis (em projeção frontal). Apesar disso, aquelas duas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não há qualquer invisibilidade a assinalar. Já a aresta lateral  $[CC']$  é visível, em projeção frontal, por se situar na parte visível do sólido (os vértices **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do prisma).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $r$  (paralela às arestas laterais do sólido) e a reta  $l$  (um raio luminoso com a direção luminosa convencional). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas retas  $r$  e  $l$ , com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base inferior, que está contida no Plano Horizontal de Projeção). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta  $r$  com o Plano Horizontal de Projeção, que é o traço horizontal da reta  $r$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta  $l$  com o Plano Horizontal de Projeção, que é o traço horizontal da reta  $l$ ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$  que são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra** (as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o Plano Horizontal de Projeção).
4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **A** e **B**, respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[AA']$  e  $[BB']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

As arestas laterais  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[AA'C'C]$  e  $[BB'C'C]$  estão iluminadas, sendo que a base superior (a base  $[A'B'C']$ ) também está iluminada. Já a face lateral  $[AA'B'B]$  está em sombra, tal como a base inferior do prisma (a base  $[ABC]$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[BB'A'AC]$ .

A **sombra própria** do prisma integra a face lateral  $[AA'B'B]$  e a base inferior do prisma (a base  $[ABC]$ ). Em projeção horizontal, a face lateral  $[AA'B'B]$  é invisível, bem como a base inferior, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria visível a assinalar. Por outro lado, em projeção frontal, a face lateral  $[AA'B'B]$  é igualmente visível, bem como a base inferior (é projetante frontal), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer sombra própria visível a assinalar.

#### Determinação da sombra projetada do prisma:

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

Os pontos **A**, **B** e **C** são pontos do Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras reais estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se, imediatamente,  $A_{s_1} \equiv A_1$ ,  $B_{s_1} \equiv B_1$  e  $C_{s_1} \equiv C_1$ . O ponto **A'** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A'_{s_2} \equiv A'_2$ .  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[AB]$  (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_1B_1]$  é a sombra projetada do segmento  $[AB]$  e situa-se no **SPHA**.  $B_{s_1}$  e  $C_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[BC]$  (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_1C_1]$  é a sombra projetada do segmento  $[BC]$  e situa-se no **SPHA**.  $A'_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[A'B']$  (da base superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A'_2B'_2]$  é a sombra projetada do segmento  $[A'B']$  e situa-se no **SPFS**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas laterais  $[AA']$  e  $[BB']$  – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_1}$  e  $A'_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $B_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **B'** –  $B'_{v_1}$ .  $B'_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **B'** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B'**. O segmento  $[B_{s_1}B'_{v_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BB']$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[B_{s_1}B'_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[B_{s_1}Q'_sB'_{s_2}]$  é a **sombra real** da aresta lateral  $[BB']$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $A'_{s_2}$  poder-se-ia ter recorrido a uma sombra virtual – à sombra virtual do ponto  $A$  ou à sombra virtual do ponto  $A'$ . No entanto, optou-se por um raciocínio diferente, que possibilita uma grande economia de traçado. De facto, as arestas  $[BB']$  e  $[AA']$  são paralelas e **trata-se de uma direção luminosa**, pelo que as sombras projetadas daquelas duas arestas no mesmo Plano de Projeção são igualmente paralelas entre si. Assim, a sombra projetada do segmento de reta  $[AA']$  no Plano Horizontal de Projeção é necessariamente paralela à sombra projetada do segmento de reta  $[BB']$  no Plano Horizontal de Projeção.

Nesse sentido, por  $A_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $A$ , que se situa no SPHA), conduziu-se uma paralela ao segmento  $[B_{s_1}Q'_s]$  (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção do segmento de reta  $[BB']$ ), até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento de reta  $[AA']$ ). Assim, a linha quebrada aberta  $[A_{s_1}Q_sA'_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[AA']$  (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.º Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s_1}C_{s_1}B_{s_1}Q'_sB'_{s_2}A'_{s_2}Q_s]$  é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

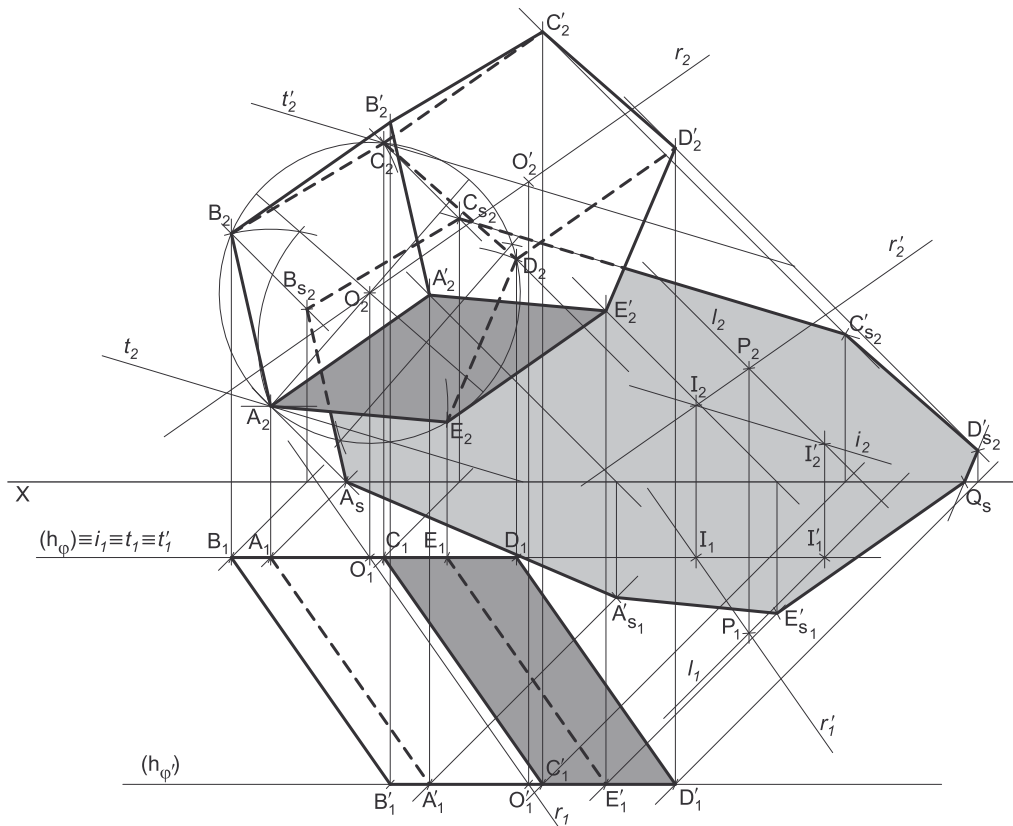
Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano que contém a base superior do prisma, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do triângulo, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas  $i$ ,  $t$ , e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 909.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do prisma) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do prisma:

A base de menor afastamento do prisma (o pentágono **[ABCDE]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do pentágono não apresenta deformação). Assim, com o compasso, fazendo o centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao pentágono. Em seguida, determinou-se **A**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **A**), sobre a projeção frontal da circunferência, de acordo com as indicações expressas no enunciado – o ponto **A** tem 2 cm de cota e situa-se à esquerda do ponto **O**.

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção frontal do pentágono, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos outros quatro vértices do polígono – **B**<sub>2</sub>, **C**<sub>2</sub>, **D**<sub>2</sub> e **E**<sub>2</sub>. Estes foram nomeados de forma arbitrária (mas sequencial), pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 6 cm de altura e o plano que contém a sua base de menor afastamento tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**), o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 8 cm de afastamento ( $2 + 6 = 8$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ). O plano  $\varphi'$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções homónimas da reta **r**, a reta suporte do eixo do prisma, com a direção dada no enunciado – a reta **r** está definida por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção dada no enunciado). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O'**, o extremo de maior afastamento do eixo do sólido – as projeções do ponto **O'** determinaram-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **r**) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

Por fim, pelos cinco vértices do pentágono **[ABCDE]**, conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), paralelas à reta **r**, e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $\varphi'$  – esses pontos são os cinco vértices do pentágono **[A'B'C'D'E']**, que é a base de maior afastamento do sólido). À semelhança do ponto **O'**, os vértices do pentágono **[A'B'C'D'E']** tiveram determinação direta, a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

A partir das projeções dos dez vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ABB'C'D'E']**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>E'<sub>2</sub>E<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existem três vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices **C**, **D** e **A'**. Os vértices **C** e **D**, por serem dos vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[BC]**, **[CD]** e **[DE]**, da base de menor afastamento, e as arestas laterais **[CC']** e **[DD']**. O vértice **A'**, por ser um dos vértices de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']** e **[A'E']**, da base de maior afastamento, e a aresta lateral **[AA']**.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[BCDD'C'B']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A**, **A'**, **E** e **E'**. Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[AE]** e **[DE]** (da base de menor afastamento), **[A'B']**, **[A'E']** e **[D'E']** (da base de maior afastamento) e as arestas laterais **[AA']** e **[EE']**. No entanto, as arestas **[AB]**, **[AE]**, **[DE]**, **[A'B']**, **[A'E']** e **[D'E']** estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, as invisibilidades a assinalar são as referentes às arestas laterais **[AA']** e **[EE']**. A aresta lateral **[CC']**, por sua vez, é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces do sólido que são visíveis, em projeção horizontal (os vértices **C** e **C'** são os vértices de maior cota do prisma).

##### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **r'** (paralela às arestas laterais e ao eixo do sólido) e a reta **l** (um raio luminoso com a direção luminosa convencional). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas retas **r'** e **l**, com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base de menor afastamento, que está contida no plano  $\varphi$ ). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **r'** com o plano  $\varphi$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o plano  $\varphi$ ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i** – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o plano  $\varphi$ ).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AA']** e **[CC']** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AA']** e **[CC']** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As arestas laterais  $[AA']$  e  $[CC']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$  estão iluminadas, sendo que a base de maior afastamento (a base  $[A'B'C'D'E']$ ) também está iluminada. Já as faces laterais  $[AA'E'E]$ ,  $[DD'E'E]$  e  $[CC'D'D]$  estão em sombra, tal como a base de menor afastamento do prisma (a base  $[ABCDE]$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[AA'E'D'C'CB]$ .

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais  $[AA'B'B]$ ,  $[DD'E'E]$  e  $[CC'D'D]$ , bem como a base de menor afastamento do prisma (a base  $[ABCDE]$ ). Em projeção horizontal, as faces laterais  $[AA'E'E]$  e  $[DD'E'E]$  são invisíveis, bem como a base de menor afastamento (que é projetante horizontal), sendo que a face lateral  $[CC'D'D]$  é visível – assim, em projeção horizontal, a sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral  $[CC'D'D]$ . Por outro lado, em projeção frontal, a face lateral  $[AA'E'E]$  é visível, enquanto as faces laterais  $[DD'E'E]$  e  $[CC'D'D]$  são invisíveis, bem como a base de menor afastamento – assim, em projeção frontal, a sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral  $[AA'E'E]$ .

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

O raio luminoso que passa pelo ponto **A** é uma reta passante, pelo que  $A_s$  (a sombra real do ponto **A**) se situa no eixo  $X - A_s$  é, simultaneamente, o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **A** ( $A_s$  situa-se tanto no **SPHA** como no **SPFS**).  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $E'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **E'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **E'**.  $D'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **D'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D'**.  $C'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C'**.  $C_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.

As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_s$  e  $A'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral  $[AA']$  não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_s A'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AA']$  e situa-se no **SPHA**.  $A'_{s_1}$  e  $E'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[A'E']$  (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A'_{s_1} E'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[A'E']$  e situa-se no **SPHA**.

$A_s$  e  $B_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[AB]$  (da base de menor afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_s B_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AB]$  e situa-se no **SPFS**.  $B_{s_2}$  e  $C_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[BC]$  (da base de menor afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B_{s_2} C_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BC]$  e situa-se no **SPFS**.  $C_{s_2}$  e  $C'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral  $[CC']$  não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s_2} C'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[CC']$  e situa-se no **SPFS**.  $C'_{s_2}$  e  $D'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[C'D']$  (da base de maior afastamento) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C'_{s_2} D'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[C'D']$  e situa-se no **SPFS**.

O mesmo já não acontece em relação à aresta  $[D'E']$  da base de maior afastamento – de facto, existe um ponto de quebra entre  $E'_{s_1}$  e  $D'_{s_2}$ , que se situam em Planos de Projeção distintos). Para determinar o ponto de quebra situado entre  $E'_{s_1}$  e  $D'_{s_2}$  teve-se em conta que a aresta  $[E'D']$  (da base de maior afastamento) é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $D'_{s_2}$  (a sombra real do ponto **D'**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[D'E']$  (a projeção frontal do segmento  $[D'E']$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[D'E']$ ). A linha quebrada aberta  $[E'_{s_1} Q_s D'_{s_2}]$  é a **sombra real** da aresta  $[D'E']$  (da base de maior afastamento) nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  teve-se igualmente em conta que a aresta  $[A'B']$  (da base de maior afastamento) é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B'_{s_2}$  (a sombra real do ponto **B'**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A'B']$  (a projeção frontal do segmento  $[A'B']$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q'_{s_1}$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[A'B']$ ). A linha quebrada aberta  $[A'_{s_1} Q'_{s_1} B'_{s_2}]$  é a **sombra real** da aresta  $[A'B']$  (da base de maior afastamento) nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_s A'_{s_1} E'_{s_1} Q_s D'_{s_2} C'_{s_2} C_{s_2} B_{s_2}]$  é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento  $[A_s Q_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

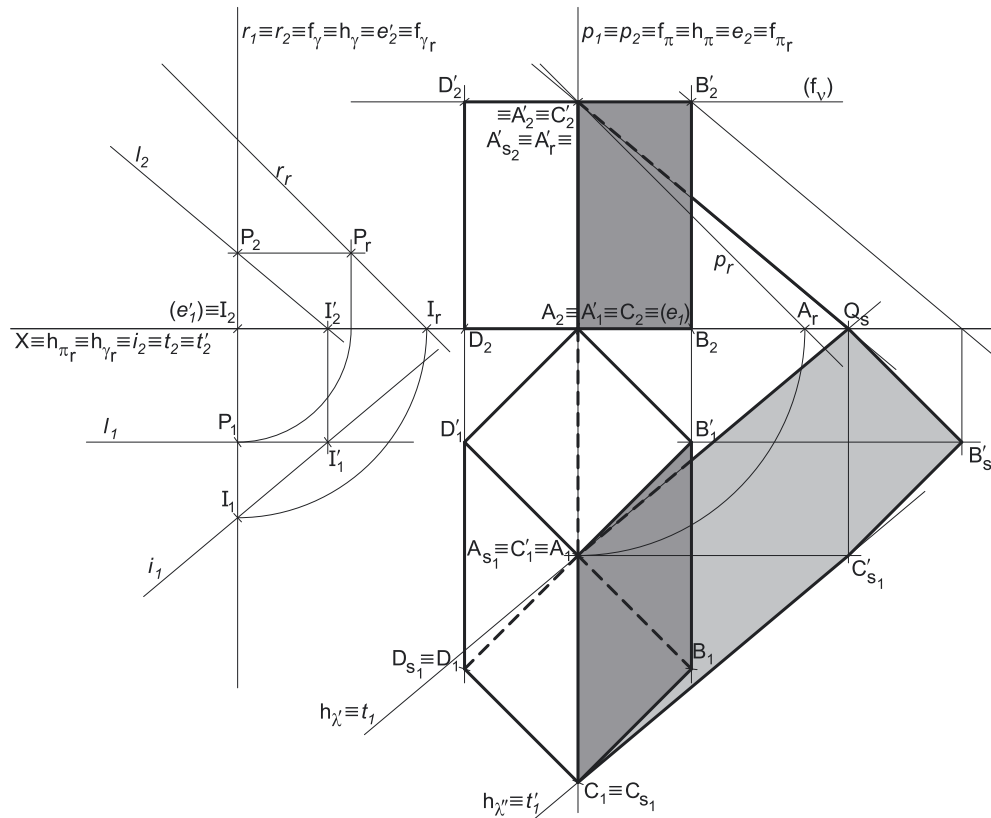
Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

## Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços horizontais dos planos que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do pentágono, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas  $i$ ,  $t$ , e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

910.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto **C'**, igualmente em função dos dados – os pontos **A** e **C'** situam-se na mesma reta projetante horizontal, pelo que os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes – tem-se, imediatamente,  $C'_1 \equiv A_1$ . Por outro lado, o ponto **C'** tem 6 cm de cota (é dado no enunciado), o que nos permitiu, de forma direta, determinar a sua projeção frontal ( $C'_2$ ). Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $(f_v)$ ) passa por  $C'_2$  (a projeção frontal do ponto **C'**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções do prisma:*

O enunciado refere que a aresta lateral  $[AA']$  é de perfil e que **A** tem afastamento nulo, o que nos permitiu, de forma imediata, determinar as projeções do ponto **A'** – as projeções do ponto **A'** situam-se na mesma linha de chamada das projeções do ponto **A** e  $A'_2$  (a projeção frontal do ponto **A'**) situa-se sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $(f_v)$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante horizontal.  $A'_1$  (a projeção horizontal do ponto **A'**) situa-se no eixo **X**, pois o ponto **A** tem afastamento nulo. Já temos dois vértices da base superior do prisma – os vértices **A'** e **C'** (dois vértices opostos, ou seja, dois extremos de uma diagonal do quadrado). O segmento  $[A'C']$  é, assim, uma diagonal do quadrado – uma diagonal de topo (o segmento  $[A'C']$  é de topo).

A base superior do prisma (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do quadrado não apresenta deformação). Por outro lado, uma vez que a diagonal  $[A'C']$  é de topo, sabe-se imediatamente que os lados do quadrado fazem ângulos de  $45^\circ$  com o Plano Frontal de Projeção. Assim, a partir de  $A'_1$  (a projeção horizontal do ponto **A'**) e de  $C'_1$  (a projeção horizontal do ponto **C'**), mediram-se os ângulos de  $45^\circ$  e desenharam-se as projeções horizontais das retas suporte dos lados do quadrado. Os pontos em que estas se intersectam são as projeções horizontais dos outros dois vértices do polígono ( $B'_1$  e  $D'_1$ ), que se nomearam de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

As projeções frontais dos pontos **B'** e **D'** ( $B'_2$  e  $D'_2$ , respetivamente), bem como a projeção frontal do quadrado  $[A'B'C'D']$ , situam-se sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $(f_v)$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Tendo em conta que as arestas laterais do prisma estão contidas em retas de perfil e, ainda, que os lados do quadrado  $[ABCD]$  (a base inferior do prisma) são paralelos aos lados correspondentes do quadrado  $[A'B'C'D']$  (a base superior do prisma), foi possível, de forma imediata, efetuar a construção da projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$ , cuja projeção frontal se reduz a um segmento de reta sobre o eixo **X** (pois todos os vértices do quadrado têm cota nula).

A partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[BCDD'A'B']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[B_1C_1D_1D'_1A'_1B'_1]$ . Em projeção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices **A** e **C'**. O vértice **A**, por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[AA']$ . O vértice **C'**, por ser um dos vértices de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$  e  $[C'D']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[CC']$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $A$  e  $A'$ . Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AC]$  (da base inferior),  $[A'B']$  e  $[A'C']$  (da base superior) e a aresta lateral  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$ ,  $[AC]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'C']$  estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal. Por outro lado, a aresta lateral  $[CC']$  é visível (em projeção frontal), pois situa-se na parte visível do sólido (os pontos  $C$  e  $C'$  são os vértices de maior afastamento do prisma). Nesse sentido, a aresta lateral  $[AA']$ , sendo invisível, está oculta, em projeção frontal, pela aresta  $[CC']$ , que é visível, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $r$  (paralela às arestas laterais e ao eixo do sólido) e a reta  $l$  (um raio luminoso com a direção luminosa dada no enunciado). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra

Note que a reta  $r$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Assim, não é possível garantir, de forma direta, o paralelismo entre a reta  $r$  e qualquer das arestas laterais do prisma. Para garantir o paralelismo entre a reta  $r$  e qualquer das arestas laterais do sólido, optou-se por recorrer a um processo geométrico auxiliar, nomeadamente ao **rebatimento do plano de perfil**.

Nesse sentido, identificaram-se as projeções da reta  $p$ , a reta de perfil que contém a aresta lateral  $[AA']$ . A reta  $p$  é outra reta de perfil. Note que a reta  $p$  está definida por dois pontos (os pontos  $A$  e  $A'$ , que são os dois extremos da aresta lateral  $[AA']$ ) e que a reta  $r$  está definida por um ponto (o ponto  $P$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $p$ ).

Para se garantir o paralelismo entre a reta  $r$  e as arestas laterais do prisma, há que garantir o paralelismo entre a reta  $r$  e a reta  $p$ . Assim, conduziu-se, pela reta  $p$ , um plano de perfil  $\pi$  e efetuou-se o seu rebatimento para o Plano Frontal de Projeção – a charneira do rebatimento foi o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ), pelo que se tem, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos pontos  $A$  e  $A'$ , o que nos permitiu determinar  $A_r$  e  $A'_r$ . Note que o ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (e um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A'_r \equiv A'_2$ . Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos  $A_r$  e  $A'_r$ .

Em seguida, conduziu-se, pela reta  $r$ , um plano de perfil  $\gamma$  e efetuou-se o seu rebatimento para o Plano Frontal de Projeção – a charneira do rebatimento foi o traço frontal do plano ( $f_\gamma$ ), pelo que se tem, imediatamente,  $f_\gamma \equiv e'_2 \equiv f_{\gamma_r}$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto  $P$ , o que nos permitiu determinar  $P_r$ . Por fim, desenhou-se a reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida), que está definida por um ponto (o ponto  $P_r$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $p_r$ ). Note que o rebatimento do plano  $\gamma$  se efetuou para o mesmo lado do rebatimento do plano  $\pi$ , pois, caso contrário, não seria possível garantir o paralelismo entre as duas retas.

Está garantido o paralelismo da reta  $r$  em relação à reta  $p$ .

2. Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas retas  $r$  e  $l$ , com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base inferior, que está contida no Plano Horizontal de Projeção).

Para tal determinaram-se os pontos de interseção das retas  $r$  e  $l$  com o plano da base (de referência), que é o Plano Horizontal de Projeção. O ponto  $I$  é o ponto de interseção da reta  $r$  com o Plano Horizontal de Projeção – o ponto  $I$  é o traço horizontal da reta  $l$  (é o ponto de reta  $l$  que tem cota nula).

Para se determinar o ponto de interseção da reta  $r$  (que é uma reta de perfil) com o Plano Horizontal de Projeção, foi necessário recorrer ao rebatimento previamente efetuado da reta  $r$ . Assim, em rebatimento, determinou-se o ponto  $I'_r$ , que é o ponto de concorrência da reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) com  $h_{f_\gamma}$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$  em rebatimento). Em seguida, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto  $I'$ .

A reta  $i$  está, assim, definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $l$  com o Plano Horizontal de Projeção – o traço horizontal da reta  $l$ ) e o ponto  $I'$  (o ponto de interseção da reta  $r$  com o Plano Horizontal de Projeção – o traço horizontal da reta  $r$ ).

3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ , as retas  $t$  e  $t'$  que são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra** (as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o Plano Horizontal de Projeção).

4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[AA']$  e  $[CC']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[AA']$  e  $[CC']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

As arestas laterais  $[AA']$  e  $[CC']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, do lado e da esquerda), as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  estão iluminadas, sendo que a base superior (a base  $[A'B'C'D']$ ) também está iluminada. Já as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$  estão em sombra, tal como a base inferior do prisma (a base  $[ABCD])$ . Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[AA'B'C'CD]$ .

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$ , bem como a base inferior do prisma (a base  $[ABCD])$ . Em projeção horizontal, a face lateral  $[AA'B'B]$  é invisível, bem como a base inferior, sendo que a face lateral  $[BB'C'C]$  é visível – assim, em projeção horizontal, a sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral  $[BB'C'C]$ . Por outro lado, em projeção frontal, a face lateral  $[AA'B'B]$  é igualmente invisível, bem como a base inferior (que é projetante frontal), enquanto a face lateral  $[BB'C'C]$  é visível – assim, em projeção frontal, a sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral  $[BB'C'C]$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

Os pontos **A**, **D** e **C** são pontos do Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras reais estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se, imediatamente,  $A_{s_1} \equiv A_1$ ,  $D_{s_1} \equiv D_1$  e  $C_{s_1} \equiv C_1$ . O ponto **A'** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A'_{s_2} \equiv A'_2$ .  $B'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'**.  $C'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C'**.

As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$C_{s_1}$  e  $C'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral [**CC'**] não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $C_2C'_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [**CC'**] e situa-se no **SPHA**.  $B'_{s_1}$  e  $C'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta [**B'C'**] (da base superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $B'_{s_1}C'_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [**B'C'**] e situa-se no **SPHA**.  $A_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta [**AD**] (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $A_{s_1}D_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [**AD**] e situa-se no **SPHA**.  $D_{s_1}$  e  $C_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta [**CD**] (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $D_{s_1}C_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [**CD**] e situa-se no **SPHA**.

O mesmo já não acontece em relação às arestas [**AA'**] e [**A'B'**] – de facto, existe um ponto de quebra entre  $A_{s_1}$  e  $A'_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre  $A'_{s_2}$  e  $B'_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinarmos o ponto de quebra situado entre  $A'_{s_2}$  e  $B'_{s_1}$  teve-se em conta que a aresta [**A'B'**] (da base superior) é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B'_{s_1}$  (a sombra real do ponto **B'**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a [ $A'_1B'_1$ ] (a projeção horizontal do segmento [**A'B'**]) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [**A'B'**]). A linha quebrada aberta [ $A'_{s_2}Q_sB'_{s_1}$ ] é a **sombra real** da aresta [**A'B'**] (da base superior) nos planos de projeção.

Note que, **nesta situação particular**, acontece um fenómeno particular nas sombras – é a que sombra do ponto **A'** é «arrastada» ao longo do raio luminoso que passa pelo ponto **A'** até ao eixo **X**, onde se situa o ponto  $Q_s$ . Assim, o ponto  $Q_s$  é, na prática, uma **sombra virtual** do ponto **A'** e, por outro lado, a sombra do ponto **A'** não é um único ponto (como habitualmente) mas, sim, um segmento de reta – o segmento de reta [ $A'_{s_2}Q_s$ ].

Esta situação tem uma justificação teórica bastante plausível – para se determinar a sombra de um ponto **A'** (que é considerado opaco) conduz-se, por esse ponto, um **raio luz/sombra em luz** que, ao passar pelo ponto, se transforma num **raio de sombra**. Portanto, o **raio luz/sombra**, ao passar pelo ponto **A'**, é transformado em **raio de sombra** e o segmento de reta [ $A'_{s_2}Q_s$ ] é um segmento desse **raio luz/sombra** já transformado em **raio de sombra**.

Assim, o ponto  $Q_s$  é, também o ponto de quebra da sombra do segmento [**AA'**] – a linha quebrada aberta [ $A'_{s_2}Q_sA_{s_1}$ ] é a **sombra real** da aresta lateral [**AA'**] nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada [ $A_{s_1}D_{s_1}C_{s_1}C'_{s_1}B'_{s_1}Q_s$ ], a que acresce o segmento de reta [ $A_{s_2}Q_s$ ], é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma. Note que, em projeção frontal, a invisibilidade da sombra refere-se a uma parte do segmento de reta [ $A'_{s_2}Q_s$ ].

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços horizontais dos planos que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do quadrado, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas **i**, **t**, e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 911.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

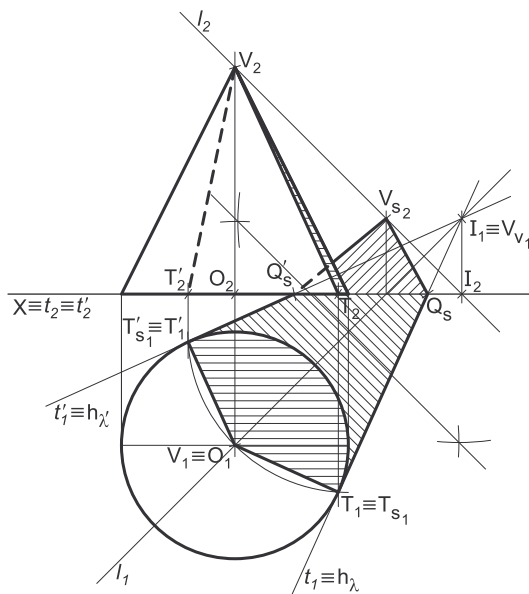
### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base do cone está em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazemos centro em **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X** (a base tem cota nula).

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, numa reta vertical (uma reta projetante horizontal) – assim, tem-se imediatamente **V**<sub>1</sub> ≡ **O**<sub>1</sub> (os dois pontos situam-se na mesma projetante horizontal). Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base. Uma vez que o cone tem 6 cm de altura e que o plano da base tem cota nula, o vértice **V** tem 6 cm de cota ( $0 + 6 = 6$ ), o que nos permitiu determinar **V**<sub>2</sub> (a projeção frontal do vértice **V**).

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V**<sub>2</sub> e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base).



#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é, imediatamente, o traço horizontal do raio luminoso **l**, pois a base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção.

3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas **t** e **t'**, que são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**.

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto **I**<sub>1</sub>, que é a projeção horizontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **T**<sub>1</sub> e **T'**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **T** e **T'**).

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[TV]** e **[T'V]** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** – note que a geratriz **[T'V]** é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção frontal).

As geratrizes **[TV]** e **[T'V]** separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior TT'**. A base do cone e a parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor TT'** estão **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[TVT'T']**, que integra as geratrizes **[TV]** e **[T'V]**, bem como o **arco maior TT'**.

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a a geratriz **[TV]** e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone. A base é invisível em projeção frontal (pois é projetante frontal), pelo que não é possível assinalar a sombra própria da base (em projeção frontal). Assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz **[TV]** (o segmento de reta **[T<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**) e a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone.

Em **projeção horizontal**, a base é igualmente invisível, mas a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é visível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes **[TV]** e **[T'V]**) e que corresponde ao **arco menor TT'** – essa é, assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com tracejado, que se efetuou paralelamente ao eixo **X**, em ambas as projeções.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos **T** e **T'** situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $T_{s_1} \equiv T_1$  e  $T'_{s_1} \equiv T'_1$ .  $V_{s_2}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **V**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

Os pontos **T** e **T'** situam-se no **SPHA** (tal como as suas sombras –  $T_{s_1}$  e  $T'_{s_1}$ ) tal como a própria base do cone se situa no **SPHA** – assim, a sombra do arco maior  $\overline{TT'}$  está coincidente com o próprio arco. No entanto, a sombra do ponto **V** ( $V_{s_2}$ ) situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre  $V_{s_2}$  e  $T_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre  $V_{s_2}$  e  $T'_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **V** –  $V_{v_1}$ .  $V_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso *l* (note que  $V_{v_1}$  é o próprio ponto **I**, nesta situação).

O segmento  $[T_{s_1}V_{v_1}]$  é a sombra projetada da geratriz **[TV]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T_{s_1}V_{v_1}]$  com o eixo **X** é  $Q_s$ , que é o ponto de quebra da sombra da geratriz **[TV]**. A linha quebrada aberta  $[T_{s_1}Q_sV_{s_2}]$  é a sombra projetada (real) da geratriz **[TV]** nos planos de projeção.

O segmento  $[T'_{s_1}V_{v_1}]$  é a sombra projetada da geratriz **[T'V]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T'_{s_1}V_{v_1}]$  com o eixo **X** é  $Q'_s$ , que é o ponto de quebra da sombra da geratriz **[T'V]**. A linha quebrada aberta  $[T'_{s_1}Q'_sV_{s_2}]$  é a sombra projetada (real) da geratriz **[T'V]** nos planos de projeção.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo arco maior  $\overline{T_{s_1}T'_{s_1}}$  e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s_1}$ ,  $Q_s$ ,  $V_{s_2}$ ,  $Q'_s$  e  $T'_{s_1}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em projeção frontal, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com tracejado. Tendo em conta que **se trata da direção luminosa convencional**, o tracejado foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções – o tracejado faz ângulos de 45° (de abertura para a **direita**) com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com tracejado, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, das retas **t** e **t'**), representaram-se a **leve**. O tracejado que preenche as áreas visíveis de sombra (própria ou projetada) executou-se a **leve**, pois os tracejados executam-se sempre a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 912.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados.

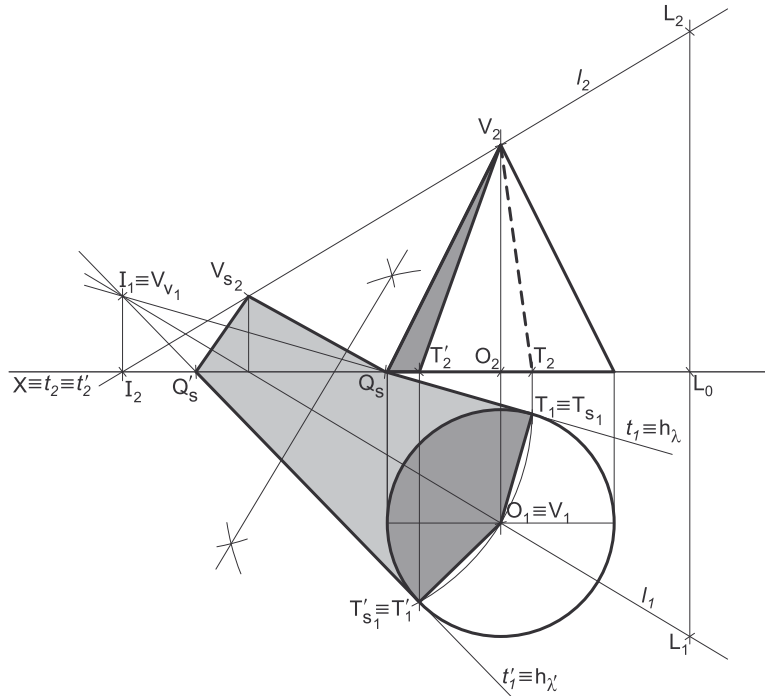
### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base do cone está em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X** (a base tem cota nula).

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, numa reta vertical (uma reta projetante horizontal) – assim, tem-se imediatamente **V**<sub>1</sub> ≡ **O**<sub>1</sub> (os dois pontos situam-se na mesma projetante horizontal). Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base. Uma vez que o cone tem 6 cm de altura e que o plano da base tem cota nula, o vértice **V** tem 6 cm de cota (0 + 6 = 6), o que nos permitiu determinar **V**<sub>2</sub> (a projeção frontal do vértice **V**).

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V**<sub>2</sub> e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base).



#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso **l**. O raio luminoso **l** está definido por dois pontos – o ponto **V** (o vértice do cone) e o ponto **L** (o foco luminoso).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é, imediatamente, o traço horizontal do raio luminoso **l**, pois a base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas **t** e **t'**, que são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**.

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto **I**<sub>1</sub>, que é a projeção horizontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **T**<sub>1</sub> e **T'**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **T** e **T'**).

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[TV]** e **[T'V]** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** – note que a geratriz **[TV]** é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção frontal).

As geratrizes **[TV]** e **[T'V]** separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior TT'**. A base do cone e a parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor TT'** estão **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[TV T'T]**, que integra as geratrizes **[TV]** e **[T'V]**, bem como o **arco maior TT'**.

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz **[T'V]** e a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cone. A base é invisível em projeção frontal (pois é projetante frontal), pelo que não é possível assinalar a sombra própria da base (em projeção frontal). Assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz **[T'V]** (o segmento de reta **[T'2V2]**) e a projeção frontal da geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cone.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em **projeção horizontal**, a base é igualmente invisível, mas a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é visível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  e que corresponde ao **arco menor  $\overline{TT'}$** ) – essa é, assim, a **sombra própria** a assinalar, em **projeção horizontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos **T** e **T'** situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $T_{s_1} \equiv T_1$  e  $T'_{s_1} \equiv T'_1$ .  $V_{s_2}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **V**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

Os pontos **T** e **T'** situam-se no **SPHA** (tal como as suas sombras –  $T_{s_1}$  e  $T'_{s_1}$ ) tal como a própria base do cone se situa no **SPHA** – assim, a sombra do arco maior  $\overline{TT'}$  está coincidente com o próprio arco. No entanto, a sombra do ponto **V** ( $V_{s_2}$ ) situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre  $V_{s_2}$  e  $T_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre  $V_{s_2}$  e  $T'_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **V** –  $V_{v_1}$ .  $V_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso *l* (note que  $V_{v_1}$  é o próprio ponto **I**, nesta situação).

O segmento  $[T_{s_1}V_{v_1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[TV]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T_{s_1}V_{v_1}]$  com o eixo **X** é  $Q_s$ , que é o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[TV]$ . A linha quebrada aberta  $[T_{s_1}Q_sV_{s_2}]$  é a sombra projetada (real) da geratriz  $[TV]$  nos planos de projeção.

O segmento  $[T'_{s_1}V_{v_1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[T'V]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T'_{s_1}V_{v_1}]$  com o eixo **X** é  $Q'_s$ , que é o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[T'V]$ . A linha quebrada aberta  $[T'_{s_1}Q'_sV_{s_2}]$  é a sombra projetada (real) da geratriz  $[T'V]$  nos planos de projeção.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo arco maior  $\overline{T_{s_1}T'_{s_1}}$  e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s_1}$ ,  $Q_s$ ,  $V_{s_2}$ ,  $Q'_s$  e  $T'_{s_1}$ . Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, das retas **t** e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 913.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que a base do cone está em verdadeira grandeza em projeção frontal (no Plano Frontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X** (a base tem afastamento nulo).

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, numa reta de topo (uma reta projetante frontal) – assim, tem-se imediatamente **V<sub>2</sub> ≡ O<sub>2</sub>** (os dois pontos situam-se na mesma projetante frontal). Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base. Uma vez que o cone tem 8 cm de altura e que o plano da base tem afastamento nulo, o vértice **V** tem 8 cm de afastamento ( $0 + 8 = 8$ ), o que nos permitiu determinar **V<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do vértice **V**).

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V<sub>1</sub>** e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a circunferência que delimita a projeção frontal da base).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é, imediatamente, o traço frontal do raio luminoso **l**, pois a base do cone está contida no Plano Frontal de Projeção.

3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas **t** e **t'**, que são, imediatamente, os traços frontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**.

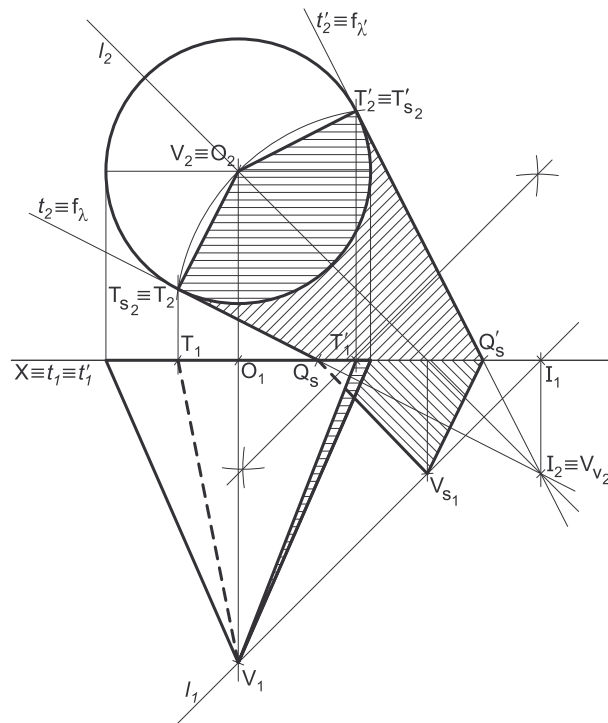
Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto **I<sub>2</sub>**, que é a projeção frontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **T<sub>2</sub>** e **T'<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **T** e **T'**).

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[TV]** e **[T'V]** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** – note que a geratriz **[TV]** é invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção horizontal).

As geratrizes **[TV]** e **[T'V]** separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior TT'**. A base do cone e a parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor TT'** estão **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[TVT'T]**, que integra as geratrizes **[TV]** e **[T'V]**, bem como o **arco maior TT'**.

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz **[T'V]** e a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone. A base é invisível em projeção horizontal (pois é projetante horizontal), pelo que não é possível assinalar a sombra própria da base (em projeção horizontal). Assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**, é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz **[T'V]** (o segmento de reta **[T'<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**) e a projeção horizontal da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em **projeção frontal**, a base é igualmente invisível, mas a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é visível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções frontais das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  e que corresponde ao **arco menor  $\widehat{TT'}$** ) – essa é, assim, a **sombra própria** a assinalar, em **projeção frontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com tracejado, que se efetuou paralelamente ao eixo  $X$ , em ambas as projeções.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos  $T$  e  $T'$  situam-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $T_{s_2} \equiv T_2$  e  $T'_{s_2} \equiv T'_2$ .  $V_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $V$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

Os pontos  $T$  e  $T'$  situam-se no **SPFS** (tal como as suas sombras –  $T_{s_2}$  e  $T'_{s_2}$ ) tal como a própria base do cone se situa no **SPFS** – assim, a sombra do arco maior  $\widehat{TT'}$  está coincidente com o próprio arco. No entanto, a sombra do ponto  $V$  ( $V_{s_1}$ ) situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre  $V_{s_1}$  e  $T_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre  $V_{s_1}$  e  $T'_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto  $V - V_{v_2}$ .  $V_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto  $V$  – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso  $l$  (note que  $V_{v_2}$  é o próprio ponto  $I$ , nesta situação).

O segmento  $[T_{s_2}V_{v_2}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[TV]$  no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T_{s_2}V_{v_2}]$  com o eixo  $X$  é  $Q_s$ , que é o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[TV]$ . A linha quebrada aberta  $[T_{s_2}Q_sV_{s_1}]$  é a sombra projetada (real) da geratriz  $[TV]$  nos planos de projeção.

O segmento  $[T'_{s_2}V_{v_2}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[T'V]$  no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T'_{s_2}V_{v_2}]$  com o eixo  $X$  é  $Q'_s$ , que é o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[T'V]$ . A linha quebrada aberta  $[T'_{s_2}Q'_sV_{s_1}]$  é a sombra projetada (real) da geratriz  $[T'V]$  nos planos de projeção.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo arco maior  $\widehat{T_{s_2}T'_{s_2}}$  e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s_2}$ ,  $Q_s$ ,  $V_{s_1}$ ,  $Q'_s$  e  $T'_{s_2}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em projeção horizontal, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com tracejado. Tendo em conta que **se trata da direção luminosa convencional**, o tracejado foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções – o tracejado faz ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para a **direita**) com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com tracejado, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**. O tracejado que preenche as áreas visíveis de sombra (própria ou projetada) executou-se a **leve**, pois os tracejados executam-se sempre a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

(continua na página seguinte)



## 914.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados.

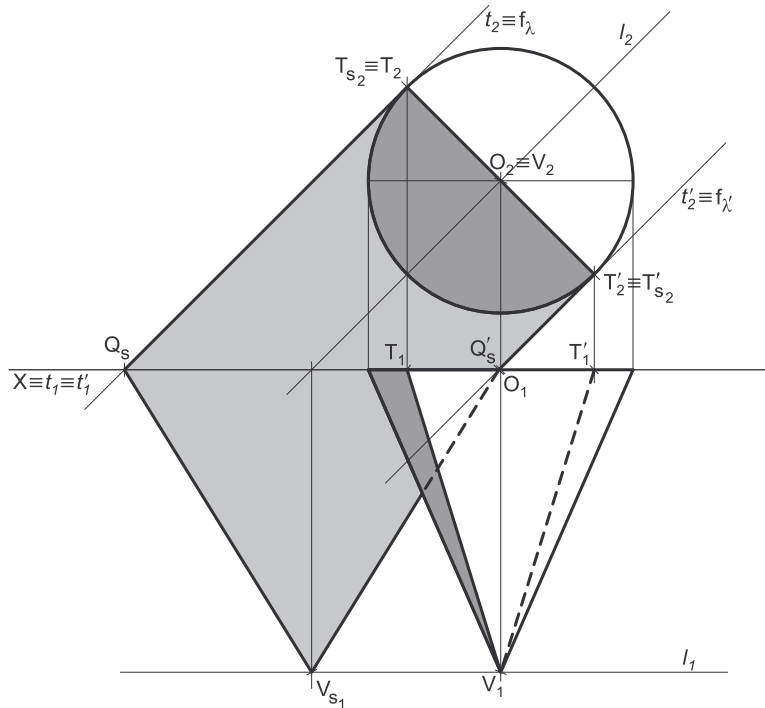
### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que a base do cone está em verdadeira grandeza em projeção frontal (no Plano Frontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X** (a base tem afastamento nulo).

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, numa reta de topo (uma reta projetante frontal) – assim, tem-se imediatamente **V<sub>2</sub> ≡ O<sub>2</sub>** (os dois pontos situam-se na mesma projetante frontal). Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base. Uma vez que o cone tem 8 cm de altura e que o plano da base tem afastamento nulo, o vértice **V** tem 8 cm de afastamento ( $0 + 8 = 8$ ), o que nos permitiu determinar **V<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do vértice **V**).

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V<sub>1</sub>** e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a circunferência que delimita a projeção frontal da base).



#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

- Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).
- Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. Tendo em conta que o raio luminoso **l** é uma reta frontal (de frente), que é paralela ao Plano Frontal de Projeção, o raio luminoso **l** não intersesta o plano da base.

No entanto, atendendo, precisamente, a que o raio luminoso **l** é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pode considerar-se que o raio luminoso **l** intersesta o plano da base (o Plano Frontal de Projeção) num ponto do infinito. Assim, determinou-se o ponto **I**, que se situa no infinito (situa-se a uma distância infinita).

- Pelo ponto **I** (que se situa no infinito) conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas **t** e **t'**. Tendo em conta que as retas **t** e **t'** são concorrentes entre si no ponto **I** e concorrentes, ainda, com o raio luminoso **l** nesse mesmo ponto **I** (que se situa no infinito), conclui-se que as retas **t** e **t'** são paralelas entre si e paralelas ao raio luminoso **l** (retas paralelas são retas concorrentes num ponto do infinito).

Salienta-se que, nesta situação, as retas **t** e **t'** são, imediatamente, os traços frontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**.

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base) que são paralelas a uma reta dada (a reta **l<sub>2</sub>**, que é a projeção frontal da reta **l**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **T<sub>2</sub>** e **T'<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **T** e **T'**).

- As retas **t** e **t'** são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[TV]** e **[T'V]** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** – note que a geratriz **[TV]** é invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção horizontal).

As geratrizes **[TV]** e **[T'V]** separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, do lado e da direita), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à **semicircunferência TT'** de maior cota e mais à direita. A base do cone e a parte da superfície lateral do cone que corresponde à **semicircunferência TT'** de maior cota e mais à direita estão **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[TVTT']**, que integra as geratrizes **[TV]** e **[T'V]**, bem como a **semicircunferência TT'** (de maior cota e mais à direita).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz  $[T'V]$  e a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal do cone. A base é invisível em projeção horizontal (pois é projetante horizontal), pelo que não é possível assinalar a sombra própria da base (em projeção horizontal). Assim, a **sombra própria** a assinalar, em **projeção horizontal**, é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[T'V]$  (o segmento de reta  $[T'_1V_1]$ ) e a projeção horizontal da geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal do cone.

Em **projeção frontal**, a base é igualmente invisível, mas a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é visível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções frontais das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  e que corresponde à **semicircunferência  $\overline{TT'}$**  de menor cota e mais à esquerda – essa é, assim, a **sombra própria** a assinalar, em **projeção frontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos  $T$  e  $T'$  situam-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $T_{s_2} \equiv T_2$  e  $T'_{s_2} \equiv T'_2$ .  $V_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $V$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

Os pontos  $T$  e  $T'$  situam-se no **SPFS** (tal como as suas sombras –  $T_{s_2}$  e  $T'_{s_2}$ ) tal como a própria base do cone se situa no **SPFS** – assim, a sombra do arco maior  $\overline{TT'}$  está coincidente com o próprio arco. No entanto, a sombra do ponto  $V$  ( $V_{s_1}$ ) situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre  $V_{s_1}$  e  $T_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre  $V_{s_1}$  e  $T'_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto  $V$  ( $V_{v_2}$ ) –  $V_{v_2}$  seria a sombra virtual do ponto  $V$  e seria o traço frontal do raio luminoso  $l$ . Tendo em conta que o raio luminoso  $l$  é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, o traço frontal do raio luminoso  $l$  situa-se no infinito.

Assim, apesar de ser possível prosseguir com esse raciocínio (de forma semelhante à atrás exposta), optou-se por uma situação mais simples. A **sombra projetada do cone no Plano Frontal de Projeção** está necessariamente **limitada pelos traços frontais dos dois planos tangentes luz/sombra**.

Assim, o ponto de interseção de  $f_\lambda$  (o traço frontal de um dos dois planos tangentes luz/sombra) com o eixo  $X$  é  $Q_s$ , que é um dos pontos de quebra –  $Q_s$  é o ponto de quebra situado entre  $T_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  ( $Q_s$  é o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[TV]$ ). A linha quebrada aberta  $[T_{s_2}Q_sV_{s_1}]$  é a sombra projetada (real) da geratriz  $[TV]$  nos planos de projeção.

De forma semelhante, o ponto de interseção de  $f_{\lambda'}$  (o traço frontal do outro plano tangente luz/sombra) com o eixo  $X$  é  $Q'_s$ , que é o outro ponto de quebra –  $Q'_s$  é o ponto de quebra situado entre  $T'_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  ( $Q'_s$  é o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[T'V]$ ). A linha quebrada aberta  $[T'_{s_2}Q'_sV_{s_1}]$  é a sombra projetada (real) da geratriz  $[T'V]$  nos planos de projeção.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo arco maior  $\overline{T_{s_2}T'_{s_2}}$  e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s_2}$ ,  $Q_s$ ,  $V_{s_1}$ ,  $Q'_s$  e  $T'_{s_2}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em projeção horizontal, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 915.

### Dados:

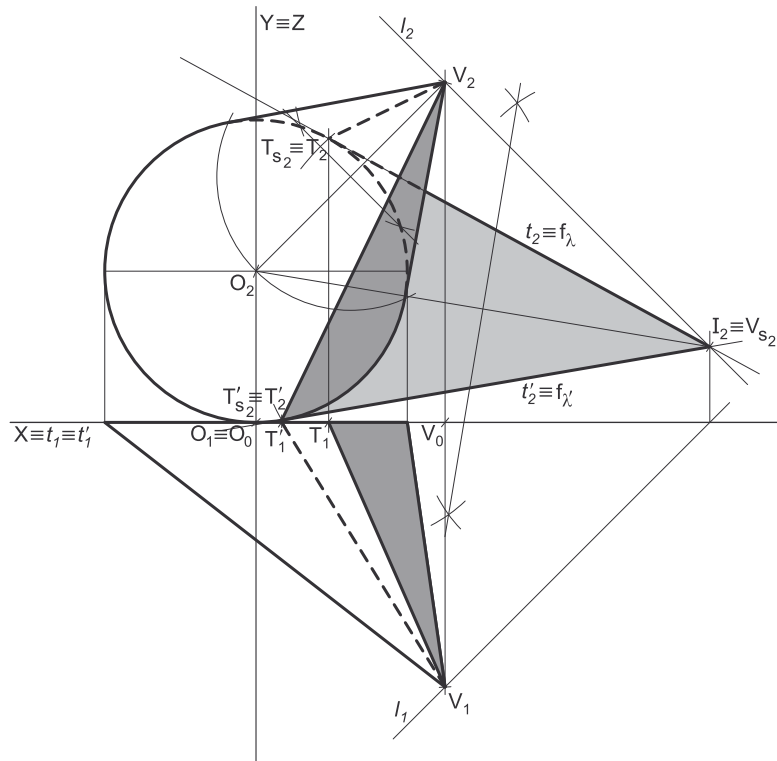
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **V**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o seu raio é igual à cota do ponto **O** (o centro da base), que é 4 cm. Por outro lado, a base do cone está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que a base do cone está em verdadeira grandeza em projeção frontal (no Plano Frontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido (que é tangente ao eixo **X**). A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X** (a base tem afastamento nulo).

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V**<sub>1</sub> e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (que é **V**<sub>2</sub>, a projeção frontal do ponto **V**). O arco menor da circunferência que delimita a base (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.



#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é, imediatamente, o traço frontal do raio luminoso **l**, pois a base do cone está contida no Plano Frontal de Projeção.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas **t** e **t'**, que são, imediatamente, os traços frontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**.

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto **I**<sub>2</sub>, que é a projeção frontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **T**<sub>2</sub> e **T'**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **T** e **T'**).

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[TV]** e **[T'V]** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** – note que a geratriz **[TV]** é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção frontal) e que a geratriz **[T'V]** é invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção horizontal).

As geratrizes **[TV]** e **[T'V]** separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior TT'**. A base do cone e a parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor TT'** estão **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[TV TT' ]**, que integra as geratrizes **[TV]** e **[T'V]**, bem como o **arco maior TT'**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz  $[TV]$  e a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone. A base é invisível em projeção horizontal (pois é projetante horizontal), pelo que não é possível assinalar a sombra própria da base (em projeção horizontal). Assim, a **sombra própria** a assinalar, em **projeção horizontal**, é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[TV]$  (o segmento de reta  $[T_1V_1]$ ) e a projeção horizontal da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone.

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz  $[T'V]$  e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone. A base é invisível em projeção frontal, pelo que não é possível assinalar a sombra própria da base (em projeção frontal). Assim, a **sombra própria** a assinalar, em **projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[T'V]$  (o segmento de reta  $[T'_2V_2]$ ) e a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos  $T$  e  $T'$  situam-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $T_{s_2} \equiv T_2$  e  $T'_{s_2} \equiv T'_2$ .  $V_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $V$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se no mesmo Plano de Projeção, pelo que a sombra projetada (real) do cone **não admite a existência de pontos de quebra**.

Os pontos  $T$  e  $T'$  situam-se no **SPFS** (tal como as suas sombras –  $T_{s_2}$  e  $T'_{s_2}$ ) tal como a própria base do cone se situa no **SPFS** – assim, a sombra do arco maior  $\overline{TT'}$  está coincidente com o próprio arco.  $T_{s_2}$  e  $V_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz  $[TV]$  não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[T_{s_2}V_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[TV]$  e situa-se no **SPFS**.  $T'_{s_2}$  e  $V_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz  $[T'V]$  não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[T'_{s_2}V_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[T'V]$  e situa-se no **SPFS**.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo arco maior  $\overline{T_{s_2}T'_{s_2}}$  e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s_2}$ ,  $V_{s_2}$  e  $T'_{s_2}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em projeção frontal, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 916.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

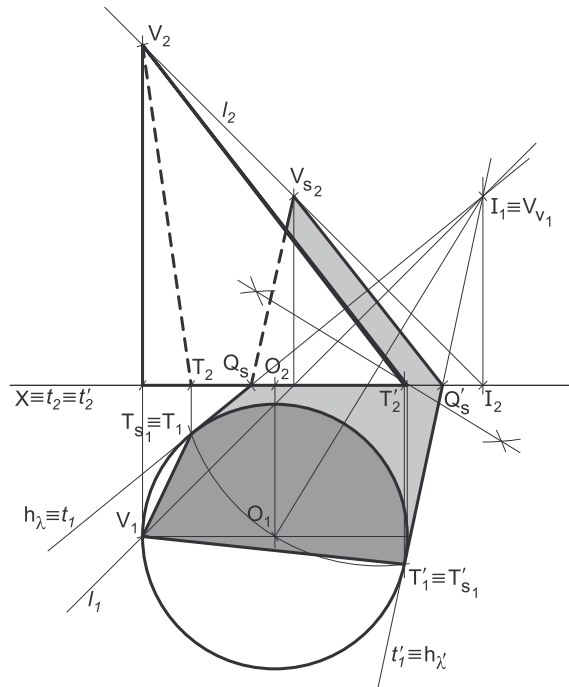
### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base do cone está em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X** (a base tem cota nula).

Uma vez que a geratriz mais à esquerda do cone é vertical (como o enunciado refere expressamente), a projeção horizontal do ponto **V** (**V<sub>1</sub>**) está sobre a projeção horizontal do ponto mais à esquerda da base do cone (situa-se no extremo mais à esquerda do diâmetro fronto-horizontal da circunferência). Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base. Uma vez que o cone tem 9 cm de altura e que o plano da base tem cota nula, o vértice **V** tem 9 cm de cota ( $0 + 9 = 9$ ), o que nos permitiu determinar **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do vértice **V**).

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V<sub>2</sub>** e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base).



#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é, imediatamente, o traço horizontal do raio luminoso **l**, pois a base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas **t** e **t'**, que são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**.

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto **I<sub>1</sub>**, que é a projeção horizontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **T<sub>1</sub>** e **T'<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **T** e **T'**).

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[TV]** e **[T'V]** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** – note que a geratriz **[TV]** é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção frontal).

As geratrizes **[TV]** e **[T'V]** separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior TT'**. A base do cone e a parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor TT'** estão **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[TV T'T]**, que integra as geratrizes **[TV]** e **[T'V]**, bem como o **arco maior TT'**.

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz **[T'V]** e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone. A base é invisível em projeção frontal (pois é projetante frontal), pelo que não é possível assinalar a sombra própria da base (em projeção frontal). Assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz **[T'V]** (o segmento de reta **[T'<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**) e a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone.

Em **projeção horizontal**, a base é igualmente invisível, mas a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é visível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** e que corresponde ao **arco menor TT'**) – essa é, assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos **T** e **T'** situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $T_{s_1} \equiv T_1$  e  $T'_{s_1} \equiv T'_1$ .  $V_{s_2}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **V**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

Os pontos **T** e **T'** situam-se no **SPHA** (tal como as suas sombras –  $T_{s_1}$  e  $T'_{s_1}$ ) tal como a própria base do cone se situa no **SPHA** – assim, a sombra do arco maior  $\overline{T'T}$  está coincidente com o próprio arco. No entanto, a sombra do ponto **V** ( $V_{s_2}$ ) situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre  $V_{s_2}$  e  $T_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre  $V_{s_2}$  e  $T'_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **V** –  $V_{v_1}$ .  $V_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso *l* (note que  $V_{v_1}$  é o próprio ponto **I**, nesta situação).

O segmento  $[T_{s_1}V_{v_1}]$  é a sombra projetada da geratriz **[TV]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T_{s_1}V_{v_1}]$  com o eixo **X** é  $Q_s$ , que é o ponto de quebra da sombra da geratriz **[TV]**. A linha quebrada aberta  $[T_{s_1}Q_sV_{s_2}]$  é a sombra projetada (real) da geratriz **[TV]** nos planos de projeção.

O segmento  $[T'_{s_1}V_{v_1}]$  é a sombra projetada da geratriz **[T'V]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T'_{s_1}V_{v_1}]$  com o eixo **X** é  $Q'_s$ , que é o ponto de quebra da sombra da geratriz **[T'V]**. A linha quebrada aberta  $[T'_{s_1}Q'_sV_{s_2}]$  é a sombra projetada (real) da geratriz **[T'V]** nos planos de projeção.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo arco maior  $\overline{T_{s_1}T'_{s_1}}$  e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s_1}$ ,  $Q_s$ ,  $V_{s_2}$ ,  $Q'_s$  e  $T'_{s_1}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em projeção frontal, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, das retas **t** e **t'**), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 917.

### Dados:

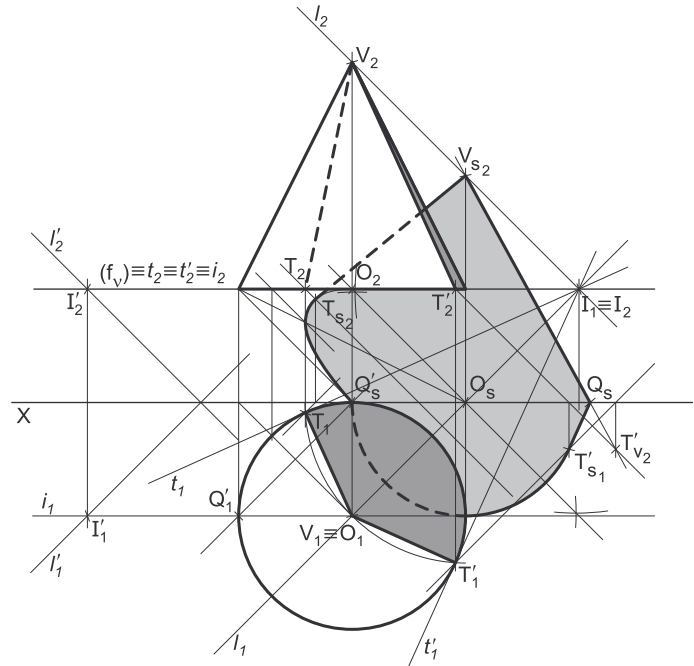
Em primeiro lugar, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone, pelo seu traço frontal ( $f_v$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados e pertencente ao plano  $v$ . O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal do ponto  $O$  ( $O_2$ ) se situa sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ). Por outro lado, o ponto  $O$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo  $X$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo  $X$ ). Note que o ponto  $O$ , porque pertence ao plano  $v$ , tem necessariamente 3 cm de cota. Por outro lado, uma vez que o ponto  $O$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , o ponto  $O$  tem também 3 cm de afastamento (tem coordenadas iguais).

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone é tangente ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o raio da base é igual ao afastamento do ponto  $O$  (que é 3 cm). Por outro lado, a base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base do cone se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido (que é tangente ao eixo  $X$ ). A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.



Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, numa reta vertical (uma reta projetante horizontal) – assim, tem-se imediatamente  $V_1 \equiv O_1$  (os dois pontos situam-se na mesma projetante horizontal). Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base. Uma vez que o cone tem 6 cm de altura e que o plano da base tem 3 cm de cota, o vértice  $V$  tem 9 cm de cota ( $3 + 6 = 9$ ), o que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do vértice  $V$ ).

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto  $V$ ), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $V$ ) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ . O ponto  $I$  determinou-se de forma imediata a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ), pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ). Note que, nesta situação particular, o ponto  $I$  é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pois tem as suas projeções coincidentes).
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base do cone – o plano  $v$ ).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_1$ , que é a projeção horizontal do ponto  $I$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_1$  e  $T'_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $T$  e  $T'$ ).

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos  $T$  e  $T'$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  – note que a geratriz  $[TV]$  é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção frontal).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As geratrizes [TV] e [T'V] separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior TT'**. A base do cone e a parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor TT'** estão **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada [TV TT'], que integra as geratrizes [TV] e [T'V], bem como o **arco maior TT'**.

Em **projecção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz [T'V] e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone. A base é invisível em projecção frontal (pois é projetante frontal), pelo que não é possível assinalar a sombra própria da base (em projecção frontal). Assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projecção frontal**, é a parte compreendida entre a projecção frontal da geratriz [T'V] (o segmento de reta [T'₂V₂]) e a projecção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone.

Em **projecção horizontal**, a base é igualmente invisível, mas a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é visível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projecções horizontais das geratrizes [TV] e [T'V] e que corresponde ao **arco menor TT'**) – essa é, assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projecção horizontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projecções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projecção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projecção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $T_{s_2}$  é a sombra real do ponto T (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por T.  $T'_{s_1}$  é a sombra real do ponto T' (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por T'.  $V_{s_2}$  é a sombra real do ponto V (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por V. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projecção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$T_{s_2}$  e  $V_{s_2}$  situam-se, ambas, no SPFS, pelo que a sombra da geratriz [TV] não admite ponto de quebra – o segmento  $[T_{s_2}V_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento [TV] e situa-se no SPFS.  $T'_{s_1}$  situa-se no SPHA e  $V_{s_2}$  situa-se no SPFS – assim, existe um ponto de quebra entre  $T'_{s_1}$  e  $V_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projecção distintos).  $T'_{s_1}$  situa-se no SPHA e  $T_{s_2}$  situa-se no SPFS – assim, existe um ponto de quebra entre  $T'_{s_1}$  e  $T_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projecção distintos) – este outro ponto de quebra da sombra do cone é um ponto de quebra da sombra do **arco maior TT'**.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $T'_{s_1}$  e  $V_{s_2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto T' –  $T'_{v_2}$ .  $T'_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto T' – situa-se no SPFI e é o traço frontal do raio luminoso que passa por T'. O segmento  $[V_{s_2}T'_{v_2}]$  é a sombra projetada da geratriz [T'V] no Plano Frontal de Projecção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[V_{s_2}T'_{v_2}]$  com o eixo X é  $Q_s$ , o ponto de quebra da sombra da geratriz [T'V]. A linha quebrada aberta  $[T'_{s_1}Q_sV_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento [T'V] (a sombra projetada do segmento nas faces do 1ª Diedro).

Para determinar o ponto de quebra da sombra do arco maior  $\widehat{TT'}$  (que é um arco de circunferência), e à semelhança de situações idênticas, há que recorrer ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo X e o raio luminoso  $l'$ , passante (concorrente com o eixo X). O raio luminoso  $l'$  está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo X, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano v (o plano que contém a base do cone) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano v são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano v é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizantal. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com plano v – o ponto  $I'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $I'$ ) e por uma direção (é fronto-horizantal).

A reta  $i$  é secante ao **arco maior TT'** – a reta  $i$  corta **arco maior TT'** no ponto  $Q'$ . Note que a reta  $i$  passa pelo ponto O (o centro da base do cone), pelo que a reta  $i$  contém, necessariamente, o diâmetro fronto-horizantal da base. A sombra do ponto  $Q'$  (que se situa no eixo X) é, precisamente, o ponto de quebra da sombra do **arco maior TT'**. Note que não se identificou a projecção frontal do ponto  $Q'$  (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por tal não ser necessário. Em seguida, pela projecção horizontal do ponto  $Q'$  ( $Q'_1$ ), conduziu-se a projecção horizontal do raio luminoso que passa por  $Q'$  e determinou-se a sua sombra, que se situa no eixo X –  $Q'_s$ .  $Q'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior TT'**.

O **arco  $\widehat{QT'}$**  produz sombra no SPFS e o **arco  $\widehat{Q'T'}$**  produz sombra no SPHA.

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projecção:*

Trata-se de uma direção luminosa e o arco  $\widehat{QT'}$  está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projecção, pelo que a **sombra projetada do arco  $\widehat{QT'}$**  no **Plano Horizontal de Projecção** (no SPHA) é um arco de circunferência geometricamente igual ao **arco  $\widehat{QT'}$** . Assim, determinou-se a sombra real do ponto O conduzindo, por O, um raio luminoso com a direção luminosa convencional. Tendo em conta que esse raio luminoso é uma reta passante, a sombra real do ponto O ( $O_s$ ) situa-se necessariamente no eixo X. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_s$  e com 3 cm de raio (o raio da base) desenhou-se o arco que é a sombra projetada da figura no SPHA – trata-se de um arco com um extremo no ponto  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do **arco TT'**) e com o outro extremo no ponto  $T'_{s_1}$ . Sublinha-se que o arco  $\widehat{Q'_sT'_{s_1}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz [T'V] no ponto  $T'_{s_1}$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{Q'T}$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Para determinar os pontos necessários a um desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva, começemos por inscrever o **arco  $\widehat{Q'T}$**  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X** – o arco  $\widehat{Q'T}$  ficou inscrito na quarta parte de um quadrado. O lado de maior afastamento dessa quarta parte do quadrado é o segmento  $[OQ']$  e o seu lado de menor afastamento está contido no traço frontal do plano  $v$  (em projeção horizontal, este lado situa-se no eixo **X**).

Em seguida, determinou-se a sombra projetada no **SPFS** dessa quarta parte do quadrado. O segmento  $[Q'_sO_s]$  é a sombra do segmento  $[OQ']$  (o lado de maior afastamento dessa quarta parte do quadrado). O lado de menor afastamento da figura está contido no traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio lado. Assim, desenhou-se o paralelogramo que é a sombra dessa quarta parte do quadrado.

O ponto  $Q'_s$  é, imediatamente, um dos pontos do segmento de elipse (que é a sombra do arco  $\widehat{Q'T}$  no **SPFS**). O extremo de afastamento nulo do raio de topo (que se situa no Plano Frontal de Projeção), tem a sua sombra coincidente com o próprio ponto – esse ponto é, assim, outro ponto da curva (o segmento de elipse). O ponto  $T_{s2}$  (a sombra real do ponto **T**) é ainda um outro ponto da curva (o segmento de elipse). Já temos **três pontos** para o desenho do segmento de elipse.

Por fim, desenhou-se a diagonal do paralelogramo que tem um extremo em  $O_s$  – essa diagonal é a sombra da diagonal da quarta parte do quadrado que tem um extremo no ponto **O**. Em seguida, transportou-se, para a sombra da diagonal, o ponto em que o arco  $\widehat{Q'T}$  corta a diagonal da quarta parte do quadrado – esse transporte processou-se a partir da projeção frontal desse ponto, pela qual se conduziu a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa. Já temos **quatro pontos** para o desenho do segmento de elipse.

Os **quatro pontos** determinados permitem-nos um desenho relativamente preciso do segmento de elipse, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da curva aos lados do paralelogramo (o lado mais à esquerda e o seu lado superior). Sublinha-se que o arco  $\widehat{Q'_sT_{s2}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[TV]$  no ponto  $T_{s2}$ . Salienta-se, ainda, que o troço do arco de elipse que se situa para cima do ponto  $T_{s2}$  é uma **sombra virtual**, pois o ponto  $T_{s2}$  é o ponto a partir da qual a sombra do cone deixa de ser uma linha curva (um arco de elipse, neste caso) para passar a ser uma linha reta (a sombra da geratriz  $[TV]$ ).

Em seguida, concluiu-se o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo arco de circunferência  $\widehat{Q'_sT_{s1}}$ , pelo arco de elipse  $\widehat{T_{s2}Q'_s}$  (que convergem no ponto  $Q'_s$ ) e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s2}$ ,  $V_{s2}$ ,  $Q_s$  e  $T'_{s1}$ . Note que a sombra da geratriz  $[T'V]$  é **concordante** com o arco de circunferência  $\widehat{Q'_sT_{s1}}$  em  $T'_{s1}$ , tal como a sombra da geratriz  $[TV]$  é **concordante** com o arco de elipse  $\widehat{T_{s2}Q'_s}$  em  $T_{s2}$ . Note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cone é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio cone.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O traço frontal do plano que contém a base do cone, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos **T** e **T'**, das retas  $t$  e  $t'$  e, ainda, dos traçados necessários à determinação da sombra do arco  $\widehat{TT'}$  nos planos de projeção.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 918.

**Dados:**

Atendendo ao facto de que a base do cone, que está contida num plano horizontal (de nível), é tangente ao Plano Frontal de Projeção (como o enunciado refere expressamente), sabe-se que o raio da base é igual ao afastamento do seu centro (o ponto  $O$ ). Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base. Uma vez que o cone tem 7 cm de altura e que o vértice tem cota nula, é possível deduzir que plano horizontal (de nível) que contém a base tem 7 cm de cota ( $0 + 7 = 7$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone, pelo seu traço frontal ( $f_v$ ) e com 6 cm de cota. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Em seguida, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados e pertencente ao plano  $v$ . O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal do ponto  $O$  ( $O_2$ ) se situa sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ). Por outro lado, e como atrás se referiu, o ponto  $O$  tem afastamento igual ao raio da base, pelo que o ponto  $O$  tem 3,5 cm de afastamento, o que nos permitiu determinar  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ).

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base do cone se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido (que é tangente ao eixo  $X$ , pois a base é tangente ao Plano Frontal de Projeção). A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, numa reta vertical (uma reta projetante horizontal) – assim, tem-se imediatamente  $V_1 \equiv O_1$  (os dois pontos situam-se na mesma projetante horizontal). Por outro lado, e como o enunciado refere, o vértice do cone tem cota nula, o que nos permitiu, de forma imediata, determinar  $V_2$  (a projeção frontal do vértice  $V$ ).

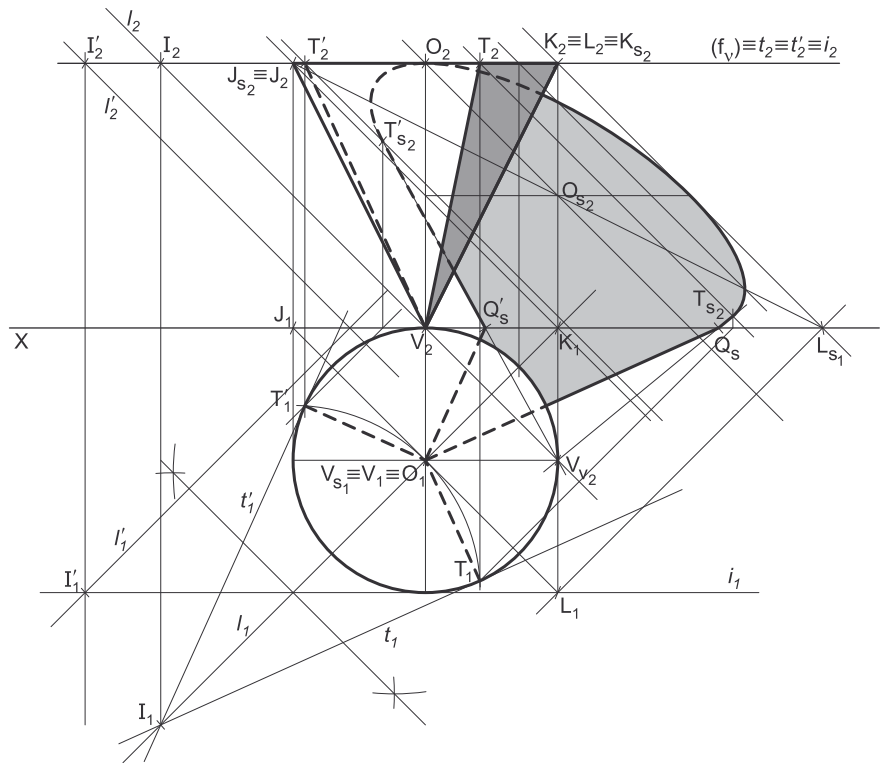
Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto  $V$ ), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $V$ ) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ . O ponto  $I$  determinou-se de forma imediata a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ), pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base do cone – o plano  $v$ ).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_1$ , que é a projeção horizontal do ponto  $I$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_1$  e  $T'_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $T$  e  $T'$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos  $T$  e  $T'$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  – note que a geratriz  $[T'V]$  é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção frontal).

As geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor  $\widehat{TT'}$** , sendo que a base do cone também está iluminada. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco maior  $\widehat{TT'}$**  está **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[TVT'T']$ , que integra as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ , bem como o **arco maior  $\widehat{TT'}$** .

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz  $[TV]$  e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone – assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[TV]$  (o segmento de reta  $[T_2V_2]$ ) e a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone.

Em **projeção horizontal**, a superfície lateral do cone é invisível da sua totalidade – assim, a parte da superfície que está em sombra própria (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  e que corresponde ao **arco maior  $\widehat{TT'}$** ) é invisível, pelo que, **em projeção horizontal**, não existe qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. O ponto  $V$  é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $V_{s_1} \equiv V_1$ .  $T_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $T$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $T$ .  $T'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $T'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $T'$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$T_{s_2}$  e  $T'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que, à partida, a sombra do **arco maior  $\widehat{TT'}$**  não admite a existência de qualquer ponto de quebra. O mesmo já não acontece em relação às sombras dos extremos das geratrizes separatrizes luz/sombra. De facto, existe um ponto de quebra entre  $T_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos), bem como existe um outro ponto de quebra entre  $T'_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto  $V - V_{v_2}$ .  $V_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto  $V$  – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $V$ . O segmento  $[T_{s_2}V_{v_2}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[TV]$  no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T_{s_2}V_{v_2}]$  com o eixo  $X$  é  $Q_s$ , o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[TV]$ . A linha quebrada aberta  $[V_{s_1}Q_sT_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[TV]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

O segmento  $[T'_{s_2}V_{v_2}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[T'V]$  no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T'_{s_2}V_{v_2}]$  com o eixo  $X$  é  $Q'_s$ , o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[T'V]$ . A linha quebrada aberta  $[V_{s_1}Q'_sT'_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[T'V]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra do **arco maior  $\widehat{TT'}$**  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos  $T$  e  $T'$ ) se situam no mesmo Plano de Projeção. No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra).

Assim, para averiguar a eventual existência de pontos de quebra na sombra do **arco maior  $\widehat{TT'}$**  (que é um arco de circunferência), e à semelhança de situações idênticas, há que recorrer ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo  $X$  e o raio luminoso  $l'$ , passante (concorrente com o eixo  $X$ ). O raio luminoso  $l'$  está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $v$  (o plano que contém a base do cone) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $v$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $v$  é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizontais. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com o plano  $v$  – o ponto  $I'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $I'$ ) e por uma direção (é fronto-horizontais).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $i$  é exterior ao arco maior  $\widehat{TT'}$ , pelo que a sombra do arco não apresenta pontos de quebra – a sombra do arco situar-se-á na totalidade no **SPHA** ou no **SPFS**. Tendo em conta que as sombras reais dos pontos **T** e **T'** (os extremos do arco) se situam, ambas, no **SPFS**, conclui-se que o **arco maior  $\widehat{TT'}$**  produz sombra no **SPFS**, ou seja, a sua sombra será um **segmento de elipse** – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente.

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco maior  $\widehat{TT'}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco maior  $\widehat{TT'}$  corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam o arco  $\widehat{TT'}$  na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam o arco maior  $\widehat{TT'}$  permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo (o ponto **O**) –  $O_{s_2}$  é a sombra real do ponto **O** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **O**. A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Frontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

O lado de menor afastamento do polígono (o segmento **[JK]**) está contido no traço frontal do plano  $v(f_v)$ , que se situa no **SPFS**, pelo que a sua sombra (o segmento  $[J_{s_2}K_{s_2}]$ ) está coincidente com o próprio segmento. Em seguida, determinou-se a sombra do vértice de maior afastamento e mais à direita do polígono (o ponto **L**), que se situa no eixo **X** – o ponto  $L_s$  é a sombra do ponto **L**. As sombras dos lados de topo do polígono estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos.

Em seguida, teve-se em conta que a mediana fronto-horizontal do quadrado é paralela ao lado **[JK]** e passa pelo ponto **O** – nesse sentido, por  $O_{s_2}$  (a sombra real do ponto **O**) conduziu-se uma paralela ao segmento  $[J_{s_2}K_{s_2}]$ , que é a sombra da mediana fronto-horizontal do quadrado. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do polígono que é 3/4 do quadrado, tendo-se desenhado, também, a sombra da mediana de topo do quadrado – é o segmento de reta que passa por  $O_{s_2}$  (a sombra real do ponto **O**) e que é paralelo a  $[K_sL_s]$ .

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O_{s_2}$  e têm extremos nos vértices do paralelogramo).

As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que o **arco maior  $\widehat{TT'}$**  corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções frontais daqueles pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**.

Aos **sete pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos **T** e **T'** ( $T_{s_2}$  e  $T'_{s_2}$ ), o que perfaz um total de **nove pontos** – estes nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz **[TV]** em  $T_{s_2}$ , tal como também tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz **[T'V]** em  $T'_{s_2}$ .

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{TT'}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para baixo de  $T_{s_2}$  (um deles) e para baixo de  $T'_{s_2}$  (o outro). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s_2}$ ,  $Q_s$ ,  $V_{s_1}$ ,  $Q'_s$  e  $T'_{s_2}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

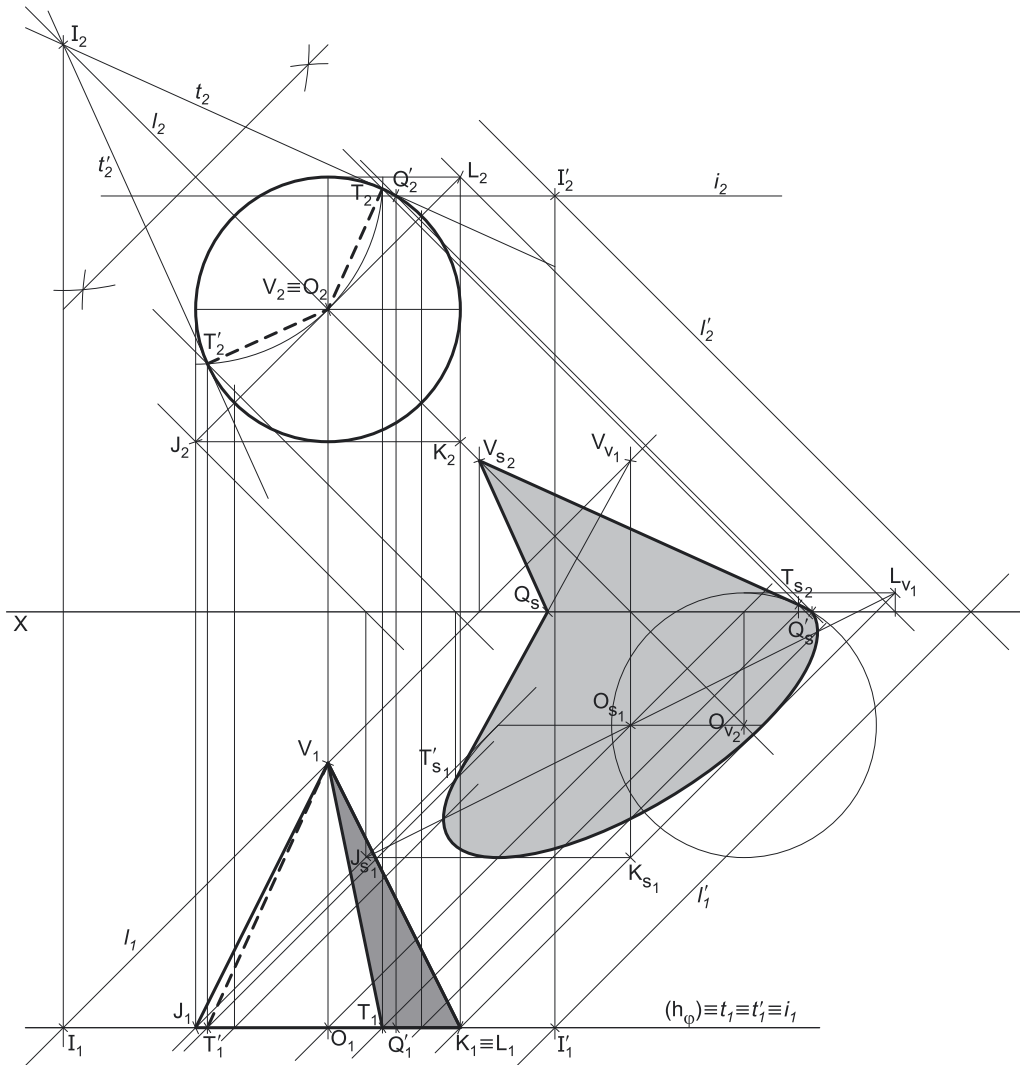
O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O traço frontal do plano que contém a base do cone, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos **T** e **T'**, das retas  $t$  e  $t'$  e, ainda, dos traçados necessários à determinação da sombra do arco  $\widehat{TT'}$  nos planos de projeção.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

(continua na página seguinte)



919.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone, pelo seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ), em função dos dados. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, representou-se o ponto **O** (o centro da base do cone), pelas suas projeções, em função dos dados e pertencente ao plano  $\varphi$ . O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal do ponto **O** (**O**<sub>1</sub>) se situa sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ).

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

*Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a base do cone se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal (no Plano Frontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, numa reta de topo (uma reta projetante frontal) – assim, tem-se imediatamente **V**<sub>2</sub>  $\equiv$  **O**<sub>2</sub> (os dois pontos situam-se na mesma projetante frontal). Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base o que, neste caso, se refere à diferença entre os afastamentos do vértice e do plano  $\varphi$ . Por outro lado, o vértice do cone é invisível em projeção frontal (como o enunciado refere expressamente), pelo que o ponto **V** tem afastamento inferior ao plano  $\varphi$ . Assim, e uma vez que o plano da base tem 11 cm de afastamento e o cone em 7 cm de altura, o vértice **V**, do cone, tem 4 cm de afastamento (11 – 7 = 4).

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V**<sub>1</sub> e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a circunferência que delimita a projeção frontal da base).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto  $V$ ), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $V$ ) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ . O ponto  $I$  determinou-se de forma imediata a partir da sua projeção horizontal ( $I_1$ ), pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ).
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base do cone – o plano  $\varphi$ ).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_2$ , que é a projeção frontal do ponto  $I$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_2$  e  $T'_2$  (as projeções frontais dos pontos  $T$  e  $T'$ ).

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos  $T$  e  $T'$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  – note que a geratriz  $[T'V]$  é invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção horizontal).

As geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor  $\overline{TT'}$** , sendo que a base do cone também está iluminada. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco maior  $\overline{TT'}$**  está **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[TV\overline{TT'}]$ , que integra as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ , bem como o **arco maior  $\overline{TT'}$** .

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz  $[TV]$  e a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone – assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**, é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[TV]$  (o segmento de reta  $[T_1V_1]$ ) e a projeção horizontal da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone.

Em **projeção frontal**, a superfície lateral do cone é invisível da sua totalidade – assim, a parte da superfície que está em sombra própria (a parte compreendida entre as projeções frontais das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  e que corresponde ao **arco maior  $\overline{TT'}$** ) é invisível, pelo que, **em projeção frontal**, não existe qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção horizontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $V_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $V$ .  $T_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $T$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $T$ .  $T'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $T'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $T'$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$T_{s_2}$  e  $T'_{s_1}$  situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra do **arco maior  $\overline{TT'}$**  admite necessariamente a existência de um ponto de quebra.  $V_{s_2}$  e  $T_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz  $[TV]$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[V_{s_2}T_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[TV]$  e situa-se no **SPFS**. O mesmo já não acontece em relação às sombras dos extremos da geratriz  $[T'V]$ . De facto, existe um ponto de quebra entre  $V_{s_2}$  e  $T'_{s_1}$ , que se situam em Planos de Projeção distintos.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $V_{s_2}$  e  $T'_{s_1}$ , recorreu-se à sombra virtual do ponto  $V$  –  $V_{v_1}$ .  $V_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto  $V$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $V$ . O segmento  $[T'_{s_1}V_{v_1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[T'V]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T'_{s_1}V_{v_1}]$  com o eixo  $X$  é  $Q_s$ , o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[T'V]$ . A linha quebrada aberta  $[T'_{s_1}Q_sV_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[T'V]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

Como atrás se referiu, a sombra do **arco maior  $\overline{TT'}$**  admite necessariamente a existência de um ponto de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos  $T$  e  $T'$ ) se situam em Planos de Projeção distintos. Para determinar o ponto de quebra da sombra do **arco maior  $\overline{TT'}$**  (que é um arco de circunferência), e à semelhança de situações idênticas, há que recorrer ao **método do plano luz/sombra passante**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo  $X$  e o raio luminoso  $l'$ , passante (concorrente com o eixo  $X$ ). O raio luminoso  $l'$  está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base do cone) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $\varphi$  é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizantal. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com o plano  $\varphi$  – o ponto  $I'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $I'$ ) e por uma direção (é fronto-horizantal).

A reta  $i$  é **secante** ao **arco maior**  $\overline{T\overline{T}'}$  – a reta  $i$  corta o **arco maior**  $\overline{T\overline{T}'}$  no ponto  $Q'$ . A sombra do ponto  $Q'$  (que se situa no eixo  $X$ ) é, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior**  $\overline{T\overline{T}'}$ . Em seguida, pelas projeções do ponto  $Q'$ , conduziram-se as projeções homônimas do raio luminoso que passa por  $Q'$  e determinou-se a sua sombra, que se situa no eixo  $X$  –  $Q'_s$ ,  $Q'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior**  $\overline{T\overline{T}'}$ .

O **arco**  $\overline{T'Q'}$  produz sombra no **SPFS** e o **arco**  $\overline{T'Q'}$  produz sombra no **SPHA**.

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco**  $\overline{T'Q'}$  **no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um arco geometricamente igual ao **arco**  $\overline{T'Q'}$ . Assim, determinou-se a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção, conduzindo, por  $O$ , um raio luminoso com a direção luminosa convencional. A sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa e situa-se no **SPFI**, pelo que é uma sombra virtual – é  $O_{v_2}$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_{v_2}$  e com 3,5 cm de raio (o raio da base), desenhou-se uma circunferência que é a sombra projetada da base do cone no Plano Frontal de Projeção. A parte dessa circunferência que está compreendida entre os pontos  $Q'_s$  e  $T_{s_2}$  (o arco dessa circunferência que tem extremos em  $Q'_s$  e em  $T_{s_2}$ ) é a sombra projetada do arco  $\overline{T'Q'}$  no **SPFS**. Sublinha-se que o arco  $\overline{T_{s_2}Q'_s}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[TV]$  no ponto  $T_{s_2}$ .

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco**  $\overline{T'Q'}$  **no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Para determinar os pontos necessários a um desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva, começemos por inscrever o **arco**  $\overline{T'Q'}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X** – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco  $\overline{T'Q'}$  corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam o arco  $\overline{T'Q'}$  na sua totalidade).

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco  $\overline{T'Q'}$  na parte correspondente desse quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos** do **segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam o arco  $\overline{T'Q'}$  permitem-nos determinar mais **três pontos** do **segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo (o ponto  $O$ ) –  $O_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $O$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $O$ . A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Horizontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

O lado inferior do polígono é o segmento  $[JK]$  – determinaram-se as sombras reais dos pontos  $J$  e  $K$ , o que nos permitiu determinar a sombra do lado  $[JK]$  no Plano Horizontal de Projeção (o segmento  $[J_s, K_s]$ ). Em seguida, determinou-se a sombra do vértice de maior cota e mais à direita do polígono (o ponto  $L$ ) – o ponto  $L_{v_1}$  é a sombra do ponto  $L$  no Plano Horizontal de Projeção. Note que  $L_{v_1}$  se situa no **SPHP**, pelo que é uma sombra virtual. As sombras dos lados verticais do polígono estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos.

Em seguida, teve-se em conta que a mediana fronto-horizantal do quadrado é paralela ao lado  $[JK]$  e passa pelo ponto  $O$  – nesse sentido, por  $O_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $O$ ) conduziu-se uma paralela ao segmento  $[J_s, K_s]$ , que é a sombra da mediana fronto-horizantal do quadrado. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do polígono que é 3/4 do quadrado, tendo-se desenhado, também, a sombra da mediana vertical do quadrado – é o segmento de reta que passa por  $O_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $O$ ) e que é paralela a  $[K_s, L_{v_1}]$ .

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O_{s_1}$  e têm extremos nos vértices do paralelogramo).

As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos** do **segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que o **arco**  $\overline{T'Q'}$  corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções horizontais daqueles pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersejam as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos** do **segmento de elipse**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Aos **sete pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos **Q'** e **T'** (**Q's** e **T's<sub>1</sub>**), o que perfaz um total de **nove pontos** – estes nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz **[T'V]** em **T's<sub>1</sub>**.

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco **T'Q'**. Esses troços são os dois troços que se situam para cima de **T's<sub>1</sub>** (um deles) e para cima de **Q's** (o outro). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado, pelo arco de circunferência **T's<sub>2</sub>Q's** e pela linha quebrada que tem vértices em **T's<sub>1</sub>**, **Q's**, **V's<sub>2</sub>** e **T's<sub>2</sub>** – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, não existem quaisquer invisibilidades a assinalar, pois a sombra do cone é visível na sua totalidade.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O traço horizontal do plano que contém a base do cone, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos **T** e **T'**, das retas **t** e **t'** e, ainda, dos traçados necessários à determinação da sombra do arco **TT'** nos planos de projeção.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 920.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone, pelo seu traço frontal ( $f_v$ ). O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** (**O<sub>2</sub>**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

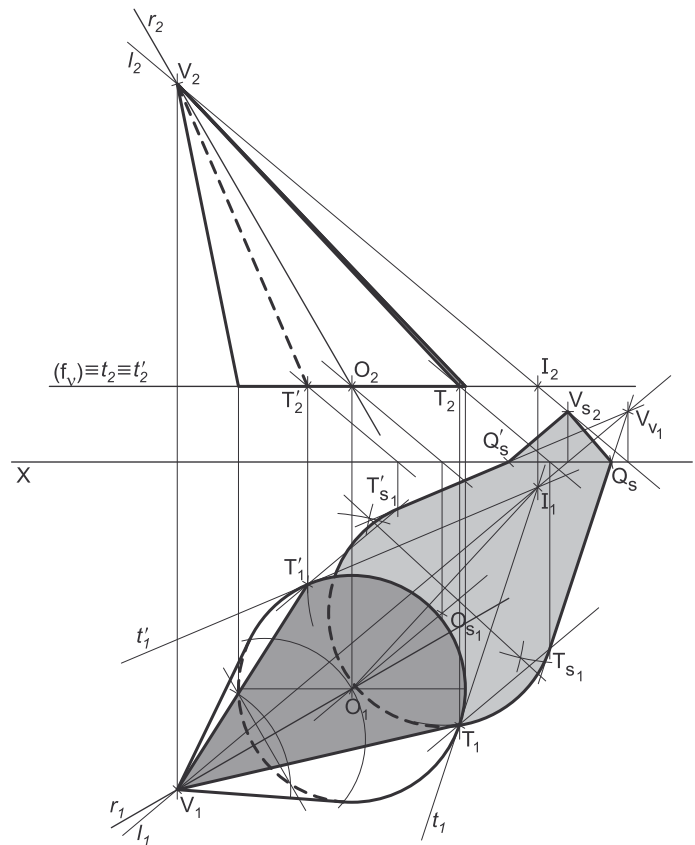
### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base do cone se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, representou-se, pelas suas projeções, a reta **r** a reta suporte do eixo. A reta **r** está definida por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção dada no enunciado). A altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas do ponto **V** e do plano da base. Uma vez que o cone tem 8 cm de altura e que o plano da base tem 2 cm de cota (a cota do ponto **O**), o vértice **V** tem 10 cm de cota ( $2 + 8 = 10$ ) – o ponto **V** é, assim, o ponto da reta **r** que tem 10 cm de cota, o que nos permitiu determinar as suas projeções, a partir da sua projeção frontal. As projeções do ponto **V** situam-se sobre as projeções homónimas da reta **r**.

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V<sub>2</sub>** e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (que é **V<sub>1</sub>**, a projeção horizontal do ponto **V**). O arco menor da circunferência que delimita a base (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** determinou-se de forma imediata a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ), pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ). Note que, nesta situação particular, o ponto **I** é um ponto do  $\beta_{2/4}$  (pois tem as suas projeções coincidentes).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base do cone – o plano  $v$ ).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_1$ , que é a projeção horizontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_1$  e  $T'_1$  (as projeções horizontais dos pontos **T** e **T'**).

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[TV]** e **[T'V]** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** – note que a geratriz **[T'V]** é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção frontal).

As geratrizes **[TV]** e **[T'V]** separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior  $\widehat{TT'}$** . A base do cone e a parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor  $\widehat{TT'}$**  estão **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[TV  $\widehat{TT'}$  T'V]**, que integra as geratrizes **[TV]** e **[T'V]**, bem como o **arco maior  $\widehat{TT'}$** .

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz **[TV]** e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone. A base é invisível em projeção frontal (pois é projetante frontal), pelo que não é possível assinalar a sombra própria da base (em projeção frontal). Assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz **[TV]** (o segmento de reta **[T<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**) e a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone.

Em **projeção horizontal**, a base é igualmente invisível, mas a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é visível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes **[TV]** e **[T'V]**) e que corresponde ao **arco menor  $\widehat{TT'}$**  – essa é, assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $T_{s_1}$  é a sombra real do ponto **T** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **T**.  $T'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **T'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **T'**.  $V_{s_2}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **V**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$T_{s_1}$  e  $T'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que, à partida, a sombra do **arco maior  $\widehat{TT'}$**  não admite a existência de qualquer ponto de quebra. O mesmo já não acontece em relação às sombras dos extremos das geratrizes separatrizes luz/sombra. De facto, existe um ponto de quebra entre  $T_{s_1}$  e  $V_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos), bem como existe um outro ponto de quebra entre  $T'_{s_1}$  e  $V_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **V** –  $V_{v_1}$ .  $V_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **V**. O segmento **[T<sub>s1</sub>V<sub>v1</sub>]** é a sombra projetada da geratriz **[TV]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[T<sub>s1</sub>V<sub>v1</sub>]** com o eixo **X** é  $Q_s$ , o ponto de quebra da sombra da geratriz **[TV]**. A linha quebrada aberta **[T<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>V<sub>s2</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[TV]** (a sombra projetada do segmento nas faces do **1.º Diedro**).

O segmento **[T'\_{s1}V\_{v1}]** é a sombra projetada da geratriz **[T'V]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[T'\_{s1}V\_{v1}]** com o eixo **X** é  $Q'_s$ , o ponto de quebra da sombra da geratriz **[T'V]**. A linha quebrada aberta **[T'\_{s1}Q'\_sV\_{s2}]** é a **sombra real** do segmento **[T'V]** (a sombra projetada do segmento nas faces do **1.º Diedro**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Como atrás se referiu, à **partida**, a sombra do **arco maior**  $\widehat{TT'}$  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **T** e **T'**) se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no **SPHA**). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, as sombras dos extremos do arco situam-se suficientemente distantes do eixo **X** para se garantir que a sombra do arco não admite a existência de pontos de quebra, para além de que os dois pontos de quebra da sombra do cone já foram determinados.

Nesse sentido, é possível concluir que a sombra do **arco maior**  $\widehat{TT'}$  se situa, na sua totalidade, no **SPHA** (onde se situam as sombras dos seus extremos).

Por outro lado, porque se trata de uma direção luminosa e ainda porque o arco  $\widehat{TT'}$  está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, a **sombra projetada do arco maior**  $\widehat{TT'}$  no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) é um arco de circunferência geometricamente igual ao **arco**  $\widehat{TT'}$ . Assim, determinou-se a sombra real do ponto **O** conduzindo, por **O**, um raio luminoso com a direção luminosa dada no enunciado –  $O_{s_1}$  é a sombra real do ponto **O**, situa-se no **SPHA** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **O**. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_{s_1}$  e com 3 cm de raio (o raio da base) desenhou-se o arco que é a sombra projetada do **arco maior**  $\widehat{TT'}$  no **SPHA** – trata-se de um arco com extremos nos pontos  $T_{s_1}$  e  $T'_{s_1}$ . Sublinha-se que o arco  $\widehat{T_{s_1}T'_{s_1}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz **[TV]** no ponto  $T_{s_1}$  e também é **concordante** com a sombra da geratriz **[T'V]** no ponto  $T'_{s_1}$ .

Em seguida, concluiu-se o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo arco de circunferência  $\widehat{T_{s_1}T'_{s_1}}$  e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s_1}$ ,  $Q_s$ ,  $V_{s_2}$ ,  $Q'_s$  e  $T'_{s_1}$ . Note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cone é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pelo próprio cone.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O traço frontal do plano que contém a base do cone, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos **T** e **T'** e, ainda, das retas **t** e **t'**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 921.

### Dados:

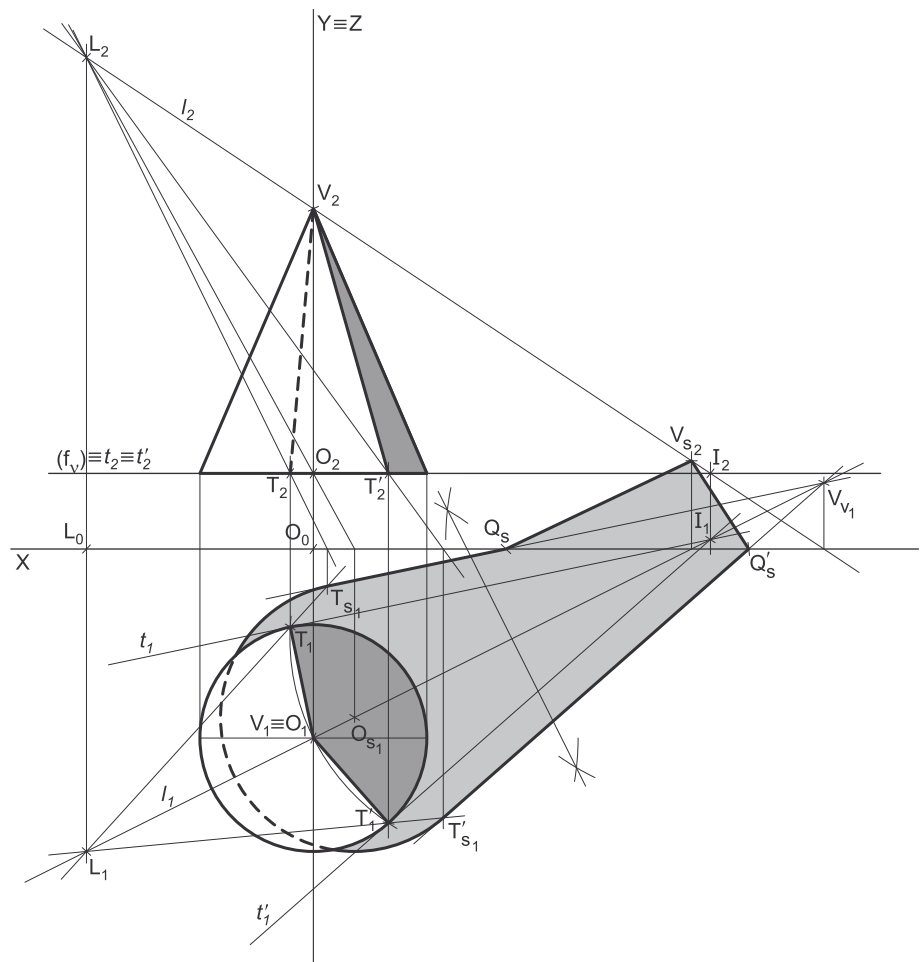
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **L** (o foco luminoso), pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone, pelo seu traço frontal ( $f_v$ ). O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base do cone se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, numa reta vertical (uma reta projetante horizontal) – assim, tem-se imediatamente  $V_1 \equiv O_1$  (os dois pontos situam-se na mesma projetante horizontal). Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base o que, neste caso, se refere à diferença entre as cotas do vértice e do plano  $v$ . Assim, e uma vez que o plano da base tem 2 cm de cota (a cota do ponto **O**) e o cone em 7 cm de altura, o vértice **V**, do cone, tem 9 cm de cota ( $2 + 7 = 9$ ).



Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$ . O raio luminoso  $l$  está definido por dois pontos – o ponto **V** (o vértice do cone) e o ponto **L** (o foco luminoso).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** determinou-se de forma imediata a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ), pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base do cone – o plano  $v$ ).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_1$ , que é a projeção horizontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_1$  e  $T'_1$  (as projeções horizontais dos pontos **T** e **T'**).

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[TV]** e **[T'V]** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** – note que a geratriz **[TV]** é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção frontal).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As geratrizes [TV] e [T'V] separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, do lado e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior TT'**. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor TT'** está **em sombra**, bem como a base do cone. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada [TVTT'], que integra as geratrizes [TV] e [T'V], bem como o **arco maior TT'**.

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz [T'V] e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone. A base é invisível em projeção frontal (pois é projetante frontal), pelo que não é possível assinalar a sombra própria da base (em projeção frontal). Assim, a **sombra própria** a assinalar, em **projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz [T'V] (o segmento de reta [T'2V2]) e a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone.

Em **projeção horizontal**, a base é igualmente invisível, mas a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é visível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes [TV] e [T'V] e que corresponde ao **arco menor TT'**) – essa é, assim, a **sombra própria** a assinalar, em **projeção horizontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

$T_{s_1}$  e  $T'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que, à partida, a sombra do **arco maior TT'** não admite a existência de qualquer ponto de quebra. O mesmo já não acontece em relação às sombras dos extremos das geratrizes separatrizes luz/sombra. De facto, existe um ponto de quebra entre  $T_{s_1}$  e  $V_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos), bem como existe um outro ponto de quebra entre  $T'_{s_1}$  e  $V_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto  $V - V_{v_1}$ .  $V_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto  $V$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $V$ . O segmento  $[T_{s_1}V_{v_1}]$  é a sombra projetada da geratriz [TV] no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T_{s_1}V_{v_1}]$  com o eixo  $X$  é  $Q_s$ , o ponto de quebra da sombra da geratriz [TV]. A linha quebrada aberta  $[T_{s_1}Q_sV_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento [TV] (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

O segmento  $[T'_{s_1}V_{v_1}]$  é a sombra projetada da geratriz [T'V] no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T'_{s_1}V_{v_1}]$  com o eixo  $X$  é  $Q'_s$ , o ponto de quebra da sombra da geratriz [T'V]. A linha quebrada aberta  $[T'_{s_1}Q'_sV_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento [T'V] (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra do **arco maior TT'** não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos  $T$  e  $T'$ ) se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no **SPHA**). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, as sombras dos extremos do arco situam-se suficientemente distantes do eixo  $X$  para se garantir que a sombra do arco não admite a existência de pontos de quebra, para além de que os dois pontos de quebra da sombra do cone já foram determinados.

Nesse sentido, é possível concluir que a sombra do **arco maior TT'** se situa, na sua totalidade, no **SPHA** (onde se situam as sombras dos seus extremos).

Por outro lado, atendendo a que se trata de um foco luminoso e ainda porque o arco  $\widehat{TT'}$  está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, a **sombra projetada** do **arco maior TT'** no **Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um arco de circunferência ampliado em relação ao **arco TT'**. Assim, determinou-se a sombra real do ponto  $O$  conduzindo, por  $O$ , um raio luminoso passando pelo ponto  $L$  (o foco luminoso) –  $O_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $O$ , situa-se no **SPHA** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $O$ . Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_{s_1}$  e com raio até  $T_{s_1}$  ou  $T'_{s_1}$ , desenhou-se o arco que é a sombra projetada do **arco maior TT'** no **SPHA** – trata-se de um arco com extremos nos pontos  $T_{s_1}$  e  $T'_{s_1}$ . Sublinha-se que o arco  $\widehat{T_{s_1}T'_{s_1}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz [TV] no ponto  $T_{s_1}$  e é também **concordante** com a sombra da geratriz [T'V] no ponto  $T'_{s_1}$ .

Em seguida, concluiu-se o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo arco de circunferência  $\widehat{T_{s_1}T'_{s_1}}$  e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s_1}$ ,  $Q_s$ ,  $V_{s_2}$ ,  $Q'_s$  e  $T'_{s_1}$ . Note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cone é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pelo próprio cone.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço frontal do plano que contém a base do cone, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$  e, ainda, das retas  $t$  e  $t'$ .

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 922.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone, pelo seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Os dados permitiram-nos, ainda, representar a reta **r** (a reta suporte do eixo do cone) pelas suas projeções – as projeções da reta **r** passam pelas projeções homónimas do ponto **O**. A reta **r** tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a base do cone se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal (no Plano Frontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

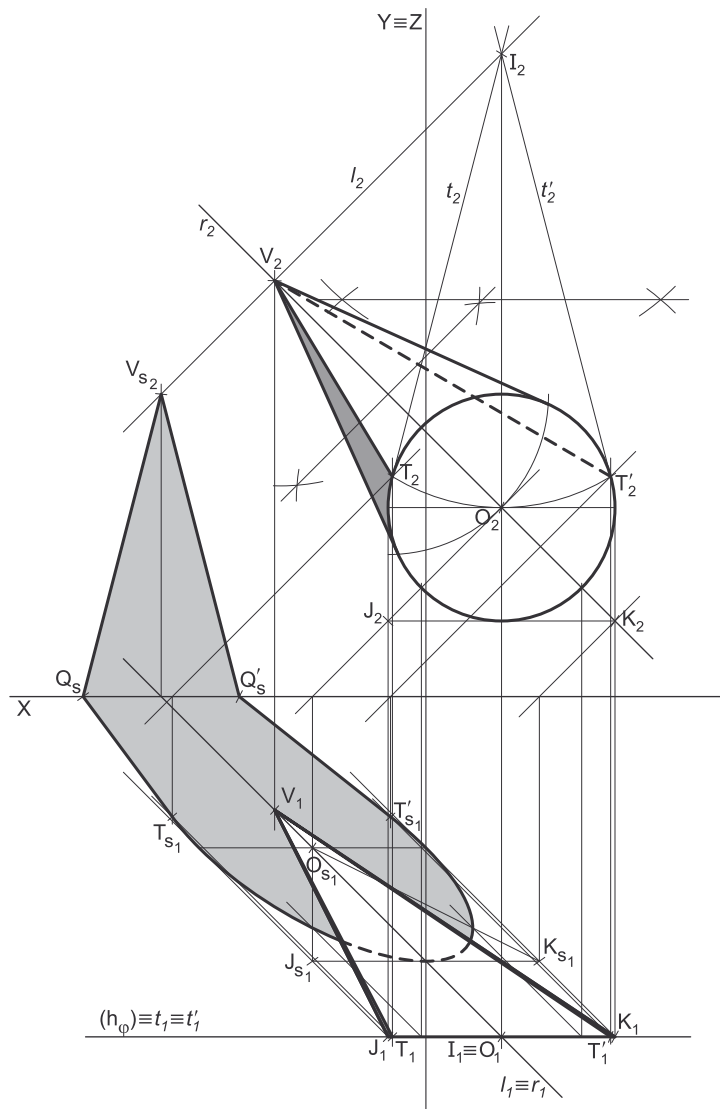
A reta **r** é a reta suporte do eixo do cone e, assim, o ponto **V** é um ponto da reta **r**. A altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base o que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos do ponto **V** e do plano da base. Por outro lado, a base do cone é visível em projeção frontal, pelo que o vértice do sólido (o ponto **V**) tem afastamento inferior à base. Assim, uma vez que o cone tem 6 cm de altura e que o plano da base tem 9 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**), o vértice **V** tem 3 cm de cota ( $9 - 6 = 3$ ) – o ponto **V** é, assim, o ponto da reta **r** que tem 3 cm de afastamento, o que nos permitiu determinar as suas projeções, a partir da sua projeção horizontal. As projeções do ponto **V** situam-se sobre as projeções homónimas da reta **r**.

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (que é  $V_2$ , a projeção frontal do ponto **V**). O arco menor da circunferência que delimita a base (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **visível** em projeção frontal, pois a base é visível (como o enunciado pede expressamente).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado). Note que, nesta situação particular, a projeção horizontal do raio luminoso ( $l_1$ ) está coincidente com a projeção horizontal da reta **r** ( $r_1$ ).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** determinou-se de forma imediata a partir da sua projeção horizontal ( $I_1$ ), pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso **l**) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base do cone – o plano  $\varphi$ ).

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto **I**<sub>2</sub>, que é a projeção frontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **T**<sub>2</sub> e **T'**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **T** e **T'**).

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[TV]** e **[T'V]** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** – note que a geratriz **[T'V]** é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção frontal).

As geratrizes **[TV]** e **[T'V]** separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da direita), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor TT'**, bem como a base do cone. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco maior TT'** está **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[TVTT']**, que integra as geratrizes **[TV]** e **[T'V]**, bem como o **arco maior TT'**.

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz **[TV]** e a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cone. Assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz **[TV]** (o segmento de reta **[T<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**) e a projeção frontal da geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cone.

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz **[TV]** e a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal do cone, bem como a parte compreendida entre a geratriz **[T'V]** e a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone. Assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz **[TV]** (o segmento de reta **[T<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**) e a projeção horizontal da geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal do cone, bem como a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz **[T'V]** (o segmento de reta **[T'<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**) e a projeção horizontal da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. **T<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **T** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **T**. **T'<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **T'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **T'**. **V<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **V**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

**T<sub>s1</sub>** e **T'<sub>s1</sub>** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que, à partida, a sombra do **arco maior TT'** não admite a existência de qualquer ponto de quebra. O mesmo já não acontece em relação às sombras dos extremos das geratrizes separatrizes luz/sombra. De facto, existe um ponto de quebra entre **T<sub>s1</sub>** e **V<sub>s2</sub>** (que se situam em Planos de Projeção distintos), bem como existe um outro ponto de quebra entre **T'<sub>s1</sub>** e **V<sub>s2</sub>** (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre **V<sub>s2</sub>** e **T<sub>s1</sub>**, poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto **V** ou à sombra virtual do ponto **T**. No entanto, optou-se por um raciocínio que nos permite economizar traçado. O plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cone ao longo da geratriz **[TV]** intersesta o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base) segundo a reta **t** – a reta **t** é, assim, uma reta frontal (de frente) desse plano. Acontece que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da geratriz **[TV]** tem de estar sobre o traço frontal desse plano, que é, igualmente, uma reta frontal (de frente) do plano. Uma vez que retas frontais (de frente) de um mesmo plano são paralelas entre si, sabe-se que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da geratriz **[TV]** é paralela à reta **t**.

Assim, por **V<sub>s2</sub>** (a sombra real do ponto **V**, que se situa no **SPFS**), conduziu-se uma paralela à reta **t** (paralela à projeção frontal da reta **t** – **t<sub>2</sub>**) até ao eixo **X**, onde se situa o ponto **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra da geratriz **[TV]**). O segmento **[V<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>]** é a sombra projetada da geratriz **[TV]** no **SPFS**. A linha quebrada aberta **[V<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>T<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[TV]** (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.<sup>o</sup> Diedro).

De forma semelhante, para determinar o ponto de quebra situado entre **V<sub>s2</sub>** e **T'<sub>s1</sub>**, recorreu-se ao plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cone ao longo da geratriz **[T'V]** – a sombra projetada, no Plano Frontal de Projeção, da geratriz **[T'V]** tem de estar sobre o traço frontal desse plano, que é necessariamente paralelo à reta **t'**. Assim, por **V<sub>s2</sub>** (a sombra real do ponto **V**, que se situa no **SPFS**), conduziu-se uma paralela à reta **t'** (paralela à projeção frontal da reta **t'** – **t'<sub>2</sub>**) até ao eixo **X**, onde se situa o ponto **Q'<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra da geratriz **[T'V]**). O segmento **[V<sub>s2</sub>Q'<sub>s</sub>]** é a sombra projetada da geratriz **[T'V]** no **SPFS**. A linha quebrada aberta **[V<sub>s2</sub>Q'<sub>s</sub>T'<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[T'V]** (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.<sup>o</sup> Diedro).

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra do **arco maior TT'** não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **T** e **T'**) se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no **SPHA**). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, as sombras dos extremos do arco situam-se suficientemente distantes do eixo **X** para se garantir que a sombra do arco não admite a existência de pontos de quebra, para além de que os dois pontos de quebra da sombra do cone já foram determinados.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, é possível concluir que a sombra do **arco maior**  $\overline{TT'}$  se situa, na sua totalidade, no **SPHA** (onde se situam as sombras dos seus extremos) – a sua sombra será um **segmento de elipse**, cujo desenho requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente.

Assim, começou-se por inscrever o arco maior na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco maior  $\overline{TT'}$  corresponde a «meio quadrado». Note que existe uma parte (duas partes) do arco  $\overline{TT'}$  que ultrapassa o «meio quadrado», mas essa(s) parte(s) é(são) suficientemente pequena(s) para se considerar que o recurso ao «meio quadrado» é suficiente para garantir um desenho da curva relativamente preciso.

Assim, desenhou-se o «meio quadrado» e desenharam-se, ainda, as partes correspondentes das diagonais e das medianas do quadrado total. Note que o lado superior do «meio quadrado» é, na prática, a mediana fronto-horizontal do quadrado original. Os três pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **três pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam o arco maior  $\overline{TT'}$  permitem-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo (o ponto **O**) –  $O_{s1}$  é a sombra real do ponto **O** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **O**. A sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção corresponde a um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesse paralelogramo.

Em seguida, determinou-se a sombra do lado inferior do polígono (o segmento **[JK]**), o que se processou determinando-se as sombras dos seus extremos – o segmento  $[J_s, K_s]$  é a sombra do segmento **[JK]** no Plano Horizontal de Projeção. A sombra do lado superior do «meio quadrado» passa por  $O_{s1}$  e é paralela ao segmento  $[J_s, K_s]$ . As sombras dos lados verticais do polígono estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos (os pontos **J** e **K**).

Em seguida, teve-se em conta que a mediana vertical do «meio quadrado» é paralela aos lados que não são fronto-horizontais e passa pelo ponto **O**, o que nos permitiu desenhar a sua sombra, passando por  $O_{s1}$ . A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do paralelogramo que é a sombra do «meio quadrado», tendo-se desenhado, também, as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O_{s1}$  e têm extremos nos vértices em  $J_{s1}$  e em  $K_{s1}$ ).

As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que o **arco maior**  $\overline{TT'}$  corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções horizontais daqueles pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais do «meio paralelogramo», o que nos permitiu determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**.

Aos **cinco pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos **T** e **T'** ( $T_{s1}$  e  $T'_{s1}$ ), o que perfaz um total de **sete pontos** – estes sete pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz **[TV]** em  $T_{s1}$ , tal como é **concordante** com a sombra da geratriz **[T'V]** em  $T'_{s1}$ .

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s1}$ ,  $Q_s$ ,  $V_{s2}$ ,  $Q'_s$  e  $T'_{s1}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em projeção horizontal, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

## Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço horizontal do plano que contém a base do cone, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porção são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos **T** e **T'**, das retas **t** e **t'** e, ainda, dos traçados necessários à determinação da sombra do arco  $\overline{TT'}$  nos planos de projeção.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



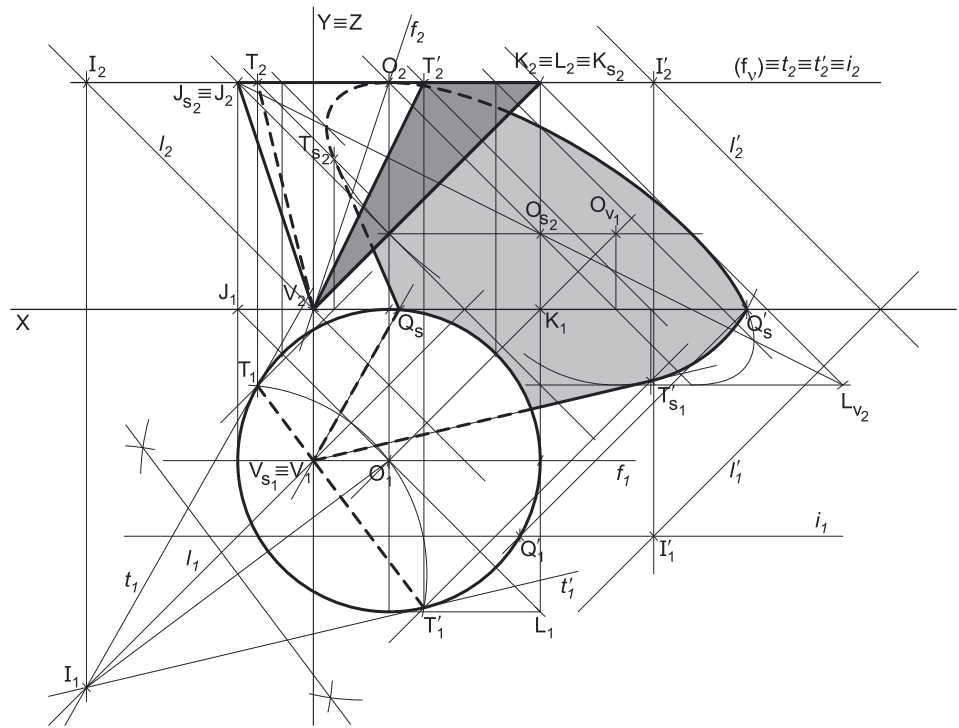
## 923.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone, pelo seu traço frontal ( $f_v$ ), em função dos dados. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base do cone se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. Tendo em conta que o ponto **O** tem 4 cm de afastamento e que a circunferência tem 4 cm de raio, a circunferência é necessariamente tangente ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua projeção horizontal é tangente ao eixo **X**. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.



Em seguida, conduziu-se, pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ), a projeção horizontal da reta  $f(f_1)$ , a reta suporte do eixo do cone, o que nos permitiu, de forma imediata, determinar a projeção horizontal do ponto **V** ( $V_1$ ) – **V** é o vértice do cone e tem abscissa nula. Atendendo a que o ponto **V** tem também cota nula (como o enunciado refere expressamente), determinou-se imediatamente  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**) – este procedimento permitiu-nos, ainda, desenhar a projeção frontal da reta  $f(f_2)$ , que está definida por dois pontos ( $V_2$  e  $O_2$ , as projeções frontais dos pontos **V** e **O**, respetivamente).

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** determinou-se de forma imediata a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ), pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base do cone – o plano  $v$ ).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_1$ , que é a projeção horizontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_1$  e  $T'_1$  (as projeções horizontais dos pontos **T** e **T'**).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos  $T$  e  $T'$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  – note que a geratriz  $[TV]$  é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção frontal).

As geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor**  $\overline{TT'}$ , sendo que a base do cone também está iluminada. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco maior**  $\overline{TT'}$  está **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[TVT'T']$ , que integra as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ , bem como o **arco maior**  $\overline{TT'}$ .

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz  $[TV]$  e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone – assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**, é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[T'V]$  (o segmento de reta  $[T'_2V_2]$ ) e a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone.

Em **projeção horizontal**, a superfície lateral do cone é invisível da sua totalidade – assim, a parte da superfície que está em sombra própria (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  e que corresponde ao **arco maior**  $\overline{TT'}$ ) é invisível, pelo que, **em projeção horizontal**, não existe qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. O ponto  $V$  é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $V_{s_1} \equiv V_1$ .  $T_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $T$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $T$ .  $T'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $T'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $T'$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$T_{s_2}$  e  $T'_{s_1}$  situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra do **arco maior**  $\overline{TT'}$  admite necessariamente a existência de um ponto de quebra.  $V_{s_1}$  e  $T'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[T'V]$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[V_{s_1}T'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[T'V]$  e situa-se no **SPHA**. O mesmo já não acontece em relação às sombras dos extremos da geratriz  $[TV]$ . De facto, existe um ponto de quebra entre  $V_{s_1}$  e  $T_{s_2}$ , que se situam em Planos de Projeção distintos.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $V_{s_1}$  e  $T_{s_2}$  poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto  $V$  ou à sombra virtual do ponto  $T$ . No entanto, optou-se por um raciocínio que nos permite economizar traçado. O plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cone ao longo da geratriz  $[TV]$  interseca o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base) segundo a reta  $t$  – a reta  $t$  é, assim, uma reta horizontal (de nível) desse plano. Acontece que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da geratriz  $[TV]$  tem de estar sobre o traço horizontal desse plano, que é, igualmente, uma reta horizontal (de nível) do plano. Uma vez que retas horizontais (de nível) de um mesmo plano são paralelas entre si, sabe-se que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da geratriz  $[TV]$  é paralela à reta  $t$ .

Assim, por  $V_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $V$ , que se situa no **SPHA**), conduziu-se uma paralela à reta  $t$  (paralela à projeção horizontal da reta  $t - t_1$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa o ponto  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[TV]$ ). O segmento  $[V_{s_1}Q_s]$  é a sombra projetada da geratriz  $[TV]$  no **SPHA**. A linha quebrada aberta  $[V_{s_1}Q_sT_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[TV]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

Como atrás se referiu, a sombra do **arco maior**  $\overline{TT'}$  admite necessariamente a existência de um ponto de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos  $T$  e  $T'$ ) se situam em Planos de Projeção distintos. Para determinar o ponto de quebra da sombra do **arco maior**  $\overline{TT'}$  (que é um arco de circunferência), e à semelhança de situações idênticas, há que recorrer ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo  $X$  e o raio luminoso  $l'$ , passante (concorrente com o eixo  $X$ ). O raio luminoso  $l'$  está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $v$  (o plano que contém a base do cone) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $v$  é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizontais. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com o plano  $v$  – o ponto  $I'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $I'$ ) e por uma direção (é fronto-horizontais).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $i$  é **secante** ao **arco maior**  $\widehat{TT'}$  – a reta  $i$  corta o **arco maior**  $\widehat{TT'}$  no ponto  $Q'$ . A sombra do ponto  $Q'$  (que se situa no eixo  $X$ ) é, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior**  $\widehat{TT'}$ . Note que não se determinou a projeção frontal do ponto  $Q'$  (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por esta não ser necessária. Em seguida, pela projeção horizontal do ponto  $Q'$ , conduziu-se a projeção horizontal do raio luminoso que passa por  $Q'$  e determinou-se a sua sombra, que se situa no eixo  $X$  –  $Q'_s$ .  $Q'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior**  $\widehat{TT'}$ .

O **arco**  $\widehat{T'Q'}$  produz sombra no **SPFS** e o **arco**  $\widehat{T'Q'}$  produz sombra no **SPHA**.

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

Trata-se de uma direção luminosa e o arco  $\widehat{T'Q'}$  está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a **sombra projetada do arco**  $\widehat{T'Q'}$  no **Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um arco de circunferência geometricamente igual ao **arco**  $\widehat{T'Q'}$ . Assim, determinou-se a sombra do ponto  $O$  no Plano Horizontal de Projeção, conduzindo, por  $O$ , um raio luminoso com a direção luminosa convencional. A sombra do ponto  $O$  no Plano Horizontal de Projeção é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa e situa-se no **SPHP**, pelo que é uma sombra virtual – é  $O_{v_1}$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_{v_1}$  e com 4 cm de raio (o raio da base), desenhou-se um arco de circunferência que é a sombra projetada do arco  $\widehat{T'Q'}$  no Plano Horizontal de Projeção. Esse arco está compreendido entre os pontos  $Q'_s$  e  $T'_{s_1}$  (o arco tem extremos em  $Q'_s$  e em  $T'_{s_1}$ ) e é a sombra projetada do arco  $\widehat{T'Q'}$  no **SPHA**. Sublinha-se que o arco  $\widehat{T'_{s_1}Q'_s}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[TV]$  no ponto  $T'_{s_1}$ .

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco**  $\widehat{T'Q'}$  no **Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Para determinar os pontos necessários a um desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva, começemos por inscrever o **arco**  $\widehat{T'Q'}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X** – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco  $\widehat{T'Q'}$  corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam o arco  $\widehat{T'Q'}$  na sua totalidade).

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco  $\widehat{T'Q'}$  na parte correspondente desse quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam o arco  $\widehat{T'Q'}$  permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo (o ponto  $O$ ) –  $O_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $O$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $O$ . A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Frontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

O lado de menor afastamento do polígono é o segmento  $[JK]$  e está contido no traço frontal do plano  $v(f_v)$ , pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio segmento – tem-se, imediatamente,  $J_{s_2} \equiv J_2$  e  $K_{s_2} \equiv K_2$ . Em seguida, determinou-se a sombra do vértice de maior afastamento e mais à direita do polígono (o ponto  $L$ ) – o ponto  $L_{v_2}$  é a sombra do ponto  $L$  no Plano Frontal de Projeção. Note que  $L_{v_2}$  se situa no **SPFI**, pelo que é uma sombra virtual. As sombras dos lados de topo do polígono estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos.

Em seguida, teve-se em conta que a mediana fronto-horizontal do quadrado é paralela ao lado  $[JK]$  e passa pelo ponto  $O$  – nesse sentido, por  $O_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $O$ ) conduziu-se uma paralela ao segmento  $[J_{s_2}K_{s_2}]$ , que é a sombra da mediana fronto-horizontal do quadrado. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do polígono que é 3/4 do quadrado, tendo-se desenhado, também, a sombra da mediana de topo do quadrado – é o segmento de reta que passa por  $O_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $O$ ) e que é paralelo a  $[K_{s_2}L_{v_2}]$ .

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O_{s_2}$  e têm extremos nos vértices do paralelogramo).

As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que o **arco**  $\widehat{T'Q'}$  corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções frontais daqueles pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**.

os **sete pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos  $Q'$  e  $T$  ( $Q'_s$  e  $T_{s_2}$ ), o que perfaz um total de **nove pontos** – estes nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz  $[TV]$  em  $T_{s_2}$ .

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{T'Q'}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para baixo de  $T_{s_2}$  (um deles) e para baixo de  $Q_s$  (o outro). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s2}$ ,  $Q_s$ ,  $V_{s1}$  e  $T'_{s1}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço frontal do plano que contém a base do cone, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos **T** e **T'**, das retas **t** e **t'** e, ainda, dos traçados necessários à determinação da sombra do arco **TT'** nos planos de projeção.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 924.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone, pelo seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, teve-se em atenção que a base, que está contida no plano  $\varphi$  é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o seu raio é igual à cota do seu centro (o ponto **O**). Nesse sentido, o ponto **O** tem necessariamente 3,5 cm de cota, o que nos permitiu determinar a sua projeção frontal ( $O_2$ ). Por fim, o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ) está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ).

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

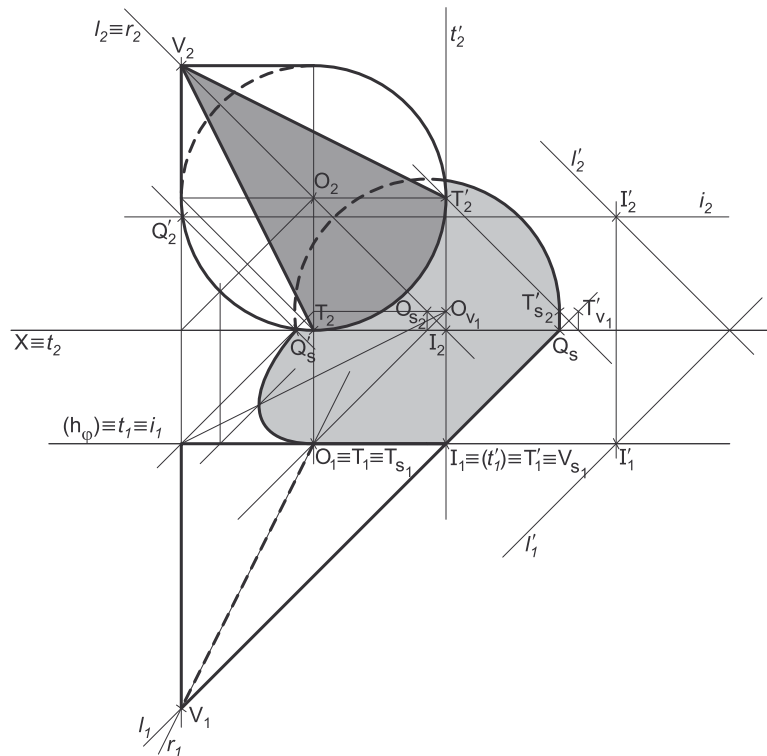
#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a base do cone se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal (no Plano Frontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido (que é tangente ao eixo **X**). A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ), conduziu-se a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ), a reta suporte do eixo do cone, com a direção dada no enunciado. Tendo em conta que a geratriz mais à esquerda do cone está contida numa reta de perfil, as projeções do ponto **V** situam-se na mesma linha de chamada das projeções do ponto mais à esquerda da base, o que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**), sobre  $r_2$  (a projeção frontal da reta  $r$ ).

Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base o que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos do ponto **V** e do plano da base. Uma vez que o cone tem 7 cm de altura e que o plano da base tem 3 cm de afastamento, o vértice **V** tem 10 cm de afastamento ( $3 + 7 = 10$ ), o que nos permitiu determinar  $V_1$  (a projeção horizontal do vértice **V**). Em seguida, desenhou-se a projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), passando por  $V_1$  e por  $O_1$  (as projeções horizontais dos pontos **V** e **O**, respetivamente).

Por fim, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (que é  $V_2$ , a projeção frontal do ponto **V**). O arco menor da circunferência que delimita a base (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto  $V$ ), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $V$ ) e por uma direção (a direção convencional da luz). Note que, nesta situação, a projeção frontal do raio luminoso  $l$  ( $l_2$ ) está coincidente com a projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ . O ponto  $I$  determinou-se de forma imediata a partir da sua projeção horizontal ( $I_1$ ), pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ). Note que, nesta situação particular, o ponto  $I$  é o traço horizontal do raio luminoso  $l$  e situa-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ).
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base do cone – o plano  $\varphi$ ).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_2$ , que é a projeção frontal do ponto  $I$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_2$  e  $T'_2$  (as projeções frontais dos pontos  $T$  e  $T'$ ).

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos  $T$  e  $T'$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido). Note que, nesta situação particular, a reta  $t$  é uma reta fronto-horizontal (é o próprio traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e a reta  $t'$  é uma reta vertical.

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ . Note que a geratriz  $[TV]$  é invisível em projeção horizontal, por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone (em projeção horizontal). Note ainda que a geratriz  $[T'V]$  é, na prática, a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone.

As geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior**  $\overline{TT'}$ . A base do cone e a parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor**  $\overline{TT'}$  estão **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[TVT'T']$ , que integra as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ , bem como o **arco maior**  $\overline{TT'}$ .

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é visível na sua totalidade. A base é invisível em projeção frontal, pelo que não é possível assinalar a sombra própria da base (em projeção frontal). Assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[TV]$  (o segmento de reta  $[T_2V_2]$ ) e a projeção frontal da geratriz  $[T'V]$  (o segmento de reta  $[T'_2V_2]$ ).

Em **projeção horizontal**, a base é igualmente invisível (é projetante horizontal), e a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é invisível na sua totalidade, pelo que, **em projeção horizontal**, não existe qualquer **sombra própria** visível a assinalar.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. O ponto  $T$  é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $T_{s_1} \equiv T_1$ .  $T'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $T'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $T'$ .  $V_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $V$ . Note que, nesta situação, o ponto  $V$  é o próprio ponto  $I$ , pois o ponto  $I$  é o traço horizontal do raio luminoso  $l$  (o raio luminoso que passa por  $V$ ) e situa-se no **SPHA**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$T_{s_1}$  e  $V_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[TV]$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[T_{s_1}V_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[TV]$  e situa-se no **SPHA**.  $V_{s_1}$  situa-se no **SPHA** e  $T'_{s_2}$  situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre  $V_{s_1}$  e  $T'_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).  $T_{s_1}$  situa-se no **SPHA** e  $T'_{s_2}$  situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre  $T_{s_1}$  e  $T'_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) – este outro ponto de quebra da sombra do cone é um ponto de quebra da sombra do **arco maior**  $\overline{TT'}$ .

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $T'_{s_2}$  e  $V_{s_1}$ , recorreu-se à sombra virtual do ponto  $T' - T'_{v_1}$ .  $T'_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto  $T'$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $T'$ . O segmento  $[V_{s_1}T'_{v_1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[T'V]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[V_{s_1}T'_{v_1}]$  com o eixo  $X$  é  $Q_s$ , o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[T'V]$ . A linha quebrada aberta  $[V_{s_1}Q_sT'_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[T'V]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para determinar o ponto de quebra da sombra do arco maior  $\overline{TT'}$  (que é um arco de circunferência), e à semelhança de situações idênticas, há que recorrer ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo  $X$  e o raio luminoso  $l'$ , passante (concorrente com o eixo  $X$ ). O raio luminoso  $l'$  está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $v$  (o plano que contém a base do cone) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $v$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $v$  é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizonta. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com o plano  $v$  – o ponto  $I'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $I'$ ) e por uma direção (é fronto-horizonta).

A reta  $i$  é secante ao **arco maior  $\overline{TT'}$**  – a reta  $i$  corta **arco maior  $\overline{TT'}$**  no ponto  $Q'$ . A sombra do ponto  $Q'$  (que se situa no eixo  $X$ ) é, precisamente, o ponto de quebra da sombra do **arco maior  $\overline{TT'}$** . Note que não se identificou a projeção horizontal do ponto  $Q'$  (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por tal não ser necessário. Em seguida, pela projeção frontal do ponto  $Q'$  ( $Q'_2$ ), conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que passa por  $Q'$  e determinou-se a sua sombra, que se situa no eixo  $X$  –  $Q'_s$ .  $Q'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior  $\overline{TT'}$** .

O **arco  $\overline{Q'T}$**  produz sombra no **SPHA** e o **arco  $\overline{Q'T'}$**  produz sombra no **SPFS**.

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Frontal de Projeção:*

Tratase de uma direção luminosa e o arco  $\overline{Q'T'}$  está contido num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a **sombra projetada do arco  $\overline{Q'T'}$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um arco de circunferência geometricamente igual ao **arco  $\overline{Q'T'}$** . Assim, determinou-se a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção, conduzindo, por  $O$ , um raio luminoso com a direção luminosa convencional – a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção situa-se no **SPFS**, pelo que é uma sombra real – é  $O_{s_2}$ . Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_{s_2}$  e com 3,5 cm de raio (o raio da base) desenhou-se o arco que é a sombra projetada da figura no **SPFS** – trata-se de um arco com um extremo no ponto  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do **arco  $\overline{TT'}$** ) e com o outro extremo no ponto  $T'_{s_2}$ . Sublinha-se que o arco  $\overline{Q'_s T'_{s_2}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[T'V]$  no ponto  $T'_{s_2}$ .

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\overline{Q'T}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Para determinar os pontos necessários a um desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva, começemos por inscrever o **arco  $\overline{Q'T}$**  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo  $X$**  – o arco  $\overline{Q'T}$  ficou inscrito na quarta parte de um quadrado. O lado superior dessa quarta parte do quadrado é um raio fronto-horizonta da base e o seu lado inferior está contido no traço horizontal do plano  $\varphi$  (em projeção frontal, este lado situa-se no eixo  $X$ ).

Em seguida, determinou-se a sombra projetada no **SPHA** dessa quarta parte do quadrado. Para tal foi necessário determinar a sombra do ponto  $O$  no Plano Horizontal de Projeção, que é uma sombra virtual –  $O_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto  $O$ , situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $O$ .

O segmento  $[T_s O_{v_1}]$  é, imediatamente, a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção do lado  $[OT]$  da quarta parte do quadrado (o segmento  $[OT]$  é o lado vertical mais à direita da quarta parte do quadrado). A sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção do lado inferior da quarta parte do quadrado está coincidente com o próprio lado, porque este se situa no Plano Horizontal de Projeção. A sombra do lado vertical mais à esquerda do quadrado é paralela ao segmento  $[T_s O_{v_1}]$  e a sombra do lado superior da quarta parte do quadrado é fronto-horizonta, passando por  $O_{v_1}$ . Assim, desenhou-se o paralelogramo que é a sombra dessa quarta parte do quadrado.

O extremo esquerdo do lado fronto-horizonta do paralelogramo que passa por  $O_{v_1}$  é, imediatamente, um dos pontos do segmento de elipse. O ponto  $T_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $T$ ) é ainda um outro ponto da curva (o segmento de elipse). O ponto  $Q'_s$  é, ainda, um outro ponto do segmento de elipse (que é a sombra do arco  $\overline{Q'T}$  no **SPHA**). Já temos **três pontos** para o desenho do segmento de elipse.

Por fim, desenhou-se a diagonal do paralelogramo que tem um extremo em  $O_{v_1}$  – essa diagonal é a sombra da diagonal da quarta parte do quadrado que tem um extremo no ponto  $O$ . Em seguida, transportou-se, para a sombra da diagonal, o ponto em que o arco  $\overline{Q'T}$  corta a diagonal da quarta parte do quadrado – esse transporte processou-se a partir da projeção horizontal desse ponto, pela qual se conduziu a projeção horizontal do raio luminoso que por ele passa. Já temos **quatro pontos** para o desenho do segmento de elipse.

Os **quatro pontos** determinados permitem-nos um desenho relativamente preciso do segmento de elipse, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da curva aos lados do paralelogramo (o lado mais à esquerda e o seu lado inferior). Salienta-se, ainda, que o traço do arco do segmento de elipse que se situa para cima do ponto  $Q'_s$  é uma **sombra virtual** (pois situa-se no **SPHP**), mas o seu desenho teve, como objetivo, o perceber a continuidade da curva e, dessa forma, poder desenhá-la com maior precisão. Sublinha-se que o arco  $\overline{Q'_s T_{s_1}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[TV]$  no ponto  $T_{s_1}$ .

Em seguida, concluiu-se o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo arco de circunferência  $\overline{Q'_s T'_{s_2}}$ , pelo arco de elipse  $\overline{Q'_s T_{s_1}}$  (que convergem no ponto  $Q'_s$ ) e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s_1}$ ,  $V_{s_1}$ ,  $Q_s$  e  $T'_{s_2}$ . Note que a sombra da geratriz  $[T'V]$  é **concordante** com o arco de circunferência  $\overline{Q'_s T'_{s_2}}$  em  $T'_{s_2}$ , tal como a sombra da geratriz  $[TV]$  é **concordante** com o arco de elipse  $\overline{Q'_s T_{s_1}}$  em  $T_{s_1}$ . Note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cone é invisível (em projeção frontal), pois está oculta pelo próprio cone.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

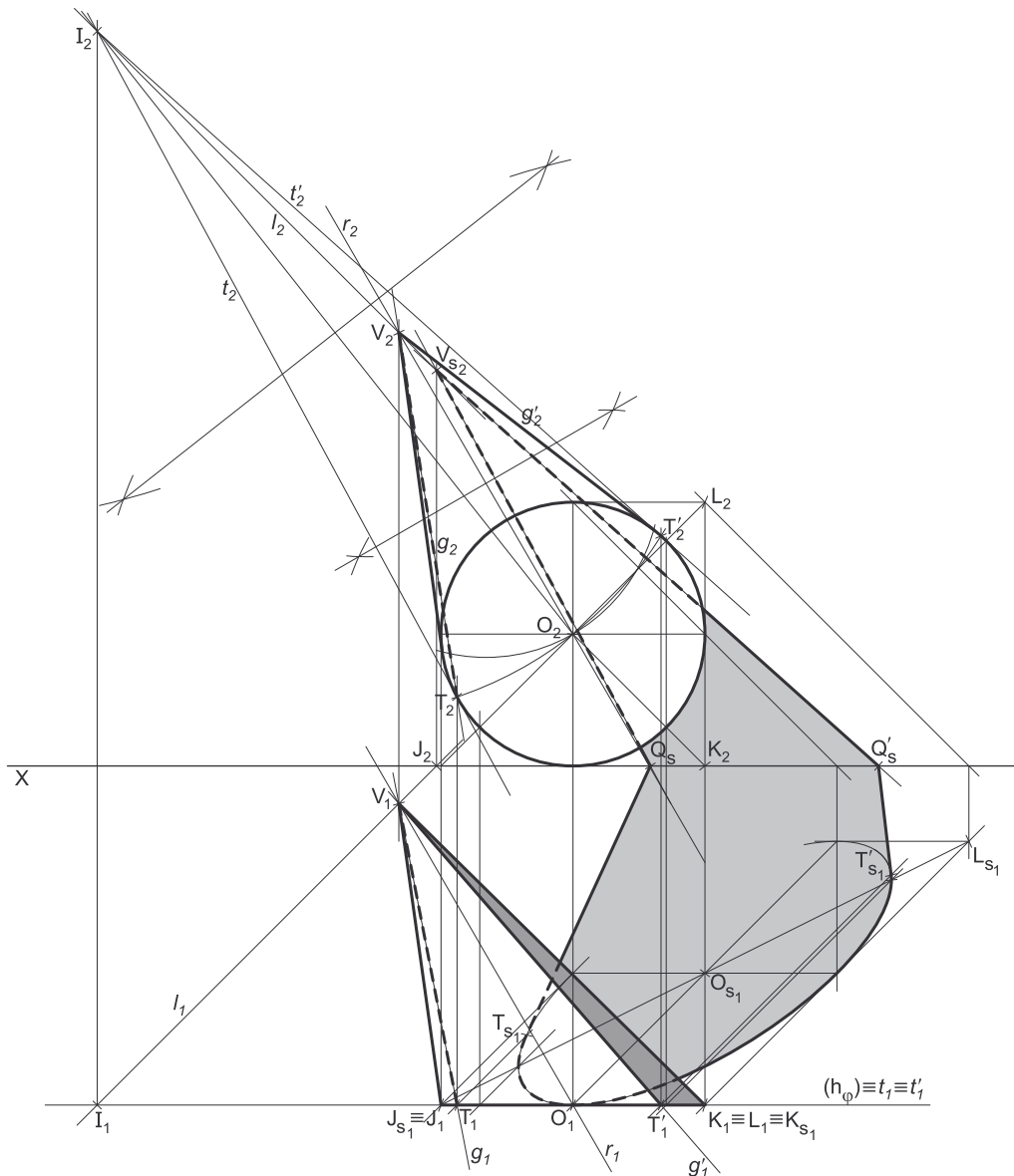
Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O traço horizontal do plano que contém a base do cone, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos **T** e **T'**, das retas **t** e **t'** e, ainda, dos traçados necessários à determinação da sombra do arco **TT'** nos planos de projeção.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

**925.**



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Dados:

Os dados do exercício não nos permitem representar o que quer que seja, de forma direta, sem alguns raciocínios que em seguida se expõem. Em primeiro lugar, o cone situa-se no  $1^{\text{a}}$  Diedro, pelo que tanto a base (que está contida num plano frontal) como o seu vértice têm de ter afastamento positivo. Assim, uma vez que o cone tem 8 cm de altura e que o vértice tem 1 cm de afastamento (é dado no enunciado), sabe-se imediatamente que o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base do cone) tem 9 cm de afastamento ( $1 + 8 = 9$ ). Este raciocínio permitiu-nos representar o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone, pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Em seguida, teve-se em atenção que a base, que está contida no plano  $\varphi$  é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o seu raio é igual à cota do seu centro (o ponto  $O$ ). Nesse sentido, o ponto  $O$  tem necessariamente 3,5 cm de cota, o que nos permitiu determinar a sua projeção frontal ( $O_2$ ). Por fim, o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal do ponto  $O$  ( $O_1$ ) está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ).

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

## Resolução:

### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a base do cone se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal (no Plano Frontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido (que é tangente ao eixo  $X$ ). A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, desenharam-se as projeções da reta  $r$  (a reta suporte do eixo do cone), passando pelas projeções homónimas do ponto  $O$  e com a direção dada no enunciado. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

A reta  $r$  é a reta suporte do eixo do cone e, assim, o ponto  $V$  é um ponto da reta  $r$ . O ponto  $V$  é, assim, o ponto da reta  $r$  que tem 1 cm de afastamento (é dado no enunciado), o que nos permitiu determinar as suas projeções, a partir da sua projeção frontal. As projeções do ponto  $V$  situam-se sobre as projeções homónimas da reta  $r$ .

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (que é  $V_2$ , a projeção frontal do ponto  $V$ ). O arco menor da circunferência que delimita a base (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **visível** em projeção frontal, pois a base é visível (como o enunciado pede expressamente).

### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto  $V$ ), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $V$ ) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ . O ponto  $I$  determinou-se de forma imediata a partir da sua projeção horizontal ( $I_1$ ), pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ).
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base do cone – o plano  $\varphi$ ).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_2$ , que é a projeção frontal do ponto  $I$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_2$  e  $T'_2$  (as projeções frontais dos pontos  $T$  e  $T'$ ).

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos  $T$  e  $T'$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ . Note que a geratriz  $[TV]$  é invisível em **projeção horizontal**, por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone (em projeção horizontal). Por outro lado, as duas geratrizes (as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ ) são, ambas, invisíveis em **projeção frontal**, por se situarem na parte invisível da superfície lateral do cone (em projeção frontal).

As geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor  $\overline{TT'}$** , bem como a base do cone. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco maior  $\overline{TT'}$**  está **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[TV\overline{TT'}]$ , que integra as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ , bem como o **arco maior  $\overline{TT'}$** .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em **projecção frontal**, a parte da superfície que está em sombra própria (a parte compreendida entre as projeções frontais das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  e que corresponde ao **arco maior  $\overline{TT'}$** ) é invisível na sua totalidade, pelo que, **em projecção frontal**, não existe qualquer **sombra própria** a assinalar.

Em **projecção horizontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz  $[T'V]$  e a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone. Assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projecção horizontal**, é a parte compreendida entre a projecção horizontal da geratriz  $[T'V]$  (o segmento de reta  $[T'_1V_1]$ ) e a projecção horizontal da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projecção horizontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projecção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projecção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $V_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $V$ .  $T_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $T$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $T$ .  $T'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $T'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $T'$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projecção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$T_{s_1}$  e  $T'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que, à partida, a sombra do **arco maior  $\overline{TT'}$**  não admite a existência de qualquer ponto de quebra. O mesmo já não acontece em relação às sombras dos extremos das geratrizes separatrizes luz/sombra. De facto, existe um ponto de quebra entre  $T_{s_1}$  e  $V_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projecção distintos), bem como existe um outro ponto de quebra entre  $T'_{s_1}$  e  $V_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projecção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $V_{s_2}$  e  $T_{s_1}$ , poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto  $V$  ou à sombra virtual do ponto  $T$ . No entanto, optou-se por um raciocínio que nos permite economizar traçado. O plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cone ao longo da geratriz  $[TV]$  interseca o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base) segundo a reta  $t$  – a reta  $t$  é, assim, uma reta frontal (de frente) desse plano. Acontece que a sombra projetada no Plano Frontal de Projecção da geratriz  $[TV]$  tem de estar sobre o traço frontal desse plano, que é, igualmente, uma reta frontal (de frente) do plano. Uma vez que retas frontais (de frente) de um mesmo plano são paralelas entre si, sabe-se que a sombra projetada no Plano Frontal de Projecção da geratriz  $[TV]$  é paralela à reta  $t$ .

Assim, por  $V_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $V$ , que se situa no **SPFS**), conduziu-se uma paralela à reta  $t$  (paralela à projecção frontal da reta  $t - t_2$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa o ponto  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[TV]$ ). O segmento  $[V_{s_2}Q_s]$  é a sombra projetada da geratriz  $[TV]$  no **SPFS**. A linha quebrada aberta  $[V_{s_2}Q_sT_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[TV]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

De forma semelhante, para determinar o ponto de quebra situado entre  $V_{s_2}$  e  $T'_{s_1}$ , recorreu-se ao plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cone ao longo da geratriz  $[T'V]$  – a sombra projetada, no Plano Frontal de Projecção, da geratriz  $[T'V]$  tem de estar sobre o traço frontal desse plano, que é necessariamente paralelo à reta  $t'$ . Assim, por  $V_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $V$ , que se situa no **SPFS**), conduziu-se uma paralela à reta  $t'$  (paralela à projecção frontal da reta  $t' - t'_2$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa o ponto  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[T'V]$ ). O segmento  $[V_{s_2}Q'_s]$  é a sombra projetada da geratriz  $[T'V]$  no **SPFS**. A linha quebrada aberta  $[V_{s_2}Q'_sT'_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[T'V]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra do **arco maior  $\overline{TT'}$**  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos  $T$  e  $T'$ ) se situam no mesmo Plano de Projecção. No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projecção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projecção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, as sombras dos extremos do arco situam-se suficientemente distantes do eixo  $X$  para se garantir que a sombra do arco não admite a existência de pontos de quebra, para além de que os dois pontos de quebra da sombra do cone já foram determinados.

Nesse sentido, é possível concluir que a sombra do **arco maior  $\overline{TT'}$**  se situa, na sua totalidade, no **SPHA** (onde se situam as sombras dos seus extremos) – a sua sombra será um **segmento de elipse**, cujo desenho requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente.

Assim, começou-se por inscrever o arco maior  $\overline{TT'}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo  $X$** , desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco maior  $\overline{TT'}$  corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam o arco  $\overline{TT'}$  na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam o arco maior  $\overline{TT'}$  permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projecção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo (o ponto  $O$ ) –  $O_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $O$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $O$ . A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Horizontal de Projecção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

O lado inferior do polígono (o segmento  $[JK]$ ) está contido no traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), que se situa no **SPHA**, pelo que a sua sombra (o segmento  $[J_{s_1}K_{s_1}]$ ) está coincidente com o próprio segmento. Em seguida, determinou-se a sombra do vértice superior e mais à direita do polígono (o ponto  $L$ ) – o ponto  $L_{s_1}$  é a sombra do ponto  $L$  no Plano Horizontal de Projecção.  $L_{s_1}$  situa-se no **SPHA**, pelo que é uma sombra real. As sombras dos lados verticais do polígono estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, teve-se em conta que a mediana fronto-horizontal do quadrado é paralela ao lado **[JK]** e passa pelo ponto **O** – nesse sentido, por **O<sub>s1</sub>** (a sombra real do ponto **O**) conduziu-se uma paralela ao segmento **[J<sub>s1</sub>K<sub>s1</sub>]**, que é a sombra da mediana fronto-horizontal do quadrado. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do polígono que é 3/4 do quadrado, tendo-se desenhado, também, a sombra da mediana vertical do quadrado – é o segmento de reta que passa por **O<sub>s1</sub>** (a sombra real do ponto **O**) e que é paralelo a **[K<sub>s1</sub>L<sub>s1</sub>]**.

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por **O<sub>s1</sub>** e têm extremos nos vértices do paralelogramo).

As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que o **arco maior TT'** corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções horizontais daqueles pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersejam as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**.

Aos **sete pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos **T** e **T'** (**T<sub>s1</sub>** e **T'<sub>s1</sub>**), o que perfaz um total de **nove pontos** – estes nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz **[TV]** em **T<sub>s1</sub>**, tal como é **concordante** com a sombra da geratriz **[T'V]** em **T'<sub>s1</sub>**.

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco **TT'**. Esses troços são os dois troços que se situam para cima de **T<sub>s1</sub>** (um deles) e para cima de **T'<sub>s1</sub>** (o outro). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado e pela linha quebrada que tem vértices em **T<sub>s1</sub>**, **Q<sub>s</sub>**, **V<sub>s2</sub>**, **Q'<sub>s</sub>** e **T'<sub>s1</sub>** – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

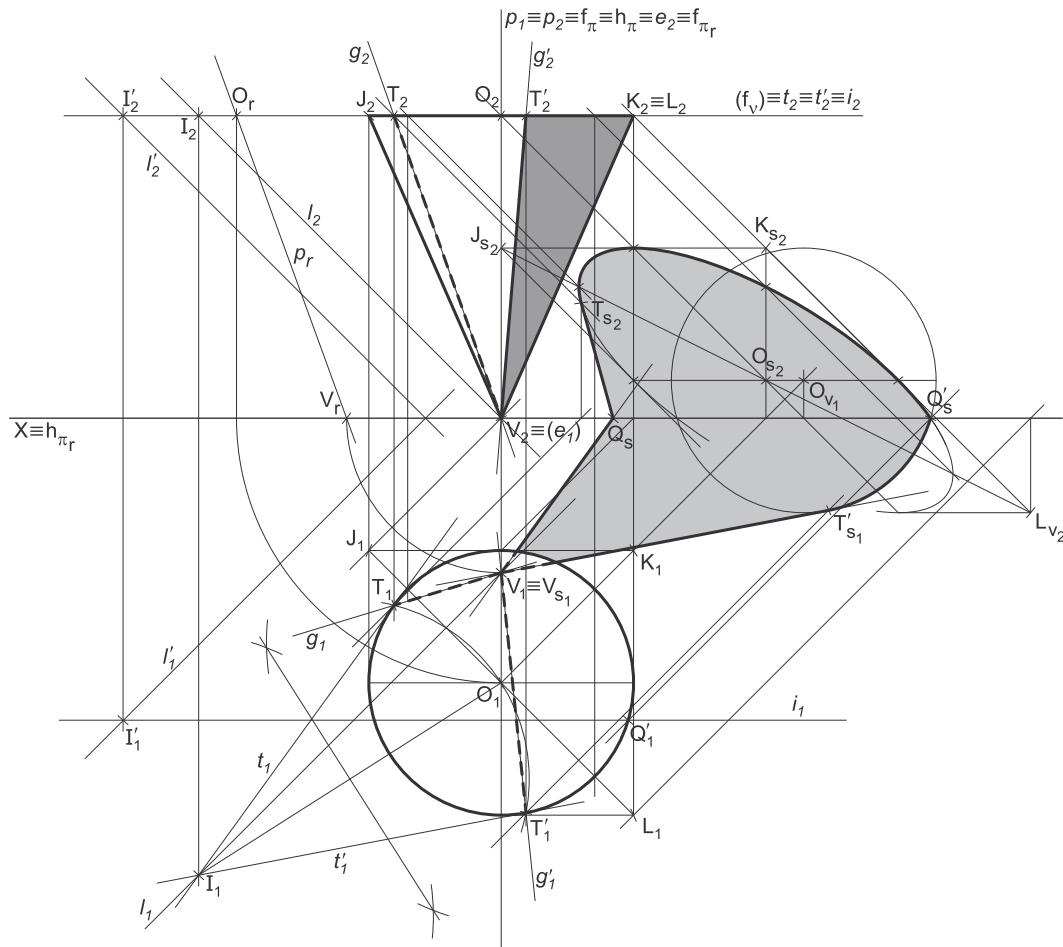
Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O traço horizontal do plano que contém a base do cone, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos **T** e **T'**, das retas **t** e **t'** e, ainda, dos traçados necessários à determinação da sombra do arco **TT'** no Plano Horizontal de Projeção.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

926.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone, pelo seu traço frontal ( $f_v$ ). O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base do cone se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, conduziu-se, pelo ponto **O**, a reta **p**, de perfil que contém o eixo do cone. É dado o ângulo que a reta **p** faz com o Plano Frontal de Projeção – esse ângulo está contido num plano que contém a reta **p** e que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção, ou seja, o plano de perfil que contém a reta **p**. Nesse sentido, representou-se, pelos seus traços, o plano  $\pi$ , o plano de perfil que contém a reta **p**. O ângulo que a reta **p** faz com o Plano Frontal de Projeção é, assim, o ângulo que a reta **p** faz com o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ), que é a reta de interseção do plano  $\pi$  com o Plano Frontal de Projeção.

Esse ângulo está contido no plano  $\pi$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo entre a reta **p** e o traço frontal do plano  $\pi$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pelo que se tem imediatamente  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . A charneira é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto  $O$ , o que nos permitiu determinar  $O_r$ . Em seguida, a partir de  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido), mediu-se o ângulo de  $20^\circ$  com  $f_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ , em rebatimento), o que nos permitiu desenhar a reta  $p_r$  (a reta  $p$  rebatida). Note que, das duas hipóteses para medir o ângulo de  $20^\circ$  a partir de  $O_r$ , apenas a que a resolução apresenta nos garante que o ponto  $V$  (que é o ponto de reta  $p$  que tem cota nula – o traço horizontal da reta  $p$ ) tem afastamento inferior ao ponto  $O$ , como o enunciado pede expressamente.

Nesse sentido, determinou-se  $V_r$  (o ponto  $V$  rebatido), que é o ponto da reta  $p_r$  que se situa sobre  $h_{\pi_r}$  ( $V_r$  é, em rebatimento, o traço horizontal da reta  $p$ ). Em seguida, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as duas projeções do ponto  $V$ .

Por fim, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto  $V$ ), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $V$ ) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ . O ponto  $I$  determinou-se de forma imediata a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ), pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base do cone – o plano  $v$ ).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_1$ , que é a projeção horizontal do ponto  $I$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_1$  e  $T'_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $T$  e  $T'$ ).

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos  $T$  e  $T'$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  – note que a geratriz  $[TV]$  é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção frontal).

As geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor  $\overline{TT'}$** , sendo que a base do cone também está iluminada. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco maior  $\overline{TT'}$**  está **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[TV\overline{TT'}]$ , que integra as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ , bem como o **arco maior  $\overline{TT'}$** .

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz  $[T'V]$  e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone – assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[T'V]$  (o segmento de reta  $[T'_2V_2]$ ) e a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone.

Em **projeção horizontal**, a superfície lateral do cone é invisível da sua totalidade – assim, a parte da superfície que está em sombra própria (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  e que corresponde ao **arco maior  $\overline{TT'}$** ) é invisível, pelo que, **em projeção horizontal**, não existe qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. O ponto  $V$  é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $V_{s_1} \equiv V_1$ .  $T_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $T$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $T$ .  $T'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $T'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $T'$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

$T_{s_2}$  e  $T'_{s_1}$  situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra do **arco maior**  $\widehat{TT'}$  admite necessariamente a existência de um ponto de quebra.  $V_{s_1}$  e  $T_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[T'V]$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[V_{s_1}T'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[T'V]$  e situa-se no **SPHA**. O mesmo já não acontece em relação às sombras dos extremos da geratriz  $[TV]$ . De facto, existe um ponto de quebra entre  $V_{s_1}$  e  $T_{s_2}$ , que se situam em Planos de Projeção distintos.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $V_{s_1}$  e  $T_{s_2}$  poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto  $V$  ou à sombra virtual do ponto  $T$ . No entanto, optou-se por um raciocínio que nos permite economizar traçado. O plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cone ao longo da geratriz  $[TV]$  intersesta o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base) segundo a reta  $t$  – a reta  $t$  é, assim, uma reta horizontal (de nível) desse plano. Acontece que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da geratriz  $[TV]$  tem de estar sobre o traço horizontal desse plano, que é, igualmente, uma reta horizontal (de nível) do plano. Uma vez que retas horizontais (de nível) de um mesmo plano são paralelas entre si, sabe-se que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da geratriz  $[TV]$  é paralela à reta  $t$ .

Assim, por  $V_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $V$ , que se situa no **SPHA**), conduziu-se uma paralela à reta  $t$  (paralela à projeção horizontal da reta  $t - t_1$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa o ponto  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[TV]$ ). O segmento  $[V_{s_1}Q_s]$  é a sombra projetada da geratriz  $[TV]$  no **SPHA**. A linha quebrada aberta  $[V_{s_1}Q_sT_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[TV]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\circ}$  Diedro).

Como atrás se referiu, a sombra do **arco maior**  $\widehat{TT'}$  admite necessariamente a existência de um ponto de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos  $T$  e  $T'$ ) se situam em Planos de Projeção distintos. Para determinar o ponto de quebra da sombra do **arco maior**  $\widehat{TT'}$  (que é um arco de circunferência), e à semelhança de situações idênticas, há que recorrer ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo  $X$  e o raio luminoso  $l'$ , passante (concorrente com o eixo  $X$ ). O raio luminoso  $l'$  está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $v$  (o plano que contém a base do cone) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $v$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $v$  é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizantal. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com o plano  $v$  – o ponto  $I'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $I'$ ) e por uma direção (é fronto-horizantal).

A reta  $i$  é **secante** ao **arco maior**  $\widehat{TT'}$  – a reta  $i$  corta o **arco maior**  $\widehat{TT'}$  no ponto  $Q'$ . A sombra do ponto  $Q'$  (que se situa no eixo  $X$ ) é, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior**  $\widehat{TT'}$ . Note que não se representou a projeção frontal do ponto  $Q'$  (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por esta não ser necessária. Em seguida, pela projeção horizontal do ponto  $Q'$ , conduziu-se a projeção horizontal do raio luminoso que passa por  $Q'$  e determinou-se a sua sombra, que se situa no eixo  $X$  –  $Q'_s$ .  $Q'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior**  $\widehat{TT'}$ .

O **arco**  $\widehat{T'Q'}$  produz sombra no **SPFS** e o **arco**  $\widehat{T'Q'}$  produz sombra no **SPHA**.

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

Trata-se de uma direção luminosa e o arco  $\widehat{T'Q'}$  está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a **sombra projetada do arco**  $\widehat{T'Q'}$  no **Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um arco de circunferência geometricamente igual ao **arco**  $\widehat{T'Q'}$ . Assim, determinou-se a sombra do ponto  $O$  no Plano Horizontal de Projeção, conduzindo, por  $O$ , um raio luminoso com a direção luminosa convencional. A sombra do ponto  $O$  no Plano Horizontal de Projeção é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa e situa-se no **SPHP**, pelo que é uma sombra virtual – é  $O_{v_1}$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_{v_1}$  e com 3,5 cm de raio (o raio da base), desenhou-se uma circunferência que é a sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção. A parte dessa circunferência que está compreendida entre os pontos  $Q'_s$  e  $T'_{s_1}$  (o arco dessa circunferência que tem extremos em  $Q'_s$  e em  $T'_{s_1}$ ) é a sombra projetada do arco  $\widehat{T'Q'}$  no **SPHA**. Sublinha-se que o arco  $\widehat{T'_{s_1}Q'_s}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[T'V]$  no ponto  $T'_{s_1}$ .

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco**  $\widehat{T'Q'}$  no **Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício 835. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Para determinar os pontos necessários a um desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva, comecemos por inscrever o **arco**  $\widehat{T'Q'}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X** – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco  $\widehat{T'Q'}$  corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam o arco  $\widehat{T'Q'}$  na sua totalidade).

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco  $\widehat{T'Q'}$  na parte correspondente desse quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam o arco  $\widehat{T'Q'}$  permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo (o ponto  $O$ ) –  $O_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $O$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $O$ . A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Frontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

O lado de menor afastamento do polígono é o segmento  $[JK]$  – determinaram-se as sombras reais dos pontos  $J$  e  $K$ , o que nos permitiu determinar a sombra do lado  $[JK]$  no Plano Frontal de Projeção (o segmento  $[J_{s_2}K_{s_2}]$ ). Em seguida, determinou-se a sombra do vértice de maior afastamento e mais à direita do polígono (o ponto  $L$ ) – o ponto  $L_{v_2}$  é a sombra do ponto  $L$  no Plano Frontal de Projeção. Note que  $L_{v_2}$  se situa no **SPFI**, pelo que é uma sombra virtual. As sombras dos lados de topo do polígono estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos.

Em seguida, teve-se em conta que a mediana fronto-horizontal do quadrado é paralela ao lado  $[JK]$  e passa pelo ponto  $O$  – nesse sentido, por  $O_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $O$ ) conduziu-se uma paralela ao segmento  $[J_{s_2}K_{s_2}]$ , que é a sombra da mediana fronto-horizontal do quadrado. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do polígono que é 3/4 do quadrado, tendo-se desenhado, também, a sombra da mediana de topo do quadrado – é o segmento de reta que passa por  $O_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $O$ ) e que é paralelo a  $[K_{s_2}L_{v_2}]$ .

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O_{s_2}$  e têm extremos nos vértices do paralelogramo).

As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que o arco  $\widehat{T'Q'}$  corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções frontais daqueles pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersejam as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**.

Aos **sete pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos  $Q'$  e  $T$  ( $Q'_s$  e  $T_{s_2}$ ), o que perfaz um total de **nove pontos** – estes nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz  $[TV]$  em  $T_{s_2}$ .

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{T'Q'}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para baixo de  $T_{s_2}$  (um deles) e para baixo de  $Q'_s$  (o outro). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado, pelo arco de circunferência  $T'_s Q'_s$  e pela linha quebrada que tem vértices em  $T'_{s_1}$ ,  $V_{s_1}$ ,  $Q_s$  e  $T_{s_2}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em projeção horizontal, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O traço frontal do plano que contém a base do cone, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da reta  $p$  e do plano  $\pi$ , dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  (para a determinação das projeções do vértice do cone), das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos  $T$  e  $T'$ , das retas  $t$  e  $t'$  e, ainda, dos traçados necessários à determinação da sombra do arco  $\widehat{TT'}$  nos planos de projeção.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 927.

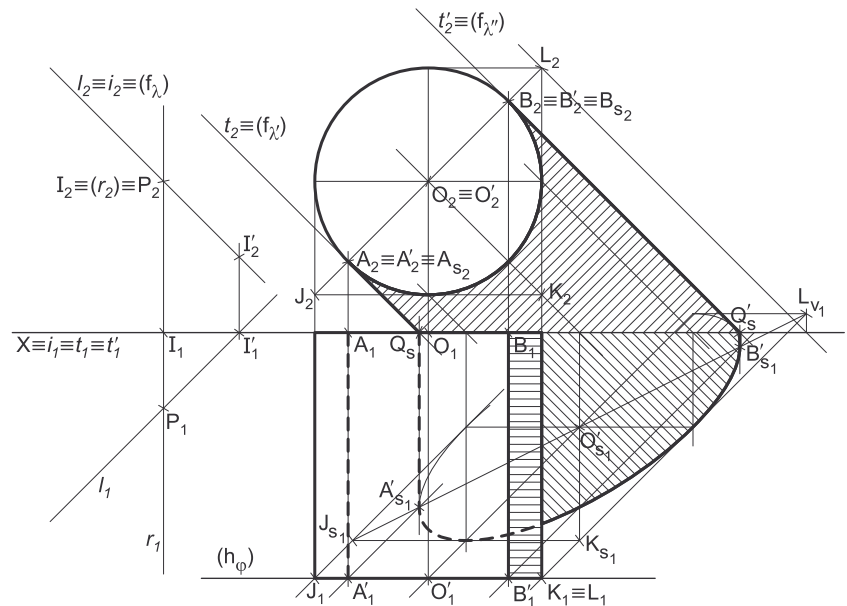
**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do cilindro:*

A base de menor afastamento do cilindro está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base de menor afastamento do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X** (corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases e que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das bases. Assim, porque o cilindro tem 6,5 cm de altura e a sua base de menor afastamento está contida no Plano Frontal de Projeção, o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 6,5 cm de afastamento ( $0 + 6,5 = 6,5$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a outra base do sólido) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.



Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O'**, o centro da base de maior afastamento do sólido. Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal aos planos das bases – trata-se de uma reta de topo (uma reta projetante frontal). Assim, os pontos **O** (o centro da base de menor afastamento) e o ponto **O'** (o centro da base de maior afastamento) situam-se na mesma reta projetante frontal, pelo que se tem imediatamente **O**<sub>2</sub>  $\equiv$  **O'**<sub>2</sub>. Por outro lado, o ponto **O'** é um ponto do plano  $\varphi$  (que é um plano projetante horizontal), pelo que **O'**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O'**) se situa necessariamente sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  (**h** <sub>$\varphi$</sub> ).

Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes frontais, a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido está coincidente com a projeção frontal da sua base de menor afastamento. A projeção horizontal desta base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  (**h** <sub>$\varphi$</sub> ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

Por fim, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior e menor abscissa das projeções horizontais das duas bases).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **t'** (de topo) paralela às geratrizes do cilindro, e a reta **l** (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra
2. Determinou-se a reta **i**, que é a reta de interseção do plano definido pelas retas **t'** e **l** (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base de menor afastamento, que está contida no Plano Frontal de Projeção). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **t'** com o Plano Frontal de Projeção) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o Plano Frontal de Projeção).

Note que, neste caso, o ponto **I** é o traço frontal da reta **t** e o ponto **I'** é o traço frontal do raio luminoso **l**. Assim, neste caso, a reta **i** é, imediatamente, o traço frontal do plano  $\lambda$  (**f** <sub>$\lambda$</sub> ), o que se identificou no desenho.

3. Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta **i** – as retas **t** e **t'**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base) que são paralelas a uma reta dada (que é a projeção frontal da reta  $i - i_2$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $B$ ).

Note que, neste caso, as retas  $t$  e  $t'$  são, imediatamente, os traços frontais dos dois **planos tangentes luz/sombra** ( $f_{\lambda'}$  e  $f_{\lambda''}$ ), pois o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro é o Plano Frontal de Projeção – esse facto foi identificado imediatamente no desenho.

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  – note que o ponto  $A'$  é o extremo da geratriz  $[AA']$  que se situa na base de maior afastamento do cilindro, tal como o ponto  $B'$  é o extremo da geratriz  $[BB']$  que se situa na base de maior afastamento do cilindro. Salienta-se que a geratriz  $[AA']$  é invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cilindro).

As geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência  $\overline{AB}$  mais à esquerda. A base de maior afastamento do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência  $\overline{AB}$  mais à direita está **em sombra**, assim, como a base de menor afastamento do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[\overline{AB} \ B'A']$ , que integra as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ , bem como a **semicircunferência  $\overline{AB}$  mais à esquerda** (da base de menor afastamento) e a **semicircunferência  $\overline{A'B'}$  mais à direita** (da base de maior afastamento).

Em **projeção frontal**, e uma vez que as geratrizes da superfície são projetantes frontais, toda a superfície lateral do cilindro é invisível. Uma vez que a base de menor afastamento do sólido também é invisível em projeção frontal, não existe qualquer **sombra própria** visível a assinalar, em projeção frontal.

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[BB']$  (o segmento de reta  $[B_1B'_1]$ ) e a projeção horizontal da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base de menor afastamento (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal, pois é projetante horizontal.

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com tracejado, que se efetuou paralelamente ao eixo  $X$ , em projeção horizontal.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos  $A$  e  $B$  situam-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $A_{s_2} \equiv A_2$  e  $B_{s_2} \equiv B_2$ .  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $A'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A'$ .  $B'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $B'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $B'$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

Os pontos  $A$  e  $B$  situam-se no **SPFS** (tal como as suas sombras –  $A_{s_2}$  e  $B_{s_2}$ ) e tal como a própria base de menor afastamento do cilindro se situa no **SPFS** – assim, a sombra da semicircunferência  $\overline{AB}$  mais à esquerda (da base de menor afastamento) está coincidente com o próprio arco  $\overline{AB}$ .  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que, à partida, a sombra da semicircunferência  $\overline{A'B'}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) não admite a existência de qualquer ponto de quebra.

$A'_{s_1}$  situa-se no **SPHA** e  $A_{s_2}$  situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre  $A'_{s_1}$  e  $A_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).  $B'_{s_1}$  situa-se no **SPHA** e  $B_{s_2}$  situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre  $B'_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_2}$  e  $A'_{s_1}$  teve-se em conta que a geratriz  $[AA']$  é um segmento de reta de topo e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A'_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $A'$ , que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_1A'_1]$  (a projeção horizontal do segmento  $[AA']$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[AA']$ ). A linha quebrada aberta  $[A_{s_2}Q_sA'_{s_1}]$  é a **sombra real** da geratriz  $[AA']$  nos planos de projeção.

De forma semelhante, para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s_2}$  e  $B'_{s_1}$  teve-se em igualmente conta que a geratriz  $[BB']$  é outro segmento de reta de topo e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B'_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $B'$ , que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a  $[B_1B'_1]$  (a projeção horizontal do segmento  $[BB']$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[BB']$ ). A linha quebrada aberta  $[B_{s_2}Q'_sB'_{s_1}]$  é a **sombra real** da geratriz  $[BB']$  nos planos de projeção.

*Determinação da sombra projetada da base de maior afastamento do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:*

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\overline{A'B'}$  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos  $A'$  e  $B'$ ) se situam no mesmo Plano de Projeção. No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, atendendo a que os dois pontos de quebra da sombra do cilindro já foram determinados, é possível garantir que a sombra da semicircunferência  $\overline{A'B'}$  não admite a existência de pontos de quebra.

Nesse sentido, é possível concluir que a sombra da semicircunferência  $\overline{A'B'}$  se situa, na sua totalidade, no **SPHA** (onde se situam as sombras dos seus extremos) – a sua sombra será um **segmento de elipse** – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, começou-se por inscrever a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo que é a base de maior afastamento (o ponto  $O'$ ) –  $O'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $O'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $O'$ . A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Horizontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

Em seguida, determinaram-se as sombras no Plano Horizontal de Projeção dos extremos do lado inferior do quadrado – o segmento  $[JK]$ .  $J_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $J$  e  $K_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $K$ . Assim, o segmento  $[J_{s_1}K_{s_1}]$  é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção do segmento  $[JK]$ . Em seguida, determinou-se a sombra do vértice superior e mais à direita do polígono (o ponto  $L$ ) – o ponto  $L_{v_1}$  é a sombra do ponto  $L$  no Plano Horizontal de Projeção.  $L_{v_1}$  situa-se no **SPHP**, pelo que é uma sombra virtual. As sombras dos lados verticais do polígono estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos.

Em seguida, teve-se em conta que a mediana fronto-horizontal do quadrado é paralela ao lado  $[JK]$  e passa pelo ponto  $O'$  – nesse sentido, por  $O'_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $O'$ ) conduziu-se uma paralela ao segmento  $[J_{s_1}K_{s_1}]$ , que é a sombra da mediana fronto-horizontal do quadrado. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do polígono que é 3/4 do quadrado, tendo-se desenhado, também, a sombra da mediana vertical do quadrado – é o segmento de reta que passa por  $O'_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $O'$ ) e que é paralelo a  $[K_{s_1}L_{v_1}]$ .

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O'_{s_1}$  e têm extremos nos vértices do paralelogramo).

As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções horizontais daqueles pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**.

Aos **sete pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos  $A'$  e  $B'$  ( $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$ , respetivamente), o que perfaz um total de **nove pontos** – estes nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  em  $A'_{s_1}$ , tal como é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  em  $B'_{s_1}$ .

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para cima de  $A'_{s_1}$  (um deles) e para cima de  $B'_{s_1}$  (o outro). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado, pela linha quebrada aberta  $[A_2Q_sA'_{s_1}]$ , pela semicircunferência  $A_2B_2$  e pela linha quebrada aberta  $[B_2Q_sB'_{s_1}]$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cilindro nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cilindro é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cilindro).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com tracejado. Tendo em conta que **se trata da direção luminosa convencional**, o tracejado foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em ambas as projeções – o tracejado faz ângulos de 45° (de abertura para a **direita**) com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido), no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes, das retas  $t$  e  $t'$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 928.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **L** (o foco luminoso), pelas respectivas projeções, em função dos dados.

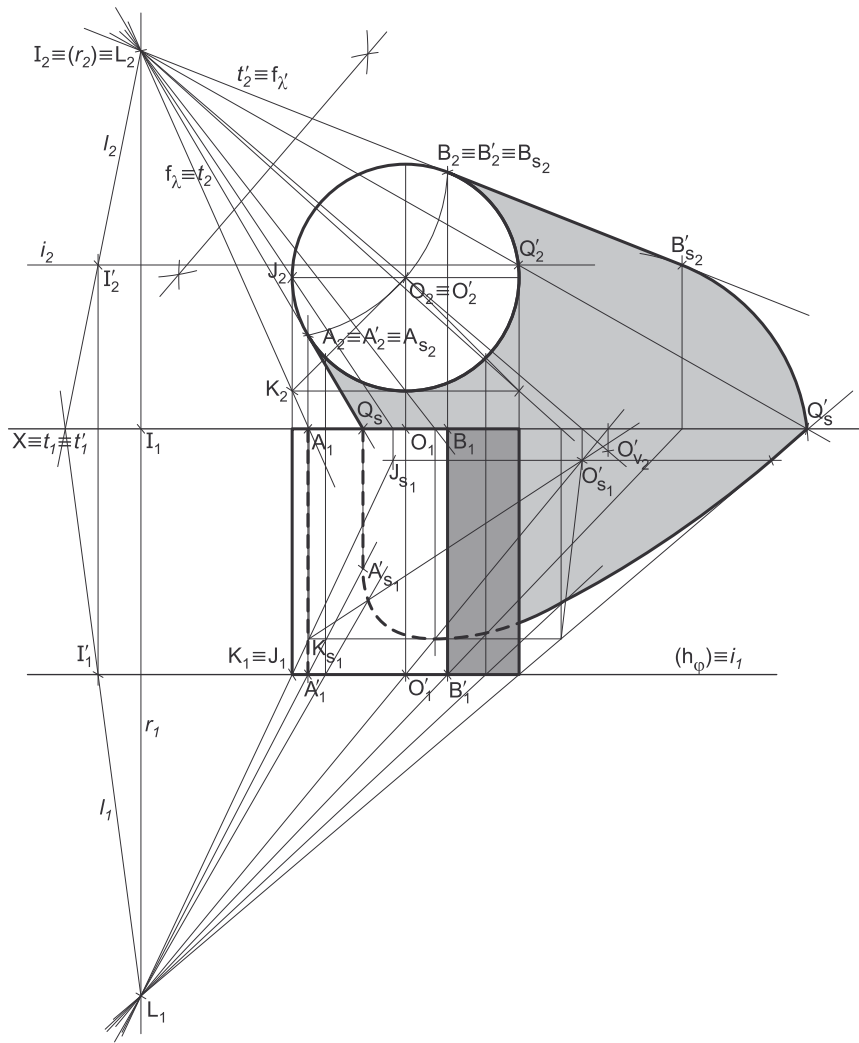
### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

A base de menor afastamento do cilindro está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base de menor afastamento do sólido. A projeção horizontal da base de menor afastamento do sólido reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X** (corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das bases. Assim, porque o cilindro tem 6,5 cm de altura e a sua base de menor afastamento está contida no Plano Frontal de Projeção, o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 6,5 cm de afastamento ( $0 + 6,5 = 6,5$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a outra base do sólido) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O'**, o centro da base de maior afastamento do sólido. Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal aos planos das bases – trata-se de uma reta de topo (uma reta projetante frontal). Assim, os pontos **O** (o centro da base de menor afastamento) e o ponto **O'** (o centro da base de maior afastamento) situam-se na mesma reta projetante frontal, pelo que se tem imediatamente **O**<sub>2</sub>  $\equiv$  **O'**<sub>2</sub>. Por outro lado, o ponto **O'** é um ponto do plano  $\varphi$  (que é um plano projetante horizontal), pelo que **O'**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O'**) se situa necessariamente sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  (**h** <sub>$\varphi$</sub> ).



Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes frontais, a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido está coincidente com a projeção frontal da sua base de menor afastamento. A projeção horizontal desta base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  (**h** <sub>$\varphi$</sub> ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

Por fim, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior de menor abcissa das projeções horizontais das duas bases).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo foco luminoso, uma reta paralela às geratrizes do cilindro – a reta **r**; **2.** determina-se o ponto de interseção da reta **r** com o plano da base (de referência) – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo foco luminoso (o ponto **L**), uma reta paralela às geratrizes do sólido – a reta **r**, que está definida por um ponto (o ponto **L**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro – é uma reta de topo).
2. Determinou-se o ponto de interseção a reta **r** com o plano da base (de referência) – o ponto **I**. Considerou-se que a base de referência é a base de menor afastamento do cilindro. Uma vez que a base de referência do cilindro está contida no Plano Frontal de Projeção, o ponto **I** é, imediatamente, o traço frontal da reta **i**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro – as retas **t** e **t'**. As retas **t** e **t'** são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o Plano Frontal de Projeção (o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro) pelo que, neste caso, as retas **t** e **t'** são, imediatamente, os traços frontais dos planos tangentes luz/sombra  $\lambda$  e  $\lambda'$  (o que se identificou no desenho).

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto **I**<sub>2</sub>, que é a projeção frontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **A**<sub>2</sub> e **B**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**).

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base de menor afastamento do cilindro nos pontos **A** e **B**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[AA']** e **[BB']** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[AA']** e **[BB']** – note que o ponto **A'** é o extremo da geratriz **[AA']** que se situa na base de maior afastamento do cilindro, tal como o ponto **B'** é o extremo da geratriz **[BB']** que se situa na base de maior afastamento do cilindro. As duas geratrizes são invisíveis em projeção frontal (são projetantes frontais) e a geratriz **[AA']** é invisível em projeção horizontal, por se situar na parte invisível (em projeção horizontal) da superfície lateral do cilindro.

As geratrizes **[AA']** e **[BB']** separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor AB** (da base de menor afastamento). A base de maior afastamento do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde ao **arco maior AB** da base de menor afastamento está **em sombra**, assim, como a base de menor afastamento do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[AB B'A']**, que integra as geratrizes **[AA']** e **[BB']**, bem como o **arco menor AB** (da base de menor afastamento) e o **arco maior B'A'** (da base de maior afastamento).

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz **[BB']** e a projeção horizontal da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base de menor afastamento (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal (por ser projetante horizontal).

Em **projeção frontal**, a superfície lateral do cilindro é invisível na sua totalidade (pois é uma superfície projetante frontal), pelo que a parte dessa superfície que está em sombra é igualmente invisível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções frontais das geratrizes **[AA']** e **[BB']** e que corresponde ao **arco maior AB**). A base de menor afastamento está em sombra, mas é invisível em projeção frontal. Tendo em conta que a base de maior afastamento (que é visível em projeção frontal) está iluminada, em projeção frontal não há qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma mancha clara e uniforme (em projeção horizontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos **A** e **B** situam-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente **A<sub>s2</sub> ≡ A<sub>2</sub>** e **B<sub>s2</sub> ≡ B<sub>2</sub>**. **A'<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**. **B'<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

Os pontos **A** e **B** situam-se no **SPFS** (tal como as suas sombras – **A<sub>s2</sub>** e **B<sub>s2</sub>**) e tal como a própria base de menor afastamento do cilindro se situa no **SPFS** – assim, a sombra do **arco menor AB** (da base de menor afastamento) está coincidente com o próprio arco **AB**. **A'<sub>s1</sub>** e **B'<sub>s2</sub>** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra do **arco maior A'B'** (que integra a linha separatriz luz/sombra) admite necessariamente a existência de um ponto de quebra.

**B<sub>s2</sub>** e **B'<sub>s2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz **[BB']** não admite ponto de quebra – o segmento **[B<sub>s2</sub>B'<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[BB']** e situa-se no **SPFS**.

**A'<sub>s1</sub>** situa-se no **SPHA** e **A<sub>s2</sub>** situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre **A'<sub>s1</sub>** e **A<sub>s2</sub>** (que se situam em Planos de Projeção distintos). Para determinar este ponto de quebra teve-se em conta que a geratriz **[AA']** é um segmento de reta de topo e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por **A'<sub>s1</sub>** (a sombra real do ponto **A'**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[A<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]** (a projeção horizontal do segmento **[AA']**) até ao eixo **X**, onde se situa **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AA']**). A linha quebrada aberta **[A<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>A'<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** da geratriz **[AA']** nos planos de projeção.

Após os procedimentos expostos, foi possível desenhar as sombras projetadas das duas geratrizes. No entanto, há que desenhar a sombra do **arco maior A'B'** (que integra a linha separatriz luz/sombra) – note que já foi determinada a sombra do **arco menor AB** (que também integra a linha separatriz luz/sombra), que está coincidente com o próprio arco (como atrás se referiu).

*Determinação da sombra projetada da base de maior afastamento do cilindro:*

Para desenhar a sombra do **arco maior A'B'** (que é um arco de circunferência), e tal como referido em situações semelhantes, o **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo (ou circunferência ou arco de circunferência) consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo  $X$  e o raio luminoso  $l$ , passante (concorrente com o eixo  $X$ ). O raio luminoso  $l$  está definido por dois pontos – o foco luminoso  $L$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  (que não se identificou). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\varphi$  (o plano que contém o **arco maior**  $\widehat{A'B'}$ ) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $\varphi$  é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizonta. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $\varphi$  – o ponto  $I'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $I'$ ) e por uma direção (é fronto-horizonta).

A reta  $i$  é secante ao **arco maior**  $\widehat{A'B'}$ , pelo que a sombra do arco admite a existência de pontos de quebra. A reta  $i$  corta o **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  no ponto  $Q'$  – a sombra do ponto  $Q'$  será, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior**  $\widehat{A'B'}$ . Note que não se determinou a projeção horizontal do ponto  $Q'$  (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por esta não ser necessária à resolução do exercício. Assim, conduziu-se, pela projeção frontal do ponto  $Q'$  ( $Q'_2$ ) a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se a sombra do ponto  $Q'$  ( $Q'_s$ ), no eixo  $X$ . O ponto  $Q'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra do arco maior  $\widehat{A'B'}$ .

O arco  $\widehat{B'Q'}$  produz sombra no **SPFS** e o arco  $\widehat{A'Q'}$  produz sombra no **SPHA**. A sombra que o arco  $\widehat{B'Q'}$  produz no **SPFS** é um arco de circunferência. A sombra que o arco  $\widehat{A'Q'}$  produz no **SPHA** é um segmento de uma **oval**.

*Determinação da sombra projetada da base de maior afastamento do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

A sombra projetada do arco  $\widehat{B'Q'}$  no **SPFS** é necessariamente um outro arco de circunferência, ampliado em relação ao arco  $\widehat{B'Q'}$ . Começamos por determinar o centro desse outro arco, que é a sombra do ponto  $O'$  no Plano Frontal de Projeção –  $O'_{v_2}$  é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $O'$  e situa-se no **SPFI**, pelo que é a sombra virtual do ponto  $O'$ . Determinemos o raio desse outro arco, recorrendo a um ponto do arco  $\widehat{B'Q'}$ . Já temos dois pontos que são sombras de pontos do arco – as sombras dos seus extremos ( $Q'_s$  e  $B'_{s_2}$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_{v_2}$  e com raio até  $Q'_s$  ou  $B'_{s_2}$ , desenhou-se um arco de circunferência, que é a sombra do arco  $\widehat{B'Q'}$ . Note que o arco  $\widehat{B'_{s_2}Q'_s}$  é **concordante** com o segmento  $[B_{s_2}B'_{s_2}]$  (a sombra da geratriz  $(\widehat{BB'})$ ) em  $B'_{s_2}$ .

*Determinação da sombra projetada da base de maior afastamento do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:*

A sombra projetada do arco  $\widehat{A'Q'}$  no **SPHA** é um segmento de uma **oval**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **oval** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **837**.

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco  $\widehat{A'Q'}$  num «meio quadrado» de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as partes correspondentes das diagonais e medianas do quadrado. A semicircunferência (da qual o arco  $\widehat{A'Q'}$  é uma parte) intersesta aquelas linhas (as partes das diagonais e das medianas do quadrado que estão dentro do «meio quadrado») em cinco pontos, pontos esses cujas sombras serão, imediatamente, **cinco pontos da oval**. Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, bem como das linhas atrás referidas.

A sombra do «meio quadrado» (que é um retângulo) no Plano Horizontal de Projeção é um trapézio. A sombra do «meio quadrado» determinou-se a partir das sombras dos seus dois vértices mais à esquerda – os pontos  $J$  (o extremo esquerdo do diâmetro fronto-horizonta da semicircunferência) e  $K$  (o vértice inferior e de maior abscissa do polígono).  $J_{s_1}$  e  $K_{s_1}$  são as sombras reais dos vértices  $J$  e  $K$  –  $J_{s_1}$  e  $K_{s_1}$  situam-se no **SPHA**. O lado  $[JK]$  é vertical e a sua sombra está contida no traço horizontal do plano luz/sombra que contém o segmento  $[JK]$  – trata-se de um plano vertical (projetante horizontal). Assim, e como é possível observar, a sombra do lado  $[JK]$  está sobre a projeção horizontal dos raios luminosos que passam pelos dois pontos (que não se identificaram).

De forma semelhante, a sombra do outro lado vertical do quadrado (que é paralelo a  $[JK]$ ) está igualmente sobre a projeção horizontal dos raios luminosos que passam pelos respetivos vértices.  $J$  é o vértice mais à esquerda de um lado fronto-horizonta do «meio quadrado» – a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção desse lado (o lado superior do «meio quadrado») é necessariamente paralela a esse lado, pelo que a sombra projetada desse lado é fronto-horizonta e passa por  $J_{s_1}$ . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a sombra projetada do lado superior do «meio quadrado» e, dessa forma, determinar a sombra de mais um vértice do quadrado (o extremo direito do seu lado superior), sobre a sombra do lado paralelo a  $[JK]$ . Note que  $J_{s_1}$  e o outro extremo do lado fronto-horizonta que passa por  $J_{s_1}$  serão, imediatamente, **dois pontos** do segmento da oval. Repetiu-se o processo para o lado inferior do «meio quadrado», que é igualmente fronto-horizonta – a sua sombra é também fronto-horizonta e passa por  $K_{s_1}$ , o que nos permitiu determinar a sombra do quarto vértice do «meio quadrado» e desenhar o trapézio que é a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, determinou-se a sombra real do centro do círculo ( $O'_{s_1}$ ), que se situa no **SPHA** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $O'$  – note que  $O'_{s_1}$  se situa necessariamente sobre a sombra do lado superior do «meio quadrado». Em seguida, desenhou-se a mediana do trapézio que passa por  $O'_{s_1}$  (e que corresponde à sombra da mediana vertical do «meio quadrado»). Essa mediana está contida numa reta que passa por  $O'_{s_1}$  e por  $L_1$  (a projeção horizontal do foco luminoso  $L$ ) – na prática, essa mediana situa-se sobre o traço horizontal do plano luz/sombra que contém a mediana vertical do quadrado (que é um plano vertical que passa pelo ponto  $L$  e pelo ponto  $O'$ ). O ponto em que esta mediana se apoia no lado inferior do trapézio é imediatamente **um ponto** do segmento da oval. Os dois vértices superiores do trapézio são mais **dois pontos** do segmento da oval (como acima se referiu), pelo que já temos **três pontos** do segmento da oval. Estes três pontos são os pontos em que o segmento da oval será tangente aos lados correspondentes do trapézio (são as sombras dos pontos em que o círculo é tangente aos lados correspondentes do «meio quadrado»).

Em seguida, desenharam-se os dois segmentos de reta que têm um extremo em  $O'_{s_1}$  e o outro extremo nos vértices inferiores do trapézio – esses segmentos de reta são as sombras das partes das diagonais do quadrado que se situam no «meio quadrado». Em seguida, transportaram-se os dois pontos em que a circunferência (que delimita o círculo) corta essas linhas do «meio quadrado» para as respetivas sombras no trapézio, com o recurso às projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos pontos (e que correspondem aos planos luz/sombra que passam por esses pontos). Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos** do segmento da oval.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Aos **cinco pontos** determinados acresce o ponto de quebra (o ponto  $\mathbf{Q}'_s$ ), bem como a sombra do ponto  $\mathbf{A}'$  ( $\mathbf{A}'_{s_1}$ ), o que perfaz um total de **sete pontos** do segmento da oval – estes pontos permitem-nos um desenho relativamente preciso da curva, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da oval aos lados do trapézio – o segmento da oval é a sombra projetada da semicircunferência no Plano Horizontal de Projeção. Note que o segmento da oval é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[\mathbf{AA}']$  em  $\mathbf{A}'_{s_1}$ .

Tenha em conta que existe um troço da oval que se situa para cima de  $\mathbf{A}'_{s_1}$  (o arco da oval que tem extremos em  $\mathbf{A}'_{s_1}$  e em  $\mathbf{J}_{s_1}$ ), que se desenhou a **leve** (é uma sombra virtual) e que, na prática, não integra a sombra do arco  $\mathbf{A}'\mathbf{Q}'$ . A necessidade deste troço foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através dele é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivesse desenhado este pequeno troço, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho do segmento da oval permitiu-nos concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de oval desenhado, pelo arco de circunferência  $\mathbf{B}'_2\mathbf{Q}'_s$ , pelo segmento de reta  $[\mathbf{B}_2\mathbf{B}'_2]$ , pelo arco de circunferência  $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2$  e, ainda, pela linha quebrada aberta  $[\mathbf{A}_{s_2}\mathbf{Q}_s\mathbf{A}'_{s_1}]$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cilindro nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cilindro é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cilindro).

Após o desenho do contorno da sombra (no qual se atendeu às situações de invisibilidades da sombra), preencheu-se a área **visível** da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo  $\mathbf{X}$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao recurso ao plano luz/sombra passante, das retas  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{t}'$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de oval), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 929.

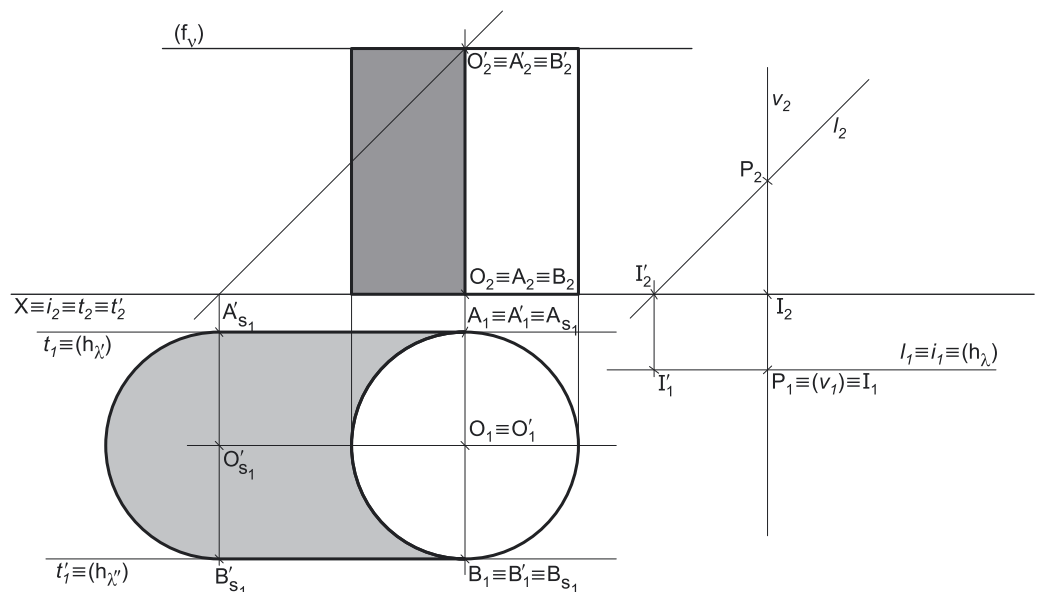
#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $\mathbf{O}$ , pelas suas projeções, em função dos dados.

#### Resolução:

*Determinação das projeções do cilindro:*

A base inferior do cilindro está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $\mathbf{O}_1$  (a projeção horizontal do ponto  $\mathbf{O}$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base inferior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo  $\mathbf{X}$  (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).



A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das bases. Assim, porque o cilindro tem 6,5 cm de altura e a sua base inferior está contida no Plano Horizontal de Projeção, o plano  $\mathbf{v}$  (o plano horizontal que contém a outra base do sólido) pelo seu traço frontal. O plano  $\mathbf{v}$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $O'$ , o centro da base superior do sólido. Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal aos planos das bases – trata-se de uma reta vertical (uma reta projetante horizontal). Assim, os pontos  $O$  (o centro da base inferior) e o ponto  $O'$  (o centro da base superior) situam-se na mesma reta projetante horizontal, pelo que se tem imediatamente  $O_1 \equiv O'_1$ . Por outro lado, o ponto  $O'$  é um ponto do plano  $v$  (que é um plano projetante frontal), pelo que  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ) se situa necessariamente sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ).

Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes horizontais, a projeção horizontal da base superior do sólido está coincidente com a projeção horizontal da sua base inferior. A projeção frontal desta base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

Por fim, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base superior do sólido) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior e menor abcissa das projeções frontais das duas bases).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

**1.** Por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $v$  (vertical) paralela às geratrizes do cilindro, e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção luminosa dada no enunciado). Salienta-se que a reta  $l$  (o raio luminoso) é uma reta frontal (de frente). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra

**2.** Determinou-se a reta  $i$ , que é a reta de interseção do plano definido pelas retas  $v$  e  $l$  (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base inferior, que está contida no Plano Horizontal de Projeção). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $v$  com o Plano Horizontal de Projeção) e o ponto  $I'$  (o ponto de interseção da reta  $l$  com o Plano Horizontal de Projeção).

Note que, neste caso, o ponto  $I$  é o traço horizontal da reta  $v$  e o ponto  $I'$  é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . Assim, neste caso, a reta  $i$  é, imediatamente, o traço horizontal do plano  $\lambda$  ( $h_\lambda$ ), o que se identificou no desenho. Salienta-se, ainda, que o plano  $\lambda$  é um plano frontal (de frente), pois está definido por uma reta vertical (a reta  $v$ ) e uma reta frontal (o raio luminoso  $l$ ). Uma vez que um plano frontal (de frente) não tem traço frontal, o traço horizontal do plano  $\lambda$  foi identificado entre parêntesis.

**3.** Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ .

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que são paralelas a uma reta dada (que é a projeção horizontal da reta  $i$  –  $i_1$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $B$ ).

Note que, neste caso, as retas  $t$  e  $t'$  são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra** ( $h_\lambda$  e  $h_{\lambda''}$ ), pois o plano que contém a base inferior do cilindro é o Plano Horizontal de Projeção – esse facto foi identificado imediatamente no desenho.

Salienta-se, ainda, que os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$ , sendo paralelos ao plano  $\lambda$ , são, ambos, planos frontais (de frente). Uma vez que um plano frontal (de frente) não tem traço frontal, os traços horizontais dos planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  foram identificados entre parêntesis.

**4.** As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  – note que o ponto  $A'$  é o extremo da geratriz  $[AA']$  que se situa na base superior do cilindro, tal como o ponto  $B'$  é o extremo da geratriz  $[BB']$  que se situa na base superior do cilindro. Salienta-se que a geratriz  $[AA']$  é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cilindro). No entanto, nesta situação particular, a geratriz  $[AA']$  está oculta, em projeção frontal, pela geratriz  $[BB']$ , que é visível (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar referente a qualquer destas duas geratrizes.

As geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, do lado e da direita), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência  $\overline{AB}$  de menor abcissa. A base superior do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência  $\overline{AB}$  de maior abcissa está **em sombra**, assim, como a base inferior do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $\overline{[ABB'A']}$ , que integra as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ , bem como a **semicircunferência  $\overline{AB}$  de menor abcissa** (da base inferior) e a **semicircunferência  $\overline{A'B'}$  de maior abcissa** (da base superior).

Em **projeção horizontal**, e uma vez que as geratrizes da superfície são projetantes horizontais, toda a superfície lateral do cilindro é invisível. Uma vez que a base inferior do sólido também é invisível em projeção horizontal, não existe qualquer **sombra própria** visível a assinalar, em projeção horizontal.

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[BB']$  (o segmento de reta  $[B_2B'_2]$ ) e a projeção frontal da geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, em **projeção frontal**. Note que a base inferior (que está em sombra) é invisível em projeção frontal, pois é projetante frontal.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos **A** e **B** situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $A_{s_1} \equiv A_1$  e  $B_{s_1} \equiv B_1$ .  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $B'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se no mesmo Plano de Projeção, pelo que, à partida, a sombra projetada (real) do cilindro **não admite a existência** de **pontos de quebra**.

Os pontos **A** e **B** situam-se no **SPHA** (tal como as suas sombras –  $A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$ ) e tal como a própria base inferior do cilindro se situa no **SPHA** – assim, a sombra da semicircunferência **AB** de menor abcissa (da base inferior) está coincidente com o próprio arco **AB**.  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que, à partida, a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) **não admite a existência** de qualquer ponto de quebra.

$A_{s_1}$  e  $A'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz **[BB']** não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[AA']** e situa-se no **SPHA**.  $B_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz **[BB']** não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s_1}B'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[BB']** e situa-se no **SPHA**.

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A'** e **B'**) se situam no mesmo Plano de Projeção. No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, atendendo a que a direção luminosa é frontal (de frente), é possível garantir que a sombra do cilindro se situa, na totalidade, no **SPHA**, pelo que a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  não admite a existência de pontos de quebra. Nesse sentido, é possível afirmar que a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  se situa, na sua totalidade, no **SPHA** (onde se situam as sombras dos seus extremos).

Por outro lado, atendendo a que se trata de uma direção luminosa e que a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, a **sombra projetada** da **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é uma semicircunferência geometricamente igual à **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$** . Assim, determinou-se a sombra real do ponto **O'** conduzindo, por **O'** (o centro da base superior), um raio luminoso com a direção luminosa dada no enunciado –  $O'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **O'**, situa-se no **SPHA** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **O'**. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O'_{s_1}$  e com 3 cm de raio (o raio da base) desenhou-se a semicircunferência que é a sombra projetada da **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  no SPHA** – trata-se de uma semicircunferência com extremos nos pontos  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$ . Sublinha-se que a semicircunferência  $\widehat{A'_{s_1}B'_{s_1}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz **[AA']** no ponto  $A'_{s_1}$  e também é **concordante** com a sombra da geratriz **[BB']** no ponto  $B'_{s_1}$ .

Em seguida, concluiu-se o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pela semicircunferência  $\widehat{A_{s_1}B_{s_1}}$  de menor abcissa, pelo segmento de reta  $[B_{s_1}B'_{s_1}]$ , pela semicircunferência  $\widehat{A'_{s_1}B'_{s_1}}$  de maior abcissa e ainda pelo segmento de reta  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$ . Note que parte da sombra projetada do cilindro é invisível (em projeção horizontal), pois está por debaixo pelo próprio cilindro, mas ainda assim não existe qualquer invisibilidade a assinalar.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área **visível** da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano  $\nu$  (o plano que contém a base superior do sólido), no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes, das retas  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 930.

### Dados:

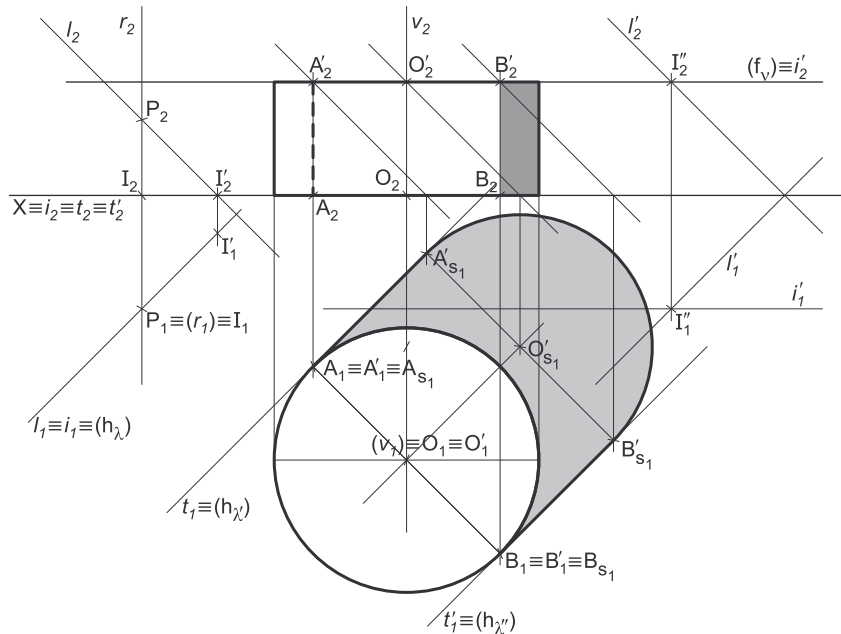
Em primeiro lugar, representou-se a reta  $v$ , a reta suporte do eixo do cilindro, pelas suas projeções, em função dos dados. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

Atendendo a que a base inferior do cilindro está contida no Plano Horizontal de Projeção, em primeiro lugar determinou-se o centro dessa base – o ponto  $O$ , que é o ponto de interseção da reta  $v$  (a reta suporte do eixo do sólido) com o Plano Horizontal de Projeção (o plano que contém a base inferior do cilindro). Nesta situação, o ponto  $O$  é o traço horizontal da reta  $v$ .

A base inferior do cilindro está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com 3,5 cm de raio (o raio da base), desenhou-se a projeção horizontal da base inferior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo  $X$  (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).



A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das bases. Assim, porque o cilindro tem 3 cm de altura e a sua base inferior está contida no Plano Horizontal de Projeção, o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) tem 3 cm de cota ( $0 + 3 = 3$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a outra base do sólido) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $O'$ , o centro da base superior do sólido. O ponto  $O'$  é o ponto de interseção da reta  $v$  (a reta suporte do eixo do cilindro) com o plano  $v$  (o plano que contém a base superior do sólido) – as projeções do ponto  $O'$  tiveram determinação imediata, pois tratou-se da interseção entre uma reta projetante horizontal (a reta  $v$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).

Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes horizontais, a projeção horizontal da base superior do sólido está coincidente com a projeção horizontal da sua base inferior. A projeção frontal desta base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $(f_v)$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

Por fim, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base superior do sólido) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior de menor abscissa das projeções frontais das duas bases).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

**1.** Por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $r$  (vertical) paralela às geratrizes do cilindro, e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção luminosa convencional). Salienta-se que a reta  $l$  (o raio luminoso) é uma reta frontal (de frente). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra

**2.** Determinou-se a reta  $i$ , que é a reta de interseção do plano definido pelas retas  $r$  e  $l$  (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base inferior, que está contida no Plano Horizontal de Projeção). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $r$  com o Plano Horizontal de Projeção) e o ponto  $I'$  (o ponto de interseção da reta  $l$  com o Plano Horizontal de Projeção).

Note que, neste caso, o ponto  $I$  é o traço horizontal da reta  $r$  e o ponto  $I'$  é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . Assim, neste caso, a reta  $i$  é, imediatamente, o traço horizontal do plano  $\lambda$  ( $h_\lambda$ ), o que se identificou no desenho.

**3.** Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ .

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que são paralelas a uma reta dada (que é a projeção horizontal da reta  $i - i_1$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $B$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Note que, neste caso, as retas  $t$  e  $t'$  são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra** ( $h_{\lambda'}$  e  $h_{\lambda''}$ ), pois o plano que contém a base inferior do cilindro é o Plano Horizontal de Projeção – esse facto foi identificado imediatamente no desenho.

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos **A** e **B**, respetivamente. Assim, as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  – note que o ponto **A'** é o superior extremo da geratriz  $[AA']$ , tal como o ponto **B'** é o extremo superior da geratriz  $[BB']$ . Salienta-se que a geratriz  $[AA']$  é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cilindro).

As geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência  $\widehat{AB}$  mais à esquerda e de maior afastamento. A base superior do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência  $\widehat{AB}$  mais à direita e de menor afastamento está **em sombra**, assim, como a base inferior do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[AB'B'A']$ , que integra as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ , bem como a **semicircunferência  $\widehat{AB}$  mais à esquerda e de maior afastamento** (da base inferior) e a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  mais à direita e de menor afastamento** (da base superior).

Em **projeção horizontal**, e uma vez que as geratrizes da superfície são projetantes horizontais, toda a superfície lateral do cilindro é invisível. Uma vez que a base inferior do sólido também é invisível em projeção horizontal, não existe qualquer **sombra própria** visível a assinalar, em projeção horizontal.

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[BB']$  (o segmento de reta  $[B_2B'_2]$ ) e a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base inferior (que está em sombra) é invisível em projeção frontal, pois é projetante frontal.

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos **A** e **B** situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $A_{s_1} \equiv A_1$  e  $B_{s_1} \equiv B_1$ .  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $B'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se no mesmo Plano de Projeção, pelo que, à partida, a sombra projetada (real) do cilindro **não admite a existência de pontos de quebra**.

Os pontos **A** e **B** situam-se no **SPHA** (tal como as suas sombras –  $A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$ ) e tal como a própria base inferior do cilindro se situa no **SPHA** – assim, a sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  de menor abscissa (da base inferior) está coincidente com o próprio arco  $\widehat{AB}$ .  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que, à partida, a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) não admite a existência de qualquer ponto de quebra.

$A_{s_1}$  e  $A'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[AA']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AA']$  e situa-se no **SPHA**.  $B_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[BB']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s_1}B'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BB']$  e situa-se no **SPHA**.

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A'** e **B'**) se situam no mesmo Plano de Projeção. No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, considera-se fundamental, nesta situação, averiguar a possível existência de pontos de quebra na sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  mais à direita e de menor afastamento, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso  $l$ , passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção convencional da luz). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $v$  (o plano que contém a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$** ) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $v$  é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizantal. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano  $v$  – o ponto **I'**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto **I'**) e por uma direção (é fronto-horizantal).

A reta  $i$  é **exterior à semicircunferência  $\widehat{A'B'}$** , pelo que a sombra da semicircunferência não apresenta pontos de quebra – a sombra da semicircunferência situar-se-á na totalidade no **SPHA** ou no **SPFS**. Tendo em conta que as sombras reais dos pontos **A'** e **B'** (os extremos da semicircunferência) se situam, ambas, no **SPHA**, conclui-se que a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$**  produz sombra no **SPHA**.

(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto  $O'$ , o centro da base superior do sólido. Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal aos planos das bases – trata-se de uma reta vertical (uma reta projetante horizontal). Assim, os pontos  $O$  (o centro da base inferior) e o ponto  $O'$  (o centro da base superior) situam-se na mesma reta projetante horizontal, pelo que se tem imediatamente  $O_1 \equiv O'_1$ . Por outro lado, o ponto  $O'$  é um ponto do plano  $v'$  (que é um plano projetante frontal), pelo que  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ) se situa necessariamente sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ).

Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes horizontais, a projeção horizontal da base superior do sólido está coincidente com a projeção horizontal da sua base inferior. A projeção frontal desta base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

Por fim, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base superior do sólido) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior e menor abscissa das projeções frontais das duas bases).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo foco luminoso, uma reta paralela às geratrizes do cilindro – a reta  $v$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção da reta  $v$  com o plano da base (de referência) – o ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo foco luminoso (o ponto  $L$ ), uma reta paralela às geratrizes do sólido – a reta  $v$ , que está definida por um ponto (o ponto  $L$ ) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro – é uma reta vertical).
2. Determinou-se o ponto de interseção a reta  $v$  com o plano da base (de referência) – o ponto  $I$ . Considerou-se que a base de referência é a base inferior do cilindro (a base que está contida no plano  $v$ ). As projeções do ponto  $I$  tiveram determinação direta, pois trata-se da interseção entre uma reta projetante horizontal (a reta  $v$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro – as retas  $t$  e  $t'$ . As retas  $t$  e  $t'$  são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $v$  (o plano que contém a base inferior do cilindro).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_1$ , que é a projeção horizontal do ponto  $I$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $B$ ).

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base inferior do cilindro nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  – note que o ponto  $A'$  é o extremo superior da geratriz  $[AA']$ , tal como o ponto  $B'$  é o extremo superior da geratriz  $[BB']$ . As duas geratrizes são invisíveis em projeção horizontal (são projetantes horizontais) e a geratriz  $[BB']$  é invisível em projeção frontal, por se situar na parte invisível (em projeção frontal) da superfície lateral do cilindro.

As geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da direita), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor  $\widehat{AB}$**  (da base inferior). A base superior do cilindro também está iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde ao **arco maior  $\widehat{AB}$**  da base inferior está **em sombra**, assim, como a base inferior do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[\widehat{ABB'A'}]$ , que integra as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ , bem como o **arco menor  $\widehat{AB}$**  (da base inferior) e o **arco maior  $\widehat{B'A'}$**  (da base superior).

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[AA']$  e a projeção frontal da geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base inferior (que está em sombra) é invisível em projeção frontal (por ser projetante frontal).

Em **projeção horizontal**, a superfície lateral do cilindro é invisível na sua totalidade (pois é uma superfície projetante horizontal), pelo que a parte dessa superfície que está em sombra é igualmente invisível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  e que corresponde ao **arco maior  $\widehat{AB}$** ). A base inferior está em sombra, mas é invisível em projeção horizontal. Tendo em conta que a base superior (que é visível em projeção horizontal) está iluminada, em projeção horizontal não há qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção horizontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Determinação da sombra projetada do cilindro:

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $A_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $A$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A$ .  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $A'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A'$ .  $B_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $B$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $B$ .  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $B'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $B'$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os pontos **A** e **B** situam-se no **SPHA** (tal como as suas sombras –  $A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$ ) – assim, à partida, a sombra do **arco menor**  $\widehat{AB}$  (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra.  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra do **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  (da base superior) admite necessariamente a existência de um ponto de quebra.

$A_{s_1}$  e  $A'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[AA']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AA']$  e situa-se no **SPHA**.

$B_{s_1}$  situa-se no **SPHA** e  $B'_{s_2}$  situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre  $B_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos). Para determinar este ponto de quebra teve-se em conta que a geratriz  $[BB']$  é um segmento de reta vertical e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B'_{s_2}$  (a sombra real do ponto **B'**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[B_2B'_2]$  (a projeção frontal do segmento  $[BB']$ ) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[BB']$ ). A linha quebrada aberta  $[B_{s_1}Q_sB'_{s_2}]$  é a **sombra real** da geratriz  $[BB']$  nos planos de projeção.

Após os procedimentos expostos, foi possível desenhar as sombras projetadas das duas geratrizes. No entanto, há que desenhar as sombras dos dois arcos de circunferência que integram a linha separatriz luz/sombra – o **arco menor**  $\widehat{AB}$  (da base inferior) e o **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  (da base superior).

### Determinação da sombra projetada da base inferior do cilindro:

Como atrás se referiu, à **partida**, a sombra do **arco menor**  $\widehat{AB}$  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A** e **B**) se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no **SPHA**). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, as sombras dos extremos do arco situam-se suficientemente distantes do eixo **X** para se garantir que a sombra do arco não admite a existência de pontos de quebra, para além de que os dois pontos de quebra da sombra do cilindro já foram situados – um deles situa-se entre  $B_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  (que já foi determinado) e o outro situa-se entre  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  (que ainda não foi determinado mas já foi situado).

Nesse sentido, é possível concluir que a sombra do **arco menor**  $\widehat{AB}$  se situa, na sua totalidade, no **SPHA** (onde se situam as sombras dos seus extremos).

Por outro lado, atendendo a que se trata de um foco luminoso e ainda porque o arco  $\widehat{AB}$  está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, a **sombra projetada do arco menor**  $\widehat{AB}$  no **Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um arco de circunferência ampliado em relação ao **arco**  $\widehat{AB}$ . Assim, determinou-se a sombra real do ponto **O** conduzindo, por **O**, um raio luminoso passando pelo ponto **L** (o foco luminoso) –  $O_{s_1}$  é a sombra real do ponto **O**, situa-se no **SPHA** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **O**. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_{s_1}$  e com raio até  $A_{s_1}$  ou  $B_{s_1}$ , desenhou-se o arco que é a sombra projetada do **arco menor**  $\widehat{AB}$  no **SPHA** – trata-se de um arco com extremos nos pontos  $A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$ . Sublinha-se que o arco  $\widehat{A_{s_1}B_{s_1}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  no ponto  $A_{s_1}$  e é também **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  no ponto  $B_{s_1}$ .

### Determinação da sombra projetada da base superior do cilindro:

Em primeiro lugar, e como atrás se referiu, a sombra do **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  admite necessariamente um ponto de quebra, pois as sombras dos seus extremos ( $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$ ) se situam em Planos de Projeção distintos. Assim, para desenhar a sombra do **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  (que é um arco de circunferência), o **primeiro passo** consiste em determinar o ponto de quebra da sombra do arco, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l** está definido por dois pontos – o foco luminoso **L** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que não se identificou). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $v'$  (o plano que contém o **arco maior**  $\widehat{A'B'}$ ) – a reta **i**.

Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $v'$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $v'$  é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta **i** é, assim, uma reta fronto-horizonta. Já temos uma direção para definir a reta **i**. Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano  $v'$  – o ponto **I'**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i** – a reta **i** está definida por um ponto (o ponto **I'**) e por uma direção (é fronto-horizonta).

A reta **i** é secante ao **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  – a reta **i** corta o **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  no ponto **Q'**, pelo que a sombra do ponto **Q'** será, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior**  $\widehat{A'B'}$ . Note que não se determinou a projeção frontal do ponto **Q'** (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por esta não ser necessária à resolução do exercício. Assim, conduziu-se, pela projeção horizontal do ponto **Q'** ( $Q'_1$ ) a projeção horizontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se a sombra do ponto **Q'** ( $Q'_s$ ), no eixo **X**. O ponto  $Q'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra do arco maior  $\widehat{A'B'}$ .

O arco  $\widehat{Q'B'}$  produz sombra no **SPFS** e o arco  $\widehat{Q'A'}$  produz sombra no **SPHA**. A sombra que o arco  $\widehat{Q'B'}$  produz no **SPFS** é um segmento de uma **oval**. A sombra que o arco  $\widehat{Q'A'}$  produz no **SPHA** é um arco de circunferência.

### Determinação da sombra projetada da base superior do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:

A sombra projetada do arco  $\widehat{Q'A'}$  no **SPHA** é necessariamente um outro arco de circunferência, ampliado em relação ao arco  $\widehat{Q'A'}$ . Começemos por determinar o centro desse outro arco, que é a sombra do ponto **O'** (o centro da base superior) no Plano Horizontal de Projeção –  $O'_{v_1}$  é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **O'** e situa-se no **SPHP**, pelo que é a sombra virtual do ponto **O'**. Determinemos o raio desse outro arco, recorrendo a um ponto do arco  $\widehat{Q'A'}$ . Já temos dois pontos que são sombras de pontos do arco – as sombras dos seus extremos ( $Q'_s$  e  $A'_{s_1}$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_{v_1}$  e com raio até  $Q'_s$  ou  $A'_{s_1}$ , desenhou-se um arco de circunferência, que é a sombra do arco  $\widehat{Q'A'}$ . Note que o arco  $\widehat{Q'_sA'_{s_1}}$  é **concordante** com o segmento  $[A'_{s_1}A_{s_1}]$  (a sombra da geratriz  $[AA']$ ) em  $A'_{s_1}$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra projetada da base superior do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

A sombra projetada do arco  $\overline{Q'B'}$  no SPFS é um segmento de uma **oval**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **oval** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **837**.

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco  $\overline{Q'B'}$  num «meio quadrado» de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando Em seguida, as partes correspondentes das diagonais e medianas do quadrado. A semicircunferência (da qual o arco  $\overline{Q'B'}$  é uma parte) intersecta aquelas linhas (as partes das diagonais e das medianas do quadrado que estão dentro do «meio quadrado») em cinco pontos, pontos esses cujas sombras serão, imediatamente, **cinco pontos** da **oval**. Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, bem como das linhas atrás referidas.

A sombra do «meio quadrado» (que é um retângulo) no Plano Frontal de Projeção é um trapézio. Tendo em conta que o lado de menor afastamento do quadrado está contido no Plano Frontal de Projeção (no traço frontal do plano  $v'$ ), a sua sombra está imediatamente coincidente com o próprio lado. Assim, o ponto **K** (o seu extremo mais à esquerda), porque é um ponto do Plano Frontal de Projeção, tem a sua sombra projetada coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $K_{s_2} \equiv K_2$ . A sombra do «meio quadrado» determinou-se a partir da sombra dos seus dois vértices mais à esquerda – o ponto **J** (o extremo esquerdo do diâmetro fronto-horizontal da semicircunferência) e o ponto **K**.  $J_{s_2}$  é a sombra real do ponto **J** –  $J_{s_2}$  situa-se no SPFS. O lado **[JK]** é de topo e a sua sombra está contida no traço frontal do plano luz/sombra que contém o segmento **[JK]** – trata-se de um plano de topo (projetante frontal). Assim, e como é possível observar, a sombra do lado **[JK]** está sobre a projeção frontal dos raios luminosos que passam pelos dois pontos (que não se identificaram).

De forma semelhante, a sombra do outro lado de topo do quadrado (que é paralelo a **[JK]**) está igualmente sobre a projeção frontal dos raios luminosos que passam pelos respetivos vértices. **J** é o vértice mais à esquerda de um lado fronto-horizontal do «meio quadrado» – a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção desse lado (o lado de maior afastamento do «meio quadrado») é necessariamente paralela a esse lado, pelo que a sombra projetada desse lado é fronto-horizontal e passa por  $J_{s_2}$ . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a sombra projetada do lado de maior afastamento do «meio quadrado» e, dessa forma, determinar a sombra de mais um vértice do quadrado (o extremo direito do seu lado de maior afastamento), sobre a sombra do lado paralelo a **[JK]**. Note que  $J_{s_2}$  e o outro extremo do lado fronto-horizontal que passa por  $J_{s_2}$  serão, imediatamente, **dois pontos** do segmento da **oval**.

Em seguida, determinou-se a sombra real do centro do círculo ( $O'_{s_2}$ ), que se situa no SPFS e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $O'$  – note que  $O'_{s_2}$  se situa necessariamente sobre a sombra do lado de maior afastamento do «meio quadrado». Em seguida, desenhou-se a mediana do trapézio que passa por  $O'_{s_2}$  (e que corresponde à sombra da mediana de topo do «meio quadrado»). Essa mediana está contida numa reta que passa por  $O'_{s_2}$  e por  $L_2$  (a projeção frontal do foco luminoso **L**) – na prática, essa mediana situa-se sobre o traço frontal do plano luz/sombra que contém a mediana de topo do quadrado (que é um plano de topo que passa pelo ponto **L** e pelo ponto  $O'$ ). O ponto em que esta mediana se apoia no lado de menor afastamento do trapézio é imediatamente **um ponto** do segmento da oval. Os dois vértices inferiores do trapézio são mais **dois pontos** do segmento da oval (como acima se referiu), pelo que já temos **três pontos** do segmento da oval. Estes três pontos são os pontos em que o segmento da oval será tangente aos lados correspondentes do trapézio (são as sombras dos pontos em que o círculo é tangente aos lados correspondentes do «meio quadrado»).

Em seguida, desenharam-se os dois segmentos de reta que têm um extremo em  $O'_{s_2}$  e o outro extremo nos vértices superiores do trapézio – esses segmentos de reta são as sombras das partes das diagonais do quadrado que se situam no «meio quadrado». Em seguida, transportaram-se os dois pontos em que a circunferência (que delimita o círculo) corta essas linhas do «meio quadrado» para as respetivas sombras no trapézio, com o recurso às projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos pontos (e que correspondem aos planos luz/sombra que passam por esses pontos). Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos** do segmento da oval.

Aos **cinco pontos** determinados acresce o ponto de quebra (o ponto  $Q'_s$ ), bem como a sombra do ponto **B'** ( $B'_{s_2}$ ), o que perfaz um total de **sete pontos** do segmento da oval. Estes pontos permitem-nos um desenho relativamente preciso da curva, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da oval aos lados do trapézio – o segmento da oval é a sombra projetada da semicircunferência no Plano Frontal de Projeção. Note que o segmento da oval é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz **[BB')** em  $B'_{s_2}$ .

Tenha em conta que existe um troço da oval que se situa para baixo de  $B'_{s_2}$  (o arco da oval que tem extremos em  $B'_{s_2}$  e no vértice inferior e mais à direita do trapézio), que se desenhou a **leve** (é uma sombra virtual) e que, na prática, não integra a sombra do arco  $\overline{Q'B'}$ . A necessidade deste troço foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através dele é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivesse desenhado este pequeno troço, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho do segmento da oval permitiu-nos concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de oval desenhado, pelo arco de circunferência  $\overline{Q'_sA'_{s_1}}$ , pelo segmento de reta  $[A'_{s_1}A_{s_1}]$ , pelo arco de circunferência  $\overline{A_{s_1}B_{s_1}}$  e, ainda, pela linha quebrada aberta  $[B_{s_1}Q_{s_1}B'_{s_2}]$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cilindro nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cilindro é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cilindro).

Após o desenho do contorno da sombra (no qual se atendeu às situações de invisibilidades da sombra), preencheu-se a área **visível** da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases do sólido), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao recurso ao plano luz/sombra passante, das retas  $v$ ,  $i$ ,  $t$  e  $t'$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de oval), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 932.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base de menor afastamento do cilindro, pelo seu traço horizontal, em função do seu afastamento (que é dado). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. As bases do cilindro estão contidas em planos frontais (de frente) e o cilindro é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, as duas bases são tangentes ao Plano Horizontal de Projeção – os respetivos centros têm cota igual ao raio das bases do sólido (que é 3 cm). Assim, é possível concluir que o ponto **O** (o centro da base de menor afastamento do cilindro) tem 3 cm de cota. Nesse sentido, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **O** pertence ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, pelo que a sua projeção horizontal (**O**<sub>1</sub>) se situa sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  (**h**<sub>φ</sub>).

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

A base de menor afastamento do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base de menor afastamento do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  (**h**<sub>φ</sub>), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das bases. Assim, porque o cilindro tem 7 cm de altura e a sua base de menor afastamento tem 4 cm de afastamento (o afastamento do plano  $\varphi$ ), o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 11 cm de afastamento (4 + 7 = 11). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi'$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

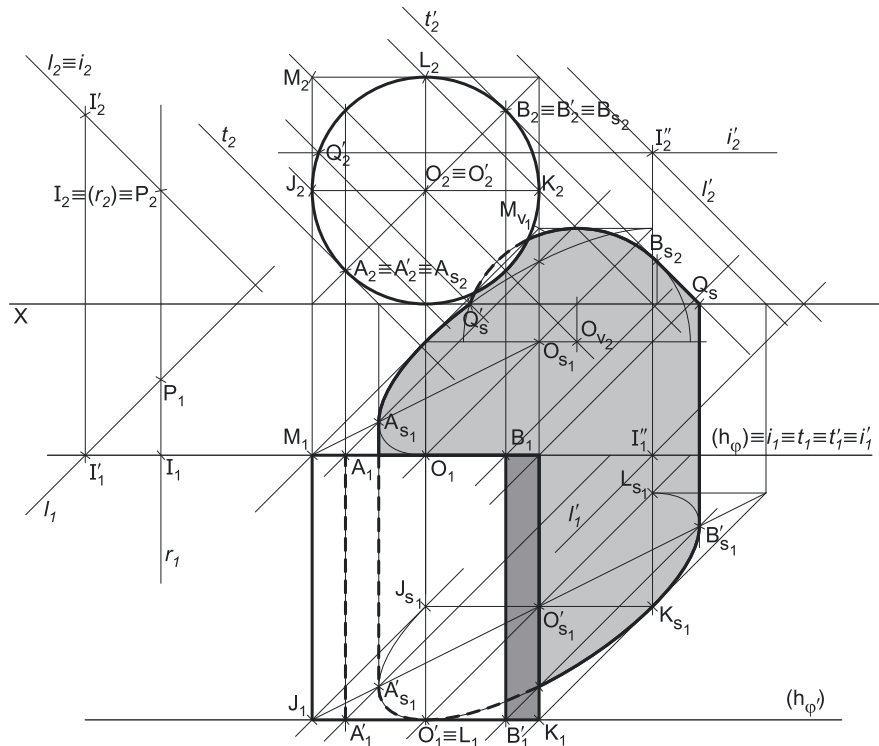
Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O'**, o centro da base de maior afastamento do sólido. Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal aos planos das bases – trata-se de uma reta de topo (uma reta projetante frontal). Assim, os pontos **O** (o centro da base de menor afastamento) e o ponto **O'** (o centro da base de maior afastamento) situam-se na mesma reta projetante frontal, pelo que se tem imediatamente **O**<sub>2</sub> ≡ **O'**<sub>2</sub>. Por outro lado, o ponto **O'** é um ponto do plano  $\varphi'$  (que é um plano projetante horizontal), pelo que **O'**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O'**) se situa necessariamente sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  (**h**<sub>φ'</sub>).

Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes frontais, a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido está coincidente com a projeção frontal da sua base de menor afastamento. A projeção horizontal daquela base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  (**h**<sub>φ'</sub>), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal (corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

Por fim, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior de menor abscissa das projeções horizontais das duas bases).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta *r* (de topo) paralela às geratrizes do cilindro, e a reta *l* (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra
2. Determinou-se a reta *i*, que é a reta de interseção do plano definido pelas retas *r* e *l* (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base de menor afastamento, que está contida no plano  $\varphi$ ). A reta *i* está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta *r* com o plano  $\varphi$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta *l* com o plano  $\varphi$ ).

As projeções do ponto **I** tiveram determinação imediata, pois tratou-se da interseção entre uma reta projetante frontal (a reta *r*) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ). O ponto **I'** teve determinação imediata a partir da sua projeção horizontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta *l*) com um plano projetante horizontal (o plano  $\nu$ ).

3. Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta *i* – as retas **t** e **t'**.

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base) que são paralelas a uma reta dada (que é a projeção frontal da reta *i* – *i*<sub>2</sub>). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **A**<sub>2</sub> e **B**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**).

As retas **t** e **t'** são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano  $\varphi$  (o plano da base de referência).

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos **A** e **B**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[AA']** e **[BB']** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[AA']** e **[BB']** – note que o ponto **A'** é o extremo de maior afastamento da geratriz **[AA']**, tal como o ponto **B'** é o extremo de maior afastamento da geratriz **[BB']**. Salienta-se que a geratriz **[AA']** é invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cilindro).

As geratrizes **[AA']** e **[BB']** separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência **AB** mais à esquerda e de maior cota. A base de maior afastamento do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência **AB** mais à direita e de menor cota está **em sombra**, assim, como a base de menor afastamento do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[ABB'A']**, que integra as geratrizes **[AA']** e **[BB']**, bem como a **semicircunferência AB mais à esquerda e de maior cota** (da base de menor afastamento) e a **semicircunferência A'B' mais à direita e de menor cota** (da base de maior afastamento).

Em **projeção frontal**, e uma vez que as geratrizes da superfície são projetantes frontais, toda a superfície lateral do cilindro é invisível. Uma vez que a base de menor afastamento do sólido também é invisível em projeção frontal, não existe qualquer **sombra própria** visível a assinalar, em projeção frontal.

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz **[BB']** (o segmento de reta **[B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>]**) e a projeção horizontal da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base de menor afastamento (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal, pois é projetante horizontal.

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção horizontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. **A**<sub>s<sub>1</sub></sub> é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**. **A'**<sub>s<sub>1</sub></sub> é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**. **B**<sub>s<sub>2</sub></sub> é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**. **B'**<sub>s<sub>1</sub></sub> é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

As sombras dos pontos **A** e **B** (**A'**<sub>s<sub>1</sub></sub> e **B'**<sub>s<sub>1</sub></sub>, respetivamente) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra da **semicircunferência AB** (da base de menor afastamento) que integra a linha separatriz luz/sombra admite necessariamente a existência de um ponto de quebra. As sombras dos pontos **A'** e **B'** (**A'**<sub>s<sub>1</sub></sub> e **B'**<sub>s<sub>1</sub></sub>, respetivamente) situam-se no **SPHA** – assim, à partida, a sombra da **semicircunferência A'B'** (da base de maior afastamento) que integra a linha separatriz luz/sombra não admite a existência de pontos de quebra.

**A**<sub>s<sub>1</sub></sub> e **A'**<sub>s<sub>1</sub></sub> situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz **[AA']** não admite ponto de quebra – o segmento **[A<sub>s<sub>1</sub></sub>A'<sub>s<sub>1</sub></sub>]** é a sombra projetada do segmento **[AA']** e situa-se no **SPHA**.

**B**<sub>s<sub>2</sub></sub> situa-se no **SPFS** e **B'**<sub>s<sub>1</sub></sub> situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre **B**<sub>s<sub>2</sub></sub> e **B'**<sub>s<sub>1</sub></sub> (que se situam em Planos de Projeção distintos). Para determinar este ponto de quebra teve-se em conta que a geratriz **[BB']** é um segmento de reta de topo e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por **B**<sub>s<sub>1</sub></sub> (a sombra real do ponto **B**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>]** (a projeção horizontal do segmento **[BB']**) até ao eixo **X**, onde se situa **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra do segmento **[BB']**). A linha quebrada aberta **[B<sub>s<sub>1</sub></sub>Q<sub>s</sub>B'<sub>s<sub>2</sub></sub>]** é a **sombra real** da geratriz **[BB']** nos planos de projeção (nas faces do 1.<sup>o</sup> Diedro).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Após os procedimentos expostos, foi possível desenhar as sombras projetadas das duas geratrizes. No entanto, há que desenhar as sombras das duas semicircunferências que integram a linha separatriz luz/sombra – a **semicircunferência AB** (da base de menor afastamento) e a **semicircunferência A'B'** (da base de maior afastamento).

*Determinação da sombra projetada da base de maior afastamento do cilindro:*

Como atrás se referiu, à **partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A'** e **B'**) se situam no mesmo Plano de Projeção (no **SPHA**). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, atendendo a que os dois pontos de quebra da sombra do cilindro já foram localizados (um deles situa-se na sombra da geratriz **[BB']** e o outro na sombra da base de menor afastamento), é possível garantir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  não admite a existência de pontos de quebra.

Nesse sentido, é possível concluir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  se situa, na sua totalidade, no **SPHA** (onde se situam as sombras dos seus extremos) – a sua sombra será um **segmento de elipse**, que é uma curva de erro e cujo desenho requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Assim, começou-se por inscrever a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo que é a base de maior afastamento (o ponto **O'**) –  $O'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **O'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **O'**. A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Horizontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

O lado inferior do quadrado situa-se no Plano Horizontal de Projeção (está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi' - h_{\varphi'}$ ), pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio segmento. Em seguida, determinaram-se as sombras no Plano Horizontal de Projeção dos extremos do diâmetro fronto-horizontal da circunferência (que corresponde à mediana fronto-horizontal do quadrado) – o segmento **[JK]**.  $J_{s_1}$  é a sombra real do ponto **J** e  $K_{s_1}$  é a sombra real do ponto **K**. Assim, o segmento **[ $J_{s_1}K_{s_1}$ ]** é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção do segmento **[JK]** (note que o segmento **[ $J_{s_1}K_{s_1}$ ]** contém o ponto  $O'_{s_1}$ ). Em seguida, determinou-se a sombra do extremo superior do diâmetro vertical (o ponto **L**) – o ponto  $L_{s_1}$  é a sombra do ponto **L** no Plano Horizontal de Projeção.  $L_{s_1}$  situa-se no **SPHA**, pelo que é uma sombra real.

As sombras dos lados verticais do polígono estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos. Assim, este conjunto de procedimentos e de raciocínios permitiu-nos construir a figura que é a sombra dos 3/4 do quadrado, tendo-se desenhado, também, a sombra da mediana vertical do quadrado – é o segmento de reta que passa por  $O'_{s_1}$  (a sombra real do ponto **O'**) e que é paralelo às sombras dos lados verticais do quadrado.

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O'_{s_1}$  e têm extremos nos vértices do paralelogramo).

As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo (os pontos  $J_{s_1}$ ,  $K_{s_1}$ ,  $L_{s_1}$  e o extremo inferior do diâmetro vertical, que não se identificou). Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções horizontais daqueles pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, na prática, o ponto  $A'_{s_1}$  (a sombra do extremo de maior afastamento da geratriz **[AA']**) e que um outro desses pontos é, na prática, o ponto  $B'_{s_1}$  (a sombra do extremo de maior afastamento da geratriz **[BB']**).

Assim, uma vez que não acresce qualquer ponto aos **sete pontos** determinados, estes sete pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz **[AA']** em  $A'_{s_1}$ , tal como é **concordante** com a sombra da geratriz **[BB']** em  $B'_{s_1}$ .

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para cima de  $A'_{s_1}$  (um deles) e para cima de  $B'_{s_1}$  (o outro). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base de menor afastamento do cilindro:*

Como atrás se referiu, a sombra da **semicircunferência AB** (da base inferior) admite necessariamente a existência de um ponto de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A** e **B**) se situam em Planos de Projeção distintos. Para determinar o ponto de quebra da sombra da **semicircunferência AB**, e à semelhança de situações idênticas, há que recorrer ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l'**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l'** está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro) – a reta **l'**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para definir a reta  $i'$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $\varphi$  é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i'$  é, assim, uma reta fronto-horizantal. Já temos uma direção para definir a reta  $i'$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com plano  $\varphi$  – o ponto  $I''$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i'$  – a reta  $i'$  está definida por um ponto (o ponto  $I''$ ) e por uma direção (é fronto-horizantal).

A reta  $i'$  é **secante** à **semicircunferência**  $\widehat{AB}$  – a reta  $i'$  corta a **semicircunferência**  $\widehat{AB}$  no ponto  $Q'$ . A sombra do ponto  $Q'$  (que se situa no eixo  $X$ ) é, assim, o ponto de quebra da sombra da **semicircunferência**  $\widehat{AB}$ . Note que não se representou a projeção horizontal do ponto  $Q'$  (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por esta não ser necessária. Em seguida, pela projeção frontal do ponto  $Q'$ , conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que passa por  $Q'$  e determinou-se a sua sombra, que se situa no eixo  $X$  –  $Q'_s$ ,  $Q'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra da **semicircunferência**  $\widehat{AB}$ .

O arco  $\widehat{A'Q'}$  produz sombra no **SPHA** e o arco  $\widehat{Q'B'}$  produz sombra no **SPFS**.

*Determinação da sombra projetada da base de menor afastamento do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

Trata-se de uma direção luminosa e o arco  $\widehat{Q'B'}$  está contido num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a **sombra projetada do arco**  $\widehat{Q'B'}$  no **Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um arco de circunferência geometricamente igual ao **arco**  $\widehat{Q'B'}$ . Assim, determinou-se a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção, conduzindo, por  $O$  (o centro da base de menor afastamento do cilindro), um raio luminoso com a direção luminosa convencional. A sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa e situa-se no **SPFI**, pelo que é uma sombra virtual – é  $O_{v_2}$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_{v_2}$  e com 3 cm de raio (o raio da base), desenhou-se um arco de circunferência, com extremos em  $Q'_s$  e em  $B_{s_2}$ , que é a sombra projetada do arco  $\widehat{Q'B'}$  no **SPFS**. Sublinha-se que o arco  $\widehat{Q'_sB_{s_2}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  no ponto  $B_{s_2}$ .

*Determinação da sombra projetada da base de menor afastamento do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco**  $\widehat{A'Q'}$  no **Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). No entanto, atendendo à reduzida dimensão do arco  $\widehat{A'Q'}$ , considera-se que os **oito pontos** atrás referidos é um número excessivo para uma curva tão pequena.

Assim, para determinar os pontos necessários a um desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva, comecemos por inscrever o **arco**  $\widehat{A'Q'}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**. A parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco  $\widehat{A'Q'}$  corresponde a «meio quadrado» – o «meio quadrado» mais à esquerda do quadrado total e que a figura apresenta (e que engloba o arco  $\widehat{A'Q'}$  na sua totalidade). Note que esse «meio quadrado» é um retângulo cujo lado mais à direita é a mediana vertical do quadrado total (e que passa pelo ponto  $O$ ).

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco  $\widehat{A'Q'}$  na parte correspondente desse quadrado de **lados paralelos ao eixo X** (que é o «meio quadrado» atrás referido), desenhando em seguida as partes correspondentes das diagonais do quadrado (que passam pelo ponto  $O$ ) – os dois extremos do diâmetro vertical da base de menor afastamento do cilindro são dois vértices desse «meio quadrado» e permitem-nos determinar, imediatamente, **dois pontos do segmento de elipse**. O ponto em que a parte correspondente da mediana fronto-horizantal do quadrado (que é o diâmetro fronto-horizantal da base) se apoia no lado mais à esquerda do «meio quadrado» permite-nos determinar **um outro ponto do segmento de elipse**. Por fim, os pontos em que o arco  $\widehat{A'Q'}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitem-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Assim, há que determinar a sombra desse «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, bem como das partes correspondentes das suas diagonais e da sua mediana fronto-horizantal.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra do centro do círculo (o ponto  $O$ ) no Plano Horizontal de Projeção –  $O_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $O$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $O$ . O lado inferior do retângulo (que é o «meio quadrado») situa-se no Plano Horizontal de Projeção (está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$ ), pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio segmento. Em seguida, determinou-se a sombra no Plano Horizontal de Projeção do vértice superior e mais à esquerda do retângulo – o ponto  $M$ .  $M_{v_1}$  é a sombra do ponto  $M$  no Plano Horizontal de Projeção, situa-se no **SPHP** e é uma sombra virtual. A sombra do «meio quadrado no Plano Horizontal de Projeção é um paralelogramo que tem um vértice em  $M_{v_1}$  e cujo lado inferior está sobre  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) – o **segmento de elipse** estará inscrita nesse paralelogramo.

O lado de maior cota desse «meio quadrado» é fronto-horizantal e tem um extremo no ponto  $M$  – a sua sombra no Plano Horizontal de Projeção é igualmente fronto-horizantal e tem um extremo em  $M_{v_1}$  (a sombra do ponto  $M$  no Plano Horizontal de Projeção). Assim, por  $M_{v_1}$  conduziu-se uma fronto-horizantal, que é a reta suporte do lado superior do paralelogramo. As sombras dos lados verticais do polígono estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos, o que nos permitiu desenhar o paralelogramo que é a sombra do «meio quadrado».

Em seguida, por  $O_{s_1}$  conduziu-se uma fronto-horizantal até ao lado mais à esquerda do paralelogramo – esse segmento de reta é a sombra no Plano Horizontal de Projeção da parte correspondente da mediana fronto-horizantal do quadrado. O ponto em que esta mediana se apoia no lado mais à esquerda do paralelogramo é, imediatamente, **um ponto do segmento de elipse**. Os extremos superior e inferior do lado mais à direita do paralelogramo são mais **dois pontos do segmento da elipse**. Salienta-se que estes três pontos são os pontos em que o segmento de elipse é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Em seguida, desenharam-se as sombras das partes correspondentes das diagonais do quadrado, que passam por  $O_{s_1}$ . Os pontos em que a **semicircunferência**  $\widehat{A'Q'}$  corta as diagonais do «meio quadrado» situar-se-ão necessariamente sobre as respetivas sombras. Assim, pelas projeções horizontais daqueles pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as sombras das respetivas diagonais, o que nos permitiu determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, na prática, o ponto  $A_{s_1}$  (a sombra do extremo de menor afastamento da geratriz  $[AA']$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Aos **cinco pontos** determinados acresce, ainda, a sombra do ponto  $Q'$  ( $Q'_s$ ), o que perfaz um total de **seis pontos** – estes seis pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  em  $A_{s_1}$ .

Note ainda que existem dois troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{A'Q'}$ . Esses troços são o troço que se situa para baixo de  $A_{s_1}$  (um deles) e para cima de  $Q'_s$  (o outro troço). Salienta-se que o troço da curva que se situa para cima de  $Q'_s$  (para cima do eixo  $X$ ) é uma sombra virtual, pois situa-se no **SPHP**. A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de reta  $[A'_{s_1}A_{s_1}]$ , pelo segmento de elipse  $A_{s_1}Q'_s$ , pelo arco de circunferência  $Q'_sB_{s_2}$ , pela linha quebrada aberta  $[B_{s_2}Q_sB'_{s_1}]$  e, ainda, pelo segmento de elipse  $A'_{s_1}B'_{s_1}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cilindro nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cilindro é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cilindro).

Após o desenho do contorno da sombra (no qual se atendeu às situações de invisibilidades da sombra), preencheu-se a área **visível** da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços horizontais dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  (os planos que contêm as bases do sólido), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes, dos traçados referentes ao recurso ao plano luz/sombra passante, das retas  $i, i', t$  e  $t'$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 933.

### Dados:

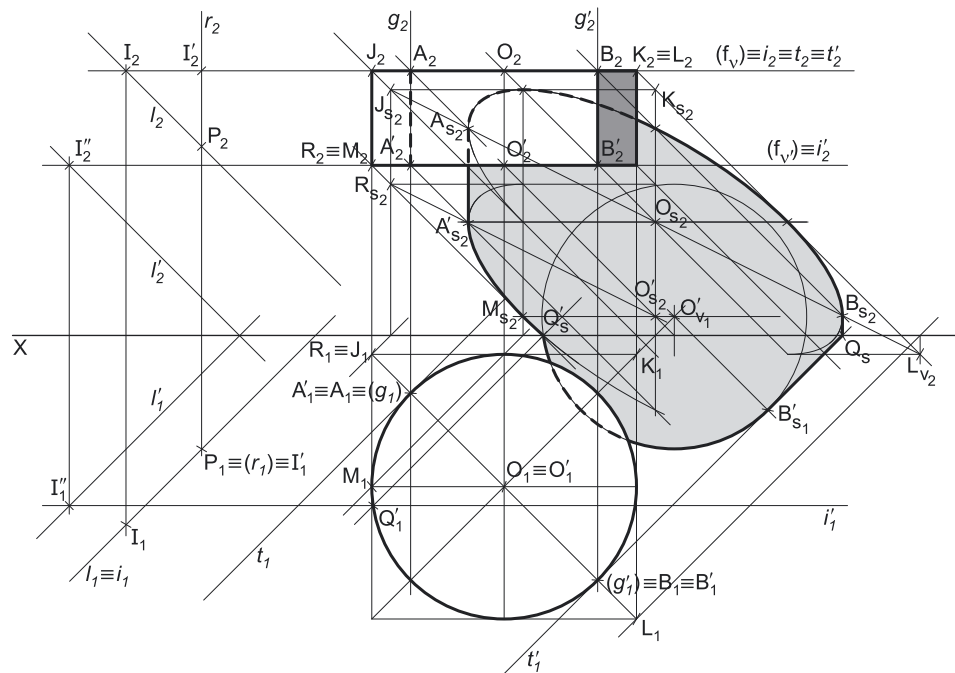
Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal  $(f_v)$  passa por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

A base superior do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base superior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $(f_v)$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das bases. Assim, porque o cilindro tem 2,5 cm de altura e a sua base superior tem 7 cm de cota (a cota do ponto **O**), o plano  $v'$  (o plano que contém a base inferior do sólido) tem 4,5 cm de cota ( $7 - 2,5 = 4,5$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base inferior do sólido) pelo seu traço frontal. O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O'**, o centro da base inferior do sólido. Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal aos planos das bases – trata-se de uma reta vertical (uma reta projetante horizontal). Assim, os pontos **O** (o centro da base superior) e o ponto **O'** (o centro da base inferior) situam-se na mesma reta projetante horizontal, pelo que se tem imediatamente  $O_1 \equiv O'_1$ . Por outro lado, o ponto **O'** é um ponto do plano  $v'$  (que é um plano projetante frontal), pelo que **O'**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O'**) se situa necessariamente sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ).

Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes horizontais, a projeção horizontal da base inferior do sólido está coincidente com a projeção horizontal da sua base superior. A projeção frontal daquela base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

Por fim, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base superior do sólido) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior e menor abscissa das projeções frontais das duas bases).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta *i*, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta *i*; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta *r* (vertical) paralela às geratrizes do cilindro, e a reta *l* (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra
2. Determinou-se a reta *i*, que é a reta de interseção do plano definido pelas retas *r* e *l* (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base superior, que está contida no plano  $v$ ). A reta *i* está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta *r* com o plano  $v$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta *l* com o plano  $v$ ).

As projeções do ponto **I** tiveram determinação imediata, pois tratou-se da interseção entre uma reta projetante horizontal (a reta *r*) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ). O ponto **I'** teve determinação imediata a partir da sua projeção frontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta *l*) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).

3. Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta *i* – as retas **t** e **t'**.

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que são paralelas a uma reta dada (que é a projeção horizontal da reta *i* –  $i_1$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **A**<sub>1</sub> e **B**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**).

As retas **t** e **t'** são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano  $v$  (o plano da base de referência).

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos **A** e **B**, respetivamente. Assim, as geratrizes [**AA'**] e [**BB'**] são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes [**AA'**] e [**BB'**] – note que o ponto **A'** é o extremo inferior da geratriz [**AA'**], tal como o ponto **B'** é o extremo inferior da geratriz [**BB'**]. Salienta-se que a geratriz [**AA'**] é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cilindro).

As geratrizes [**AA'**] e [**BB'**] separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência **AB** mais à esquerda e de maior afastamento. A base superior do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência **AB** mais à direita e de menor afastamento está **em sombra**, assim, como a base inferior do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada [**ABB'A'**], que integra as geratrizes [**AA'**] e [**BB'**], bem como a **semicircunferência AB mais à esquerda e de maior afastamento** (da base inferior) e a **semicircunferência A'B' mais à direita e de menor afastamento** (da base superior).

Em **projeção horizontal**, e uma vez que as geratrizes da superfície são projetantes horizontais, toda a superfície lateral do cilindro é invisível. Uma vez que a base inferior do sólido também é invisível em projeção horizontal, não existe qualquer **sombra própria** visível a assinalar, em projeção horizontal.

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz [**BB'**] (o segmento de reta [**B<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>**]) e a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, em **projeção frontal**. Note que a base inferior (que está em sombra) é invisível em projeção frontal, pois é projetante frontal.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $A_{s_2}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A**.  $A'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $B'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

As sombras dos pontos **A** e **B** ( $A_{s_2}$  e  $B_{s_2}$ , respetivamente) situam-se no **SPFS** – assim, à partida, a sombra da **semicircunferência  $\widehat{AB}$**  (da base superior) que integra a linha separatriz luz/sombra não admite a existência de pontos de quebra. As sombras dos pontos **A'** e **B'** ( $A'_{s_2}$  e  $B'_{s_1}$ , respetivamente) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra da **semicircunferência  $\widehat{B'A'}$**  (da base inferior) que integra a linha separatriz luz/sombra admite necessariamente a existência de um ponto de quebra.

$A_{s_2}$  e  $A'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz [**AA'**] não admite ponto de quebra – o segmento [ $A_{s_2}A'_{s_2}$ ] é a sombra projetada do segmento [**AA'**] e situa-se no **SPFS**.

$B_{s_2}$  situa-se no **SPFS** e  $B'_{s_1}$  situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre  $B_{s_2}$  e  $B'_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos). Para determinar este ponto de quebra teve-se em conta que a geratriz [**BB'**] é um segmento de reta vertical e que a sombra projetada do segmento no Plano Frontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B_{s_2}$  (a sombra real do ponto **B**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a [ $B_2B'_2$ ] (a projeção frontal do segmento [**BB'**]) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento [**BB'**]). A linha quebrada aberta [ $B_{s_2}Q_sB'_{s_1}$ ] é a **sombra real** da geratriz [**BB'**] nos planos de projeção.

Após os procedimentos expostos, foi possível desenhar as sombras projetadas das duas geratrizes. No entanto, há que desenhar as sombras das duas **semicircunferências** que integram a linha separatriz luz/sombra – a **semicircunferência  $\widehat{AB}$**  (da base superior) e a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$**  (da base inferior).

*Determinação da sombra projetada da base superior do cilindro:*

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra da **semicircunferência  $\widehat{AB}$**  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A** e **B**) se situam no mesmo Plano de Projeção (no **SPFS**). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, atendendo a que os dois pontos de quebra da sombra do cilindro já foram localizados (um deles situa-se na sombra da geratriz [**BB'**] e o outro na sombra da base inferior), é possível garantir que a sombra da **semicircunferência  $\widehat{AB}$**  não admite a existência de pontos de quebra.

Nesse sentido, é possível concluir que a sombra da **semicircunferência  $\widehat{AB}$**  se situa, na sua totalidade, no **SPFS** (onde se situam as sombras dos seus extremos) – a sua sombra será um **segmento de elipse**, que é uma curva de erro e cujo desenho requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Assim, começou-se por inscrever a **semicircunferência  $\widehat{AB}$**  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra da **semicircunferência  $\widehat{AB}$**  corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam a **semicircunferência  $\widehat{AB}$**  na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam a **semicircunferência  $\widehat{AB}$**  permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo que é a base superior (o ponto **O**) –  $O_{s_2}$  é a sombra real do ponto **O** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **O**. A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Frontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

Em seguida, determinaram-se as sombras no Plano Frontal de Projeção dos extremos do lado de menor afastamento do quadrado – o segmento [**JK**].  $J_{s_2}$  é a sombra real do ponto **J** e  $K_{s_2}$  é a sombra real do ponto **K**. Assim, o segmento [ $J_{s_2}K_{s_2}$ ] é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção do segmento [**JK**]. Em seguida, determinou-se a sombra do vértice de maior afastamento e mais à direita do polígono (o ponto **L**) – o ponto  $L_{v_2}$  é a sombra do ponto **L** no Plano Frontal de Projeção.  $L_{v_2}$  situa-se no **SPFI**, pelo que é uma sombra virtual. As sombras dos lados de topo do polígono estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos.

Em seguida, teve-se em conta que a mediana fronto-horizontal do quadrado é paralela ao lado [**JK**] e passa pelo ponto **O** – nesse sentido, por  $O_{s_2}$  (a sombra real do ponto **O**) conduziu-se uma paralela ao segmento [ $J_{s_2}K_{s_2}$ ], que é a sombra da mediana fronto-horizontal do quadrado. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do polígono que é 3/4 do quadrado, tendo-se desenhado, também, a sombra da mediana de topo do quadrado – é o segmento de reta que passa por  $O_{s_2}$  (a sombra real do ponto **O**) e que é paralelo a [ $K_{s_2}L_{v_2}$ ].

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O_{s_2}$  e têm extremos nos vértices do paralelogramo).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que a semicircunferência  $\widehat{AB}$  corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções frontais daqueles pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersejam as diagonais dos  $3/4$  de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, na prática, o ponto  $B_{s_2}$  (a sombra do extremo superior da geratriz  $[BB']$ ).

Aos **sete pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos **A** e **B** ( $A_{s_2}$  e  $B_{s_2}$ , respetivamente), o que perfaz um total de **oito pontos** (o ponto  $B'_{s_2}$  é um dos sete pontos determinados anteriormente) – estes oito pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  em  $A_{s_2}$ , tal como é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  em  $B_{s_2}$ .

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** da semicircunferência  $\widehat{AB}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para baixo de  $A_{s_2}$  (um deles) e para baixo de  $B_{s_2}$  (o outro). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base inferior do cilindro:*

Como atrás se referiu, a sombra da **semicircunferência  $A'B'$**  (da base inferior) admite necessariamente a existência de um ponto de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A'** e **B'**) se situam em Planos de Projeção distintos. Para determinar o ponto de quebra da sombra da **semicircunferência  $A'B'$** , e à semelhança de situações idênticas, há que recorrer ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso  $l'$ , passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso  $l'$  está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $v'$  (o plano que contém a base inferior do cilindro) – a reta  $i'$ .

Para definir a reta  $i'$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $v'$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $v'$  é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i'$  é, assim, uma reta fronto-horizantal. Já temos uma direção para definir a reta  $i'$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com o plano  $v'$  – o ponto  $I''$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i'$  – a reta  $i'$  está definida por um ponto (o ponto  $I''$ ) e por uma direção (é fronto-horizantal).

A reta  $i'$  é **secante** à **semicircunferência  $A'B'$**  – a reta  $i'$  corta a **semicircunferência  $A'B'$**  no ponto  $Q'$ . A sombra do ponto  $Q'$  (que se situa no eixo **X**) é, assim, o ponto de quebra da sombra da **semicircunferência  $A'B'$** . Note que não se representou a projeção frontal do ponto  $Q'$  (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por esta não ser necessária. Em seguida, pela projeção horizontal do ponto  $Q'$ , conduziu-se a projeção horizontal do raio luminoso que passa por  $Q'$  e determinou-se a sua sombra, que se situa no eixo **X** –  $Q'_s$ .  $Q'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra da **semicircunferência  $A'B'$** .

O arco  $\widehat{A'Q'}$  produz sombra no **SPFS** e o arco  $\widehat{Q'B'}$  produz sombra no **SPHA**.

*Determinação da sombra projetada da base inferior do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:*

Trata-se de uma direção luminosa e o arco  $\widehat{Q'B'}$  está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a **sombra projetada do arco  $\widehat{Q'B'}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um arco de circunferência geometricamente igual ao arco  $\widehat{Q'B'}$ . Assim, determinou-se a sombra do ponto  $O'$  no Plano Horizontal de Projeção, conduzindo, por  $O'$  (o centro da base inferior do cilindro), um raio luminoso com a direção luminosa convencional. A sombra do ponto  $O'$  no Plano Horizontal de Projeção é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa e situa-se no **SPHP**, pelo que é uma sombra virtual – é  $O'_{v_1}$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O'_{v_1}$  e com 3,5 cm de raio (o raio da base), desenhou-se uma circunferência que é a sombra projetada da base inferior do cilindro no Plano Horizontal de Projeção. A parte dessa circunferência que está compreendida entre os pontos  $Q'_s$  e  $B'_{s_1}$  (o arco dessa circunferência que tem extremos em  $Q'_s$  e em  $B'_{s_1}$ ) é a sombra projetada do arco  $\widehat{Q'B'}$  no **SPHA**. Sublinha-se que o arco  $\widehat{Q'_s B'_{s_1}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  no ponto  $B'_{s_1}$ .

*Determinação da sombra projetada da base inferior do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{A'Q'}$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício 835. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). No entanto, atendendo à reduzida dimensão do arco  $\widehat{A'Q'}$ , considera-se que os **oito pontos** atrás referidos é um número excessivo para uma curva tão pequena.

Assim, para determinar os pontos necessários a um desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva, começemos por inscrever o arco  $\widehat{A'Q'}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X** – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco  $\widehat{A'Q'}$  corresponde a  $1/4$  do quadrado total (o  $1/4$  que a figura apresenta e que engloba a **maior parte** do arco  $\widehat{A'Q'}$ ).

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco  $\widehat{A'Q'}$  na parte correspondente desse quadrado de **lados paralelos ao eixo X** (que é  $1/4$  do quadrado inicial), desenhando em seguida a sua diagonal que passa pelo ponto  $O'$  – dois dos vértices desse  $1/4$  do quadrado permitem-nos determinar, imediatamente, **dois pontos do segmento de elipse**. O ponto em que a diagonal do quadrado corta o arco  $\widehat{A'Q'}$  permite-nos determinar mais **um ponto do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra desse  $1/4$  do quadrado no Plano Frontal de Projeção, bem como da sua diagonal.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra do centro do círculo (o ponto  $O'$ ) no Plano Frontal de Projeção –  $O'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $O'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $O'$ . A sombra do 1/4 do quadrado no Plano Frontal de Projeção corresponde a um paralelogramo que tem um vértice em  $O'_{s_2}$  – o **segmento de elipse** estará inscrita nesse paralelogramo.

O lado de maior afastamento desse 1/4 do quadrado é o segmento  $[MO']$  – determinou-se a sombra real do ponto  $M$ , o que nos permitiu determinar a sombra do lado  $[MO']$  no Plano Frontal de Projeção (o segmento  $[M_{s_2}O'_{s_2}]$ ). Em seguida, determinou-se a sombra do vértice de menor afastamento e mais à esquerda do polígono (o ponto  $R$ ) – o ponto  $R_{s_2}$  é a sombra do ponto  $R$  no Plano Frontal de Projeção e é uma sombra real, pois situa-se no **SPFS**. As sombras dos lados de topo do polígono estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos, o que nos permitiu desenhar o paralelogramo que é a sombra do 1/4 do quadrado.

Em seguida desenhou-se a diagonal  $[R_{s_2}O'_{s_2}]$  do paralelogramo. O ponto  $M_{s_2}$  é, imediatamente, um dos pontos do segmento de elipse. O extremo superior do lado mais à direita do paralelogramo é um outro ponto do segmento da elipse. O ponto em que o **arco  $\widehat{A'Q'}$**  corta a diagonal do 1/4 do quadrado situa-se à necessariamente sobre a diagonal  $[R_{s_2}O'_{s_2}]$  do paralelogramo. Assim, pela projeção frontal daquele ponto conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se o ponto em que aquela interseca a diagonal  $[R_{s_2}O'_{s_2}]$  do paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **um ponto do segmento de elipse**. Note que esse ponto é, na prática, o ponto  $A'_{s_2}$  (a sombra do extremo inferior da geratriz  $[AA']$ ).

Aos **três pontos** determinados acresce, ainda, a sombra do ponto  $Q'$  ( $Q'_{s_2}$ ), o que perfaz um total de **quatro pontos** – estes quatro pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  em  $A'_{s_2}$ .

Note ainda que existe um pequeno troço da curva desenhada que não faz parte da **sombra real** do arco  $\widehat{A'Q'}$ . Esse troço é o troço que se situa para cima de  $A'_{s_2}$ . A necessidade deste troço foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através dele é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivesse desenhado este pequeno troço, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de reta  $[A'_{s_2}A_{s_2}]$ , pelo segmento de elipse  $\widehat{A'_{s_2}Q'_{s_2}}$ , pelo arco de circunferência  $\widehat{Q'_{s_2}B'_{s_2}}$ , pela linha quebrada aberta  $[B'_{s_2}Q_{s_2}B_{s_2}]$  e, ainda, pelo segmento de elipse  $\widehat{A_{s_2}B_{s_2}}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cilindro nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cilindro é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cilindro).

Após o desenho do contorno da sombra (no qual se atendeu às situações de invisibilidades da sombra), preencheu-se a área **visível** da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases do sólido), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes, dos traçados referentes ao recurso ao plano luz/sombra passante, das retas  $i$ ,  $i'$ ,  $t$  e  $t'$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

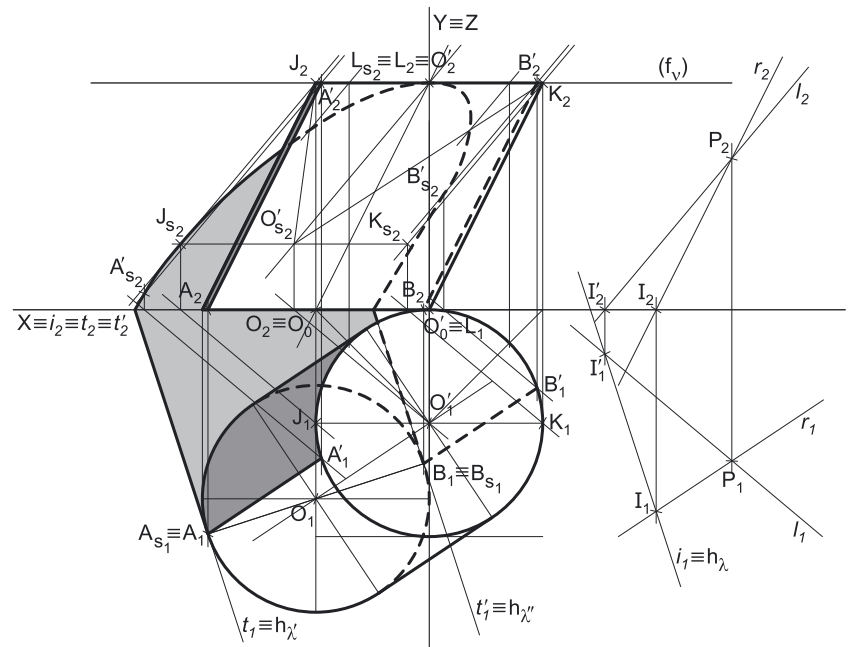
## 934.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O** (o centro da base inferior do cilindro), pelas suas projeções, em função dos dados. Tendo em conta que a base superior está contida num plano horizontal (de nível) e é tangente ao Plano Frontal de Projeção, sabe-se imediatamente que o afastamento do centro da base superior (o ponto **O'**) é igual ao raio da circunferência que delimita a base, que é 3 cm. Assim, representou-se o ponto **O'**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se, também, o plano  $v$  (o plano que contém a base superior), pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O'** (**O'\_2**). O plano  $v$  não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções do cilindro:*

A base inferior do cilindro está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio (o raio das bases), desenhou-se a projeção horizontal da base inferior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X** (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).



A base superior do cilindro está contida num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O'**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O'**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base superior do cilindro (que é tangente ao eixo **X**). A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abcissa das projeções frontais das duas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção horizontal do eixo do cilindro – o segmento **[O<sub>1</sub>O'<sub>1</sub>]**). A semicircunferência mais à direita e de menor afastamento da circunferência que delimita a base inferior (e que está compreendida entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

**1.** Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **r**, oblíqua (paralela às geratrizes do cilindro), e a reta **l** (um raio luminoso, com a direção luminosa dada no enunciado). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra

**2.** Determinou-se a reta **i**, que é a reta de interseção do plano definido pelas retas **r** e **l** (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base inferior, que está contida no Plano Horizontal de Projeção). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **r** com o Plano Horizontal de Projeção) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o Plano Horizontal de Projeção).

Note que, neste caso, o ponto **I** é o traço horizontal da reta **r** e o ponto **I'** é o traço horizontal do raio luminoso **l**. Assim, neste caso, a reta **i** é, imediatamente, o traço horizontal do plano  $\lambda$  (**h<sub>λ</sub>**), o que se identificou no desenho.

**3.** Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta **i** – as retas **t** e **t'**.

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base inferior) que são paralelas a uma reta dada (que é a projeção horizontal da reta **i** – **i<sub>1</sub>**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **A<sub>1</sub>** e **B<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que, neste caso, as retas  $t$  e  $t'$  são, imediatamente, os traços horizontais dos dois planos tangentes luz/sombra ( $h_{\lambda'}$  e  $h_{\lambda''}$ ), pois o plano que contém a base inferior do cilindro é o Plano Horizontal de Projeção – esse facto foi identificado imediatamente no desenho.

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, as geratrizes separatrizes luz/sombra (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  – note que o ponto  $A'$  é o extremo superior da geratriz  $[AA']$ , tal como o ponto  $B'$  é o extremo superior da geratriz  $[BB']$ . Salienta-se que a geratriz  $[BB']$  é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cilindro) e é também invisível em projeção horizontal (por se situar igualmente na parte invisível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cilindro).

As geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do cilindro que está iluminada da parte que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da direita), a parte iluminada da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência  $\widehat{AB}$  de maior afastamento. A base superior do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  de menor afastamento está em sombra, assim, como a base inferior do cilindro. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[\widehat{AB}B'A']$ , que integra as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ , bem como a semicircunferência  $\widehat{AB}$  de maior afastamento (da base inferior) e a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  de menor afastamento (da base superior).

Em projeção frontal, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[AA']$  (o segmento de reta  $[A_2A'_2]$ ) e a projeção frontal da geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a sombra própria a assinalar, em projeção frontal. Note que a base inferior (que está em sombra) é invisível em projeção frontal, pois é projetante frontal.

Em projeção horizontal, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[AA']$  (o segmento de reta  $[A_1A'_1]$ ) e a projeção horizontal da geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a sombra própria a assinalar, em projeção horizontal. Note que a base inferior, apesar de estar em sombra, é invisível em projeção horizontal.

A sombra própria do cilindro foi assinalada com uma mancha clara e uniforme (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A sombra projetada do cilindro é limitada pela sombra projetada da linha separatriz luz/sombra. Assim, há que determinar a sombra projetada da linha separatriz luz/sombra nos planos de projeção, o que será, na prática, a sombra projetada do cilindro nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da linha separatriz luz/sombra. Os pontos  $A$  e  $B$  situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $A_{s_1} \equiv A_1$  e  $B_{s_1} \equiv B_1$ .  $A'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $A'$  (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $A'$ .  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $B'$  (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $B'$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro admite necessariamente a existência de pontos de quebra.

Os pontos  $A$  e  $B$  situam-se no SPHA (tal como as suas sombras –  $A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$ ) e tal como a própria base inferior do cilindro se situa no SPHA – assim, a sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  de maior afastamento (da base inferior) está coincidente com o próprio arco  $\widehat{AB}$ .  $A'_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no SPFS, pelo que, à partida, a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) não admite a existência de qualquer ponto de quebra.

$A_{s_1}$  situa-se no SPHA e  $A'_{s_2}$  situa-se no SPFS – assim, existe um ponto de quebra entre  $A_{s_1}$  e  $A'_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).  $B_{s_1}$  situa-se no SPHA e  $B'_{s_2}$  situa-se no SPFS – assim, existe um ponto de quebra entre  $B_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A'_{s_2}$  e  $A_{s_1}$  poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto  $A$  ou à sombra virtual do ponto  $A'$ . No entanto, optou-se por um raciocínio que nos permite economizar traçado. O plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cilindro ao longo da geratriz  $[AA']$  (o plano  $\lambda'$ ) interseca o Plano Horizontal de Projeção (que é o plano que contém a base inferior do sólido) segundo a reta  $t$  – a reta  $t$  é, assim, uma reta horizontal (de nível) desse plano e é, também, o traço horizontal desse plano (o plano  $\lambda'$ ). Acontece que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da geratriz  $[AA']$  situa-se sobre o traço horizontal desse plano, que é  $h_{\lambda'}$ . Assim, o ponto  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[AA']$ ) é, de forma direta, o ponto de interseção de  $h_{\lambda'}$  (o traço horizontal do plano  $\lambda'$ ) com o eixo  $X$ . O segmento  $[A_{s_1}Q_s]$  é a sombra projetada da geratriz  $[AA']$  no SPHA. A linha quebrada aberta  $[A_{s_1}Q_sA'_{s_2}]$  é a sombra real do segmento  $[AA']$  (a sombra projetada do segmento nas faces do 1º Diedro).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B'_{s_2}$  e  $B_{s_1}$  poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto  $B$  ou à sombra virtual do ponto  $B'$ . No entanto, à semelhança do atrás exposto para o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $A'_{s_2}$ , optou-se pelo mesmo raciocínio, que nos permite economizar traçado. O plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cilindro ao longo da geratriz  $[BB']$  (o plano  $\lambda''$ ) interseca o Plano Horizontal de Projeção (que é o plano que contém a base inferior do sólido) segundo a reta  $t'$  – a reta  $t'$  é, assim, uma reta horizontal (de nível) desse plano e é, também, o traço horizontal desse plano (o plano  $\lambda''$ ). Acontece que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da geratriz  $[BB']$  situa-se sobre o traço horizontal desse plano, que é  $h_{\lambda''}$ . Assim, o ponto  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[BB']$ ) é, de forma direta, o ponto de interseção de  $h_{\lambda''}$  (o traço horizontal do plano  $\lambda''$ ) com o eixo  $X$ . O segmento  $[B_{s_1}Q'_s]$  é a sombra projetada da geratriz  $[BB']$  no SPHA. A linha quebrada aberta  $[B_{s_1}Q'_sB'_{s_2}]$  é a sombra real do segmento  $[BB']$  (a sombra projetada do segmento nas faces do 1º Diedro).

*Determinação da sombra projetada da base superior do cilindro:*

Como atrás se referiu, à partida, a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos  $A'$  e  $B'$ ) se situam no mesmo Plano de Projeção (se situam, ambas, no SPFS). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, atendendo a que os dois pontos de quebra da sombra do cilindro já foram localizados (um deles situa-se na sombra da geratriz  $[AA']$  e o outro na sombra da geratriz  $[BB']$ ), é possível garantir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  não admite a existência de pontos de quebra.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, é possível concluir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  se situa, na sua totalidade, no **SPFS** (onde se situam as sombras dos seus extremos) – a sua sombra será um **segmento de elipse**, que é uma curva de erro e cujo desenho requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Assim, começou-se por inscrever a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que se considerou suficiente para a determinação da sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  corresponde a um «meio quadrado» do quadrado total (o «meio quadrado» que a figura apresenta e que engloba a maior parte da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$ ). Os extremos do lado de maior afastamento do «meio quadrado» permitem-nos determinar **dois pontos** do **segmento de elipse**. O extremo de menor afastamento da parte correspondente da mediana de topo do quadrado permite-nos determinar mais **um ponto** do **segmento de elipse**. Os pontos em que as partes correspondentes das diagonais do quadrado cortam a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  permitem-nos determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, bem como das partes correspondentes da mediana de topo e das diagonais do quadrado.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo que é a base superior (o ponto  $O'$ ) –  $O'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $O'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $O'$ .

Em seguida, determinaram-se as sombras no Plano Frontal de Projeção dos extremos do lado de maior afastamento do «meio quadrado» – o segmento  $[JK]$ .  $J_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $J$  e  $K_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $K$ . Assim, o segmento  $[J_{s_2}K_{s_2}]$  é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção do segmento  $[JK]$ . Em seguida, determinou-se a sombra do extremo de menor afastamento do raio de topo da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  (o ponto  $L$ ) – o ponto  $L_{s_2}$  é a sombra do ponto  $L$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFS**, pelo que é uma sombra real. As sombras dos lados de topo do polígono estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos.

Em seguida, teve-se em conta que o lado de menor afastamento do «meio quadrado» é paralelo ao lado  $[JK]$  e passa pelo ponto  $L$  – nesse sentido, por  $L_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $L$ ) conduziu-se uma paralela ao segmento  $[J_{s_2}K_{s_2}]$ , que é a sombra do lado de menor afastamento do «meio quadrado». A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do «meio quadrado», tendo-se desenhado, também, a sombra da mediana de topo da figura – é o segmento de reta  $[L_{s_2}O_{s_2}]$ .

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O_{s_2}$  e têm extremos nos vértices superiores do paralelogramo).

Os pontos  $J_{s_2}$ ,  $K_{s_2}$  e  $L_{s_2}$  são, imediatamente, **três pontos** do **segmento de elipse**. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as partes correspondentes das diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções frontais daqueles pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais do paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**.

Aos **cinco pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos  $A'$  e  $B'$  ( $A'_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$ , respetivamente), o que perfaz um total de **sete pontos** (o ponto  $B'_{s_2}$  é um dos sete pontos determinados anteriormente) – estes sete pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  em  $A'_{s_2}$ , tal como é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  em  $B'_{s_2}$ .

Note ainda que existe um pequeno troço da curva desenhada que não faz parte da **sombra real** da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$ . Esse troço é o troço que se situa para baixo de  $B'_{s_2}$  – a necessidade deste troço foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através dele é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivesse desenhado este pequeno troço, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

Em seguida, concluiu-se o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado, pela linha quebrada aberta  $[A'_{s_2}O_{s_2}A_{s_1}]$ , pela semicircunferência  $\widehat{A_{s_1}B_{s_1}}$  de maior afastamento e, ainda, pela linha quebrada aberta  $[B_{s_1}O'_{s_2}B'_{s_2}]$ . Note que parte da sombra projetada do cilindro é invisível (em projeção frontal), pois está oculta pelo próprio cilindro.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área **visível** da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

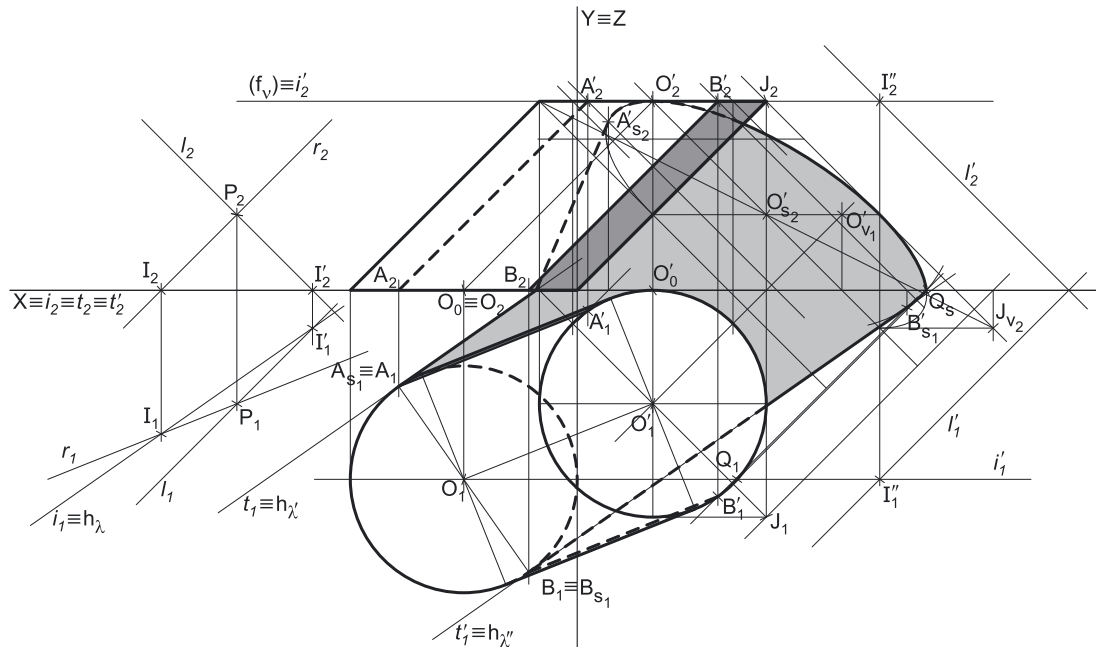
Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base superior do sólido), no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes, das retas  $t$  e  $t'$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

935.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **O'**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se, também, o plano **v** (o plano que contém a base superior), pelo seu traço frontal. O plano **v** é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (**f<sub>v</sub>**) passa pela projeção frontal do ponto **O'** (**O'<sub>2</sub>**). O plano **v** não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

*Determinação das projeções do cilindro:*

A base superior do cilindro é tangente ao Plano Frontal de Projeção e o seu centro tem 3 m de afastamento, pelo que a base superior do sólido tem 3 cm de raio. Essa base está contida num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O'<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O'**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base superior do cilindro (que é tangente ao eixo **X**). A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano **v** (**f<sub>v</sub>**), pois o plano **v** é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

A base inferior do cilindro está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio (as duas bases têm o mesmo raio), desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X** (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e menor abscissa das projeções frontais das duas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção horizontal do eixo do cilindro – o segmento **[O<sub>1</sub>O'<sub>1</sub>]**). A semicircunferência mais à direita da circunferência que delimita a base inferior (e que está compreendida entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **r**, paralela às geratrizes do cilindro, e a reta **l** (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta **i**, que é a reta de interseção do plano definido pelas retas **r** e **l** (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base inferior, que está contida no Plano Horizontal de Projeção). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **r** com o Plano Horizontal de Projeção) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o Plano Horizontal de Projeção).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que, neste caso, o ponto  $I$  é o traço horizontal da reta  $r$  e o ponto  $I'$  é o traço horizontal do raio luminoso  $l$ . Assim, neste caso, a reta  $i$  é, imediatamente, o traço horizontal do plano  $\lambda$  ( $h_\lambda$ ), o que se identificou no desenho.

3. Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ .

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base inferior) que são paralelas a uma reta dada (que é a projeção horizontal da reta  $i - i_1$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $B$ ).

Note que, neste caso, as retas  $t$  e  $t'$  são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra** ( $h_\lambda$  e  $h_{\lambda'}$ ), pois o plano que contém a base inferior do cilindro é o Plano Horizontal de Projeção – esse facto foi identificado imediatamente no desenho.

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  – note que o ponto  $A'$  é o extremo superior da geratriz  $[AA']$ , tal como o ponto  $B'$  é o extremo superior da geratriz  $[BB']$ . A geratriz  $[AA']$  é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cilindro) e a geratriz  $[BB']$  é invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cilindro).

As geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência  $\overline{AB}$  mais à esquerda e de maior afastamento. A base superior do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência  $\overline{AB}$  mais à direita e de menor afastamento está **em sombra**, assim, como a base inferior do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[A'B'B'A']$ , que integra as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ , bem como a **semicircunferência  $\overline{AB}$  mais à esquerda e de maior afastamento** (da base inferior) e a **semicircunferência  $\overline{A'B'}$  mais à direita e de menor afastamento** (da base superior).

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é **visível** é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[BB']$  e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base inferior (que está em sombra) é invisível em projeção frontal (por ser projetante frontal).

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é **visível** é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[AA']$  e a geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base inferior (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal.

A **sombra própria** visível do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos  $A$  e  $B$  situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente  $A_1 \equiv A_{s_1}$  e  $B_1 \equiv B_{s_1}$ .  $A'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $A'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $A'$ .  $B'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $B'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $B'$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

Os pontos  $A$  e  $B$  situam-se no **SPHA** (tal como as suas sombras –  $A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$ ) e tal como a própria base inferior do cilindro se situa no **SPHA** – assim, a sombra da semicircunferência  $\overline{AB}$  mais à esquerda e de maior afastamento (da base inferior) está coincidente com o próprio arco  $\overline{AB}$ .  $B_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[BB']$  não admite ponto de quebra.  $A'_{s_2}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra da semicircunferência  $\overline{A'B'}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) admite necessariamente a existência de um ponto de quebra (que se situa entre  $A'_{s_2}$  e  $B'_{s_1}$ ).

$B_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[BB']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s_1}B'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BB']$  e situa-se no **SPHA**.

$A'_{s_2}$  situa-se no **SPFS** e  $A_{s_1}$  situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre  $A'_{s_2}$  e  $A_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A'_{s_2}$  e  $A_{s_1}$ , poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto  $A$  ou à sombra virtual do ponto  $A'$ . No entanto, optou-se por um raciocínio que nos permite economizar traçado. O plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cilindro ao longo da geratriz  $[AA']$  (o plano  $\lambda'$ ) interseca o Plano Horizontal de Projeção (que é o plano que contém a base inferior do sólido) segundo a reta  $t$  – a reta  $t$  é, assim, uma reta horizontal (de nível) desse plano e é, também, o traço horizontal desse plano (o plano  $\lambda'$ ). Acontece que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da geratriz  $[AA']$  situa-se sobre o traço horizontal desse plano, que é  $h_{\lambda'}$ . Assim, o ponto  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[AA']$ ) é, de forma direta, o ponto de interseção de  $h_{\lambda'}$  (o traço horizontal do plano  $\lambda'$ ) com o eixo  $X$ . O segmento  $[A_{s_1}Q_s]$  é a sombra projetada da geratriz  $[AA']$  no **SPHA**. A linha quebrada aberta  $[A_{s_1}Q_sA'_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[AA']$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação da sombra projetada da base superior do cilindro:

Como atrás se referiu, a sombra da **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$**  (da base superior) admite necessariamente a existência de um ponto de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A'** e **B'**) se situam em Planos de Projeção distintos. Para determinar o ponto de quebra da sombra da **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$** , e à semelhança de situações idênticas, há que recorrer ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l'**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l'** está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano **v** (o plano que contém a base superior do cilindro) – a reta **i'**.

Para definir a reta **i'** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano **v** são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano **v** é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta **i'** é, assim, uma reta fronto-horizontais. Já temos uma direção para definir a reta **i'**. Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l'** com o plano **v** – o ponto **I''**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i'** – a reta **i'** está definida por um ponto (o ponto **I''**) e por uma direção (é fronto-horizontais).

A reta **i'** é **secante** à **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$**  – a reta **i'** corta a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$**  no ponto **Q'**. A sombra do ponto **Q'** (que se situa no eixo **X**) é, assim, o ponto de quebra da sombra da **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$** . Note que não se representou a projeção frontal do ponto **Q'** (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por esta não ser necessária. Em seguida, pela projeção horizontal do ponto **Q'**, conduziu-se a projeção horizontal do raio luminoso que passa por **Q'** e determinou-se a sua sombra, que se situa no eixo **X** – **Q'\_s**. **Q'\_s** é, assim, o ponto de quebra da sombra da **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$** .

O arco  **$\widehat{A'Q'}$**  produz sombra no **SPFS** e o arco  **$\widehat{B'Q'}$**  produz sombra no **SPHA**.

## Determinação da sombra projetada da base superior do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:

Trata-se de uma direção luminosa e o arco  **$\widehat{B'Q'}$**  está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano **v**), pelo que a **sombra projetada do arco  $\widehat{B'Q'}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um arco de circunferência geometricamente igual ao **arco  $\widehat{B'Q'}$** . Assim, determinou-se a sombra do ponto **O'** no Plano Horizontal de Projeção, conduzindo, por **O'** (o centro da base inferior do cilindro), um raio luminoso com a direção luminosa convencional. A sombra do ponto **O'** no Plano Horizontal de Projeção é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa e situa-se no **SPHP**, pelo que é uma sombra virtual – é **O'\_{v\_1}**.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O'\_{v\_1}** e com 3 cm de raio (o raio da base), desenhou-se um arco de circunferência, com extremos em **Q'\_s** e em **B'\_{s\_1}**, que é a sombra projetada do arco  **$\widehat{B'Q'}$**  no **SPHA**. Sublinha-se que o arco  **$\widehat{B'_{s_1}Q'_s}$**  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz **[BB']** no ponto **B'\_{s\_1}**.

## Determinação da sombra projetada da base superior do cilindro no Plano Frontal de Projeção:

A sombra projetada do arco  **$\widehat{A'Q'}$**  no **SPFS** (onde se situam as sombras dos seus extremos) é um **segmento de elipse**, que é uma curva de erro e cujo desenho requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco  **$\widehat{A'Q'}$**  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco  **$\widehat{A'Q'}$**  corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam o arco  **$\widehat{A'Q'}$**  na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam o arco  **$\widehat{A'Q'}$**  permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo (o ponto **O'**) – **O'\_{s\_2}** é a sombra real do ponto **O'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **O'**. A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Frontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

Note que o lado de menor afastamento do quadrado tem afastamento nulo, pelo que a sua sombra está coincidente com esse mesmo lado, pelo que já temos, também, as sombras de dois vértices do polígono – as sombras dos seus vértices de menor afastamento. Falta-nos determinar a sombra do seu lado de maior afastamento, o que se processa a partir da sombra do seu vértice de maior afastamento e mais à direita – o ponto **J**.

**J\_{v\_2}** é a sombra projetada do ponto **J** no Plano Frontal de Projeção – situa-se no **SPFS** e é a sombra virtual do ponto **J** (é o traço frontal do raio luminoso que passa por **J**). O ponto **J** é um extremo de um lado fronto-horizontais da figura, pelo que, por **J\_{v\_2}** se conduziu uma fronto-horizontais, que nos permitiu determinar a sombra de mais um lado da figura. A sombra do restante da figura (dos 3/4 do quadrado) processou-se com o recurso às sombras das suas medianas e das partes correspondentes das suas diagonais, que passam todas em **O'\_{s\_2}** (a sombra real do ponto **O'**).

Note que as medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que o arco da base superior corta as diagonais dos 3/4 do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções frontais daqueles pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Aos **sete pontos** determinados acrescem, ainda, a sombra do ponto **A'** ( $A'_{s_2}$ ) e o ponto de quebra ( $Q'_s$ ), o que perfaz um total de **nove pontos** – estes nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  em  $A'_{s_2}$ .

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da sombra do arco  $\widehat{A'Q'}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para baixo de  $A'_{s_2}$  (um deles) e para baixo de  $Q'_s$  (o outro) – este último é uma **sombra virtual**, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta que é composta pelo segmento de elipse desenhado, pelo arco de circunferência  $\widehat{Q'_s B'_s}$ , pelo segmento de reta  $[B'_s B_{s_1}]$ , pela semicircunferência  $A_{s_1} B_{s_1}$  mais à esquerda e de maior afastamento e, ainda, pela linha quebrada aberta  $[A_{s_1} Q_s A'_{s_2}]$ . Note que parte da sombra projetada do cilindro é invisível (em projeção frontal), pois está oculta pelo próprio cilindro.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a base superior do sólido), no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes, das retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$ , dos traçados referentes ao recurso ao plano luz/sombra passante e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 936.

### Dados:

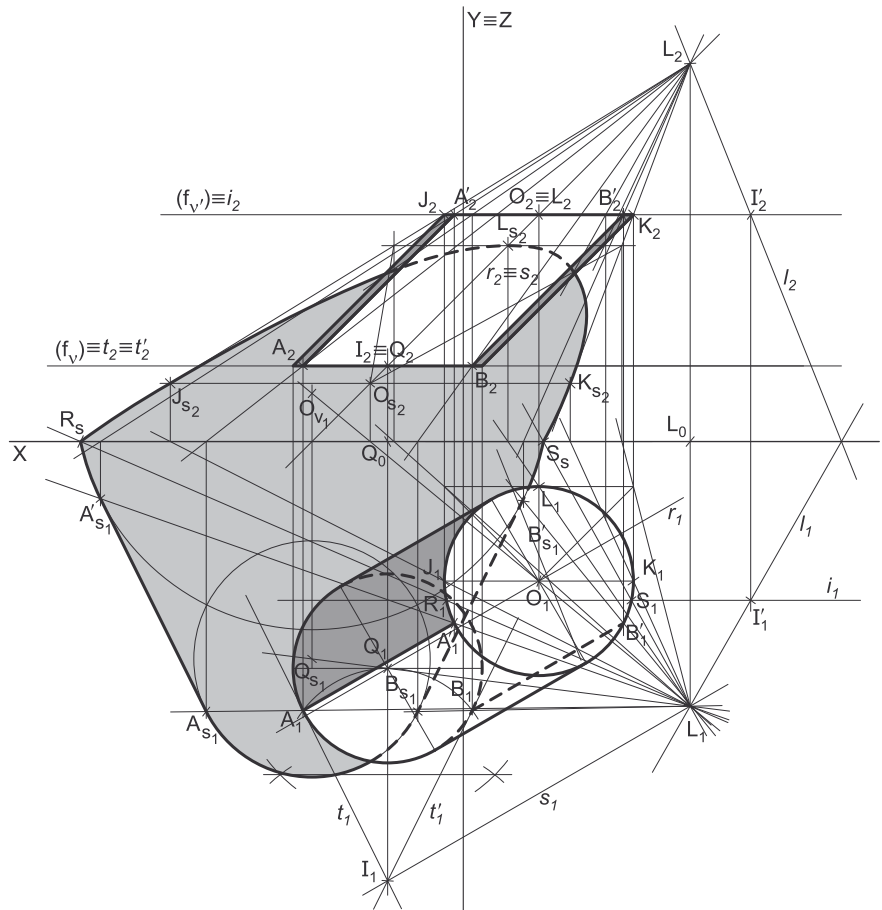
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **Q** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base inferior do sólido) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto **Q**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

A base inferior do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com 2,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base inferior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das bases. Assim, porque o cilindro tem 4 cm de altura e a sua base inferior tem 2 cm de cota (a cota do ponto **Q**), o plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do sólido) tem 6 cm de cota ( $2 + 4 = 6$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal. O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, pelas projeções do ponto **Q**, conduziram-se as projeções homónimas da reta **r** (a reta suporte do eixo do cilindro), com a direção dada no enunciado. Foi possível, agora, determinar as projeções do ponto **O**, o centro da base superior do cilindro – o ponto **O** é o ponto de interseção da reta **r** (a reta suporte do eixo do sólido) com o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do cilindro). As projeções do ponto **O** tiveram determinação direta, a partir da sua projeção frontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **r**) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ).

A base superior do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v'$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 2,5 cm de raio (as duas bases têm o mesmo raio), desenhou-se a projeção horizontal da base superior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abscissa das projeções frontais das duas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção horizontal da reta **r** – a reta **r**<sub>1</sub>). A semicircunferência da base inferior que tem menor afastamento e se situa mais à direita (e que está compreendida entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo foco luminoso, uma reta paralela às geratrizes do cilindro – a reta **s**; **2.** determina-se o ponto de interseção da reta **s** com o plano da base (de referência) – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo foco luminoso (o ponto **L**), uma reta paralela às geratrizes do sólido – a reta **s**, que está definida por um ponto (o ponto **L**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro, que é a direção da reta **r**).
2. Determinou-se o ponto de interseção a reta **s** com o plano da base (de referência) – o ponto **I**. Considerou-se que a base de referência é a base inferior do cilindro (a base que está contida no plano  $v$ ). As projeções do ponto **I** tiveram determinação direta, a partir da sua projeção frontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **s**) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro – as retas **t** e **t'**. As retas **t** e **t'** são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $v$  (o plano que contém a base inferior do cilindro).

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto **I**<sub>1</sub>, que é a projeção horizontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **A**<sub>1</sub> e **B**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**).

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base inferior do cilindro nos pontos **A** e **B**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[AA']** e **[BB']** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[AA']** e **[BB']** – note que o ponto **A'** é o extremo superior da geratriz **[AA']**, tal como o ponto **B'** é o extremo superior da geratriz **[BB']**. A geratriz **[BB']** é invisível em projeção horizontal, por se situar na parte invisível (em projeção horizontal) da superfície lateral do cilindro.

As geratrizes **[AA']** e **[BB']** separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, do lado e da direita), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor AB** (da base inferior). A base superior do cilindro também está iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde ao **arco maior AB** da base inferior está **em sombra**, assim, como a base inferior do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[ABB'A']**, que integra as geratrizes **[AA']** e **[BB']**, bem como o **arco menor AB** (da base inferior) e o **arco maior B'A'** (da base superior).

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz **[AA']** e a projeção frontal da geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cilindro, bem como a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz **[BB']** e a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal. Assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base inferior (que está em sombra) é invisível em projeção frontal (por ser projetante frontal).

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz **[AA']** e a projeção horizontal da geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro – essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base inferior, que está em sombra, é invisível (e projeção horizontal).

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em ambas as projeções) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $A_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $B_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.  $B'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se no mesmo Plano de Projeção, pelo que, **à partida**, a sombra projetada (real) do cilindro **não admite a existência** de quaisquer **pontos de quebra**.

Os pontos **A** e **B** situam-se no **SPHA** (tal como as suas sombras –  $A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$ ) – assim, **à partida**, a sombra do **arco menor**  $\widehat{AB}$  (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra.  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que, **à partida**, a sombra do **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  (da base superior) não admite a existência de pontos de quebra.

$A_{s_1}$  e  $A'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[AA']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AA']$  e situa-se no **SPHA**.  $B_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[BB']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s_1}B'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BB']$  e situa-se no **SPHA**.

Após o desenho das sombras projetadas das duas geratrizes, há que desenhar as sombras dos dois arcos de circunferência que integram a linha separatriz luz/sombra – o **arco menor**  $\widehat{AB}$  (da base inferior) e o **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  (da base superior).

*Determinação da sombra projetada da base inferior do cilindro:*

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra do **arco menor**  $\widehat{AB}$  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A** e **B**) se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no **SPHA**). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, as sombras dos extremos do arco situam-se suficientemente distantes do eixo **X** para se garantir que a sombra do arco não admite a existência de pontos de quebra. Nesse sentido, é possível concluir que a sombra do **arco menor**  $\widehat{AB}$  se situa, na sua totalidade, no **SPHA** (onde se situam as sombras dos seus extremos).

Por outro lado, atendendo a que se trata de um foco luminoso e ainda porque o arco  $\widehat{AB}$  está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, a **sombra projetada do arco menor**  $\widehat{AB}$  no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) é um arco de circunferência ampliado em relação ao **arco**  $\widehat{AB}$ . Assim, determinou-se a sombra real do ponto **Q** conduzindo, por **Q**, um raio luminoso passando pelo ponto **L** (o foco luminoso) –  $Q_{s_1}$  é a sombra real do ponto **Q**, situa-se no **SPHA** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **Q**.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $Q_{s_1}$  e com raio até  $A_{s_1}$  ou  $B_{s_1}$ , desenhou-se o arco que é a sombra projetada do **arco menor**  $\widehat{AB}$  no **SPHA** – trata-se de um arco com extremos nos pontos  $A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$ . Sublinha-se que o arco  $\widehat{A_{s_1}B_{s_1}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  no ponto  $A_{s_1}$  e é também **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  no ponto  $B_{s_1}$ .

*Determinação da sombra projetada da base superior do cilindro:*

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra do **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A'** e **B'**) se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no **SPHA**). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Por outro lado, e atendendo ao facto de que as sombras dos extremos do arco se situam muito próximas do eixo **X**, considera-se que esta poderá ser uma das situações em que as sombras dos extremos do arco se situam num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção.

Assim, para determinar a sombra projetada do **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  (que é um arco de circunferência), o **primeiro passo** consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra na sombra do arco, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l** está definido por dois pontos – o foco luminoso **L** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que não se identificou). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $v'$  (o plano que contém o **arco maior**  $\widehat{A'B'}$ ) – a reta **i**.

Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $v'$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $v'$  é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta **i** é, assim, uma reta fronto-horizontais. Já temos uma direção para definir a reta **i**. Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano  $v'$  – o ponto **I'**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i** – a reta **i** está definida por um ponto (o ponto **I'**) e por uma direção (é fronto-horizontais).

A reta **i** é secante ao **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  – a reta **i** corta o **arco maior**  $\widehat{A'B'}$  nos pontos **R** e **S**, pelo que as sombras daqueles dois pontos serão, assim, os pontos de quebra da sombra do **arco maior**  $\widehat{A'B'}$ . Note que não se determinaram as projeções frontais dos dois pontos (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por estas não serem necessárias à resolução do exercício. Assim, conduziram-se, pelas projeções horizontais dos pontos **R** ( $R_1$ ) e **S** ( $S_1$ ) as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se as respetivas sombras ( $R_s$  e  $S_s$ , respetivamente), no eixo **X**. O segmento de reta  $[R_sS_s]$  é, assim, a linha de quebra da sombra do cilindro.

O arco  $\widehat{RS}$  produz sombra no **SPFS** e os arcos  $\widehat{A'R}$  e  $\widehat{S'B}$  produzem sombra no **SPHA**. A sombra que o arco  $\widehat{RS}$  produz no **SPFS** é um segmento de uma **oval**. A sombra que os arcos  $\widehat{A'R}$  e  $\widehat{S'B}$  produzem no **SPHA** são dois arcos de circunferência.

*Determinação da sombra projetada da base superior do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:*

As sombras projetadas dos arcos  $\widehat{A'R}$  e  $\widehat{S'B}$  no **SPHA** são necessariamente arcos de circunferência, ampliados em relação aos arcos  $\widehat{A'R}$  e  $\widehat{S'B}$ . Começemos por determinar o centro desses dois arcos, que é a sombra do ponto **O** (o centro da base superior) no Plano Horizontal de Projeção –  $O_{v_1}$  é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **O** e situa-se no **SPHP**, pelo que é a sombra virtual do ponto **O**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinemos o raio desses dois arcos (que têm o mesmo raio), recorrendo a um ponto qualquer dos arcos  $\widehat{A'R}$  e  $\widehat{S'B}$ . Já temos quatro pontos que são sombras de pontos dos arcos – os pontos  $A_{s_1}$  e  $R_s$  (que são os extremos da sombra do arco  $\widehat{A'R}$ ) e os pontos  $B_{s_1}$  e  $S_s$  (que são os extremos da sombra do arco  $\widehat{S'B}$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_{v_1}$  e com raio até  $R_s$  ou  $A_{s_1}$  ou  $S_s$  ou  $B_{s_1}$ , desenharam-se dois arcos de circunferência – um arco que tem extremos em  $A_{s_1}$  e em  $R_s$  (que é a sombra do arco  $\widehat{A'R}$ ) e um outro arco que tem extremos em  $S_s$  e em  $B_{s_1}$  (que é a sombra do arco  $\widehat{S'B}$ ).

Note que o arco  $\widehat{A_{s_1}R_s}$  é **concordante** com o segmento  $[A'_{s_1}A_{s_1}]$  (a sombra da geratriz  $[AA']$ ) em  $A'_{s_1}$ , tal como o arco  $\widehat{S_sB_{s_1}}$  é **concordante** com o segmento  $[B'_{s_1}B_{s_1}]$  (a sombra da geratriz  $[BB']$ ) em  $B'_{s_1}$ .

*Determinação da sombra projetada da base superior do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

A sombra projetada do arco  $\widehat{RS}$  no **SPFS** é um segmento de uma **oval**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **oval** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **837**.

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco  $\widehat{RS}$  num «meio quadrado» de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando Em seguida, as partes correspondentes das diagonais e medianas do quadrado – note que esse «meio quadrado» engloba a quase totalidade do arco  $\widehat{RS}$ . A semicircunferência (da qual o arco  $\widehat{RS}$  é uma parte) intersesta aquelas linhas (as partes das diagonais e das medianas do quadrado que estão dentro do «meio quadrado») em cinco pontos, pontos esses cujas sombras serão, imediatamente, **cinco pontos** da **oval**. Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, bem como das linhas atrás referidas.

A sombra do «meio quadrado» (que é um retângulo) no Plano Frontal de Projeção é um trapézio. O segmento de reta  $[JK]$  é o lado de maior afastamento desse «meio quadrado» e os pontos  $J$  e  $K$  são, simultaneamente, dois vértices do «meio quadrado» e dois pontos do arco  $\widehat{RS}$ , o que nos permitirá determinar **dois pontos do segmento de elipse**. O ponto  $L$  é o extremo de menor afastamento do raio de topo que está no interior do «meio quadrado» (e que é a parte correspondente da mediana de topo do quadrado) e permite-nos determinar mais **um ponto do segmento de elipse**. Os pontos em que as partes correspondentes das diagonais do quadrado cortam o arco  $\widehat{RS}$  permitem-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Assim, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, bem como das partes correspondentes da mediana de topo e das diagonais do quadrado.

A sombra do «meio quadrado» determinou-se a partir das sombras dos seus dois vértices de maior afastamento ( $J$  e  $K$ ) e do ponto  $L$ .  $J_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $J$  –  $J_{s_2}$  situa-se no **SPFS**.  $K_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $K$  –  $K_{s_2}$  situa-se no **SPFS**.  $L_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $L$  –  $L_{s_2}$  situa-se no **SPFS**. O lado  $[JK]$  do «meio quadrado» é fronto-horizontal e a sua sombra projetada do Plano Frontal de Projeção (o segmento  $[J_{s_2}K_{s_2}]$ ) é igualmente fronto-horizontal e é o lado inferior do trapézio. O outro lado fronto-horizontal do «meio quadrado» passa pelo ponto  $L$  – a sua sombra projetada no Plano Frontal de Projeção é igualmente fronto-horizontal e passa por  $L_{s_2}$ , o que nos permitiu desenhara a reta suporte do lado superior do trapézio.

As sombras dos lados de topo do «meio quadrado» estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos, o que nos permitiu concluir o desenho do trapézio. Em seguida, determinou-se a sombra real do centro do círculo ( $O_{s_2}$ ), que se situa no **SPFS** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $O$  – note que  $O_{s_2}$  se situa necessariamente sobre o segmento  $[J_{s_2}K_{s_2}]$ . Em seguida, desenhou-se o segmento  $[O_{s_2}L_{s_2}]$ , que é a mediana do trapézio que passa por  $O_{s_2}$  (e que corresponde à sombra da mediana de topo do «meio quadrado»).

Os pontos  $L_{s_2}$ ,  $J_{s_2}$  e  $K_{s_2}$  são, imediatamente, **três pontos** do segmento da **oval** e são, ainda, os pontos em que o segmento da oval será tangente aos lados correspondentes do trapézio (são as sombras dos pontos em que o círculo é tangente aos lados correspondentes do «meio quadrado»).

Em seguida, desenharam-se os dois segmentos de reta que têm um extremo em  $O_{s_2}$  e o outro extremo nos vértices superiores do trapézio – esses segmentos de reta são as sombras das partes das diagonais do quadrado que se situam no «meio quadrado». Em seguida, transportaram-se os dois pontos em que a circunferência (que delimita o círculo) corta essas linhas do «meio quadrado» para as respetivas sombras no trapézio, com o recurso às projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos pontos (e que correspondem aos planos luz/sombra que passam por esses pontos). Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos** do segmento da oval.

Aos **cinco pontos** determinados acrescem os dois pontos de quebra (os pontos  $R_s$  e  $S_s$ ), o que perfaz um total de **sete pontos** do segmento da oval. Estes pontos permitem-nos um desenho relativamente preciso da curva, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da oval aos lados do trapézio – o segmento da oval é a sombra projetada do arco  $\widehat{RS}$  no Plano Frontal de Projeção.

O desenho do segmento da oval permitiu-nos concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de oval desenhado, pelo arco de circunferência  $\widehat{R_{s_1}A_{s_1}}$ , pelo segmento de reta  $[A'_{s_1}A_{s_1}]$ , pelo arco de circunferência  $\widehat{A_{s_1}B_{s_1}}$ , pelo segmento de reta  $[B_sB'_{s_1}]$  e pelo arco de circunferência  $\widehat{B_{s_1}S_s}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cilindro nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cilindro é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cilindro).

Após o desenho do contorno da sombra (no qual se atendeu às situações de invisibilidades da sombra), preencheu-se a área **visível** da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

## Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases do sólido), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao recurso ao plano luz/sombra passante, das retas  $r, s, i, t$  e  $t'$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de oval), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.







(continuação da página anterior)

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $f'$ , paralela às geratrizes do cilindro, e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra
2. Determinou-se a reta  $i$ , que é a reta de interseção do plano definido pelas retas  $s$  e  $l$  (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base inferior, que está contida no plano  $v$ ). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta  $f'$  com o plano  $v$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta  $l$  com o plano  $v$ ).

Salienta-se que, nesta situação, a reta  $i$  é necessariamente uma **reta de topo**.

Note as projeções dos pontos **I** e **I'** tiveram determinação direta, a partir das respetivas projeções frontais, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes (as retas  $f'$  e  $l$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).

3. Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ .

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base inferior) que são paralelas a uma reta dada (que é a projeção horizontal da reta  $i - i_1$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **A**<sub>1</sub> e **B**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**).

As retas  $t$  e  $t'$  são as retas de interseção dos **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $v$  (o plano que contém a base de referência do cilindro). Salienta-se que as retas  $t$  e  $t'$  são **retas de topo**.

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos **A** e **B**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[AA']** e **[BB']** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[AA']** e **[BB']** – note que o ponto **A'** é o extremo superior da geratriz **[AA']**, tal como o ponto **B'** é o extremo superior da geratriz **[BB']**. A geratriz **[BB']** é invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cilindro).

Salienta-se que, nesta situação, as geratrizes **[AA']** e **[BB']** são, na prática, as geratrizes do contorno aparente frontal do cilindro. De facto, a geratriz **[AA']** é a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal (é a geratriz de menor abcissa do cilindro), enquanto a geratriz **[BB']** é a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal (é a geratriz de maior abcissa do cilindro).

As geratrizes **[AA']** e **[BB']** separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência  $\overline{AB}$  de maior afastamento. A base superior do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência  $\overline{AB}$  de menor afastamento está **em sombra**, assim, como a base inferior do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $\overline{AB'B'A'}$ , que integra as geratrizes **[AA']** e **[BB']**, bem como a **semicircunferência  $\overline{AB}$  de maior afastamento** (da base inferior) e a **semicircunferência  $\overline{A'B'}$  de menor afastamento** (da base superior).

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra é **invisível** na sua totalidade, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **sombra própria** a assinalar. Note que a base inferior do cilindro (que está em sombra) é invisível em projeção frontal (pois é projetante frontal).

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é **visível** é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz **[AA']** e a geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base inferior (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal.

A **sombra própria** visível do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. **A**<sub>s<sub>1</sub></sub> é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**. **B**<sub>s<sub>1</sub></sub> é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**. **A'**<sub>s<sub>2</sub></sub> é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A'**. **B'**<sub>s<sub>2</sub></sub> é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

**A'**<sub>s<sub>2</sub></sub> e **B'**<sub>s<sub>2</sub></sub> (as sombras reais dos pontos **A'** e **B'**, respetivamente) situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\overline{A'B'}$  de menor afastamento (da base superior) não admite a existência de qualquer ponto de quebra – a sua sombra situar-se-á, na totalidade, no **SPFS**. **A**<sub>s<sub>1</sub></sub> e **B**<sub>s<sub>1</sub></sub> (as sombras reais dos pontos **A** e **B**, respetivamente) situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\overline{AB}$  de maior afastamento (da base inferior) não admite a existência de qualquer ponto de quebra – a sua sombra situar-se-á, na totalidade, no **SPHA**.

**A'**<sub>s<sub>2</sub></sub> situa-se no **SPFS** e **A**<sub>s<sub>1</sub></sub> situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre **A'**<sub>s<sub>2</sub></sub> e **A**<sub>s<sub>1</sub></sub> (que se situam em Planos de Projeção distintos). **B'**<sub>s<sub>2</sub></sub> situa-se no **SPFS** e **B**<sub>s<sub>1</sub></sub> situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre **B'**<sub>s<sub>2</sub></sub> e **B**<sub>s<sub>1</sub></sub> (que se situam em Planos de Projeção distintos).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A'_{s_2}$  e  $A_{s_1}$ , poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto  $A$  ou à sombra virtual do ponto  $A'$ . No entanto, optou-se por um raciocínio que nos permite economizar traçado. O plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cilindro ao longo da geratriz  $[AA']$  (o plano  $\lambda'$ ) interseca o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base de referência) segundo a reta  $t - a$  reta  $t$  é, assim, uma reta horizontal (de topo, neste caso) desse plano. Acontece que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da geratriz  $[AA']$  tem de estar sobre o traço horizontal desse plano, que é, igualmente, uma reta horizontal (de topo, neste caso) do plano. Uma vez que retas horizontais (de nível) de um mesmo plano são paralelas entre si, sabe-se que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da geratriz  $[AA']$  é paralela à reta  $t$ .

Assim, por  $A_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $A$ , que se situa no SPHA), conduziu-se uma paralela à reta  $t$  (paralela à projeção horizontal da reta  $t - t_1$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa o ponto  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[AA']$ ). O segmento  $[A_{s_1}Q_s]$  é a sombra projetada da geratriz  $[AA']$  no SPHA. A linha quebrada aberta  $[A'_{s_2}Q_sA_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[AA']$  (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.º Diedro).

De forma semelhante à atrás exposta, para determinar o ponto de quebra situado entre  $B'_{s_2}$  e  $B_{s_1}$  optou-se pelo mesmo raciocínio. O plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cilindro ao longo da geratriz  $[BB']$  (o plano  $\lambda''$ ) interseca o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base de referência) segundo a reta  $t' - a$  reta  $t'$  é, assim, uma reta horizontal (de topo, neste caso) desse plano. Acontece que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da geratriz  $[BB']$  tem de estar sobre o traço horizontal desse plano, que é, igualmente, uma reta horizontal (de topo, neste caso) do plano. Uma vez que retas horizontais (de nível) de um mesmo plano são paralelas entre si, sabe-se que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da geratriz  $[BB']$  é paralela à reta  $t'$ .

Assim, por  $B_{s_1}$  (a sombra real do ponto  $B$ , que se situa no SPHA), conduziu-se uma paralela à reta  $t'$  (paralela à projeção horizontal da reta  $t' - t'_1$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa o ponto  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[BB']$ ). O segmento  $[B_{s_1}Q'_s]$  é a sombra projetada da geratriz  $[BB']$  no SPHA. A linha quebrada aberta  $[B'_{s_2}Q'_sB_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[BB']$  (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.º Diedro).

Note que, na presente situação, os **planos tangentes luz/sombra** são **planos de topo** (planos projetantes frontais), pois contêm a «família» das retas projetantes frontais (as retas  $t$  e  $t'$  são retas projetantes frontais). Por isso mesmo se tem, **nesta situação**, que as sombras projetadas no Plano Frontal de Projeção das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  estão coincidentes com as projeções frontais daquelas geratrizes.

*Determinação da sombra projetada da base inferior do cilindro:*

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos  $A$  e  $B$ ) se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no SPHA). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, nesta situação, atendendo a que  $A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$  se situam suficientemente distantes do eixo  $X$  e que os dois pontos de quebra da sombra do cilindro já foram determinados, é possível garantir que a sombra da semicircunferência não admite a existência de quaisquer pontos de quebra.

Tendo em conta que as sombras reais dos pontos  $A$  e  $B$  (os extremos da semicircunferência) se situam, ambas, no SPHA, conclui-se que a **semicircunferência  $\widehat{AB}$**  produz sombra no SPHA.

Por outro lado, atendendo a que se trata de uma direção luminosa e que a semicircunferência  $\widehat{AB}$  está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, a **sombra projetada da semicircunferência  $\widehat{AB}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no SPHA) é uma semicircunferência geometricamente igual à **semicircunferência  $\widehat{AB}$** . Assim, determinou-se a sombra real do ponto  $O$  conduzindo, por  $O$  (o centro da base inferior), um raio luminoso com a direção luminosa convencional -  $O_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $O$ , situa-se no SPHA e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $O$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_{s_1}$  e com 3 cm de raio (o raio da base) desenhou-se a semicircunferência que é a sombra projetada da **semicircunferência  $\widehat{AB}$  no SPHA** - trata-se de uma semicircunferência com extremos nos pontos  $A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$ . Sublinha-se que a semicircunferência  $\widehat{A_{s_1}B_{s_1}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  no ponto  $A_{s_1}$  e também é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  no ponto  $B_{s_1}$ .

*Determinação da sombra projetada da base superior do cilindro:*

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos  $A'$  e  $B'$ ) se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no SPFS). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, nesta situação, atendendo a que  $A'_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  se situam suficientemente distantes do eixo  $X$  e que os dois pontos de quebra da sombra do cilindro já foram determinados, é possível garantir que a sombra da semicircunferência não admite a existência de quaisquer pontos de quebra.

Tendo em conta que as sombras reais dos pontos  $A'$  e  $B'$  (os extremos da semicircunferência) se situam, ambas, no SPFS, conclui-se que a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$**  produz sombra no SPFS.

A sombra projetada da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  no SPFS (onde se situam as sombras dos seus extremos) é um **segmento de elipse**, que é uma curva de erro e cujo desenho requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício 835. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, começou-se por inscrever a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que se considerou suficiente para a determinação da sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  corresponde a um «meio quadrado» do quadrado total (o «meio quadrado» que a figura apresenta e que engloba a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  na sua totalidade). O segmento de reta  $[A'B']$  é o lado de maior afastamento desse «meio quadrado» e os pontos  $A'$  e  $B'$  são, simultaneamente, dois vértices do «meio quadrado» e dois pontos da semicircunferência, o que nos permitirá determinar **dois pontos do segmento de elipse**. O extremo de menor afastamento do raio de topo que está no interior do «meio quadrado» (e que é a parte correspondente da mediana de topo do quadrado) permite-nos determinar mais **um ponto do segmento de elipse**. Os pontos em que as partes correspondentes das diagonais do quadrado cortam a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  permitem-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Assim, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, bem como das partes correspondentes da mediana de topo e das diagonais do quadrado.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo que é a base superior (o ponto  $O'$ ) –  $O'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $O'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $O'$ .

Em seguida, determinaram-se as sombras no Plano Frontal de Projeção dos extremos do lado de maior afastamento do «meio quadrado» – o segmento  $[A'B']$ .  $A'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $A'$  e  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $B'$ . Assim, o segmento  $[A'_{s_2}B'_{s_2}]$  é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção do segmento  $[A'B']$ . Note que o segmento  $[A'_{s_2}B'_{s_2}]$  contém o ponto  $O'_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $O'$ ).

Em seguida, determinou-se a sombra do ponto  $J$  no Plano Frontal de Projeção –  $J_{s_2}$ . O ponto  $J$  é o vértice mais à esquerda e de menor afastamento do «meio quadrado». O lado de menor afastamento do «meio quadrado» tem um extremo no ponto  $J$  e é paralelo a  $[A'B']$ . Assim, a sua sombra no Plano Frontal de Projeção é paralela a  $[A'_{s_2}B'_{s_2}]$  e passa por  $J_{s_2}$ , o que nos permitiu desenhar o lado superior do paralelogramo.

As sombras dos lados de topo do polígono estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do «meio quadrado», tendo-se desenhado, também, a sombra da parte correspondente da mediana de topo da figura – é o segmento de reta que passa por  $O'_{s_2}$  e que é paralelo às sombras dos lados de topo da figura.

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O'_{s_2}$  e têm extremos nos vértices superiores do paralelogramo).

Os pontos  $A'_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  são, imediatamente, **dois pontos do segmento de elipse**. A sombra do extremo de menor afastamento do raio de topo é um outro ponto do **segmento de elipse**. Estes **três pontos** são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as partes correspondentes das diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções frontais daqueles pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais do paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**.

Estes **cinco pontos** permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  em  $A'_{s_2}$ , tal como é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  em  $B'_{s_2}$ .

Em seguida, concluiu-se o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado, pela linha quebrada aberta  $[A'_{s_2}Q_sA'_{s_1}]$ , pela semicircunferência  $\widehat{A_{s_1}B_{s_1}}$  e, ainda, pela linha quebrada aberta  $[B_{s_1}Q'_sB'_{s_2}]$ . Note que parte da sombra projetada do cilindro é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio cilindro.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área **visível** da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

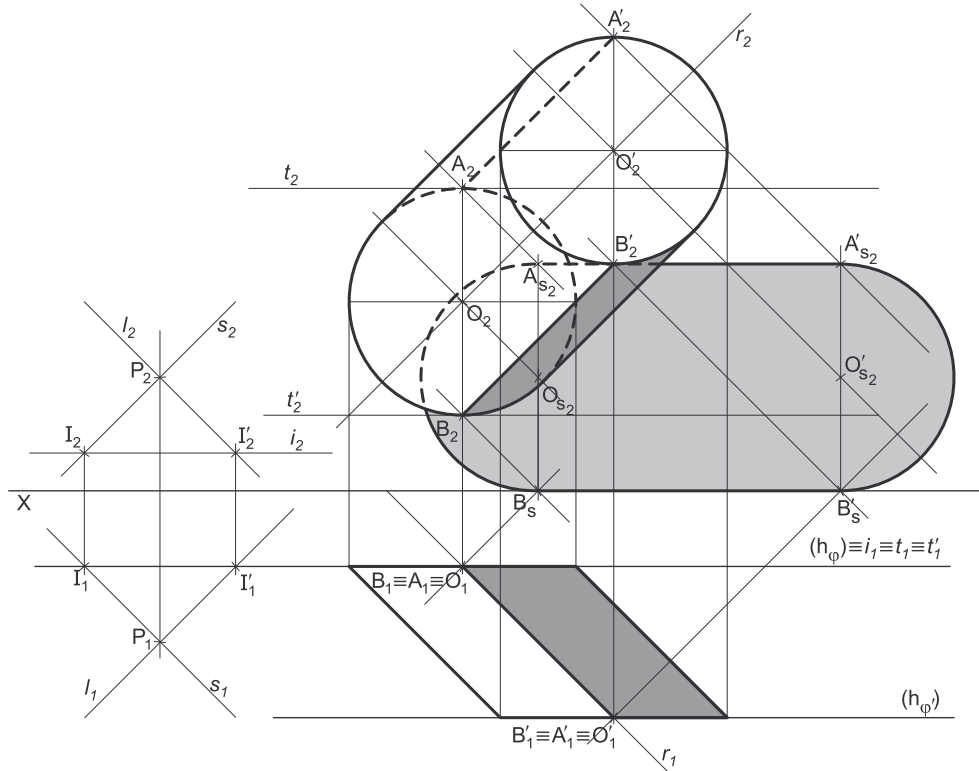
Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases do sólido), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes, das retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

938.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $O$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se, também, o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento), pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal  $(h_\varphi)$  passa pela projeção horizontal do ponto  $O$  ( $O_1$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do cilindro:*

A base de menor afastamento do cilindro está contida num plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a base se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base de maior afastamento do cilindro. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das bases. Assim, porque o cilindro tem 4 cm de altura e a sua base de menor afastamento está contida num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $O$ ), o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 6 cm de afastamento ( $2 + 4 = 6$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi'$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções do ponto  $O$ , conduziram-se as projeções homónimas da reta  $r$  (a reta suporte do eixo do cilindro), com a direção dada no enunciado. Note que a reta  $r$  é uma reta paralela ao  $\beta_{1/3}$ , pois é uma reta não passante cujas projeções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos iguais e com a abertura para o mesmo lado.

Foi possível, agora, determinar as projeções do ponto  $O'$ , o centro da base de maior afastamento do cilindro – o ponto  $O'$  é o ponto de interseção da reta  $r$  (a reta suporte do eixo do sólido) com o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do cilindro). As projeções do ponto  $O'$  tiveram determinação direta, a partir da sua projeção horizontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $r$ ) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

A base de maior afastamento do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi'$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal (no Plano Frontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ) e com 3 cm de raio (as duas bases têm o mesmo raio), desenhou-se a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abscissa das projeções horizontais das duas bases) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções frontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção frontal da reta  $r_1$  – a reta  $r_2$ ). A semicircunferência da base de menor afastamento que tem maior cota e se situa mais à direita (e que está compreendida entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $s$ , paralela às geratrizes do cilindro, e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta  $i$ , que é a reta de interseção do plano definido pelas retas  $s$  e  $l$  (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base de menor afastamento, que está contida no plano  $\varphi$ ). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta  $s$  com o plano  $\varphi$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta  $l$  com o plano  $\varphi$ ).

Salienta-se que, nesta situação, a reta  $i$  é uma **reta fronto-horizontal**.

Note as projeções dos pontos **I** e **I'** tiveram determinação direta, a partir das respetivas projeções horizontais, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes (as retas  $s$  e  $l$ ) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ).

3. Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ .

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base de maior afastamento) que são paralelas a uma reta dada (que é a projeção frontal da reta  $i - i_2$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**).

As retas  $t$  e  $t'$  são as retas de interseção dos **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de referência do cilindro) e, nesta situação, são **retas fronto-horizontais**.

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos **A** e **B**, respetivamente. Assim, as geratrizes [**AA'**] e [**BB'**] são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes [**AA'**] e [**BB'**] – note que o ponto **A'** é o extremo de maior afastamento da geratriz [**AA'**], tal como o ponto **B'** é o extremo de maior afastamento da geratriz [**BB'**]. A geratriz [**AA'**] é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cilindro). Já a geratriz [**BB'**] é invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cilindro). No entanto, nesta situação particular, a geratriz [**BB'**] está oculta, em projeção horizontal, pela geratriz [**AA'**], que é visível (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer invisibilidade a assinalar referente a qualquer destas duas geratrizes.

As geratrizes [**AA'**] e [**BB'**] separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência  $\widehat{AB}$  mais à esquerda. A base de maior afastamento do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência  $\widehat{AB}$  mais à direita está **em sombra**, assim, como a base de menor afastamento do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada [ $\widehat{AB} B'A'$ ], que integra as geratrizes [**AA'**] e [**BB'**], bem como a **semicircunferência  $\widehat{AB}$  de maior abscissa** (da base de menor afastamento) e a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  de menor abscissa** (da base de maior afastamento).

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é **visível** é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz [**BB'**] e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base de menor afastamento do cilindro (que está em sombra) é invisível em projeção frontal.

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é **visível** é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz [**AA'**] e a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base de menor afastamento (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal (por ser projetante horizontal).

A **sombra própria** visível do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $A_{s_2}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A**.  $A'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $B_s$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no eixo **X**) e é simultaneamente o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B** (o raio luminoso é uma reta passante).  $B'_s$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se igualmente no eixo **X**) e é simultaneamente o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'** (o raio luminoso é uma reta passante). As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se no mesmo Plano de Projeção, pelo que, **à partida**, a sombra projetada (real) do cilindro **não admite a existência** de quaisquer **pontos de quebra**.

$A_{s_2}$  e  $B_s$  (as sombras reais dos pontos **A** e **B**, respetivamente) situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  de maior abcissa (da base de menor afastamento) não admite a existência de qualquer ponto de quebra – a sua sombra situar-se-á, na totalidade, no **SPFS**.  $A'_{s_2}$  e  $B'_s$  (as sombras reais dos pontos **A'** e **B'**, respetivamente) situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  de menor abcissa (da base de maior afastamento) não admite a existência de qualquer ponto de quebra – a sua sombra situar-se-á, na totalidade, no **SPFS**.

$A_{s_2}$  e  $A'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz  $[AA']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s_2}A'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AA']$  e situa-se no **SPFS**.  $B_s$  e  $B'_s$  situam-se, ambas, no eixo **X**, pelo que a sombra da geratriz  $[BB']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_sB'_s]$  é a sombra projetada do segmento  $[BB']$  e situa-se no eixo **X**.

*Determinação da sombra projetada da base de menor afastamento do cilindro:*

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A** e **B**) se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no **SPFS**). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, nesta situação, atendendo que o ponto **B** é o ponto de menor cota da semicircunferência  $\widehat{AB}$  e que a sua sombra já se situa no **SPFS** (situa-se no eixo **X**, que é a aresta dos diedros), é possível garantir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  se situa, na totalidade, no **SPFS**.

Por outro lado, atendendo a que se trata de uma direção luminosa e que a semicircunferência  $\widehat{AB}$  está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, a **sombra projetada da semicircunferência  $\widehat{AB}$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é uma semicircunferência geometricamente igual à **semicircunferência  $\widehat{AB}$** . Assim, determinou-se a sombra real do ponto **O** conduzindo, por **O** (o centro da base de menor afastamento), um raio luminoso com a direção luminosa convencional –  $O_{s_2}$  é a sombra real do ponto **O**, situa-se no **SPFS** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **O**.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_{s_2}$  e com 3 cm de raio (o raio da base) desenhou-se a semicircunferência que é a sombra projetada da **semicircunferência  $\widehat{AB}$  no SPFS** – trata-se de uma semicircunferência com extremos nos pontos  $A_{s_2}$  e  $B_s$ . Sublinha-se que a semicircunferência  $\widehat{A_{s_2}B_s}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  no ponto  $A_{s_2}$  e também é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  no ponto  $B_s$ .

*Determinação da sombra projetada da base de maior afastamento do cilindro:*

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A'** e **B'**) se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no **SPFS**). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, nesta situação, atendendo que o ponto **B'** é o ponto de menor cota da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  e que a sua sombra já se situa no **SPFS** (situa-se no eixo **X**, que é a aresta dos diedros), é possível garantir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  se situa, na totalidade, no **SPFS**.

Por outro lado, atendendo a que se trata de uma direção luminosa e que a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, a **sombra projetada da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é uma semicircunferência geometricamente igual à **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$** . Assim, determinou-se a sombra real do ponto **O'** conduzindo, por **O'** (o centro da base de maior afastamento), um raio luminoso com a direção luminosa convencional –  $O'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **O'**, situa-se no **SPFS** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **O'**.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O'_{s_2}$  e com 3 cm de raio (o raio da base) desenhou-se a semicircunferência que é a sombra projetada da **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  no SPFS** – trata-se de uma semicircunferência com extremos nos pontos  $A'_{s_2}$  e  $B'_s$ . Sublinha-se que a semicircunferência  $\widehat{A'_{s_2}B'_s}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  no ponto  $A'_{s_2}$  e também é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  no ponto  $B'_s$ .

Em seguida, concluiu-se o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pela semicircunferência  $\widehat{A_{s_2}B_s}$ , pelo segmento de reta  $[B_sB'_s]$ , pela semicircunferência  $\widehat{A'_{s_2}B'_s}$  e, ainda, pelo segmento de reta  $[A'_{s_2}A_{s_2}]$ . Note que parte da sombra projetada do cilindro é invisível (em projeção frontal), pois está oculta pelo próprio cilindro.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área **visível** da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços horizontais dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  (os planos que contêm as bases do sólido), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes e, ainda, das retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 939.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se a reta **p** (a reta de perfil que contém o eixo do cilindro), pelas suas projeções. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

A base de menor afastamento do cilindro está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio (o raio da base), desenhou-se a projeção frontal da base de menor afastamento do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo **X** (corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das bases. Assim, porque o cilindro tem 5 cm de altura e a sua base de menor afastamento está contida no Plano Frontal de Projeção, o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 5 cm de afastamento ( $0 + 5 = 5$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a outra base do sólido) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, foi necessário determinar as projeções do ponto **O'**, o centro da base de maior afastamento do sólido. O ponto **O'** é o ponto de interseção da reta **p** (a reta suporte do eixo do cilindro) com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido). A determinação da projeção horizontal do ponto **O'** (**O'**<sub>1</sub>) foi imediata, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. No entanto, tendo em conta que a reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, não é possível, de forma direta, determinar a projeção frontal do ponto **O'**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

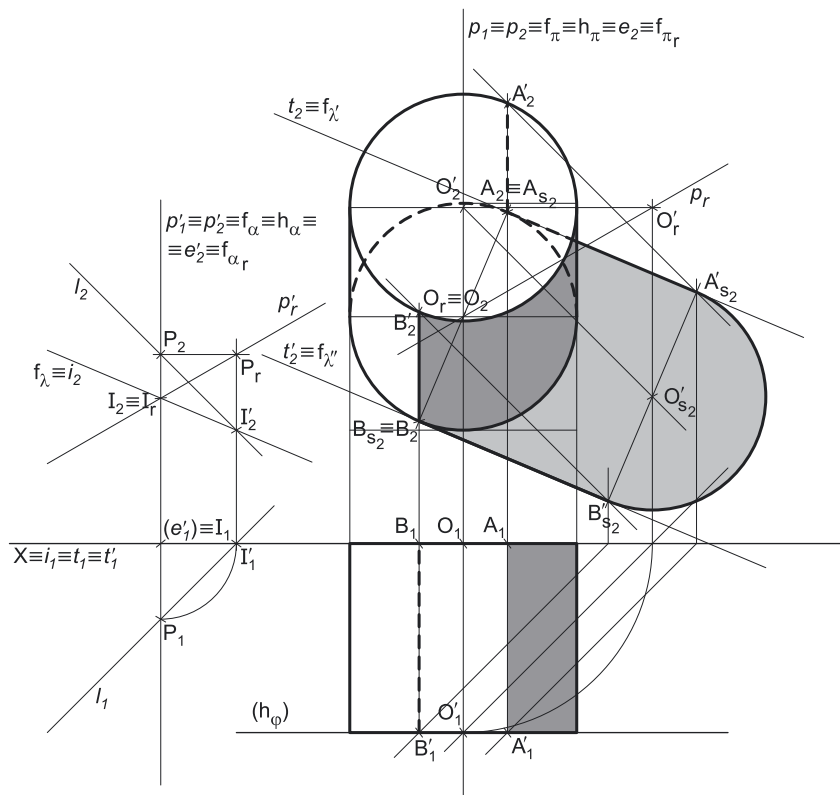
Nesse sentido, optou-se por recorrer ao rebatimento do plano de perfil que contém a reta **p** pelo que, em primeiro lugar, identificaram-se os traços do plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a reta **p**) de forma imediata. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\pi$  (**f** <sub>$\pi$</sub> ), que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente, **f** <sub>$\pi$</sub>   $\equiv$  **e**<sub>2</sub>  $\equiv$  **f** <sub>$\pi_r$</sub> . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira (e que contém os arcos do rebatimento de cada ponto), que são planos horizontais (de nível). Assim, os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo dos respetivos rebatimentos.

O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, **O**<sub>r</sub>  $\equiv$  **O**<sub>2</sub>. É dado o ângulo que a reta **p** faz com os planos das bases do cilindro, que é o ângulo que a reta **p** faz com o Plano Frontal de Projeção. Esse ângulo está contido num plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção e que contém a reta **p** (que é o plano  $\pi$ ) e é o ângulo entre a reta dada (a reta **p**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é o traço frontal do plano  $\pi$  – **f** <sub>$\pi$</sub> ).

Esse ângulo está contido no plano  $\pi$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Tendo em conta que já se efetuou o rebatimento do plano  $\pi$ , é possível medir o ângulo que a reta **p** faz com o Plano Frontal de Projeção em verdadeira grandeza, em rebatimento. Assim, a partir de **O**<sub>r</sub> (o ponto **O** rebatido), mediu-se o ângulo de 60° com **f** <sub>$\pi_r$</sub>  (o traço frontal do plano  $\pi$  rebatido), o que nos permitiu desenhar **p**<sub>r</sub> (a reta **p** rebatida).

Note que, das duas hipóteses de medir o ângulo de 60° a partir de **O**<sub>r</sub>, apenas a que a resolução apresenta nos garante que o traço horizontal da reta **p** se situa no **SPHP** (tem afastamento negativo), como o enunciado refere expressamente. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **e**<sub>1</sub> e com raio até **O'**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O'**), desenhou-se a projeção horizontal do arco do rebatimento do ponto **O'** e determinou-se **O'**<sub>r</sub> (o ponto **O'** rebatido), sobre a reta **p**<sub>r</sub> (a reta **p** rebatida). Por fim, transportou-se a cota do ponto **O'** para a projeção frontal da reta **p** (**p**<sub>2</sub>), o que nos permitiu determinar **O'**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O'**).

A base de maior afastamento do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal (no Plano Frontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O'**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O'**) e com 3 cm de raio (as duas bases têm o mesmo raio), desenhou-se a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  (**h** <sub>$\varphi$</sub> ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abscissa das projeções horizontais das duas bases) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções frontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção frontal da reta  $p$  – a reta  $p_2$ ). A semicircunferência de menor cota da base de menor afastamento (e que está compreendida entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

**1.** Por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $p'$  (de perfil) paralela às geratrizes do cilindro, e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção luminosa convencional). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra

No entanto, a reta  $p'$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Assim, não é possível garantir, de forma direta, o paralelismo da reta  $p'$  em relação às geratrizes do cilindro (e à reta  $p$ , que é a reta suporte do eixo do cilindro). Nesse sentido, para garantir o paralelismo da reta  $p'$  em relação à reta  $p$ , optou-se por recorrer a um processo geométrico auxiliar. Atendendo a que a situação da reta  $p$  (atrás descrita) foi resolvida com o rebatimento do plano de perfil que contém a reta  $p$ , para garantir o paralelismo entre as duas retas optou-se por recorrer ao rebatimento do plano de perfil que contém a reta  $p'$ .

Nesse sentido, identificaram-se os traços do plano  $\alpha$  (o plano de perfil que contém a reta  $p'$ ) e efetuou-se o rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, à semelhança do rebatimento efetuado do plano  $\pi$ . Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente,  $f_\alpha \equiv e'_2 \equiv f_{\alpha_r}$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira (e que contêm os arcos do rebatimento de cada ponto), que são planos horizontais (de nível). Assim, os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo dos respetivos rebatimentos.

Em seguida, rebateu-se o ponto  $P$ , o que nos permitiu determinar  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido). Por  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido) conduziu-se a reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida), que está definida por um ponto (o ponto  $P_r$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $p_r$ ). Está garantido o paralelismo da reta  $p'$  em relação à reta  $p$ .

**2.** Determinou-se a reta  $i$ , que é a reta de interseção do plano definido pelas retas  $p'$  e  $l$  (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base de menor afastamento, que está contida no Plano Frontal de Projeção). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $p'$  com o Plano Frontal de Projeção) e o ponto  $I'$  (o ponto de interseção da reta  $l$  com o Plano Frontal de Projeção).

Note que, neste caso, o ponto  $I$  é o traço frontal da reta  $p'$  e o ponto  $I'$  é o traço frontal do raio luminoso  $l$ . Assim, neste caso, a reta  $i$  é, imediatamente, o traço frontal do plano  $\lambda$  ( $f_\lambda$ ), o que se identificou no desenho.

Note que o ponto  $I$  foi determinado previamente em rebatimento – o ponto  $I$  é o traço frontal da reta  $p'$ , pelo que  $I_r$  é o ponto de concorrência da reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) com  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  em rebatimento). O ponto  $I$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $I_2 \equiv I_r$ .

**3.** Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ .

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base) que são paralelas a uma reta dada (que é a projeção frontal da reta  $i$  –  $i_2$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $B$ ).

Note que, neste caso, as retas  $t$  e  $t'$  são, imediatamente, os traços frontais dos dois **planos tangentes luz/sombra** ( $f_{\lambda_t}$  e  $f_{\lambda_{t'}}$ ), pois o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro é o Plano Frontal de Projeção – esse facto foi identificado imediatamente no desenho.

**4.** As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  – note que o ponto  $A'$  é o extremo de maior afastamento da geratriz  $[AA']$ , tal como o ponto  $B'$  é o extremo de maior afastamento da geratriz  $[BB']$ . Salieta-se que a geratriz  $[AA']$  é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cilindro), tal como a geratriz  $[BB']$  é invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cilindro).

As geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência  $\widehat{AB}$  mais à esquerda. A base de maior afastamento do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência  $\widehat{AB}$  mais à direita está **em sombra**, assim, como a base de menor afastamento do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[\widehat{AB} \ B'A']$ , que integra as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ , bem como a **semicircunferência  $\widehat{AB}$  mais à esquerda** (da base de menor afastamento) e a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  mais à direita** (da base de maior afastamento).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em **projecção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projecção frontal da geratriz **[BB']** (o segmento de reta **[B<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**) e a projecção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projecção frontal**. Note que a base de menor afastamento (que está em sombra) é invisível em projecção frontal.

Em **projecção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projecção horizontal da geratriz **[AA']** (o segmento de reta **[A<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]**) e a projecção horizontal da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projecção horizontal**. Note que a base de menor afastamento (que está em sombra) é invisível em projecção horizontal, pois é projetante horizontal.

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projecção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projecção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projecção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos **A** e **B** situam-se no Plano Frontal de Projecção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente **A<sub>s2</sub> ≡ A<sub>2</sub>** e **B<sub>s2</sub> ≡ B<sub>2</sub>**. **A'<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A'**. **B'<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se no mesmo Plano de Projecção, pelo que, à partida, a sombra projetada (real) do cilindro **não admite a existência de pontos de quebra**.

Os pontos **A** e **B** situam-se no **SPFS** (tal como as suas sombras – **A<sub>s2</sub>** e **B<sub>s2</sub>**) e tal como a própria base de menor afastamento do cilindro se situa no **SPFS** – assim, a sombra da semicircunferência **AB** mais à esquerda (da base de menor afastamento) está coincidente com a própria semicircunferência **AB**. **A'<sub>s2</sub>** e **B'<sub>s2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que, à **partida**, a sombra da semicircunferência **A'B'** (que integra a linha separatriz luz/sombra) não admite a existência de qualquer ponto de quebra.

**A<sub>s2</sub>** e **A'<sub>s2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz **[AA']** não admite ponto de quebra – o segmento **[A<sub>s2</sub>A'<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[AA']** e situa-se no **SPFS**. **B<sub>s2</sub>** e **B'<sub>s2</sub>** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz **[BB']** não admite ponto de quebra – o segmento **[B<sub>s2</sub>B'<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[BB']** e situa-se no **SPFS**.

Como atrás se referiu, à **partida**, a sombra da semicircunferência **A'B'** não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A'** e **B'**) se situam no mesmo Plano de Projecção. No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projecção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projecção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, tendo em conta que as sombras projetadas dos pontos **A'** e **B'** (os extremos da semicircunferência **A'B'**) se situam suficientemente distantes do eixo **X**, é possível perceber, de forma empírica, que a sombra da semicircunferência **A'B'** se situa, na totalidade, no **SPFS**.

Por outro lado, atendendo a que se trata de uma direcção luminosa e que a semicircunferência **A'B'** está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projecção, a **sombra projetada da semicircunferência A'B' no Plano Frontal de Projecção** (no **SPHA**) é uma semicircunferência geometricamente igual à **semicircunferência A'B'**.

Assim, determinou-se a sombra real do ponto **O'** conduzindo, por **O'** (o centro da base de maior afastamento), um raio luminoso com a direcção luminosa convencional – **O'<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **O'**, situa-se no **SPFS** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **O'**. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O'<sub>s2</sub>** e com 3 cm de raio (o raio da base) desenhou-se a semicircunferência que é a sombra projetada da **semicircunferência A'B'** no **SPFS** – trata-se de uma semicircunferência com extremos nos pontos **A'<sub>s2</sub>** e **B'<sub>s2</sub>**. Sublinha-se que a semicircunferência **A'<sub>s2</sub>B'<sub>s2</sub>** é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz **[AA']** no ponto **A'<sub>s2</sub>** e também é **concordante** com a sombra da geratriz **[BB']** no ponto **B'<sub>s2</sub>**.

Em seguida, concluiu-se o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projecção, que é composta pela semicircunferência **A<sub>s2</sub>B<sub>s2</sub>** mais à esquerda, pelo segmento de reta **[B<sub>s2</sub>B'<sub>s2</sub>]**, pela semicircunferência **A'<sub>s2</sub>B'<sub>s2</sub>** mais à direita e, ainda, pelo segmento de reta **[A<sub>s2</sub>A'<sub>s2</sub>]**. Note que parte da sombra projetada do cilindro é invisível (em projecção frontal), pois está por debaixo pelo próprio cilindro.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área **visível** da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projecção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido), no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projecções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  (para a construção das projecções do cilindro), dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes (nomeadamente os referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$ ) e, ainda, das retas ***i***, ***t*** e ***t'***.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projecções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

(continua na página seguinte)

## 940.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **Q**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base inferior do sólido) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por **Q**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **Q**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

**Resolução:***Determinação das projeções do cilindro:*

A base inferior do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com 2,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base inferior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das bases. Assim, porque o cilindro tem 4 cm de altura e a sua base inferior tem 2 cm de cota (a cota do ponto **Q**), o plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do sólido) tem 6 cm de cota ( $2 + 4 = 6$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal. O plano  $v'$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções do ponto **Q**, conduziram-se as projeções homónimas da reta  $r$  (a reta suporte do eixo do cilindro), com a direção dada no enunciado. Foi possível, agora, determinar as projeções do ponto **O**, o centro da base superior do cilindro – o ponto **O** é o ponto de interseção da reta  $r$  (a reta suporte do eixo do sólido) com o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do cilindro). As projeções do ponto **O** tiveram determinação direta, a partir da sua projeção frontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $r$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ).

A base superior do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v'$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 2,5 cm de raio (as duas bases têm o mesmo raio), desenhou-se a projeção horizontal da base superior do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal.

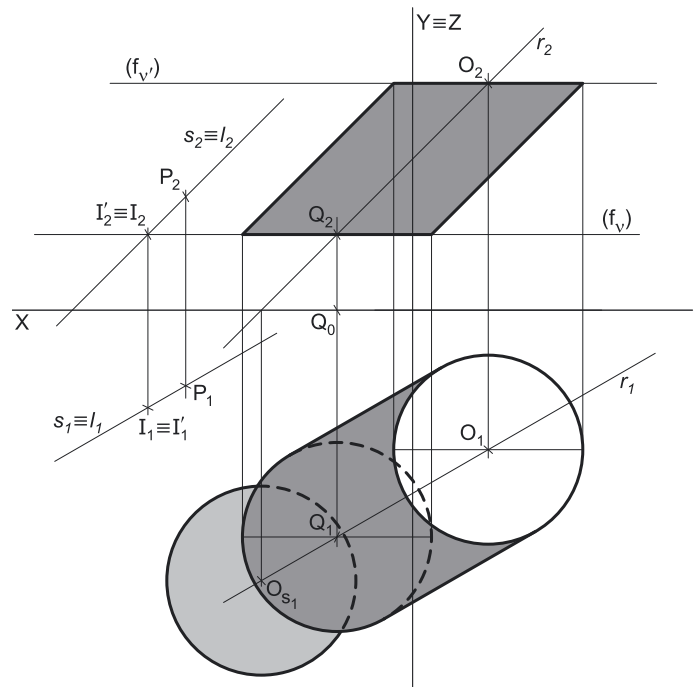
Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e menor abcissa das projeções frontais das duas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção horizontal da reta  $r$  – a reta  $r_1$ ). A semicircunferência da base inferior que tem menor afastamento e se situa mais à direita (e que está compreendida entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

**1.** Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $s$ , paralela às geratrizes do cilindro, e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção luminosa dada no enunciado). Tendo em conta que a reta  $l$  e a reta  $s$  têm a mesma direção (a direção luminosa é paralela ao eixo do sólido) e passam pelo mesmo ponto, as retas  $s$  e  $l$  são uma única reta. Assim, estas duas retas, não definem plano algum (uma única reta não pode definir plano algum, a menos que seja uma reta de maior declive ou uma reta de maior inclinação desse plano, o que não é o caso).

Face ao exposto, não é possível determinar uma dada orientação dos planos tangentes luz/sombra – qualquer plano que contenha a direção luminosa poderá ser um plano tangente luz/sombra. Conclui-se, portanto, que não existe uma orientação definida para os planos tangentes luz/sombra, o que quer dizer que planos tangentes luz/sombra são todos e quaisquer planos que contenham a direção luminosa, a que corresponde uma infinidade de planos.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

2. Face ao exposto, não é possível determinar uma reta  $i$  específica, que seja a reta de interseção do plano definido pelas retas  $s$  e  $l$  (que não definem um único plano mas, sim, infinitos planos) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se, como base de referência, a base inferior do sólido, que está contida no plano  $v$ ).

Na realidade, qualquer reta que passe pelo ponto  $I$  poderá ser a reta de interseção de um qualquer plano com o plano da base (de referência) do cilindro. Nesse sentido, existem infinitas retas que passem pelo ponto  $I$  – a reta  $i$  poderá ser qualquer reta que passe pelo ponto  $I$ .

3. Conclui-se, face ao exposto, que qualquer reta que seja tangente à base poderá ser paralela à reta  $i$ . Na impossibilidade de se desenharem infinitas retas, passou-se à etapa seguinte.
4. Qualquer reta que se desenhe e que seja tangente à base (de referência) do cilindro poderá ser uma reta paralela a uma qualquer reta  $i$ . Nesse sentido, essas infinitas retas tangentes à base serão tangentes à base nos infinitos pontos da circunferência que a delimita. Exatamente por isso, qualquer geratriz da superfície poderá ser uma geratriz de contacto ou de tangência, ou seja, qualquer geratriz da superfície será uma **geratriz separatriz luz/sombra**.

Na impossibilidade de se desenharem todas as geratrizes, há conclusões a extrair desta situação. Na realidade, qualquer geratriz da superfície, porque é paralela à direção luminosa, pode ser um raio luminoso.

Nesse sentido, dada a proveniência da luz (de cima, da direita e da frente), qualquer geratriz da superfície, sendo um raio luz/sombra, ao passar pelo respetivo ponto da base superior do cilindro (que é opaco), transforma-se num raio de sombra, «arrastando» a sombra desse ponto da base superior ao longo de toda a superfície lateral do sólido. Assim, toda a superfície lateral do cilindro está em sombra.

Nesse sentido, e mais uma vez dada a proveniência da luz, apenas a base superior do cilindro está **iluminada**, sendo que tanto a base inferior do cilindro como toda a sua superfície lateral estão **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra, nesta situação, é a circunferência que delimita a base superior do cilindro.

Em **projeção frontal**, a superfície lateral do cilindro (que está em sombra na sua totalidade) e que é **visível** é a parte compreendida entre as projeções frontais das geratrizes do contorno aparente frontal – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base inferior do cilindro (que está em sombra) é invisível em projeção frontal (pois é projetante frontal).

Em **projeção horizontal**, a superfície lateral do cilindro (que está em sombra na sua totalidade) e que é **visível** é a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes do contorno aparente horizontal – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base inferior do cilindro (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal.

A **sombra própria** visível do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Neste caso, e como se referiu, a linha separatriz luz/sombra é a circunferência que delimita a base superior do cilindro, pelo que a sombra projetada do cilindro é, na prática, a sombra projetada de um círculo (a base superior do sólido). O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**. No entanto, numa primeira análise, e de forma empírica, é possível concluir que a sombra da base superior do sólido não admite pontos de quebra e se situa, na sua totalidade no **SPHA**.

Assim, para evitar uma grande complexidade de traçados, optou-se por um raciocínio mais simples e mais imediato, neste caso. Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do ponto  $O$  (o centro da base) –  $O_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $O$ , é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $O$  e situa-se no **SPHA**. Por outro lado, tendo em conta que a base superior do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção e que se trata de uma direção luminosa, a sombra projetada da base do cilindro no **SPHA** é necessariamente um círculo, geometricamente igual ao círculo da base superior do sólido.

Acontece que o afastamento do ponto  $O_{s_1}$  é superior à medida do raio do círculo (que é 2,5 cm), pelo que, de forma comprovada, a sombra projetada do cilindro nos planos de projeção se situa, na sua totalidade, no **SPHA** (que é onde se situa  $O_{s_1}$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_{s_1}$  e com 2,5 cm de raio (o raio da base do cilindro), desenhou-se uma circunferência, que delimita a sombra projetada do sólido no **SPHA**.

A circunferência desenhada é o contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção. Note que se atendeu às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cilindro é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pelo próprio cilindro.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços frontais dos planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as bases do sólido), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à eventual determinação da orientação dos planos tangentes), representaram-se a **leve**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

#### Interpretação do resultado obtido:

Considerando a infinidade de planos luz/sombra tangentes ao cilindro, cada um ao longo de uma geratriz (em que todas as geratrizes do cilindro são geratrizes de tangência de um qualquer plano tangente luz/sombra), a superfície luz/sombra que é tangente ao cilindro **não é um plano** mas, sim, uma **superfície cilíndrica luz/sombra** – uma superfície cujas geratrizes são raios luminosos e que é tangente ao cilindro precisamente ao longo de toda a sua superfície lateral. Tal significa, então, a superfície lateral do cilindro é a própria **superfície cilíndrica luz/sombra**.

## 941.

### Dados:

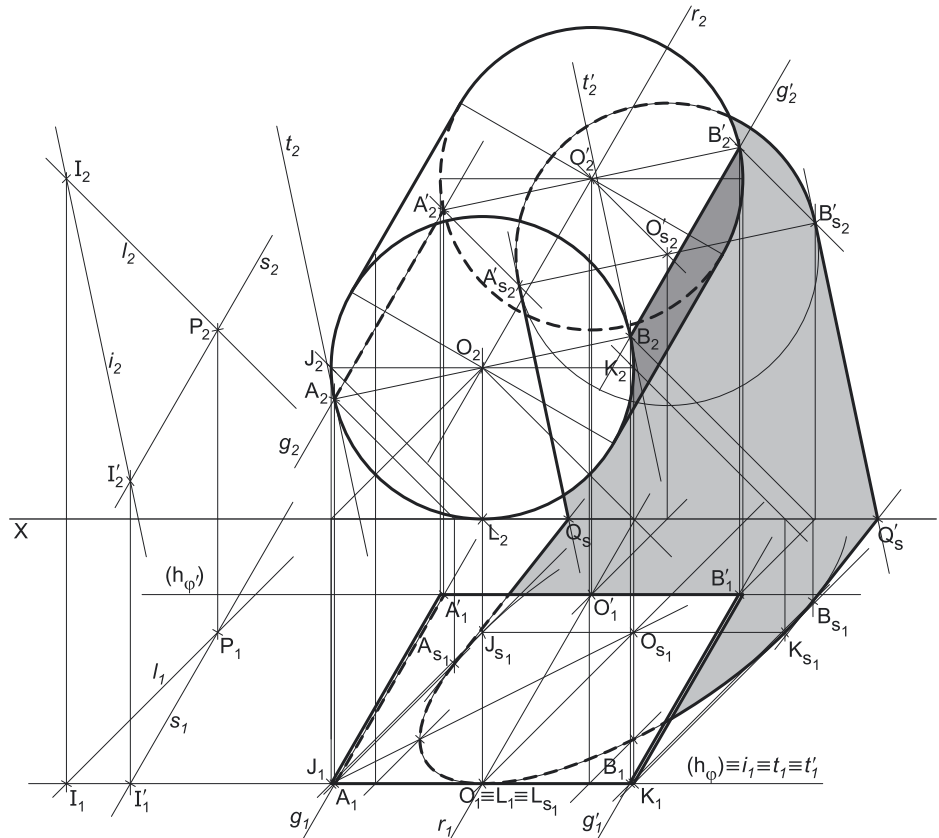
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se, também, o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento), pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cilindro:

A base de maior afastamento do cilindro é tangente ao Plano Horizontal de Projeção e o seu centro tem 4 m de cota, pelo que a base do sólido tem 4 cm de raio. Essa base está contida num plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a base se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base de maior afastamento do cilindro (que é tangente ao eixo **X**). A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal).



A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das bases. Assim, porque o cilindro tem 5 cm de altura e a sua base de maior afastamento está contida num plano frontal (de frente) com 7 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**), o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do sólido) tem 2 cm de afastamento ( $7 - 5 = 2$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi'$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções do ponto **O**, conduziram-se as projeções homónimas da reta **r** (a reta suporte do eixo do cilindro). A reta **r** tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/4}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si). Foi possível, agora, determinar as projeções do ponto  $O'$ , o centro da base de menor afastamento do cilindro – o ponto  $O'$  é o ponto de interseção da reta **r** (a reta suporte do eixo do sólido) com o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do cilindro). As projeções do ponto  $O'$  tiveram determinação direta, a partir da sua projeção horizontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **r**) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi'$ ).

A base de menor afastamento do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção (o plano  $\varphi'$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal (no Plano Frontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ) e com 4 cm de raio (as duas bases têm o mesmo raio), desenhou-se a projeção frontal da base de menor afastamento do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abcissa das projeções horizontais das duas bases) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções frontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção frontal da reta  $r_1$  – a reta  $r_2$ ). A semicircunferência da base de menor afastamento que tem menor cota e se situa mais à esquerda (e que está compreendida entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

**1.** Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $s$ , paralela às geratrizes do cilindro, e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.

**2.** Determinou-se a reta  $i$ , que é a reta de interseção do plano definido pelas retas  $s$  e  $l$  (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base de maior afastamento, que está contida no plano  $\varphi$ ). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta  $s$  com o plano  $\varphi$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta  $l$  com o plano  $\varphi$ ).

Note as projeções dos pontos **I** e **I'** tiveram determinação direta, a partir das respetivas projeções horizontais, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes (as retas  $s$  e  $l$ ) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ).

**3.** Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ .

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base de maior afastamento) que são paralelas a uma reta dada (que é a projeção frontal da reta  $i$  –  $i_2$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **A**<sub>2</sub> e **B**<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**).

As retas  $t$  e  $t'$  são as retas de interseção dos **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de referência do cilindro).

**4.** As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos **A** e **B**, respetivamente. Assim, as geratrizes [**AA'**] e [**BB'**] são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes [**AA'**] e [**BB'**] – note que o ponto **A'** é o extremo de menor afastamento da geratriz [**AA'**], tal como o ponto **B'** é o extremo de menor afastamento da geratriz [**BB'**]. A geratriz [**AA'**] é invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cilindro) e é igualmente invisível em projeção frontal (por se situar também na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cilindro).

As geratrizes [**AA'**] e [**BB'**] separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência  $\widehat{AB}$  de maior cota. A base de maior afastamento do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  de menor cota está **em sombra**, assim, como a base de menor afastamento do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada [**AB B' A'**], que integra as geratrizes [**AA'**] e [**BB'**], bem como a **semicircunferência  $\widehat{AB}$  de menor cota** (da base de maior afastamento) e a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  de maior cota** (da base de menor afastamento).

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é **visível** é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz [**BB'**] e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base de menor afastamento do cilindro (que está em sombra) é invisível em projeção frontal.

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é **visível** é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz [**BB'**] e a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base de menor afastamento (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal (por ser projetante horizontal).

A **sombra própria** visível do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $A_{s1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $B_{s1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.  $A'_{s2}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $B'_{s2}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A'_{s2}$  e  $B'_{s2}$  (as sombras reais dos pontos **A'** e **B'**, respetivamente) situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  de maior cota (da base de menor afastamento) não admite a existência de qualquer ponto de quebra – a sua sombra situar-se-á, na totalidade, no **SPFS**.  $A_{s1}$  e  $B_{s1}$  (as sombras reais dos pontos **A** e **B**, respetivamente) situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  de menor cota (da base de maior afastamento) não admite a existência de qualquer ponto de quebra – a sua sombra situar-se-á, na totalidade, no **SPHA**.

$A'_{s2}$  situa-se no **SPFS** e  $A_{s1}$  situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre  $A'_{s2}$  e  $A_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).  $B'_{s2}$  situa-se no **SPFS** e  $B_{s1}$  situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre  $B'_{s2}$  e  $B_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A'_{s2}$  e  $A_{s1}$  poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto **A** ou à sombra virtual do ponto **A'**. No entanto, optou-se por um raciocínio que nos permite economizar traçado. O plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cilindro ao longo da geratriz  $[AA']$  (o plano  $\lambda'$ ) interseca o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de referência) segundo a reta  $t$  – a reta  $t$  é, assim, uma reta frontal (de frente) desse plano. Acontece que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da geratriz  $[AA']$  tem de estar sobre o traço frontal desse plano, que é, igualmente, uma reta frontal (de frente) do plano. Uma vez que retas frontais (de frente) de um mesmo plano são paralelas entre si, sabe-se que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da geratriz  $[AA']$  é paralela à reta  $t$ .

Assim, por  $A'_{s2}$  (a sombra real do ponto **A'**, que se situa no **SPFS**), conduziu-se uma paralela à reta  $t$  (paralela à projeção frontal da reta  $t - t_2$ ) até ao eixo **X**, onde se situa o ponto  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[AA']$ ). O segmento  $[A'_{s2}Q_s]$  é a sombra projetada da geratriz  $[AA']$  no **SPFS**. A linha quebrada aberta  $[A'_{s2}Q_sA_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[AA']$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

De forma semelhante à atrás exposta, para determinar o ponto de quebra situado entre  $B'_{s2}$  e  $B_{s1}$ , optou-se pelo mesmo raciocínio. O plano tangente luz/sombra que é tangente à superfície lateral do cilindro ao longo da geratriz  $[BB']$  (o plano  $\lambda''$ ) interseca o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de referência) segundo a reta  $t'$  – a reta  $t'$  é, assim, uma reta frontal (de frente) desse plano. Acontece que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da geratriz  $[BB']$  tem de estar sobre o traço frontal desse plano, que é, igualmente, uma reta frontal (de frente) do plano. Uma vez que retas frontais (de frente) de um mesmo plano são paralelas entre si, sabe-se que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da geratriz  $[BB']$  é paralela à reta  $t'$ .

Assim, por  $B'_{s2}$  (a sombra real do ponto **B'**, que se situa no **SPFS**), conduziu-se uma paralela à reta  $t'$  (paralela à projeção frontal da reta  $t' - t'_2$ ) até ao eixo **X**, onde se situa o ponto  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[BB']$ ). O segmento  $[B'_{s2}Q'_s]$  é a sombra projetada da geratriz  $[BB']$  no **SPFS**. A linha quebrada aberta  $[B'_{s2}Q'_sB_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[BB']$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

*Determinação da sombra projetada da base de menor afastamento do cilindro:*

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A'** e **B'**) se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no **SPFS**). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, nesta situação, atendendo a que  $A'_{s2}$  e  $B'_{s2}$  se situam suficientemente distantes do eixo **X** e que os dois pontos de quebra da sombra do cilindro já foram determinados, é possível garantir que a sombra da semicircunferência não admite a existência de quaisquer pontos de quebra.

Tendo em conta que as sombras reais dos pontos **A'** e **B'** (os extremos da semicircunferência) se situam, ambas, no **SPFS**, conclui-se que a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$**  produz sombra no **SPFS**.

Por outro lado, atendendo a que se trata de uma direção luminosa e que a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, a **sombra projetada da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é uma semicircunferência geometricamente igual à **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$** . Assim, determinou-se a sombra real do ponto **O'** conduzindo, por **O'** (o centro da base de menor afastamento), um raio luminoso com a direção luminosa convencional –  $O'_{s2}$  é a sombra real do ponto **O'**, situa-se no **SPFS** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **O'**.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O'_{s2}$  e com 4 cm de raio (o raio da base) desenhou-se a semicircunferência que é a sombra projetada da **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  no SPFS** – trata-se de uma semicircunferência com extremos nos pontos  $A'_{s2}$  e  $B'_{s2}$ . Sublinha-se que a semicircunferência  $\widehat{A'_{s2}B'_{s2}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  no ponto  $A'_{s2}$  e também é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  no ponto  $B'_{s2}$ .

*Determinação da sombra projetada da base de maior afastamento do cilindro:*

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A** e **B**) se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no **SPHA**). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, nesta situação, atendendo a que  $A_{s1}$  e  $B_{s1}$  se situam suficientemente distantes do eixo **X** e que os dois pontos de quebra da sombra do cilindro já foram determinados, é possível garantir que a sombra da semicircunferência não admite a existência de quaisquer pontos de quebra.

Tendo em conta que as sombras reais dos pontos **A** e **B** (os extremos da semicircunferência) se situam, ambas, no **SPHA**, conclui-se que a **semicircunferência  $\widehat{AB}$**  produz sombra no **SPHA**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A sombra projetada da semicircunferência  $\widehat{AB}$  no SPHA (onde se situam as sombras dos seus extremos) é um **segmento de elipse**, que é uma curva de erro e cujo desenho requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Assim, começou-se por inscrever a semicircunferência  $\widehat{AB}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que se considerou suficiente para a determinação da sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  corresponde a um «meio quadrado» do quadrado total (o «meio quadrado» que a figura apresenta e que engloba a maior parte da semicircunferência  $\widehat{AB}$ ). Os extremos do lado superior do «meio quadrado» permitem-nos determinar **dois pontos** do **segmento de elipse**. O extremo inferior da parte correspondente da mediana vertical do quadrado permite-nos determinar mais **um ponto** do **segmento de elipse**. Os pontos em que as partes correspondentes das diagonais do quadrado cortam a semicircunferência  $\widehat{AB}$  permitem-nos determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, bem como das partes correspondentes da mediana vertical e das diagonais do quadrado.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo que é a base de maior afastamento (o ponto **O**) –  $O_{s_1}$  é a sombra real do ponto **O** (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **O**.

Em seguida, determinaram-se as sombras no Plano Horizontal de Projeção dos extremos do lado superior do «meio quadrado» – o segmento **[JK]**.  $J_{s_1}$  é a sombra real do ponto **J** e  $K_{s_1}$  é a sombra real do ponto **K**. Assim, o segmento  $[J_{s_1}K_{s_1}]$  é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção do segmento **[JK]**. Note que o segmento  $[J_{s_1}K_{s_1}]$  contém o ponto  $O_{s_1}$  (a sombra real do ponto **O**). O lado inferior do «meio quadrado» situa-se no Plano Horizontal de Projeção (sobre o traço horizontal do plano  $\phi$ ), pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio lado.

O extremo inferior da parte correspondente da diagonal vertical (o ponto **L**) é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $L_{s_1} \equiv L_1$ . As sombras dos lados verticais do polígono estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do «meio quadrado», tendo-se desenhado, também, a sombra da parte correspondente da mediana vertical da figura – é o segmento de reta  $[L_{s_1}O_{s_1}]$ .

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O_{s_1}$  e têm extremos nos vértices de maior afastamento do paralelogramo).

Os pontos  $J_{s_1}$ ,  $K_{s_1}$  e  $L_{s_1}$  são, imediatamente, **três pontos** do **segmento de elipse**. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que a semicircunferência  $\widehat{AB}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as partes correspondentes das diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções horizontais daqueles pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais do paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**.

Aos **cinco pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos **A** e **B** ( $A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$ , respetivamente), o que perfaz um total de **oito pontos** – estes oito pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  em  $A_{s_1}$ , tal como é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  em  $B_{s_1}$ .

Note ainda que existe um pequeno troço da curva desenhada que não faz parte da **sombra real** da semicircunferência  $\widehat{AB}$ . Esse troço é o troço que se situa para cima de  $A_{s_1}$  – a necessidade deste troço foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através dele é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivesse desenhado este pequeno troço, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

Em seguida, concluiu-se o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado, pela linha quebrada aberta  $[A_{s_1}Q_sA'_{s_2}]$ , pela semicircunferência  $\widehat{A'_{s_2}B'_{s_2}}$  de maior cota e, ainda, pela linha quebrada aberta  $[B'_{s_2}Q'_sB_{s_1}]$ . Note que parte da sombra projetada do cilindro é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio cilindro.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área **visível** da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços horizontais dos planos  $\phi$  e  $\phi'$  (os planos que contêm as bases do sólido), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes, das retas **i**, **t** e **t'** e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 942.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base do cone) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (que é um plano frontal) – o eixo do cone está, assim, contido numa reta vertical (uma reta projetante horizontal). Dessa forma, os pontos **O** e **V** (o vértice do cone) situam-se na mesma projetante horizontal, pelo que se tem imediatamente  $V_1 \equiv O_1$ .

As geratrizes do cone fazem ângulos de  $45^\circ$  com o plano da base. No entanto, a única situação em que esse ângulo se projeta em verdadeira grandeza num dos planos de projeção, é a situação em que as geratrizes são frontais (de frente) – trata-se, portanto, das geratrizes do contorno aparente frontal. Considerou-se a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal – mediu-se o ângulo de  $45^\circ$  com  $f_v$  (de abertura para a direita), a partir do ponto mais à esquerda da projeção frontal da base, e determinou-se  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**), sobre a linha de chamada de  $V_1$ . Note que se garantiu que o cone se situa no espaço do  $1^\circ$  Diedro (como o enunciado refere expressamente), pelo que o vértice **V**, do cone, tem cota positiva.

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

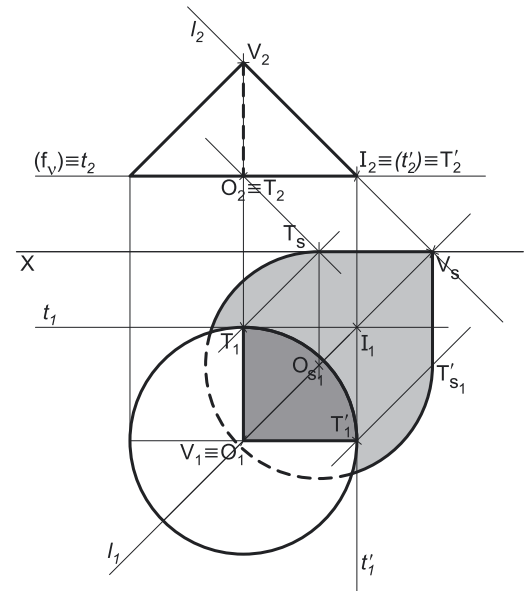
1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Note que, nesta situação particular, a projeção frontal do raio luminoso ( $l_2$ ) contém a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal.
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** teve determinação imediata, a partir da sua projeção frontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$ . As retas  $t$  e  $t'$  são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $v$  (o plano que contém a base do cone).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto **I**, que é a projeção frontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_1$  e  $T'_1$  (as projeções horizontais dos pontos **T** e **T'**).

Sublinha-se que, nesta situação particular, a reta  $t$  é uma reta fronto-horizontal e a reta  $t'$  é uma reta de topo.

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ . Note que a geratriz  $[TV]$  é invisível em projeção frontal (por se situar na da superfície lateral do cone que é invisível em projeção frontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As geratrizes [TV] e [T'V] separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior TT'** (e que é, precisamente, **3/4 da superfície lateral** do cone). A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor TT'** está **em sombra** (e que é, precisamente, **1/4 da superfície lateral** do cone). A base do cone está também **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada [TVTT'], que integra as geratrizes [TV] e [T'V], bem como o **arco maior TT'**.

Em **projeção horizontal**, a superfície lateral do cone é visível, na sua totalidade, embora a base seja invisível. Assim, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é visível na sua totalidade – é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz [TV] (o segmento [T<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]) e a projeção horizontal da geratriz [T'V] (o segmento [T'<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]).

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é invisível na sua totalidade. Tendo em conta que a base é igualmente invisível em projeção frontal (é projetante frontal), em projeção frontal não há qualquer **sombra própria** a assinalar.

A sombra própria do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Determinação da sombra projetada do cone:

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. O raio luminoso que passa pelo ponto V é uma reta passante, pelo que V<sub>s</sub> é a sombra do ponto V – situa-se no eixo X e é simultaneamente a sombra real e a sombra virtual do ponto V (é o traço frontal e também o traço horizontal do raio luminoso que passa por V). O raio luminoso que passa pelo ponto T é uma reta passante, pelo que T<sub>s</sub> é a sombra do ponto T – situa-se no eixo X e é simultaneamente a sombra real e a sombra virtual do ponto T (é o traço frontal e também o traço horizontal do raio luminoso que passa por T). T'<sub>s1</sub> é a sombra real do ponto T' (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por T'.

As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se todas no mesmo plano de projeção, pelo que, à partida, a sombra projetada do cone não admite pontos de quebra. Nesse sentido, e porque T<sub>s</sub> e T'<sub>s1</sub> se situam, ambas, no SPHA, à partida, a sombra do **arco maior TT'** não admite a existência de qualquer ponto de quebra.

V<sub>s</sub> e T<sub>s</sub> situam-se, ambas, no eixo X, pelo que a sombra da geratriz [TV] não admite ponto de quebra – o segmento [V<sub>s</sub>T<sub>s</sub>] é a sombra projetada da geratriz [TV] e situa-se, na totalidade, no eixo X (que é a aresta do 1<sup>a</sup> Diedro – situa-se tanto no SPHA como no SPFS). V<sub>s1</sub> e T'<sub>s1</sub> situam-se, ambas, no SPHA, pelo que a sombra da geratriz [T'V] não admite ponto de quebra – o segmento [V<sub>s1</sub>T'<sub>s1</sub>] é a sombra projetada da geratriz [T'V] e situa-se, na totalidade, no SPHA.

### Determinação da sombra projetada da base do cone:

Como atrás se referiu, à **partida**, a sombra do **arco maior TT'** não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos T e T') se situam no mesmo Plano de Projeção (situam-se, ambas, no SPHA). No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). No entanto, é possível concluir que a sombra do **arco maior TT'** se situa, na sua totalidade, no SPHA (onde se situam as sombras dos seus extremos).

Por outro lado, e porque se trata de uma direção luminosa, a **sombra projetada do arco maior TT'** no **Plano Horizontal de Projeção** (no SPHA) é um arco geometricamente igual ao **arco TT'**. Assim, determinou-se a sombra real do ponto O conduzindo, por O, um raio luminoso com a direção luminosa dada no enunciado – O<sub>s1</sub> é a sombra real do ponto O, situa-se no SPHA e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por O. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em O<sub>s1</sub> e com 3 cm de raio (o raio da base) desenhou-se o arco que é a sombra projetada do **arco maior TT'** no SPHA – trata-se de um arco com extremos nos pontos T<sub>s</sub> e T'<sub>s1</sub>. Sublinha-se que o arco  $\widehat{T_s T'_{s1}}$  é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz [TV] no ponto T<sub>s</sub> e também é **concordante** com a sombra da geratriz [T'V] no ponto T'<sub>s1</sub>.

Em seguida, concluiu-se o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo arco de circunferência  $\widehat{T_s T'_{s1}}$  e pela linha quebrada aberta [T<sub>s</sub>V<sub>s</sub>T'<sub>s1</sub>]. Note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cone é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pelo próprio cone.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo X, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O traço frontal do plano que contém a base do cone, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos e das retas t e t'), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.







(continuação da página anterior)

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ . Note que a geratriz  $[TV]$  é invisível em projeção horizontal (por se situar na da superfície lateral do cone que é invisível em projeção horizontal).

As geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior  $\widehat{TT'}$**  (e que é, precisamente, **3/4 da superfície lateral do cone**). A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor  $\widehat{T'T}$**  está **em sombra** (e que é, precisamente, **1/4 da superfície lateral do cone**), bem como a base do cone, que também está **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[TV\widehat{T'T}]$ , que integra as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ , bem como o **arco maior  $\widehat{TT'}$** .

Em **projeção frontal**, a superfície lateral do cone é visível, na sua totalidade, embora a base seja invisível. Assim, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é visível na sua totalidade – é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[TV]$  (o segmento  $[T_2V_2]$ ) e a projeção frontal da geratriz  $[T'V]$  (o segmento  $[T'_2V_2]$ ).

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é invisível na sua totalidade. Tendo em conta que a base é igualmente invisível em projeção horizontal (é projetante horizontal), em projeção horizontal não há qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

### Determinação da sombra projetada do cone:

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $T'_s$  é a sombra do ponto  $T'$  – situa-se no eixo  $X$  e é simultaneamente a sombra real e a sombra virtual do ponto  $T'$  (é o traço frontal e também o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $T'$ ).  $T_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $T$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $T$ .  $V_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $V$ . As sombras reais dos extremos das geratrizes separatrizes luz/sombra do cone situam-se no mesmo plano de projeção, pelo que as sombras projetadas daquelas geratrizes não admitem pontos de quebra. No entanto, isso não nos permite concluir que a sombra do cone não admite a existência de pontos de quebra.

$V_{s_1}$  e  $T_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[TV]$  não admite a existência de ponto de quebra – o segmento  $[T_{s_1}V_{s_1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[TV]$  e situa-se, na totalidade, no **SPHA**.  $V_{s_1}$  e  $T'_s$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[T'V]$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[V_{s_1}T'_s]$  é a sombra projetada da geratriz  $[T'V]$  e situa-se, na totalidade, no **SPHA**.

### Determinação da sombra projetada da base do cone:

Em seguida, há que determinar a sombra do **arco maior  $\widehat{TT'}$** , que é um arco de circunferência. Como em situações semelhantes, o **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo (ou circunferência ou arco de circunferência) consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo  $X$  e o raio luminoso  $l'$ , passante (concorrente com o eixo  $X$ ). O raio luminoso  $l'$  está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\varphi$  (o plano que contém o arco) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $\varphi$  é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizonta. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com plano  $\varphi$  – o ponto  $I'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $I'$ ) e por uma direção (é fronto-horizonta).

A reta  $i$  é secante ao **arco maior  $\widehat{TT'}$**  – a reta  $i$  corta o **arco maior  $\widehat{TT'}$**  no ponto  $Q$ . Note que a reta  $i$  passa pelo ponto  $O$  (o centro da base do cone), pelo que a reta  $i$  contém, necessariamente, o diâmetro fronto-horizonta da base (que é o segmento  $[QT']$ ). A sombra do ponto  $Q$  (que se situa no eixo  $X$ ) é, precisamente, o ponto de quebra da sombra do **arco maior  $\widehat{TT'}$** . Em seguida, pelas projeções do ponto  $Q$  conduziram-se as projeções homónimas do raio luminoso que passa por  $Q$  e determinou-se a sua sombra, que se situa no eixo  $X$  –  $Q_s$ .  $Q_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior  $\widehat{TT'}$** .

O **arco  $\widehat{QT}$**  produz sombra no **SPHA** e a **semicircunferência  $\widehat{QT'}$**  produz sombra no **SPFS**.

### Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Frontal de Projeção:

Trata-se de uma direção luminosa e a **semicircunferência  $\widehat{QT'}$**  está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a **sombra projetada da **semicircunferência  $\widehat{QT'}$**  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é uma **semicircunferência** geometricamente igual à **semicircunferência  $\widehat{QT'}$** . Assim, determinou-se a sombra real do ponto  $O$  conduzindo, por  $O$ , um raio luminoso com a direção luminosa convencional. Tendo em conta que esse raio luminoso é uma reta passante, a sombra real do ponto  $O$  ( $O_s$ ) situa-se necessariamente no eixo  $X$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_s$  e com 3 cm de raio (o raio da base) desenhou-se a semicircunferência que é a sombra projetada da figura no **SPFS** – trata-se de uma semicircunferência com um extremo no ponto  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do arco  $\overline{TT'}$ ) e com o outro extremo no ponto  $T_s$ .

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\overline{QT}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). No entanto, atendendo à reduzida dimensão do arco  $\overline{QT}$ , considera-se que os **oito pontos** atrás referidos é um número excessivo para uma curva tão pequena.

Assim, para determinar os pontos necessários a um desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva, comecemos por inscrever o arco  $\overline{QT}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X** – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco  $\overline{QT}$  corresponde a 1/4 do quadrado total (o 1/4 que a figura apresenta e que engloba a **maior parte** do arco  $\overline{QT}$ ).

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco  $\overline{QT}$  na parte correspondente desse quadrado de **lados paralelos ao eixo X** (que é 1/4 do quadrado inicial), desenhando em seguida a sua diagonal que passa pelo ponto  $O$  – dois dos vértices desse 1/4 do quadrado (os pontos  $Q$  e  $T$ ) permitem-nos determinar, imediatamente, **dois pontos do segmento de elipse**. O ponto em que a diagonal do quadrado corta o arco  $\overline{QT}$  permite-nos determinar mais **um ponto do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra desse 1/4 do quadrado no Plano Frontal de Projeção, bem como da sua diagonal.

Para tal já temos as sombras reais de três vértices da figura que é 1/4 do quadrado – os vértices  $Q$ ,  $T$  e  $O$ . A sombra do 1/4 do quadrado no Plano Horizontal de Projeção corresponde a um paralelogramo que tem três vértices consecutivos em  $Q_s$ ,  $O_s$  e  $T_{s1}$  – o **segmento de elipse** estará inscrita nesse paralelogramo. Os vértices  $Q_s$  e  $T_{s1}$  do paralelogramo são, imediatamente, **dois pontos** do segmento de elipse e são, também, os pontos em que a curva será tangente a dois dos lados do paralelogramo.

O lado superior desse 1/4 do quadrado é o segmento  $[QO]$ , cuja sombra no Plano Horizontal de Projeção já foi determinada (e se situa no eixo  $X$ ). A sombra do lado vertical mais à esquerda do 1/4 do quadrado está sobre a projeção horizontal dos raios luminosos que passam pelos seus extremos, o que nos permitiu desenhar o paralelogramo que é a sombra do 1/4 do quadrado.

Em seguida, desenhou-se a diagonal que tem um extremo em  $O_s$ . O ponto em que o **arco  $\overline{QT}$**  corta a diagonal do 1/4 do quadrado situar-se-á necessariamente sobre a diagonal do paralelogramo que foi desenhada. Assim, pela projeção horizontal daquele ponto conduziu-se a projeção horizontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se o ponto em que aquela interseção a diagonal do paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **um ponto do segmento de elipse**.

Os **três pontos** determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado, pelo segmento de reta  $[T_{s1}V_{s1}]$ , pelo segmento de reta  $[V_{s1}T'_s]$  e pela semicircunferência  $\overline{Q_sT_s}$ . Note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cone é invisível (em projeção frontal), pois está oculta pelo próprio cone.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, das retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 944.

### Dados:

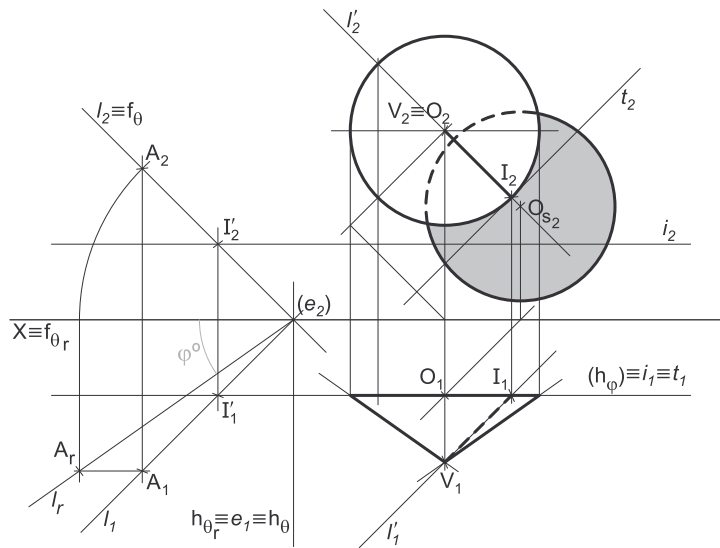
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base do cone) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) e com 2,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal).



Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (que é um plano frontal) – o eixo do cone está, assim, contido numa reta de topo (uma reta projetante frontal). Dessa forma, os pontos **O** e **V** (o vértice do cone) situam-se na mesma projetante frontal, pelo que se tem imediatamente  $V_2 \equiv O_2$ . Por outro lado, uma vez que a base do cone é invisível em projeção frontal (como o enunciado refere expressamente), sabe-se que o vértice **V**, do cone, tem afastamento superior à base.

Não é dada a altura do cone mas, sim o ângulo que as geratrizes fazem com o plano da base (que é um plano frontal) – esse ângulo tem  $\varphi^\circ$  de amplitude (que é a amplitude do ângulo que a direção convencional da luz faz com os planos de projeção). Assim, é necessário, antes de mais, determinar graficamente a verdadeira grandeza dessa amplitude. Para tal, conduziu-se um raio luminoso  $l$ , qualquer, passante, e determinou-se o ângulo que o raio luminoso  $l$  faz com o Plano Frontal de Projeção. Esse ângulo está contido no plano que contém o raio luminoso  $l$  e é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos.

Assim, a determinação do ângulo entre a reta  $l$  e o Plano Frontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapla 1.** Pela reta  $l$  conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção – o plano  $\theta$ , que é um plano de topo (é o plano projetante frontal do raio luminoso  $l$ ).

**Etapla 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\theta$  e o Plano Frontal de Projeção) é o próprio traço frontal do plano  $\theta$  ( $f_\theta$ ), que já foi determinado na etapa anterior.

**Etapla 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre o raio luminoso  $l$  e  $f_\theta$  (o traço frontal do plano  $\theta$ ). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas (que não se identificou).

Esse ângulo está contido no plano  $\theta$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano  $\theta$  ( $h_\theta$ ), que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente,  $h_\theta \equiv e_\theta \equiv h_\theta$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira (e que contém os arcos do rebatimento de cada ponto), que são planos frontais (de frente). Assim, os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e os pontos mantêm os seus afastamentos, ao longo dos respetivos rebatimentos.

O ponto de concorrência do raio luminoso com o eixo **X** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Já temos um ponto para definir o raio luminoso  $l$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao rebatimento de um ponto **A** qualquer, pertencente ao raio luminoso  $l$ . Rebateu-se o ponto **A** e determinou-se  $A_r$  – a reta  $l_r$  (o raio luminoso rebatido) está definida por dois pontos – o ponto  $A_r$ , e o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que é fixo).

O ângulo entre as duas retas (a reta  $l_r$  e  $f_\theta$ ) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre o eixo **X** (onde se situa  $f_\theta$ ) e a reta  $l_r$ . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da amplitude de um desses dois ângulos agudos com  $\varphi^\circ$ .

O ângulo que a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone faz com o plano da base é um ângulo de lados diretamente paralelos ao ângulo determinado e projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção – este raciocínio permitiu-nos desenhar imediatamente a projeção horizontal dessa geratriz e, assim, determinar  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto **V**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso  $l'$  – o raio luminoso  $l'$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** teve determinação imediata, a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l'$ ) com um plano projetante horizontal (o plano  $\varphi$ ).

Nesta situação, o ponto **I** é um ponto da base – de facto, o raio luminoso  $l'$  intersesta o plano da base (o plano  $\varphi$ ) num ponto que pertence à circunferência que delimita a base do sólido.

3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$ . Nesta situação, uma vez que o ponto **I** pertence à circunferência que delimita a base, existe apenas **uma única** reta tangente à base do cone e passando pelo ponto **I** – a reta  $t$ . Por isso mesmo, se conclui que, nesta situação, só existe **um único plano tangente luz/sombra**, sendo que a reta  $t$  é a reta de interseção desse plano com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base do cone).
4. A reta  $t$  é tangente à base do cone no ponto **I**. Assim, a geratriz **[IV]** é, imediatamente, a única **geratriz separatriz luz/sombra** (a geratriz de contacto ou de tangência, segundo a qual o plano  $\lambda$  é tangente à superfície lateral do sólido).

A geratriz **[IV]** é única geratriz em sombra da superfície lateral do sólido. De facto, o raio luz/sombra  $l'$ , ao passar pelo ponto **V** (um ponto opaco), transforma-se num **raio em sombra** e «arrasta» a sombra do ponto **V** ao longo de toda a geratriz, até ao ponto **I**.

Dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a totalidade da superfície lateral do sólido, à exceção, precisamente, da geratriz **[IV]**. A base do cone está **em sombra**, tal como a própria geratriz **[IV]** – a base e a geratriz **[IV]** são, assim, as partes da superfície do sólido que estão **em sombra**. Nesse sentido, a linha separatriz luz/sombra é a própria circunferência que delimita a base.

Em **projeção horizontal**, a geratriz **[IV]** (que está em sombra) é invisível, facto que se assinalou convenientemente. A base do cone também está em sombra mas, em projeção horizontal, a base é invisível (é projetante horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria a assinalar.

Em **projeção frontal**, a superfície lateral do cone é visível na sua totalidade, bem como a geratriz **[IV]**. A base está em sombra, mas é invisível em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, a única sombra a assinalar é a da geratriz **[IV]**.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Neste caso, e como se referiu, a linha separatriz luz/sombra é a circunferência que delimita a base do cone, pelo que a sombra projetada do cone é, na prática, a sombra projetada de um círculo (a própria base do sólido). O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso  $l$ , passante (o raio luminoso a que se recorreu para determinar a amplitude do ângulo de  $\varphi^\circ$ ). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base do cone) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $\varphi$  é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizantal. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com o plano  $\varphi$  – o ponto **I'**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto **I'**) e por uma direção (é fronto-horizantal).

A reta  $i$  é exterior à circunferência, pelo que a sombra do círculo não admite a existência de quaisquer pontos de quebra – a sombra do círculo situa-se, na sua totalidade, ou no **SPHA** ou no **SPFS**. Para identificar em que plano de projeção se projeta a sombra do cone, determinou-se a sombra real do ponto **O** (o centro da base) –  $O_{s_2}$  é a sombra real do ponto **O**, é o traço frontal do raio luminoso que passa por **O** e situa-se no **SPFS**. Assim, a sombra do cone nos planos de projeção (que corresponde à sombra da base do cone nos planos de projeção) situa-se, na sua totalidade, no **SPFS**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção e que se trata de uma direção luminosa, a sombra projetada da base do cone no **SPFS** é necessariamente um círculo, geometricamente igual ao círculo da base do sólido. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_2$  e com 2,5 cm de raio (o raio da base do cone), desenhou-se uma circunferência, que delimita a sombra projetada do cone no **SPFS**.

A circunferência desenhada é o contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção. Note que se atendeu às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cone é invisível (em projeção frontal), pois está oculta pelo próprio cone.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da amplitude do ângulo de  $\varphi^\circ$  e, ainda, das retas ***i*** e ***t***), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 945.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base do cone) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. A base do cone está contida num plano horizontal (de nível) e é tangente ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o afastamento do ponto **O** (o centro da base) é igual ao raio da base. Assim, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas e pertencente ao plano  $v$ . O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que a projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ) se situa sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ).

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

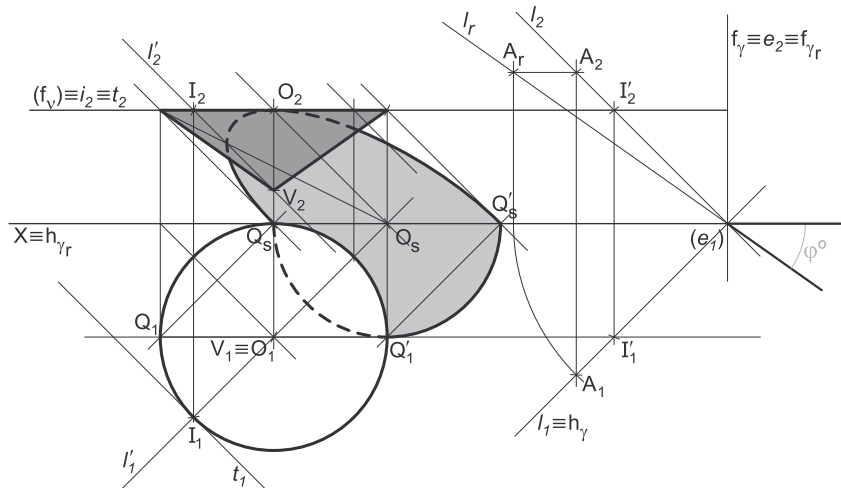
A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido (que é tangente ao eixo **X**). A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (que é um plano horizontal) – o eixo do cone está, assim, contido numa reta vertical (uma reta projetante horizontal). Dessa forma, os pontos **O** e **V** (o vértice do cone) situam-se na mesma projetante horizontal, pelo que se tem imediatamente  $V_1 \equiv O_1$ . Por outro lado, uma vez que o vértice do cone é invisível em projeção horizontal (como o enunciado refere expressamente), sabe-se que o vértice **V**, do cone, tem cota inferior à base.

Não é dada a altura do cone mas, sim o ângulo que as geratrizes fazem com o plano da base (que é um plano horizontal) – esse ângulo tem  $\varphi^\circ$  de amplitude (que é a amplitude do ângulo que a direção convencional da luz faz com os planos de projeção). Assim, é necessário, antes de mais, determinar graficamente a verdadeira grandeza dessa amplitude. Para tal, conduziu-se um raio luminoso ***l***, qualquer, passante, e determinou-se o ângulo que o raio luminoso ***l*** faz com o Plano Horizontal de Projeção. Esse ângulo está contido no plano que contém o raio luminoso ***l*** e é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos.

Assim, a determinação do ângulo entre a reta ***l*** e o Plano Horizontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

**Etapas 1.** Pela reta ***l*** conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção – o plano  $\gamma$ , que é um plano vertical (é o plano projetante horizontal do raio luminoso ***l***).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Etapa 2.** Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano  $\gamma$  e o Plano Horizontal de Projeção) é o próprio traço horizontal do plano  $\gamma$  ( $h_\gamma$ ), que já foi determinado na etapa anterior.

**Etapa 3.** O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre o raio luminoso  $l$  e  $h_\gamma$  (o traço horizontal do plano  $\gamma$ ). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas (que não se identificou).

Esse ângulo está contido no plano  $\gamma$ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ), que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente,  $f_\gamma \equiv e_2 \equiv f_r$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira (e que contêm os arcos do rebatimento de cada ponto), que são planos horizontais (de nível). Assim, os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo dos respetivos rebatimentos.

O ponto de concorrência do raio luminoso com o eixo  $X$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Já temos um ponto para definir o raio luminoso  $l$  em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao rebatimento de um ponto  $A$  qualquer, pertencente ao raio luminoso  $l$ . Rebateu-se o ponto  $A$  e determinou-se  $A_r$  – a reta  $l_r$  (o raio luminoso rebatido) está definida por dois pontos – o ponto  $A_r$  e o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$  (que é fixo).

O ângulo entre as duas retas (a reta  $l_r$  e  $h_\gamma$ ) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre o eixo  $X$  (onde se situa  $h_\gamma$ ) e a reta  $l_r$ . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da amplitude de um desses dois ângulos agudos com  $\varphi^\circ$ .

O ângulo que a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cone faz com o plano da base é um ângulo de lados diretamente paralelos ao ângulo determinado e projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção – este raciocínio permitiu-nos desenhar imediatamente a projeção frontal dessa geratriz e, assim, determinar  $V_2$  (a projeção frontal do ponto  $V$ ).

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto  $V$ ), um raio luminoso  $l'$  – o raio luminoso  $l'$  está definido por um ponto (o ponto  $V$ ) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com o plano da base – o ponto  $I$ . O ponto  $I$  teve determinação imediata, a partir da sua projeção frontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l'$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).

Nesta situação, o ponto  $I$  é um ponto da base – de facto, o raio luminoso  $l'$  intersesta o plano da base (o plano  $v$ ) num ponto que pertence à circunferência que delimita a base do sólido.

3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$ . Nesta situação, uma vez que o ponto  $I$  pertence à circunferência que delimita a base, existe apenas **uma única** reta tangente à base do cone e passando pelo ponto  $I$  – a reta  $t$ . Por isso mesmo, se conclui que, nesta situação, só existe **um único plano tangente luz/sombra**, sendo que a reta  $t$  é a reta de interseção desse plano com o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base do cone).
4. A reta  $t$  é tangente à base do cone no ponto  $I$ . Assim, a geratriz [IV] é, imediatamente, a **única geratriz separatriz luz/sombra** (a geratriz de contacto ou de tangência, segundo a qual o plano  $\lambda$  é tangente à superfície lateral do sólido).

A geratriz [IV] é uma geratriz em sombra da superfície lateral do sólido. De facto, o raio luz/sombra  $l'$ , ao passar pelo ponto  $I$  (um ponto opaco), transforma-se num **raio em sombra** e «arrasta» a sombra do ponto  $I$  ao longo de toda a geratriz, até ao ponto  $V$ .

Dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a base do sólido está **iluminada**. Já no que respeita à superfície lateral do sólido, e atendendo a que a sombra do ponto  $I$  é «arrastada» até ao ponto  $V$ , **toda a superfície lateral** do cone está **em sombra**. Nesse sentido, a linha separatriz luz/sombra é a própria circunferência que delimita a base (separa a base, que está iluminada) da superfície lateral do sólido (que está em sombra).

Em **projeção horizontal**, a superfície lateral do cone é invisível na sua totalidade, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria a assinalar.

Em **projeção frontal**, a superfície lateral do cone (que está toda em sombra) é visível apenas na parte que está compreendida entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria a assinalar é a da parte visível da superfície lateral do cone.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Neste caso, e como se referiu, a linha separatriz luz/sombra é a circunferência que delimita a base do cone, pelo que a sombra projetada do cone é, na prática, a sombra projetada de um círculo (a própria base do sólido). O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo  $X$  e o raio luminoso  $l$ , passante (o raio luminoso a que se recorreu para determinar a amplitude do ângulo de  $\varphi^\circ$ ). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $v$  (o plano que contém a base do cone) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $\varphi$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $v$  é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizonta. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com plano  $v$  – o ponto  $I'$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto  $I'$ ) e por uma direção (é fronto-horizonta).

A reta  $i$  é secante à circunferência que delimita a base do cone – a reta  $i$  corta a circunferência nos pontos  $Q$  e  $Q'$ . Note que a reta  $i$  passa pelo ponto  $O$  (o centro da base do cone), pelo que a reta  $i$  contém, necessariamente, o diâmetro fronto-horizonta da base (que é o segmento  $[QQ']$ ). As sombras dos pontos  $Q$  e  $Q'$  (que se situam no eixo  $X$ ) são, precisamente, os pontos de quebra da sombra da circunferência. Note que não se determinara as projeções frontais dos pontos  $Q$  e  $Q'$  (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por estas não serem necessárias à resolução do exercício. Em seguida, pelas projeções horizontais dos pontos  $Q$  e  $Q'$ , conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se as suas sombras, que se situam no eixo  $X$  –  $Q_s$  e  $Q'_s$ . O segmento de reta  $[Q_sQ'_s]$  é, assim, a linha de quebra da sombra do círculo.

A semicircunferência de menor afastamento  $\widehat{QQ'}$  produz sombra no **SPFS** e a semicircunferência de maior afastamento  $\widehat{QQ'}$  produz sombra no **SPHA**.

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

Trata-se de uma direção luminosa e a semicircunferência  $\widehat{QQ'}$  está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a **sombra projetada da semicircunferência de maior afastamento  $\widehat{QQ'}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é uma semicircunferência geometricamente igual à **semicircunferência  $\widehat{QQ'}$** . Assim, determinou-se a sombra real do ponto  $O$  conduzindo, por  $O$ , um raio luminoso com a direção luminosa convencional. Tendo em conta que esse raio luminoso é uma reta passante, a sombra real do ponto  $O$  ( $O_s$ ) situa-se necessariamente no eixo  $X$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_s$  e com 3 cm de raio (o raio da base) desenhou-se a semicircunferência que é a sombra projetada da figura no **SPHA** – trata-se de uma semicircunferência com extremos nos pontos  $Q_s$  e  $Q'_s$  (os pontos de quebra da sombra da figura).

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada da semicircunferência de menor afastamento  $\widehat{QQ'}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Assim, começou-se por inscrever a semicircunferência na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo  $X$** , desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra da semicircunferência  $\widehat{QQ'}$  de menor afastamento corresponde a «meio quadrado».

Assim, desenhou-se o «meio quadrado» e desenharam-se, ainda, as partes correspondentes das diagonais e das medianas do quadrado total. Note que o lado de maior afastamento do «meio quadrado» é o próprio segmento  $[QQ']$  (o diâmetro fronto-horizonta da circunferência). Nesse sentido, os pontos  $Q_s$  e  $Q'_s$  são, em simultâneo, dois vértices do paralelogramo que é a sombra do «meio quadrado» e são, também, os dois extremos do segmento de elipse a desenhar. O extremo de menor afastamento do raio de topo que se situa no «meio quadrado» permite-nos determinar um outro ponto do segmento de elipse. A sombra deste ponto (que não se identificou) está coincidente com o próprio ponto, pois é um ponto do Plano Frontal de Projeção. Assim, já temos **três pontos do segmento de elipse**.

Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam a semicircunferência  $\widehat{QQ'}$  permitem-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Assim, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

O segmento de reta  $[Q_sQ'_s]$  é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção do lado  $[QQ']$  (o lado de maior afastamento do «meio quadrado»). O lado de menor afastamento do «meio quadrado» está contido no traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio lado. As sombras dos lados de topo do polígono estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos (os pontos  $Q$  e  $Q'$ , por exemplo).

Em seguida, teve-se em conta que a mediana de topo do «meio quadrado» é paralela aos lados que não são fronto-horizontais e passa pelo ponto  $O$ , o que nos permitiu desenhar a sua sombra, passando por  $O_s$ . A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do paralelogramo que é a sombra do «meio quadrado», tendo-se desenhado, também, as partes correspondentes das diagonais do paralelogramo (que passam por  $O_s$ ).

Os pontos em que a semicircunferência corta as diagonais do «meio quadrado» situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções frontais daqueles pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas interseccionam as diagonais do «meio paralelogramo», o que nos permitiu determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**.

Os **cinco pontos** determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado e pela semicircunferência  $\overline{Q_s Q'_s}$ . Note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cone é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio cone.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da amplitude do ângulo de  $\varphi^\circ$  e, ainda, das retas *i* e *t*), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 946.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\nu$  (o plano horizontal que contém a base do cone) pelo seu traço frontal. O plano  $\nu$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_\nu$ ) passa por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**). O plano  $\nu$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções do cone:

A base do cone é tangente ao Plano Frontal de Projeção e o seu centro (o ponto **O**) tem 3 cm de afastamento, pelo que se depreende que a base tem 3 cm de raio. Por outro lado, a base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $\nu$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido (que é tangente ao eixo **X**). A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\nu$  ( $f_\nu$ ), pois o plano  $\nu$  é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

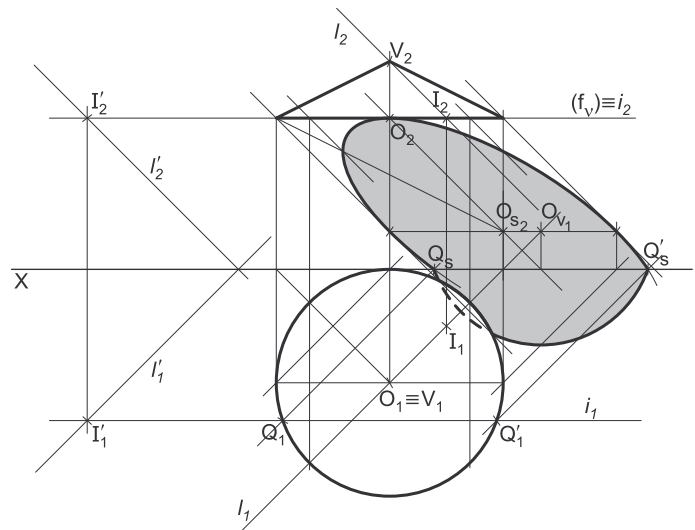
Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (que é um plano horizontal) – o eixo do cone está, assim, contido numa reta vertical (uma reta projetante horizontal). Dessa forma, os pontos **O** e **V** (o vértice do cone) situam-se na mesma projetante horizontal, pelo que se tem imediatamente  $V_1 \equiv O_1$ . Por outro lado, uma vez que a base do cone é invisível em projeção horizontal (como o enunciado refere expressamente), sabe-se que o vértice **V**, do cone, tem cota superior à base.

A altura de um cone é a distância do vértice ao plano da base, medida ortogonalmente a este (corresponde, neste caso, à diferença das cotas do vértice e do plano da base). Assim, tendo em conta que a base do cone tem 4 cm de cota (a cota do ponto **O**) e que o cone tem 1,5 cm de altura, constata-se que o ponto **V** (o vértice do cone) tem 5,5 cm de cota ( $4 + 1,5 = 5,5$ ), o que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**).

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

##### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso *l*; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso *l* com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** teve determinação imediata, a partir da sua projeção frontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).

Nesta situação, o ponto **I** é um ponto situado no interior da base do sólido – de facto, o raio luminoso  $l$  interseca o plano da base (o plano  $v$ ) num ponto que situa no interior da circunferência que delimita a base do sólido.

3. Não foi possível conduzir, pelo ponto **I**, qualquer reta tangente à base do cone. De facto, uma vez que o ponto **I** é interior à circunferência que delimita a base, qualquer reta que passe pelo ponto **I** é necessariamente **secante** à base – não há qualquer reta tangente à base passando pelo ponto **I**. Por isso mesmo, se conclui que, nesta situação, não existe **nenhum plano tangente luz/sombra** (qualquer plano que contenha o ponto **I** é necessariamente um **plano secante** ao cone).
4. Tendo em conta que não há nenhum plano tangente luz/sombra, também não há nenhuma **geratriz separatriz luz/sombra** (não há qualquer geratriz de contacto ou de tangência).

Dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a totalidade da superfície lateral do sólido. A base, por outro lado, está necessariamente em sombra. Assim, a **linha separatriz luz/sombra**, nesta situação, é a própria circunferência que delimita a base.

Em **projeção frontal**, a base (que está em sombra) é invisível (é projetante frontal), pelo que, **em projeção frontal**, não existe qualquer **sombra própria** a assinalar.

Em **projeção horizontal**, a superfície lateral do cone (que está iluminada) é visível na sua totalidade. A base está em sombra, mas é invisível em projeção horizontal, pelo que, **em projeção horizontal**, também não existe qualquer **sombra própria** a assinalar.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Neste caso, e como se referiu, a linha separatriz luz/sombra é a circunferência que delimita a base do cone, pelo que a sombra projetada do cone é, na prática, a sombra projetada de um círculo (a própria base do sólido). O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso  $l'$ , passante. O raio luminoso  $l'$  está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção convencional da luz). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano  $v$  (o plano que contém a base do cone) – a reta  $i$ .

Para definir a reta  $i$  são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano  $v$  são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano  $v$  é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta  $i$  é, assim, uma reta fronto-horizontais. Já temos uma direção para definir a reta  $i$ . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l'$  com o plano  $v$  – o ponto **I'**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $i$  – a reta  $i$  está definida por um ponto (o ponto **I'**) e por uma direção (é fronto-horizontais).

A reta  $i$  é secante à circunferência, pelo que a sombra do círculo admite a existência de pontos de quebra. A reta  $i$  corta a circunferência nos pontos **Q** e **Q'** – as sombras dos pontos **Q** e **Q'** serão, assim, os pontos de quebra da sombra do círculo. Note que não se determinaram as projeções frontais dos pontos **Q** e **Q'** (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por estas não serem fundamentais para a resolução do exercício.

O **arco menor  $\widehat{QQ'}$**  produz sombra no **SPHA** e o **arco maior  $\widehat{QQ'}$**  produz sombra no **SPFS**.

*Determinação da sombra projetada do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

Trata-se de uma direção luminosa e o **arco menor  $\widehat{QQ'}$**  está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a **sombra projetada do arco menor  $\widehat{QQ'}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um arco de circunferência geometricamente igual ao **arco menor  $\widehat{QQ'}$** . Assim, determinou-se a sombra do ponto **O** no Plano Horizontal de Projeção, conduzindo, por **O**, um raio luminoso com a direção luminosa convencional. A sombra do ponto **O** no Plano Horizontal de Projeção é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa e situa-se no **SPHP**, pelo que é uma sombra virtual – é  **$O_{v_1}$** .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  **$O_{v_1}$**  e com 3 cm de raio (o raio da base), desenhou-se um arco circunferência com extremos nos pontos  **$Q_s$**  e  **$Q'_s$**  – esse arco (o arco  **$\widehat{Q_s Q'_s}$** ) é a sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção.

*Determinação da sombra projetada do cone no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco maior  $\widehat{QQ'}$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, começou-se por inscrever o **arco maior  $\widehat{QQ'}$**  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que se considerou suficiente para a determinação da sombra do **arco maior  $\widehat{QQ'}$**  corresponde a um «meio quadrado» do quadrado total (o «meio quadrado» que a figura apresenta e que engloba maior parte do **arco maior  $\widehat{QQ'}$** ).

O diâmetro fronto-horizontal da circunferência é o lado de maior afastamento desse «meio quadrado» – os seus extremos permitem-nos determinar **dois pontos do segmento de elipse**. O extremo de menor afastamento do raio de topo que está no interior do «meio quadrado» (e que é a parte correspondente da mediana de topo do quadrado) permite-nos determinar mais **um ponto do segmento de elipse**. Os pontos em que as partes correspondentes das diagonais do quadrado cortam o **arco maior  $\widehat{QQ'}$**  permitem-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Assim, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, bem como das partes correspondentes da mediana de topo e das diagonais do quadrado.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção do centro do círculo (o ponto **O**) –  **$O_{s2}$**  é o traço frontal do raio luminoso que passa por **O** e situa-se no **SPFS**, pelo que é a sombra real do ponto **O**.

Em seguida, determinaram-se as sombras no Plano Frontal de Projeção dos extremos do lado de maior afastamento do «meio quadrado» (e que não se identificaram) – a sombra desse lado é fronto-horizontal e passa por  **$O_{s2}$** . O lado de menor afastamento do «meio quadrado» está contido no traço frontal do plano  $v(f_1)$ , ou seja, situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio segmento. As sombras dos lados de topo do polígono estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do «meio quadrado» (que é um paralelogramo), tendo-se desenhado, também, a sombra da parte correspondente da mediana de topo da figura – é o segmento de reta que passa por  **$O_{s2}$**  e que é paralelo às sombras dos lados de topo da figura. Por fim, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  **$O_{s2}$**  e têm extremos nos vértices superiores do paralelogramo).

Os extremos do lado inferior do paralelogramo são, imediatamente, **dois pontos do segmento de elipse**. A sombra do extremo de menor afastamento do raio de topo é um outro ponto do **segmento de elipse**. Estes **três pontos** são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que o **arco maior  $\widehat{QQ'}$**  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as partes correspondentes das diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções frontais daqueles pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais do paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**.

Este conjunto de procedimentos permitiu-nos determinar um total de **cinco pontos do segmento de elipse**, aos quais acrescem os **dois pontos** de quebra (os pontos  **$Q_s$**  e  **$Q'_s$** ), o que perfaz um total de **sete pontos** para o desenho da curva. Estes sete pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado e pelo arco  **$Q_s Q'_s$** . Note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cone é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pelo próprio cone.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, da reta  **$i$**  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 947.

### Dados:

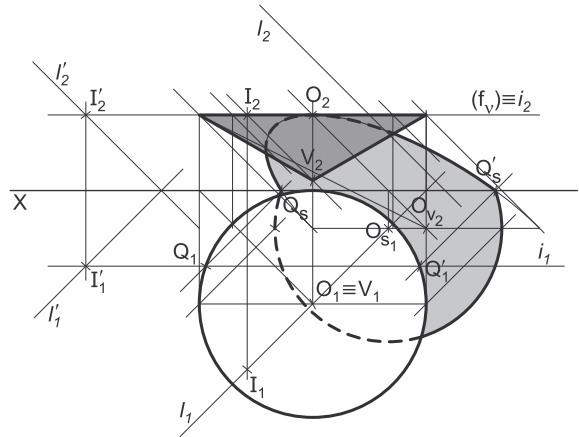
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base do cone) pelo seu traço frontal. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**). O plano  $v$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A base do cone é tangente ao Plano Frontal de Projeção e o seu centro (o ponto **O**) tem 3 cm de afastamento, pelo que se depreende que a base tem 3 cm de raio. Por outro lado, a base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido (que é tangente ao eixo **X**). A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).



Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (que é um plano horizontal) – o eixo do cone está, assim, contido numa reta vertical (uma reta projetante horizontal). Dessa forma, os pontos **O** e **V** (o vértice do cone) situam-se na mesma projetante horizontal, pelo que se tem imediatamente  $V_1 \equiv O_1$ . Por outro lado, uma vez que o vértice do cone é invisível em projeção horizontal (como o enunciado refere expressamente), sabe-se que o vértice **V**, do cone, tem cota inferior à base.

Não é dada a altura do cone mas, sim o ângulo que as geratrizes fazem com o plano da base (que é um plano horizontal) – esse ângulo tem  $30^\circ$  de amplitude. As geratrizes do cone em que esse ângulo se projeta em verdadeira grandeza num dos planos de projeção são as geratrizes do contorno aparente frontal – são as geratrizes frontais (de frente) do cone. Assim, desenhou-se a projeção frontal da geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cone, fazendo, com  $f_v$  (o traço frontal do plano da base), um ângulo de  $30^\circ$  (de abertura para a direita), o que nos permitiu determinar  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**). Note que se poderia ter desenhado a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal, fazendo, com  $f_v$  (o traço frontal do plano da base) um ângulo de  $30^\circ$  (de abertura para a esquerda, nesse caso).

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** teve determinação imediata, a partir da sua projeção frontal, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).

Nesta situação, o ponto **I** é um ponto situado no interior da base do sólido – de facto, o raio luminoso  $l$  intersesta o plano da base (o plano  $v$ ) num ponto que situa no interior da circunferência que delimita a base do sólido.

3. Não foi possível conduzir, pelo ponto **I**, qualquer reta tangente à base do cone. De facto, uma vez que o ponto **I** é interior à circunferência que delimita a base, qualquer reta que passe pelo ponto **I** é necessariamente **secante** à base – não há qualquer reta tangente à base passando pelo ponto **I**. Por isso mesmo, se conclui que, nesta situação, não existe **nenhum plano tangente luz/sombra** (qualquer plano que contenha o ponto **I** é necessariamente um **plano secante** ao cone).
4. Tendo em conta que não há nenhum plano tangente luz/sombra, também não há nenhuma **geratriz separatriz luz/sombra** (não há qualquer geratriz de contacto ou de tangência).

Dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é apenas a base do cone, sendo que a totalidade da superfície lateral do sólido está **em sombra**. Assim, a **linha separatriz luz/sombra**, nesta situação, é a própria circunferência que delimita a base.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em **projeção horizontal**, a superfície lateral do cone (que está em sombra) é invisível na sua totalidade, pelo que, em **projeção horizontal**, não existe qualquer **sombra própria** a assinalar.

Em **projeção frontal**, a superfície lateral do cone (que está em sombra) é visível na parte compreendida entre as projeções frontais das geratrizes do contorno aparente frontal – essa é a **sombra própria** a assinalar em **projeção frontal**.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Neste caso, e como se referiu, a linha separatriz luz/sombra é a circunferência que delimita a base do cone, pelo que a sombra projetada do cone é, na prática, a sombra projetada de um círculo (a própria base do sólido). O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso ***l'***, passante. O raio luminoso ***l'*** está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção convencional da luz). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano **v** (o plano que contém a base do cone) – a reta ***i***.

Para definir a reta ***i*** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano **v** são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano **v** é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta ***i*** é, assim, uma reta fronto-horizantal. Já temos uma direção para definir a reta ***i***. Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso ***l'*** com plano **v** – o ponto ***I'***. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta ***i*** – a reta ***i*** está definida por um ponto (o ponto ***I'***) e por uma direção (é fronto-horizantal).

A reta ***i*** é secante à circunferência, pelo que a sombra do círculo admite a existência de pontos de quebra. A reta ***i*** corta a circunferência nos pontos ***Q*** e ***Q'*** – as sombras dos pontos ***Q*** e ***Q'*** serão, assim, os pontos de quebra da sombra do círculo. Note que não se determinaram as projeções frontais dos pontos ***Q*** e ***Q'*** (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações), por estas não serem fundamentais para a resolução do exercício.

O **arco menor  $\widehat{QQ'}$**  produz sombra no **SPFS** e o **arco maior  $\widehat{QQ'}$**  produz sombra no **SPHA**.

*Determinação da sombra projetada do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

Trata-se de uma direção luminosa e o **arco maior  $\widehat{QQ'}$**  está contido num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a **sombra projetada do arco maior  $\widehat{QQ'}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um arco de circunferência geometricamente igual ao **arco maior  $\widehat{QQ'}$** . Assim, determinou-se a sombra do ponto ***O*** no Plano Horizontal de Projeção, conduzindo, por ***O***, um raio luminoso com a direção luminosa convencional. A sombra do ponto ***O*** no Plano Horizontal de Projeção é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa e situa-se no **SPHA**, pelo que é uma sombra real – é  **$O_{s_1}$** .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  **$O_{s_1}$**  e com 3 cm de raio (o raio da base), desenhou-se um arco circunferência com extremos nos pontos  **$Q_s$**  e  **$Q'_s$**  – esse arco (o arco  **$\widehat{Q_s Q'_s}$** ) é a sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção.

*Determinação da sombra projetada do cone no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco menor  $\widehat{QQ'}$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Assim, começou-se por inscrever o **arco menor  $\widehat{QQ'}$**  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que se considerou suficiente para a determinação da sombra do **arco menor  $\widehat{QQ'}$**  corresponde a um «meio quadrado» do quadrado total (o «meio quadrado» que a figura apresenta e que engloba o **arco menor  $\widehat{QQ'}$**  na sua totalidade).

O diâmetro fronto-horizantal da circunferência é o lado de maior afastamento desse «meio quadrado» – os seus extremos permitem-nos determinar **dois pontos** do **segmento de elipse**. O extremo de menor afastamento do raio de topo que está no interior do «meio quadrado» (e que é a parte correspondente da mediana de topo do quadrado) permite-nos determinar mais **um ponto** do **segmento de elipse**. Os pontos em que as partes correspondentes das diagonais do quadrado cortam o **arco menor  $\widehat{QQ'}$**  permitem-nos determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**. Assim, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, bem como das partes correspondentes da mediana de topo e das diagonais do quadrado.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção do centro do círculo (o ponto ***O***) –  **$O_{v_2}$**  é o traço frontal do raio luminoso que passa por ***O*** e situa-se no **SPFI**, pelo que é a sombra virtual do ponto ***O***.

Em seguida, determinaram-se as sombras no Plano Frontal de Projeção dos extremos do lado de maior afastamento do «meio quadrado» (e que não se identificaram) – a sombra desse lado é fronto-horizantal e passa por  **$O_{v_2}$** . O lado de menor afastamento do «meio quadrado» está contido no traço frontal do plano **v** ( **$f_v$** ), ou seja, situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio segmento. As sombras dos lados de topo do polígono estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do «meio quadrado» (que é um paralelogramo), tendo-se desenhado, também, a sombra da parte correspondente da mediana de topo da figura – é o segmento de reta que passa por  **$O_{v_2}$**  e que é paralelo às sombras dos lados de topo da figura. Por fim, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  **$O_{v_2}$**  e têm extremos nos vértices superiores do paralelogramo).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Os extremos do lado inferior do paralelogramo são, imediatamente, **dois pontos** do **segmento de elipse**. A sombra do extremo de menor afastamento do raio de topo é um outro ponto do **segmento de elipse**. Estes **três pontos** são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que o **arco menor**  $\widehat{QQ'}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as partes correspondentes das diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções frontais daqueles pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais do paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**.

Este conjunto de procedimentos permitiu-nos determinar um total de **cinco pontos** do **segmento de elipse**, aos quais acrescem os **dois pontos** de quebra (os pontos  $Q_s$  e  $Q'_s$ ), o que perfaz um total de **sete pontos** para o desenho da curva. Estes sete pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva.

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da sombra do **arco menor**  $\widehat{QQ'}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para baixo do eixo **X** (situam-se para baixo de  $Q_s$  e de  $Q'_s$ ) – estes dois troços referem-se à **sombra virtual** da semicircunferência  $\widehat{QQ'}$ , pois situam-se no **SPFI**. A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado e pelo arco de circunferência  $\widehat{Q_sQ'_s}$ . Note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cone é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio cone.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

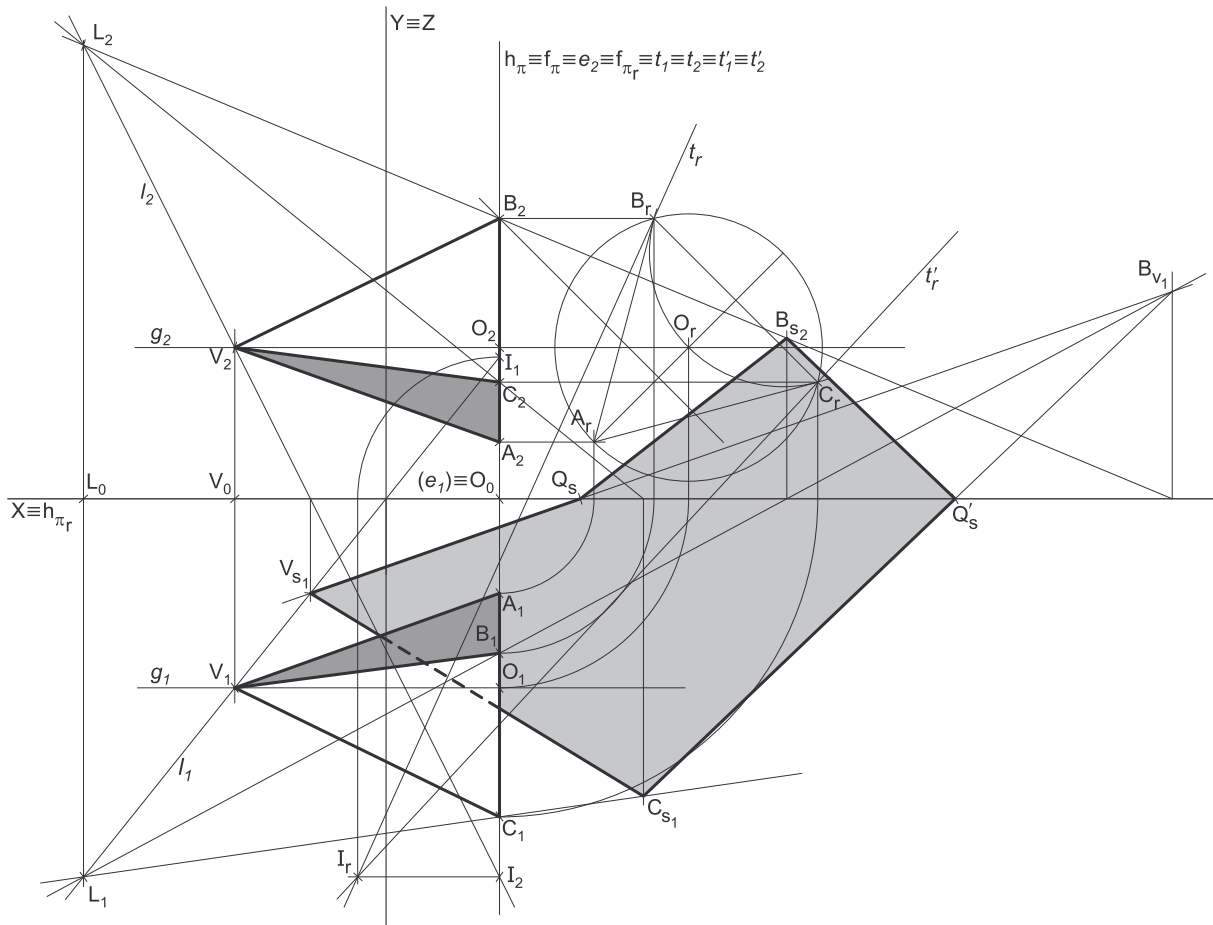
Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, da reta  $i$  e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

948.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O**, **A** e **L** (o foco luminoso), pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto **O** é o centro do triângulo de que **A** é um dos vértices e o triângulo está contido num plano de perfil, pelo que as projeções dos dois pontos se situam na mesma linha de chamada. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base da pirâmide) pelos seus traços, contendo os pontos **O** e **A** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) passa pelas projeções frontais dos dois pontos ( $O_2$  e  $A_2$ ), tal como o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) passa pelas projeções horizontais dos dois pontos ( $O_1$  e  $A_1$ ).

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  (o plano que contém o triângulo) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pelo que se tem imediatamente  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . A charneira é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos pontos **O** e **A**, obtendo-se  $O_r$  e  $A_r$ . Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  (o ponto **O** rebatido) e com raio até  $A_r$  (o ponto **A** rebatido), desenhou-se a circunferência circunscrita ao triângulo (em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo **[ABC]**, em rebatimento (inscrito na circunferência) – este procedimento permitiu-nos determinar os outros dois vértices do triângulo, em rebatimento (os pontos  $B_r$  e  $C_r$ ). Note que se atendeu ao facto de enunciado referir, expressamente, que o ponto **B** é o vértice de maior cota do triângulo.

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos **B** e **C** e desenhar as duas projeções do polígono (ambas as projeções do triângulo se reduzem a segmentos de reta, pois o plano que o contém é duplamente projetante).

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base, ou seja, está contido numa reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **g**, fronto-horizontal, que é a reta suporte do eixo da pirâmide. Uma vez que a altura da pirâmide é a distância do vértice ao plano da base, medida ortogonalmente a este, o vértice **V** dista 7 cm (a altura da pirâmide) do plano  $\pi$ . Assim, a altura da pirâmide pode medir-se na reta **g**, que é paralela aos dois planos de projeção – o segmento **[OV]** (o eixo do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza em ambas as projeções. Assim, a partir de  $O_2$  (por exemplo), mediram-se os 7 cm sobre  $g_2$  (a projeção frontal da reta **g**) e determinou-se  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**), sobre  $g_2$ , o que nos permitiu determinar  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto **V**) sobre  $g_1$  (a projeção horizontal da reta **g**). Note que se garantiu que o vértice **V** tem abcissa positiva, como o enunciado pede expressamente.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das projeções de todos os quatro vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[AVBC]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2V_2B_2C_2]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta  $[AB]$ , da base, é invisível (pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal), mas está oculta por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal. Já a aresta lateral  $[CV]$  é visível, em projeção frontal, pois separa duas faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (note que  $C$  é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[AVCB]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1V_1C_1B_1]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta  $[AC]$  da base é invisível (pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal), mas está oculta por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal. Já a aresta lateral  $[BV]$  é visível, em projeção horizontal, pois separa duas faces da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (note que  $B$  é o vértice de maior cota da pirâmide).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto  $V$ ), um raio luminoso  $l$ . O raio luminoso  $l$  está definido por dois pontos – o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) e o ponto  $L$  (o foco luminoso).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto  $I$ . A determinação das projeções do ponto  $I$  é direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano duplamente projetante).
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base – o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas  $t$  e  $t'$  mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas  $t$  e  $t'$  em relação à base da pirâmide, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da base da pirâmide, efetuou-se o rebatimento do ponto  $I$  para esse mesmo rebatimento, obtendo-se  $I_r$ . Note que o ponto  $I$  tem afastamento negativo, pelo que o arco do rebatimento do ponto  $I$  surge numa posição oposta à dos arcos do rebatimento dos pontos  $O$  e  $A$ . No entanto, tendo em conta que o rebatimento dos pontos  $A$  e  $O$  (e do plano  $\pi$ ) se processou no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e com uma amplitude de  $90^\circ$ , o arco do rebatimento do ponto  $I$  roda, igualmente, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e, também, com uma amplitude de  $90^\circ$ .

Por  $I_r$  conduziram-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento) – a reta  $t_r$  passa por  $I_r$  e é rasante à base da pirâmide (em rebatimento) no vértice  $B_r$  e a reta  $t'_r$  passa por  $I_r$  e é rasante à base da pirâmide (em rebatimento) no vértice  $C_r$ .

4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos  $B$  e  $C$ , respetivamente (o que foi possível constatar em rebatimento). Assim, as arestas laterais  $[BV]$  e  $[CV]$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[BV]$  e  $[CV]$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas  $[BV]$  e  $[CV]$  separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, do lado e da esquerda), a face lateral  $[BCV]$  é a única face iluminada do sólido, pois as faces laterais  $[ABV]$  e  $[ACV]$  estão em sombra, assim como a base da pirâmide. Nesse sentido, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[BCV]$  (é a linha que delimita a face lateral  $[BCV]$ ).

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais  $[ABV]$  e  $[ACV]$ , bem como a base da pirâmide. Em **projeção horizontal**, a face lateral  $[ABV]$  é visível, enquanto a face lateral  $[ACV]$  e a base (que é projetante horizontal) são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral  $[ABV]$ . Já em **projeção frontal**, a face lateral  $[ACV]$  é visível, enquanto a face lateral  $[ABV]$  e a base (que é projetante frontal) são invisíveis, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral  $[ACV]$ .

A **sombra própria** da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$B_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $B$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $B$ .  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $C$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $C$ .  $V_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $V$ . As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

$C_{s_1}$  e  $V_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral [CV] não admite ponto de quebra – o segmento  $[V_{s_1}C_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento [CV] e situa-se no **SPHA**. O mesmo já não acontece em relação às arestas [BC] e [BV] – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $B_{s_2}$  e  $C_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $B_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto  $B - B_{v_1}$ .  $B_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto  $B$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $B$ . O segmento  $[V_{s_1}B_{v_1}]$  é a sombra projetada da aresta [BV] no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[V_{s_1}B_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[V_{s_1}Q_sB_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento [BV] (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

A sombra virtual do ponto  $B$  ( $B_{v_1}$ ) permitiu-nos, também, determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s_2}$  e  $C_{s_1}$ . O segmento  $[C_{s_1}B_{v_1}]$  é a sombra projetada da aresta [BC] no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C_{s_1}B_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[C_{s_1}Q'_sB_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento [BC] (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[V_{s_1}Q_sB_{s_2}Q'_sC_{s_1}]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pela pirâmide) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a base), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e à construção da base da pirâmide, em verdadeira grandeza, ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 949.

#### Dados:

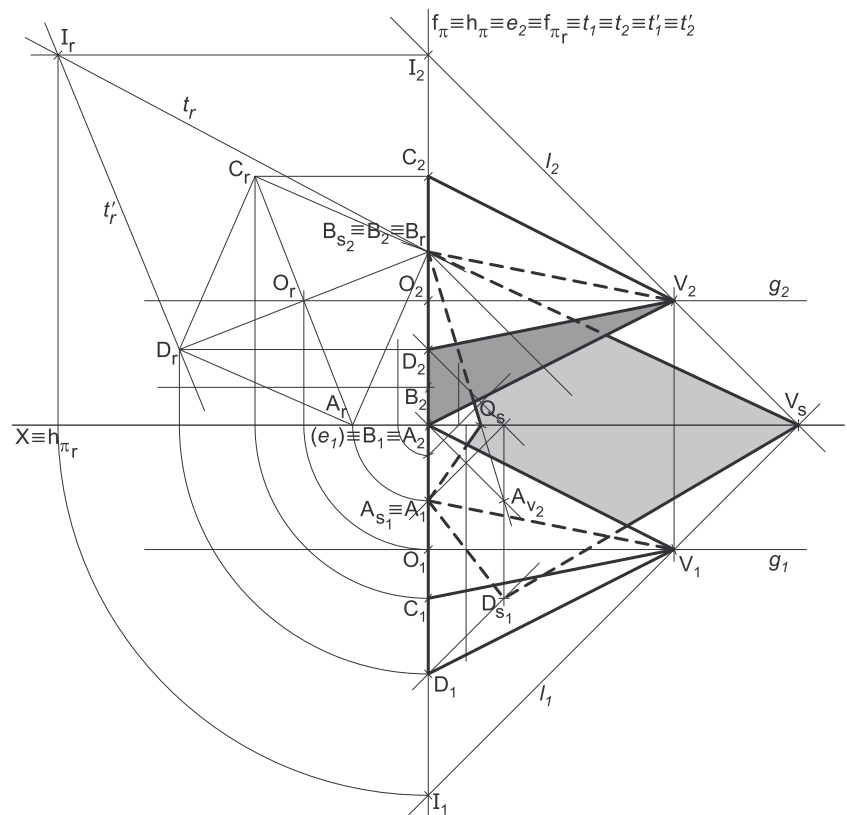
Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, representar  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ), pois o ponto  $B$  tem afastamento nulo. Os pontos  $A$  e  $B$  são dois vértices de um quadrado que está contido num plano de perfil, pelo que as projeções dos dois pontos se situam na mesma linha de chamada. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base da pirâmide) pelos seus traços, contendo o ponto  $A$  – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) passa pela projeção frontal do ponto  $A$ , tal como o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) passa pelas projeções horizontais dos dois pontos.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

#### Resolução:

##### Determinação das projeções da pirâmide:

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  (o plano que contém o quadrado) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pelo que se tem imediatamente  $f_{\pi} \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . A charneira é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **A**, o que nos permitiu determinar **A<sub>r</sub>**. Com o compasso, fazendo centro em **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido) e com 5 cm de raio (a medida do lado do quadrado) determinou-se **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido), sobre  $f_{\pi_r}$ . O ponto **B** tem afastamento nulo, pelo que **B** é um ponto de  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pelo que **B<sub>r</sub>** se situa sobre  $f_{\pi_r}$ .

A partir de **A<sub>r</sub>** e de **B<sub>r</sub>**, construiu-se o quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento (**C<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**), bem como o centro do quadrado (o ponto **O**) em rebatimento – **O<sub>r</sub>**. Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos **C** e **D** (e do ponto **O**) e, assim, desenhar as duas projeções do polígono (ambas as projeções do quadrado se reduzem a segmentos de reta, pois o plano que o contém é duplamente projetante).

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base, ou seja, está contido numa reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **g**, fronto-horizontal, que é a reta suporte do eixo da pirâmide. Uma vez que a altura da pirâmide é a distância do vértice ao plano da base, medida ortogonalmente a este, o vértice **V** dista 6 cm (a altura da pirâmide) do plano  $\pi$ . Assim, a altura da pirâmide pode medir-se na reta **g**, que é paralela aos dois planos de projeção – o segmento **[OV]** (o eixo do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza em ambas as projeções. Assim, a partir de **O<sub>2</sub>** (por exemplo), mediram-se os 6,5 cm sobre **g<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **g**) e determinou-se **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **V**), sobre **g<sub>2</sub>**, o que nos permitiu determinar **V<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **V**) sobre **g<sub>1</sub>** (a projeção horizontal da reta **g**). Note que se garantiu que o vértice **V** se situa à direita do plano da base, como o enunciado pede expressamente.

A partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[AVCD]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>V<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **B**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[BV]**. As arestas **[AB]** e **[BC]** da base estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção frontal) é a referente à aresta lateral **[BV]**. Já a aresta lateral **[DV]** é visível, em projeção frontal, pois separa duas faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (note que **D** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[BCDV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**. As arestas **[AB]** e **[AD]** da base estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção horizontal) é a referente à aresta lateral **[AV]**. Já a aresta lateral **[CV]** é visível, em projeção horizontal, pois separa duas faces da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (note que **C** é o vértice de maior cota da pirâmide).

### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**. A determinação das projeções do ponto **I** é direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano duplamente projetante).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base – o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas **t** e **t'** mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas **t** e **t'** em relação à base da pirâmide, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da base da pirâmide, efetuou-se o rebatimento do ponto **I** para esse mesmo rebatimento, obtendo-se **I<sub>r</sub>**. Por **I<sub>r</sub>** conduziram-se as retas **t<sub>r</sub>** e **t'<sub>r</sub>** (as retas **t** e **t'** em rebatimento) – a reta **t<sub>r</sub>** passa por **I<sub>r</sub>** e é rasante à base da pirâmide (em rebatimento) no vértice **B<sub>r</sub>** e a reta **t'<sub>r</sub>** passa por **I<sub>r</sub>** e é rasante à base da pirâmide (em rebatimento) no vértice **D<sub>r</sub>**.

4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base da pirâmide nos pontos **B** e **D**, respetivamente (o que foi possível constatar em rebatimento). Assim, as arestas laterais **[BV]** e **[DV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[BV]** e **[DV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas **[BV]** e **[DV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]** estão iluminadas, bem como a sua base, enquanto as faces laterais **[ABV]** e **[ADV]** estão em sombra. Nesse sentido, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [BVDA]**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais [ABV] e [ADV]. Em **projeção horizontal**, as duas faces laterais em sombra são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em **projeção frontal**, a face lateral [ADV] é visível, enquanto a face lateral [ABV] é invisível, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral [ADV].

A **sombra própria** da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

O ponto **A** situa-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $A_{s_1} \equiv A_1$ . O ponto **B** situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $B_{s_2} \equiv B_2$ .  $V_s$  é a sombra real do ponto **V** e é, simultaneamente, o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **V** (que é uma reta passante), pelo que  $V_s$  se situa no eixo **X** ( $V_s$  situa-se simultaneamente no **SPHA** e no **SPFS**).  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.

As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Note que  $V_s$  (a sombra real do ponto **V**) se situa no eixo **X**, pelo que  $V_s$  é, imediatamente, um dos pontos de quebra da sombra projetada da pirâmide.

$A_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta [AD], da base, não admite ponto de quebra – o segmento [ $A_{s_1}D_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [AD] e situa-se no **SPHA**.  $D_{s_1}$  e  $V_s$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral [DV] não admite ponto de quebra – o segmento [ $D_{s_1}V_s$ ] é a sombra projetada do segmento [DV] e situa-se no **SPHA**.  $B_{s_2}$  e  $V_s$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral [BV] não admite ponto de quebra – o segmento [ $B_{s_2}V_s$ ] é a sombra projetada do segmento [BV] e situa-se no **SPFS**. O mesmo já não acontece em relação à aresta [AB], da base – de facto, existe um ponto de quebra entre  $B_{s_2}$  e  $A_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s_2}$  e  $A_{s_1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **A** –  $A_{v_2}$ .  $A_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto **A** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A**. O segmento [ $B_{s_2}A_{v_2}$ ] é a sombra projetada da aresta [AB] no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento [ $B_{s_2}A_{v_2}$ ] (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta [ $A_{s_1}Q_sB_{s_2}$ ] é a **sombra real** do segmento [AB] (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

A linha quebrada fechada [ $V_sD_{s_1}A_{s_1}Q_sB_{s_2}$ ] é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento [ $Q_sV_s$ ] é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pela pirâmide) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a base), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e à construção da base da pirâmide, em verdadeira grandeza, ou, ainda, das retas **t** e **t'** em rebatimento), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 950.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base da pirâmide) pelos seus traços, contendo o ponto **A** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) passa pela projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ), tal como o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **A** ( $A_1$ ). A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da pirâmide:

O plano que contém o hexágono **[ABCDEF]** (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o hexágono não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do hexágono apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  (o plano que contém o hexágono) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pelo que se tem imediatamente  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . A charneira é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **A**, o que nos permitiu determinar  $A_r$ . É dado o ângulo que o lado **[AB]**, do hexágono, faz com o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano  $\pi$  (o plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção que contém o lado **[AB]**) e corresponde, na realidade, ao ângulo que o lado **[AB]** faz com o traço horizontal do plano ( $h_\pi$ ). Por outro lado, em rebatimento, esse ângulo está em verdadeira grandeza. Assim, a partir de  $A_r$  (o ponto **A** rebatido), mediu-se, em rebatimento e em verdadeira grandeza, o ângulo que o lado **[AB]** faz com  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  em rebatimento), o que nos permitiu desenhar a reta suporte do lado **[AB]** (em rebatimento). Sobre essa reta, a partir de  $A_r$  (o ponto **A** rebatido), mediram-se os 3,5 cm (a medida do lado do hexágono) e determinou-se  $B_r$  (o ponto **B**, rebatido), garantindo-se que **B** se situa no 1.º Diedro (**B** tem cota e afastamento positivos). Note que das duas hipóteses de medir o ângulo a partir de  $A_r$ , a que a resolução apresenta é a única que nos garante que o hexágono, após a sua construção, se situe no espaço do 1.º Diedro.

A partir de  $A_r$  e  $B_r$  (os pontos **A** e **B** rebatidos, respetivamente), efetuou-se a construção do hexágono em rebatimento (em verdadeira grandeza), para o que foi necessário determinar, previamente,  $O_r$  (o ponto **O** rebatido) – o ponto **O** é o centro da circunferência circunscrita ao hexágono. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 3,5 cm de raio (o hexágono é o único polígono cujo lado tem comprimento igual ao raio da circunferência que se inscreve), desenhou-se, em rebatimento, a circunferência circunscrita ao hexágono. Note que a circunferência passa necessariamente por  $A_r$  e por  $B_r$ .

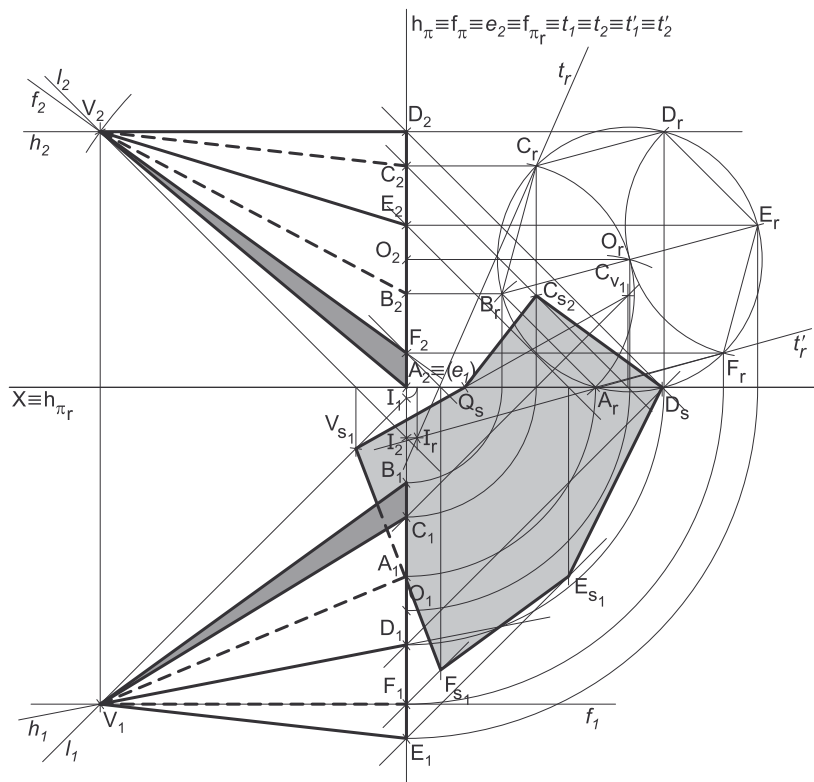
Em seguida, concluiu-se a construção do hexágono em rebatimento, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar os restantes vértices da figura, em rebatimento. Por fim, inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções de todos os vértices da figura (bem como do ponto **O**) e desenharam-se as duas projeções do polígono. Ambas as projeções do hexágono se reduzem a segmentos de reta, pois o plano  $\pi$  (o plano que contém o hexágono) é um plano duplamente projetante.

Em seguida, atendendo a que a aresta lateral **[DV]** é horizontal (de nível), desenhou-se  $h_2$  (a projeção frontal da reta **h**, a reta suporte da aresta **[DV]**) – note que os dados não nos permitem desenhar a projeção horizontal da reta **h** ( $h_1$ ). Por outro lado, atendendo a que a aresta lateral **[FV]** é frontal (de frente), desenhou-se  $f_1$  (a projeção horizontal da reta **f**, a reta suporte da aresta **[FV]**) – note que os dados não nos permitem desenhar a projeção frontal da reta **f** ( $f_2$ ).

O enunciado refere que a aresta lateral **[FV]** mede 10 cm – a aresta lateral **[FV]** é frontal de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $F_2$  (a projeção frontal do ponto **F**) e com 10 cm de raio (o comprimento da aresta **[FV]**), determinou-se o ponto de  $h_2$  (a projeção frontal da reta **h**) que dista 10 cm de  $F_2$  (a projeção frontal do ponto **F**) – esse ponto é  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**). O ponto **V** é um ponto que pertence às retas **h** e **f**, pelo que a sua projeção horizontal ( $V_1$ ) se situa necessariamente sobre  $f_1$  (a projeção horizontal da reta **f**).

Por fim, desenharam-se  $h_1$ , que é a projeção horizontal da reta **h** (que está definida por dois pontos –  $D_1$  e  $V_1$ ), bem como  $f_2$ , que é a projeção frontal da reta **f** (que está igualmente definida por dois pontos –  $F_2$  e  $V_2$ ).

A partir das projeções de todos os sete vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[AVDEF]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2V_2D_2E_2F_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **B** e **C**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$  e  $[CD]$ , da base, e as arestas laterais  $[BV]$  e  $[CV]$ . As arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$  e  $[CD]$  da base estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal, pelo que a invisibilidade a assinalar (em projeção frontal) é a referente às arestas laterais  $[BV]$  e  $[CV]$ . Já as arestas laterais  $[EV]$  e  $[FV]$  são visíveis, em projeção frontal, pois separam faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (note que **E** e **F** são os vértices de maior afastamento da pirâmide).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[EVBCD]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[E_1V_1B_1C_1D_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e **F**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[AF]$  e  $[EF]$ , da base, e as arestas laterais  $[AV]$  e  $[FV]$ . As arestas  $[AB]$ ,  $[AF]$  e  $[EF]$  da base estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a invisibilidade a assinalar (em projeção horizontal) é a referente às arestas laterais  $[AV]$  e  $[FV]$ . Já as arestas laterais  $[CV]$  e  $[DV]$  são visíveis, em projeção horizontal, pois separam faces da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (note que **C** e **D** são os vértices de maior cota da pirâmide).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto **I**. A determinação das projeções do ponto **I** é direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano duplamente projetante).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base – o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas  $t$  e  $t'$  mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas  $t$  e  $t'$  em relação à base da pirâmide, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da base da pirâmide, efetuou-se o rebatimento do ponto **I** para esse mesmo rebatimento, obtendo-se  $I_r$ . Por  $I_r$  conduziram-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento) – a reta  $t_r$  passa por  $I_r$  e é rasante à base da pirâmide (em rebatimento) no vértice **C**, e a reta  $t'_r$  passa por  $I_r$  e é rasante à base da pirâmide (em rebatimento) no vértice **F**.

4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos **C** e **F**, respetivamente (o que foi possível constatar em rebatimento). Assim, as arestas laterais  $[CV]$  e  $[FV]$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[CV]$  e  $[FV]$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas  $[CV]$  e  $[FV]$  separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[CDV]$ ,  $[DEV]$  e  $[EFV]$  estão iluminadas, enquanto as faces laterais  $[ABV]$ ,  $[BCV]$  e  $[AFV]$  e a base da pirâmide estão em sombra. Nesse sentido, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[FVCDE]$ .

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais  $[ABV]$ ,  $[BCV]$  e  $[AFV]$ . Em **projeção horizontal**, a face lateral  $[BCV]$  é visível, enquanto as faces laterais  $[ABV]$  e  $[AFV]$  são invisíveis, bem como a base (que é projetante horizontal), pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral  $[BCV]$ . Em **projeção frontal**, a face lateral  $[AFV]$  é visível, enquanto as faces laterais  $[ABV]$  e  $[BCV]$  são invisíveis, bem como a base (que é projetante frontal), pelo que, em projeção frontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral  $[AFV]$ .

A **sombra própria** da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$V_{s_1}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **V**.  $F_{s_1}$  é a sombra real do ponto **F** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **F**.  $E_{s_1}$  é a sombra real do ponto **E** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **E**.  $C_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.  $D_s$  é a sombra real do ponto **D** e é, simultaneamente, o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **D** (que é uma reta passante), pelo que  $D_s$  se situa no eixo **X** ( $D_s$  situa-se simultaneamente no **SPHA** e no **SPFS**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Note que  $D_s$  (a sombra real do ponto  $D$ ) se situa no eixo  $X$ , pelo que  $D_s$  é, imediatamente, um dos pontos de quebra da sombra projetada da pirâmide.

$V_{s_1}$  e  $F_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral  $[FV]$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[V_{s_1}F_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[FV]$  e situa-se no **SPHA**.  $F_{s_1}$  e  $E_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[EF]$ , da base, não admite ponto de quebra – o segmento  $[F_{s_1}E_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[EF]$  e situa-se no **SPHA**.  $E_{s_1}$  e  $D_s$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[DE]$ , da base, não admite ponto de quebra – o segmento  $[E_{s_1}V_s]$  é a sombra projetada do segmento  $[DE]$  e situa-se no **SPHA**.  $C_{s_2}$  e  $V_s$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[CD]$ , da base, não admite ponto de quebra – o segmento  $[C_{s_2}D_s]$  é a sombra projetada do segmento  $[CD]$  e situa-se no **SPFS**. O mesmo já não acontece em relação à aresta lateral  $[CV]$  – de facto, existe um ponto de quebra entre  $C_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto  $C$  –  $C_{v_1}$ .  $C_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto  $C$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $C$ . O segmento  $[V_{s_1}C_{v_1}]$  é a sombra projetada da aresta  $[CV]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C_{s_2}V_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[V_{s_1}Q_sC_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[CV]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[V_{s_1}F_{s_1}E_{s_1}D_sC_{s_2}Q_s]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sD_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

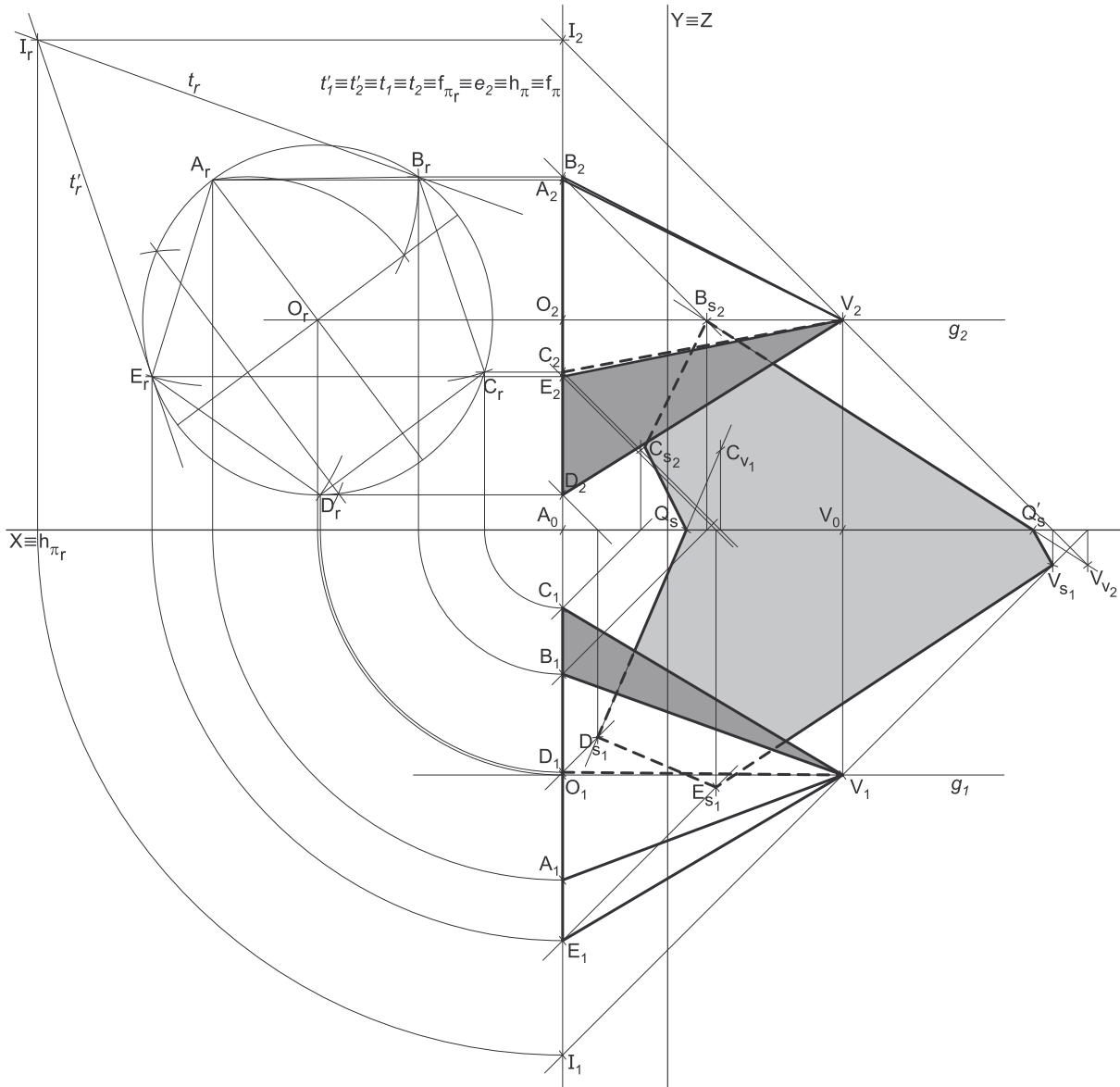
Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pela pirâmide) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a base), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e à construção da base da pirâmide, em verdadeira grandeza, ou, ainda, das retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

951.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **V**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto **A** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base da pirâmide) pelos seus traços, contendo o ponto **A** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) passa pela projeção frontal do ponto **A** (**A**<sub>2</sub>), tal como o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **A** (**A**<sub>1</sub>). A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções da pirâmide:*

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base, ou seja, está contido numa reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto **V** conduziram-se as projeções da reta **g**, fronto-horizontal, que é a reta suporte do eixo da pirâmide. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O** (o centro da base), que é o ponto de interseção da reta **g** (a reta suporte do eixo da pirâmide) com o plano  $\pi$  (o plano que contém a base da pirâmide). As duas projeções do ponto **O** tiveram determinação direta, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **g**) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi$ ).

O plano que contém o pentágono **[ABCDE]** (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o pentágono não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do pentágono apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  (o plano que contém o pentágono) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pelo que se tem imediatamente  $f_{\pi} \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . A charneira é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos pontos **O** e **A**, o que nos permitiu determinar **O<sub>r</sub>** e **A<sub>r</sub>**. Com o compasso, fazendo centro em **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** rebatido) e com raio até **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido), desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono, em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Em seguida, concluiu-se a construção do pentágono em rebatimento, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar os restantes vértices da figura, em rebatimento. Por fim, inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções de todos os vértices da figura e desenharam-se as duas projeções do polígono. Ambas as projeções do pentágono se reduzem a segmentos de reta, pois o plano  $\pi$  (o plano que contém o pentágono) é um plano duplamente projetante.

A partir das projeções de todos os seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BVDEA]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>A<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. As arestas **[BC]** e **[CD]** da base estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção frontal) é a referente à aresta lateral **[CV]**. Já as arestas laterais **[AV]** e **[EV]** são visíveis, em projeção frontal, pois separam faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (note que **A** e **E** são os vértices de maior afastamento da pirâmide).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[CVEAB]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>E<sub>1</sub>A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **D**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[CD]** e **[DE]**, da base, e a aresta lateral **[DV]**. As arestas **[CD]** e **[DE]** da base estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção horizontal) é a referente à aresta lateral **[DV]**. Já as arestas laterais **[AV]** e **[BV]** são visíveis, em projeção horizontal, pois separam faces da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (note que **A** e **B** são os vértices de maior cota da pirâmide).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**. A determinação das projeções do ponto **I** é direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano duplamente projetante).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base – o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas **t** e **t'** mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas **t** e **t'** em relação à base da pirâmide, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da base da pirâmide, efetuou-se o rebatimento do ponto **I** para esse mesmo rebatimento, obtendo-se **I<sub>r</sub>**. Por **I<sub>r</sub>** conduziram-se as retas **t<sub>r</sub>** e **t'<sub>r</sub>** (as retas **t** e **t'** em rebatimento) – a reta **t<sub>r</sub>** passa por **I<sub>r</sub>** e é rasante à base da pirâmide (em rebatimento) no vértice **B<sub>r</sub>** e a reta **t'<sub>r</sub>** passa por **I<sub>r</sub>** e é rasante à base da pirâmide (em rebatimento) no vértice **E<sub>r</sub>**.

4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base da pirâmide nos pontos **B** e **E**, respetivamente (o que foi possível constatar em rebatimento). Assim, as arestas laterais **[BV]** e **[EV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[BV]** e **[EV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas **[BV]** e **[EV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais **[ABV]** e **[AEV]** estão iluminadas, bem como a sua base, enquanto as faces laterais **[BCV]**, **[CDV]** e **[DEV]** estão em sombra. Nesse sentido, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [EVBCD]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[BCV]**, **[CDV]** e **[DEV]**. Em **projeção horizontal**, a face lateral **[BCV]** é visível, enquanto as faces laterais **[CDV]** e **[DEV]** são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral **[BCV]**. Já em **projeção frontal**, a face lateral **[DEV]** é visível, enquanto as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]** são invisíveis, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral **[DEV]**.

A **sombra própria** da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação da sombra projetada da pirâmide:

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.  $E_{s_1}$  é a sombra real do ponto **E** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **E**.  $V_{s_1}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **V**.  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.

As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$D_{s_1}$  e  $E_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[DE]**, da base, não admite ponto de quebra – o segmento  $[D_{s_1}E_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[DE]** e situa-se no **SPHA**.  $E_{s_1}$  e  $V_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[EV]** não admite ponto de quebra – o segmento  $[E_{s_1}V_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[EV]** e situa-se no **SPHA**.  $B_{s_2}$  e  $C_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[BC]**, da base, não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s_2}C_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento **[BC]** e situa-se no **SPFS**. O mesmo já não acontece em relação à aresta **[CD]**, da base, e em relação à aresta lateral **[BV]** – de facto, existe um ponto de quebra entre  $C_{s_2}$  e  $D_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre  $B_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C_{s_2}$  e  $D_{s_1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **C** –  $C_{v_1}$ .  $C_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **C** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**. O segmento  $[D_{s_1}C_{v_1}]$  é a sombra projetada da aresta **[CD]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[D_{s_1}C_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[D_{s_1}Q_sC_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento **[CD]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **V** –  $V_{v_2}$ .  $V_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **V**. O segmento  $[B_{s_2}V_{v_2}]$  é a sombra projetada da aresta **[BV]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[B_{s_2}V_{v_2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[B_{s_2}Q'_sV_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento **[BV]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[V_{s_1}E_{s_1}D_{s_1}Q_sC_{s_2}B_{s_2}Q'_s]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pela pirâmide) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

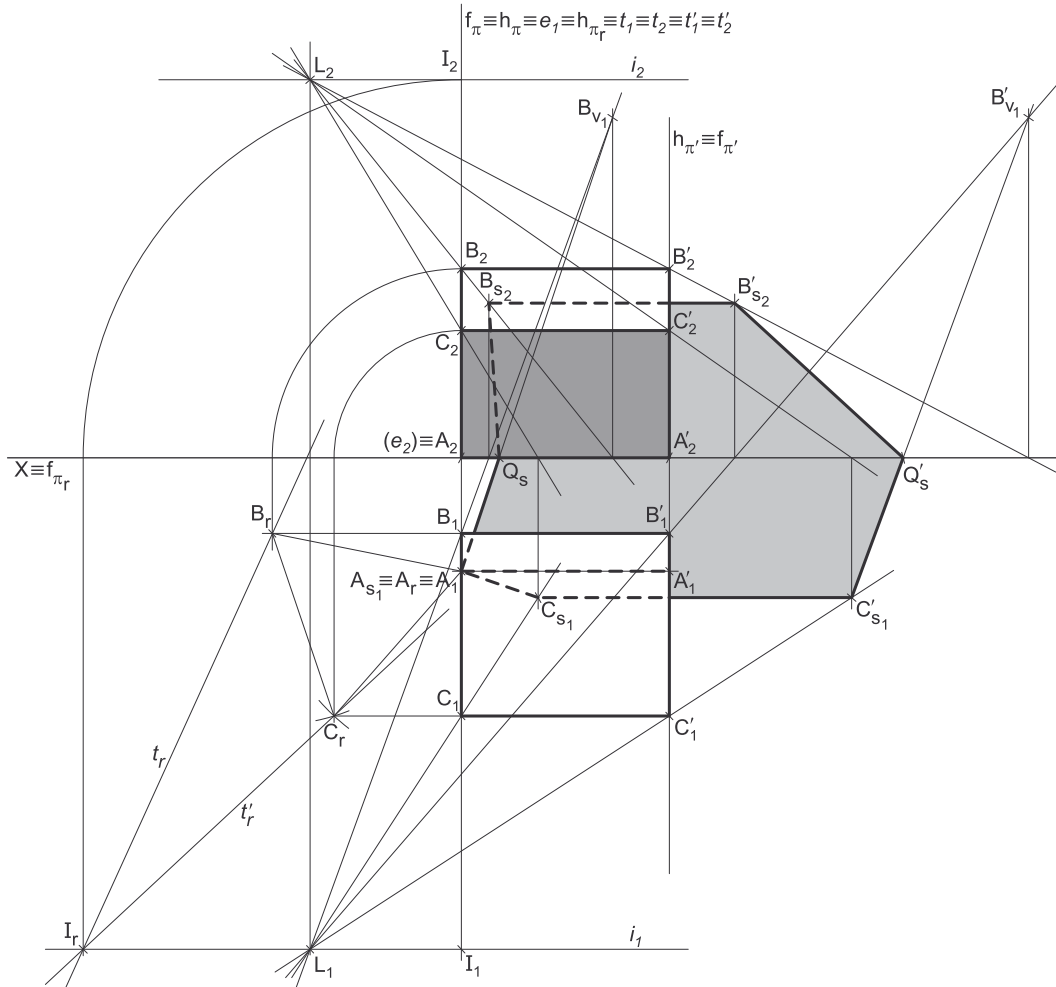
#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a base), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e à construção da base da pirâmide, em verdadeira grandeza, ou, ainda, das retas **t** e **t'** em rebatimento), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



952.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os pontos **A** e **B** estão contidos num plano de perfil, pelo que as projeções dos dois pontos se situam na mesma linha de chamada. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base **[ABC]** do prisma) pelos seus traços, contendo os pontos **A** e **B** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) passa pelas projeções frontais dos dois pontos, tal como o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) passa pelas projeções horizontais dos dois pontos.

**Resolução:**

*Determinação das projeções do prisma:*

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Atendendo a que o ponto **A** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  (o plano que contém o triângulo) para o Plano Horizontal de Projeção (este rebatimento permite-nos economizar o rebatimento de um ponto – o ponto **A**). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pelo que se tem imediatamente  $h_\pi \equiv e_1 \equiv h_{\pi_r}$ . A charneira é uma reta de topo, pelo que os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos frontais (de frente). Assim, os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos frontais (paralelos ao Plano Frontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos pontos **A** e **B**, obtendo **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**. O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **A<sub>r</sub> ≡ A<sub>1</sub>**. A partir de **A<sub>r</sub>** e de **B<sub>r</sub>**, construiu-se o triângulo em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar o terceiro vértice do polígono, em rebatimento (**C<sub>r</sub>**) – note que se garantiu que o triângulo se situa no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro, para que o prisma se situa igualmente no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro (como o enunciado pede expressamente). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$ , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **C** e desenhar as duas projeções do polígono (ambas as projeções do triângulo se reduzem a segmentos de reta, pois o plano que o contém é duplamente projetante).

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença das abcissas dos planos das bases. Assim, porque o prisma tem 5,5 cm de altura e o triângulo **[ABC]** é a sua base mais à esquerda, o plano  $\pi'$  (o plano de perfil que contém a outra base do sólido) situa-se 5,5 cm para a direita do plano  $\pi$ . Nesse sentido, representou-se o plano  $\pi'$  (o plano de perfil que contém a base mais à direita do sólido) pelos seus traços.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas fronto-horizontais. Assim, pelas projeções de todos os vértices do triângulo  $[ABC]$  conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), que são fronto-horizontais, e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $\pi'$  – esses pontos são os vértices do triângulo  $[A'B'C']$ , que é a base mais à direita do sólido. Note que se trata da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi'$ ).

A partir das projeções dos seis vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[AA'C'B'BC]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2A'_2C'_2B'_2B_2C_2]$ . Todos os vértices do prisma integram o contorno aparente frontal. No entanto, as arestas  $[AB]$  (da base  $[ABC]$ ) e  $[A'B']$  (da base  $[A'B'C']$ ) são invisíveis (pois separam faces que são invisíveis em projeção frontal). No entanto, aquelas duas arestas estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal. Já a aresta lateral  $[CC']$  é visível, em projeção frontal, pois separa duas faces do prisma que são visíveis em projeção frontal (note que  $C$  e  $C'$  são os vértices de maior afastamento do prisma).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[BB'C'C]$  (que é, na prática, a face lateral  $[BB'C'C]$ ), cuja projeção horizontal é o retângulo  $[B_1B'_1C'_1C_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $A$  e  $A'$ . Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AC]$  (da base  $[ABC]$ ), as arestas  $[A'B']$  e  $[A'C']$  (da base  $[A'B'C']$ ), e a aresta lateral  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$ ,  $[AC]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'C']$  estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção horizontal) é a da aresta lateral  $[BB']$ .

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo foco luminoso  $L$ , uma reta paralela às arestas laterais do prisma – a reta  $i$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção da reta  $i$  com o plano da base (de referência) – o ponto  $I$ ; **3.** pelo ponto  $I$  conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo foco luminoso (o ponto  $L$ ), uma reta paralela às arestas laterais do sólido – a reta  $i$ , que está definida por um ponto (o ponto  $L$ ) e por uma direção (a direção das arestas laterais do prisma – é uma reta fronto-horizonta).
2. Determinou-se o ponto de interseção a reta  $i$  com o plano da base (de referência) – o ponto  $I$ . Considerou-se que a base de referência é a base mais à esquerda do prisma (a base do prisma que está contida no plano  $\pi$ ). Assim, as projeções do ponto  $I$  tiveram determinação direta, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $i$ ) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi$ ).
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas  $t$  e  $t'$  mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível (de forma direta, em projeções) garantir a tangência das retas  $t$  e  $t'$  em relação à base do prisma, nem tão pouco identificar os vértices segundo os quais aquelas retas são rasantes à base – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da base do prisma, efetuou-se o rebatimento do ponto  $I$  para esse mesmo rebatimento, o que nos permitiu determinar  $I_r$ . Em seguida, pelo ponto  $I_r$  conduziram-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento), rasantes à base do prisma (em rebatimento) – a reta  $t_r$  passa por  $I_r$  e é rasante à base em rebatimento no vértice  $B_r$  e a reta  $t'_r$  passa por  $I_r$  e é rasante à base em rebatimento no vértice  $C_r$ .

4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos  $B$  e  $C$ , respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[BB']$  e  $[CC']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[BB']$  e  $[CC']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas  $[BB']$  e  $[CC']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a face lateral  $[BB'C'C]$  é a única face iluminada, sendo que a base mais à esquerda (a base  $[ABC]$ ) também está iluminada. Já as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'C'C]$  estão em sombra, tal como a base mais à direita do prisma (a base  $[A'B'C']$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[BB'C'CA]$ .

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'C'C]$ , bem como a base mais à direita (a base  $[ABC]$ ). Em **projeção horizontal**, as duas faces laterais em sombra são invisíveis, bem como a base (que é projetante horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **sombra própria** a assinalar. Já em **projeção frontal**, a face lateral  $[AA'C'C]$  é visível e a face lateral  $[AA'B'B]$  é invisível, bem como a base (que é projetante frontal), pelo que, em projeção frontal, a única sombra própria a assinalar refere-se à face lateral  $[AA'C'C]$ .

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Determinação da sombra projetada do prisma:

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. O ponto **A** situa-se no Plano horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $A_{s_1} \equiv A_1$ .  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $C'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C'**. As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_1}$  e  $C_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[AC]** (da base **[ABC]**) não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s_1}C_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[AC]** e situa-se no **SPHA**.  $C_{s_1}$  e  $C'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[CC']** não admite ponto de quebra – o segmento  $[C_{s_1}C'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[CC']** e situa-se no **SPHA**.  $B_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral **[BB']** não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s_2}B'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento **[BB']** e situa-se no **SPFS**. O mesmo já não acontece em relação à aresta **[AB]** (da base **[ABC]**) e em relação à aresta **[B'C']** (da base **[A'B'C']**) – de facto, existe um ponto de quebra entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre  $C'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **B** –  $B_{v_1}$ .  $B_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **B** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**. O segmento  $[A_{s_1}B_{v_1}]$  é a sombra projetada da aresta **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s_1}B_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento **[AB]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $C'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **B'** –  $B'_{v_1}$ .  $B'_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **B'** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'**. O segmento  $[C'_{s_1}B'_{v_1}]$  é a sombra projetada da aresta **[B'C']** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C'_{s_1}B'_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[C'_{s_1}Q'_sB'_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento **[B'C']** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s_1}C_{s_1}C'_{s_1}Q'_sB'_{s_2}B_{s_2}Q_s]$  é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

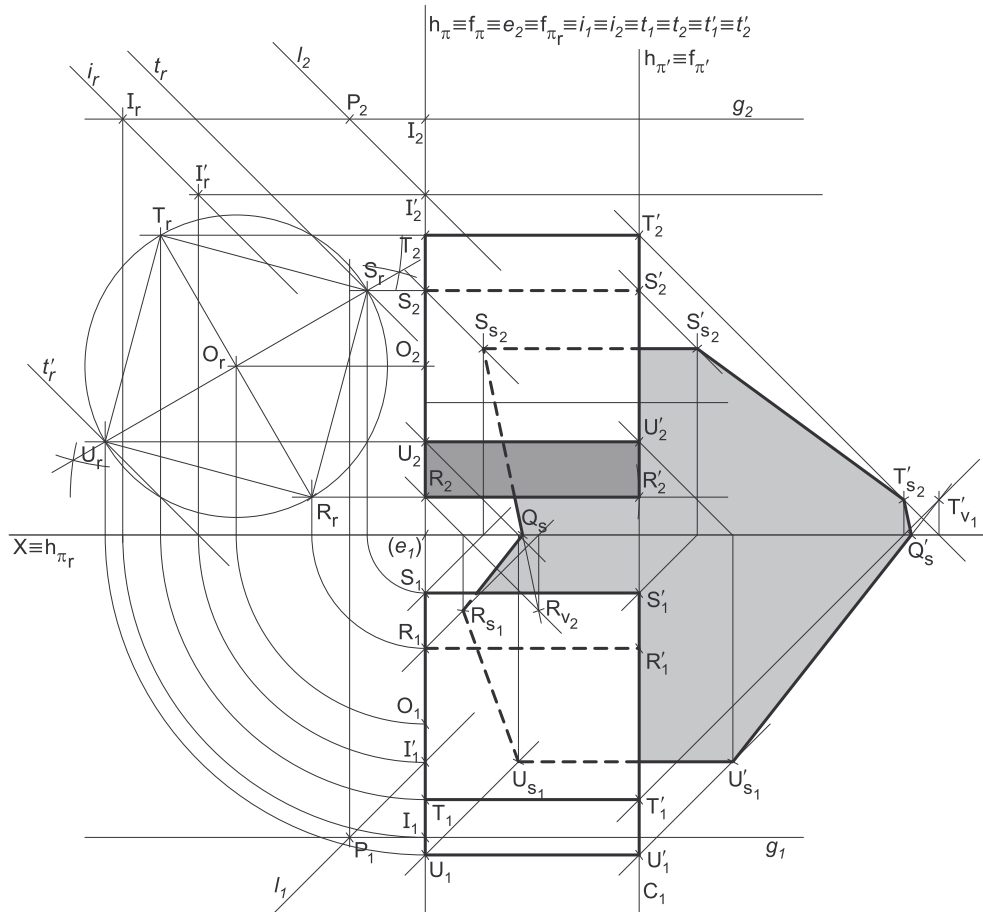
Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo prisma) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços dos planos que contêm as bases do sólido, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso dos traçados necessários à construção da base do prisma em rebatimento, das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos planos tangentes luz/sombra ou, ainda, das retas **t** e **t'** em rebatimento), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

953.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **R**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém o quadrado **[RSTU]**) pelos seus traços, contendo o ponto **R** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) passa pela projeção frontal do ponto **R** ( $R_2$ ), tal como o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **R** ( $R_1$ ).

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do cubo:*

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  (o plano que contém o pentágono) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pelo que se tem imediatamente  $f_{\pi_r} \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . A charneira é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **R**, obtendo  $R_r$ . É dado o ângulo que a diagonal **[RT]**, do quadrado, faz com o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano  $\pi$  (o plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção que contém a diagonal **[RT]**) e corresponde, na realidade, ao ângulo que a diagonal **[RT]** faz com o traço horizontal do plano ( $h_\pi$ ). Por outro lado, em rebatimento, esse ângulo está em verdadeira grandeza. Assim, a partir de  $R_r$  (o ponto **R** rebatido), mediu-se, em rebatimento e em verdadeira grandeza, o ângulo que a diagonal **[RT]** faz com  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  em rebatimento), o que nos permitiu desenhar a reta suporte da diagonal **[RT]** (em rebatimento). Sobre essa reta, a partir de  $R_r$  (o ponto **R** rebatido), mediram-se os 8 cm (a medida da diagonal, que é dada no enunciado) e determinou-se  $T_r$  (o ponto **T**, rebatido), garantindo-se que **T** se situa no  $1^\circ$  Diedro (**T** tem cota e afastamento positivos). Note que das duas hipóteses de medir o ângulo a partir de  $R_r$ , a que a resolução apresenta é a única que nos garante que o ponto **T** se situe no espaço do  $1^\circ$  Diedro.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir de  $R_r$  e  $T_r$  (os pontos  $R$  e  $T$  rebatidos, respetivamente), efetuou-se a construção do quadrado em rebatimento (em verdadeira grandeza), para o que foi necessário determinar, previamente,  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido) – o ponto  $O$  é o centro da circunferência circunscrita ao quadrado e foi determinado a partir da mediatriz do segmento de reta  $[R_rT_r]$ . Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $R_r$  ou  $T_r$ , desenhou-se, em rebatimento, a circunferência circunscrita ao quadrado e determinaram-se os outros dois vértices do polígono (em rebatimento). Note que se atendeu às instruções do enunciado referentes à ordem dos vértices – o ponto  $S$  é o vértice de menor afastamento do quadrado.

Um cubo toma a forma aparente de um prisma quadrangular regular, cuja altura é igual à medida da aresta da base o que, neste caso, corresponde à diferença das abcissas dos planos de perfil que contém as faces de perfil do sólido. Assim, o plano  $\pi'$  (o plano e perfil que contém a outra face de perfil do cubo) situa-se para a direita do plano  $\pi$  (pois o quadrado  $[RSTU]$  é a face mais à esquerda do sólido), a uma distância igual à medida do lado do quadrado (que está em verdadeira grandeza, em rebatimento). Nesse sentido, representou-se o plano  $\pi'$  (o plano de perfil que contém a outra face de perfil do cubo) pelos seus traços.

As arestas do cubo que não pertencem às faces de perfil são ortogonais aos planos daquelas duas faces, ou seja, estão contidas em retas fronto-horizontais. Assim, pelas projeções de todos os vértices do quadrado  $[RSTU]$  conduziram-se as projeções homónimas das retas fronto-horizontais que por eles passam (que não se identificaram), e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $\pi'$  – esses pontos são os vértices do quadrado  $[R'S'T'U']$ , que é a face mais à direita do sólido. Note que se trata da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas fronto-horizontais do sólido) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi'$ ).

A partir das projeções dos oito vértices do cubo, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[RUTT'U'R']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[R_2U_2T_2T'_2U'_2R'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $S$  e  $S'$ . Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[RS]$  e  $[ST]$  (da face  $[RSTU]$ ), as arestas  $[R'S']$  e  $[S'T']$  (da face  $[R'S'T'U']$ ), e a aresta  $[SS']$ . No entanto, as arestas  $[RS]$ ,  $[ST]$ ,  $[R'S']$  e  $[S'T']$  estão ocultas por arestas do cubo que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção frontal) é a da aresta  $[SS']$ . Já a aresta  $[UU']$  é visível (em projeção frontal), pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (os vértices  $U$  e  $U'$  são os vértices de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[STUUT'S']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[S_1T_1U_1U'_1T'_1S'_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $R$  e  $R'$ . Estes, por serem os vértices de **menor cota** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[RS]$  e  $[RU]$  (da face  $[RSTU]$ ), as arestas  $[R'S']$  e  $[R'U']$  (da face  $[R'S'T'U']$ ), e a aresta  $[RR']$ . No entanto, as arestas  $[RS]$ ,  $[RU]$ ,  $[R'S']$  e  $[R'U']$  estão ocultas por arestas do cubo que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção horizontal) é a da aresta  $[RR']$ . Já a aresta  $[TT']$  é visível (em projeção horizontal), pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (os vértices  $T$  e  $T'$  são os vértices de maior cota do sólido).

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cubo:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $g$ , paralela às arestas fronto-horizontais do sólido, e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas retas  $g$  e  $l$ , com o plano  $\pi$ , o plano da face (de referência) do cubo (considerou-se que a face de referência do cubo é a sua face mais à esquerda). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $g$  com o plano  $\pi$ ) e o ponto  $I'$  (o ponto de interseção da reta  $l$  com o plano  $\pi$ ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à face (de referência) do cubo que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ .

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas  $t$  e  $t'$  mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cuja projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir nem o paralelismo das retas  $t$  e  $t'$  em relação à reta  $i$ , nem sequer a tangência das retas  $t$  e  $t'$  em relação à face do cubo (nem por que vértices aquelas retas passam), de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da face do cubo, efetuou-se o rebatimento da reta  $i$  para esse mesmo rebatimento. Nesse sentido rebateram-se os pontos  $I$  e  $I'$ , obtendo  $I_r$  e  $I'_r$  – a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) passa por  $I_r$  e por  $I'_r$ ). Em seguida, desenharam-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento), rasantes à face do cubo (em rebatimento) e paralelas à reta  $i_r$  – a reta  $t_r$  é paralela a  $i_r$  e é rasante à face em rebatimento no vértice  $S_r$  e a reta  $t'_r$  é paralela a  $i_r$  e é rasante à face em rebatimento no vértice  $U_r$ .

4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à face (de referência) do cubo nos pontos  $S$  e  $U$ , respetivamente. Assim, as arestas  $[SS']$  e  $[UU']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas  $[SS']$  e  $[UU']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

As arestas  $[SS']$  e  $[UU']$  separam a parte da superfície lateral do cubo que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces  $[SS'T'T]$  e  $[TT'U'U]$  estão iluminadas, sendo que a face de perfil  $[RSTU]$  também está iluminada. Já as faces  $[RR'S'S]$  e  $[RR'U'U]$  estão em sombra, tal como a face de perfil  $[R'S'T'U']$ . Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[SS'T'U'UR]$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **sombra própria** do cubo integra as faces  $[R'S'T'U']$ ,  $[RR'S'S]$  e  $[RR'U'U]$ . Em **projeção frontal**, a face  $[RR'U'U]$  é visível e as restantes faces em sombra são invisíveis (a face  $[R'S'T'U']$  é projetante frontal), pelo que, em projeção frontal, a única sombra própria a assinalar refere-se à face  $[RR'U'U]$ . Já em **projeção horizontal**, todas as faces em sombra são invisíveis (nas quais se inclui a face  $[R'S'T'U']$ , que é projetante horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria a assinalar.

A **sombra própria** do cubo foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cubo:*

A **sombra projetada** do cubo é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cubo** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $S_{s_2}$  é a sombra real do ponto **S** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **S**.  $S'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **S'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **S'**.  $T'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **T'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **T'**.  $R_{s_1}$  é a sombra real do ponto **R** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **R**.  $U_{s_1}$  é a sombra real do ponto **U** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **U**.  $U'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **U'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **U'**. As sombras reais dos vértices do cubo (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$U_{s_1}$  e  $U'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[UU']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[U_{s_1}U'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[UU']$  e situa-se no **SPHA**.  $R_{s_1}$  e  $U_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[RU]$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[R_{s_1}U_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[RU]$  e situa-se no **SPHA**.  $S_{s_2}$  e  $S'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[SS']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[S_{s_2}S'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[SS']$  e situa-se no **SPFS**.  $S'_{s_2}$  e  $T'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[S'T']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[S'_{s_2}T'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[S'T']$  e situa-se no **SPFS**. O mesmo já não acontece em relação à aresta  $[RS]$  (da face  $[RSTU]$ ) e em relação à aresta  $[T'U']$  (da face  $[R'S'T'U']$ ) – de facto, existe um ponto de quebra entre  $R_{s_1}$  e  $S_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre  $U'_{s_1}$  e  $T'_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $R_{s_1}$  e  $S_{s_2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **R** –  $R_{v_2}$ .  $R_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto **R** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **R**. O segmento  $[S_{s_2}R_{v_2}]$  é a sombra projetada da aresta  $[RS]$  no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[S_{s_2}R_{v_2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[R_{s_1}Q_sS_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[RS]$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $U'_{s_1}$  e  $T'_{s_2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **T'** –  $T'_{v_1}$ .  $T'_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **T'** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **T'**. O segmento  $[U'_{s_1}T'_{v_1}]$  é a sombra projetada da aresta  $[T'U']$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[U'_{s_1}T'_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[U'_{s_1}Q'_sT'_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[T'U']$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[R_{s_1}U_{s_1}U'_{s_1}Q'_sT'_{s_2}S'_{s_2}S_{s_2}Q_s]$  é a **sombra projetada** do cubo nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do cubo. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do cubo nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do cubo é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio cubo.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cubo) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cubo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços dos planos que contêm as faces de perfil do sólido, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso dos traçados necessários à construção da face  $[RSTU]$  do cubo (em rebatimento), das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes, ou, ainda, das retas **i**, **t** e **t'** (em rebatimento).

Note que, apesar de o cubo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cubo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cubo, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 954.

### Dados:

Tendo em conta que o pentágono **[ABCDE]** se inscreve numa circunferência que é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, o centro dessa circunferência (o ponto **O**) tem necessariamente cota igual ao raio da circunferência, que é 3,5 cm – o ponto **O** tem, assim, 3,5 cm de cota. Uma vez que é dado o afastamento do ponto **O**, em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base **[ABCDE]** do prisma) pelos seus traços, contendo o ponto **O** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ), tal como o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ), que se situa sobre o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

O plano que contém o pentágono **[ABCDE]** (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o pentágono **[ABCDE]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do pentágono apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  (o plano que contém o pentágono) para o Plano Frontal de Projeção, para o que se identificou a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . A charneira é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **O**, determinando-se  $O_r$ . Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono **[ABCDE]**, em rebatimento (em verdadeira grandeza) – note que a circunferência é necessariamente tangente a  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  rebatidos), pois a circunferência é tangente ao Plano Horizontal de Projeção.

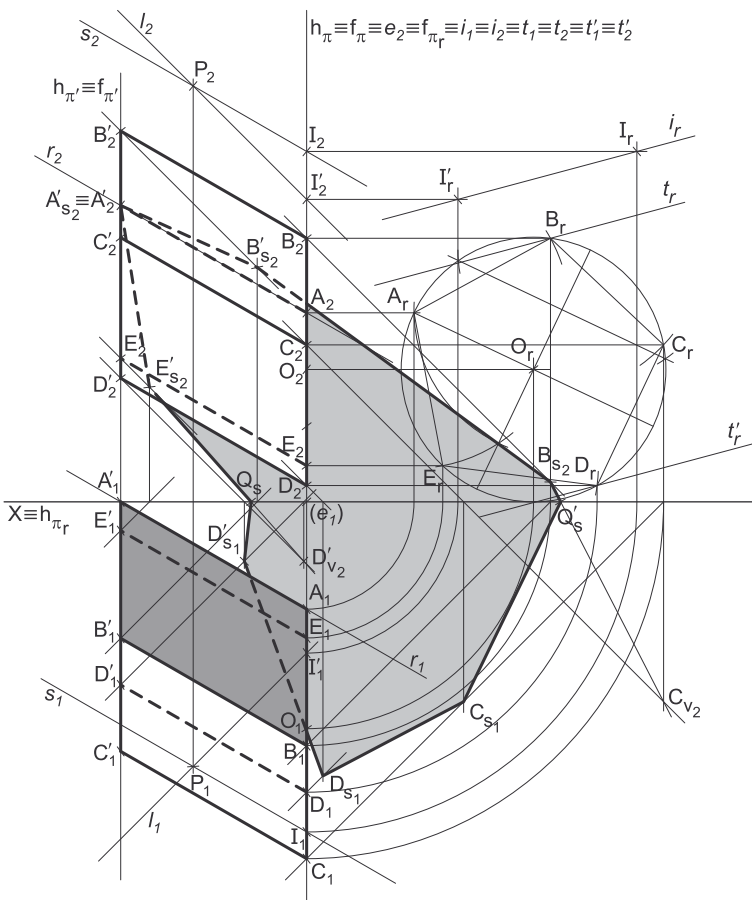
Sendo conhecida a projeção frontal do ponto **A** (e a sua cota), foi possível transporta o ponto **A** para o rebatimento efetuado e determinar  $A_r$  (o ponto **A** rebatido), sobre a circunferência circunscrita ao pentágono (em rebatimento). Note que existem dois pontos da circunferência com a cota do ponto **A**, mas atendeu-se ao facto de que o ponto **A** é o vértice de menor afastamento do pentágono (como o enunciado pede expressamente). Assim, desses dois pontos, o ponto  $A_r$  é o que se situa mais próximo de  $f_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  em rebatimento).

Em seguida, efetuou-se a construção do pentágono **[ABCDE]**, em rebatimento, determinando-se os restantes quatro vértices do polígono, em rebatimento. Note que, na identificação dos vértices (em rebatimento), se atendeu ao facto de o ponto **B** ser o vértice de maior cota do pentágono, como o enunciado refere expressamente. Por fim, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$ , o que nos permitiu determinar as duas projeções dos cinco vértices do pentágono e desenhar as suas duas projeções (ambas as projeções do pentágono se reduzem a segmentos de reta, pois o plano que o contém é duplamente projetante).

É dado que as arestas laterais do prisma estão contidas em retas oblíquas e que o ponto  $A'$  (um dos extremos da aresta **[AA']**) tem afastamento nulo (é o traço frontal da aresta **[AA']**). Assim, pelas projeções do ponto **A** conduziram-se as projeções homónimas da reta  $r$ , que é a reta suporte da aresta lateral **[AA']**. A reta  $r$  tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao  $\beta_{2/34}$  (retas paralelas ao  $\beta_{2/4}$  têm as suas projeções paralelas entre si).

Em seguida, determinou-se o ponto  $A'$ , que é o ponto da reta  $r$  que tem afastamento nulo. Tendo em conta que o ponto  $A'$  é um vértice da outra base do prisma, foi possível representar o plano  $\pi'$  (o plano que contém a outra base do prisma) pelos seus traços – o plano  $\pi'$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal contém a projeção frontal do ponto  $A'$  ( $A'_2$ ), tal como o seu traço horizontal contém a projeção horizontal do ponto  $A'$  ( $A'_1$ ).

Para se determinarem as projeções dos restantes vértices da base **[A'B'C'D'E']** do prisma, conduziram-se, pelos restantes vértices da base **[ABCDE]**, a projeções homónimas das retas suporte das respectivas arestas laterais (que não se identificaram). Em seguida, determinaram-se os vértices da base mais à esquerda do prisma, que são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano  $\pi'$ , o que se processou de forma direta, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes com um plano duplamente projetante. A partir das duas projeções de todos os vértices da base **[A'B'C'D'E']** do prisma, desenharam-se as suas duas projeções, que se reduzem a segmentos de reta sobre os traços correspondentes do plano  $\pi'$ , pois o plano  $\pi'$  é um plano duplamente projetante.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das projeções dos dez vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $A, A', E$  e  $E'$ . Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB], [AE]$  e  $[DE]$  (da base  $[ABCDE]$ ), as arestas  $[A'B'], [A'E']$  e  $[D'E']$  (da base  $[A'B'C'D'E']$ ), e as arestas laterais  $[AA']$  e  $[EE']$ . No entanto, as arestas  $[AB], [AE], [DE], [A'B'], [A'E']$  e  $[D'E']$  estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal, pelo que as invisibilidades a assinalar (em projeção frontal) são as referentes às arestas laterais  $[AA']$  e  $[EE']$ . Já a aresta lateral  $[CC']$  é visível (em projeção frontal), pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (os vértices  $C$  e  $C'$  são os vértices de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[ABCC'B'A']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1B_1C_1C'_1B'_1A'_1]$ . Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $D, D', E$  e  $E'$ . Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[CD], [DE]$  e  $[AE]$  (da base  $[ABCDE]$ ), as arestas  $[C'D'], [D'E']$  e  $[A'E']$  (da base  $[A'B'C'D'E']$ ), e as arestas laterais  $[DD']$  e  $[EE']$ . No entanto, as arestas  $[CD], [DE], [AE], [C'D'], [D'E']$  e  $[A'E']$  estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção horizontal, pelo que as invisibilidades a assinalar (em projeção horizontal) são as referentes às arestas laterais  $[DD']$  e  $[EE']$ . Já a aresta lateral  $[BB']$  é visível (em projeção horizontal), pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (os vértices  $B$  e  $B'$  são os vértices de maior cota do sólido).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $s$ , paralela às arestas laterais do sólido (e paralela à reta  $r$ , que é a reta suporte da aresta lateral  $[AA']$ ), e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra
2. Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas retas  $s$  e  $l$ , com o plano  $\pi$ , o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base face de referência do prisma é a sua base mais à direita). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $s$  com o plano  $\pi$ ) e o ponto  $I'$  (o ponto de interseção da reta  $l$  com o plano  $\pi$ ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ .

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas  $t$  e  $t'$  mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir nem o paralelismo das retas  $t$  e  $t'$  em relação à reta  $i$ , nem sequer a tangência das retas  $t$  e  $t'$  em relação à base do prisma (nem por que vértices aquelas retas passam), de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da base do prisma, efetuou-se o rebatimento da reta  $i$  para esse mesmo rebatimento. Nesse sentido rebateram-se os pontos  $I$  e  $I'$ , obtendo  $I_r$  e  $I'_r$  – a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) passa por  $I_r$  e por  $I'_r$ . Em seguida, desenharam-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento), rasantes à base do prisma (em rebatimento) e paralelas à reta  $i_r$  – a reta  $t_r$  é paralela a  $i_r$  e é rasante à base em rebatimento no vértice  $B_r$  e a reta  $t'_r$  é paralela a  $i_r$  e é rasante à base em rebatimento no vértice  $D_r$ .

4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos  $B$  e  $D$ , respetivamente. Assim, as arestas  $[BB']$  e  $[DD']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas  $[BB']$  e  $[DD']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

As arestas  $[BB']$  e  $[DD']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  estão iluminadas, sendo que a base mais à esquerda (a base  $[A'B'C'D'E']$ ) também está iluminada. Já as faces laterais  $[AA'B'B]$ ,  $[DD'E'E]$  e  $[AA'E'E]$  estão em sombra, tal como a base mais à direita do prisma (a base  $[ABCDE]$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[BB'A'E'D'DC]$ .

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais  $[AA'B'B]$ ,  $[DD'E'E]$  e  $[AA'E'E]$ , bem como a base mais à direita (a base  $[ABCDE]$ ). Em **projeção horizontal**, as faces laterais  $[DD'E'E]$  e  $[AA'E'E]$  são invisíveis (assim como a base  $[ABCDE]$ , que é projetante horizontal), mas a face lateral  $[AA'B'B]$  é visível, pelo que, em projeção horizontal, a **sombra própria** a assinalar é a referente à face lateral  $[AA'B'B]$ . Já em **projeção frontal**, todas as faces laterais em sombra são invisíveis, bem como a base  $[ABCDE]$  (que é projetante frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Determinação da sombra projetada do prisma:

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. O ponto **A'** situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $A'_{s_2} \equiv A'_2$ .  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**.  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.  $D'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D'**.  $E'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **E'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **E'**.

As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A'_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta [**A'B'**] (da base [**A'B'C'D'E'**]) não admite ponto de quebra – o segmento [ $A'_{s_2}B'_{s_2}$ ] é a sombra projetada do segmento [**A'B'**] e situa-se no **SPFS**.  $A'_{s_2}$  e  $E'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta [**A'E'**] (da base [**A'B'C'D'E'**]) não admite ponto de quebra – o segmento [ $A'_{s_2}E'_{s_2}$ ] é a sombra projetada do segmento [**A'E'**] e situa-se no **SPFS**.  $B'_{s_2}$  e  $B_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral [**BB'**] não admite ponto de quebra – o segmento [ $B'_{s_2}B_{s_2}$ ] é a sombra projetada do segmento [**BB'**] e situa-se no **SPFS**.  $C_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta [**CD**] (da base [**ABCDE**]) não admite ponto de quebra – o segmento [ $C_{s_1}D_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [**CD**] e situa-se no **SPHA**.  $D_{s_1}$  e  $D'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral [**DD'**] não admite ponto de quebra – o segmento [ $D_{s_1}D'_{s_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [**DD'**] e situa-se no **SPHA**.

O mesmo já não acontece em relação à aresta [**BC**] (da base [**ABCDE**]) e em relação à aresta [**D'E'**] (da base [**A'B'C'D'E'**]) – de facto, existe um ponto de quebra entre  $B_{s_2}$  e  $C_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos), bem como um outro ponto de quebra entre  $D'_{s_1}$  e  $E'_{s_2}$  (que também se situam em Planos de Projeção distintos).

Para se determinar o ponto de quebra situado entre  $E'_{s_2}$  e  $D'_{s_1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **D'** –  $D'_{v_2}$ .  $D'_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto **D'** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D'**. O segmento [ $E'_{s_2}D'_{v_2}$ ] é a sombra projetada da aresta [**D'E'**] no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento [ $E'_{s_2}D'_{v_2}$ ] (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta [ $E'_{s_2}Q_sD'_{s_1}$ ] é a **sombra real** do segmento [**D'E'**] (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.<sup>a</sup> Diedro).

Para se determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s_2}$  e  $C_{s_1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **C** –  $C_{v_2}$ .  $C_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto **C** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**. O segmento [ $B_{s_2}C_{v_2}$ ] é a sombra projetada da aresta [**BC**] no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento [ $B_{s_2}C_{v_2}$ ] (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta [ $B_{s_2}Q'_sC_{s_1}$ ] é a **sombra real** do segmento [**BC**] (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.<sup>a</sup> Diedro).

A linha quebrada fechada [ $A_{s_2}B'_{s_2}B_{s_2}Q'_sC_{s_1}D_{s_1}D'_{s_1}Q_sE'_{s_2}$ ] é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento [ $Q_sQ'_s$ ] é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

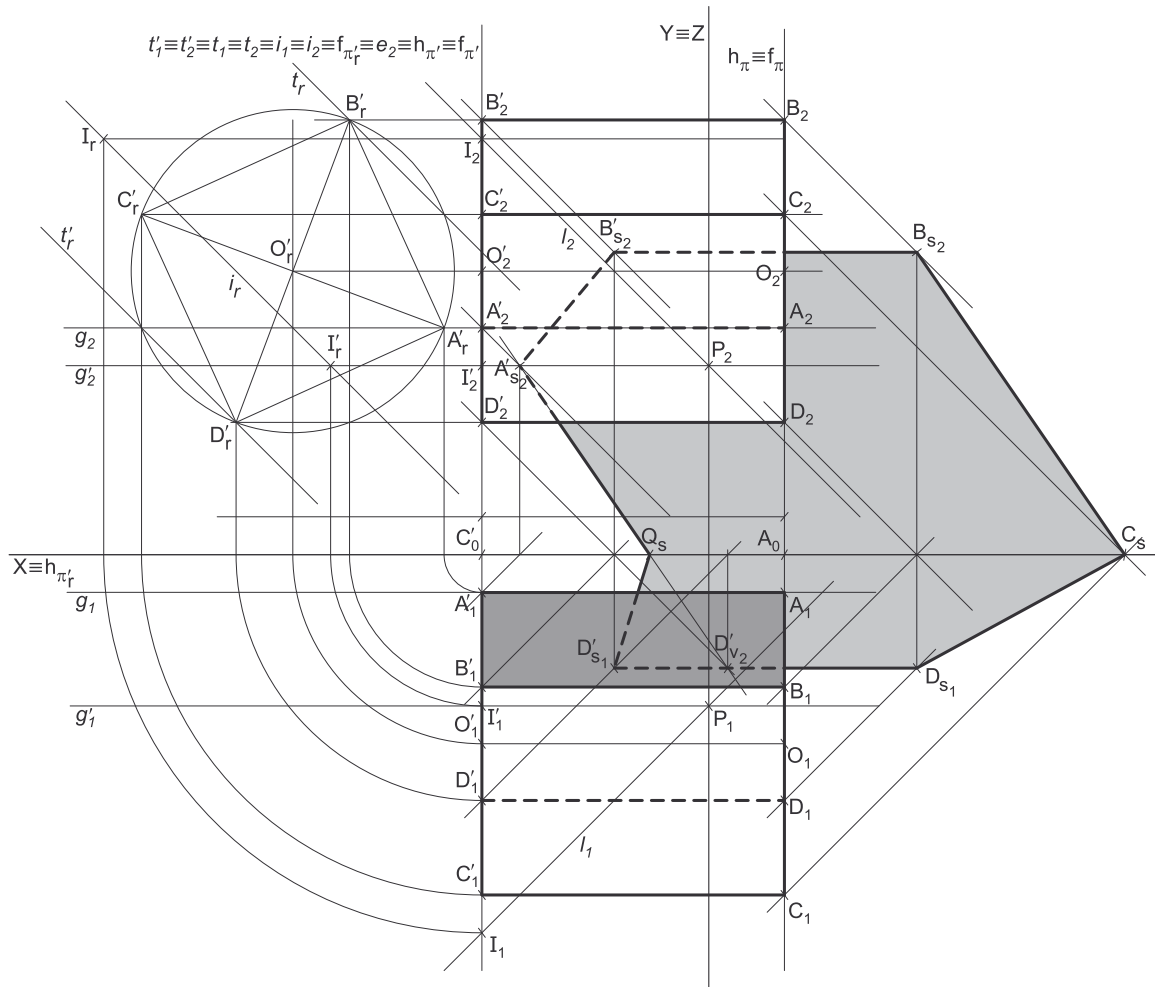
Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo prisma) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

## Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços dos planos que contêm as bases do sólido, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso dos traçados necessários à construção da base mais à direita do prisma em rebatimento, das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos planos tangentes luz/sombra ou, ainda, das retas **i**, **t** e **t'** em rebatimento.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

955.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C'**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. O ponto **C'** tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**). Em seguida, representaram-se os planos  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base **[ABCD]**) e o plano  $\pi'$  (o plano de perfil que contém a base **[A'B'C'D']**) pelos respectivos traços. O plano  $\pi$  contém o ponto **A** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) passa pela projeção frontal do ponto **A** (**A<sub>2</sub>**), tal como o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **A** (**A<sub>1</sub>**). O plano  $\pi'$  contém o ponto **C'** – o plano  $\pi'$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_{\pi'}$ ) passa pela projeção frontal do ponto **C'** (**C'<sub>2</sub>**), tal como o seu traço horizontal ( $h_{\pi'}$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **C'** (**C'<sub>1</sub>**).

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do prisma:*

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$ . No entanto, dadas as características do exercício e o facto de as projeções do prisma se desenvolverem **para a esquerda** do plano  $\pi$  e, à partida, a sombra do prisma se desenvolver **para a direita** do plano  $\pi$ , o recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  (quer se efetue para a esquerda quer se efetue para a direita) irá sempre provocar uma considerável sobreposição de traçados. Assim, optou-se por se construir a base **[A'B'C'D']** em primeiro lugar.

Todavia, apenas temos um vértice da base **[A'B'C'D']** (o vértice **C'**) – a informação existente sobre esta base é claramente insuficiente de forma a ser possível a sua construção em verdadeira grandeza.

No entanto, e atendendo a que se trata de um **prisma regular**, as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases, que são retas fronto-horizontais. Assim, pelas projeções do ponto **A** conduziram-se as projeções homónimas da reta **g** (fronto-horizantal), que é a reta suporte da aresta lateral **[AA']**. Em seguida, determinou-se o ponto **A'**, o extremo mais à esquerda da aresta lateral **[AA']**. As projeções do ponto **A'** tiveram determinação direta, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **g**) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi'$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano que contém o quadrado  $[A'B'C'D']$  (o plano  $\pi'$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado  $[A'B'C'D']$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi'$  (o plano que contém o quadrado) para o Plano Frontal de Projeção, para o que se identificou a charneira do rebatimento, que é  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_{\pi'} \equiv e_2 \equiv f_{\pi'}$ . A charneira é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos pontos  $A'$  e  $C'$ , determinando-se  $A'_r$  e  $C'_r$ . A partir de  $A'_r$  e  $C'_r$  (os pontos  $A'$  e  $C'$  rebatidos, respetivamente), efetuou-se a construção do quadrado em rebatimento (em verdadeira grandeza), para o que foi necessário determinar, previamente,  $O'_r$  (o ponto  $O'$  rebatido) – o ponto  $O'$  é o centro da circunferência circunscrita ao quadrado e foi determinado a partir da mediatriz do segmento de reta  $[A'_rC'_r]$ . Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O'_r$  e com raio até  $A'_r$  ou  $C'_r$ , desenhou-se, em rebatimento, a circunferência circunscrita ao quadrado e determinaram-se os outros dois vértices do polígono (em rebatimento). Os vértices  $B$  e  $D$  foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

Atendendo, mais uma vez, a que se trata de um **prisma quadrangular regular**, as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas fronto-horizontais. Assim, pelas projeções dos restantes vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$  conduziram-se as projeções homónimas das retas fronto-horizontais que por eles passam (que não se identificaram), e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $\pi$  – esses pontos são os outros três vértices do quadrado  $[ABCD]$ , que é a base mais à direita do prisma. Note que se trata da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi$ ).

A partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BCDD'C'B']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2C_2D_2D'_2C'_2B'_2]$ . Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $A$  e  $A'$ . Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base  $[ABCD]$ ), as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ), e a aresta lateral  $[AA']$ . No entanto, as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$ ,  $[A'B']$  e  $[A'D']$  estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção frontal) é a da aresta lateral  $[AA']$ . Já a aresta lateral  $[CC']$  é visível (em projeção frontal), pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (os vértices  $C$  e  $C'$  são os vértices de maior afastamento do sólido).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[ABCC'B'A']$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1B_1C_1C'_1B'_1A'_1]$ . Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices  $D$  e  $D'$ . Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[AD]$  e  $[CD]$  (da base  $[ABCD]$ ), as arestas  $[A'D']$  e  $[C'D']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ), e a aresta lateral  $[DD']$ . No entanto, as arestas  $[AD]$ ,  $[CD]$ ,  $[A'D']$  e  $[C'D']$  estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção horizontal) é a da aresta lateral  $[DD']$ . Já a aresta lateral  $[BB']$  é visível (em projeção horizontal), pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (os vértices  $B$  e  $B'$  são os vértices de maior cota do sólido).

### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $g'$ , paralela às arestas laterais do sólido, e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas retas  $g'$  e  $l$ , com o plano  $\pi'$ , o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base mais à esquerda). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $g'$  com o plano  $\pi'$ ) e o ponto  $I'$  (o ponto de interseção da reta  $l$  com o plano  $\pi'$ ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ .

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas  $t$  e  $t'$  mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir nem o paralelismo das retas  $t$  e  $t'$  em relação à reta  $i$ , nem sequer a tangência das retas  $t$  e  $t'$  em relação à base do prisma (nem por que vértices aquelas retas passam), de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da base mais à esquerda do prisma, efetuou-se o rebatimento da reta  $i$  para esse mesmo rebatimento. Nesse sentido rebateram-se os pontos  $I$  e  $I'$ , obtendo  $I_r$  e  $I'_r$  – a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida) passa por  $I_r$  e por  $I'_r$ . Em seguida, desenharam-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento), rasantes à base do prisma (em rebatimento) e paralelas à reta  $i_r$  – a reta  $t_r$  é paralela a  $i_r$  e é rasante à base em rebatimento no vértice  $B'_r$  e a reta  $t'_r$  é paralela a  $i_r$  e é rasante à base em rebatimento no vértice  $D'_r$ .

4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos  $B'$  e  $D'$ , respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[BB']$  e  $[DD']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas  $[BB']$  e  $[DD']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As arestas  $[BB']$  e  $[DD']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  estão iluminadas, sendo que a base mais à esquerda (a base  $[A'B'C'D']$ ) também está iluminada. Já as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$  estão em sombra, tal como a base mais à direita (a base  $[ABCD]$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[B'BCDD'A']$ .

A **sombra própria** do cubo integra as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$ , assim, como a base  $[ABCD]$ . Em **projeção frontal**, as duas faces laterais em sombra são invisíveis, bem como a base  $[ABCD]$  (que é projetante frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **sombra própria** a assinalar. Já em **projeção horizontal**, a face lateral  $[AA'B'B]$  é visível e a face lateral  $[AA'D'D]$  em sombra é invisível (bem como a base  $[ABCD]$ , que é projetante horizontal), pelo que, em projeção horizontal, a única **sombra própria** a assinalar refere-se à face lateral  $[AA'B'B]$ .

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do prisma:*

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cubo** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $A'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $A'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $A'$ .  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $B'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $B'$ .  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $B$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $B$ .  $C_s$  é a sombra real do ponto  $C$  e é, simultaneamente, o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $C$  (que é uma reta passante), pelo que  $C_s$  se situa no eixo  $X$  ( $C_s$  situa-se simultaneamente no **SPHA** e no **SPFS**).  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $D$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $D$ .  $D'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $D'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $D'$ .

As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Note que  $C_s$  (a sombra real do ponto  $C$ ) se situa no eixo  $X$ , pelo que  $C_s$  é, imediatamente, um dos pontos de quebra da sombra projetada do prisma.

$D_{s_1}$  e  $D'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral  $[DD']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[D_{s_1}D'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[DD']$  e situa-se no **SPHA**.  $D_{s_1}$  e  $C_s$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[CD]$ , da base  $[ABCD]$ , não admite ponto de quebra – o segmento  $[D_{s_1}C_s]$  é a sombra projetada do segmento  $[CD]$  e situa-se no **SPHA**.  $B_{s_2}$  e  $C_s$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[BC]$ , da base  $[ABCD]$ , não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s_2}C_s]$  é a sombra projetada do segmento  $[BC]$  e situa-se no **SPFS**.  $B'_{s_2}$  e  $B_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral  $[BB']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[B'_{s_2}B_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BB']$  e situa-se no **SPFS**.  $A'_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[A'B']$ , da base  $[A'B'C'D']$ , não admite ponto de quebra – o segmento  $[A'_{s_2}B'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[A'B']$  e situa-se no **SPFS**. O mesmo já não acontece em relação à aresta  $[A'D']$ , da base  $[A'B'C'D']$ , pois as suas sombras ( $A'_{s_2}$  e  $D'_{s_1}$ , respetivamente) se situam em Planos de Projeção distintos.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A'_{s_2}$  e  $D'_{s_1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto  $D'$  –  $D'_{v_2}$ .  $D'_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto  $D'$  – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $D'$ . O segmento  $[A'_{s_2}D'_{v_2}]$  é a sombra projetada da aresta  $[A'D']$  no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A'_{s_2}D'_{v_2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A'_{s_2}Q_sD'_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento  $[A'D']$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[D'_{s_1}D_{s_1}C_sB_{s_2}B'_{s_2}A'_{s_2}Q_s]$  é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sC_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo prisma) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços dos planos que contêm as faces de perfil do sólido, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso dos traçados necessários à construção da base  $[A'B'C'D']$  do prisma (em rebatimento), das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes, ou, ainda, das retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$  (em rebatimento).

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 956.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **V**, pelas suas projeções, em função dos dados. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

A altura do cone é a distância do vértice ao plano da base (medida ortogonalmente a este) que corresponde, neste caso, à diferença das abscissas entre o vértice e o plano da base. Assim, uma vez que o cone tem 8 cm de altura e que a sua base se situa à direita do vértice, o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base do cone) situa-se 8 cm para a direita do vértice **V**, o que nos permitiu representar o plano  $\pi$  pelos seus traços.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base (que é um plano de perfil), ou seja, está contido numa reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto **V** conduziram-se as projeções da reta **g**, a reta suporte do eixo do cone. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O** (o centro da base) que é o ponto de interseção da reta **g** (a reta que contém o eixo do cone) com o plano  $\pi$  (o plano que contém a base do sólido). As projeções do ponto **O** tiveram determinação direta, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **g**) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi$ ).

O plano que contém a base do cone (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base do cone não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo (a base do sólido) – tendo em conta que ambas as projeções sofrem a redução máxima, as duas projeções do círculo reduzem-se a segmentos de reta sobre os traços homónimos do plano  $\pi$ .

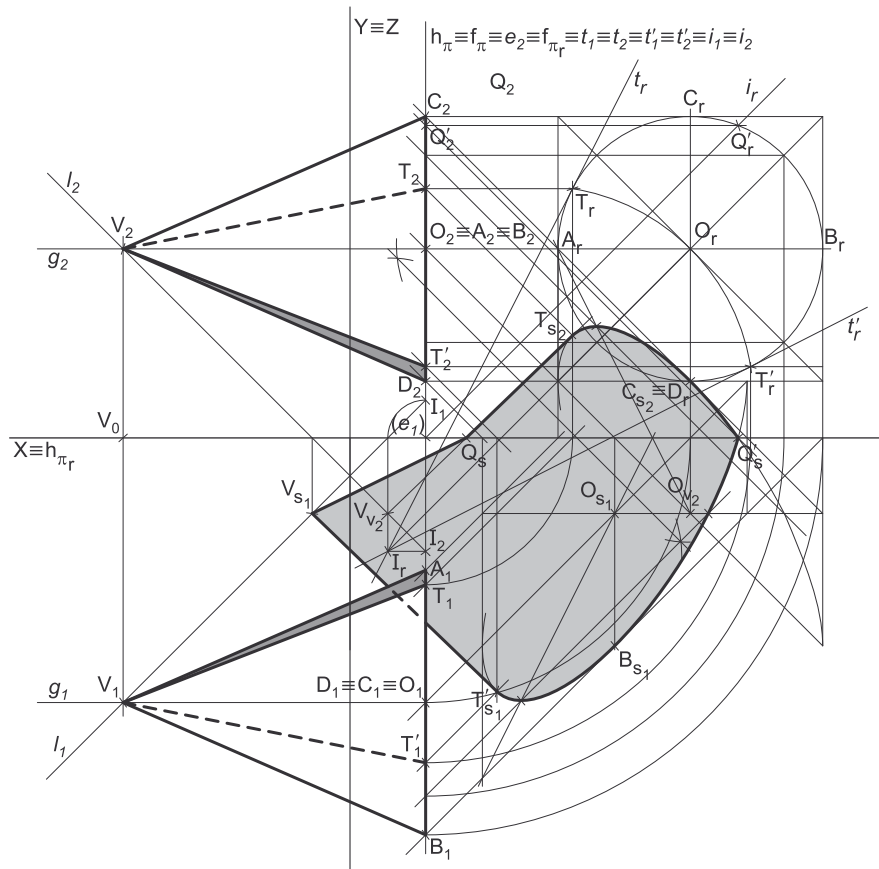
Assim, a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta com 7 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) é o ponto médio – a projeção horizontal do círculo corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal do círculo é um segmento de reta com 7 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) é o ponto médio – a projeção frontal do círculo corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V<sub>1</sub>** e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor afastamento da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é outro triângulo, com um vértice em **V<sub>2</sub>** e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor cota da projeção frontal da base).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. A determinação das projeções do ponto **I** foi direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante – tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso **l**) e um plano duplamente projetante (o plano  $\pi$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base – o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas **t** e **t'** mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas **t** e **t'** em relação à base do cone, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Assim, recorreu-se a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, rebateram-se os pontos **O** e **I**, o que nos permitiu determinar **O<sub>r</sub>** e **I<sub>r</sub>**. Com o compasso, fazendo centro em **O<sub>r</sub>** e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em rebatimento, em verdadeira grandeza. Por **I<sub>r</sub>** conduziram-se as retas **t<sub>r</sub>** e **t'<sub>r</sub>** (as retas **t** e **t'** em rebatimento) – a reta **t<sub>r</sub>** passa por **I<sub>r</sub>** e é tangente à base em rebatimento no ponto **T<sub>r</sub>** (está definida por dois pontos) e a reta **t'<sub>r</sub>** passa por **I<sub>r</sub>** e é tangente à base em rebatimento no ponto **T'<sub>r</sub>** (está igualmente definida por dois pontos).

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência em rebatimento) que passam por um ponto exterior (o ponto **I<sub>r</sub>**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **T<sub>r</sub>** e **T'<sub>r</sub>**.

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[TV]** e **[T'V]** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[TV]** e **[T'V]**. A geratriz **[TV]** é **invisível** em projeção frontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cone) e é **visível** em projeção horizontal (por se situar na parte visível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cone). Já a geratriz **[T'V]** é **visível** em projeção frontal (por se situar na parte visível, em projeção frontal, da superfície lateral do cone) e **invisível** em projeção horizontal (por se situar na parte invisível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cone).

As geratrizes **[TV]** e **[T'V]** separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior TT'**. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor TT'** está **em sombra**, bem como a base do cone. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[TV TT']**, que integra as geratrizes **[TV]** e **[T'V]**, bem como o **arco maior TT'**.

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz **[T'V]** (o segmento **[T'<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**) e a projeção frontal da geratriz de menor cota do contorno aparente frontal do cone – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**.

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz **[TV]** (o segmento de reta **[T<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**) e a projeção horizontal da geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cone – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. **V<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **V**. **T<sub>s2</sub>** é a sombra real do ponto **T** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **T**. **T'<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **T'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **T'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

**V<sub>s1</sub>** e **T'<sub>s1</sub>** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz **[T'V]** não admite ponto de quebra – o segmento **[V<sub>s1</sub>T'<sub>s1</sub>]** é a sombra projetada da geratriz **[T'V]** e situa-se no **SPHA**.

**V<sub>s1</sub>** situa-se no **SPHA** e **T<sub>s2</sub>** situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre **V<sub>s1</sub>** e **T<sub>s2</sub>** (que se situam em Planos de Projeção distintos). Esse ponto de quebra foi determinado com o recurso à sombra virtual do ponto **V** – **V<sub>v2</sub>**. **V<sub>v2</sub>** é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **V**. O segmento **[V<sub>v2</sub>T<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada da geratriz **[TV]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[V<sub>v2</sub>T<sub>s2</sub>]** com o eixo **X** é **Q<sub>s</sub>**, que é o ponto de quebra da sombra da geratriz **[TV]**. A linha quebrada aberta **[V<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>T<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada da geratriz **[TV]** nos Planos de Projeção (nas faces do 1<sup>ª</sup> Diedro).

Tendo em conta que **T'<sub>s1</sub>** se situa no **SPHA** e **T<sub>s2</sub>** se situa no **SPFS**, é possível concluir que a sombra do **arco maior TT'** admite necessariamente um ponto de quebra. Como em situações semelhantes, a determinação do ponto de quebra da sombra de uma circunferência (ou de um arco de circunferência) deve processar-se com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para evitar uma maior complexidade da resolução gráfica apresentada, optou-se por simplificar este procedimento com um raciocínio simples. Dado o facto de a direcção luminosa ser a **direcção luminosa convencional**, o **plano luz/sombra passante** é o próprio  $\beta_{1/3}$ . Assim, com vista a uma maior economia de traçados que possibilite uma melhor leitura da resolução proposta, não se desenharam as projecções do raio luminoso que nos permitiria determinar a reta  $i$  (a reta de intersecção do plano  $\pi$  com o **plano luz/sombra passante** – o  $\beta_{1/3}$ ), tendo-se determinado, imediatamente, as suas projecções. A reta  $i$  (a reta de intersecção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ ) é uma **reta de perfil passante** do plano  $\pi$ , que faz, com os traços do plano  $\pi$ , ângulos de  $45^\circ$ .

Note que, caso a direcção luminosa não fosse a direcção convencional, a determinação da reta  $i$  passaria, **necessariamente** pela determinação do ponto de intersecção do plano  $\pi$  com um raio luz/sombra passante com a direcção luminosa dada (à semelhança das restantes situações já apresentadas).

Tendo em conta que tanto o círculo (a base do cone) como a reta  $i$  estão contidos num plano de perfil, as projecções das duas figuras não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível averiguar a posição da reta  $i$  em relação ao círculo. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  já efetuado. Assim, desenhou-se a reta  $i_r$  (a reta  $i$  no rebatimento efetuado) – a reta  $i_r$  está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é um ponto fixo, pois situa-se na charneira) e por uma direcção (faz ângulos de  $45^\circ$  com os dois traços do plano  $\pi$ , em rebatimento).

Sublinha-se que, das duas hipóteses de medir o ângulo de  $45^\circ$  a partir do ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\pi$ , apenas a que a resolução apresenta se refere à reta de intersecção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ . Note que a reta  $i$  tem de atravessar os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros e que o ponto  $O$  é um ponto do  $1^\circ$  Diedro. Assim, a reta  $i_r$  (a reta  $i$  em rebatimento) tem de passar pelo quadrante do plano em que se situa  $O_r$  – na outra hipótese de medir o ângulo de  $45^\circ$  a reta não passaria pelo quadrante onde se situa  $O_r$  (e, por isso mesmo, seria a reta de intersecção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{2/4}$ ).

A reta  $i_r$  é secante à circunferência – a reta  $i_r$  corta o arco  $\widehat{T_r T_r}$  (o **arco maior  $\widehat{TT}$**  em rebatimento) no ponto  $Q'_r$ , pelo que é possível concluir que o **arco maior  $\widehat{TT}$**  produz sombra nos dois planos de projecção. O **arco  $\widehat{TQ}$**  produz sombra no Plano Frontal de Projecção (no **SPFS**) e o **arco  $\widehat{Q'T}$**  produz sombra no Plano Horizontal de Projecção (no **SPHA**).

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $Q'$  e determinou-se a sua projecção frontal (note que não se determinou a projecção horizontal do ponto  $Q'$ , com vista a não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações e porque esta não é necessária à resolução do exercício). Em seguida, por  $Q'_2$  (a projecção frontal do ponto  $Q'$ ) conduziu-se a projecção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se  $Q'_s$  (a sombra do ponto  $Q'$ ), que se situa no eixo  $X$ .  $Q'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior  $\widehat{TT}$** .

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Frontal de Projecção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{TQ}$  no Plano Frontal de Projecção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{TQ}$  no Plano Frontal de Projecção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{TQ}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projecção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado inferior é o diâmetro de topo da circunferência (o diâmetro  $[\widehat{AB}]$ ). Assim, construiu-se o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{TQ}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», em rebatimento – o segmento  $[\widehat{A_r B_r}]$  é o lado inferior do «meio quadrado» (em rebatimento) e o segmento  $[\widehat{O_r C_r}]$  é a parte correspondente da mediana vertical que se situa no interior do «meio quadrado». Nesse sentido, identificaram-se aqueles pontos – os pontos  $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ . Inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projecções dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{TQ}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  de maior cota, que engloba o arco  $\widehat{TQ}$  na sua totalidade.

Assim, determinaram-se as sombras dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $O$  no Plano Frontal de Projecção.  $A_{s_2}$  é a sombra do ponto  $A$  no Plano Frontal de Projecção e situa-se no **SPFS** (é uma sombra real).  $C_{s_2}$  é a sombra do ponto  $C$  no Plano Frontal de Projecção e situa-se no **SPFS** (é uma sombra real).  $B_{v_2}$  é a sombra do ponto  $B$  no Plano Frontal de Projecção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).  $O_{v_2}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projecção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).

Em seguida, a partir das sombras dos pontos atrás determinadas, concluiu-se o desenho da sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projecção (que é um paralelogramo). A sombra do lado superior da figura é paralela à sombra do segmento  $[\widehat{AB}]$  e passa por  $C_{s_2}$ . As sombras dos lados verticais da figura são paralelas à sombra do segmento  $[\widehat{OC}]$  (que também é vertical) e passam por  $A_{s_2}$  e  $B_{v_2}$ . Os pontos  $A_{s_2}$ ,  $B_{v_2}$  e  $C_{s_2}$  são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência  $\widehat{AB}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se as sombras daquelas linhas – são os segmentos de reta que têm um extremo em  $O_{v_2}$  e os outros extremos nos extremos do lado do paralelogramo que passa por  $C_{s_2}$ . Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência  $\widehat{AB}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projecções frontais. Pelas projecções frontais destes pontos conduziram-se as projecções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**. Aos cinco pontos determinados acrescem os pontos  $T_{s_2}$  (a sombra do ponto  $T$ ) e o ponto  $Q'_s$ , o que perfaz um total de **sete pontos**. Os sete pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Frontal de Projecção da semicircunferência  $\widehat{AB}$ ). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[\widehat{TV}]$  no **SPFS** (o segmento  $[\widehat{Q_s T_{s_2}}]$  no ponto  $T_{s_2}$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{QT}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para baixo de  $T_{s_2}$  (um deles) e para baixo de  $Q'_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para baixo de  $Q'_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{QT}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é outro segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{QT}$  no Plano Horizontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{QT}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado de menor afastamento é o diâmetro vertical da circunferência (o diâmetro **[CD]**). Assim, construiu-se o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{QT}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», em rebatimento – o segmento  $[C_rD_r]$  é o lado de menor afastamento do «meio quadrado» (em rebatimento) e o segmento  $[O_rB_r]$  é a parte correspondente da mediana de topo que se situa no interior do «meio quadrado». Nesse sentido, identificou-se o único daqueles pontos que ainda não havia sido identificado – o ponto **D**. Inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções do ponto **D**. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{QT}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência **CD** de maior afastamento, que engloba o arco  $\widehat{QT}$  na sua totalidade.

Assim, determinaram-se as sombras dos pontos **B**, **C**, **D** e **O** no Plano Horizontal de Projeção.  $D_{s_1}$  é a sombra do ponto **D** no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).  $B_{s_1}$  é a sombra do ponto **B** no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).  $O_{s_1}$  é a sombra do ponto **O** no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).  $C_{v_1}$  é a sombra do ponto **C** no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHP** (é uma sombra virtual).

Em seguida, a partir das sombras dos pontos atrás determinadas, concluiu-se o desenho da sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção (que é um paralelogramo). A sombra do lado de maior afastamento da figura é paralela à sombra do segmento **[CD]** e passa por  $B_{s_1}$ . As sombras dos lados de topo da figura são paralelas à sombra do segmento **[OB]** (que também é de topo) e passam por  $D_{s_1}$  e  $C_{v_1}$ . Os pontos  $D_{s_1}$ ,  $B_{s_1}$  e  $C_{v_1}$  são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência **CD** corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se as sombras daquelas linhas – são os segmentos de reta que têm um extremo em  $O_{s_1}$  e os outros extremos nos extremos do lado do paralelogramo que passa por  $B_{s_1}$ . Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência **CD** corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções horizontais. Pelas projeções horizontais destes pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**. Aos cinco pontos determinados acrescem os pontos  $T'_{s_1}$  (a sombra do ponto **T'**) e o ponto  $Q'_s$ , o que perfaz um total de **sete pontos**. Os sete pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da semicircunferência **CD**). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[TV]$  (o segmento  $[V_{s_1}T'_{s_1}]$  no ponto  $T'_{s_1}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{QT}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para cima de  $T'_{s_1}$  (um deles) e para cima de  $Q'_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para cima de  $Q'_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPHP**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho das duas curvas permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelos segmentos de elipses desenhados e pela linha quebrada que tem vértices em  $T'_{s_1}$ ,  $V_{s_1}$ ,  $Q_s$  e  $T_{s_2}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em projeção horizontal, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a base), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse ou, ainda, das retas **i**, **t** e **t'** em rebatimento.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 957.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base do cone) pelos seus traços, contendo o ponto **O** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal contém a projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ), tal como o seu traço horizontal contém a projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ).

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

O plano que contém a base do cone (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base do cone não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo (a base do sólido) – tendo em conta que ambas as projeções sofrem a redução máxima, as duas projeções do círculo reduzem-se a segmentos de reta sobre os traços homónimos do plano  $\pi$ .

Assim, a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta com 6 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) é o ponto médio – a projeção horizontal do círculo corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal do círculo é um segmento de reta com 6 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) é o ponto médio – a projeção frontal do círculo corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.

A altura do cone é a distância do vértice ao plano da base (medida ortogonalmente a este) que corresponde, neste caso, à diferença das abscissas entre o vértice e o plano da base. Assim, uma vez que o cone tem 9 cm de altura e que o seu vértice se situa à esquerda da base, a linha de chamada das projeções do ponto **V** situa-se 9 cm para a esquerda dos traços do plano  $\pi$ .

O enunciado refere que a geratriz de maior cota do cone é horizontal (de nível), ou seja, todos os seus pontos têm a mesma cota. Assim, o ponto **V**, porque pertence a essa geratriz, tem a mesma cota do ponto de maior cota da base, pelo que foi possível determinar diretamente a projeção frontal do ponto **V** ( $V_2$ ).

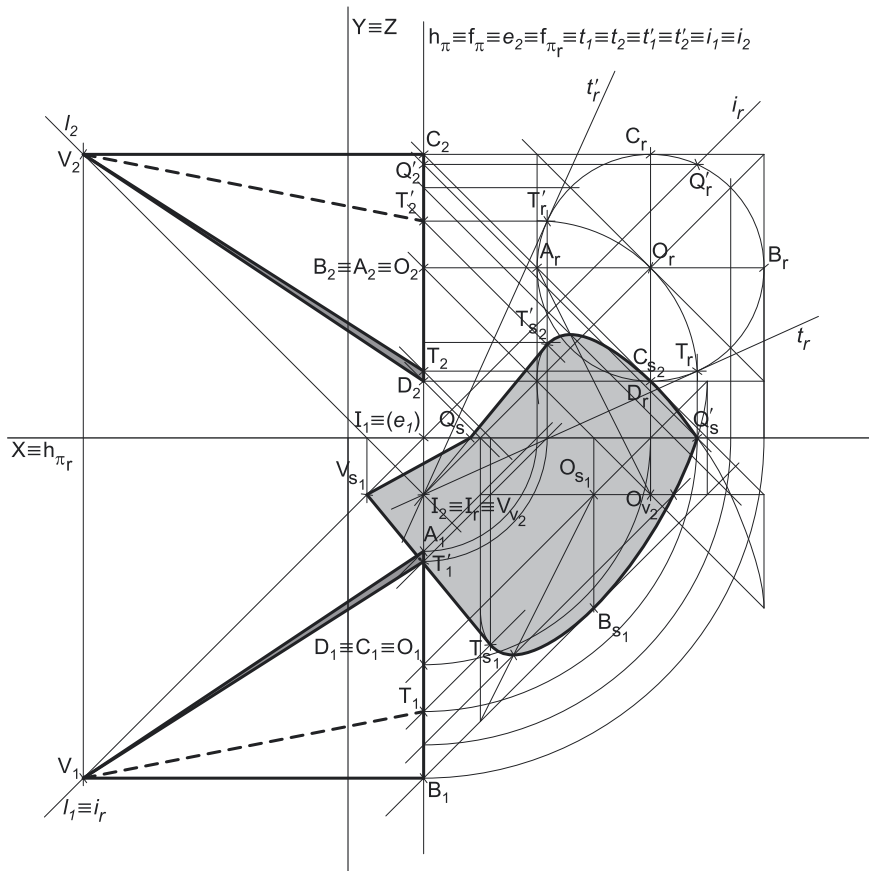
Por outro lado, o enunciado refere também que a geratriz de maior afastamento do cone é frontal (de frente), ou seja, todos os seus pontos têm o mesmo afastamento. Assim, o ponto **V**, porque pertence a essa geratriz, tem o mesmo afastamento do ponto de maior afastamento da base, pelo que foi possível determinar diretamente a projeção horizontal do ponto **V** ( $V_1$ ).

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor afastamento da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é outro triângulo, com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor cota da projeção frontal da base).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

**1.** Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa convencional).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

- Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ . A determinação das projeções do ponto  $I$  foi direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante – tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) e um plano duplamente projetante (o plano  $\pi$ ).
- Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base – o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas  $t$  e  $t'$  mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas  $t$  e  $t'$  em relação à base do cone, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Assim, recorreu-se a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, rebateram-se os pontos  $O$  e  $I$ , o que nos permitiu determinar  $O_r$  e  $I_r$ . Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em rebatimento, em verdadeira grandeza. Por  $I_r$  conduziram-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento) – a reta  $t_r$  passa por  $I_r$  e é tangente à base em rebatimento no ponto  $T_r$  (está definida por dois pontos) e a reta  $t'_r$  passa por  $I_r$  e é tangente à base em rebatimento no ponto  $T'_r$  (está igualmente definida por dois pontos).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência em rebatimento) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_r$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_r$  e  $T'_r$ .

- As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos  $T$  e  $T'$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ . A geratriz  $[TV]$  é **invisível** em projeção horizontal (por se situar na parte invisível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cone) e é **visível** em projeção frontal (por se situar na parte visível, em projeção frontal, da superfície lateral do cone). Já a geratriz  $[T'V]$  é **visível** em projeção horizontal (por se situar na parte visível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cone) e **invisível** em projeção frontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cone).

As geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior  $T'T$** . A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor  $T'T$**  está **em sombra**, bem como a base do cone. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[TVT'T]$ , que integra as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ , bem como o **arco maior  $T'T$** .

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[TV]$  (o segmento  $[T_2V_2]$ ) e a projeção frontal da geratriz de menor cota do contorno aparente frontal do cone – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**.

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[T'V]$  (o segmento de reta  $[T'_1V_1]$ ) e a projeção horizontal da geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cone – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $V_{s1}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $V$ .  $T'_{s2}$  é a sombra real do ponto  $T'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $T'$ .  $T_{s1}$  é a sombra real do ponto  $T$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $T$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$V_{s1}$  e  $T_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[TV]$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[V_{s1}T_{s1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[TV]$  e situa-se no **SPHA**.

$V_{s1}$  situa-se no **SPHA** e  $T'_{s2}$  situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre  $V_{s1}$  e  $T'_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos). Esse ponto de quebra foi determinado com o recurso à sombra virtual do ponto  $V$  –  $V_{v2}$ .  $V_{v2}$  é a sombra virtual do ponto  $V$  – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $V$ . O segmento  $[V_{v2}T'_{s2}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[T'V]$  no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[V_{v2}T'_{s2}]$  com o eixo  $X$  é  $Q_s$ , que é o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[T'V]$ . A linha quebrada aberta  $[V_{s1}Q_sT'_{s2}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[T'V]$  nos Planos de Projeção (nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Tendo em conta que  $T_{s_1}$  se situa no SPHA e  $T'_{s_2}$  se situa no SPFS, é possível concluir que a sombra do arco maior  $\overline{TT'}$  admite necessariamente um ponto de quebra. Como em situações semelhantes, a determinação do ponto de quebra da sombra de uma circunferência (ou de um arco de circunferência) deve processar-se com o recurso ao método do plano luz/sombra passante.

Para evitar uma maior complexidade da resolução gráfica apresentada, optou-se por simplificar este procedimento com um raciocínio simples. Dado o facto de a direção luminosa ser a direção luminosa convencional, o plano luz/sombra passante é o próprio  $\beta_{1/3}$ . Assim, com vista a uma maior economia de traçados que possibilite uma melhor leitura da resolução proposta, não se desenharam as projeções do raio luminoso que nos permitiria determinar a reta  $i$  (a reta de interseção do plano  $\pi$  com o plano luz/sombra passante – o  $\beta_{1/3}$ ), tendo-se determinado, imediatamente, as suas projeções. A reta  $i$  (a reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ ) é uma reta de perfil passante do plano  $\pi$ , que faz, com os traços do plano  $\pi$ , ângulos de  $45^\circ$ .

Note que, caso a direção luminosa não fosse a direção convencional, a determinação da reta  $i$  passaria, necessariamente pela determinação do ponto de interseção do plano  $\pi$  com um raio luz/sombra passante com a direção luminosa dada (à semelhança das restantes situações já apresentadas).

Tendo em conta que tanto o círculo (a base do cone) como a reta  $i$  estão contidos num plano de perfil, as projeções das duas figuras não verificam o Critério de Reversibilidade pelo que não é possível averiguar a posição da reta  $i$  em relação ao círculo. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  já efetuado. Assim, desenhou-se a reta  $i_r$  (a reta  $i$  no rebatimento efetuado) – a reta  $i_r$  está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é um ponto fixo, pois situa-se na charneira) e por uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com os dois traços do plano  $\pi$ , em rebatimento).

Sublinha-se que, das duas hipóteses de medir o ângulo de  $45^\circ$  a partir do ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\pi$ , apenas a que a resolução apresenta se refere à reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ . Note que a reta  $i$  tem de atravessar os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros e que o ponto  $O$  é um ponto do  $1^\circ$  Diedro. Assim, a reta  $i_r$  (a reta  $i$  em rebatimento) tem de passar pelo quadrante do plano em que se situa  $O_r$  – na outra hipótese de medir o ângulo de  $45^\circ$  a reta não passaria pelo quadrante onde se situa  $O_r$  (e, por isso mesmo, seria a reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{2/4}$ ).

A reta  $i_r$  é secante à circunferência – a reta  $i_r$  corta o arco  $\overline{T_r T'_r}$  (o arco maior  $\overline{TT'}$  em rebatimento) no ponto  $Q'_r$ , pelo que é possível concluir que o arco maior  $\overline{TT'}$  produz sombra nos dois planos de projeção. O arco  $\overline{TQ'}$  produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no SPHA) e o arco  $\overline{Q'T'}$  produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no SPFS).

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $Q'$  e determinou-se a sua projeção frontal (note que não se determinou a projeção horizontal do ponto  $Q'$ , com vista a não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações e porque esta não é necessária à resolução do exercício). Em seguida, por  $Q'_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q'$ ) conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se  $Q'_s$  (a sombra do ponto  $Q'$ ), que se situa no eixo  $X$ .  $Q'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra do arco maior  $\overline{TT'}$ .

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Frontal de Projeção:*

A sombra projetada do arco  $\overline{T'Q'}$  no Plano Frontal de Projeção (no SPFS) é um segmento de uma elipse, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de oito pontos (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da elipse requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício 862.

Para determinar a sombra do arco  $\overline{T'Q'}$  no Plano Frontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\overline{T'Q'}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado inferior é o diâmetro de topo da circunferência (o diâmetro  $[AB]$ ). Assim, construiu-se o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\overline{T'Q'}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», em rebatimento – o segmento  $[A_r B_r]$  é o lado inferior do «meio quadrado» (em rebatimento) e o segmento  $[O_r C_r]$  é a parte correspondente da mediana vertical que se situa no interior do «meio quadrado». Nesse sentido, identificaram-se aqueles pontos – os pontos  $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ . Inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\overline{T'Q'}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência  $\overline{AB}$  de maior cota, que engloba o arco  $\overline{T'Q'}$  na sua totalidade.

Assim, determinaram-se as sombras dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $O$  no Plano Frontal de Projeção.  $A_{s_2}$  é a sombra do ponto  $A$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no SPFS (é uma sombra real).  $C_{s_2}$  é a sombra do ponto  $C$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no SPFS (é uma sombra real).  $B_{v_2}$  é a sombra do ponto  $B$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no SPFI (é uma sombra virtual).  $O_{v_2}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no SPFI (é uma sombra virtual).

Em seguida, a partir das sombras dos pontos atrás determinadas, concluiu-se o desenho da sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção (que é um paralelogramo). A sombra do lado superior da figura é paralela à sombra do segmento  $[AB]$  e passa por  $C_{s_2}$ . As sombras dos lados verticais da figura são paralelas à sombra do segmento  $[OC]$  (que também é vertical) e passam por  $A_{s_2}$  e  $B_{v_2}$ . Os pontos  $A_{s_2}$ ,  $B_{v_2}$  e  $C_{s_2}$  são, imediatamente, três pontos do segmento de elipse e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos três pontos para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência  $\overline{AB}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais dois pontos da curva. Assim, desenharam-se as sombras daquelas linhas – são os segmentos de reta que têm um extremo em  $O_{v_2}$  e os outros extremos nos extremos do lado do paralelogramo que passa por  $C_{s_2}$ . Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência  $\overline{AB}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções frontais. Pelas projeções frontais destes pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais dois pontos do segmento de elipse. Aos cinco pontos determinados acrescem os pontos  $T'_{s_2}$  (a sombra do ponto  $T'$ ) e o ponto  $Q'_s$ , o que perfaz um total de sete pontos. Os sete pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da semicircunferência  $\overline{AB}$ ). Note que a curva é concordante com a sombra da geratriz  $[T'V]$  no SPFS (o segmento  $[Q'_s T'_{s_2}]$  no ponto  $T'_{s_2}$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{T'Q'}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para baixo de  $T'_s$  (um deles) e para baixo de  $Q'_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para baixo de  $Q'_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{Q'T}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é outro segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{Q'T}$  no Plano Horizontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{Q'T}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado de menor afastamento é o diâmetro vertical da circunferência (o diâmetro **[CD]**). Assim, construiu-se o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{Q'T}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», em rebatimento – o segmento **[C<sub>r</sub>D<sub>r</sub>]** é o lado de menor afastamento do «meio quadrado» (em rebatimento) e o segmento **[O<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** é a parte correspondente da mediana de topo que se situa no interior do «meio quadrado». Nesse sentido, identificou-se o único daqueles pontos que ainda não havia sido identificado – o ponto **D<sub>r</sub>**. Inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções do ponto **D**. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{Q'T}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência **CD** de maior afastamento, que engloba o arco  $\widehat{Q'T}$  na sua totalidade.

Assim, determinaram-se as sombras dos pontos **B**, **C**, **D** e **O** no Plano Horizontal de Projeção. **D<sub>s1</sub>** é a sombra do ponto **D** no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real). **B<sub>s1</sub>** é a sombra do ponto **B** no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real). **O<sub>s1</sub>** é a sombra do ponto **O** no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real). **C<sub>v1</sub>** é a sombra do ponto **C** no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHP** (é uma sombra virtual).

Em seguida, a partir das sombras dos pontos atrás determinadas, concluiu-se o desenho da sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção (que é um paralelogramo). A sombra do lado de maior afastamento da figura é paralela à sombra do segmento **[CD]** e passa por **B<sub>s1</sub>**. As sombras dos lados de topo da figura são paralelas à sombra do segmento **[OB]** (que também é de topo) e passam por **D<sub>s1</sub>** e **C<sub>v1</sub>**. Os pontos **D<sub>s1</sub>**, **B<sub>s1</sub>** e **C<sub>v1</sub>** são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência **CD** corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se as sombras daquelas linhas – são os segmentos de reta que têm um extremo em **O<sub>s1</sub>** e os outros extremos nos extremos do lado do paralelogramo que passa por **B<sub>s1</sub>**. Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência **CD** corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções horizontais. Pelas projeções horizontais destes pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Aos cinco pontos determinados acrescem os pontos **T<sub>s1</sub>** (a sombra do ponto **T**) e o ponto **Q'<sub>s</sub>**, o que perfaz um total de **sete pontos**. Os sete pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da semicircunferência **CD**). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz **[TV]** (o segmento **[V<sub>s1</sub>T<sub>s1</sub>]**) no ponto **T<sub>s1</sub>**.

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{Q'T'}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para cima de **T<sub>s1</sub>** (um deles) e para cima de **Q'<sub>s</sub>** (o outro troço). O troço da curva que se situa para cima de **Q'<sub>s</sub>** é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPHP**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho das duas curvas permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelos segmentos de elipses desenhados e pela linha quebrada que tem vértices em **T<sub>s1</sub>**, **V<sub>s1</sub>**, **Q'<sub>s</sub>** e **T'<sub>s2</sub>** – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em projeção horizontal, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a base), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse ou, ainda, das retas **i**, **t** e **t'** em rebatimento.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 958.

### Dados:

Tendo em conta que a base do cone é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, o centro da base (o ponto **O**) tem necessariamente afastamento igual ao raio da circunferência, que é 3,5 cm – o ponto **O** tem, assim, 3,5 cm de afastamento. Por outro lado, trata-se de um **cone de revolução** com a base contida num plano de perfil, pelo que o eixo do cone está necessariamente contido numa reta fronto-horizontal (uma reta cujos pontos têm, todos, o mesmo afastamento e a mesma cota). Uma vez que o ponto **V** (o vértice do cone) tem 6 cm de afastamento (é dado no enunciado), sabe-se, imediatamente, que o ponto **O** tem também 6 cm de afastamento. Dessa forma, em primeiro lugar representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base do cone) pelos seus traços, contendo o ponto **O** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ), tal como o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ).

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

O plano que contém a base do cone (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base do cone não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo (a base do sólido) – tendo em conta que ambas as projeções sofrem a redução máxima, as duas projeções do círculo reduzem-se a segmentos de reta sobre os traços homónimos do plano  $\pi$ .

Assim, a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta com 7 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) é o ponto médio – a projeção horizontal do círculo corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal do círculo é um segmento de reta com 7 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) é o ponto médio – a projeção frontal do círculo corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.

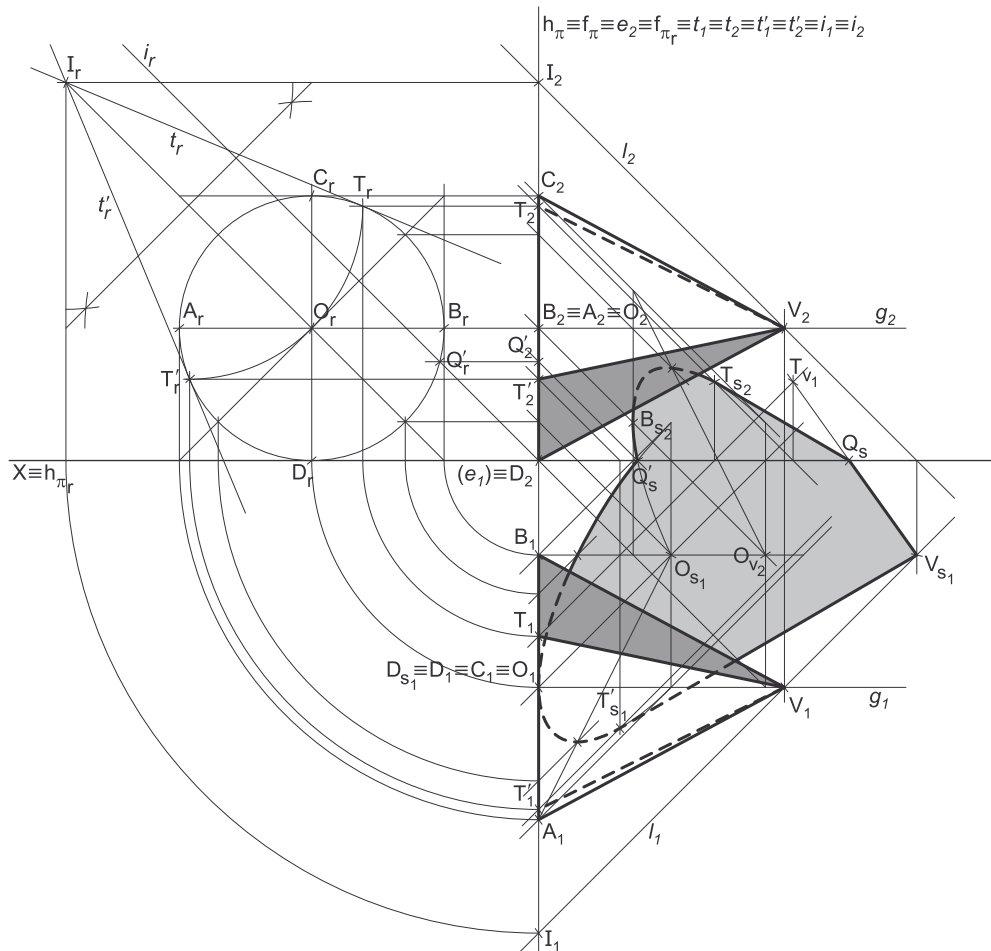
A altura do cone é a distância do vértice ao plano da base (medida ortogonalmente a este) que corresponde, neste caso, à diferença das abcissas entre o vértice e o plano da base. Assim, uma vez que o cone tem 6,5 cm de altura e que o seu vértice se situa à direita da base, a linha de chamada das projeções do ponto **V** situa-se 6,5 cm para a direita dos traços do plano  $\pi$ .

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base (que é um plano de perfil), ou seja, está contido numa reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **g**, a reta suporte do eixo do cone – o ponto **V** é o ponto da reta **g** que se situa 6,5 cm para a direita do plano  $\pi$ .

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_1$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor afastamento da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é outro triângulo, com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor cota da projeção frontal da base).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto  $V$ ), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto  $V$ ) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto  $I$ . A determinação das projeções do ponto  $I$  foi direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante – tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) e um plano duplamente projetante (o plano  $\pi$ ).
3. Pelo ponto  $I$  conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano que contém a base – o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas  $t$  e  $t'$  mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas  $t$  e  $t'$  em relação à base do cone, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Assim, recorreu-se a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, rebateram-se os pontos  $O$  e  $I$ , o que nos permitiu determinar  $O_r$  e  $I_r$ . Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em rebatimento, em verdadeira grandeza (que é tangente ao traço horizontal do plano  $\pi$ , em rebatimento). Pelo ponto  $I_r$  conduziram-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento) – a reta  $t_r$  passa por  $I_r$  e é tangente à base em rebatimento no ponto  $T_r$  (está definida por dois pontos) e a reta  $t'_r$  passa por  $I_r$  e é tangente à base em rebatimento no ponto  $T'_r$  (está igualmente definida por dois pontos).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência em rebatimento) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_r$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_r$  e  $T'_r$ .

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos  $T$  e  $T'$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ . A geratriz  $[TV]$  é **invisível** em projeção frontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cone) e é **visível** em projeção horizontal (por se situar na parte visível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cone). Já a geratriz  $[T'V]$  é **visível** em projeção frontal (por se situar na parte visível, em projeção frontal, da superfície lateral do cone) e **invisível** em projeção horizontal (por se situar na parte invisível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cone).

As geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$  separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor  $TT'$** , bem como a base do cone. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco maior  $TT'$**  está **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[TVTT']$ , que integra as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ , bem como o **arco maior  $TT'$** .

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[T'V]$  (o segmento  $[T'_2V_2]$ ) e a projeção frontal da geratriz de menor cota do contorno aparente frontal do cone – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**.

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[TV]$  (o segmento de reta  $[T_1V_1]$ ) e a projeção horizontal da geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cone – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cone:*

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $V_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $V$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $V$ .  $T_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $T$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $T$ .  $T'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $T'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $T'$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$V_{s_1}$  e  $T'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[T'V]$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[T'_{s_1}V_{s_1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[T'V]$  e situa-se no **SPHA**.

$V_{s_1}$  situa-se no **SPHA** e  $T_{s_2}$  situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre  $V_{s_1}$  e  $T_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos). Esse ponto de quebra foi determinado com o recurso à sombra virtual do ponto  $T$  –  $T_v$ .  $T_v$  é a sombra virtual do ponto  $T$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $T$ . O segmento  $[T_vV_{s_1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[TV]$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T_vV_{s_1}]$  com o eixo  $X$  é  $Q_s$ , que é o ponto de quebra da sombra da geratriz  $[TV]$ . A linha quebrada aberta  $[T_{s_2}Q_sV_{s_1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[TV]$  nos Planos de Projeção (nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que  $T_{s_1}$  se situa no **SPHA** e  $T_{s_2}$  se situa no **SPFS**, é possível concluir que a sombra do **arco maior  $\overline{TT'}$**  admite necessariamente um ponto de quebra. Como em situações semelhantes, a determinação do ponto de quebra da sombra de uma circunferência (ou de um arco de circunferência) deve processar-se com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Para evitar uma maior complexidade da resolução gráfica apresentada, optou-se por simplificar este procedimento com um raciocínio simples. Dado o facto de a direção luminosa ser a **direção luminosa convencional**, o **plano luz/sombra passante** é o próprio  $\beta_{1/3}$ . Assim, com vista a uma maior economia de traçados que possibilite uma melhor leitura da resolução proposta, não se desenharam as projeções do raio luminoso que nos permitiria determinar a reta  $i$  (a reta de interseção do plano  $\pi$  com o **plano luz/sombra passante** – o  $\beta_{1/3}$ ), tendo-se determinado, imediatamente, as suas projeções. A reta  $i$  (a reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ ) é uma **reta de perfil passante** do plano  $\pi$ , que faz, com os traços do plano  $\pi$ , ângulos de  $45^\circ$ .

Note que, caso a direção luminosa não fosse a direção convencional, a determinação da reta  $i$  passaria, **necessariamente** pela determinação do ponto de interseção do plano  $\pi$  com um raio luz/sombra passante com a direção luminosa dada (à semelhança das restantes situações já apresentadas).

Tendo em conta que tanto o círculo (a base do cone) como a reta  $i$  estão contidos num plano de perfil, as projeções das duas figuras não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível averiguar a posição da reta  $i$  em relação ao círculo. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  já efetuado. Assim, desenhou-se a reta  $i_r$  (a reta  $i$  no rebatimento efetuado) – a reta  $i_r$  está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é um ponto fixo, pois situa-se na charneira) e por uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com os dois traços do plano  $\pi$ , em rebatimento).

Sublinha-se que, das duas hipóteses de medir o ângulo de  $45^\circ$  a partir do ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\pi$ , apenas a que a resolução apresenta se refere à reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ . Note que a reta  $i$  tem de atravessar os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  *Diedros* e que o ponto  $O$  é um ponto do  $1^\circ$  *Diedro*. Assim, a reta  $i_r$  (a reta  $i$  em rebatimento) tem de passar pelo quadrante do plano em que se situa  $O_r$  – na outra hipótese de medir o ângulo de  $45^\circ$  a reta não passaria pelo quadrante onde se situa  $O_r$  (e, por isso mesmo, seria a reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{2/4}$ ).

A reta  $i_r$  é secante à circunferência – a reta  $i_r$  corta o arco  $\overline{T_r T'_r}$  (o **arco maior  $\overline{TT'}$**  em rebatimento) no ponto  $Q'_r$ , pelo que é possível concluir que o **arco maior  $\overline{TT'}$**  produz sombra nos dois planos de projeção. O **arco  $\overline{T'Q}$**  produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) e o **arco  $\overline{T'Q'}$**  produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**).

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto  $Q'$  e determinou-se a sua projeção frontal (note que não se determinou a projeção horizontal do ponto  $Q'$ , com vista a não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações e porque esta não é necessária à resolução do exercício). Em seguida, por  $Q'_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q'$ ) conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se  $Q'_s$  (a sombra do ponto  $Q'$ ), que se situa no eixo  $X$ .  $Q'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior  $\overline{TT'}$** .

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\overline{T'Q'}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\overline{T'Q'}$  no Plano Horizontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\overline{T'Q'}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado superior é o diâmetro de topo da circunferência (o diâmetro  $\overline{AB}$ ). Assim, construiu-se o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\overline{T'Q'}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», em rebatimento – o segmento  $\overline{A_r B_r}$  é o lado superior do «meio quadrado» (em rebatimento) e o segmento  $\overline{O_r D_r}$  é a parte correspondente da mediana vertical que se situa no interior do «meio quadrado». Nesse sentido, identificaram-se aqueles pontos – os pontos  $A_r$ ,  $B_r$  e  $D_r$ . Inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $D$ . Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\overline{T'Q'}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência  $\overline{AB}$  de menor cota, que engloba o arco  $\overline{T'Q'}$  na sua totalidade.

Assim, determinaram-se as sombras dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $D$  e  $O$  no Plano Horizontal de Projeção.  $A_{s_1}$  é a sombra do ponto  $A$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).  $B_{v_1}$  é a sombra do ponto  $B$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHP** (é uma sombra virtual).  $D_{s_1}$  é a sombra do ponto  $D$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).  $O_{s_1}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).

Em seguida, a partir das sombras dos pontos atrás determinadas, concluiu-se o desenho da sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção (que é um paralelogramo). O lado inferior do «meio quadrado» está contido no Plano Horizontal de Projeção (no traço horizontal do plano  $\pi$ ), pelo que a sua sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção está coincidente com o próprio lado. A sombra projetada do lado superior da figura no Plano Horizontal de Projeção é o segmento  $\overline{A_{s_1} B_{v_1}}$ . As sombras dos lados verticais da figura são paralelas à sombra do segmento  $\overline{OD}$  (que também é vertical) e passam por  $A_{s_1}$  e  $B_{v_1}$ . Os pontos  $A_{s_1}$ ,  $B_{v_1}$  e  $D_{s_1}$  são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência  $\overline{AB}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se as sombras daquelas linhas – são os segmentos de reta que têm um extremo em  $O_{s_1}$  e os outros extremos nos extremos do lado inferior do paralelogramo. Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência  $\overline{AB}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções horizontais. Pelas projeções horizontais destes pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**. Aos cinco pontos determinados acrescem os pontos  $T'_{s_1}$  (a sombra do ponto  $T'$ ) e o ponto  $Q'_s$ , o que perfaz um total de **sete pontos**. Os sete pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da semicircunferência  $\overline{AB}$ ). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[T'V]$  (o segmento  $[T'_{s_1}V_{s_1}]$  no ponto  $T'_{s_1}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\overline{T'Q'}$ . Esses troços são o troço que se situa entre  $T'_{s_1}$  e  $A_{s_1}$  (um deles) e o troço que se situa entre  $Q'_s$  e  $B_{v_1}$  (o outro troço). O troço da curva que se situa entre  $Q'_s$  e  $B_{v_1}$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPHP**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\overline{T'Q'}$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é outro segmento de **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\overline{T'Q'}$  no Plano Frontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\overline{T'Q'}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado de menor afastamento é o diâmetro vertical da circunferência (o diâmetro  $[CD]$ ). Assim, construiu-se o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\overline{T'Q'}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», em rebatimento – o segmento  $[C_rD_r]$  é o lado de menor afastamento do «meio quadrado» (em rebatimento) e o segmento  $[O_rB_r]$  é a parte correspondente da mediana de topo que se situa no interior do «meio quadrado». Nesse sentido, identificou-se o único daqueles pontos que ainda não havia sido identificado – o ponto  $C_r$ . Inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções do ponto  $C$ . Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\overline{T'Q'}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência  $\overline{CD}$  de menor afastamento, que engloba o arco  $\overline{T'Q'}$  na sua totalidade.

Assim, determinaram-se as sombras dos pontos  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $O$  no Plano Frontal de Projeção.  $B_{s_2}$  é a sombra do ponto  $B$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFS** (é uma sombra real).  $C_{s_2}$  é a sombra do ponto  $C$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFS** (é uma sombra real).  $D_{v_2}$  é a sombra do ponto  $D$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).  $O_{v_2}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).

Em seguida, a partir das sombras dos pontos atrás determinadas, concluiu-se o desenho da sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção (que é um paralelogramo). A sombra do lado de menor afastamento da figura é paralela à sombra do segmento  $[CD]$  e passa por  $B_{s_2}$ . As sombras dos lados de topo da figura são paralelas à sombra do segmento  $[OB]$  (que também é de topo) e passam por  $C_{s_2}$  e  $D_{v_2}$ . Os pontos  $C_{s_2}$ ,  $D_{v_2}$  e  $B_{s_2}$  são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência  $\overline{CD}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitiram-nos determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se as sombras daquelas linhas – são os segmentos de reta que têm um extremo em  $O_{v_2}$  e os outros extremos nos extremos do lado do paralelogramo que passa por  $B_{s_2}$ . Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência  $\overline{CD}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções frontais. Pelas projeções frontais destes pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Aos cinco pontos determinados acrescem os pontos  $T_{s_2}$  (a sombra do ponto  $T$ ) e o ponto  $Q'_s$ , o que perfaz um total de **sete pontos**. Os sete pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da semicircunferência  $\overline{CD}$ ). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[TV]$  no **SPFS** (o segmento  $[Q_sT_{s_2}]$  no ponto  $T_{s_2}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\overline{T'Q'}$ . Esses troços são o troço que se situa para a direita de  $T_{s_2}$  (um deles) e o troço que se situa para baixo de  $Q'_s$  (o outro). O troço da curva que se situa para baixo de  $Q'_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho das duas curvas permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelos segmentos de elipses desenhados e pela linha quebrada que tem vértices em  $T'_{s_1}$ ,  $V_{s_1}$ ,  $Q_s$  e  $T_{s_2}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a base), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse ou, ainda, das retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$  em rebatimento.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 959.

### Dados:

Tendo em conta que as bases do cilindro estão contidas em planos de perfil, e porque se trata de um **cilindro de revolução**, o eixo do cilindro estão necessariamente contido numa reta fronto-horizontal. Assim, em primeiro lugar, representou-se a reta  $g$  (a reta suporte do eixo do cilindro), pelas suas projeções, em função dos dados. A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

*Determinação das projeções do cilindro:*

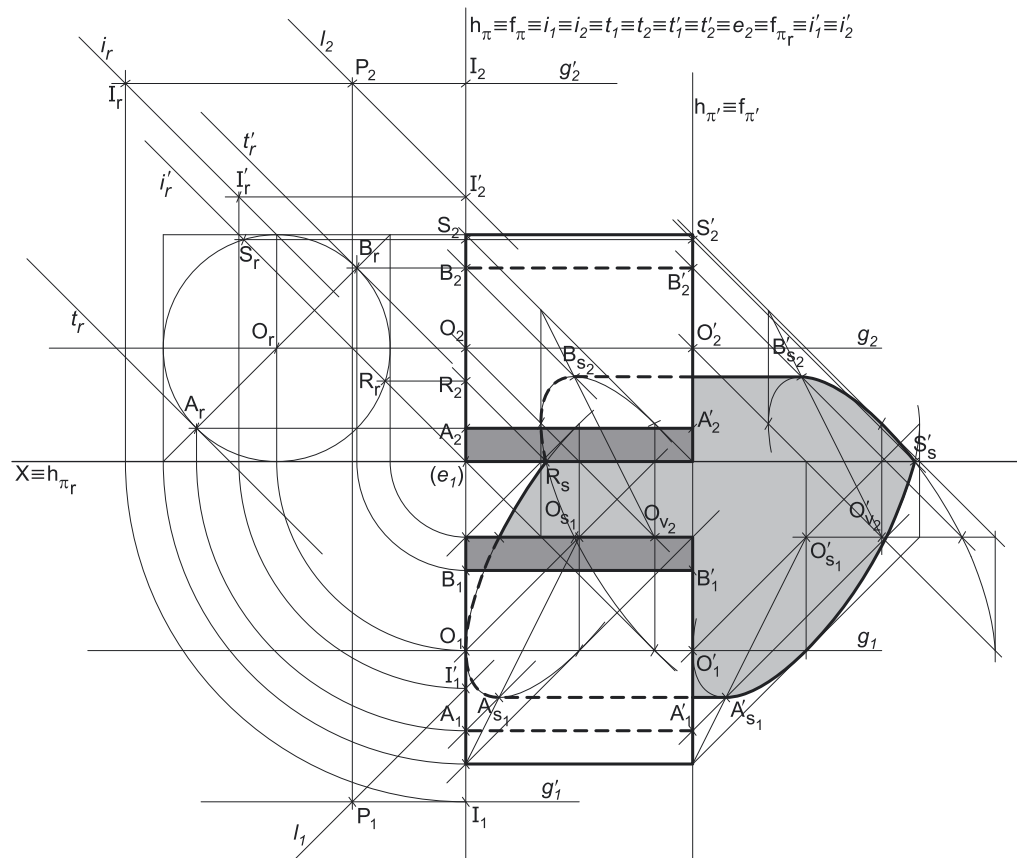
A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases o que, neste caso, corresponde à diferença das abscissas dos planos das bases. Uma vez que o cilindro tem 6 cm de altura, os planos de perfil das duas bases distam 6 cm um do outro. Assim, representaram-se, pelos seus traços, o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do sólido) e o plano  $\pi'$  (o plano de perfil que contém a base mais à direita do cilindro).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **O** (o centro da base mais à esquerda do cilindro) e **O'** (o centro da base mais à direita do cilindro). As projeções dos pontos **O** e **O'** tiveram determinação imediata, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta  $g$ ) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi$  e o plano  $\pi'$ , respetivamente).

O cilindro é tangente ao Plano Horizontal de Projeção ao longo de uma geratriz e o seu eixo tem 3 cm de cota, pelo que é possível concluir, de forma imediata, que as bases do sólido têm 3 cm de raio.

O plano que contém a base mais à esquerda do cilindro (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo (a base mais à esquerda do sólido) – tendo em conta que ambas as projeções sofrem a redução máxima, as duas projeções do círculo reduzem-se a segmentos de reta sobre os traços homónimos do plano  $\pi$ .

Assim, a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta com 6 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) é o ponto médio – a projeção horizontal do círculo corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal do círculo é um segmento de reta com 6 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual **O<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **O**) é o ponto médio – a projeção frontal do círculo corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano que contém a base mais à direita do cilindro (o plano  $\pi'$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo (a base mais à direita do sólido), à semelhança do exposto para a base mais à esquerda. Assim, a projeção horizontal da base é um segmento de reta com 6 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) de que  $O'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O'$ ) é o seu ponto médio – a projeção horizontal da base corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal da base é um segmento de reta com 6 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) de que  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ) é o seu ponto médio – a projeção frontal da base corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.

Em seguida, desenharam-se as projeções dos contornos aparentes do cilindro. A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido é um **retângulo**, cujos vértices são os pontos de maior e menor afastamento das projeções horizontais das duas bases. A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro é outro **retângulo**, cujos vértices são os pontos de maior e de menor cota das projeções frontais das duas bases.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao cilindro, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $g'$ , fronto-horizontal (paralela às geratrizes do cilindro), e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas retas  $g'$  e  $l$  (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base mais à esquerda – a base que está contida no plano  $\pi$ ). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $g'$  com o plano  $\pi$ ) e o ponto  $I'$  (o ponto de interseção da reta  $l$  com o plano  $\pi$ ).

A determinação das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  foi direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre retas não projetantes e um plano duplamente projetante).

3. Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ , que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base (o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas  $t$  e  $t'$  mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas  $t$  e  $t'$  em relação à base do cilindro, de forma direta em projeções, nem sequer o paralelismo das retas  $t$  e  $t'$  em relação à reta  $i$  – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, recorreu-se a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, rebateram-se os pontos  $O$ ,  $I$  e  $I'$ , o que nos permitiu determinar  $O_r$ ,  $I_r$  e  $I'_r$ . Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a base mais à esquerda em rebatimento, em verdadeira grandeza (que é tangente a  $h_{\pi_r}$  – o traço horizontal do plano  $\pi$  rebatido). Pelos pontos  $I_r$  e  $I'_r$  conduziu-se a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida, que está definida por dois pontos). Em seguida, conduziram-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento), paralelas à reta  $i_r$  – a reta  $t_r$  é tangente à base em rebatimento no ponto  $A_r$ , e é paralela à reta  $i_r$  (está definida por um ponto e uma direção) e a reta  $t'_r$  é tangente à base em rebatimento no ponto  $B_r$  e é também paralela à reta  $i_r$  (está igualmente definida por um ponto e uma direção).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência em rebatimento) que são paralelas a uma reta dada (a reta  $i_r$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $A_r$  e  $B_r$ .

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  – note que o ponto  $A'$  é o extremo da geratriz  $[AA']$  que se situa na base mais à direita do cilindro, tal como o ponto  $B'$  é o extremo da geratriz  $[BB']$  que se situa na base mais à direita do cilindro. A geratriz  $[AA']$  é visível em projeção frontal e invisível em projeção horizontal. A geratriz  $[BB']$  é invisível em projeção frontal e visível em projeção horizontal.

As geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência  $\widehat{AB}$  de maior afastamento. A base mais à esquerda do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  de menor afastamento está **em sombra**, assim, como a base mais à direita do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[AB B'A']$ , que integra as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ , bem como a **semicircunferência  $\widehat{AB}$  de maior afastamento** (da base mais à esquerda) e a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  de menor afastamento** (da base mais à direita).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está **em sombra** e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[AA']$  e a projeção frontal da geratriz de menor cota do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base mais à direita (que está em sombra) é invisível em projeção frontal (por ser projetante frontal).

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está **em sombra** e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[BB']$  e a projeção horizontal da geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base mais à direita (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal (por ser projetante horizontal).

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $A_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_1}$  e  $A'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[AA']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[AA']$ .  $B_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz  $[BB']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s_2}B'_{s_2}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[BB']$ .

Tendo em conta que  $A_{s_1}$  se situa no **SPHA** e  $B_{s_2}$  se situa no **SPFS**, é possível concluir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) admite um ponto de quebra. Tendo em conta que  $A'_{s_1}$  se situa no **SPHA** e  $B'_{s_2}$  se situa no **SPFS**, é possível concluir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) admite um ponto de quebra. Como em situações semelhantes, a determinação dos pontos de quebra das sombras de circunferências (ou de arcos de circunferências) deve processar-se com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

*Determinação do ponto de quebra da sombra da base mais à esquerda do cilindro:*

Para evitar uma maior complexidade da resolução gráfica apresentada, optou-se por simplificar este procedimento com um raciocínio simples. Dado o facto de a direção luminosa ser a **direção luminosa convencional**, o **plano luz/sombra passante** é o próprio  $\beta_{1/3}$ . Assim, com vista a uma maior economia de traçados que possibilite uma melhor leitura da resolução proposta, não se desenharam as projeções do raio luminoso que nos permitiria determinar a reta  $i'$  (a reta de interseção do plano  $\pi$  com o **plano luz/sombra passante** – o  $\beta_{1/3}$ ), tendo-se determinado, imediatamente, as suas projeções. A reta  $i'$  (a reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ ) é uma **reta de perfil passante** do plano  $\pi$ , que faz, com os traços do plano  $\pi$ , ângulos de  $45^\circ$ .

Note que, caso a direção luminosa não fosse a direção convencional, a determinação da reta  $i'$  passaria, **necessariamente** pela determinação do ponto de interseção do plano  $\pi$  com um raio luz/sombra passante com a direção luminosa dada (à semelhança das restantes situações já apresentadas).

Tendo em conta que tanto o círculo (a base mais à esquerda do cilindro) como a reta  $i'$  estão contidos num plano de perfil, as projeções das duas figuras não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível averiguar a posição da reta  $i'$  em relação ao círculo. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  já efetuado. Assim, desenhou-se a reta  $i'_r$  (a reta  $i'$  no rebatimento efetuado) – a reta  $i'_r$  está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que é um ponto fixo, pois situa-se na charneira) e por uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com os dois traços do plano  $\pi$ , em rebatimento).

Sublinha-se que, das duas hipóteses de medir o ângulo de  $45^\circ$  a partir do ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\pi$ , apenas a que a resolução apresenta se refere à reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ . Note que a reta  $i'$  tem de atravessar os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros e que o ponto **O** é um ponto do  $1^\circ$  Diedro. Assim, a reta  $i'_r$  (a reta  $i'$  em rebatimento) tem de passar pelo quadrante do plano em que se situa  $O_r$  – na outra hipótese de medir o ângulo de  $45^\circ$  a reta não passaria pelo quadrante onde se situa  $O_r$  (e, por isso mesmo, seria a reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{2/4}$ ).

A reta  $i'_r$  é secante à circunferência – a reta  $i'_r$  corta a semicircunferência  $\widehat{A_rB_r}$  (a semicircunferência da base mais à esquerda que integra a linha separatriz luz/sombra – a semicircunferência de menor cota) no ponto **R**, pelo que é possível concluir que a semicircunferência  $\widehat{AB}$  produz sombra nos dois planos de projeção. Inverteu-se o rebatimento e determinou-se a projeção frontal do ponto **R** (para não sobrecarregar a resolução com excesso de notações, não se determinou a sua projeção horizontal, pois é desnecessária). Pela projeção frontal do ponto **R** conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se **R<sub>s</sub>** – a sombra do ponto **R**, que se situa no eixo **X**. O ponto **R<sub>s</sub>** é, assim, o ponto de quebra da sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  (o ponto de quebra que se situa entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$ ).

O arco  $\widehat{AR}$  (da base mais à esquerda) produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é um **segmento de elipse**, pois o arco não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O arco  $\widehat{RB}$  (da base mais à esquerda) produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é outro **segmento de elipse**, pois o arco também não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação do ponto de quebra da sombra da base mais à direita do cilindro:*

Em seguida, há que determinar o ponto de quebra da sombra do arco  $\widehat{A'B'}$  (o ponto de quebra que se situa entre  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$ ). Nesse sentido, estabeleceu-se uma correspondência entre as duas bases, para evitar um outro rebatimento (o rebatimento do plano  $\pi'$ , o plano que contém a base mais à direita do cilindro). A reta  $i'_r$  é secante à circunferência – a reta  $i'_r$  corta a outra semicircunferência  $\widehat{A_r B_r}$  (a semicircunferência de maior cota) no ponto  $S_r$ , pelo que é possível concluir que essa outra semicircunferência  $\widehat{AB}$  também produziria sombra nos dois planos de projeção. Inverteu-se o rebatimento e determinou-se a projeção frontal do ponto  $S$  (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações, não se determinou a sua projeção horizontal, pois é desnecessária) – o ponto  $S$  é o extremo mais à esquerda de uma geratriz do cilindro (a geratriz  $[SS']$ ). Assim, determinou-se a projeção frontal do ponto  $S'$ , que é o extremo mais à direita dessa geratriz (não se determinou a sua projeção horizontal, pois é desnecessária).

O ponto  $S'$  é, assim, o ponto cuja sombra é o ponto de quebra da sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  que integra a linha separatriz luz/sombra. Nesse sentido, pela projeção frontal do ponto  $S'$  conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se  $S'_s$  – a sombra do ponto  $S'$ , que se situa no eixo  $X$ . O ponto  $S'_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  (a outra semicircunferência da linha separatriz luz/sombra do cilindro). Nesse sentido, o ponto  $S'_s$  é o ponto de quebra que se situa entre  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$ .

O arco  $\widehat{S'B'}$  (da base mais à direita) produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é um **segmento de elipse**, pois o arco não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O arco  $\widehat{A'S'}$  (da base mais à direita) produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é outro **segmento de elipse**, pois o arco também não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

*Determinação da sombra projetada da base mais à esquerda do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{AR}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{AR}$  no Plano Horizontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{AR}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado superior é o diâmetro de topo da circunferência. Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{AR}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{AR}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de menor cota, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $\widehat{AR}$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O$  ( $O_{s_1}$ ) no Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O_{s_1}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).

Note que o lado inferior do «meio quadrado» está contido no Plano Horizontal de Projeção (no traço horizontal do plano  $\pi$ ), pelo que a sua sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção está coincidente com o próprio lado. As sombras dos lados verticais estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos. A sombra do lado de maior cota do «meio quadrado» é paralela a  $h_\pi$  e passa por  $O_{s_1}$ .

Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções horizontais. Pelas projeções horizontais destes pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, imediatamente, o ponto  $A_{s_1}$ . Aos cinco pontos determinados acresce o ponto  $R_s$ , o que perfaz um total de **seis pontos**. Os seis pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  (o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$ ) no ponto  $A_{s_1}$ .

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{AR}$ . Esses troços são o troço que se situa para a direita de  $A_{s_1}$  (um deles) e o troço que se situa para cima de  $R_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para cima de  $R_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPHP**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base mais à esquerda do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{RB}$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{RB}$  no Plano Frontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{RB}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado de maior afastamento é o diâmetro vertical da circunferência. Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{RB}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{RB}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de menor afastamento, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $\widehat{RB}$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O$  ( $O_{v_2}$ ) no Plano Frontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O_{v_2}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).

Dois dos lados do «meio quadrado» são verticais (paralelos ao Plano Frontal de Projeção), pelo que as suas sombras projetadas no Plano Frontal de Projeção são igualmente verticais. Nesse sentido, determinaram-se as sombras dos vértices de maior cota do «meio quadrado», o que nos permitiu desenhar a sombra do lado superior da figura. Em seguida, determinou-se a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um dos vértices de menor cota do «meio quadrado». As sombras dos lados verticais do «meio quadrado» são verticais e passam pelas sombras correspondentes dos vértices que lhes pertencem. As sombras dos lados de topo estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos, o que nos permitiu concluir a construção do paralelogramo.

Por fim, por  $O_{v_2}$  conduziram-se a parte correspondente da sombra da mediana de topo (que é paralela às sombras dos lados de topo do «meio quadrado»), bem como as partes correspondentes das diagonais do quadrado. Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções frontais. Pelas projeções frontais destes pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, imediatamente, o ponto  $B_{s_2}$ . Aos cinco pontos determinados acresce o ponto  $R_s$ , o que perfaz um total de **seis pontos**. Os seis pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  (o segmento  $[B_{s_2}B'_{s_2}]$  no ponto  $B_{s_2}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{RB}$ . Esses troços são o troço que se situa para a direita de  $B_{s_2}$  (um deles) e o troço que se situa para baixo de  $R_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para baixo de  $R_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base mais à direita do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{A'S'}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{A'S'}$  no Plano Horizontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{A'S'}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi'$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado de menor afastamento é o diâmetro vertical da circunferência. Essa construção tem de ser executada em rebatimento, pois o plano  $\pi'$  é um plano de perfil e, dessa forma, as projeções do que quer que esteja contido no plano não verifica o **Critério de Reversibilidade**.

Por outro lado, como anteriormente se referiu para a determinação do ponto  $S'$  (o ponto cuja sombra é o ponto de quebra da sombra da base mais à direita), é possível efetuar todos os raciocínios e construções referentes à base mais à direita, sobre o rebatimento da base mais à esquerda (do plano  $\pi$ ) e, em seguida, transportar os elementos assim determinados para a base mais à direita, através da direção das geratrizes (que são fronto-horizontais).

Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{A'S'}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento (no rebatimento da base mais à esquerda).

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{A'S'}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de maior afastamento, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $\widehat{A'S'}$  na sua totalidade.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O'$  ( $O'_{s_1}$ ) no Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O'_{s_1}$  é a sombra do ponto  $O'$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).

Note, pela construção em rebatimento (no rebatimento do plano  $\pi$ ), que o lado inferior do «meio quadrado» está contido no Plano Horizontal de Projeção (no traço horizontal do plano  $\pi'$ ), pelo que a sua sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção está coincidente com o próprio lado. As sombras dos lados verticais estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos (note que a sombra do lado de menor afastamento passa por  $O'_{s_1}$ ). A sombra do lado superior determinou-se a partir da sombra de um dos seus vértices.

Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, no rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções horizontais, sobre a projeção horizontal da base mais à esquerda. Em seguida, transportaram-se esses pontos para a projeção horizontal da base mais à direita, através da direção das geratrizes. Por fim, pelas projeções horizontais destes pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, imediatamente, o ponto  $A'_{s_1}$ . Aos cinco pontos determinados acresce o ponto  $S'_s$ , o que perfaz um total de **seis pontos**. Os seis pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  (o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  no ponto  $A'_{s_1}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{AR}$ . Esses troços são o troço que se situa para a esquerda de  $A'_{s_1}$  (um deles) e o troço que se situa para cima de  $S'_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para cima de  $S'_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPHP**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base mais à esquerda do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $S'B'$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $S'B'$  no Plano Frontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $S'B'$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi'$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado inferior é o diâmetro de topo da circunferência. Essa construção tem de ser executada em rebatimento, pois o plano  $\pi'$  é um plano de perfil e, dessa forma, as projeções do que quer que esteja contido no plano não verifica o **Critério de Reversibilidade**.

Por outro lado, como anteriormente se referiu para a determinação do ponto  $S'$  (o ponto cuja sombra é o ponto de quebra da sombra da base mais à direita), é possível efetuar todos os raciocínios e construções referentes à base mais à direita, sobre o rebatimento da base mais à esquerda (do plano  $\pi$ ) e, em seguida, transportar os elementos assim determinados para a base mais à direita, através da direção das geratrizes (que são fronto-horizontais).

Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $S'B'$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento (no rebatimento da base mais à esquerda).

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $S'B'$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de maior cota, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $S'B'$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O'$  ( $O'_{v_2}$ ) no Plano Frontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O'_{v_2}$  é a sombra do ponto  $O'$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).

Dois dos lados do «meio quadrado» são verticais (paralelos ao Plano Frontal de Projeção), pelo que as suas sombras projetadas no Plano Frontal de Projeção são igualmente verticais. Nesse sentido, determinaram-se as sombras dos vértices de maior cota do «meio quadrado», o que nos permitiu desenhar a sombra do lado superior da figura. Em seguida, determinou-se a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um dos vértices de menor cota do «meio quadrado». As sombras dos lados verticais do «meio quadrado» são verticais e passam pelas sombras correspondentes dos vértices que lhes pertencem. Por outro lado, tendo em conta que a sombra do «meio quadrado» é um paralelogramo (cujos lados são paralelos dois a dois), foi possível desenhar o lado inferior do paralelogramo, que passa por  $O'_{v_2}$  e é a sombra do lado inferior do «meio quadrado».

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por fim, por  $O'_{v_2}$  conduziram-se a parte correspondente da sombra da mediana vertical (que é paralela às sombras dos lados verticais do «meio quadrado»), bem como as partes correspondentes das diagonais do quadrado. Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, no rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções frontais, sobre a projeção frontal da base mais à esquerda. Em seguida, transportaram-se esses pontos para a projeção frontal da base mais à direita, através da direção das geratrizes. Por fim, pelas projeções frontais destes pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, imediatamente, o ponto  $B'_{s_2}$ . Aos cinco pontos determinados acresce o ponto  $S'_s$ , o que perfaz um total de **seis pontos**. Os seis pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  (o segmento  $[B_{s_2}B'_{s_2}]$  no ponto  $B'_{s_2}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{S'B'}$ . Esses troços são o troço que se situa para a esquerda de  $B'_{s_2}$  (um deles) e o troço que se situa para baixo de  $S'_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para baixo de  $S'_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho das **quatro curvas** permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção (atendendo às invisibilidades existentes), que é composta pelos quatro segmentos de elipses desenhados e pelas sombras das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  (os segmentos  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  e  $[B_{s_2}B'_{s_2}]$ ) – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cilindro nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cilindro é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cilindro).

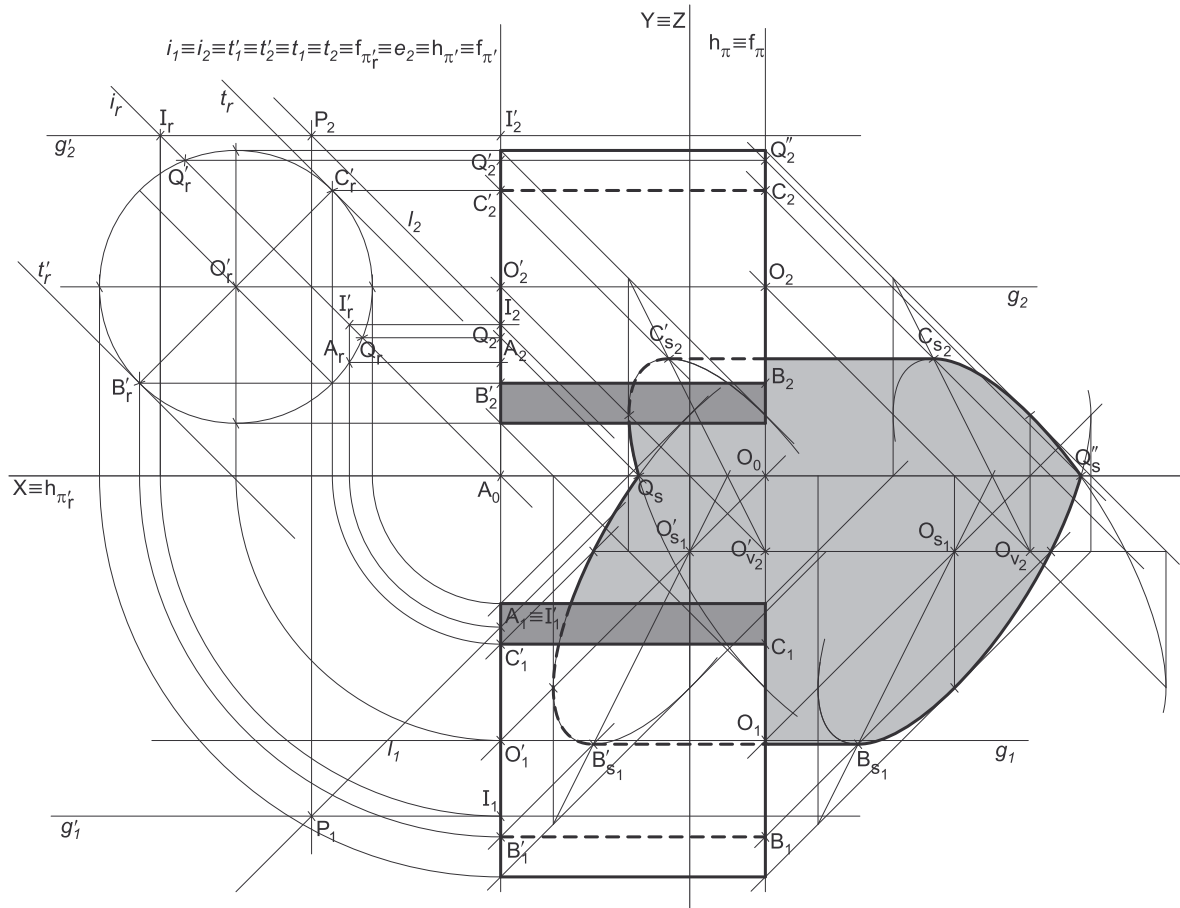
Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

## Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços dos planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos que contêm as bases), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes à determinação da orientação dos planos tangentes luz/sombra, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , de todos os traçados referentes à construção dos quatro segmentos de elipse, da reta  $g$  ou, ainda, das retas  $i, i', t$  e  $t'$  em rebatimento.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **O**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representaram-se os planos  $\pi$  e  $\pi'$ , pelos respetivos traços. O plano  $\pi$  é o plano de perfil que contém a base mais à direita do cilindro e, por isso, o plano  $\pi$  contém o ponto **O** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_{\pi}$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ), tal como o seu traço horizontal ( $h_{\pi}$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). O plano  $\pi'$  é o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do cilindro e, por isso, o plano  $\pi'$  contém o ponto **A** – o plano  $\pi'$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_{\pi'}$ ) passa pela projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ), tal como o seu traço horizontal ( $h_{\pi'}$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **A** ( $A_1$ ).

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do cilindro:*

Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que as suas geratrizes (bem como o seu eixo) são ortogonais aos planos das bases. Assim, pelas projeções do ponto **O** (o centro da base mais à esquerda do cilindro), conduziram-se as projeções da reta **g**, a reta fronto-horizontal que contém o eixo do cilindro e determinaram-se as projeções do ponto **O'** (o centro da base mais à esquerda do cilindro). As projeções do ponto **O'** tiveram determinação imediata, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **g**) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi'$ ).

Nesta situação, não nos é dado o raio das bases. No entanto, é-nos dado um ponto da base mais à esquerda – o ponto **A**. Assim, o raio da base mais à esquerda é a distância do ponto **O'** (o seu centro) ao ponto **A** (que é um ponto da circunferência que delimita a base). Todavia, o plano que contém a base mais à esquerda do cilindro (o plano  $\pi'$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções – a distância do ponto **O'** ao ponto **A** não se projeta em verdadeira grandeza em qualquer das suas projeções.

Nesse sentido, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi'$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi o traço frontal do plano ( $f_{\pi'}$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_{\pi'} \equiv e_2 \equiv f_{\pi'}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, rebateram-se os pontos **O'** e **A**, o que nos permitiu determinar **O'\_r** e **A\_r**. Com o compasso, fazendo centro em **O'\_r** e com raio até **A\_r**, desenhou-se a circunferência que delimita a base mais à esquerda em rebatimento, em verdadeira grandeza. Em seguida, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos extremos de maior e de menor afastamento do diâmetro de topo da circunferência, bem como as projeções frontais dos extremos de maior de menor cota do diâmetro vertical da circunferência. Este procedimento permitiu-nos determinar as duas projeções da base mais à esquerda do cilindro (que se reduzem, ambas, a segmentos de reta, pois o plano  $\pi'$  é um plano duplamente projetante).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que se trata de um cilindro de revolução (cujas geratrizes são fronto-horizontais), transportaram-se, para o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base mais à direita do cilindro), as cotas dos extremos de maior de menor cota do diâmetro vertical da base mais à esquerda, bem como os afastamentos dos extremos de maior e de menor afastamento da base mais à esquerda do sólido. Este procedimento permitiu-nos determinar as duas projeções da base mais à direita do cilindro (que se reduzem, ambas, a segmentos de reta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante).

Em seguida, desenharam-se as projeções dos contornos aparentes do cilindro. A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido é um **retângulo**, cujos vértices são os pontos de maior e menor afastamento das projeções horizontais das duas bases. A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro é outro **retângulo**, cujos vértices são os pontos de maior e de menor cota das projeções frontais das duas bases.

*Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:*

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao cilindro, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **g'**, fronto-horizantal (paralela às geratrizes do cilindro), e a reta **l** (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.

Note que se optou por fazer com que o ponto **P** seja um ponto do  $\beta_{1/3}$ . Essa opção justifica-se pela economia de traçados que permite, na resolução gráfica do exercício. De alguma forma, será necessário o recurso ao plano passante luz/sombra, para a determinação de eventuais pontos de quebra das sombras das bases. Tendo em conta que o ponto **P** é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , o plano definido pela reta **g'** (uma reta fronto-horizantal) e pelo raio luminoso **l** (que é, nesse caso, um raio luminoso passante), é necessariamente o plano passante luz/sombra nesta situação, plano esse que, porque se trata da direção convencional da luz, é o próprio  $\beta_{1/3}$ .

2. Determinou-se a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas retas **g'** e **l** (o plano  $\lambda$ , que é o próprio  $\beta_{1/3}$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base mais à esquerda – a base que está contida no plano  $\pi$ ). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **g'** com o plano  $\pi$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o plano  $\pi$ ).

A determinação das projeções dos pontos **I** e **I'** foi direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre retas não projetantes e um plano duplamente projetante).

3. Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta **i** – as retas **t** e **t'**, que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base (o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas **t** e **t'** mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas **t** e **t'** em relação à base do cilindro, de forma direta em projeções, nem sequer o paralelismo das retas **t** e **t'** em relação à reta **i** – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, recorreu-se a um processo geométrico auxiliar – recorreu-se ao rebatimento do plano  $\pi'$ , que já havia sido previamente efetuado para a determinação das projeções do cilindro.

Nesse sentido, rebateram-se os pontos **I** e **I'**, o que nos permitiu determinar **I<sub>r</sub>** e **I'<sub>r</sub>**, pelos quais se conduziu a reta **i<sub>r</sub>** (a reta **i** rebatida, que está definida por dois pontos). Em seguida, conduziram-se as retas **t<sub>r</sub>** e **t'<sub>r</sub>** (as retas **t** e **t'** em rebatimento), paralelas à reta **i<sub>r</sub>** – a reta **t<sub>r</sub>** é tangente à base em rebatimento no ponto **C'<sub>r</sub>** e é paralela à reta **i<sub>r</sub>** (está definida por um ponto e uma direção) e a reta **t'<sub>r</sub>** é tangente à base em rebatimento no ponto **B'<sub>r</sub>** e é também paralela à reta **i<sub>r</sub>** (está igualmente definida por um ponto e uma direção).

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência em rebatimento) que são paralelas a uma reta dada (a reta **i<sub>r</sub>**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **C'<sub>r</sub>** e **B'<sub>r</sub>**.

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos **C'** e **B'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[CC']** e **[BB']** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[BB']** e **[CC']** – note que o ponto **B** é o extremo da geratriz **[BB']** que se situa na base mais à direita do cilindro, tal como o ponto **C** é o extremo da geratriz **[CC']** que se situa na base mais à direita do cilindro. A geratriz **[BB']** é visível em projeção frontal e invisível em projeção horizontal. A geratriz **[CC']** é invisível em projeção frontal e visível em projeção horizontal.

As geratrizes **[BB']** e **[CC']** separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência **BC** de maior afastamento. A base mais à esquerda do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência **BC** de menor afastamento está **em sombra**, assim, como a base mais à direita do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[BCB'C']**, que integra as geratrizes **[BB']** e **[CC']**, bem como a **semicircunferência BC de menor afastamento** (da base mais à esquerda) e a **semicircunferência B'C' de maior afastamento** (da base mais à direita).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está **em sombra** e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[BB']$  e a projeção frontal da geratriz de menor cota do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base mais à direita (que está em sombra) é invisível em projeção frontal (por ser projetante frontal).

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está **em sombra** e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[CC']$  e a projeção horizontal da geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base mais à direita (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal (por ser projetante horizontal).

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $B_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.  $B'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'**.  $C_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C**.  $C'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$B_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[BB']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s_1}B'_{s_1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[BB']$ .  $C_{s_2}$  e  $C'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz  $[CC']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[C_{s_2}C'_{s_2}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[CC']$ .

Tendo em conta que  $B_{s_1}$  se situa no **SPHA** e  $C_{s_2}$  se situa no **SPFS**, é possível concluir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{BC}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) admite um ponto de quebra. Tendo em conta que  $B'_{s_1}$  se situa no **SPHA** e  $C'_{s_2}$  se situa no **SPFS**, é possível concluir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{B'C'}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) admite um ponto de quebra. Como em situações semelhantes, a determinação dos pontos de quebra das sombras de circunferências (ou de arcos de circunferências) deve processar-se com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

*Determinação do ponto de quebra da sombra da base mais à esquerda do cilindro:*

Para evitar uma maior complexidade da resolução gráfica apresentada, e como atrás exposto, o plano definido pelas retas  $g'$  e  $l$  (o plano  $\lambda$ , que é o plano que tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra) é, imediatamente, o **plano luz/sombra passante**. Assim, a reta  $i$  é, também, a reta de interseção do plano luz/sombra passante com o plano  $\pi$  (o plano que contém a base mais à esquerda do cilindro).

A reta  $i_r$  é secante à circunferência – a reta  $i_r$  corta a semicircunferência  $\widehat{B'_rC'_r}$  (a semicircunferência da base mais à esquerda que integra a linha separatriz luz/sombra – a semicircunferência de menor cota) no ponto  $Q_r$ , pelo que é possível concluir que a semicircunferência  $\widehat{B'C'}$  produz sombra nos dois planos de projeção. Inverteu-se o rebatimento e determinou-se a projeção frontal do ponto  $Q$  (para não sobrecarregar a resolução com excesso de notações, não se determinou a sua projeção horizontal, pois é desnecessária). Pela projeção frontal do ponto  $Q$  conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se  $Q_s$  – a sombra do ponto  $Q$ , que se situa no eixo  $X$ . O ponto  $Q_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra da semicircunferência  $\widehat{B'C'}$  (o ponto de quebra que se situa entre  $B'_{s_1}$  e  $C'_{s_2}$ ).

O arco  $\widehat{B'Q}$  (da base mais à esquerda) produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é um **segmento de elipse**, pois o arco não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O arco  $\widehat{QC'}$  (da base mais à esquerda) produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é outro **segmento de elipse**, pois o arco também não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

*Determinação do ponto de quebra da sombra da base mais à direita do cilindro:*

Em seguida, há que determinar o ponto de quebra da sombra do arco  $\widehat{BC}$  (o ponto de quebra que se situa entre  $B_{s_1}$  e  $C_{s_2}$ ). Nesse sentido, estabeleceu-se uma correspondência entre as duas bases, para evitar um outro rebatimento (o rebatimento do plano  $\pi$ , o plano que contém a base mais à direita do cilindro). A reta  $i_r$  é secante à circunferência – a reta  $i_r$  corta a outra semicircunferência  $\widehat{B'_rC'_r}$  (a semicircunferência de maior cota) no ponto  $Q'_r$ , pelo que é possível concluir que essa outra semicircunferência  $\widehat{B'C'}$  também produziria sombra nos dois planos de projeção. Inverteu-se o rebatimento e determinou-se a projeção frontal do ponto  $Q'$  (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações, não se determinou a sua projeção horizontal, pois é desnecessária) – o ponto  $Q'$  é o extremo mais à esquerda de uma geratriz do cilindro (a geratriz  $[Q'Q'']$ ). Assim, determinou-se a projeção frontal do ponto  $Q''$ , que é o extremo mais à direita dessa geratriz (não se determinou a sua projeção horizontal, pois é desnecessária).

O ponto  $Q''$  é, assim, o ponto cuja sombra é o ponto de quebra da sombra da semicircunferência  $\widehat{BC}$  que integra a linha separatriz luz/sombra. Nesse sentido, pela projeção frontal do ponto  $Q''$  conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se  $Q''_s$  – a sombra do ponto  $Q''$ , que se situa no eixo  $X$ . O ponto  $Q''_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra da semicircunferência  $\widehat{BC}$  (a outra semicircunferência da linha separatriz luz/sombra do cilindro). Nesse sentido, o ponto  $Q''_s$  é o ponto de quebra que se situa entre  $B_{s_1}$  e  $C_{s_2}$ .

O arco  $\widehat{BQ''}$  (da base mais à direita) produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é um **segmento de elipse**, pois o arco não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O arco  $\widehat{Q''C}$  (da base mais à direita) produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é outro **segmento de elipse**, pois o arco também não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra projetada da base mais à esquerda do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $B'Q$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $B'Q$  no Plano Horizontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $B'Q$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi'$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado superior é o diâmetro de topo da circunferência. Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $B'Q$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi'$  em rebatimento.

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $B'Q$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de menor cota, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $B'Q$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O'$  ( $O'_{s_1}$ ) no Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O'_{s_1}$  é a sombra do ponto  $O'$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).

Dois dos lados do «meio quadrado» são de topo (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que as suas sombras projetadas no Plano Horizontal de Projeção são igualmente de topo. Nesse sentido, determinaram-se as sombras dos vértices de menor cota do «meio quadrado», o que nos permitiu desenhar a sombra do lado inferior da figura. Em seguida, determinou-se a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um dos vértices de maior cota do «meio quadrado». As sombras dos lados de topo do «meio quadrado» são de topo e passam pelas sombras correspondentes dos vértices que lhes pertencem. As sombras dos lados verticais estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos. Note que a sombra do lado de maior cota do «meio quadrado» passa por  $O'_{s_1}$ .

Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções horizontais. Pelas projeções horizontais destes pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, imediatamente, o ponto  $B_{s_1}$ . Aos cinco pontos determinados acresce o ponto  $Q_s$ , o que perfaz um total de **seis pontos**. Os seis pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  (o segmento  $[B'_{s_1}B_{s_1}]$  no ponto  $B'_{s_1}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $B'Q$ . Esses troços são o troço que se situa para a direita de  $B'_{s_1}$  (um deles) e o troço que se situa para cima de  $Q_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para cima de  $Q_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPHP**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base mais à esquerda do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $QC'$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $QC'$  no Plano Frontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $QC'$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado de maior afastamento é o diâmetro vertical da circunferência. Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $QC'$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $QC'$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de menor afastamento, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $QC'$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O'$  ( $O'_{v_2}$ ) no Plano Frontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O'_{v_2}$  é a sombra do ponto  $O'$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Dois dos lados do «meio quadrado» são verticais (paralelos ao Plano Frontal de Projeção), pelo que as suas sombras projetadas no Plano Frontal de Projeção são igualmente verticais. Nesse sentido, determinaram-se as sombras dos vértices de maior cota do «meio quadrado», o que nos permitiu desenhar a sombra do lado superior da figura. Em seguida, determinou-se a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um dos vértices de menor cota do «meio quadrado». As sombras dos lados verticais do «meio quadrado» são verticais e passam pelas sombras correspondentes dos vértices que lhes pertencem. As sombras dos lados de topo estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos, o que nos permitiu concluir a construção do paralelogramo.

Por fim, por  $O'_{v_2}$  conduziram-se a parte correspondente da sombra da mediana de topo (que é paralela às sombras dos lados de topo do «meio quadrado»), bem como as partes correspondentes das diagonais do quadrado. Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções frontais. Pelas projeções frontais destes pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, imediatamente, o ponto  $C'_{s_2}$ . Aos cinco pontos determinados acresce o ponto  $Q_s$ , o que perfaz um total de **seis pontos**. Os seis pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[CC']$  (o segmento  $[C'_{s_2}C_{s_2}]$  no ponto  $C'_{s_2}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{QC'}$ . Esses troços são o troço que se situa para a direita de  $C'_{s_2}$  (um deles) e o troço que se situa para baixo de  $Q_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para baixo de  $Q_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base mais à direita do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $BQ''$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{BQ''}$  no Plano Horizontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{BQ''}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado de menor afastamento é o diâmetro vertical da circunferência. Essa construção tem de ser executada em rebatimento, pois o plano  $\pi$  é um plano de perfil e, dessa forma, as projeções do que quer que esteja contido no plano não verifica o **Critério de Reversibilidade**.

Por outro lado, como anteriormente se referiu para a determinação do ponto  $Q''$  (o ponto cuja sombra é o ponto de quebra da sombra da base mais à direita), é possível efetuar todos os raciocínios e construções referentes à base mais à direita, sobre o rebatimento da base mais à esquerda (do plano  $\pi'$ ) e, em seguida, transportar os elementos assim determinados para a base mais à direita, através da direção das geratrizes (que são fronto-horizontais).

Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{BQ''}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi'$  em rebatimento (no rebatimento da base mais à esquerda).

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{BQ''}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de maior afastamento, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $\widehat{BQ''}$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O$  ( $O_{s_1}$ ) no Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O_{s_1}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).

Dois dos lados do «meio quadrado» são de topo (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que as suas sombras projetadas no Plano Horizontal de Projeção são igualmente de topo. Nesse sentido, determinaram-se as sombras dos vértices de menor cota do «meio quadrado», o que nos permitiu desenhar a sombra do lado inferior da figura. Em seguida, determinou-se a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um dos vértices de maior cota do «meio quadrado». As sombras dos lados de topo do «meio quadrado» são de topo e passam pelas sombras correspondentes dos vértices que lhes pertencem. As sombras dos lados verticais estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos. Note que a sombra do lado de menor afastamento do «meio quadrado» passa por  $O_{s_1}$ .

Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, no rebatimento do plano  $\pi'$ , determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções horizontais, sobre a projeção horizontal da base mais à esquerda. Em seguida, transportaram-se esses pontos para a projeção horizontal da base mais à direita, através da direção das geratrizes. Por fim, pelas projeções horizontais destes pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, imediatamente, o ponto  $B_{s_1}$ . Aos cinco pontos determinados acresce o ponto  $Q''_s$ , o que perfaz um total de **seis pontos**. Os seis pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  (o segmento  $[B'_{s_1}B_{s_1}]$  no ponto  $B_{s_1}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{A'Q''}$ . Esses troços são o troço que se situa para a esquerda de  $B_{s_1}$  (um deles) e o troço que se situa para cima de  $Q''_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para cima de  $Q''_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPHP**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base mais à esquerda do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $Q''C$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{Q''C}$  no Plano Frontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{Q''C}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado inferior é o diâmetro de topo da circunferência. Essa construção tem de ser executada em rebatimento, pois o plano  $\pi$  é um plano de perfil e, dessa forma, as projeções do que quer que esteja contido no plano não verifica o **Critério de Reversibilidade**.

Por outro lado, como anteriormente se referiu para a determinação do ponto  $Q''$  (o ponto cuja sombra é o ponto de quebra da sombra da base mais à direita), é possível efetuar todos os raciocínios e construções referentes à base mais à direita, sobre o rebatimento da base mais à esquerda (do plano  $\pi'$ ) e, em seguida, transportar os elementos assim determinados para a base mais à direita, através da direção das geratrizes (que são fronto-horizontais).

Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{Q''C}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi'$  em rebatimento (no rebatimento da base mais à esquerda).

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{Q''C}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de maior cota, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $\widehat{Q''C}$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O$  ( $O_{v_2}$ ) no Plano Frontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O_{v_2}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).

Dois dos lados do «meio quadrado» são verticais (paralelos ao Plano Frontal de Projeção), pelo que as suas sombras projetadas no Plano Frontal de Projeção são igualmente verticais. Nesse sentido, determinaram-se as sombras dos vértices de maior cota do «meio quadrado», o que nos permitiu desenhar a sombra do lado superior da figura. Em seguida, determinou-se a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um dos vértices de menor cota do «meio quadrado». As sombras dos lados verticais do «meio quadrado» são verticais e passam pelas sombras correspondentes dos vértices que lhes pertencem. Por outro lado, tendo em conta que a sombra do «meio quadrado» é um paralelogramo (cujos lados são paralelos dois a dois), foi possível desenhar o lado inferior do paralelogramo, que passa por  $O_{v_2}$  e é a sombra do lado inferior do «meio quadrado».

Por fim, por  $O_{v_2}$  conduziram-se a parte correspondente da sombra da mediana vertical (que é paralela às sombras dos lados verticais do «meio quadrado»), bem como as partes correspondentes das diagonais do quadrado. Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos** do **segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, no rebatimento do plano  $\pi'$ , determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções frontais, sobre a projeção frontal da base mais à esquerda. Em seguida, transportaram-se esses pontos para a projeção frontal da base mais à direita, através da direção das geratrizes. Por fim, pelas projeções frontais destes pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos** do **segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, imediatamente, o ponto  $C_{s_2}$ . Aos cinco pontos determinados acresce o ponto  $Q''_s$ , o que perfaz um total de **seis pontos**. Os seis pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[CC']$  (o segmento  $[C'_{s_2}C_{s_2}]$  no ponto  $C_{s_2}$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{Q''C}$ . Esses troços são o troço que se situa para a esquerda de  $C_{s_2}$  (um deles) e o troço que se situa para baixo de  $Q''_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para baixo de  $Q''_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho das **quatro curvas** permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção (atendendo às invisibilidades existentes), que é composta pelos quatro segmentos de elipses desenhados e pelas sombras das geratrizes  $[BB']$  e  $[CC']$  (os segmentos  $[B'_s, B_{s_1}]$  e  $[C'_s, C_{s_2}]$ ) – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cilindro nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cilindro é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cilindro).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços dos planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos que contêm as bases), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes à determinação da orientação dos planos tangentes luz/sombra, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi'$ , de todos os traçados referentes à construção dos quatro segmentos de elipse, da reta **g** ou, ainda, das retas **i**, **t** e **t'** em rebatimento.

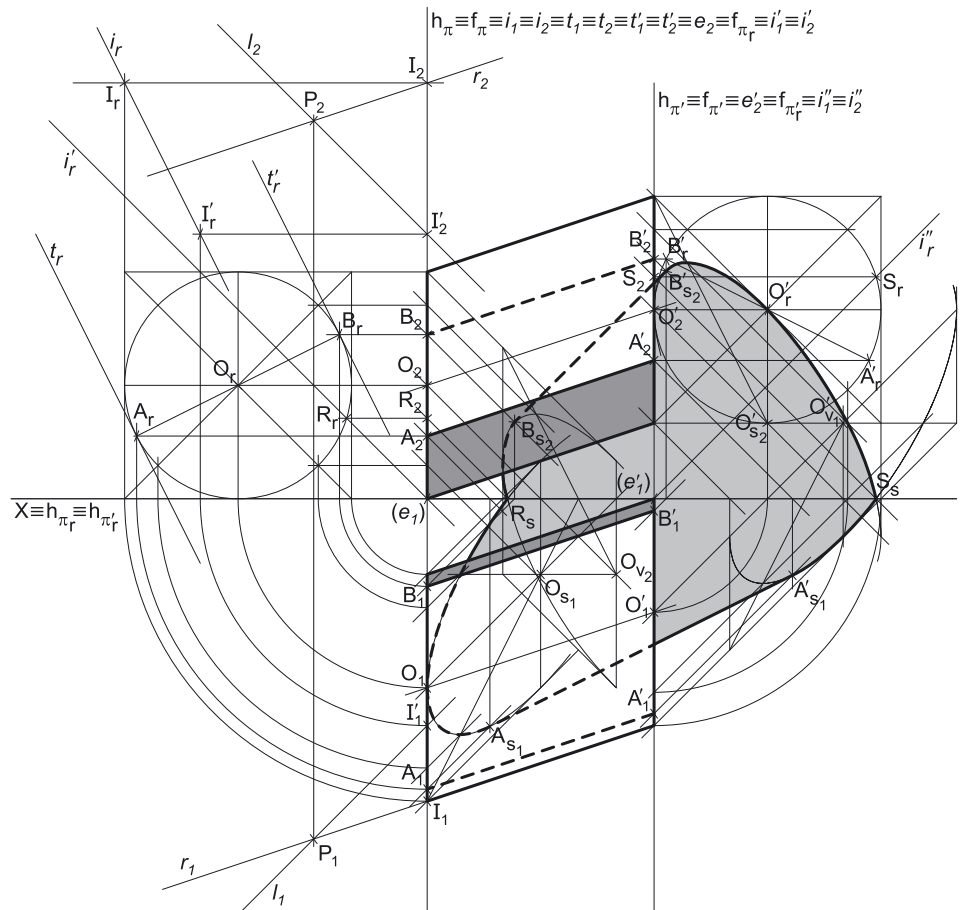
Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 961.

### Dados:

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases o que, neste caso, corresponde à diferença das abcissas dos planos das bases. Uma vez que o cilindro tem 6 cm de altura, o plano de perfil que contém a base mais à direita (o plano  $\pi'$ ) situa-se 6 cm para a direita do plano  $\pi$ , o que nos permitiu representar o plano  $\pi'$  pelos seus traços. Assim, representaram-se o plano  $\pi$  (o plano que contém a base mais à esquerda do cilindro) e o plano  $\pi'$  (o plano que contém a base mais à direita do sólido), pelos respetivos traços. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar  $O_1$ , a projeção horizontal do ponto **O** (o centro da base mais à esquerda) e  $O'_2$ , a projeção frontal do ponto **O'** (o centro da base mais à direita). O ponto **O** pertence ao plano  $\pi$  (que é um plano duplamente projetante), pelo que a sua projeção horizontal ( $O_1$ ) se situa sobre o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ). O ponto **O'** pertence ao plano  $\pi'$  (que é outro plano duplamente projetante), pelo que a sua projeção frontal ( $O'_2$ ) se situa sobre o traço frontal do plano  $\pi'$  ( $f_{\pi'}$ ).

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Resolução:

### Determinação das projeções do cilindro:

A base mais à esquerda do cilindro está contida no plano  $\pi$  e é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o ponto  $O$  (o centro da base) tem necessariamente cota igual ao raio da base – o ponto  $O$  tem 3 cm de cota. Isto permitiu-nos determinar  $O_2$ , a projeção frontal do ponto  $O$ .

O plano que contém a base mais à esquerda do cilindro (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo (a base mais à esquerda do sólido) – tendo em conta que ambas as projeções sofrem a redução máxima, as duas projeções do círculo reduzem-se a segmentos de reta sobre os traços homónimos do plano  $\pi$ .

Assim, a projeção horizontal da base é um segmento de reta com 6 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O$ ) é o ponto médio – a projeção horizontal do círculo corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal do círculo é um segmento de reta com 6 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual  $O_2$  (a projeção frontal do ponto  $O$ ) é o ponto médio – a projeção frontal do círculo corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical. Note que o extremo de menor cota da projeção horizontal desta base se situa no eixo  $X$ .

A base mais à direita do cilindro está contida no plano  $\pi'$  e é tangente ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o ponto  $O'$  (o centro da base) tem necessariamente afastamento igual ao raio da base – o ponto  $O'$  tem 3 cm de afastamento. Isto permitiu-nos determinar  $O'_1$ , a projeção horizontal do ponto  $O'$ .

O plano que contém a base mais à direita do cilindro (o plano  $\pi'$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo (a base mais à direita do sólido) – tendo em conta que ambas as projeções sofrem a redução máxima, as duas projeções do círculo reduzem-se a segmentos de reta sobre os traços homónimos do plano  $\pi'$ . Note que o extremo de menor afastamento da projeção horizontal desta base se situa no eixo  $X$ .

Assim, a projeção horizontal da base é um segmento de reta com 6 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual  $O'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $O'$ ) é o ponto médio – a projeção horizontal do círculo corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal do círculo é um segmento de reta com 6 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual  $O'_2$  (a projeção frontal do ponto  $O'$ ) é o ponto médio – a projeção frontal do círculo corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.

Em seguida, desenharam-se as projeções dos contornos aparentes do cilindro. A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido é um **paralelogramo**, cujos vértices são os pontos de maior e menor afastamento das projeções horizontais das duas bases. A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro é outro **paralelogramo**, cujos vértices são os pontos de maior e de menor cota das projeções frontais das duas bases.

### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao cilindro, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $r$ , oblíqua (paralela às geratrizes do cilindro), e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas retas  $r$  e  $l$  (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base mais à esquerda – a base que está contida no plano  $\pi$ ). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\pi$ ) e o ponto  $I'$  (o ponto de interseção da reta  $l$  com o plano  $\pi$ ).

A determinação das projeções dos pontos  $I$  e  $I'$  foi direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre retas não projetantes e um plano duplamente projetante).

3. Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ , que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base (o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas  $t$  e  $t'$  mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas  $t$  e  $t'$  em relação à base do cilindro, de forma direta em projeções, nem sequer o paralelismo das retas  $t$  e  $t'$  em relação à reta  $i$  – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, recorreu-se a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, rebateram-se os pontos  $O$ ,  $I$  e  $I'$ , o que nos permitiu determinar  $O_r$ ,  $I_r$  e  $I'_r$ . Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a base mais à esquerda em rebatimento, em verdadeira grandeza – a circunferência é tangente a  $h_{\pi_r}$ , pois a base mais à esquerda do cilindro é tangente ao Plano Horizontal de Projeção. Pelos pontos  $I_r$  e  $I'_r$  conduziu-se a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida, que está definida por dois pontos). Em seguida, conduziram-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento), paralelas à reta  $i_r$  – a reta  $t_r$  é tangente à base em rebatimento no ponto  $A_r$  e é paralela à reta  $i_r$  (está definida por um ponto e uma direção) e a reta  $t'_r$  é tangente à base em rebatimento no ponto  $B_r$  e é também paralela à reta  $i_r$  (está igualmente definida por um ponto e uma direção).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência em rebatimento) que são paralelas a uma reta dada (a reta  $i$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $A_r$  e  $B_r$ .

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  – note que o ponto  $A'$  é o extremo da geratriz  $[AA']$  que se situa na base mais à direita do cilindro, tal como o ponto  $B'$  é o extremo da geratriz  $[BB']$  que se situa na base mais à direita do cilindro. A geratriz  $[AA']$  é visível em projeção frontal e invisível em projeção horizontal. A geratriz  $[BB']$  é invisível em projeção frontal e visível em projeção horizontal.

As geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência  $\widehat{AB}$  de maior cota. A base mais à esquerda do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência  $\widehat{AB}$  de menor cota está **em sombra**, assim, como a base mais à direita do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[\widehat{ABB'A'}]$ , que integra as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ , bem como a **semicircunferência  $\widehat{AB}$  de menor afastamento** (da base mais à esquerda) e a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  de maior afastamento** (da base mais à direita).

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está **em sombra** e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[AA']$  e a projeção frontal da geratriz de menor cota do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base mais à direita (que está em sombra) é invisível em projeção frontal (por ser projetante frontal).

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está **em sombra** e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[BB']$  e a projeção horizontal da geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base mais à direita (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal (por ser projetante horizontal).

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $A_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $A$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A$ .  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $A'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A'$ .  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $B$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $B$ .  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $B'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $B'$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_1}$  e  $A'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[AA']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[AA']$ .  $B_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz  $[BB']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s_2}B'_{s_2}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[BB']$ .

Tendo em conta que  $A_{s_1}$  se situa no **SPHA** e  $B_{s_2}$  se situa no **SPFS**, é possível concluir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) admite um ponto de quebra. Tendo em conta que  $A'_{s_1}$  se situa no **SPHA** e  $B'_{s_2}$  se situa no **SPFS**, é possível concluir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) admite um ponto de quebra. Como em situações semelhantes, a determinação dos pontos de quebra das sombras de circunferências (ou de arcos de circunferências) deve processar-se com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

*Determinação do ponto de quebra da sombra da base mais à esquerda do cilindro:*

Para evitar uma maior complexidade da resolução gráfica apresentada, optou-se por simplificar este procedimento com um raciocínio simples. Dado o facto de a direção luminosa ser a **direção luminosa convencional**, o **plano luz/sombra passante** é o próprio  $\beta_{1/3}$ . Assim, com vista a uma maior economia de traçados que possibilite uma melhor leitura da resolução proposta, não se desenharam as projeções do raio luminoso que nos permitiria determinar a reta  $i'$  (a reta de interseção do plano  $\pi$  com o **plano luz/sombra passante** – o  $\beta_{1/3}$ ), tendo-se determinado, imediatamente, as suas projeções. A reta  $i'$  (a reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ ) é uma **reta de perfil passante** do plano  $\pi$ , que faz, com os traços do plano  $\pi$ , ângulos de  $45^\circ$ .

Note que, caso a direção luminosa não fosse a direção convencional, a determinação da reta  $i'$  passaria, **necessariamente** pela determinação do ponto de interseção do plano  $\pi$  com um raio luz/sombra passante com a direção luminosa dada (à semelhança de outras situações anteriores).

Tendo em conta que tanto o círculo (a base mais à esquerda do cilindro) como a reta  $i'$  estão contidos num plano de perfil, as projeções das duas figuras não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível averiguar a posição da reta  $i'$  em relação ao círculo. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  já efetuado. Assim, desenhou-se a reta  $i'_r$  (a reta  $i'$  no rebatimento efetuado) – a reta  $i'_r$  está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é um ponto fixo, pois situa-se na charneira) e por uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com os dois traços do plano  $\pi$ , em rebatimento).

Sublinha-se que, das duas hipóteses de medir o ângulo de  $45^\circ$  a partir do ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\pi$ , apenas a que a resolução apresenta se refere à reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ . Note que a reta  $i'$  tem de atravessar os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  *Diedros* e que o ponto  $O$  é um ponto do  $1^\circ$  *Diedro*. Assim, a reta  $i'_r$  (a reta  $i'$  em rebatimento) tem de passar pelo quadrante do plano em que se situa  $O_r$  – na outra hipótese de medir o ângulo de  $45^\circ$  a reta não passaria pelo quadrante onde se situa  $O_r$  (e, por isso mesmo, seria a reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{2/4}$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $i'_r$  é secante à circunferência – a reta  $i'_r$  corta a semicircunferência  $\widehat{A_r B_r}$  (a semicircunferência da base mais à esquerda que integra a linha separatriz luz/sombra – a semicircunferência de menor cota) no ponto  $R_r$ , pelo que é possível concluir que a semicircunferência  $\widehat{AB}$  produz sombra nos dois planos de projeção. Inverteu-se o rebatimento e determinou-se a projeção frontal do ponto  $R$  (para não sobrecarregar a resolução com excesso de notações, não se determinou a sua projeção horizontal, pois é desnecessária). Pela projeção frontal do ponto  $R$  conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se  $R_s$  – a sombra do ponto  $R$ , que se situa no eixo  $X$ . O ponto  $R_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  (o ponto de quebra que se situa entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$ ).

O arco  $\widehat{AR}$  (da base mais à esquerda) produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é um **segmento de elipse**, pois o arco não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O arco  $\widehat{RB}$  (da base mais à esquerda) produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é outro **segmento de elipse**, pois o arco também não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

*Determinação da sombra projetada da base mais à esquerda do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{AR}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{AR}$  no Plano Horizontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{AR}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado superior é o diâmetro de topo da circunferência. Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{AR}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{AR}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de menor cota, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $\widehat{AR}$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O$  ( $O_{s_1}$ ) no Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O_{s_1}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).

Note que o lado inferior do «meio quadrado» está contido no Plano Horizontal de Projeção (no traço horizontal do plano  $\pi$ ), pelo que a sua sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção está coincidente com o próprio lado. As sombras dos lados verticais estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos. A sombra do lado de maior cota do «meio quadrado» é paralela a  $h_\pi$  e passa por  $O_{s_1}$ .

Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções horizontais. Pelas projeções horizontais destes pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Aos cinco pontos determinados acrescem o ponto  $A_{s_1}$ , bem como o ponto  $R_s$ , o que perfaz um total de **sete pontos**. Os sete pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  (o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$ ) no ponto  $A_{s_1}$ .

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{AR}$ . Esses troços são o troço que se situa para a direita de  $A_{s_1}$  (um deles) e o troço que se situa para cima de  $R_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para cima de  $R_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPHP**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base mais à esquerda do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{RB}$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{RB}$  no Plano Frontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{RB}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado de maior afastamento é o diâmetro vertical da circunferência. Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{RB}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{RB}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de menor afastamento, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $\widehat{RB}$  na sua totalidade.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O$  ( $O_{v_2}$ ) no Plano Frontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O_{v_2}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).

Dois dos lados do «meio quadrado» são verticais (paralelos ao Plano Frontal de Projeção), pelo que as suas sombras projetadas no Plano Frontal de Projeção são igualmente verticais. Nesse sentido, determinaram-se as sombras dos vértices de maior cota do «meio quadrado», o que nos permitiu desenhar a sombra do lado superior da figura. Em seguida, determinou-se a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um dos vértices de menor cota do «meio quadrado». As sombras dos lados verticais do «meio quadrado» são verticais e passam pelas sombras correspondentes dos vértices que lhes pertencem. As sombras dos lados de topo estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos, o que nos permitiu concluir a construção do paralelogramo.

Por fim, por  $O_{v_2}$  conduziram-se a parte correspondente da sombra da mediana de topo (que é paralela às sombras dos lados de topo do «meio quadrado»), bem como as partes correspondentes das diagonais do quadrado. Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções frontais. Pelas projeções frontais destes pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Aos cinco pontos determinados acrescem o ponto  $B_{s_2}$ , bem como o ponto  $R_s$ , o que perfaz um total de **sete pontos**. Os sete pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  (o segmento  $[B_2B'_2]$  no ponto  $B_{s_2}$ ).

Note que, na realidade, existem dois troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $RB$ . Esses troços são o troço que se situa para a direita de  $B_{s_2}$  (um deles) e o troço que se situa para baixo de  $R_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para baixo de  $R_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

#### *Determinação do ponto de quebra da sombra da base mais à direita do cilindro:*

Ao contrário das duas situações anteriores, em que as geratrizes do cilindro eram fronto-horizontais, nesta situação isso não se verifica. A grande implicação que esse facto tem para a determinação dos pontos de quebra das sombras das bases é que a relação das duas bases com o **plano luz/sombra passante** não é a mesma. De facto, nas situações anteriores, a relação das duas bases com o **plano luz/sombra passante** era rigorosamente **a mesma** – atendendo a que as duas bases têm o mesmo raio e os seus centros tinham a mesma cota e o mesmo afastamento. Por isso mesmo, era possível determinar o ponto de quebra da sombra de uma das bases a partir do rebatimento da outra base, transportando, em seguida, esse ponto para a base respetiva, com o recurso à geratriz fronto-horizontal que continha o ponto.

Isso não é possível nesta situação – apesar das bases terem o mesmo raio, os seus centros têm cotas e afastamentos diferentes, pelo que a relação das duas bases com o **plano luz/sombra passante** é diferente. Nesse sentido, não é possível determinar o ponto de quebra da sombra da base mais à direita do cilindro a partir do rebatimento da sua base mais à esquerda. Nesse sentido, é necessário determinar a reta de interseção do plano  $\pi'$  (o plano que contém a base mais à direita do cilindro) com o **plano luz/sombra passante** e, em seguida, determinar o ponto em que essa reta corta a semicircunferência da base que integra a linha separatriz luz/sombra.

Para evitar uma maior complexidade da resolução gráfica apresentada, optou-se por simplificar este procedimento, tal como efetuado para a base mais à esquerda. Dado o facto de a direção luminosa ser a **direção luminosa convencional**, o **plano luz/sombra passante** é o próprio  $\beta_{1/3}$ . Assim, mais uma vez, não se desenharam as projeções do raio luminoso que nos permitiria determinar a reta  $i''$  (a reta de interseção do plano  $\pi'$  com o **plano luz/sombra passante** – o  $\beta_{1/3}$ ), tendo-se determinado, imediatamente, as suas projeções. A reta  $i''$  (a reta de interseção do plano  $\pi'$  com o  $\beta_{1/3}$ ) é uma **reta de perfil passante** do plano  $\pi'$ , que faz, com os traços do plano  $\pi'$ , ângulos de  $45^\circ$ .

Note que, caso a direção luminosa não fosse a direção convencional, a determinação da reta  $i''$  passaria, **necessariamente** pela determinação do ponto de interseção do plano  $\pi'$  com um raio luz/sombra passante com a direção luminosa dada (à semelhança de outras situações anteriores).

Tendo em conta que tanto o círculo (a base mais à esquerda do cilindro) como a reta  $i''$  estão contidos num plano de perfil, as projeções das duas figuras não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível averiguar a posição da reta  $i''$  em relação ao círculo. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi'$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que foi o traço frontal do plano ( $f_{\pi'}$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_{\pi'} \equiv e'_2 \equiv f_{\pi'}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, rebateu-se o ponto  $O'$ , determinando-se  $O'_r$ . Com o compasso, fazendo centro em  $O'_r$  e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a base mais à direita em rebatimento, em verdadeira grandeza – a circunferência é tangente a  $f_{\pi'}$ , pois a base mais à direita do cilindro é tangente ao Plano Frontal de Projeção. Em seguida, transportaram-se, para a circunferência em rebatimento, os pontos  $A'$  e  $B'$  (os extremos da semicircunferência desta base que integra a linha separatriz luz/sombra), o que nos permitiu determinar  $A'_r$  e  $B'_r$ . A semicircunferência  $\overline{A'_rB'_r}$  de maior cota é, em rebatimento, a semicircunferência desta base que integra a linha separatriz luz/sombra.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por fim, desenhou-se a reta  $i''_r$  (a reta  $i'''$  no rebatimento efetuado) – a reta  $i''_r$  está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é um ponto fixo, pois situa-se na charneira) e por uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com os dois traços do plano  $\pi'$ , em rebatimento).

Sublinha-se que, das duas hipóteses de medir o ângulo de  $45^\circ$  a partir do ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\pi'$ , apenas a que a resolução apresenta se refere à reta de interseção do plano  $\pi'$  com o  $\beta_{1/3}$ . Note que a reta  $i'''$  tem de atravessar os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros e que o ponto  $O'$  é um ponto do  $1^\circ$  Diedro. Assim, a reta  $i''_r$  (a reta  $i'''$  em rebatimento) tem de passar pelo quadrante do plano em que se situa  $O'_r$  – na outra hipótese de medir o ângulo de  $45^\circ$  a reta não passaria pelo quadrante onde se situa  $O'_r$  (e, por isso mesmo, seria a reta de interseção do plano  $\pi'$  com o  $\beta_{2/4}$ ).

A reta  $i''_r$  é secante à circunferência – a reta  $i''_r$  corta a semicircunferência  $\widehat{A'_r B'_r}$  (a semicircunferência da base mais à esquerda que integra a linha separatriz luz/sombra – a semicircunferência de menor cota) no ponto  $S_r$ , pelo que é possível concluir que a semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  produz sombra nos dois planos de projeção. Inverteu-se o rebatimento e determinou-se a projeção frontal do ponto  $S$  (para não sobrecarregar a resolução com excesso de notações, não se determinou a sua projeção horizontal, pois é desnecessária). Pela projeção frontal do ponto  $S$  conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se  $S_s$  – a sombra do ponto  $S$ , que se situa no eixo  $X$ . O ponto  $S_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra da semicircunferência  $\widehat{A'_r B'_r}$  (o ponto de quebra que se situa entre  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$ ).

O arco  $\widehat{A'S}$  (da base mais à esquerda) produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no SPHA) – essa sombra é um **segmento de elipse**, pois o arco não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O arco  $\widehat{B'S}$  (da base mais à esquerda) produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no SPFS) – essa sombra é outro **segmento de elipse**, pois o arco também não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

*Determinação da sombra projetada da base mais à direita do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{A'S}$  no Plano Horizontal de Projeção (no SPHA)** é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{A'S}$  no Plano Horizontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{A'S}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi'$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado de menor afastamento é o diâmetro vertical da circunferência. Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{A'S}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi\alpha$  em rebatimento.

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{A'S}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de maior afastamento, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $\widehat{A'S}$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O'$  ( $O'_{v_1}$ ) no Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O'_{v_1}$  é a sombra do ponto  $O'$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no SPHP (é uma sombra virtual).

Dois dos lados do «meio quadrado» são de topo (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que as suas sombras projetadas no Plano Horizontal de Projeção são igualmente de topo. Nesse sentido, determinaram-se as sombras dos vértices de maior cota do «meio quadrado», o que nos permitiu desenhar a sombra do lado superior da figura. Em seguida, determinou-se a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um dos vértices de menor cota do «meio quadrado». As sombras dos lados de topo do «meio quadrado» são e topo e passam pelas sombras correspondentes dos vértices que lhes pertencem. As sombras dos lados verticais estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos, o que nos permitiu concluir a construção do paralelogramo.

Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções horizontais. Pelas projeções horizontais destes pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Aos cinco pontos determinados acrescem o ponto  $A'_{s_1}$ , bem como o ponto  $S_s$ , o que perfaz um total de **sete pontos**. Os sete pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  (o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  no ponto  $A'_{s_1}$ ).

Note que, na realidade, existem dois troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{A'S}$ . Esses troços são o troço que se situa para a esquerda de  $A'_{s_1}$  (um deles) e o troço que se situa para cima de  $S_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para cima de  $S_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no SPHP. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra projetada da base mais à direita do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $B'S$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{B'S}$  no Plano Frontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{B'S}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi'$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado inferior é o diâmetro de topo da circunferência. Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $B'S$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $B'S$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de maior cota, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $B'S$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O' (O'_{s_2})$  no Plano Frontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O'_{s_2}$  é a sombra do ponto  $O'$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFS** (é uma sombra real).

Note que o lado de menor afastamento do «meio quadrado» está contido no Plano Frontal de Projeção (no traço frontal do plano  $\pi'$ ), pelo que a sua sombra projetada no Plano Frontal de Projeção está coincidente com o próprio lado. As sombras dos lados de topo estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos. Em seguida, determinou-se a sombra de um dos vértices de maior afastamento do «meio quadrado» – a sombra do lado de maior afastamento do «meio quadrado» é paralela a  $f_{\pi'}$  e passa pela sombra desse ponto.

Por fim, por  $O'_{s_2}$  conduziram-se a parte correspondente da sombra da mediana vertical (que é paralela às sombras dos lados verticais do «meio quadrado»), bem como as partes correspondentes das diagonais do quadrado. Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções frontais. Pelas projeções frontais destes pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Aos cinco pontos determinados acrescem o ponto  $B'_{s_2}$ , bem como o ponto  $S_s$ , o que perfaz um total de **sete pontos**. Os sete pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  (o segmento  $[B_{s_2}B'_{s_2}]$  no ponto  $B'_{s_2}$ ).

Note que, na realidade, existem dois troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{B'S}$ . Esses troços são o troço que se situa para a esquerda de  $B'_{s_2}$  (um deles) e o troço que se situa para baixo de  $S_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para baixo de  $S_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho das **quatro curvas** permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção (atendendo às invisibilidades existentes), que é composta pelos quatro segmentos de elipses desenhados e pelas sombras das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  (os segmentos  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  e  $[B_{s_2}B'_{s_2}]$ ) – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cilindro nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cilindro é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cilindro).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços dos planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos que contêm as bases), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes à determinação da orientação dos planos tangentes luz/sombra, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi'$ , de todos os traçados referentes à construção dos quatro segmentos de elipse ou, ainda, das retas  $i$ ,  $t$  e  $t'$  em rebatimento.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 962.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ) passa por **A**<sub>1</sub> e **C**<sub>1</sub> (as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do retângulo [ABCD]:

O plano que contém o retângulo [ABCD] (o plano  $\varphi$ ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o retângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não apresenta deformação). Por outro lado, em função dos dados, a construção da figura tem de se processar através da sua inscrição numa circunferência. Nesse sentido, determinou-se o ponto médio do segmento de reta [A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>], que é o ponto O<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**, que é o centro da circunferência circunscrita ao retângulo), o que se efetuou com o recurso à mediatriz do segmento de reta [A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>].

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em O<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) e com raio até A<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **A**) ou C<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **C**), desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao retângulo. Os dados permitiram-nos, agora, determinar a projeção frontal do ponto **B** (B<sub>2</sub>) – B<sub>2</sub> é, assim, o ponto da circunferência que tem 3,5 cm de cota e se situa à direita de A<sub>2</sub>. Por fim, concluiu-se a construção da projeção frontal do retângulo, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do ponto **D** (D<sub>2</sub>) – as projeções horizontais dos dois pontos (**B** e **D**) situam-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$ , pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção horizontal do retângulo reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

#### Determinação da sombra do retângulo [ABCD] nos planos de projeção:

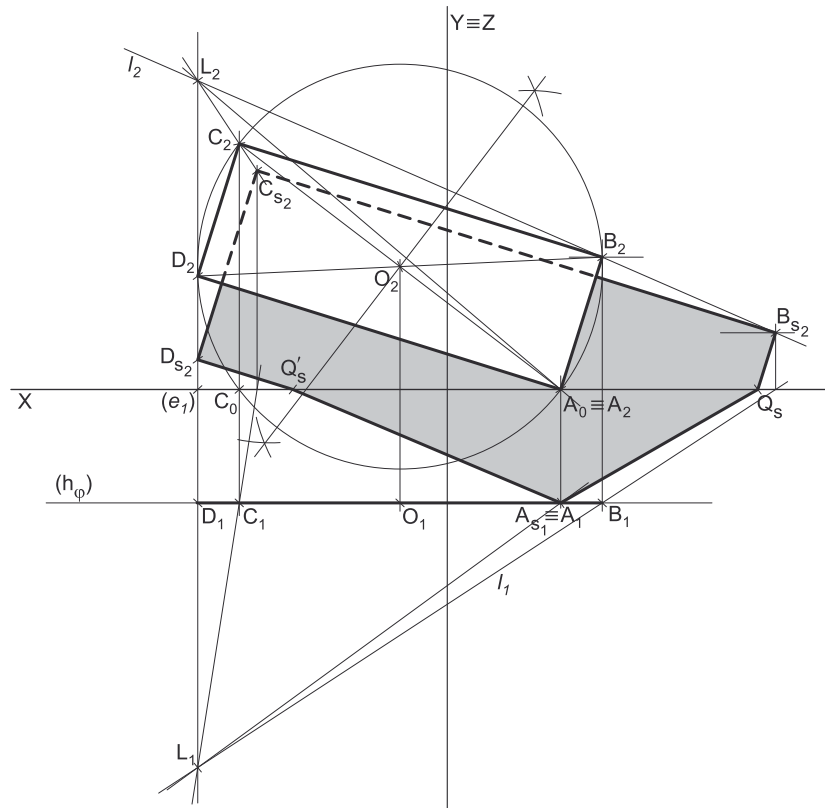
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **L** (o oco luminoso), pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto **L** situa-se no mesmo plano de perfil do ponto **D**, pelo que as projeções dos dois pontos se situam na mesma linha de chamada. Os dados do enunciado (o afastamento do ponto **L** permitiu-nos determinar a sua projeção horizontal (L<sub>1</sub>), de forma imediata, mas não a sua projeção frontal.

Por outro lado, é-nos dada a cota da sombra real do ponto **B**, que se situa no SPFS, ou seja, é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**. Assim, pela projeção horizontal do ponto **B** (B<sub>1</sub>), conduziu-se a projeção horizontal do raio luminoso ( $l_1$ ), que passa por B<sub>1</sub> e por L<sub>1</sub>, o que nos permitiu determinar B<sub>s2</sub> (a sombra real do ponto **B**, que é o traço frontal do raio luminoso  $l$ ). Por B<sub>s2</sub> conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso  $l$  (que passa por B<sub>s2</sub> e por B<sub>2</sub>) e determinou-se a projeção frontal do foco luminoso **L** (L<sub>2</sub>), na linha de chamada de L<sub>1</sub>.

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos restantes três vértices do retângulo – os pontos **A**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por dois pontos – o respetivo vértice do quadrado e o ponto **L** (o foco luminoso).

O ponto **A** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, A<sub>s1</sub> ≡ A<sub>1</sub> (situa-se no SPFA). C<sub>s2</sub> é a sombra real do ponto **C** (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**.

Por fim, há a referir que o raio luminoso que passa pelo ponto **D** é uma **reta de perfil**, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Assim, não é possível, de forma imediata, determinar a sombra do ponto **D** nos planos de projeção nem saber, sequer, se a sombra se situa no SPFA ou no SPFS. De facto, para se determinar o ponto de interseção deste raio luminoso com os planos de projeção é necessário, à partida, o recurso a um **processo geométrico auxiliar** (nomeadamente o recurso ao **rebatimento do plano de perfil** ou a uma **mudança do diedro de projeção**). No entanto, optou-se por uma outra situação, bastante mais simples, como em seguida se expõe.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Há que ter em conta que o lado  $[CD]$  do retângulo é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $C_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $C$ , que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[C_2D_2]$  (a projeção frontal do segmento  $[CD]$ ) até à linha de chamada dos pontos  $D$  e  $L$  – o ponto em que essa reta interseca a linha de chamada do ponto  $D$  (e do ponto  $L$ ) é  $D_{s_2}$ , que é a sombra do ponto  $D$  no Plano Frontal de Projeção. Uma vez que  $D_{s_2}$  tem cota positiva, conclui-se que  $D_{s_2}$  se situa no **SPFS**, pelo que  $D_{s_2}$  é a **sombra real** do ponto  $D$ .

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do quadrado é limitada pelas sombras projetadas dos lados do quadrado nos planos de projeção e os lados do quadrado são segmentos de reta. A sombra projetada do lado  $[CD]$  é o segmento  $[C_2D_2]$ , já determinado – este segmento situa-se na totalidade no **SPFS**, pelo que a sombra do lado  $[CD]$  não admite a existência de pontos de quebra.

$B_{s_2}$  e  $C_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado  $[BC]$  do retângulo também não admite a existência de pontos de quebra – o segmento de reta  $[C_{s_2}B_{s_2}]$  é a sombra projetada do lado  $[BC]$  do retângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados  $[AB]$  e  $[AD]$  do retângulo – de facto, existe necessariamente um **ponto de quebra** entre  $A_{s_1}$  e  $D_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos), tal como existe um outro **ponto de quebra** entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que também se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  teve-se em conta que o lado  $[AB]$  do retângulo é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $B_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $B$ , que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_2B_2]$  (a projeção frontal do segmento  $[AB]$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[AB]$ ). O segmento  $[Q_sB_{s_2}]$  é a **parte real** da sombra do lado  $[AB]$  no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[A_{s_1}Q_s]$  é a **parte real** da sombra do lado  $[AB]$  no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}]$  é a **sombra real** do lado  $[AB]$  nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $D_{s_2}$  teve-se em conta que o lado  $[AD]$  do retângulo é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $D_{s_2}$  (a sombra real do ponto  $D$ , que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a  $[A_2D_2]$  (a projeção frontal do segmento  $[AD]$ ) até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento  $[AD]$ ). O segmento  $[D_{s_2}Q'_s]$  é a **parte real** da sombra do lado  $[AD]$  no Plano Frontal de Projeção e o segmento  $[Q'_sA_{s_1}]$  é a **parte real** da sombra do lado  $[AD]$  no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta  $[D_{s_2}Q'_sA_{s_1}]$  é a **sombra real** do lado  $[AD]$  nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}C_{s_2}D_{s_2}Q'_s]$  é a **sombra real** do retângulo  $[ABCD]$  nos planos de projeção. O segmento  $[Q'_sQ_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do quadrado.

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}C_{s_2}D_{s_2}Q'_s]$  e o retângulo  $[A_2B_2C_2D_2]$  – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do retângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do retângulo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo retângulo) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o retângulo  $[ABCD]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou da construção da projeção frontal do retângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado retângulo  $[ABCD]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o retângulo  $[ABCD]$ , neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 963.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano  $\rho$ .

O ponto **A** é um ponto com cota nula, pelo que já temos um ponto para definir  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com cota nula, pelo que já temos a direção para definir  $h_p$  –  $h_p$  está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**). O ponto **C** é um ponto com afastamento nulo, pelo que já temos um ponto para definir  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com afastamento nulo, pelo que já temos a direção para definir  $f_p$  –  $f_p$  está definido por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

Note que é dado o **ângulo** que o lado **[AB]** do retângulo faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano), mas esse ângulo não é um ângulo em projeções – é um ângulo **no espaço**, que está contido no plano  $\rho$ . Por isso mesmo, esse ângulo **não pode ser representado em projeções**.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do retângulo **[ABCD]**:

O plano que contém o retângulo **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o retângulo **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do retângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

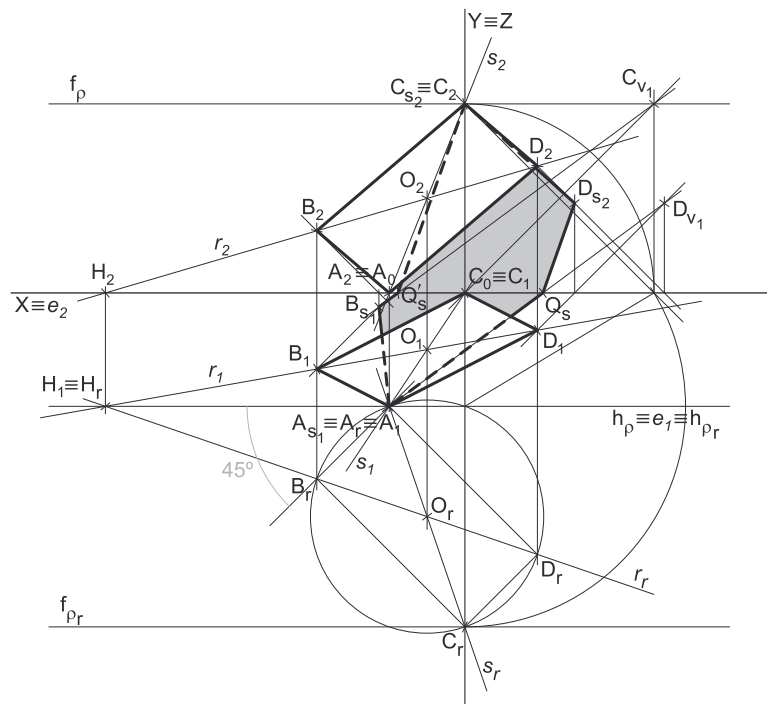
Por outro lado, também o **ângulo** que o lado **[AB]** do retângulo faz com o traço horizontal do plano ( $h_p$ ) **não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções**, pois esse ângulo está contido no plano  $\rho$  e, uma vez que o plano  $\rho$  não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, à semelhança do próprio retângulo, também esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (ambas as projeções do ângulo estão deformadas). Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível a construção do retângulo (e do ângulo dado) em verdadeira grandeza.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $h_p \equiv e_1 \equiv h_{pr}$  ( $e_2$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a  $h_p$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_p$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos uma direção para definir  $f_{pr}$  (o traço frontal do plano em rebatimento), que é a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir  $f_{pr}$ . Nesse sentido, há que rebater o ponto **C**, que é um ponto de  $f_p$ . O rebatimento do ponto **C** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziu-se, por  $C_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **C**). Com o compasso, fazendo centro em  $C_1$  e com raio até  $C_2$ , transportou-se a cota do ponto **C** para o eixo **X**, o que nos permitiu desenhar o triângulo do rebatimento do ponto **C** em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **C** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por  $C_1$ , onde se situa  $C_r$  (o ponto **C** rebatido). Já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{pr}$ . Nesse sentido desenhou-se  $f_{pr}$ , passando por  $C_r$  e paralelo ao eixo **X** –  $f_{pr}$  está definido por um ponto (o ponto  $C_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_r \equiv A_1$ . A partir dos pontos  $A_r$  e  $C_r$ , construiu-se o retângulo **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), para o que foi necessário a sua inscrição numa circunferência. Nesse sentido, determinou-se o centro da circunferência em rebatimento (o ponto  $O_r$ ), com o recurso à mediatriz do segmento de reta  $[A_r C_r]$ . Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$  ou  $C_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao retângulo, em rebatimento, e efetuaram-se os traçados necessários à construção do retângulo.

Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado **[AB]** faz com  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ) – é o ângulo que o segmento  $[A_r B_r]$  faz com  $h_{pr}$ . Assim, por  $A_r$  conduziu-se uma reta fazendo, com  $h_{pr}$ , um ângulo de  $45^\circ$ , de abertura para a esquerda – essa reta é a reta suporte do lado **[AB]**, em rebatimento. O ponto  $B_r$  (o ponto **B** rebatido) é o ponto em que aquela reta intersesta a circunferência na qual se inscreve o retângulo. Finalmente, foi possível concluir a construção do retângulo e determinar o quarto vértice do polígono, em rebatimento –  $D_r$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para determinar as projeções do retângulo, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$ , determinando-se as projeções dos pontos **B** e **D**. A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **D** e a determinação das respetivas projeções processou-se com o recurso a uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , à qual os dois pontos pertencem – a reta  $r$ , que é a reta suporte da diagonal [**BD**] do retângulo. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $D_r$ ). Para definir a reta  $r$  em projeções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta  $r$ , que é um ponto de  $h_p$  (o traço horizontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto  $H_r$  situa-se sobre  $h_{p_r}$  – é o ponto de concorrência da reta  $r_r$  com  $h_{p_r}$ . O ponto **H** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $H_1 \equiv H_r$ . Já temos um ponto para definir a reta  $r$  em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta  $r$  passa necessariamente pelo ponto **O** (o centro do retângulo). Assim, optou-se por se determinarem as projeções do ponto **O**, para o que foi necessário recorrer a uma reta do plano  $\rho$ , à qual o ponto **O** pertença – a reta  $s$ , que é a reta suporte da diagonal [**AC**] do retângulo. Nesse sentido, desenhou-se a reta  $s_r$  (a reta  $s$  em rebatimento), que está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $C_r$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $s$ , o que se processou de forma imediata, pois já são conhecidas as projeções dos dois pontos que a definem (os pontos **A** e **C**). Em seguida, conduziu-se, por  $O_r$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto **O**, sobre as projeções homónimas da reta  $s$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – a reta  $r$  está definida por dois pontos (o ponto **H** e o ponto **O**), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta  $r$ .

Em seguida, por  $B_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto **B**, sobre as projeções homónimas da reta  $r$  (a reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **B** pertence). De forma semelhante, por  $D_r$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto **D**, sobre as projeções homónimas da reta  $r$  (a reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **D** pertence).

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do retângulo [**ABCD**].

*Determinação da sombra do retângulo [**ABCD**] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do retângulo – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **A** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s_1} \equiv A_1$  (situa-se no **SPHA**). O ponto **C** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $C_{s_2} \equiv C_2$  (situa-se no **SPFS**).  $B_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.  $D_{s_2}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D**.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do retângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado [**AB**] do retângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $A_{s_1}B_{s_1}$ ] é a sombra projetada do lado [**AB**] do retângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).  $C_{s_2}$  e  $D_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [**CD**] do retângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [ $C_{s_2}D_{s_2}$ ] é a sombra projetada do lado [**CD**] do retângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados [**AD**] e [**BC**] do retângulo – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_1}$  e  $D_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $B_{s_1}$  e  $C_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar um dos pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **D** –  $D_{v_1}$ .  $D_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **D** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **D**. O segmento [ $A_{s_1}D_{v_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [**AD**] no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento [ $A_{s_1}D_{v_1}$ ] (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta [ $A_{s_1}Q_sD_{s_2}$ ] é a **sombra real** do segmento [**AD**] (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

Para determinar o outro ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **C** –  $C_{v_1}$ .  $C_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **C** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C**. O segmento [ $B_{s_1}C_{v_1}$ ] é a sombra projetada do segmento [**BC**] no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento [ $B_{s_1}C_{v_1}$ ] (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta [ $B_{s_1}Q'_sC_{s_2}$ ] é a **sombra real** do segmento [**BC**] (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

A linha quebrada fechada [ $A_{s_1}B_{s_1}Q'_sC_{s_2}D_{s_2}Q_s$ ] é a **sombra real** do retângulo [**ABCD**] nos planos de projeção. O segmento [ $Q'_sQ_s$ ] é a **linha de quebra** da sombra do retângulo. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono [ $A_{s_1}B_{s_1}Q'_sC_{s_2}D_{s_2}Q_s$ ] e os polígonos [ $A_2B_2C_2D_2$ ] (a projeção frontal do retângulo) e [ $A_1B_1C_1D_1$ ] (a projeção horizontal do retângulo) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do retângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em ambas as projeções, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do retângulo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo retângulo) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do retângulo [**ABCD**]:*

O retângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações articulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **seqüência dos vértices da projeção frontal** do retângulo, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>2</sub>, B<sub>2</sub>, C<sub>2</sub> e D<sub>2</sub>**. A **seqüência dos vértices da sombra projetada** do retângulo, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s1</sub>, B<sub>s1</sub>, C<sub>s2</sub> e D<sub>s2</sub>**. As duas seqüências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do retângulo que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **seqüência dos vértices da projeção horizontal** do retângulo, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> e D<sub>1</sub>**. A **seqüência dos vértices da sombra projetada** do retângulo, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s1</sub>, B<sub>s1</sub>, C<sub>s2</sub> e D<sub>s2</sub>**. As duas seqüências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do retângulo que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o retângulo **[ABCD]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\rho$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  e necessários à construção das projeções do retângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o retângulo **[ABCD]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o retângulo **[ABCD]**, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 964.

### Dados:

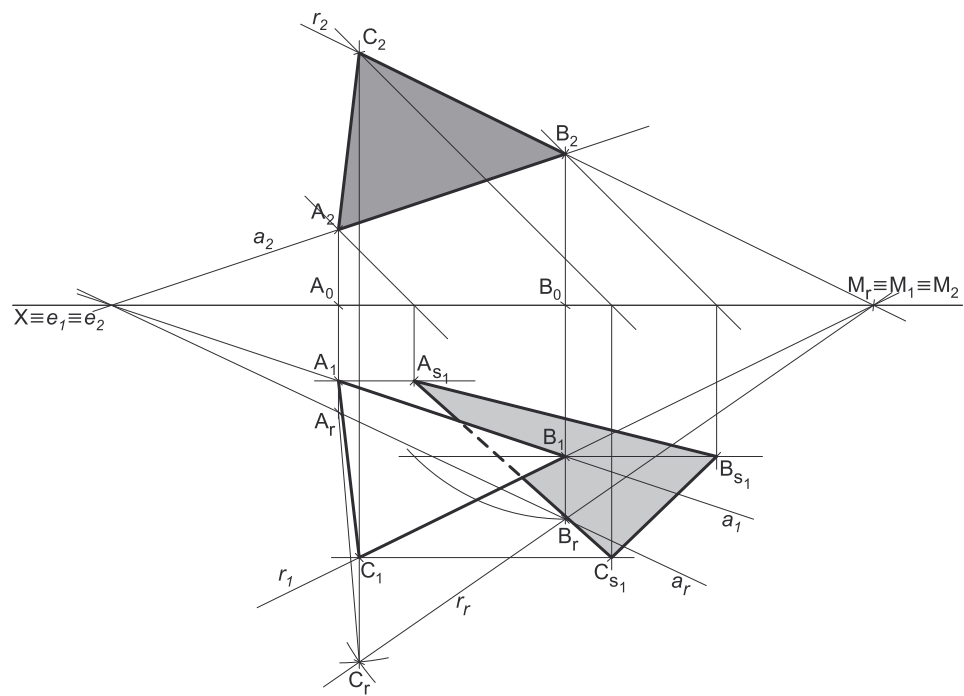
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dois pontos têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X**, pois são pontos do  $\beta_{1/3}$  (pontos do  $\beta_{1/3}$  têm coordenadas iguais e projeções simétricas em relação ao eixo **X**).

O plano  $\beta_{1/3}$  está definido por uma reta (o eixo **X**) e pela orientação – o  $\beta_{1/3}$  faz diedros de  $45^\circ$  com os planos de projeção e atravessa os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros. À partida, não há qualquer necessidade de identificar os traços do  $\beta_{1/3}$  (que se situam no eixo **X**).

### Resolução:

#### Determinação das projeções do triângulo **[ABC]**:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o  $\beta_{1/3}$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (o triângulo apresenta deformação em ambas as projeções), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



Optou-se por rebater o  $\beta_{1/3}$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começou-se por identificar a charneira do rebatimento, que é o eixo **X** (onde se situam os dois traços do  $\beta_{1/3}$ , que não foram identificados,) pelo que se tem imediatamente **X ≡ e<sub>1</sub> ≡ e<sub>2</sub>**. Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (planos ortogonais ao eixo **X**).

Efetou-se o rebatimento do ponto **B**. O rebatimento do ponto **B** processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziram-se, por **B<sub>1</sub>**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **B**) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira, e a partir de **B<sub>1</sub>**, mediu-se a cota do ponto **B**, o que nos permitiu construir o triângulo do rebatimento do ponto **B**, em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento (no eixo **X**) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **B** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por **B<sub>1</sub>**, onde se situa **B<sub>r</sub>** (o ponto **B** rebatido).

Para rebater o ponto **A** poder-se-ia, igualmente, ter recorrido ao seu triângulo do rebatimento, mas, como atrás se referiu, optou-se por se recorrer a uma reta do  $\beta_{1/3}$ , à qual o ponto **A** pertença – a reta **a**. A reta **a** é a reta suporte do lado **[AB]** e está definida por dois pontos (os pontos **A** e **B**), pelo que se desenharam imediatamente as suas projeções. A reta **a** é necessariamente uma reta passante, que é concorrente com o eixo **X** num ponto (o ponto **P**, cujas projeções se identificaram).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para rebater o ponto **A**, é necessário rebater a reta **a** (uma reta do  $\beta_{1/3}$  à qual o ponto **A** pertence) – para definir a reta **a<sub>r</sub>** (a reta **a** rebatida) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **P** é um ponto da charneira (o eixo **X**), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $P_r \equiv P_1 \equiv P_2$ . Já temos um ponto para definir a reta **a<sub>r</sub>** – falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, a reta **a** passa pelo ponto **B**, que já foi rebatido, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **a<sub>r</sub>** – o ponto **B<sub>r</sub>**. Nesse sentido, desenhou-se a reta **a<sub>r</sub>** (a reta **a** rebatida), que está definida por dois pontos – o ponto **P<sub>r</sub>** e o ponto **B<sub>r</sub>**.

Em seguida, por **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido), sobre a reta **a<sub>r</sub>** (a reta **a** rebatida).

A partir dos pontos **A<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**, efetuou-se a construção do triângulo, o que nos permitiu determinar o terceiro vértice da figura (em rebatimento) – o ponto **C<sub>r</sub>**. Note que se garantiu, na construção do triângulo, que a figura se situa, na totalidade, no espaço do *1<sup>a</sup> Diedro*.

Para se desenharem as projeções do triângulo, é necessário inverter o rebatimento do  $\beta_{1/3}$  e determinar as projeções do vértice **C** do triângulo. A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a uma reta do  $\beta_{1/3}$ , à qual o ponto **C** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta **r**, que é a reta suporte do lado **[BC]** do triângulo. A reta **r<sub>r</sub>** (a reta **r** rebatida) está definida por dois pontos – o ponto **B<sub>r</sub>** e o ponto **C<sub>r</sub>**. Em seguida, há que determinar as projeções da reta **r**, para o que são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **r** é uma reta passante (concorrente com o eixo **X**), pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (o ponto **M**) é um ponto da charneira, que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $M_r \equiv M_1 \equiv M_2$ . Já temos um ponto para definir a reta **r** em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta **r** (em projeções).

Por outro lado, a reta **r** passa pelo ponto **B**, cujas projeções já são conhecidas, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **r** (em projeções) – o ponto **B**. Assim, a reta **r** está definida por dois pontos (o ponto **M** e o ponto **B**), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta **r**.

Em seguida, por **C<sub>r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **r<sub>r</sub>** (a projeção horizontal da reta **r**) é **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** (**C<sub>2</sub>**) situa-se sobre **r<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **r**).

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

*Determinação da sombra do triângulo [ABC] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).

**A<sub>s<sub>1</sub></sub>** é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**. **B<sub>s<sub>1</sub></sub>** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**. **C<sub>s<sub>1</sub></sub>** é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.

As sombras reais dos três vértices da figura situam-se todas no mesmo plano de projeção (o **SPHA**), pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **não admite a existência de pontos de quebra**. Assim, desenhou-se o triângulo **[A<sub>s<sub>1</sub></sub>**B<sub>s<sub>1</sub>C<sub>s<sub>1</sub>], que é a **sombra real** do triângulo nos planos de projeção e se situa, na sua totalidade, no **SPHA**.</sub></sub>

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o triângulo **[A<sub>s<sub>1</sub></sub>**B<sub>s<sub>1</sub>C<sub>s<sub>1</sub>] e o triângulo **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]** (a projeção horizontal do triângulo) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do triângulo estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em projeção horizontal, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.</sub></sub>

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado triângulo com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo triângulo) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do triângulo [ABC]:*

O triângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do triângulo, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>2</sub>**, **C<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>**. A **sequência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s<sub>2</sub></sub>**, **B<sub>s<sub>2</sub></sub>** e **C<sub>s<sub>2</sub></sub>**. As duas sequências apresentam os vértices por ordens diferentes, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção frontal está **em sombra** (em **sombra própria**).

Nesse sentido, preencheu-se a **sombra própria** do triângulo (a projeção frontal da figura) com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do triângulo, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>**, **B<sub>1</sub>** e **C<sub>1</sub>**. A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s<sub>1</sub></sub>**, **B<sub>s<sub>1</sub></sub>** e **C<sub>s<sub>1</sub></sub>**. As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Traçado:

O eixo  $X$  representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício (e é onde se situam traços do  $\beta_{1/3}$ ). O pedido representou-se a **forte** – o triângulo  $[ABC]$  e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do  $\beta_{1/3}$  e necessários à construção das projeções do triângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo  $[ABC]$  ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o triângulo  $[ABC]$ , nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 965.

### Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto  $A$ , pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção horizontal do ponto  $C$  ( $C_1$ ), bem como desenhar a projeção horizontal da reta  $d$  ( $d_1$ ). A reta  $d$  é a reta de maior declive do plano  $\alpha$  que contém o segmento de reta  $[AC]$ .

Note que os dados do enunciado não nos permitem determinar a projeção frontal da reta  $d$  ( $d_2$ ), porque não nos é dada a cota do ponto  $C$  nem qualquer outra informação sobre a reta  $d$ . Assim, ainda só temos um ponto para definir a reta  $d$  e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $X$ , em ambas as projeções.

### Resolução:

*Determinação das projeções do segmento de reta  $[AC]$  e da reta  $d$ :*

O segmento de reta  $[AC]$  está contido numa reta que não é paralela a qualquer dos planos de projeção (a reta  $d$ ), pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Nesse sentido, optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano projetante horizontal do segmento (e da reta  $d$ ) – o plano  $\gamma$ . Assim, antes de mais representou-se o plano  $\gamma$  pelos seus traços. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\gamma$  para o Plano Frontal de Projeção, pelo que se identificou a charneira do rebatimento, que foi  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano  $\gamma$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_\gamma \equiv e_2 \equiv f_{\gamma r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo do rebatimento.

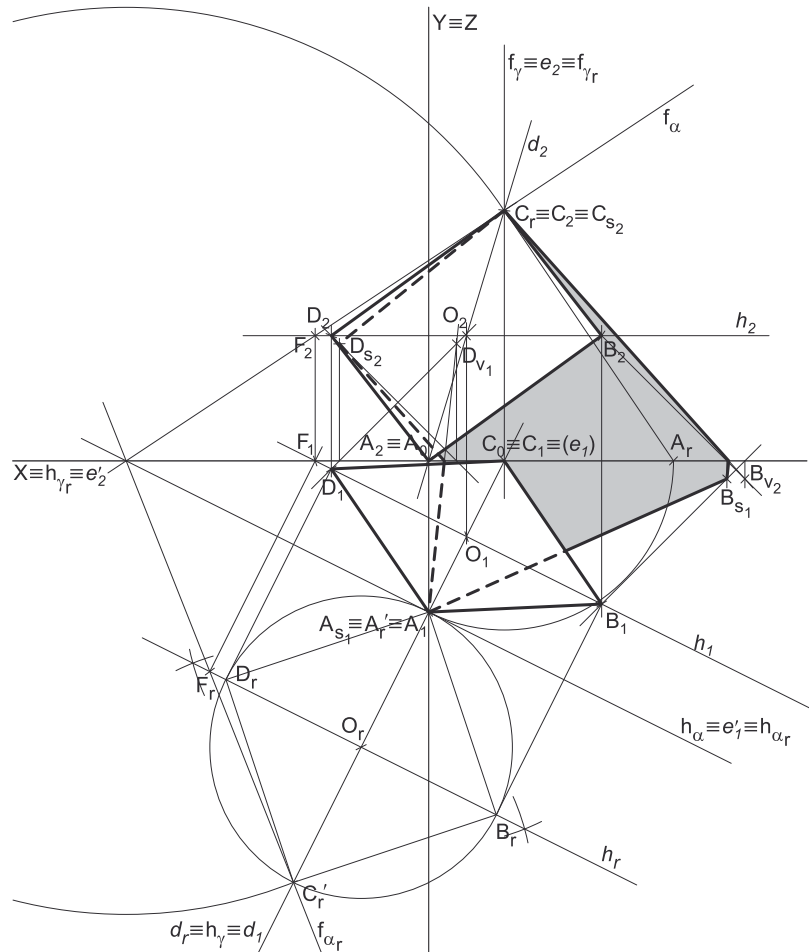
Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto  $A$ , o que nos permitiu determinar  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido). Em rebatimento, tudo o que está contido no plano  $\gamma$  está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir o segmento de reta  $[AC]$  em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $A_r$  e com 8 cm de raio (i comprimento do segmento), determinou-se  $C_r$  (o ponto  $C$  rebatido), sobre  $f_{\gamma r}$  (o traço frontal do plano  $\gamma$ , em rebatimento). Sublinha-se que o ponto  $C$  tem afastamento nulo, pelo que o ponto  $C$  é necessariamente um ponto de  $f_\gamma$  (o traço frontal do plano  $\gamma$ ).

O ponto  $C$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $C_2 \equiv C_r$ . Assim, foi possível desenhar a projeção frontal do segmento de reta  $[AC]$  e, também, da reta  $d$  ( $d_2$ ). A reta  $d$  está, agora, definida por dois pontos – o ponto  $A$  e o ponto  $C$ .

Salienta-se que, em vez de se ter recorrido ao rebatimento do plano projetante horizontal do segmento de reta  $[AC]$  (como processo geométrico auxiliar), se poderia ter recorrido, por exemplo, a uma mudança do diedro de projeção.

*Determinação dos traços do plano  $\alpha$ :*

A reta  $d$  é uma reta de maior declive do plano  $\alpha$ , sendo esse dado que nos permite determinar os traços do plano  $\alpha$ . Por outro lado, já temos os traços da reta  $d$  nos planos de projeção – o ponto  $A$  é o traço horizontal da reta  $d$  (é o ponto da reta  $d$  que tem cota nula) e o ponto  $C$  é o traço frontal da reta  $d$  (é o ponto da reta  $d$  que tem afastamento nulo).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O traço horizontal do plano  $\alpha$  é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $h_{\alpha}$  – o ponto **A**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $d$ , sendo uma reta de maior declive do plano  $\alpha$ , é uma reta do plano  $\alpha$  que faz o ângulo máximo com o Plano Horizontal de Projeção, é perpendicular ao traço horizontal do plano (e a todas as retas horizontais do plano), sendo que a sua projeção horizontal é perpendicular ao traço horizontal do plano (a perpendicularidade é direta em projeção horizontal). Assim, já temos a direção que nos faltava – a direção perpendicular a  $d_1$  (a projeção horizontal da reta  $d$ ). Dessa forma, o traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h_{\alpha}$ ) está definido por um ponto (o ponto **A**, o traço horizontal da reta  $d$ ) e por uma direção (é perpendicular à projeção horizontal da reta  $d - d_1$ ).

O traço horizontal do plano  $\alpha$  é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha}$  – o ponto **C**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os traços de um plano são duas retas concorrentes num ponto do eixo **X**, pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir  $f_{\alpha}$ . O traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha}$ ) está definido por dois pontos – o ponto **C** (o traço horizontal da reta  $d$ ) e o ponto de concorrência dos traços do plano.

#### Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano  $\alpha$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado [ABCD] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o traço horizontal do plano – tem-se, imediatamente,  $h_{\alpha} \equiv e'_1 \equiv h_{\alpha'}$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a  $h_{\alpha}$ ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_{\alpha}$ ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir  $f_{\alpha'}$  – o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que é um ponto fixo (pois pertence à charneira). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto **C**, que é um ponto de  $f_{\alpha}$  e, simultaneamente, é um vértice do quadrado. Para rebater o ponto **C** conduziu-se, por  $C_1$ , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **C**). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**), desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por  $C_1$ , determinando-se  $C_r'$  (o ponto **C** rebatido pelo rebatimento do plano  $\alpha$ ). Em seguida, desenhou-se  $f_{\alpha'}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$  rebatido), passando por  $C_r'$  e concorrente com  $h_{\alpha'}$  no eixo **X** (está definido por dois pontos). Note que  $C_r'$  é o ponto **C** no seu segundo rebatimento – o ponto **C** rebatido pelo rebatimento do plano  $\alpha$ .

O ponto **A** é um ponto da charneira do rebatimento (que é  $h_{\alpha}$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r' \equiv A_1$ . Note que  $A_r'$  é o ponto **A** no seu segundo rebatimento – o ponto **A** rebatido pelo rebatimento do plano  $\alpha$ .

A partir dos pontos  $A_r'$  e  $C_r'$ , construiu-se o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento), para o que foi necessário a sua inscrição numa circunferência. Nesse sentido, determinou-se o centro da circunferência em rebatimento (o ponto  $O_r'$ ), com o recurso à mediatriz do segmento de reta  $[A_r'C_r']$ . Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_r'$  e com raio até  $A_r'$  ou  $C_r'$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado, em rebatimento, e efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento ( $B_r'$  e  $D_r'$ ). Estes dois vértices foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

Para inverter o rebatimento do plano  $\alpha$  e determinar as projeções dos pontos **B** e **D**, é necessário o recurso a retas do plano  $\alpha$  às quais aqueles dois pontos pertençam. Assim, recorreu-se à reta  $h$ , como reta auxiliar do plano – a reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$  e é a reta suporte da diagonal [BD] do quadrado. De facto, uma vez que as diagonais do quadrado são perpendiculares entre si e a diagonal [AC] está contida numa reta de maior declive do plano (que é perpendicular a todas as retas horizontais do plano), a diagonal [BD] tem necessariamente de estar contida numa reta horizontal (de nível) do plano.

A reta  $h_r$  (a reta  $h$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $B_r'$  e  $D_r'$ ) e, ainda, por uma direção (é paralela a  $h_{\alpha'}$ ). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta  $h$ . O ponto **F** é o traço frontal da reta  $h$  e é um ponto de  $f_{\alpha}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$ ), pelo que  $F_r$  (o ponto **F** rebatido) se situa sobre  $f_{\alpha'}$  –  $F_r$  é, assim, o ponto de concorrência da reta  $h_r$  com  $f_{\alpha'}$ . Para definirmos a reta  $h$  (em projeções) são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, por  $F_r$  (o ponto **F** rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar  $F_1$  (a projeção horizontal do ponto **F**) no eixo **X** –  $F_2$  (a projeção frontal do ponto **F**) situa-se necessariamente sobre  $f_{\alpha}$ , pois o ponto **F** é um ponto de  $f_{\alpha}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $h$  em projeções – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $h$  é uma reta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , pelo que também já temos a direção – a direção das retas horizontais (de nível) do plano  $\alpha$ . Assim, a reta  $h$ , em projeções, está definida por um ponto (o ponto **F**, o que traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano  $\alpha$  – é paralela a  $h_{\alpha}$ ), o que nos permitiu desenhar as suas projeções.

Por fim, por  $B_r'$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) é  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**). A projeção frontal do ponto **B** ( $B_2$ ) situa-se sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ). De forma semelhante, por  $D_r'$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com  $h_1$  (a projeção horizontal da reta  $h$ ) é  $D_1$  (a projeção horizontal do ponto **D**). A projeção frontal do ponto **D** ( $D_2$ ) situa-se sobre  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ).

A partir das projeções dos quatro pontos (os pontos **A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado [ABCD].

#### Determinação da sombra do quadrado [ABCD] nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**,  $C$  e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **C** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $C_{s_2} \equiv C_2$  (situa-se no SPFS). O ponto **A** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s_1} \equiv A_1$  (situa-se no SPHA).  $B_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.  $D_{s_2}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[AB]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_1}B_{s_1}]$  é a sombra projetada do lado **[AB]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).  $C_{s_2}$  e  $D_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[CD]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s_2}D_{s_2}]$  é a sombra projetada do lado **[CD]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AD]** e **[BC]** do quadrado – de facto, existe necessariamente um **ponto de quebra** entre  $A_{s_1}$  e  $D_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos), bem como um outro **ponto de quebra** entre  $B_{s_1}$  e  $C_{s_2}$  (que também se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $D_{s_2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **D** –  $D_{v_1}$ .  $D_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **D** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **D**. O segmento  $[A_{s_1}D_{v_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[AD]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s_1}D_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s_1}Q_sD_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento **[AD]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s_1}$  e  $C_{s_2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **B** –  $B_{v_2}$ .  $B_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto **B** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**. O segmento  $[B_{v_2}C_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento **[BC]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[B_{v_2}C_{s_2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[B_{s_1}Q'_sC_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento **[BC]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s_1}B_{s_1}Q'_sC_{s_2}D_{s_2}Q_s]$  é a **sombra real** do quadrado **[ABCD]** nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sQ'_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do quadrado. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s_1}B_{s_1}Q'_sC_{s_2}D_{s_2}Q_s]$  e os polígonos  $[A_2B_2C_2D_2]$  (a projeção frontal do quadrado) e  $[A_1B_1C_1D_1]$  (a projeção horizontal do quadrado) – essas sobreposições correspondem ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em ambas as projeções, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo quadrado) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

*Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado [ABCD]:*

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações articulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é:  $A_2, D_2, C_2$  e  $B_2$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é:  $A_{s_1}, D_{s_2}, C_{s_2}$  e  $B_{s_1}$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é:  $A_1, D_1, C_1$  e  $B_1$ . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é:  $A_{s_1}, D_{s_2}, C_{s_2}$  e  $B_{s_1}$ . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y**  $\equiv$  **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o quadrado **[ABCD]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\alpha$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado **[ABCD]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado **[ABCD]**, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 966.

**Dados:**

Em primeiro lugar, desenhou-se o traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{\rho}$ ), em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, pertencente ao plano e em função dos dados – o ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que é um ponto do traço frontal do plano  $\rho$  ( $f_{\rho}$ ).

Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção frontal do ponto **C** (em função da sua abcissa e da sua cota), mas não a sua projeção horizontal. Assim, não nos é dada qualquer informação sobre o traço horizontal do plano  $\rho$ , pelo que não é possível desenhar  $h_{\rho}$  – sabe-se, apenas, que o ponto **C** é um ponto do traço horizontal do plano, pois **C** tem cota nula.

Note que é dado o **comprimento** da diagonal **[AC]** do quadrado, mas esse comprimento é o **comprimento real** (no espaço) e não um comprimento em projeções.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^{\circ}$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:*

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\rho$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano  $\rho$  para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Note que não seria possível rebater o plano  $\rho$  para o Plano Horizontal de Projeção, pois ainda não é conhecido o seu traço horizontal ( $h_{\rho}$ ) que, nesse caso, seria a charneira do rebatimento. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $f_{\rho} \equiv e_2 \equiv f_{\rho_r}$  ( $e_1$ , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a  $h_{\rho}$ ).

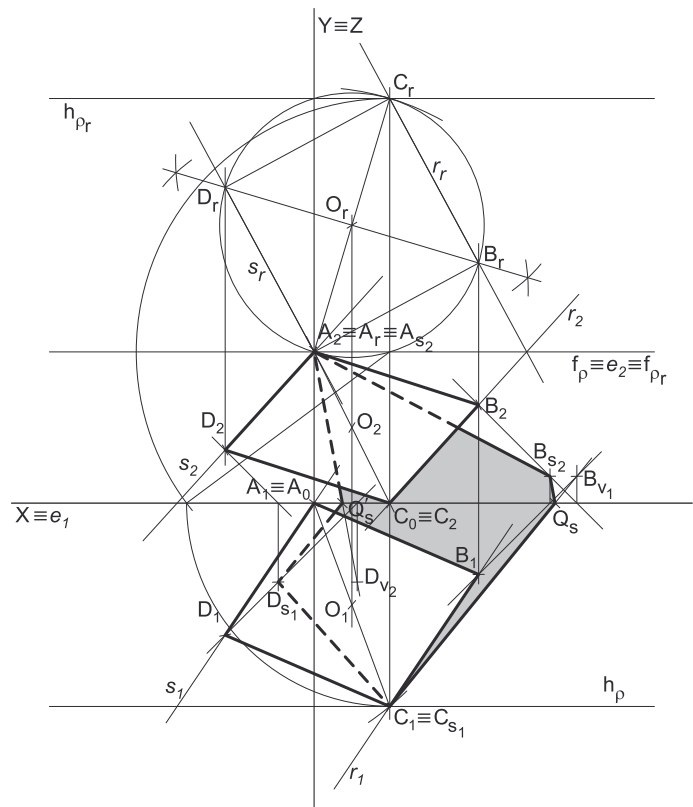
O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente  $A_1 \equiv A_2$ . Em seguida, por  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**) conduziu-se uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento. Em rebatimento, tudo o que está contido no plano está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o comprimento do segmento de reta **[AC]**. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) e com 7 cm de raio (o comprimento da diagonal **[AC]**), determinou-se  $C_r$  (o ponto **C** rebatido) sobre a perpendicular à charneira que passa por  $C_2$ .

Uma vez que o ponto **C** tem cota nula, o ponto **C** é, necessariamente, um ponto do traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{\rho}$ ). Assim, desenhou-se o traço horizontal do plano  $\rho$  em rebatimento ( $h_{\rho_r}$ ), passando por  $C_r$  e paralelo ao eixo  $X - h_{\rho_r}$  está definido por um ponto (o ponto  $C_r$ ) e por uma direção (é fronto-horizontal).

A partir dos pontos  $A_r$  e  $C_r$ , construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), para o que foi necessário a sua inscrição numa circunferência. Nesse sentido, determinou-se o centro da circunferência em rebatimento (o ponto  $O_r$ ), com o recurso à mediatriz do segmento de reta **[A<sub>r</sub>C<sub>r</sub>]**. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com raio até  $A_r$  ou  $C_r$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado, em rebatimento, e efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento (**B<sub>r</sub>** e **D<sub>r</sub>**). Estes dois vértices foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano  $\rho$ , determinando-se as projeções dos pontos **B**, **C** e **D**. Tendo em conta que o ponto **C** é um ponto do traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{\rho}$ ), que ainda não foi desenhado, é necessário inverter o rebatimento do plano  $\rho$  começando pelo ponto **C**. Note que já se havia desenhado a perpendicular à charneira que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **C**.

Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira (que é o centro do arco do rebatimento do ponto **C**) e com raio até  $C_r$ , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **C** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil), até ao eixo **X**, onde se situa o terceiro vértice do triângulo do rebatimento do ponto **C** – este procedimento permitiu-nos desenhar o triângulo do rebatimento do ponto **C**, em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **C**). Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $C_2$  e com raio até ao terceiro vértice do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano de perfil, determinando-se  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**) sobre a perpendicular à charneira que passa por  $C_2$ . Este procedimento permitiu-nos, finalmente, desenhar o traço horizontal do plano  $\rho$  ( $h_{\rho}$ ), que está definido por um ponto (o ponto **C**) e por uma direção (é fronto-horizontal). Tenha ainda em conta que se garantiu que o ponto **C** tem afastamento positivo, para se situe no espaço do 1.<sup>o</sup> Diedro, como o enunciado refere expressamente).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento do ponto **B** e a determinação das suas projeções processou-se com o recurso a uma reta oblíqua do plano  $\rho$ , à qual o ponto **B** pertence – a reta  $r$ , que é a reta suporte do lado **[BC]** do quadrado. A reta  $r_r$  (a reta  $r$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $B_r$  e  $C_r$ ). Para definir a reta  $r$  em projeções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **C** é, de forma direta, o traço horizontal da reta  $r$ , pelo que já temos um ponto para definir a reta  $r$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, determinou-se o ponto **F**, o traço frontal da reta  $r$ , que é um ponto de  $f_p$  (o traço frontal do plano  $\rho$ ). Assim, o ponto  $F_r$  situa-se sobre  $f_{p_r}$  – é o ponto de concorrência da reta  $r_r$  com  $f_{p_r}$ . O ponto **F** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $F_2 \equiv F_r$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $r$  em projeções – a reta  $r$ , em projeções, está definida por dois pontos (o ponto **C** e o ponto **F**), o que nos permitiu desenhar as suas projeções.

Em seguida, por  $B_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto **B**, sobre as projeções homónimas da reta  $r$  (a reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **D** pertence).

A inversão do rebatimento do ponto **D** e a determinação das suas projeções processou-se com o recurso a uma outra reta oblíqua do plano  $\rho$ , à qual o ponto **D** pertence – a reta  $s$ , que é a reta suporte do lado **[AD]** do quadrado. A reta  $s_r$  (a reta  $s$  rebatida) está definida por dois pontos (os pontos  $A_r$  e  $D_r$ ). Para definir a reta  $s$  em projeções, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $s$  é necessariamente paralela à reta  $r$  (que é a reta suporte do lado **[BC]** do quadrado), pelo que já temos uma direção para definir a reta  $s$  em projeções. Falta-nos um ponto para definir a reta  $s$  (em projeções). O ponto **A** é, de forma imediata, o traço frontal da reta  $s$ , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $s$  (em projeções) – a reta  $s$ , em projeções, está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é paralela à reta  $r$ ), o que nos permitiu desenhar as suas projeções.

Em seguida, por  $D_r$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as projeções do ponto **D**, sobre as projeções homónimas da reta  $s$  (a reta do plano  $\rho$  à qual o ponto **D** pertence).

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

*Determinação da sombra do quadrado **[ABCD]** nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

O ponto **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s_2} \equiv A_2$  (situa-se no **SPFS**). O ponto **C** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $C_{s_1} \equiv C_1$  (situa-se no **SPHA**).  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do retângulo **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_2}$  e  $B_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[AB]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_2}B_{s_2}]$  é a sombra projetada do lado **[AB]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**).  $C_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado **[CD]** do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C_{s_1}D_{s_1}]$  é a sombra projetada do lado **[CD]** do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**).

O mesmo já não acontece em relação aos lados **[AD]** e **[BC]** do quadrado – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_2}$  e  $D_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $B_{s_2}$  e  $C_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar um dos pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **B** –  $B_{v_1}$ .  $B_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **B** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**. O segmento  $[C_{s_1}B_{v_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[BC]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[C_{s_1}B_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[C_{s_1}Q_sB_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento **[BC]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

Para determinar o outro ponto de quebra teve-se em conta que os lados **[AD]** e **[BC]** são paralelos e, tratando-se de uma direção luminosa, as sombras projetadas daqueles dois lados num mesmo plano de projeção são necessariamente paralelas. Assim, por  $A_{s_2}$  (a sombra real do ponto **A**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma paralela ao segmento de reta  $[B_{s_2}Q_s]$  (a sombra do segmento de reta **[BC]** no **SPFS**) – o ponto de interseção dessa paralela com o eixo **X** é  $Q'_s$ , o ponto de quebra da sombra do segmento de reta **[AD]**. A linha quebrada aberta  $[A_{s_2}Q'_sD_{s_1}]$  é a **sombra real** do segmento **[AD]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[A_{s_2}B_{s_2}Q_sC_{s_1}D_{s_1}Q'_s]$  é a **sombra real** do quadrado **[ABCD]** nos planos de projeção. O segmento  $[Q'_sQ_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do quadrado. Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono  $[A_{s_2}B_{s_2}Q_sC_{s_1}D_{s_1}Q'_s]$  e os polígonos  $[A_2B_2C_2D_2]$  (a projeção frontal do quadrado) e  $[A_1B_1C_1D_1]$  (a projeção horizontal do retângulo) – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), em ambas as projeções, pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo quadrado) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado [ABCD]:**

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações articulares). Assim, é conveniente averiguar se, em qualquer das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **seqüência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>2</sub>, B<sub>2</sub>, C<sub>2</sub> e D<sub>2</sub>**. A **seqüência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s2</sub>, B<sub>s2</sub>, C<sub>s1</sub> e D<sub>s1</sub>**. As duas seqüências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Repetiu-se o processo exposto, para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra. Nesse sentido, considerou-se igualmente o movimento rotativo no sentido dos ponteiros do relógio. A **seqüência dos vértices da projeção horizontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: **A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> e D<sub>1</sub>**. A **seqüência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: **A<sub>s2</sub>, B<sub>s2</sub>, C<sub>s1</sub> e D<sub>s1</sub>**. As duas seqüências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção horizontal está **iluminada**.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o quadrado [ABCD] e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\rho$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\rho$  e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado [ABCD] ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o quadrado [ABCD], nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 967.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\nu$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço frontal. O plano  $\nu$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_\nu$ ) passa por **A<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**). O plano  $\nu$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar  $r_1$ , a projeção horizontal da reta suporte da aresta lateral [AV] (a reta  $r$ ) –  $r_1$  passa por **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**) e faz, com o eixo **X**, o ângulo dado. Por fim, os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção horizontal do ponto **V** (**V<sub>1</sub>**), em função do seu afastamento – **V<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **V**) é o ponto de  $r_1$  (a projeção horizontal da reta  $r$ , que é a reta que contém o segmento de reta [AV]) que tem 2 cm de afastamento.

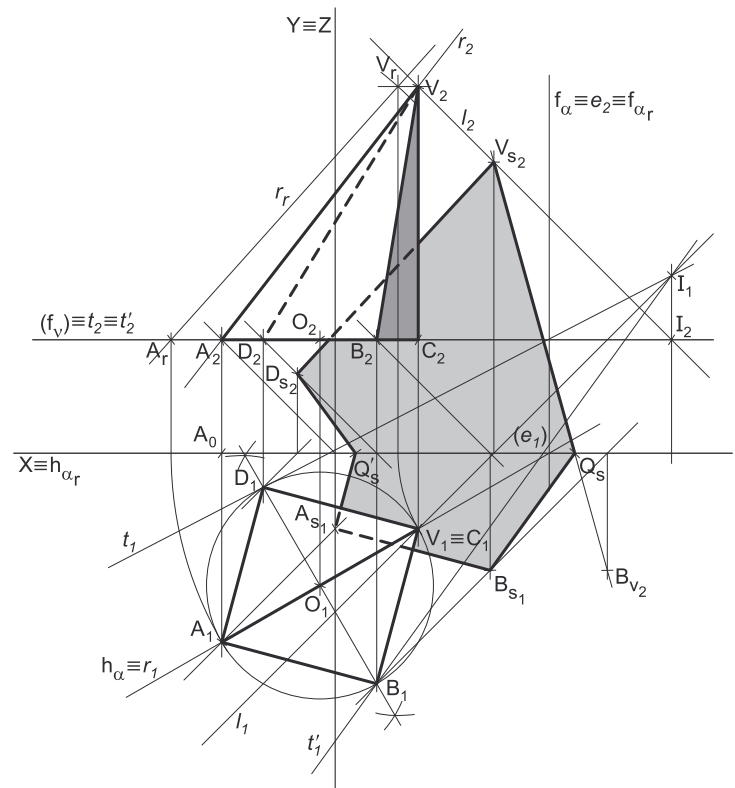
A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

**Determinação das projeções da pirâmide:**

Tendo em conta que é referido, no enunciado, que o ponto **V** e o ponto **C** se situam na mesma projetante horizontal, sabe-se imediatamente que os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem imediatamente **C<sub>1</sub> ≡ V<sub>1</sub>**.

É dado que o segmento de reta [AV] (a aresta lateral [AV] da pirâmide) mede 11 cm. No entanto, o segmento de reta [AV] não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (pois está contido numa reta que não é paralela a qualquer dos planos de projeção – a reta  $r$ ), pelo que o segmento [AV] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal do segmento de reta [AV] (e da reta  $r$ ) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano projetante horizontal da aresta (o plano  $\alpha$ ) pelos seus traços.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (que foi o traço frontal do plano, pelo que se tem imediatamente  $f_{\alpha} \equiv e_2 \equiv f_{\alpha'}$ ) e identificaram-se, também, os planos ortogonais à charneira do rebatimento que contêm os arcos do rebatimento, que são planos horizontais (de nível). Assim, os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo dos seus rebatimentos. Em seguida, rebateu-se o ponto **A** e determinou-se **A<sub>r</sub>** (o ponto **A** rebatido). Por outro lado, rebateu-se, também, **V<sub>1</sub>**, o que nos permitiu desenhar a linha de chamada de **V<sub>r</sub>**, perpendicular ao eixo **X**.

Por fim, com o compasso, fazendo centro em **A<sub>r</sub>** e com 11 cm de raio (o comprimento do segmento de reta **[AV]**), determinou-se **V<sub>r</sub>**, sobre a respetiva linha de chamada (perpendicular ao eixo **X**), o que nos permitiu, em seguida, desenhar **r<sub>r</sub>** (a reta **r** rebatida). Por fim, atendendo a que os pontos mantêm as suas cotas no rebatimento efetuado, transportou-se a cota do ponto **V** para a respetiva linha de chamada, o que nos permitiu determinar **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **V**) e, ainda, desenhar **r<sub>2</sub>** (a projeção frontal da reta **r**). Note que a reta **r** está definida por dois pontos (os pontos **A** e **V**), tanto em projeções como em rebatimento).

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado **[ABCD]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, a partir de **A<sub>1</sub>** e **C<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), construiu-se a projeção horizontal do quadrado, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do centro da circunferência circunscrita ao quadrado) – **O<sub>1</sub>** é o ponto médio do segmento de reta **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]**, e determinou-se com o recurso à mediatriz daquele segmento.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até **A<sub>1</sub>** ou **C<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao quadrado e efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do polígono, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado – **B<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>**. Note que estes vértices foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito. As projeções frontais dos pontos **O**, **B**, **C** e **D** estão sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Em seguida, a partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABVD]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>V<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser um dos vértices de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base (que estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis, em projeção horizontal), e a aresta lateral **[CV]** (que é projetante horizontal e, por isso mesmo, a sua projeção horizontal se reduz a um ponto). Já a aresta lateral **[AV]** é visível, em projeção horizontal, pois separa duas faces da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[ABCV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice **D**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AD]** e **[CD]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis em projeção frontal), e a aresta lateral **[DV]**. A aresta lateral **[BV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (o vértice **B** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas rasantes à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são rasantes à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano  $v$  e determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano  $v$  (o plano que contém a base) é um plano projetante frontal.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano  $v$ ).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base da pirâmide nos pontos **D** e **B**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[BV]** e **[DV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[BV]** e **[DV]** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas **[BV]** e **[DV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais **[ABV]** e **[ADV]** estão iluminadas enquanto as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]** estão em sombra. A base da pirâmide também está em sombra, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [ABVD]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]** e a base da pirâmide. Em projeção horizontal, as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]** são, ambas, projetantes horizontais, pelo que são invisíveis. Pelo seu lado, a base também é invisível em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer a sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, a face lateral **[BCV]** é visível, enquanto a face lateral **[CDV]** é invisível, assim como a base (que é projetante frontal), pelo que a sombra própria a assinalar, em projeção frontal, é a referente à face lateral **[BCV]**.

A **sombra própria** visível da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da sombra projetada da pirâmide:*

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $B_{s_1}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.  $V_{s_2}$  é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **V**.  $D_{s_2}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D**. As sombras reais dos vértices da **linha separatriz luz/sombra** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência** de **pontos de quebra**.

$D_{s_2}$  e  $V_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral **[DV]** não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[D<sub>s2</sub>V<sub>s2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[DV]** e situa-se no **SPFS**.  $A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[AB]**, da base, não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[A<sub>s1</sub>B<sub>s1</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[AB]** e situa-se no **SPHA**. O mesmo já não acontece em relação às arestas **[BV]** e **[AD]** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $B_{s_1}$  e  $V_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $A_{s_1}$  e  $D_{s_2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $V_{s_2}$  e  $B_{s_1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **B** –  $B_{v_2}$ .  $B_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto **B** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **B**. O segmento **[V<sub>s2</sub>B<sub>v2</sub>]** é a sombra projetada do segmento **[BV]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[V<sub>s2</sub>B<sub>v2</sub>]** (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[V<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>B<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** da aresta lateral **[BV]**.

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s_1}$  e  $D_{s_2}$  teve-se em conta que o lado **[AD]** do quadrado é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada do segmento no Plano Horizontal de Projeção é paralela ao próprio segmento. Assim, por  $A_{s_1}$  (a sombra real do ponto **A**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a **[A<sub>s1</sub>D<sub>s1</sub>]** (a projeção horizontal do segmento **[AD]**) até ao eixo **X**, onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento **[AD]**). A linha quebrada aberta **[A<sub>s1</sub>Q'<sub>s</sub>D<sub>s2</sub>]** é a **sombra real** da aresta **[AD]**, da base, nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada **[V<sub>s2</sub>D<sub>s2</sub>Q'<sub>s</sub>A<sub>s1</sub>B<sub>s1</sub>Q<sub>s</sub>]** é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento **[Q<sub>s</sub>Q'<sub>s</sub>]** é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

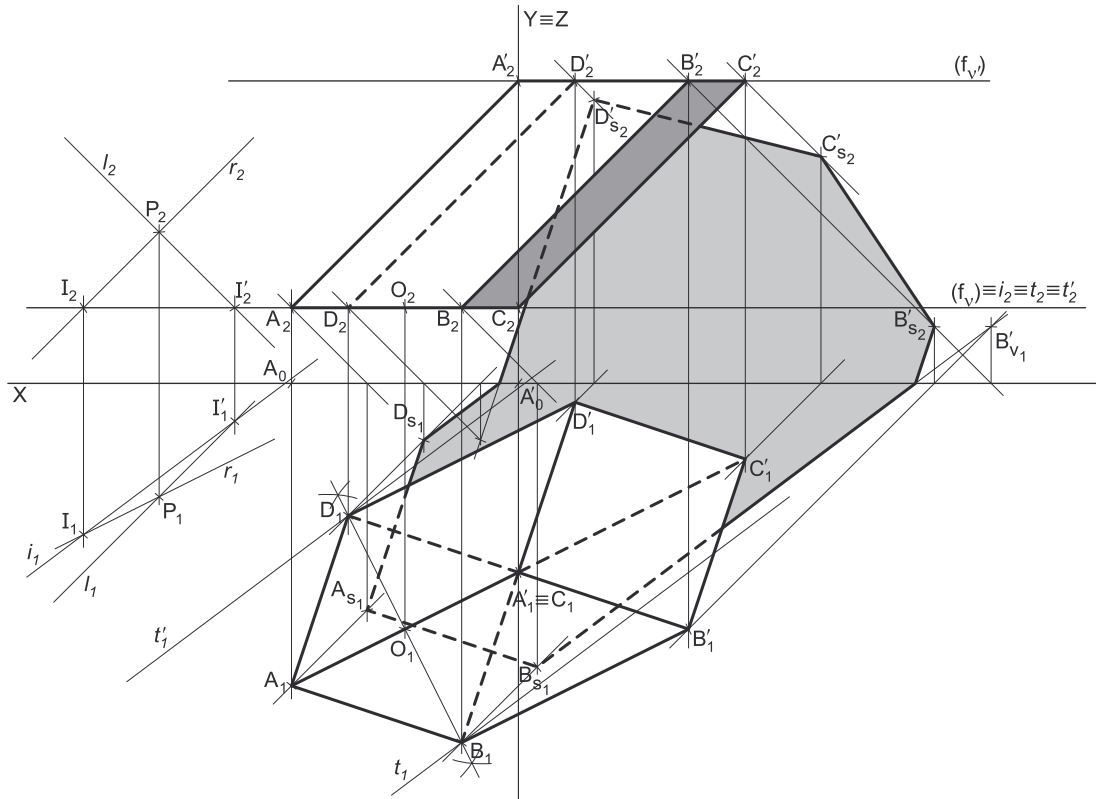
Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pela pirâmide) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

**Traçado:**

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\nu$ ), apesar de integrar os dados, no contexto da situação é meramente auxiliar, pelo que o seu traço frontal se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traços do plano  $\alpha$ , dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$  (para a determinação das projeções do segmento de reta **[AV]**), dos traçados necessários à construção do quadrado ou, ainda, das retas **t** e **t'**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

968.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **A'**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representaram-se os planos  $v$  (o plano horizontal que contém a base inferior do prisma) e  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma), pelos respectivos traços frontais. O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_v$ ) passa por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**). O plano  $v'$  é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ) passa por  $A'_2$  (a projeção frontal do ponto **A'**). Tanto o plano  $v$  como o plano  $v'$  não têm traço horizontal (são ambos paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que os respetivos traços frontais se identificaram entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:**

*Determinação das projeções do prisma:*

O vértice **C**, da base inferior, situa-se na mesma projetante horizontal do ponto **A** (como o enunciado refere expressamente), pelo que os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes – tem-se, imediatamente,  $C_1 \equiv A_1$ . Por outro lado, o ponto **C** é um vértice da base **[ABCD]**, que está contida no plano  $v$ , pelo que  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**) se situa necessariamente sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante horizontal.

A base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (o plano  $v$ ), pelo que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do quadrado não apresenta deformação). Assim, a partir de  $A_1$  e  $C_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), efetuou-se a construção da projeção horizontal do quadrado, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar  $O_1$  (a projeção horizontal do centro da circunferência circunscrita ao quadrado) –  $O_1$  é o ponto médio do segmento de reta **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]**, e determinou-se com o recurso à mediatriz daquele segmento.

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado, inscrito na circunferência, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do polígono – **B<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>**. Estes foram nomeados seguindo as indicações fornecidas no enunciado – a aresta lateral **[BB']** é visível em projeção frontal, pelo que o ponto **B** é vértice de maior afastamento do quadrado. A projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

O segmento de reta **[AA']** é uma aresta lateral do prisma. Assim, pelas projeções dos outros três vértices do quadrado **[ABCD]** (os vértices **B**, **C** e **D**) conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), paralelas às projeções homónimas do segmento de reta **[AA']**, e determinaram-se os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do prisma com o plano  $v'$  – esses pontos são os vértices **B'**, **C'** e **D'** do quadrado **[A'B'C'D']**, que é a base superior do sólido). Os pontos **B'**, **C'** e **D'** tiveram determinação direta, a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante frontal (o plano  $v'$ ).

A partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[ABB'C'D'D]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1B_1B'_1C'_1D'_1D_1]$ . Em projeção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – os vértices **C** e **A'**. O vértice **C**, por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[BC]$  e  $[CD]$ , da base inferior, e a aresta lateral  $[CC']$ . O vértice **A'**, por ser um dos vértices de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$ , da base superior, e a aresta lateral  $[AA']$ .

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[ABCC'B'A']$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[A_2B_2C_2C'_2B'_2A'_2]$ . Em projeção frontal, existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **D** e **D'**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas  $[CD]$  e  $[AD]$  (da base inferior),  $[C'D']$  e  $[A'D']$  (da base superior) e a aresta lateral  $[DD']$ . No entanto, as arestas  $[AD]$ ,  $[CD]$ ,  $[A'D']$  e  $[C'D']$  estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta lateral  $[DD']$ . Por outro lado, a aresta lateral  $[BB']$  é visível (em projeção frontal), pois situa-se na parte visível do sólido (os pontos **B** e **B'** são os vértices de maior afastamento do prisma).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta *i*, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta *i*; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta *r* (paralela às arestas laterais do sólido) e a reta *l* (um raio luminoso com a direção luminosa convencional). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta *i*, a reta de interseção do plano definido pelas retas *r* e *l*, com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base inferior, que está contida no plano  $\nu$ ). A reta *i* está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta *r* com o plano  $\nu$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta *l* com o plano  $\nu$ ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta *i* – as retas *t* e *t'* (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes luz/sombra com o plano da base de referência – o plano  $\nu$ ).
4. As retas *t* e *t'* são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **B** e **D**, respetivamente. Assim, as arestas laterais  $[BB']$  e  $[DD']$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[BB']$  e  $[DD']$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

As arestas laterais  $[BB']$  e  $[DD']$  separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$  estão iluminadas, sendo que a base superior (a base  $[A'B'C'D']$ ) também está iluminada. Já as faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  estão em sombra, tal como a base inferior do prisma (a base  $[ABCD]$ ). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[BB'C'D'DA]$ .

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$ , bem como a base inferior do prisma (a base  $[ABCD]$ ). Em projeção horizontal, tanto as duas faces laterais em sombra como a base inferior são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em projeção frontal, a face lateral  $[CC'D'D]$  e a base inferior do prisma (a base  $[ABCD]$ , que é projetante frontal) são também invisíveis, mas a face lateral  $[BB'C'C]$  é visível, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria visível a assinalar é a referente à face lateral  $[BB'C'C]$ .

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Determinação da sombra projetada do prisma:

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

$A_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $B_{s_1}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**.  $D_{s_1}$  é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **D**.  $D'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **D'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **D'**.  $C'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C'**.  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**.

As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_1}$  e  $B_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[AB]$  (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_1}B_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AB]$  e situa-se no **SPHA**.  $A_{s_1}$  e  $D_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta  $[AD]$  (da base inferior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[A_{s_1}D_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[AD]$  e situa-se no **SPHA**.  $D'_{s_2}$  e  $C'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[C'D']$  (da base superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[C'_{s_2}D'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[C'D']$  e situa-se no **SPFS**.  $C'_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta  $[B'C']$  (da base superior) não admite a existência de pontos de quebra – o segmento  $[B'_{s_2}C'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento  $[B'C']$  e situa-se no **SPFS**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O mesmo já não acontece em relação às arestas laterais  $[BB']$  e  $[DD']$  – de facto, um ponto de quebra situa-se entre  $B_{s1}$  e  $B'_{s2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre  $D_{s1}$  e  $D'_{s2}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $B_{s1}$  e  $B'_{s2}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto  $B'$  –  $B'_{v1}$ .  $B'_{v1}$  é a sombra virtual do ponto  $B'$  – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto  $B'$ . O segmento  $[B_{s1}B'_{v1}]$  é a sombra projetada do segmento  $[BB']$  no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[B_{s1}B'_{v1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo  $X$  é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[B_{s1}Q_sB'_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[BB']$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $D_{s1}$  e  $D'_{s2}$  poder-se-ia ter recorrido a uma sombra virtual – à sombra virtual do ponto  $D$  ou à sombra virtual do ponto  $D'$ . No entanto, optou-se por um raciocínio diferente, que possibilita uma grande economia de traçado. De facto, as arestas  $[BB']$  e  $[DD']$  são paralelas e **trata-se de uma direção luminosa**, pelo que as sombras projetadas daquelas duas arestas no mesmo Plano de Projeção são igualmente paralelas entre si. Assim, a sombra projetada do segmento de reta  $[DD']$  no Plano Horizontal de Projeção é necessariamente paralela à sombra projetada do segmento de reta  $[BB']$  no Plano Horizontal de Projeção.

Nesse sentido, por  $D_{s1}$  (a sombra real do ponto  $D$ , que se situa no **SPHA**), conduziu-se uma paralela ao segmento  $[B_{s1}Q_s]$  (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção do segmento de reta  $[BB']$ ), até ao eixo  $X$ , onde se situa  $Q'_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento de reta  $[DD']$ ). Assim, a linha quebrada aberta  $[D_{s1}Q'_sD'_{s2}]$  é a **sombra real** do segmento  $[DD']$  (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[D_{s1}A_{s1}B_{s1}Q_sB'_{s2}C'_{s2}D'_{s2}Q'_s]$  é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra projetada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo prisma) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo  $X$ , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo  $Y \equiv Z$  representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços frontais dos planos que contêm as bases do prisma, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do quadrado, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas  $i$ ,  $t$ , e  $t'$ ), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 969.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o ponto **A** é o ponto em que a base do cone é tangente ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o ponto **A** tem afastamento nulo. Em seguida, representou-se o plano  $\nu$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone, pelo seu traço frontal ( $f_\nu$ ). O plano  $\nu$  é um plano projetante frontal, pelo que o traço frontal do plano  $\nu$  ( $f_\nu$ ) passa pela projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ). O plano  $\nu$  não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

**Resolução:***Determinação das projeções do cone:*

Atendendo ao facto de que a base do cone, que está contida num plano horizontal (de nível), é tangente ao Plano Frontal de Projeção (como o enunciado refere expressamente), sabe-se que o raio da base é igual ao afastamento do seu centro (o ponto **O**). Nesse sentido, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções – os pontos **O** e **A** situam-se necessariamente na mesma projetante frontal, pelo que se tem imediatamente  $O_2 \equiv A_2$ .

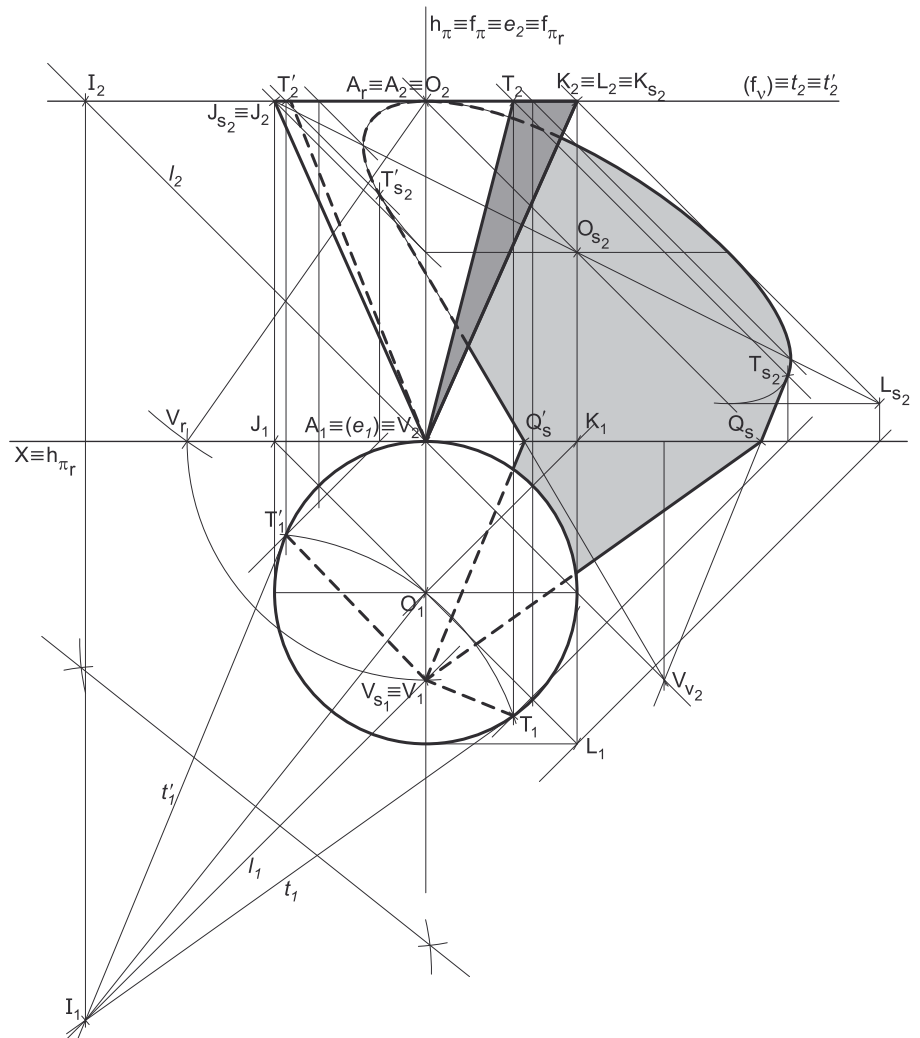
A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base do cone se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal (no Plano Horizontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido (que é tangente ao eixo **X** no ponto  $A_1$ , pois a base é tangente ao Plano Frontal de Projeção no ponto **A**). A projeção frontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\nu$  ( $f_\nu$ ), pois o plano  $\nu$  é um plano projetante frontal.

É dado que a geratriz **[AV]** é de perfil e mede 11 cm, sendo que o vértice do cone tem cota nula – isto permitiu-nos representar  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**), que se situa no eixo **X** e na mesma linha de chamada das projeções do ponto **A**. Acontece que a geratriz **[AV]** não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que a geratriz **[AV]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**.

Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a geratriz **[AV]**) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, em primeiro lugar, representou-se o plano  $\pi$ , pelos seus traços, e identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pelo que se tem imediatamente  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . A charneira é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano  $\pi$  – o ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_2$ ). O vértice **V**, do cone, tem cota nula, pelo que é um ponto do traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ) – assim, em rebatimento, o ponto  $V_r$  (o ponto **V** rebatido) tem de se situar sobre  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$  rebatido). Nesse sentido, com o compasso, fazendo centro em  $A_r$  (o ponto **A** rebatido) e com 11 cm de raio, determinou-se  $V_r$  (o ponto **V** rebatido), sobre  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ , em rebatimento). Note que se garantiu que o ponto **V** tem afastamento positivo, para que o cone se situe no espaço do 1.º Diedro, como o enunciado refere expressamente. Em seguida, inverteu-se o rebatimento, o que nos permitiu determinar a projeção horizontal do ponto **V**.

Por fim, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em  $V_2$  e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** determinou-se de forma imediata a partir da sua projeção frontal ( $I_2$ ), pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso  $l$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base do cone – o plano  $v$ ).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto  $I_1$ , que é a projeção horizontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $T_1$  e  $T'_1$  (as projeções horizontais dos pontos **T** e **T'**).

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[TV]** e **[T'V]** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** – note que a geratriz **[T'V]** é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone, em projeção frontal).

As geratrizes **[TV]** e **[T'V]** separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor  $\overline{TT'}$** , sendo que a base do cone também está iluminada. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco maior  $\overline{TT'}$**  está **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[TVT'T]**, que integra as geratrizes **[TV]** e **[T'V]**, bem como o **arco maior  $\overline{TT'}$** .

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a geratriz **[TV]** e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone – assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz **[TV]** (o segmento de reta  $[T_2V_2]$ ) e a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone.

Em **projeção horizontal**, a superfície lateral do cone é invisível da sua totalidade – assim, a parte da superfície que está em sombra própria (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** e que corresponde ao **arco maior  $\overline{TT'}$** ) é invisível, pelo que, **em projeção horizontal**, não existe qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projeção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

## Determinação da sombra projetada do cone:

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. O ponto **V** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $V_{s_1} \equiv V_1$ .  $T_{s_2}$  é a sombra real do ponto **T** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **T**.  $T'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **T'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **T'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$T_{s_2}$  e  $T'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que, à partida, a sombra do **arco maior  $\overline{TT'}$**  não admite a existência de qualquer ponto de quebra. O mesmo já não acontece em relação às sombras dos extremos das geratrizes separatrizes luz/sombra. De facto, existe um ponto de quebra entre  $T_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos), bem como existe um outro ponto quebra entre  $T'_{s_2}$  e  $V_{s_1}$  (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **V** –  $V_{v_2}$ .  $V_{v_2}$  é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **V**. O segmento  $[T_{s_2}V_{v_2}]$  é a sombra projetada da geratriz **[TV]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T_{s_2}V_{v_2}]$  com o eixo **X** é  $Q_s$ , o ponto de quebra da sombra da geratriz **[TV]**. A linha quebrada aberta  $[V_{s_1}Q_sT_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento **[TV]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

O segmento  $[T'_{s_2}V_{v_2}]$  é a sombra projetada da geratriz **[T'V]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[T'_{s_2}V_{v_2}]$  com o eixo **X** é  $Q'_s$ , o ponto de quebra da sombra da geratriz **[T'V]**. A linha quebrada aberta  $[V_{s_1}Q'_sT'_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento **[T'V]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^a$  Diedro).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Como atrás se referiu, à **partida**, a sombra do **arco maior**  $\widehat{TT'}$  não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **T** e **T'**) se situam no mesmo Plano de Projeção. No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projeção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projeção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, as sombras dos extremos do arco situam-se suficientemente distantes do eixo **X** para se garantir que a sombra do arco não admite a existência de pontos de quebra, para além de que os dois pontos de quebra da sombra do cone já foram determinados.

Nesse sentido, é possível concluir que a sombra do **arco maior**  $\widehat{TT'}$  se situa, na sua totalidade, no **SPFS** (onde se situam as sombras dos seus extremos) – a sua sombra será um **segmento de elipse**, cujo desenho requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente.

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco maior  $\widehat{TT'}$  na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando, em seguida, as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco maior  $\widehat{TT'}$  corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam o arco  $\widehat{TT'}$  na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam o arco maior  $\widehat{TT'}$  permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo (o ponto **O**) –  $O_{s_2}$  é a sombra real do ponto **O** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **O**. A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Frontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

O lado de menor afastamento do polígono (o segmento **[JK]**) está contido no traço frontal do plano  $v(f,)$ , que se situa no **SPFS**, pelo que a sua sombra (o segmento  $[J_{s_2}K_{s_2}]$ ) está coincidente com o próprio segmento. Em seguida, determinou-se a sombra do vértice de maior afastamento e mais à direita do polígono (o ponto **L**) – o ponto  $L_{s_2}$  é a sombra do ponto **L** no Plano Frontal de Projeção.  $L_{s_2}$  situa-se no **SPFS**, pelo que é uma sombra real. As sombras dos lados de topo do polígono estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos.

Em seguida, teve-se em conta que a mediana fronto-horizontal do quadrado é paralela ao lado **[JK]** e passa pelo ponto **O** – nesse sentido, por  $O_{s_2}$  (a sombra real do ponto **O**) conduziu-se uma paralela ao segmento  $[J_{s_2}K_{s_2}]$ , que é a sombra da mediana fronto-horizontal do quadrado. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do polígono que é 3/4 do quadrado, tendo-se desenhado, também, a sombra da mediana de topo do quadrado – é o segmento de reta que passa por  $O_{s_2}$  (a sombra real do ponto **O**) e que é paralelo a  $[K_{s_2}L_{s_2}]$ .

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O_{s_2}$  e têm extremos nos vértices do paralelogramo).

As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que o **arco maior**  $\widehat{TT'}$  corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções frontais daqueles pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**.

Aos **sete pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos **T** e **T'** ( $T_{s_2}$  e  $T'_{s_2}$ ), o que perfaz um total de **nove pontos** – estes nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz **[TV]** em  $T_{s_2}$ , tal como é **concordante** com a sombra da geratriz **[T'V]** em  $T'_{s_2}$ .

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{TT'}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para baixo de  $T_{s_2}$  (um deles) e para baixo de  $T'_{s_2}$  (o outro). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado e pela linha quebrada que tem vértices em  $T_{s_2}$ ,  $Q_s$ ,  $V_{s_1}$ ,  $Q'_s$  e  $T'_{s_2}$  – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cone nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cone é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cone).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O traço frontal do plano que contém a base do cone, no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da reta **p** e do plano  $\pi$ , dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  (para a determinação das projeções do vértice do cone), das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos pontos **T** e **T'**, das retas **t** e **t'** e, ainda, dos traçados necessários à determinação da sombra do arco  $\widehat{TT'}$  nos planos de projeção.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, nesta situação) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 970.

## Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do cilindro, pelo seu traço horizontal, em função do seu afastamento (que é dado). O plano  $\varphi$  não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A base de maior afastamento está contida num plano frontal (de frente) e é tangente ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a cota do seu centro (o ponto  $\mathbf{O}$ ) é igual ao raio da base. Assim, é possível concluir que o ponto  $\mathbf{O}$  (o centro da base de maior afastamento do cilindro) tem 3,5 cm de cota. Nesse sentido, representou-se o ponto  $\mathbf{O}$ , pelas suas projeções, em função dos dados. O ponto  $\mathbf{O}$  pertence ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, pelo que a sua projeção horizontal ( $\mathbf{O}_1$ ) se situa sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ).

A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo  $\mathbf{X}$ , em ambas as projeções.

## Resolução:

## Determinação das projeções do cilindro:

A base de maior afastamento do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $\mathbf{O}_2$  (a projeção frontal do ponto  $\mathbf{O}$ ) e com 3,5 cm de raio (o raio da base), desenhou-se a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido (que é tangente ao eixo  $\mathbf{X}$ ). A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o traço frontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

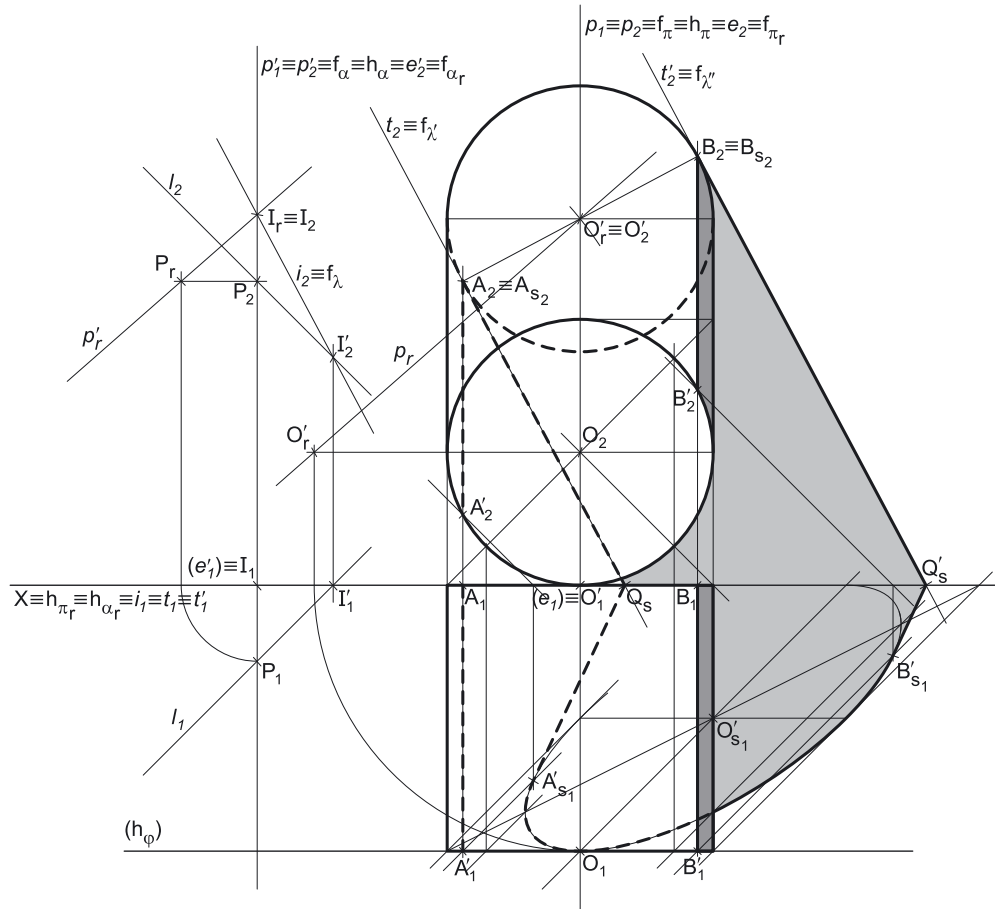
A base de menor afastamento do cilindro está contida no Plano Frontal de Projeção, mas não há qualquer informação que nos permita, de forma direta, determinar o seu centro (o ponto  $\mathbf{O}'$ ). A única informação que lhe faz referência (de forma indireta) é a que a referente ao eixo do cilindro, que está contido numa reta de perfil  $\mathbf{p}$  e que mede 9 cm. Assim, pelas projeções do ponto  $\mathbf{O}$  conduziram-se as projeções homónimas da reta  $\mathbf{p}$ , a reta suporte do eixo do cilindro.

O ponto  $\mathbf{O}'$  é o ponto da reta  $\mathbf{p}$  que dista 9 cm do ponto  $\mathbf{O}$  e que tem afastamento nulo (para que se situe no Plano Frontal de Projeção). A determinação da projeção horizontal do ponto  $\mathbf{O}'$  ( $\mathbf{O}'_1$ ) foi imediata, pois situa-se no eixo  $\mathbf{X}$ . No entanto, tendo em conta que a reta  $\mathbf{p}$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, não é possível, de forma direta, determinar a projeção frontal do ponto  $\mathbf{O}'$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Nesse sentido, optou-se por recorrer ao rebatimento do plano de perfil que contém a reta  $\mathbf{p}$  pelo que, em primeiro lugar, identificaram-se os traços do plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a reta  $\mathbf{p}$ ) de forma imediata. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\pi$  ( $\mathbf{f}_\pi$ ), que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente,  $\mathbf{f}_\pi \equiv \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{f}_{\pi_r}$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira (e que contêm os arcos do rebatimento de cada ponto), que são planos horizontais (de nível). Assim, os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo dos respetivos rebatimentos.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto  $\mathbf{O}$ , o que nos permitiu determinar  $\mathbf{O}_r$  (o ponto  $\mathbf{O}$  rebatido). O ponto  $\mathbf{O}'$  porque tem afastamento nulo, é necessariamente um ponto do traço frontal do plano  $\pi$  ( $\mathbf{f}_\pi$ ), pelo que, em rebatimento,  $\mathbf{O}'$  situa-se sobre  $\mathbf{f}_{\pi_r}$ . Assim, com o compasso, fazendo centro em  $\mathbf{O}_r$  e com 9 cm de raio (o comprimento do eixo), determinou-se  $\mathbf{O}'_r$  (o ponto  $\mathbf{O}'$  rebatido) sobre  $\mathbf{f}_{\pi_r}$  (o traço frontal do plano  $\pi$  rebatido), o que nos permitiu, em seguida, desenhar a reta  $\mathbf{p}_r$  (a reta  $\mathbf{p}$  rebatida) –  $\mathbf{p}_r$  está definida por dois pontos (os pontos  $\mathbf{O}_r$  e  $\mathbf{O}'_r$ ).

O ponto  $\mathbf{O}'$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{O}'_2 \equiv \mathbf{O}'_r$ . A base de menor afastamento do cilindro está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção frontal (no Plano Frontal de Projeção). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $\mathbf{O}'_2$  (a projeção frontal do ponto  $\mathbf{O}'$ ) e com 3,5 cm de raio (as duas bases têm o mesmo raio), desenhou-se a projeção frontal da base de menor afastamento do sólido. A projeção horizontal da base reduz-se a um segmento de reta sobre o eixo  $\mathbf{X}$  (corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizantal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abcissa das projeções horizontais das duas bases) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções frontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção frontal da reta  $p$  – a reta  $p_2$ ). A semicircunferência de menor cota da base de menor afastamento (e que está compreendida entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

**Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:**

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta  $i$ , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$ ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

**1.** Por um ponto  $P$  qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $p'$  (de perfil) paralela às geratrizes do cilindro, e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção luminosa convencional). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.

No entanto, a reta  $p'$  é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Assim, não é possível garantir, de forma direta, o paralelismo da reta  $p'$  em relação às geratrizes do cilindro (e à reta  $p$ , que é a reta suporte do eixo do cilindro). Nesse sentido, para garantir o paralelismo da reta  $p'$  em relação à reta  $p$ , optou-se por recorrer a um processo geométrico auxiliar. Atendendo a que a situação da reta  $p$  (atrás descrita) foi resolvida com o rebatimento do plano de perfil que contém a reta  $p$ , para garantir o paralelismo entre as duas retas optou-se por recorrer ao rebatimento do plano de perfil que contém a reta  $p'$ .

Nesse sentido, identificaram-se os traços do plano  $\alpha$  (o plano de perfil que contém a reta  $p'$ ) e efetuou-se o rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projeção, à semelhança do rebatimento efetuado do plano  $\pi$ . Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ), que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente,  $f_\alpha \equiv e'_2 \equiv f_{\alpha_r}$ . Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira (e que contêm os arcos do rebatimento de cada ponto), que são planos horizontais (de nível). Assim, os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e os pontos mantêm as suas cotas, ao longo dos respetivos rebatimentos.

Em seguida, rebateu-se o ponto  $P$ , o que nos permitiu determinar  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido). Por  $P_r$  (o ponto  $P$  rebatido) conduziu-se a reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida), que está definida por um ponto (o ponto  $P_r$ ) e por uma direção (é paralela à reta  $p_r$ ). Está garantido o paralelismo da reta  $p'$  em relação à reta  $p$ .

**2.** Determinou-se a reta  $i$ , que é a reta de interseção do plano definido pelas retas  $p'$  e  $l$  (o plano  $\lambda$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base de menor afastamento, que está contida no Plano Frontal de Projeção). A reta  $i$  está definida por dois pontos – o ponto  $I$  (o ponto de interseção da reta  $p'$  com o Plano Frontal de Projeção) e o ponto  $I'$  (o ponto de interseção da reta  $l$  com o Plano Frontal de Projeção).

Note que, neste caso, o ponto  $I$  é o traço frontal da reta  $p'$  e o ponto  $I'$  é o traço frontal do raio luminoso  $l$ . Assim, neste caso, a reta  $i$  é, imediatamente, o traço frontal do plano  $\lambda$  ( $f_\lambda$ ), o que se identificou no desenho.

Note que o ponto  $I$  foi determinado previamente em rebatimento – o ponto  $I$  é o traço frontal da reta  $p'$ , pelo que  $I_r$  é o ponto de concorrência da reta  $p'_r$  (a reta  $p'$  rebatida) com  $f_{\alpha_r}$  (o traço frontal do plano  $\alpha$  em rebatimento). O ponto  $I$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $I_2 \equiv I_r$ .

**3.** Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ .

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da base) que são paralelas a uma reta dada (que é a projeção frontal da reta  $i$  –  $i_2$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $B$ ).

Note que, neste caso, as retas  $t$  e  $t'$  são, imediatamente, os traços frontais dos dois **planos tangentes luz/sombra** ( $f_\lambda$  e  $f_{\lambda'}$ ), pois o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro é o Plano Frontal de Projeção – esse facto foi identificado imediatamente no desenho.

**4.** As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  – note que o ponto  $A'$  é o extremo de maior afastamento da geratriz  $[AA']$ , tal como o ponto  $B'$  é o extremo de maior afastamento da geratriz  $[BB']$ . Salienta-se que a geratriz  $[AA']$  é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cilindro), e é também invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível, em projeção horizontal, da superfície lateral do cilindro).

As geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente a semicircunferência  $\overline{AB}$  mais à esquerda e de maior cota. A base de maior afastamento do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde a semicircunferência  $\overline{AB}$  mais à direita e de menor cota está **em sombra**, assim, como a base de menor afastamento do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[\overline{AB'B'A}]$ , que integra as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ , bem como a **semicircunferência  $\overline{AB}$  mais à esquerda** (da base de menor afastamento) e a **semicircunferência  $A'B'$  mais à direita** (da base de maior afastamento).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em **projecção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projecção frontal da geratriz **[BB']** (o segmento de reta **[B<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**) e a projecção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projecção frontal**. Note que a base de menor afastamento (que está em sombra) é invisível em projecção frontal.

Em **projecção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projecção horizontal da geratriz **[BB']** (o segmento de reta **[B<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>]**) e a projecção horizontal da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projecção horizontal**. Note que a base de menor afastamento (que está em sombra) é invisível em projecção horizontal, pois é projetante horizontal.

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** (em projecção frontal) – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projecção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projecção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos **A** e **B** situam-se no Plano Frontal de Projecção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente **A<sub>s2</sub> ≡ A<sub>2</sub>** e **B<sub>s2</sub> ≡ B<sub>2</sub>**. **A'<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**. **B'<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B'**. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projecção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

Os pontos **A** e **B** situam-se no **SPFS** (tal como as suas sombras – **A<sub>s2</sub>** e **B<sub>s2</sub>**) e tal como a própria base de menor afastamento do cilindro se situa no **SPFS** – assim, a sombra da semicircunferência **AB** mais à esquerda (da base de menor afastamento) está coincidente com o próprio arco **AB**. **A'<sub>s1</sub>** e **B'<sub>s1</sub>** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que, à partida, a sombra da semicircunferência **A'B'** (que integra a linha separatriz luz/sombra) não admite a existência de qualquer ponto de quebra.

**A'<sub>s1</sub>** situa-se no **SPHA** e **A<sub>s2</sub>** situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre **A'<sub>s1</sub>** e **A<sub>s2</sub>** (que se situam em Planos de Projecção distintos). **B'<sub>s1</sub>** situa-se no **SPHA** e **B<sub>s2</sub>** situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre **B'<sub>s1</sub>** e **B<sub>s2</sub>** (que se situam em Planos de Projecção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre **A<sub>s2</sub>** e **A'<sub>s1</sub>**, poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto **A** ou à sombra virtual do ponto **A'**. No entanto, optou-se por um raciocínio que nos permite economizar traçado. A sombra projetada no Plano Frontal de Projecção da geratriz **[AA']** situa-se sobre o traço frontal do plano tangente à superfície ao longo da geratriz **[AA']**, que é o plano  $\lambda'$ . Assim, a sombra projetada da geratriz **[AA']** no Plano Frontal de Projecção está sobre o traço frontal desse plano, que é  $f_{\lambda'}$ . Assim, o ponto **Q<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra da geratriz **[AA']**) é, de forma direta, o ponto de interseção de  $f_{\lambda'}$  (o traço frontal do plano  $\lambda'$ ) com o eixo **X**. O segmento **[A'<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>]** é a sombra projetada da geratriz **[AA']** no **SPFS**. A linha quebrada aberta **[A'<sub>s2</sub>Q<sub>s</sub>A<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[AA']** (a sombra projetada do segmento nas faces do **1.º Diedro**).

De forma semelhante, para determinar o ponto de quebra situado entre **B<sub>s2</sub>** e **B'<sub>s1</sub>**, teve-se em igualmente conta que a sombra projetada no Plano Frontal de Projecção da geratriz **[BB']** se situa sobre o traço frontal do plano tangente à superfície ao longo da geratriz **[BB']**, que é o plano  $\lambda''$ . Assim, a sombra projetada da geratriz **[BB']** no Plano Frontal de Projecção está sobre o traço frontal desse plano, que é  $f_{\lambda''}$ . Assim, o ponto **Q'<sub>s</sub>** (o ponto de quebra da sombra da geratriz **[BB']**) é, de forma direta, o ponto de interseção de  $f_{\lambda''}$  (o traço frontal do plano  $\lambda''$ ) com o eixo **X**. O segmento **[B'<sub>s2</sub>Q'<sub>s</sub>]** é a sombra projetada da geratriz **[BB']** no **SPFS**. A linha quebrada aberta **[B'<sub>s2</sub>Q'<sub>s</sub>B<sub>s1</sub>]** é a **sombra real** do segmento **[BB']** (a sombra projetada do segmento nas faces do **1.º Diedro**).

*Determinação da sombra projetada da base de maior afastamento do cilindro no Plano Horizontal de Projecção:*

Como atrás se referiu, **à partida**, a sombra da semicircunferência **A'B'** não admite a existência de pontos de quebra, pois as sombras dos seus extremos (os pontos **A'** e **B'**) se situam no mesmo Plano de Projecção. No entanto, sublinha-se que há situações em que as sombras dos extremos do arco se situam, ambas, num mesmo Plano de Projecção e, ainda assim, o arco produz sombra nos dois planos de projecção (o que implica a existência de pontos de quebra). Todavia, atendendo a que os dois pontos de quebra da sombra do cilindro já foram determinados, é possível garantir que a sombra da semicircunferência **A'B'** não admite a existência de pontos de quebra.

Nesse sentido, é possível concluir que a sombra da semicircunferência **A'B'** se situa, na sua totalidade, no **SPHA** (onde se situam as sombras dos seus extremos) – a sua sombra será um **segmento de elipse** – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **835**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**).

Assim, começou-se por inscrever a semicircunferência **A'B'** na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando, em seguida, as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra da semicircunferência **A'B'** corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam a semicircunferência **A'B'** na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos** do **segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam a semicircunferência **A'B'** permitem-nos determinar mais **três pontos** do **segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projecção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo que é a base de maior afastamento (o ponto **O'**) – **O'<sub>s1</sub>** é a sombra real do ponto **O'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **O'**. A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Horizontal de Projecção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O lado inferior do quadrado situa-se no Plano Horizontal de Projeção (está sobre o traço horizontal do plano  $\varphi - h_\varphi$ ), pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio segmento. Em seguida, determinou-se a sombra do extremo superior do diâmetro vertical (o ponto **J**) – o ponto  $J_{s_1}$  é a sombra do ponto **J** no Plano Horizontal de Projeção.  $J_{s_1}$  situa-se no **SPHA**, pelo que é uma sombra real. As sombras dos lados verticais do polígono estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos.

Em seguida, teve-se em conta que a mediana fronto-horizontal do quadrado (que corresponde ao diâmetro fronto-horizontal da circunferência) é paralela ao lado inferior do quadrado e passa pelo ponto **O'** – nesse sentido, por  $O'_{s_1}$  (a sombra real do ponto **O'**) conduziu-se uma fronto-horizontal, que é a reta suporte da sombra da mediana fronto-horizontal do quadrado. Os pontos em que esta fronto-horizontal intersesta as sombras dos lados verticais do quadrado são as sombras dos extremos do diâmetro fronto-horizontal da circunferência, que são, também, **dois pontos do segmento de elipse**. A partir deste procedimento, foi possível concluir a construção da sombra do polígono que é 3/4 do quadrado, tendo-se desenhado, também, a sombra da mediana vertical do quadrado – é o segmento de reta que passa por  $O'_{s_1}$  (a sombra real do ponto **O'**) e que é paralelo às sombras dos lados verticais do quadrado.

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O'_{s_1}$  e têm extremos nos vértices do paralelogramo).

As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que a semicircunferência  $\overline{A'B'}$  corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções horizontais daqueles pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersesta as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**.

Aos **sete pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos **A'** e **B'** ( $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_1}$ , respetivamente), o que perfaz um total de **nove pontos** – estes nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz [**AA'**] em  $A'_{s_1}$ , tal como é **concordante** com a sombra da geratriz [**BB'**] em  $B'_{s_1}$ .

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** da semicircunferência  $\overline{A'B'}$ . Esses troços são os dois troços que se situam para cima de  $A'_{s_1}$  (um deles) e para cima de  $B'_{s_1}$  (o outro). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado, pela linha quebrada aberta [ $A_{s_2}Q_sA'_{s_1}$ ], pela semicircunferência  $\overline{A_{s_2}B_{s_2}}$  e pela linha quebrada aberta [ $B_{s_2}Q_sB'_{s_1}$ ] – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cilindro nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cilindro é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cilindro).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área **visível** da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido), no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$  (para a construção das projeções do cilindro), dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes (nomeadamente os referentes ao rebatimento do plano  $\alpha$ ) e, ainda, das retas ***i***, ***t*** e ***t'***.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 971.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Os pontos **A** e **B** são dois vértices de um quadrado que está contido num plano de perfil, pelo que as projeções dos dois pontos se situam na mesma linha de chamada. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base da pirâmide) pelos seus traços, contendo os pontos **A** e **B** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) passa pelas projeções frontais dos pontos **A** e **B** ( $A_2$  e  $B_2$ , respetivamente), tal como o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) passa pelas projeções horizontais dos dois pontos ( $A_1$  e  $B_1$ ). A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções da pirâmide:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

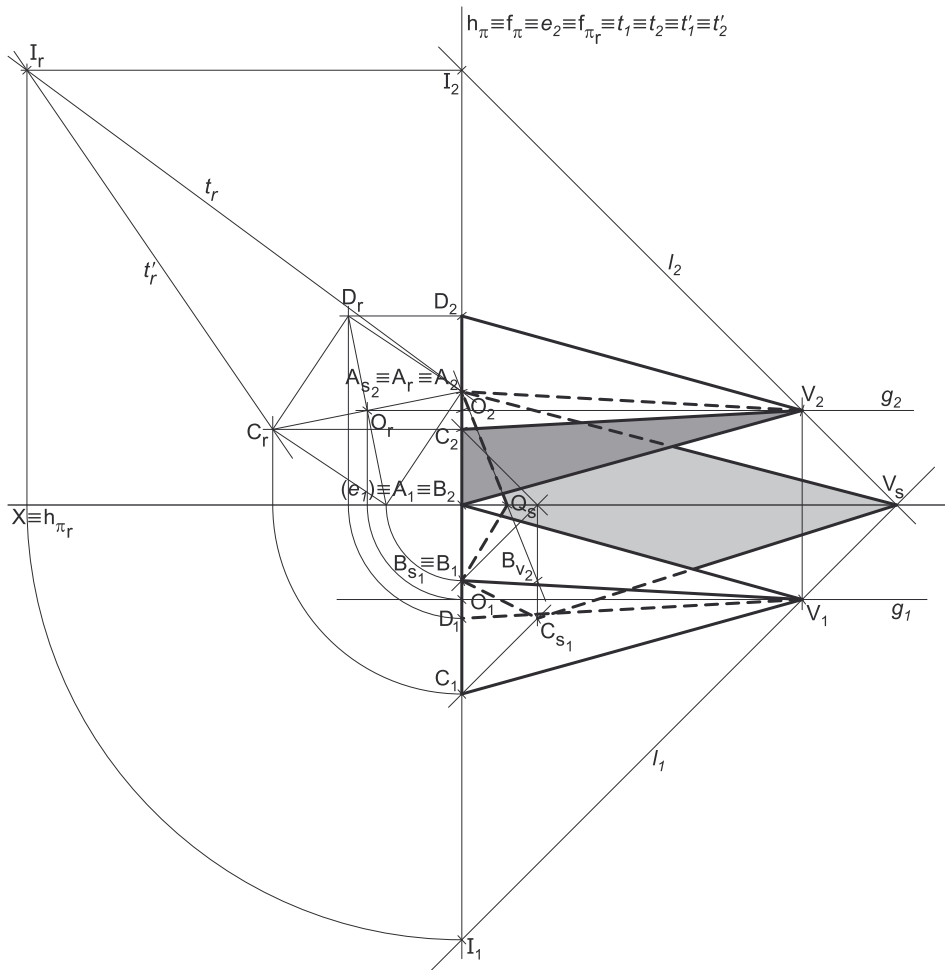
Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  (o plano que contém o quadrado) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pelo que se tem imediatamente  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . A charneira é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_2$ . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **B**, o que nos permitiu determinar  $B_r$ . A partir de  $A_r$  e de  $B_r$ , construiu-se o quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento ( $C_r$  e  $D_r$ ), bem como o centro do quadrado (o ponto **O**) em rebatimento –  $O_r$ . Note que se garantiu que o quadrado **[ABCD]** se situa no espaço do  $1^a$  Diedro, para que a pirâmide se situe, igualmente, no espaço do  $1^a$  Diedro (como o enunciado refere expressamente).

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos **C** e **D** (e do ponto **O**) e, assim, desenhar as duas projeções do polígono (ambas as projeções do quadrado se reduzem a segmentos de reta, pois o plano que o contém é duplamente projetante).

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base, ou seja, está contido numa reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **g**, fronto-horizontal, que é a reta suporte do eixo da pirâmide. Uma vez que a altura da pirâmide é a distância do vértice ao plano da base, medida ortogonalmente a este, o vértice **V** dista 9 cm (a altura da pirâmide) do plano  $\pi$ . Assim, a altura da pirâmide pode medir-se na reta **g**, que é paralela aos dois planos de projeção – o segmento **[OV]** (o eixo do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza em ambas as projeções. Assim, a partir de  $O_2$  (por exemplo), mediram-se os 9 cm sobre  $g_2$  (a projeção frontal da reta **g**) e determinou-se  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**), sobre  $g_2$ , o que nos permitiu determinar  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto **V**) sobre  $g_1$  (a projeção horizontal da reta **g**). Note que se garantiu que o vértice **V** se situa à direita do plano da base, como o enunciado pede expressamente.

A partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada  $[BVDC]$ , cuja projeção frontal é o polígono  $[B_2V_2D_2C_2]$ . Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$ , da base, e a aresta lateral  $[AV]$ . As arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  da base estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção frontal) é a referente à aresta lateral  $[AV]$ . Já a aresta lateral  $[CV]$  é visível, em projeção frontal, pois separa duas faces da pirâmide que são visíveis em projeção frontal (note que **C** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada  $[AVCD]$ , cuja projeção horizontal é o polígono  $[A_1V_1C_1D_1]$ . Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **B**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base, e a aresta lateral  $[BV]$ . As arestas  $[AB]$  e  $[BC]$  da base estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção horizontal) é a referente à aresta lateral  $[BV]$ . Já a aresta lateral  $[DV]$  é visível, em projeção horizontal, pois separa duas faces da pirâmide que são visíveis em projeção horizontal (note que **D** é o vértice de maior cota da pirâmide).

#### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso  $l$ ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso  $l$  – o raio luminoso  $l$  está definido por um ponto (o ponto **V**) e uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso  $l$  com o plano da base – ponto **I**. A determinação das projeções do ponto **I** é direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano duplamente projetante).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas  $t$  e  $t'$  (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base – o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas  $t$  e  $t'$  mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas  $t$  e  $t'$  em relação à base da pirâmide, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da base da pirâmide, efetuou-se o rebatimento do ponto **I** para esse mesmo rebatimento, obtendo-se  $I_r$ . Por  $I_r$  conduziram-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento) – a reta  $t_r$  passa por  $I_r$  e é rasante à base da pirâmide (em rebatimento) no vértice  $A_r$  e a reta  $t'_r$  passa por  $I_r$  e é rasante à base da pirâmide (em rebatimento) no vértice  $C_r$ .

4. As retas  $t$  e  $t'$  são rasantes à base da pirâmide nos pontos **A** e **C**, respetivamente (o que foi possível constatar em rebatimento). Assim, as arestas laterais  $[AV]$  e  $[CV]$  são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais  $[AV]$  e  $[CV]$  são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são rasantes ao sólido).

As arestas  $[AV]$  e  $[CV]$  separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais  $[ADV]$  e  $[CDV]$  estão iluminadas, bem como a sua base, enquanto as faces laterais  $[ABV]$  e  $[BCV]$  estão em sombra. Nesse sentido, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada**  $[AVCB]$ .

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais  $[ABV]$  e  $[BCV]$ . Em **projeção horizontal**, as duas faces laterais em sombra são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria visível a assinalar. Já em **projeção frontal**, a face lateral  $[BCV]$  é visível, enquanto a face lateral  $[ABV]$  é invisível, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria a assinalar refere-se apenas à face lateral  $[BCV]$ .

A **sombra própria** da pirâmide foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

#### Determinação da sombra projetada da pirâmide:

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

O ponto **A** situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $A_{s_2} \equiv A_2$ . O ponto **B** situa-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente  $B_{s_1} \equiv B_1$ .  $V_s$  é a sombra real do ponto **V** e é, simultaneamente, o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **V** (que é uma reta passante), pelo que  $V_s$  se situa no eixo **X** ( $V_s$  situa-se simultaneamente no **SPHA** e no **SPFS**).  $C_{s_1}$  é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **C**.

As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Note que  $V_s$  (a sombra real do ponto **V**) se situa no eixo **X**, pelo que  $V_s$  é, imediatamente, um dos pontos de quebra da sombra projetada da pirâmide.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

$B_{s1}$  e  $C_{s1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[BC]**, da base, não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s1}C_{s1}]$  é a sombra projetada do segmento **[BC]** e situa-se no **SPHA**.  $C_{s1}$  e  $V_s$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[CV]** não admite ponto de quebra – o segmento  $[C_{s1}V_s]$  é a sombra projetada do segmento **[CV]** e situa-se no **SPHA**.  $A_{s2}$  e  $V_s$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral **[AV]** não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s2}V_s]$  é a sombra projetada do segmento **[AV]** e situa-se no **SPFS**. O mesmo já não acontece em relação à aresta **[AB]**, da base – de facto, existe um ponto de quebra entre  $A_{s2}$  e  $B_{s1}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre  $A_{s2}$  e  $B_{s1}$  recorreu-se à sombra virtual do ponto **B** –  $B_{v2}$ .  $B_{v2}$  é a sombra virtual do ponto **B** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**. O segmento  $[A_{s2}B_{v2}]$  é a sombra projetada da aresta **[AB]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s2}B_{v2}]$  (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s2}Q_sB_{s1}]$  é a **sombra real** do segmento **[AB]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^o$  Diedro).

A linha quebrada fechada  $[V_sC_{s1}B_{s1}Q_sA_{s2}]$  é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento  $[Q_sV_s]$  é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada da pirâmide nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível (em projeção horizontal), pois está oculta pela própria pirâmide.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pela pirâmide) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a base), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários ao rebatimento do plano  $\pi$  e à construção da base da pirâmide, em verdadeira grandeza, ou, ainda, das retas **t** e **t'** em rebatimento), representaram-se a **leve**.

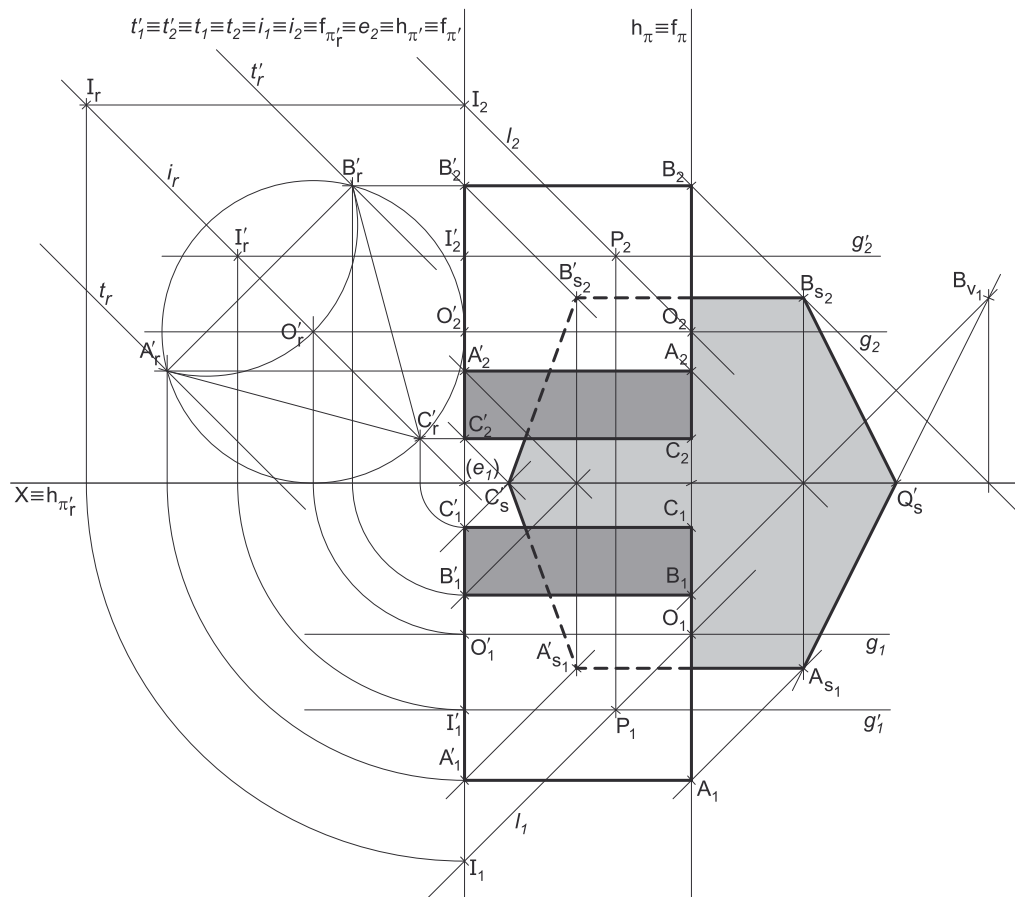
Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (a pirâmide, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 972.

### Dados:

Tendo em conta que o triângulo **[ABC]** se inscreve numa circunferência que é tangente aos dois planos de projeção, o centro dessa circunferência (o ponto **O**) tem necessariamente cota e afastamento igual ao raio da circunferência, que é 4 cm – o ponto **O** tem, assim, 4 cm de afastamento e de cota. Dessa forma, em primeiro lugar representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base **[ABC]** do prisma) pelos seus traços, contendo o ponto **O** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ), tal como o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ).

A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Resolução:

#### Determinação das projeções do prisma:

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença das abcissas dos planos das bases. Assim, porque o prisma tem 6 cm de altura e o triângulo **[ABC]** é a sua base mais à direita, o plano  $\pi'$  (o plano de perfil que contém a outra base do sólido) situa-se 6 cm para a esquerda do plano  $\pi$ . Nesse sentido, representou-se o plano  $\pi'$  (o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do sólido) pelos seus traços.

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$ . No entanto, dadas as características do exercício e o facto de as projeções do prisma se desenvolverem **para a esquerda** do plano  $\pi$  e, à partida, a sombra do prisma se desenvolver **para a direita** do plano  $\pi$ , o recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  (quer se efetue para a esquerda quer se efetue para a direita) irá sempre provocar uma considerável sobreposição de traçados. Assim, optou-se por se construir a base **[A'B'C']** em primeiro lugar.

Note que todos os dados do enunciado referentes à base **[ABC]** se mantêm para a base **[A'B'C']**, pois as duas figuras são geometricamente iguais e têm os lados correspondentes paralelos entre si.

Nesse sentido, e atendendo a que se trata de um **prisma regular**, tanto o seu eixo como as suas arestas laterais estão contidos em retas ortogonais aos planos das bases, que são retas fronto-horizontais. Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções homónimas da reta **g**, a reta fronto-horizontal que contém o eixo do prisma. Em seguida, determinou-se o ponto **O'**, o centro da base mais à esquerda do prisma. As projeções do ponto **O'** tiveram determinação direta, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **g**) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi'$ ).

O plano que contém o triângulo **[A'B'C']** (o plano  $\pi'$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[A'B'C']** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi'$  (o plano que contém o triângulo) para o Plano Frontal de Projeção, para o que se identificou a charneira do rebatimento, que é  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_{\pi'} \equiv e_2 \equiv f_{\pi'}$ . A charneira é uma reta vertical, pelo que os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **O'**, obtendo **O'\_r**. Com o compasso, fazendo centro em **O'\_r** e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao triângulo **[A'B'C']**, em rebatimento (em verdadeira grandeza) – note que a circunferência é necessariamente tangente a  $f_{\pi'}$  e a  $h_{\pi'}$  (os traços do plano  $\pi'$  rebatidos).

É dado o ângulo que o lado **[AB]**, do triângulo, faz com os planos de projeção – esse ângulo está contido no plano  $\pi$  (o plano ortogonal aos planos de projeção que contém o lado **[AB]**) e corresponde, na realidade, ao ângulo que o lado **[AB]** faz com os traços do plano  $\pi$ . Por outro lado, em rebatimento, esse ângulo está em verdadeira grandeza. Como atrás se referiu, todos estes raciocínios são transponíveis para o triângulo **[A'B'C']**. Assim, há que construir, na circunferência, um triângulo que respeite estes dados. Para tal começou-se por desenhar o **diâmetro inicial** da circunferência, que faz, com os traços do plano  $\pi'$  (em rebatimento), ângulos de 45°. O lado **[AB]**, sendo perpendicular a esse **diâmetro inicial** (por questões de construção da própria figura), fará, com os traços do plano, ângulos de 45° (respeitando o que o enunciado pede expressamente).

Das duas hipóteses de medir o ângulo de 45° com os traços do plano (em rebatimento) a partir de **O'\_r**, apenas a que a resolução apresenta no garante, em simultâneo, que o vértice **C'** é o vértice de menor cota do triângulo **[A'B'C']** e que o ponto **B'** é o seu vértice de maior cota (transpondo, para o triângulo **[A'B'C']** os dados referentes ao triângulo **[ABC]**).

Assim, efetuou-se a construção do triângulo **[A'B'C']**, em rebatimento, o que nos permitiu determinar os três vértices em rebatimento. Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano  $\pi'$ , o que nos permitiu determinar as projeções dos três vértices do triângulo e desenhar as suas duas projeções (ambas as projeções do triângulo se reduzem a segmentos de reta, pois o plano que o contém é duplamente projetante).

Em seguida, e por que se trata de um **prisma regular** (como atrás se referiu), pelas projeções de todos os vértices do triângulo **[A'B'C']** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), que são fronto-horizontais, e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano  $\pi$  – esses pontos são os vértices do triângulo **[ABC]**, que é a base mais à direita do sólido. Note que se trata da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi$ ).

A partir das projeções dos seis vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O **contorno aparente frontal** é a linha fechada **[BACC'A'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B<sub>2</sub>A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**. Todos os vértices do prisma integram o contorno aparente frontal. No entanto, as arestas **[BC]** (da base **[ABC]**) e **[B'C']** (da base **[A'B'C']**) são invisíveis (pois separam faces que são invisíveis em projeção frontal). No entanto, aquelas duas arestas estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal. Já a aresta lateral **[AA']** é visível, em projeção frontal, pois separa duas faces do prisma que são visíveis em projeção frontal (note que **A** e **A'** são os vértices de maior afastamento do prisma).

O **contorno aparente horizontal** é a linha fechada **[ABCC'B'A']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]**. Todos os vértices do prisma integram o contorno aparente horizontal. No entanto, as arestas **[AC]** (da base **[ABC]**) e **[A'C']** (da base **[A'B'C']**) são invisíveis (pois separam faces que são invisíveis em projeção horizontal). No entanto, aquelas duas arestas estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção horizontal. Já a aresta lateral **[BB']** é visível, em projeção horizontal, pois separa duas faces do prisma que são visíveis em projeção horizontal (note que **B** e **B'** são os vértices de maior cota do prisma).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta  $g'$ , paralela às arestas fronto-horizontais do sólido, e a reta  $l$  (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas retas  $g'$  e  $l$ , com o plano  $\pi'$ , o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base face de referência do prisma é a sua base mais à esquerda). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta  $g'$  com o plano  $\pi'$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta  $l$  com o plano  $\pi'$ ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i** – as retas **t** e **t'**.

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas **t** e **t'** mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir nem o paralelismo das retas **t** e **t'** em relação à reta **i**, nem sequer a tangência das retas **t** e **t'** em relação à base do prisma (nem por que vértices aquelas retas passam), de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da base do prisma, efetuou-se o rebatimento da reta **i** para esse mesmo rebatimento. Nesse sentido rebateram-se os pontos **I** e **I'**, obtendo  $I_r$  e  $I'_r$  – a reta  $i_r$  (a reta **i** rebatida) passa por  $I_r$  e por  $I'_r$ . Em seguida, desenharam-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas **t** e **t'** em rebatimento), rasantes à base do prisma (em rebatimento) e paralelas à reta  $i_r$  – a reta  $t_r$  é paralela a  $i_r$  e é rasante à base em rebatimento no vértice  $A'_r$  e a reta  $t'_r$  é paralela a  $i_r$  e é rasante à base em rebatimento no vértice  $B'_r$ .

4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **A'** e **B'**, respetivamente. Assim, as arestas **[AA']** e **[BB']** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas **[AA']** e **[BB']** são as arestas segundo as quais os planos  $\lambda'$  e  $\lambda''$  são rasantes ao sólido).

As arestas **[AA']** e **[BB']** separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a face lateral **[AA'B'B]** é a única face iluminada, sendo que a base mais à esquerda (a base **[A'B'C']**) também está iluminada. Já as faces laterais **[AA'C'C]** e **[BB'C'C]** estão em sombra, tal como a base mais à direita do prisma (a base **[ABC]**). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [A'ABB'C']**.

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais **[AA'C'C]** e **[BB'C'C]**, bem como a base mais à direita (a base **[ABC]**). Em **projeção horizontal**, a face lateral **[AA'C'C]** é invisível (assim como a base **[ABC]**, que é projetante horizontal), mas a face lateral **[BB'C'C]** é visível, pelo que, em projeção horizontal, a **sombra própria** a assinalar é a referente à face lateral **[BB'C'C]**. Já em **projeção frontal**, a face lateral **[AA'C'C]** é visível e a face lateral **[BB'C'C]** é invisível, bem como a base **[ABC]** (que é projetante frontal), pelo que, em projeção frontal, a única **sombra própria** a assinalar refere-se à face lateral **[AA'C'C]**.

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

## Determinação da sombra projetada do prisma:

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B**.  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **B'**.  $A_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**.  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A'**.  $C'_s$  é a sombra real do ponto **C'** e é, simultaneamente, o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **C'** (que é uma reta passante), pelo que  $C'_s$  se situa no eixo **X** ( $C'_s$  situa-se simultaneamente no **SPHA** e no **SPFS**).

As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Note que  $C'_s$  (a sombra real do ponto **C'**) se situa no eixo **X**, pelo que  $C'_s$  é, imediatamente, um dos pontos de quebra da sombra projetada da pirâmide.

$A_{s_1}$  e  $A'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta lateral **[AA']** não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  é a sombra projetada do segmento **[AA']** e situa-se no **SPHA**.  $A'_{s_1}$  e  $C'_s$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[A'C']** (da base **[A'B'C']**) não admite ponto de quebra – o segmento  $[A'_{s_1}C'_s]$  é a sombra projetada do segmento **[A'C']** e situa-se no **SPHA**.  $B_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral **[BB']** não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s_2}B'_{s_2}]$  é a sombra projetada do segmento **[BB']** e situa-se no **SPFS**.  $B'_{s_2}$  e  $C'_s$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[B'C']** (da base **[A'B'C']**) não admite ponto de quebra – o segmento  $[B'_{s_2}C'_s]$  é a sombra projetada do segmento **[B'C']** e situa-se no **SPFS**.

O mesmo já não acontece em relação à aresta **[AB]** (da base **[ABC]**) – de facto, existe um ponto de quebra entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$  (que se situam em Planos de Projeção distintos). Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **B** –  $B_{v_1}$ .  $B_{v_1}$  é a sombra virtual do ponto **B** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**. O segmento  $[A_{s_1}B_{v_1}]$  é a sombra projetada da aresta **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento  $[A_{s_1}B_{v_1}]$  (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é  $Q_s$  (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta  $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}]$  é a **sombra real** do segmento **[AB]** (a sombra projetada do segmento nas faces do  $1^{\text{a}}$  Diedro).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A linha quebrada fechada  $[A_{s_1}O_sB_{s_2}B'_{s_2}C'_sA'_{s_1}]$  é a **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção. O segmento  $[C'_sO_s]$  é a **linha de quebra** da sombra do prisma. Assim, desenhou-se o contorno da sombra projetada do prisma nos planos de projeção, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível (em ambas as projeções), pois está oculta pelo próprio prisma.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo prisma) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços dos planos que contêm as bases do sólido, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso dos traçados necessários à construção da base mais à esquerda do prisma em rebatimento, das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação dos planos tangentes luz/sombra ou, ainda, das retas **i**, **t** e **t'** em rebatimento.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o prisma, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 973.

### Dados:

Tendo em conta que a base do cone é tangente aos dois planos de projeção, o centro da base (o ponto **O**) tem necessariamente cota e afastamento iguais ao raio da circunferência, que é 4,5 cm – o ponto **O** tem, assim, 4,5 cm de afastamento e de cota. Dessa forma, em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas. Note que o ponto **O** é necessariamente um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pois tem coordenadas iguais (e projeções simétricas em relação ao eixo **X**). Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base do cone) pelos seus traços, contendo o ponto **O** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_r$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ), tal como o seu traço horizontal ( $h_r$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ).

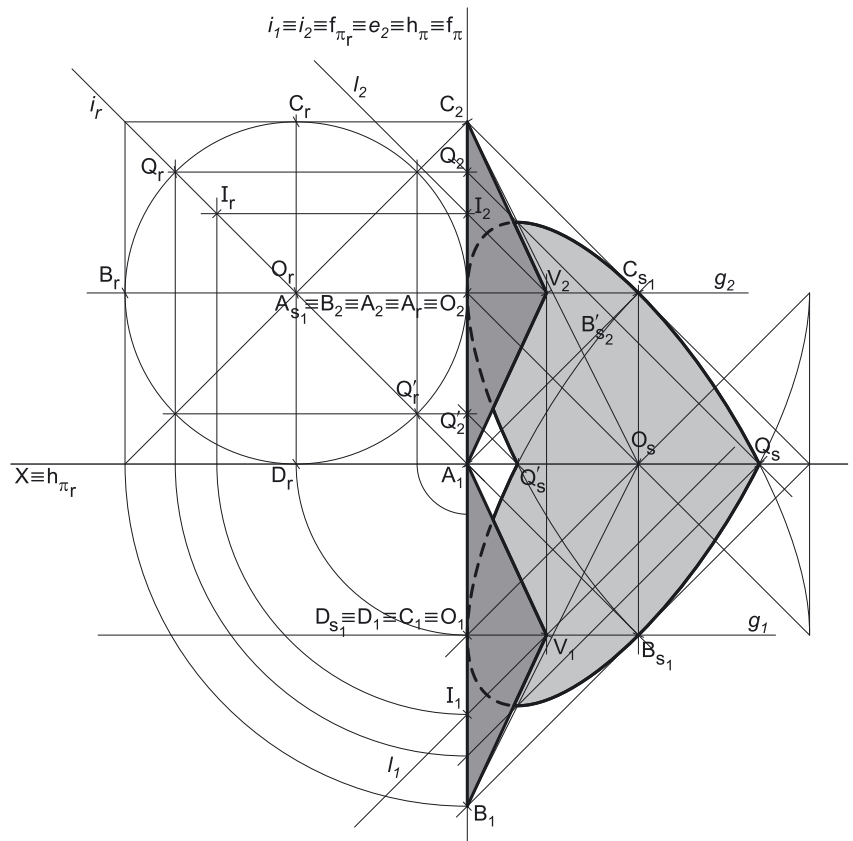
A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

### Resolução:

#### Determinação das projeções do cone:

O plano que contém a base do cone (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base do cone não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo (a base do sólido) – tendo em conta que ambas as projeções sofrem a redução máxima, as duas projeções do círculo reduzem-se a segmentos de reta sobre os traços homónimos do plano  $\pi$ .

Assim, a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta com 9 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual  $O_1$  (a projeção horizontal do ponto **O**) é o ponto médio – a projeção horizontal do círculo corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal do círculo é um segmento de reta com 9 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual  $O_2$  (a projeção frontal do ponto **O**) é o ponto médio – a projeção frontal do círculo corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base (que é um plano de perfil), ou seja, está contido numa reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **g**, a reta suporte do eixo do cone. Note que a reta **g** é necessariamente uma reta do  $\beta_{1/3}$ , pois tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo **X** (a reta **g** é uma reta fronto-horizontal que passa por um ponto do  $\beta_{1/3}$  – o ponto **O**).

Não é dada a altura do cone mas, sim o ângulo que as geratrizes fazem com o plano da base (que é um plano de perfil) – esse ângulo tem 25° de amplitude. As geratrizes do cone em que esse ângulo se projeta em verdadeira grandeza num dos planos de projeção são as geratrizes do contorno aparente frontal (as geratrizes frontais, em que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal) e as geratrizes do contorno aparente horizontal (as geratrizes horizontais, em que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal). Assim, sendo indistinto, desenharam-se as projeções frontais das duas geratrizes do contorno aparente frontal do cone, fazendo, com  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano da base), ângulos de 25°, o que nos permitiu determinar **V**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **V**). Note que se poderia ter desenhado as projeções horizontais das geratrizes do contorno aparente horizontal, fazendo, com  $h_{\pi}$  (o traço horizontal do plano da base) ângulos de 25°.

Em seguida, determinou-se **V**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **V**) sobre a projeção horizontal da reta **g** (**g**<sub>1</sub>) – note que o ponto **V** é necessariamente um ponto do  $\beta_{1/3}$ , pois é um ponto da reta **g** que é uma reta do  $\beta_{1/3}$ .

Por fim, desenharam-se **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V**<sub>1</sub> e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor afastamento da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é outro triângulo, com um vértice em **V**<sub>2</sub> e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor cota da projeção frontal da base).

### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. A determinação das projeções do ponto **I** foi direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante – tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso **l**) e um plano duplamente projetante (o plano  $\pi$ ).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base – o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas **t** e **t'** mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas **t** e **t'** em relação à base do cone, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Assim, recorreu-se a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi o traço frontal do plano ( $f_{\pi}$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_{\pi} \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, rebateram-se os pontos **O** e **I**, o que nos permitiu determinar **O**<sub>r</sub> e **I**<sub>r</sub>. Com o compasso, fazendo centro em **O**<sub>r</sub> e com 4,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em rebatimento, em verdadeira grandeza (que é tangente aos dois traços do plano  $\pi$ , em rebatimento). Em rebatimento, é possível constatar que o ponto **I**<sub>r</sub> é interior à circunferência que delimita a base. Assim, qualquer reta que passe pelo ponto **I** é necessariamente **secante** à base – não há qualquer reta tangente à base passando pelo ponto **I**. Por isso mesmo, se conclui que, nesta situação, não existe **nenhum plano tangente luz/sombra** (qualquer plano que contenha o ponto **I** é necessariamente um **plano secante** ao cone).

4. Tendo em conta que não há nenhum plano tangente luz/sombra, também não há nenhuma **geratriz separatriz luz/sombra** (não há qualquer geratriz de contacto ou de tangência).

Dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é apenas a base do cone, sendo que a totalidade da superfície lateral do sólido está **em sombra**. Assim, a **linha separatriz luz/sombra**, nesta situação, é a própria circunferência que delimita a base.

Em **projeção horizontal**, a superfície lateral do cone (que está em sombra) é visível na parte compreendida entre as projeções horizontais das duas geratrizes do contorno aparente horizontal – essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**.

Em **projeção frontal**, a superfície lateral do cone (que está em sombra) é visível na parte compreendida entre as projeções frontais das duas geratrizes do contorno aparente frontal – essa é a **sombra própria** a assinalar **em projeção frontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação da sombra projetada do cone:

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** que é a própria circunferência que delimita a base do cone. Nesse sentido, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção, nesta situação, é a sombra de um círculo (o círculo que é a base do cone). Assim, o **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Para evitar uma maior complexidade da resolução gráfica apresentada, optou-se por simplificar este procedimento com um raciocínio simples. Dado o facto de a direção luminosa ser a **direção luminosa convencional**, o **plano luz/sombra passante** é o próprio  $\beta_{1/3}$ . Assim, com vista a uma maior economia de traçados que possibilite uma melhor leitura da resolução proposta, não se desenharam as projeções do raio luminoso que nos permitiria determinar a reta  $i$  (a reta de interseção do plano  $\pi$  com o **plano luz/sombra passante** – o  $\beta_{1/3}$ ), tendo-se determinado, imediatamente, as suas projeções. A reta  $i$  (a reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ ) é uma **reta de perfil passante** do plano  $\pi$ , que faz, com os traços do plano  $\pi$ , ângulos de  $45^\circ$ .

Note que, caso a direção luminosa não fosse a direção convencional, a determinação da reta  $i$  passaria, **necessariamente** pela determinação do ponto de interseção do plano  $\pi$  com um raio luz/sombra passante com a direção luminosa dada (à semelhança das restantes situações já apresentadas).

Tendo em conta que tanto o círculo (a base do cone) como a reta  $i$  estão contidos num plano de perfil, as projeções das duas figuras não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível averiguar a posição da reta  $i$  em relação ao círculo. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano  $\pi$  já efetuado. Assim, desenhou-se a reta  $i_r$  (a reta  $i$  no rebatimento efetuado) – a reta  $i_r$  está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $X$ , que é um ponto fixo, pois situa-se na charneira) e por uma direção (faz ângulos de  $45^\circ$  com os dois traços do plano  $\pi$ , em rebatimento).

Sublinha-se que, das duas hipóteses de medir o ângulo de  $45^\circ$  a partir do ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\pi$ , apenas a que a resolução apresenta se refere à reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{1/3}$ . Note que a reta  $i$  tem de atravessar os  $1^\circ$  e  $3^\circ$  Diedros e que o ponto  $O$  é um ponto do  $1^\circ$  Diedro. Assim, a reta  $i_r$  (a reta  $i$  em rebatimento) tem de passar pelo quadrante do plano em que se situa  $O_r$  – na outra hipótese de medir o ângulo de  $45^\circ$  a reta não passaria pelo quadrante onde se situa  $O_r$  (e, por isso mesmo, seria a reta de interseção do plano  $\pi$  com o  $\beta_{2/4}$ ).

Nesta situação em particular (em que o ponto  $V$  é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , salienta-se que a reta  $i_r$  passa pelo ponto  $I_r$ . De facto, exatamente porque o ponto  $V$  pertence ao  $\beta_{1/3}$  e porque se trata da direção convencional da luz, o raio luminoso que passa pelo ponto  $V$  é necessariamente uma reta do  $\beta_{1/3}$  que é, neste caso, o **plano luz/sombra passante**.

A reta  $i_r$  é secante à circunferência – a reta  $i_r$  corta o círculo (em rebatimento) nos pontos  $Q_r$  e  $Q'_r$ , pelo que é possível concluir que o círculo produz sombra nos dois planos de projeção. A **semicircunferência  $QQ'$**  de maior cota e menor afastamento produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) e a **semicircunferência  $QQ'$**  de menor cota e maior afastamento produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**).

Em seguida, inverteu-se o rebatimento dos pontos  $Q$  e  $Q'$  e determinaram-se as suas projeções frontais (note que não se determinaram as projeções horizontais dos dois pontos, com vista a não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações e porque estas não são necessárias à resolução do exercício). Em seguida, por  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ ) conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se  $Q_s$  (a sombra do ponto  $Q$ ), que se situa no eixo  $X$ . De forma semelhante, por  $Q'_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q'$ ) conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se  $Q'_s$  (a sombra do ponto  $Q'$ ), que se situa igualmente no eixo  $X$ . O segmento de reta  $[Q_s Q'_s]$  é, assim, a linha de quebra da sombra do círculo.

#### Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Frontal de Projeção:

A **sombra projetada da semicircunferência  $QQ'$**  (de maior cota e de menor afastamento) no **Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra da semicircunferência  $QQ'$  no Plano Frontal de Projeção, é necessário inscrever a semicircunferência  $c$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é  $3/4$  do quadrado total (os  $3/4$  que a figura apresenta e que englobam a semicircunferência  $QQ'$  na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos** do **segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam a semicircunferência  $QQ'$  permitem-nos determinar mais **três pontos** do **segmento de elipse**.

Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra projetada do centro do círculo (o ponto  $O$ ) no Plano Frontal de Projeção –  $O_s$  é a sombra real do ponto  $O$  (situa-se no eixo  $X$ ) e é simultaneamente o traço frontal e o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $O$ . A sombra dos  $3/4$  do quadrado no Plano Frontal de Projeção corresponde a  $3/4$  de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses  $3/4$  de paralelogramo, cujo centro é  $O_s$ .

O lado de menor afastamento do polígono está contido no traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ), que se situa no **SPFS**, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio segmento. Em seguida, determinaram-se as sombras projetadas no Plano Frontal de Projeção dos pontos **A**, **B**, **C** e **D** – **A** e **B** são os extremos do diâmetro de topo da circunferência e **C** e **D** são os extremos do diâmetro vertical da circunferência.

Nesse sentido, e porque o ponto **A** se situa no Plano Frontal de Projeção, a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $A_{s_2} \equiv A_2$ .  $C_{s_2}$  é a sombra do ponto **C** no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFS** (é uma sombra real).  $B_{v_2}$  é a sombra do ponto **B** no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).  $D_{v_2}$  é a sombra do ponto **D** no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As sombras dos lados de topo da figura são paralelas ao segmento  $[A_{s_2}B_{v_2}]$  (que é a sombra da mediana de topo da figura) e passam por  $C_{s_2}$  e por  $D_{v_2}$ . A sombra do lado vertical de maior afastamento da figura passa por  $B_{v_2}$  e é paralela ao segmento  $[C_{s_2}D_{v_2}]$  (que é a sombra da mediana vertical da figura). Estes raciocínios permitiram-nos desenhar o polígono que é a sombra projetada (no Plano Frontal de Projeção) dos 3/4 do quadrado.

Os pontos  $A_{s_2}$ ,  $C_{s_2}$ ,  $B_{v_2}$  e  $D_{v_2}$  são, mediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente. Tenha em conta que, por uma questão de maior precisão no desenho da curva (à mão livre), se optou por se determinar a sombra do arco  $\overline{BQQ'D}$ , que engloba a semicircunferência  $QQ'$  na sua totalidade.

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O_s$  e têm extremos nos vértices do paralelogramo).

Os **três pontos** em que o arco  $\overline{BQQ'D}$  corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que o arco  $\overline{BQQ'D}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções frontais. Pelas projeções frontais destes pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Note que os pontos  $Q$  e  $Q'$  são, imediatamente, dois desses três pontos. Assim, este procedimento, na prática, permitiu-nos, apenas, determinar mais **um ponto** da curva, para além dos **quatro pontos** anteriormente determinados dos dois pontos de quebra igualmente já determinados ( $Q_s$  e  $Q'_s$ ). -- isto perfaz um total de **sete pontos**. Os sete pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção do arco  $\overline{BQQ'D}$ ), respeitando as situações de tangência aos lados do paralelogramo atrás referidas.

Note que existem dois troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** da semicircunferência  $QQ'$ . Esses troços são os dois troços que se situam para baixo do eixo  $X$  (situam-se no **SPFI** e, por isso mesmo, são sombras virtuais). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base do cone no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada da semicircunferência  $QQ'$**  (de menor cota e de maior afastamento) no **Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é outro segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra da semicircunferência  $QQ'$  no Plano Horizontal de Projeção, é necessário inscrever a semicircunferência  $c$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam a semicircunferência  $QQ'$  na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam a semicircunferência  $QQ'$  permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**.

Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Para tal há que, em primeiro lugar, determinar a sombra projetada do centro do círculo (o ponto  $O$ ) no Plano Horizontal de Projeção, que é  $O_s$ . A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Horizontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo, cujo centro é  $O_s$ .

O lado inferior do polígono está contido no traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ), que se situa no **SPHA**, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio segmento. Em seguida, determinaram-se as sombras projetadas no Plano Horizontal de Projeção dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  –  $A$  e  $B$  são os extremos do diâmetro de topo da circunferência e  $C$  e  $D$  são os extremos do diâmetro vertical da circunferência.

Nesse sentido, e porque o ponto  $D$  se situa no Plano Horizontal de Projeção, a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente,  $D_{s_1} \equiv D_1$ .  $B_{s_1}$  é a sombra do ponto  $B$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).  $A_{v_1}$  é a sombra do ponto  $A$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHP** (é uma sombra virtual).  $C_{v_1}$  é a sombra do ponto  $C$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHP** (é uma sombra virtual).

As sombras dos lados verticais da figura são paralelas ao segmento  $[D_{s_1}C_{v_1}]$  (que é a sombra da mediana vertical da figura) e passam por  $B_{s_1}$  e por  $A_{v_1}$ . A sombra do lado superior da figura (que é de topo) passa por  $C_{v_1}$  e é paralela ao segmento  $[A_{v_1}B_{s_1}]$  (que é a sombra da mediana de topo da figura). Estes raciocínios permitiram-nos desenhar o polígono que é a sombra projetada (no Plano Horizontal de Projeção) dos 3/4 do quadrado.

Os pontos  $D_{s_1}$ ,  $B_{s_1}$ ,  $A_{v_1}$  e  $C_{v_1}$  são, mediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente. Tenha em conta que, por uma questão de maior precisão no desenho da curva (à mão livre), se optou por se determinar a sombra do arco  $\overline{AQ'QC}$ , que engloba a semicircunferência  $QQ'$  na sua totalidade.

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo (que passam por  $O_s$  e têm extremos nos vértices do paralelogramo).

Os **três pontos** em que o arco  $\overline{AQ'QC}$  corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que o arco  $\overline{AQ'QC}$  corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções horizontais. Pelas projeções horizontais destes pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que os pontos **Q** e **Q'** são, imediatamente, dois desses três pontos. Assim, este procedimento, na prática, permitiu-nos, apenas, determinar mais **um ponto** da curva, para além dos **quatro pontos** anteriormente determinados dos dois pontos de quebra igualmente já determinados (**Q<sub>s</sub>** e **Q'<sub>s</sub>**) – isto perfaz um total de **sete pontos**. Os sete pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção do arco **AQ'QC**), respeitando as situações de tangência aos lados do paralelogramo atrás referidas.

Note que existem dois troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** da semicircunferência **QQ'**. Esses troços são os dois troços que se situam para cima do eixo **X** (situam-se no **SPHP** e, por isso mesmo, são sombras virtuais). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho das duas curvas permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelos segmentos de elipses desenhados. Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

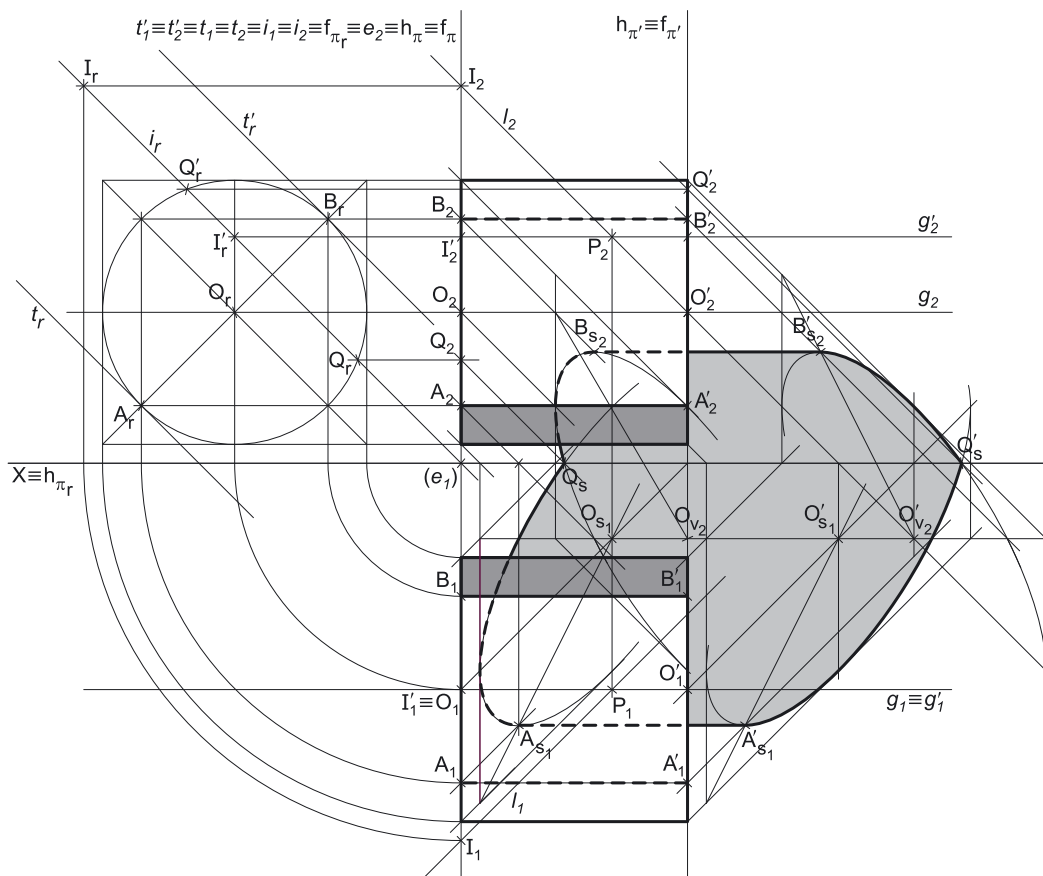
Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano  $\pi$  (o plano que contém a base), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse ou, ainda, das retas **i**, **t** e **t'** em rebatimento.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cone, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

## 974.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O** (o centro da base mais à esquerda do cilindro), pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do cilindro) pelos seus traços, contendo o ponto **O** – o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal ( $f_\pi$ ) passa pela projeção frontal do ponto **O** ( $O_2$ ), tal como o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** ( $O_1$ ). A direção convencional da luz faz ângulos de  $45^\circ$  de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

## Resolução:

### Determinação das projeções do cilindro:

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases o que, neste caso, corresponde à diferença das abcissas dos planos das bases. Uma vez que o cilindro tem 6 cm de altura, o plano de perfil que contém a base mais à direita (o plano  $\pi'$ ) situa-se 6 cm para a direita do plano  $\pi$ , o que nos permitiu representar o plano  $\pi'$  pelos seus traços.

Trata-se de um cilindro de revolução, pelo que as suas geratrizes (bem como o seu eixo) são ortogonais aos planos das bases. Assim, pelas projeções do ponto **O** (o centro da base mais à esquerda do cilindro), conduziram-se as projeções da reta **g**, a reta fronto-horizontal que contém o eixo do cilindro e determinaram-se as projeções do ponto **O'** (o centro da base mais à direita do cilindro). As projeções do ponto **O'** tiveram determinação imediata, pois tratou-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **g**) com um plano duplamente projetante (o plano  $\pi'$ ).

O plano que contém a base mais à esquerda do cilindro (o plano  $\pi$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo (a base mais à esquerda do sólido) – tendo em conta que ambas as projeções sofrem a redução máxima, as duas projeções do círculo reduzem-se a segmentos de reta sobre os traços homónimos do plano  $\pi$ .

Assim, a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta com 7 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual **O**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O**) é o ponto médio – a projeção horizontal do círculo corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal do círculo é um segmento de reta com 7 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) do qual **O**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O**) é o ponto médio – a projeção frontal do círculo corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.

O plano que contém a base mais à direita do cilindro (o plano  $\pi'$ ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo (a base mais à direita do sólido). À semelhança do exposto para a base mais à esquerda. Assim, a projeção horizontal da base é um segmento de reta com 7 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) de que **O'**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **O'**) é o seu ponto médio – a projeção horizontal da base corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal da base é um segmento de reta com 7 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) de que **O'**<sub>2</sub> (a projeção frontal do ponto **O'**) é o seu ponto médio – a projeção frontal da base corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.

Em seguida, desenharam-se as projeções dos contornos aparentes do cilindro. A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido é um **retângulo**, cujos vértices são os pontos de maior e menor afastamento das projeções horizontais das duas bases. A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro é outro **retângulo**, cujos vértices são os pontos de maior e de menor cota das projeções frontais das duas bases.

### Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao cilindro, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

**1.** Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **g'**, fronto-horizontal (paralela às geratrizes do cilindro), e a reta **l** (um raio luminoso, com a direção convencional da luz). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano  $\lambda$ ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.

Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a projeção horizontal do ponto **P** ( $P_1$ ) sobre a projeção horizontal da reta **g** ( $g_1$ ), pois isso fará com as retas **g** e **g'** tenham as suas projeções horizontais coincidentes. No entanto, esse procedimento não é absolutamente necessário.

Por outro lado, optou-se, ainda, por fazer com que o ponto **P** seja um ponto do  $\beta_{1/3}$ . Essa opção justificou-se, também, por uma maior economia de traçados na resolução gráfica. De alguma forma, será necessário o recurso ao plano passante luz/sombra, para a determinação de eventuais pontos de quebra das sombras das bases. Tendo em conta que o ponto **P** é um ponto do  $\beta_{1/3}$ , o plano definido pela reta **g'** (uma reta fronto-horizontal) e pelo raio luminoso **l** (que é, nesse caso, um raio luminoso passante), é necessariamente o plano passante luz/sombra nesta situação, plano esse que, porque se trata da direção convencional da luz, é o próprio  $\beta_{1/3}$ .

**2.** Determinou-se a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas retas **g'** e **l** (o plano  $\lambda$ , que é o próprio  $\beta_{1/3}$ ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base mais à esquerda – a base que está contida no plano  $\pi$ ). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **g'** com o plano  $\pi$ ) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o plano  $\pi$ ).

A determinação das projeções dos pontos **I** e **I'** foi direta, pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre retas não projetantes e um plano duplamente projetante).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

3. Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta  $i$  – as retas  $t$  e  $t'$ , que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base (o plano  $\pi$ ).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas  $t$  e  $t'$  mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas  $t$  e  $t'$  em relação à base do cilindro, de forma direta em projeções, nem sequer o paralelismo das retas  $t$  e  $t'$  em relação à reta  $i$  – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Nesse sentido, recorreu-se a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ) – tem-se, imediatamente,  $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$ . Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, rebateram-se os pontos  $O$ ,  $I$  e  $I'$ , o que nos permitiu determinar  $O_r$ ,  $I_r$  e  $I'_r$ . Com o compasso, fazendo centro em  $O_r$  e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a base mais à esquerda em rebatimento, em verdadeira grandeza. Pelos pontos  $I_r$  e  $I'_r$  conduziu-se a reta  $i_r$  (a reta  $i$  rebatida, que está definida por dois pontos). Em seguida, conduziram-se as retas  $t_r$  e  $t'_r$  (as retas  $t$  e  $t'$  em rebatimento), paralelas à reta  $i_r$  – a reta  $t_r$  é tangente à base em rebatimento no ponto  $A_r$  e é paralela à reta  $i_r$  (está definida por um ponto e uma direção) e a reta  $t'_r$  é tangente à base em rebatimento no ponto  $B_r$  e é também paralela à reta  $i_r$  (está igualmente definida por um ponto e uma direção).

Tenha em conta que a determinação das retas  $t$  e  $t'$  se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência em rebatimento) que são paralelas a uma reta dada (a reta  $i_r$ ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos  $A_r$  e  $B_r$ .

4. As retas  $t$  e  $t'$  são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente. Assim, as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos  $\lambda$  e  $\lambda'$  são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  – note que o ponto  $A'$  é o extremo da geratriz  $[AA']$  que se situa na base mais à direita do cilindro, tal como o ponto  $B'$  é o extremo da geratriz  $[BB']$  que se situa na base mais à direita do cilindro. A geratriz  $[AA']$  é visível em projeção frontal e invisível em projeção horizontal. A geratriz  $[BB']$  é invisível em projeção frontal e visível em projeção horizontal.

As geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência  $\widehat{AB}$  de maior afastamento. A base mais à esquerda do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência  $\widehat{AB}$  de menor afastamento está **em sombra**, assim, como a base mais à direita do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada  $[ABB'A']$ , que integra as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ , bem como a **semicircunferência  $\widehat{AB}$  de menor afastamento** (da base mais à esquerda) e a **semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  de maior afastamento** (da base mais à direita).

Em **projeção frontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está **em sombra** e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz  $[AA']$  e a projeção frontal da geratriz de menor cota do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base mais à direita (que está em sombra) é invisível em projeção frontal (por ser projetante frontal).

Em **projeção horizontal**, a parte da superfície lateral do cilindro que está **em sombra** e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz  $[BB']$  e a projeção horizontal da geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base mais à direita (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal (por ser projetante horizontal).

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

*Determinação da sombra projetada do cilindro:*

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.  $A_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $A$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A$ .  $A'_{s_1}$  é a sombra real do ponto  $A'$  (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por  $A'$ .  $B_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $B$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $B$ .  $B'_{s_2}$  é a sombra real do ponto  $B'$  (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que passa por  $B'$ . As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

$A_{s_1}$  e  $A'_{s_1}$  situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz  $[AA']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[AA']$ .  $B_{s_2}$  e  $B'_{s_2}$  situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz  $[BB']$  não admite ponto de quebra – o segmento  $[B_{s_2}B'_{s_2}]$  é a sombra projetada da geratriz  $[BB']$ .

Tendo em conta que  $A_{s_1}$  se situa no **SPHA** e  $B_{s_2}$  se situa no **SPFS**, é possível concluir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) admite um ponto de quebra. Tendo em conta que  $A'_{s_1}$  se situa no **SPHA** e  $B'_{s_2}$  se situa no **SPFS**, é possível concluir que a sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  (que integra a linha separatriz luz/sombra) admite um ponto de quebra. Como em situações semelhantes, a determinação dos pontos de quebra das sombras de circunferências (ou de arcos de circunferências) deve processar-se com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação do ponto de quebra da sombra da base mais à esquerda do cilindro:

Para evitar uma maior complexidade da resolução gráfica apresentada, e como atrás exposto, o plano definido pelas retas  $g'$  e  $l$  (o plano  $\lambda$ , que é o plano que tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra) é, imediatamente, o **plano luz/sombra passante**. Assim, a reta  $i$  é, também, a reta de interseção do plano luz/sombra passante com o plano  $\pi$  (o plano que contém a base mais à esquerda do cilindro).

A reta  $i_r$  é secante à circunferência – a reta  $i_r$  corta a semicircunferência  $\widehat{A_r B_r}$  (a semicircunferência da base mais à esquerda que integra a linha separatriz luz/sombra – a semicircunferência de menor cota) no ponto  $Q_r$ , pelo que é possível concluir que a semicircunferência  $\widehat{AB}$  produz sombra nos dois planos de projeção. Inverteu-se o rebatimento e determinou-se a projeção frontal do ponto  $Q$  (para não sobrecarregar a resolução com excesso de notações, não se determinou a sua projeção horizontal, pois é desnecessária). Pela projeção frontal do ponto  $Q$  conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se  $Q_s$  – a sombra do ponto  $Q$ , que se situa no eixo  $X$ . O ponto  $Q_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra da semicircunferência  $\widehat{AB}$  (o ponto de quebra que se situa entre  $A_{s_1}$  e  $B_{s_2}$ ).

O arco  $\widehat{AQ}$  (da base mais à esquerda) produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é um **segmento de elipse**, pois o arco não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O arco  $\widehat{QB}$  (da base mais à esquerda) produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é outro **segmento de elipse**, pois o arco também não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

## Determinação do ponto de quebra da sombra da base mais à direita do cilindro:

Em seguida, há que determinar o ponto de quebra da sombra do arco  $\widehat{A'B'}$  (o ponto de quebra que se situa entre  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$ ). Nesse sentido, estabeleceu-se uma correspondência entre as duas bases, para evitar um outro rebatimento (o rebatimento do plano  $\pi'$ , o plano que contém a base mais à direita do cilindro). A reta  $i_r$  é secante à circunferência – a reta  $i_r$  corta a outra semicircunferência  $\widehat{A_r B_r}$  (a semicircunferência de maior cota) no ponto  $Q'_r$ , pelo que é possível concluir que essa outra semicircunferência  $\widehat{AB}$  também produziria sombra nos dois planos de projeção. Inverteu-se o rebatimento e determinou-se a projeção frontal do ponto  $Q'$  (para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações, não se determinou a sua projeção horizontal, pois é desnecessária) – o ponto  $Q'$  é o extremo mais à esquerda de uma geratriz do cilindro (a geratriz  $[Q'Q'']$ ). Assim, determinou-se a projeção frontal do ponto  $Q''$ , que é o extremo mais à direita dessa geratriz (não se determinou a sua projeção horizontal, pois é desnecessária).

O ponto  $Q''$  é, assim, o ponto cuja sombra é o ponto de quebra da sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  que integra a linha separatriz luz/sombra. Nesse sentido, pela projeção frontal do ponto  $Q''$  conduziu-se a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se  $Q''_s$  – a sombra do ponto  $Q''$ , que se situa no eixo  $X$ . O ponto  $Q''_s$  é, assim, o ponto de quebra da sombra da semicircunferência  $\widehat{A'B'}$  (a outra semicircunferência da linha separatriz luz/sombra do cilindro). Nesse sentido, o ponto  $Q''_s$  é o ponto de quebra que se situa entre  $A'_{s_1}$  e  $B'_{s_2}$ .

O arco  $\widehat{A'Q''}$  (da base mais à direita) produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é um **segmento de elipse**, pois o arco não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O arco  $\widehat{Q''B'}$  (da base mais à direita) produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é outro **segmento de elipse**, pois o arco também não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

## Determinação da sombra projetada da base mais à esquerda do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:

A **sombra projetada do arco  $\widehat{AQ}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{AQ}$  no Plano Horizontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{AQ}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado superior é o diâmetro de topo da circunferência. Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{AQ}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{AQ}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de menor cota, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $\widehat{AQ}$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O$  ( $O_{s_1}$ ) no Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O_{s_1}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).

Dois dos lados do «meio quadrado» são de topo (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que as suas sombras projetadas no Plano Horizontal de Projeção são igualmente de topo. Nesse sentido, determinaram-se as sombras dos vértices de menor cota do «meio quadrado», o que nos permitiu desenhar a sombra do lado inferior da figura. Em seguida, determinou-se a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um dos vértices de maior cota do «meio quadrado». As sombras dos lados de topo do «meio quadrado» são de topo e passam pelas sombras correspondentes dos vértices que lhes pertencem. As sombras dos lados verticais estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos. Note que a sombra do lado de maior cota do «meio quadrado» passa por  $O_{s_1}$ .

Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções horizontais. Pelas projeções horizontais destes pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, imediatamente, o ponto  $A_{s1}$ . Aos cinco pontos determinados acresce o ponto  $Q_s$ , o que perfaz um total de **seis pontos**. Os seis pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  (o segmento  $[A_s A'_s]$  no ponto  $A_{s1}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{AQ}$ . Esses troços são o troço que se situa para a direita de  $A_{s1}$  (um deles) e o troço que se situa para cima de  $Q_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para cima de  $Q_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPHP**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base mais à esquerda do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{QB}$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{QB}$  no Plano Frontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{QB}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado de maior afastamento é o diâmetro vertical da circunferência. Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{QB}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento.

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{QB}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de menor afastamento, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $\widehat{QB}$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O$  ( $O_{v2}$ ) no Plano Frontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O_{v2}$  é a sombra do ponto  $O$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).

Dois dos lados do «meio quadrado» são verticais (paralelos ao Plano Frontal de Projeção), pelo que as suas sombras projetadas no Plano Frontal de Projeção são igualmente verticais. Nesse sentido, determinaram-se as sombras dos vértices de maior cota do «meio quadrado», o que nos permitiu desenhar a sombra do lado superior da figura. Em seguida, determinou-se a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um dos vértices de menor cota do «meio quadrado». As sombras dos lados verticais do «meio quadrado» são verticais e passam pelas sombras correspondentes dos vértices que lhes pertencem. As sombras dos lados de topo estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos, o que nos permitiu concluir a construção do paralelogramo.

Por fim, por  $O_{v2}$  conduziram-se a parte correspondente da sombra da mediana de topo (que é paralela às sombras dos lados de topo do «meio quadrado»), bem como as partes correspondentes das diagonais do quadrado. Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções frontais. Pelas projeções frontais destes pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, imediatamente, o ponto  $B_{s2}$ . Aos cinco pontos determinados acresce o ponto  $Q_s$ , o que perfaz um total de **seis pontos**. Os seis pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  (o segmento  $[B_{s2} B'_{s2}]$  no ponto  $B_{s2}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{QB}$ . Esses troços são o troço que se situa para a direita de  $B_{s2}$  (um deles) e o troço que se situa para baixo de  $Q_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para baixo de  $Q_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base mais à direita do cilindro no Plano Horizontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $\widehat{A'Q''}$  no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $\widehat{A'Q''}$  no Plano Horizontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $\widehat{A'Q''}$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi'$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado de menor afastamento é o diâmetro vertical da circunferência. Essa construção tem de ser executada em rebatimento, pois o plano  $\pi'$  é um plano de perfil e, dessa forma, as projeções do que quer que esteja contido no plano não verifica o **Critério de Reversibilidade**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, como anteriormente se referiu para a determinação do ponto  $Q''$  (o ponto cuja sombra é o ponto de quebra da sombra da base mais à direita), é possível efetuar todos os raciocínios e construções referentes à base mais à direita, sobre o rebatimento da base mais à esquerda (do plano  $\pi$ ) e, em seguida, transportar os elementos assim determinados para a base mais à direita, através da direção das geratrizes (que são fronto-horizontais).

Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{A'Q''}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento (no rebatimento da base mais à esquerda).

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{A'Q''}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de maior afastamento, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $\widehat{A'Q''}$  na sua totalidade.

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O'$  ( $O'_{s_1}$ ) no Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O'_{s_1}$  é a sombra do ponto  $O'$  no Plano Horizontal de Projeção e situa-se no **SPHA** (é uma sombra real).

Dois dos lados do «meio quadrado» são de topo (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que as suas sombras projetadas no Plano Horizontal de Projeção são igualmente de topo. Nesse sentido, determinaram-se as sombras dos vértices de menor cota do «meio quadrado», o que nos permitiu desenhar a sombra do lado inferior da figura. Em seguida, determinou-se a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um dos vértices de maior cota do «meio quadrado». As sombras dos lados de topo do «meio quadrado» são de topo e passam pelas sombras correspondentes dos vértices que lhes pertencem. As sombras dos lados verticais estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que contêm os seus extremos. Note que a sombra do lado de menor afastamento do «meio quadrado» passa por  $O'_{s_1}$ .

Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, no rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções horizontais, sobre a projeção horizontal da base mais à esquerda. Em seguida, transportaram-se esses pontos para a projeção horizontal da base mais à direita, através da direção das geratrizes. Por fim, pelas projeções horizontais destes pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, imediatamente, o ponto  $A'_{s_1}$ . Aos cinco pontos determinados acresce o ponto  $Q''_s$ , o que perfaz um total de **seis pontos**. Os seis pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[AA']$  (o segmento  $[A_{s_1}A'_{s_1}]$  no ponto  $A'_{s_1}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{A'Q''}$ . Esses troços são o troço que se situa para a esquerda de  $A'_{s_1}$  (um deles) e o troço que se situa para cima de  $Q''_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para cima de  $Q''_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPHP**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuidade da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

*Determinação da sombra projetada da base mais à esquerda do cilindro no Plano Frontal de Projeção:*

A **sombra projetada do arco  $Q''B'$  no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **862**.

Para determinar a sombra do arco  $Q''B'$  no Plano Frontal de Projeção, é necessário inscrever o arco  $Q''B'$  na parte correspondente de um quadrado de lados paralelos aos planos de projeção (lados paralelos aos traços do plano  $\pi$ ) – a parte correspondente é um «meio quadrado» cujo lado inferior é o diâmetro de topo da circunferência. Essa construção tem de ser executada em rebatimento, pois o plano  $\pi$  é um plano de perfil e, dessa forma, as projeções do que quer que esteja contido no plano não verifica o **CrITÉrio de Reversibilidade**.

Por outro lado, como anteriormente se referiu para a determinação do ponto  $Q''$  (o ponto cuja sombra é o ponto de quebra da sombra da base mais à direita), é possível efetuar todos os raciocínios e construções referentes à base mais à direita, sobre o rebatimento da base mais à esquerda (do plano  $\pi$ ) e, em seguida, transportar os elementos assim determinados para a base mais à direita, através da direção das geratrizes (que são fronto-horizontais).

Assim, construiu-se, em rebatimento, o «meio quadrado» em que se inscreve o arco  $\widehat{Q''B'}$ , de lados paralelos aos traços do plano  $\pi$  em rebatimento (no rebatimento da base mais à esquerda).

Em seguida, em rebatimento, desenharam-se as partes das medianas e das diagonais do quadrado que se situam no interior do «meio quadrado», de forma a identificar a parte do quadrado que é relevante para a sombra pretendida. Para desenhar, com alguma precisão, a curva que é a sombra do arco  $\widehat{Q''B'}$ , optou-se por se determinar primeiro a sombra da semicircunferência de maior cota, que se inscreve nesse «meio quadrado» e que engloba o arco  $\widehat{Q''B'}$  na sua totalidade.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, determinou-se a sombra projetada do ponto  $O'$  ( $O'_{v_2}$ ) no Plano Frontal de Projeção e construiu-se o paralelogramo que é a sombra projetada do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, de acordo com os procedimentos explicitados nos relatórios dos exercícios anteriores.  $O'_{v_2}$  é a sombra do ponto  $O'$  no Plano Frontal de Projeção e situa-se no **SPFI** (é uma sombra virtual).

Dois dos lados do «meio quadrado» são verticais (paralelos ao Plano Frontal de Projeção), pelo que as suas sombras projetadas no Plano Frontal de Projeção são igualmente verticais. Nesse sentido, determinaram-se as sombras dos vértices de maior cota do «meio quadrado», o que nos permitiu desenhar a sombra do lado superior da figura. Em seguida, determinou-se a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um dos vértices de menor cota do «meio quadrado». As sombras dos lados verticais do «meio quadrado» são verticais e passam pelas sombras correspondentes dos vértices que lhes pertencem. Por outro lado, tendo em conta que a sombra do «meio quadrado» é um paralelogramo (cujos lados são paralelos dois a dois), foi possível desenhar o lado inferior do paralelogramo, que passa por  $O'_{v_2}$  e é a sombra do lado inferior do «meio quadrado».

Por fim, por  $O'_{v_2}$  conduziram-se a parte correspondente da sombra da mediana vertical (que é paralela às sombras dos lados verticais do «meio quadrado»), bem como as partes correspondentes das diagonais do quadrado. Os pontos em que as partes correspondentes das medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, imediatamente, **três pontos do segmento de elipse** e são, também, os pontos em que a curva é tangente aos lados correspondentes do paralelogramo.

Já temos **três pontos** para o desenho da curva. Os pontos em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado permitir-nos-ão determinar mais **dois pontos** da curva. Assim, desenharam-se, no paralelogramo, as linhas que são as sombras daquelas linhas do «meio quadrado». Em seguida, no rebatimento do plano  $\pi$ , determinaram-se os pontos (que não se identificaram) em que a semicircunferência corta as partes correspondentes das diagonais do quadrado e inverteu-se o seu rebatimento, determinando-se as suas projeções frontais, sobre a projeção frontal da base mais à esquerda. Em seguida, transportaram-se esses pontos para a projeção frontal da base mais à direita, através da direção das geratrizes. Por fim, pelas projeções frontais destes pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinam-se as suas sombras, sobre as sombras das linhas correspondentes.

Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos do segmento de elipse**. Note que um desses pontos é, imediatamente, o ponto  $B'_{s_2}$ . Aos cinco pontos determinados acresce o ponto  $Q''_s$ , o que perfaz um total de **seis pontos**. Os seis pontos determinados permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva (que é a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da semicircunferência). Note que a curva é **concordante** com a sombra da geratriz  $[BB']$  (o segmento  $[B_s B'_{s_2}]$  no ponto  $B'_{s_2}$ ).

Note que, na realidade, existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da **sombra real** do arco  $\widehat{Q''B'}$ . Esses troços são o troço que se situa para a esquerda de  $B'_{s_2}$  (um deles) e o troço que se situa para baixo de  $Q''_s$  (o outro troço). O troço da curva que se situa para baixo de  $Q''_s$  é, na realidade, uma sombra virtual, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade do desenho destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho das **quatro curvas** permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção (atendendo às invisibilidades existentes), que é composta pelos quatro segmentos de elipses desenhados e pelas sombras das geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$  (os segmentos  $[A_s A'_{s_1}]$  e  $[B_s B'_{s_2}]$ ) – note que, no desenho do contorno da sombra projetada do cilindro nos planos de projeção, se atendeu às invisibilidades verificadas (parte da sombra projetada do cilindro é invisível, em ambas as projeções, pois está oculta pelo próprio cilindro).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área da sombra com uma **mancha clara e uniforme** – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

#### Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços dos planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos que contêm as bases), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes à determinação da orientação dos planos tangentes luz/sombra, dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $\pi$ , de todos os traçados referentes à construção dos quatro segmentos de elipse, da reta **g** ou, ainda, das retas **i**, **t** e **t'** em rebatimento).

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado (o cilindro, neste caso) como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



## 22 INTRODUÇÃO

### 975.

Por **perspetiva** entende-se toda a **representação bidimensional** de um **objeto tridimensional**, na qual é possível observar, de forma direta, as três dimensões do objeto.

### 976.

As **Perspetivas Axonométricas** constituem-se como um **Método de Representação** ou, mais concretamente, como um conjunto de Métodos de Representação, se atendermos à diversidade de perspetivas axonométricas que existem.

Por **Sistema de Projeção** entende-se um conjunto de elementos que nos permite representar (projetar) um dado objeto sobre uma superfície plana (bidimensional), independentemente da informação perdida, enquanto **Método de Representação** é todo o processo através do qual se representam bidimensionalmente os objetos, a partir dos **Sistemas de Projeção** conhecidos, mas verificando-se, sempre, o **Critério de Reversibilidade**.

Nesse sentido, as **Perspetivas Axonométricas** nunca poderão ser consideradas como um **Sistema de Projeção**, pois as **Perspetivas Axonométricas** visam, precisamente, a representação bidimensional de formas e objetos, mas verificando-se, sempre, o **Critério de Reversibilidade**. Por outro lado, as várias **Perspetivas Axonométricas** provêm de dois **Sistemas de Projeção** distintos – as **Axonometrias Ortogonais** que, tal como o nome indica, provêm do **Sistema de Projeção Ortogonal**, e as **Axonometrias Oblíquas (ou Clinogonais)**, que provêm do **Sistema de Projeção Oblíqua (ou Clinogonal)**, ambos sendo Subsistemas do **Sistema de Projeção Paralela ou Cilíndrica**.

### 977.

Na representação de um objeto em **Dupla Projeção Ortogonal**, o objeto é representado por **duas projeções** (resultado da representação do objeto em **dois planos de projeção** distintos mas complementares), sendo que a informação perdida numa das projeções é recuperada na outra projeção, de forma a verificar-se o **Critério de Reversibilidade**.

Na representação desse mesmo objeto numa **perspetiva**, o objeto é representado por **uma única projeção** (resultado da representação do objeto **num único plano de projeção**), na qual se observam imediatamente as três dimensões do objeto verificando-se, dessa forma, o **Critério de Reversibilidade**.

### 978.

Numa **perspetiva axonométrica**, o objeto é representado num plano de projeção a partir do **Sistema de Projeção Paralela ou Cilíndrica** (nas suas variantes **Ortogonal** ou **Oblíqua**), sendo uma representação que, apesar de permitir uma perceção imediata do objeto representado (da sua forma e da sua volumetria), se distancia da perceção visual real do mesmo. Por outro lado, este tipo de representação permite-nos acrescentar determinado tipo de informação sobre o objeto, nomeadamente a sua cotagem.

Já numa **perspetiva cónica**, o objeto é representado num plano de projeção a partir do **Sistema de Projeção Cónica ou Central**, tratando-se de uma representação bastante próxima da perceção visual do mesmo e que, ao contrário da **perspetiva axonométrica** (qualquer **perspetiva axonométrica**), não permite acrescentar qualquer outro tipo de informação sobre o objeto, nomeadamente a sua cotagem.

### 979.

Uma **representação perspética** é toda a representação bidimensional (projeção), na qual se observam as três dimensões do objeto e a partir da qual, de forma empírica e sem qualquer tipo de aprendizagem pré-requerida, é possível compreender a forma exata do objeto, a sua volumetria e a sua correta localização no espaço.

### 980.

Os fundamentos da **representação axonométrica** consistem nas diferentes possibilidades da representação do primeiro triedro triretângulo (formado pelos três *planos coordenados*) sobre um único **plano de projeção** (o *plano axonométrico* ou *quadro*), recorrendo a um único **Sistema de Projeção Paralela ou Cilíndrica**. As diferentes possibilidades de representação desse triedro triretângulo têm a ver tanto com a **posição** dos *planos coordenados* em relação ao **plano de projeção** (o *plano axonométrico*), como com a **posição** das **retas projetantes** em relação ao **plano de projeção** (o *plano axonométrico*).

### 981.

Por **plano axonométrico (ou quadro)** entende-se o **plano de projeção** em qualquer representação axonométrica, ou seja, o plano sobre o qual os objetos são projetados (representados).

### 982.

Os diferentes tipos de **representações axonométricas** que existem são as **Axonometrias Ortogonais** e as **Axonometrias Oblíquas (ou Clinogonais)**.

**983.**

Na situação descrita, a representação obtida **não é uma perspectiva**.

**Justificação:** na situação descrita, o eixo **Z** é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é paralelo ao plano **XY**), pelo que o eixo **Z** é uma reta projetante nesse **Sistema de Projeção** (pois trata-se da **projeção ortogonal**). Assim, a projeção do eixo **Z** reduz-se a um único ponto (porque o eixo **Z** é ortogonal ao *plano axonométrico*), perdendo-se a terceira dimensão (a dimensão que existe no eixo **Z** – as cotas). Dessa forma, e porque no *plano axonométrico* estão representadas, apenas, **duas dimensões**, não é uma perspectiva – as dimensões representadas são as do eixo **X** (as abcissas) e as do eixo **Y** (os afastamentos).

**984.**

Recorre-se a uma **Axonometria Ortogonal** sempre que o *plano axonométrico* for oblíquo aos três *planos coordenados* (e aos três *eixos coordenados*). Recorre-se a uma **Axonometria Oblíqua (ou Clinogonal)** sempre que o *plano axonométrico* for paralelo a um dos *planos coordenados* (ou paralelo a dois dos *eixos coordenados*).

**985.**

Numa **Axonometria Ortogonal**, o *plano axonométrico* é oblíquo aos três *planos coordenados* (e aos três *eixos coordenados*) e as retas projetantes são **ortogonais** ao plano de projeção (o *plano axonométrico*).

Numa **Axonometria Oblíqua (ou Clinogonal)**, o *plano axonométrico* é paralelo a um dos *planos coordenados* (é paralelo a dois dos *eixos coordenados* e ortogonal ao terceiro *eixo coordenado*) e as retas projetantes são **oblíquas** ao *plano axonométrico*. No caso das **Axonometrias Oblíquas (ou Clinogonais)**, o *plano axonométrico* pode conter um par de *eixos coordenados*, ou seja, pode ser um qualquer dos três *planos coordenados*.

**986.**

A perspectiva do eixo **X** é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Se o *plano axonométrico* contém a origem do referencial (o ponto **O**), a perspectiva do ponto **O** está coincidente com o próprio ponto. Uma vez que o ponto **O** é um ponto do eixo **X**, já temos um ponto para definir a perspectiva do eixo **X** (a perspectiva de **O**, a origem do referencial). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a perspectiva do eixo **X**. Nesse sentido, há que determinar a perspectiva de um outro ponto do eixo **X**. Consideremos um ponto **A**, qualquer, do eixo **X** – pelo ponto **A** conduz-se uma reta projetante (**ortogonal** ao *plano axonométrico*) e determina-se a perspectiva de **A** (o ponto de interseção da reta projetante com o *plano axonométrico*), que será **A<sub>p</sub>** (a perspectiva do ponto **A**). A perspectiva do eixo **X** fica definida por dois pontos – a perspectiva do ponto **O** (que está coincidente com o próprio ponto) e o ponto **A<sub>p</sub>**.

**987.**

A perspectiva do eixo **Z** é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Se o *plano axonométrico* não contém a origem do referencial, corta o eixo **Z** num ponto (o ponto **C**, por exemplo), que está coincidente com a sua própria perspectiva (**C** é um ponto do *plano axonométrico*). Já temos um ponto para definir a perspectiva do eixo **Z** (esse ponto é a perspectiva do ponto **C**). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a perspectiva do eixo **Z**. Nesse sentido, há que determinar a perspectiva de um outro ponto do eixo **Z** – a origem do referencial (o ponto **O**), por exemplo. Por **O** conduz-se uma reta projetante (**ortogonal** ao *plano axonométrico*) e determina-se a perspectiva do ponto **O** (o ponto de interseção da reta projetante com o *plano axonométrico*), que será **O<sub>p</sub>**. A perspectiva do eixo **Z** fica definida por dois pontos – os pontos **C** (que está coincidente com a sua própria perspectiva) e **O<sub>p</sub>**.

**988.**

O fator que origina diferentes tipos de representações em **Axonometria Ortogonal** é o conjunto das diferentes posições que o *plano axonométrico* pode assumir em relação ao triedro, ou seja, os diferentes ângulos que os *eixos coordenados* podem fazer com o *plano axonométrico*, nomeadamente se esses ângulos são iguais ou diferentes.

**989.**

As diferentes representações que a **Axonometria Ortogonal** permite são a **perspetiva isométrica**, a **perspetiva dimétrica** e a **perspetiva trimétrica (ou anisométrica)**.

**990.**

A perspectiva do eixo **Z** é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Nesse sentido, há que determinar a perspectiva de um ponto do eixo **Z** – a origem do referencial (o ponto **O**), por exemplo. Por **O** conduz-se uma reta projetante (**oblíqua** ao *plano axonométrico*) e determina-se a perspectiva do ponto **O** (o ponto de interseção da reta projetante com o *plano axonométrico*), que será **O<sub>p</sub>**. Já temos um ponto para definir a perspectiva do eixo **Z** (esse ponto é **O<sub>p</sub>**). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a perspectiva do eixo **Z**. Nesse sentido, há que determinar a perspectiva de um outro ponto do eixo **Z** – um ponto **A**, qualquer. Por **A** conduz-se uma reta projetante (**oblíqua** ao *plano axonométrico*) e determina-se a perspectiva do ponto **A** (o ponto de interseção da reta projetante com o *plano axonométrico*), que será **A<sub>p</sub>**. A perspectiva do eixo **Z** fica definida por dois pontos – os pontos **O<sub>p</sub>** e **A<sub>p</sub>**.

Sublinha-se que, sendo o *plano axonométrico* paralelo ao plano **XZ**, o eixo **Z** é paralelo ao *plano axonométrico*. Nesse sentido, a perspectiva do eixo **Z** (a projeção do eixo **Z** no *plano axonométrico*) é necessariamente paralela ao próprio eixo **Z**. Dessa forma, a perspectiva do eixo **Z** poderia estar definida por um ponto (o ponto **A<sub>p</sub>** ou a perspectiva do ponto **O**) e pela sua direção (a direção do próprio eixo).

## 991.

Tendo em conta que o *plano axonométrico* é o próprio plano **YZ** e que, dessa forma, o eixo **Y** está contido no *plano axonométrico*, a perspectiva do eixo **Y** é o próprio eixo **Y** – a determinação da sua perspectiva é imediata.

## 992.

A perspectiva do eixo **Z** é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Se o *plano axonométrico* é o próprio plano **XY**, o ponto **O** está contido no plano **XY** (é o ponto de concorrência do eixo **X** com o eixo **Y**), ou seja, o ponto **O** está contido no *plano axonométrico* – a sua perspectiva é o próprio ponto **O**. Assim, já temos um ponto para definir a perspectiva do eixo **X** (a perspectiva do ponto **O**, a origem do referencial). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a perspectiva do eixo **Z**. Nesse sentido, há que determinar a perspectiva de um outro ponto do eixo **Z** – um ponto **A**, qualquer. Por **A** conduz-se uma reta projetante (**oblíqua** ao *plano axonométrico*) e determina-se a perspectiva do ponto **A** (o ponto de interseção da reta projetante com o *plano axonométrico*), que será **A<sub>p</sub>**. A perspectiva do eixo **Z** fica definida por dois pontos – a perspectiva do ponto **O** (que está coincidente com o próprio ponto) e o ponto **A<sub>p</sub>**.

## 993.

O fator que origina diferentes tipos de representações em **Axonometria Oblíqua** é o *plano coordenado* ao qual o *plano axonométrico* é paralelo (ou, de uma outra forma, o *plano coordenado* que se assume como *plano axonométrico*).

## 994.

As diferentes representações que a **Axonometria Clinogonal (ou Oblíqua)** engloba são a **perspetiva cavaleira** e a **perspetiva militar (ou planométrica)**.

## 995.

Por **perspetiva axonométrica de um objeto** entende-se a projeção (representação) desse objeto no *plano axonométrico*.

De facto, tal como, em Dupla Projeção Ortogonal, se chama **projeção horizontal** a toda e qualquer projeção obtida no Plano Horizontal de Projeção e **projeção frontal** a toda e qualquer projeção obtida no Plano Frontal de Projeção, em **axonometrias** chama-se **perspetiva (ou perspetiva axonométrica)** a toda e qualquer projeção obtida no *plano axonométrico*.

## 996.

Para se determinar a **perspetiva de um ponto** conduz-se, por esse ponto, uma reta projetante – o ponto de interseção da reta projetante com o *plano axonométrico* é a **perspetiva desse ponto**.

Note que a reta projetante é **ortogonal** ao *plano axonométrico*, no caso das **Axonometrias Ortogonais**, ou é **oblíqua** ao *plano axonométrico*, no caso das **Axonometrias Oblíquas**.

## 997.

Uma **Axonometria Ortogonal** é uma perspectiva axonométrica, em que o *plano axonométrico* é oblíquo aos três *planos coordenados* (e oblíquo aos três *eixos coordenados*) e as retas projetantes são **ortogonais** ao *plano axonométrico*.

## 998.

Uma **Axonometria Clinogonal (ou Oblíqua)** é uma perspectiva axonométrica, em que o *plano axonométrico* é paralelo a um dos *planos coordenados* (ou paralelo a dois dos *eixos coordenados*) e as retas projetantes são **oblíquas** ao *plano axonométrico*.

## 999.

Alguns dos campos de utilização das axonometrias são a arquitetura, a *design* (de equipamento e industrial, por exemplo), a engenharia (civil, aeronáutica, naval, mecânica, etc.), entre muitos outros campos profissionais que utilizam o desenho como meio preferencial para a expressão das ideias que antecedem as suas concretizações.

## 1000.

As vantagens do recurso às **representações axonométricas** ao longo do processo projetual de um dado objeto têm a ver com o facto de aquelas aliarem, à representação simultânea das três dimensões desse objeto, o rigor de uma representação à escala que permite a sua cotagem, uma grande correspondência com a Dupla Projeção Ortogonal e, ainda, uma grande facilidade de execução de uma forma quase empírica.

## 23

## AXONOMETRIAS ORTOGONAIS: ISOMETRIA, DIMETRIA E TRIMETRIA

## 1001.

Por **perspetiva de um ponto** entende-se o ponto de interseção da reta projetante que passa pelo ponto com *plano axonométrico*. Note que, tratando-se de uma **axonometria ortogonal**, a reta projetante é necessariamente ortogonal ao *plano axonométrico* (por se tratar do **Sistema de Projeção Ortogonal**).

## 1002.

a) A **perspetiva de um eixo** (que é uma reta) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Na situação em que o *plano axonométrico não contém* a origem do referencial, o *plano axonométrico* corta cada um dos eixos num ponto. Assim, já temos um ponto para definir cada uma das retas que é a perspetiva de um dado eixo. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir cada uma dessas retas (que são as perspetivas dos três eixos).

Em seguida, conduz-se, pela origem do referencial (o ponto **O**), uma reta projetante (que é ortogonal ao *plano axonométrico*) – o ponto de interseção da reta projetante com o *plano axonométrico* é a perspetiva da origem do referencial (a perspetiva do ponto **O**). Tendo em conta que a origem do referencial é o ponto de concorrência dos três eixos coordenados, as suas perspetivas serão **necessariamente** concorrentes na perspetiva da origem do referencial. Já temos, então, o ponto que nos faltava para definir a perspetiva de cada eixo.

Nesse sentido, a perspetiva de cada eixo está definida por dois pontos – o ponto de interseção desse eixo com o *plano axonométrico* e a perspetiva da origem do referencial.

b) A **perspetiva de um eixo** (que é uma reta) é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Na situação em que o *plano axonométrico contém* a origem do referencial, a perspetiva desse ponto (a origem do referencial) é o próprio ponto, pois é um ponto do plano de projeção (que é o *plano axonométrico*). Tendo em conta que a origem do referencial é o ponto de concorrência dos três eixos coordenados, já temos um ponto para definir cada uma das três retas (que são as perspetivas dos três eixos). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para determinar a perspetiva do eixo **X**, por exemplo, conduz-se, por um ponto **A**, qualquer, pertencente ao eixo **X** (um ponto que não seja a própria origem do referencial) uma reta projetante – o ponto de interseção dessa reta projetante com plano de projeção é a perspetiva desse ponto (o ponto **A**, qualquer). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta que é a perspetiva do eixo **X**. A perspetiva do eixo **X** está, assim, definida por dois pontos – a origem do referencial (que está coincidente com a sua própria perspetiva) e a perspetiva do ponto **A**.

Em seguida, para determinar a perspetiva do eixo **Y**, por hipótese, conduz-se, por um ponto **B**, qualquer, pertencente ao eixo **Y** (um ponto que não seja a própria origem do referencial) uma reta projetante – o ponto de interseção dessa reta projetante com plano de projeção é a perspetiva desse ponto (o ponto **B**, qualquer). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta que é a perspetiva do eixo **Y**. A perspetiva do eixo **Y** está, assim, definida por dois pontos – a origem do referencial (que está coincidente com a sua própria perspetiva) e a perspetiva do ponto **B**.

Por fim, para determinar a perspetiva do eixo **Z**, conduz-se, por um ponto **C**, qualquer, pertencente ao eixo **Z** (um ponto que não seja a própria origem do referencial) uma reta projetante – o ponto de interseção dessa reta projetante com plano de projeção é a perspetiva desse ponto (o ponto **C**, qualquer). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta que é a perspetiva do eixo **Z**. A perspetiva do eixo **Z** está, assim, definida por dois pontos – a origem do referencial (que está coincidente com a sua própria perspetiva) e a perspetiva do ponto **C**.

Será conveniente, nesta circunstância, que os pontos **A**, **B** e **C** se situem os três à mesma distância do *plano axonométrico*, pelo que os três pontos estarão contidos num plano que é paralelo ao *plano axonométrico* – esse plano está definido por três pontos não colineares (os pontos **A**, **B** e **C**, que são, nesse caso, os pontos de interseção desse plano com os *eixos coordenados* (os eixos do referencial).

## 1003.

Na situação em que o *plano axonométrico não contém* a origem do referencial, o *plano axonométrico* é um plano que corta os três eixos coordenados em três pontos distintos, que são os vértices de um triângulo (o **triângulo fundamental**). Esse triângulo está em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pois está contido no próprio plano de projeção (que é o *plano axonométrico*) – a perspetiva do triângulo é o próprio triângulo.

Já na situação em que o *plano axonométrico contém* a origem do referencial, esse triângulo (o **triângulo fundamental**) está contido num plano que é paralelo ao *plano axonométrico*. Assim, esse triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pois está contido num plano paralelo ao plano de projeção (que é o *plano axonométrico*). Por outro lado, a projeção dos três vértices desse triângulo processa-se com o recurso a retas projetantes, que são ortogonais ao *plano axonométrico*. Já a origem do referencial, porque está contida no *plano axonométrico*, tem a sua perspetiva coincidente com o próprio ponto.

Já na situação anterior (em que o *plano axonométrico não contém* a origem do referencial), a perspetiva da origem do referencial (o ponto **O**) determina-se com o recurso a uma reta ortogonal ao *plano axonométrico*. Tal significa que, em ambas as situações, a posição da perspetiva da origem do referencial (do ponto **O**) tem necessariamente a mesma posição em relação às perspetivas dos três vértices do **triângulo fundamental**, pelo que as duas representações são rigorosamente idênticas.

## 1004.

Existem duas situações – aquela em que o *plano axonométrico contém* a origem do referencial e aquela em que o *plano axonométrico não contém* a origem do referencial.

1. Consideremos que o *plano axonométrico não contém* a origem do referencial. Nesse caso, por **triângulo fundamental** entende-se o triângulo que está contido no *plano axonométrico* e cujos vértices são os pontos de interseção do *plano axonométrico* com os três *eixos coordenados*. Os lados do **triângulo fundamental** estão, nesse caso, contidos nas retas de interseção do *plano axonométrico* com os planos coordenados.
2. Consideremos que o *plano axonométrico contém* a origem do referencial. Neste caso, por **triângulo fundamental** entende-se o triângulo que está contido num plano paralelo ao *plano axonométrico* e cujos vértices são os pontos de interseção desse plano com os três *eixos coordenados*. Salienta-se que, neste caso, o **triângulo fundamental** se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pois o plano que o contém é paralelo ao *plano axonométrico*.

**1005.**

Por **pirâmide axonométrica** entende-se a pirâmide cuja base é o **triângulo fundamental** e cujo vértice é a origem do referencial, tendo, por arestas laterais, os segmentos dos *eixos coordenados* que estão compreendidos entre o **triângulo fundamental** e a origem do referencial.

**1006.**

Para se determinar a **perspetiva de um dado eixo** (que é uma reta) conduz-se, por esse eixo (essa reta), um plano projetante – a reta de interseção do plano projetante com o *plano axonométrico* é a **perspetiva desse eixo**.

**1007.**

O **plano projetante de um dado eixo** está definido por duas retas concorrentes – o próprio eixo e uma reta projetante, concorrente com esse eixo.

**1008.**

Um qualquer lado do **triângulo fundamental** é **oblíquo** a dois *eixos coordenados* (os eixos com os quais é complanar) e **ortogonal** ao terceiro *eixo coordenado* (o eixo com o qual não é complanar).

**Justificação:**

Em primeiro lugar, há que ter em conta que qualquer lado do **triângulo fundamental** é complanar com dois *eixos coordenados* e não complanar com o terceiro *eixo coordenado*.

Por outro lado, qualquer lado do **triângulo fundamental** está contido num *plano coordenado* – é um segmento da reta de interseção desse *plano coordenado* com o *plano axonométrico*. Essa reta de interseção é necessariamente concorrente com os dois *eixos coordenados* (que se situam nesse *plano coordenado*), nos quais se situam os extremos desse lado do **triângulo fundamental**. Assim sendo, a reta suporte desse lado do **triângulo fundamental** é **oblíqua** aos dois *eixos coordenados*, com os quais é concorrente (sendo concorrente com os dois, a reta não pode, nunca, ser paralela nem perpendicular a nenhum desses dois *eixos coordenados*). Está provada a **oblíquidade** de um qualquer lado do **triângulo fundamental** em relação a dois *eixos coordenados*.

Por fim, qualquer lado do **triângulo fundamental** está contido num *plano coordenado* que é necessariamente **ortogonal** ao *eixo coordenado* que não está contido nesse plano. Tendo em conta o **Teorema da Ortogonalidade entre retas e planos** (se uma reta é ortogonal a um plano, então todas as retas desse plano são ortogonais ou perpendiculares a essa reta), conclui-se que qualquer lado do **triângulo fundamental** é necessariamente **ortogonal** ao *eixo coordenado* que não está contido no *plano coordenado* a que esse lado pertence (o eixo oposto a esse lado). Está provada a **ortogonalidade** de um qualquer lado do **triângulo fundamental** em relação ao terceiro *eixo coordenado*.

**Exemplifiquemos.**

Consideremos um lado **[AB]**, do *triângulo fundamental*, sendo **A** e **B**, respetivamente, os pontos de interseção do *plano axonométrico* com o eixo **X** e o eixo **Y**. O segmento **[AB]** está contido na reta de interseção do *plano axonométrico* com o *plano coordenado XY*. O segmento **[AB]** é, assim, **oblíquo** ao eixo **X** e ao eixo **Y**. De acordo com o atrás exposto, uma vez que **[AB]** está contido num plano ortogonal ao eixo **Z**, o segmento de reta **[AB]** é necessariamente **ortogonal** ao eixo **Z** (não é perpendicular ao eixo **Z**, pois não é concorrente com este).

**1009.**

Um qualquer lado do **triângulo fundamental** é **oblíquo** às perspetivas de dois *eixos coordenados* (os *eixos coordenados* com os quais é complanar) e **perpendicular** à perspetiva do terceiro *eixo coordenado* (o eixo com o qual não é complanar).

**Justificação:**

Em primeiro lugar, há que ter em conta que qualquer lado do **triângulo fundamental** é complanar com dois *eixos coordenados* e não complanar com o terceiro *eixo coordenado*.

Qualquer lado do **triângulo fundamental** está contido no *plano axonométrico*, tal como as perspetivas dos *eixos coordenados* (as projeções dos *eixos coordenados* no *plano axonométrico*) – qualquer lado do **triângulo fundamental** é, assim, complanar com as perspetivas dos três eixos coordenados. Retas complanares ou são paralelas ou são concorrentes (e, caso sejam concorrentes, ou são **oblíquas** ou são **perpendiculares**).

Consideremos agora o exemplo da resposta anterior. O segmento **[AB]** é a hipotenusa de um triângulo que está contido no plano coordenado **XY** – o triângulo **[AOB]**, que é uma face da *pirâmide axonométrica* e é retângulo no ponto **O** (a origem do referencial). A perspetiva desse triângulo é um outro triângulo, mas obtusângulo – tem um ângulo obtuso na perspetiva do ponto **O**. Assim sendo, os ângulos que o segmento de reta **[AB]** faz com os outros dois lados do triângulo (que estão contidos nas perspetivas do eixo **X** e do eixo **Y**) são **necessariamente** ângulos agudos – o segmento de reta **[AB]** é, assim, **oblíquo** às perspetivas do eixo **X** e do eixo **Y**. Está provada a **oblíquidade** do lado **[AB]** do **triângulo fundamental** em relação a dois *eixos coordenados* (o eixo **X** e o eixo **Y**).

Analisemos, agora, a questão da perspetiva do eixo **Z**, que **não é complanar** com o lado **[AB]** do **triângulo fundamental**. A perspetiva do eixo **Z** (que está contida no *plano axonométrico*) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano axonométrico*.

O plano projetante do eixo **Z** é ortogonal ao *plano axonométrico*, pois verifica o **CrITÉRIO de ortogonalidade entre planos** – o plano projetante do eixo **Z** contém a “família” de retas ortogonal ao *plano axonométrico* (a direção das retas projetantes). Por outro lado, o plano projetante do eixo **Z** é também ortogonal ao plano coordenado **XY**, pois verifica, igualmente, o **CrITÉRIO de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano coordenado **XY** – o plano projetante do eixo **Z** contém uma reta ortogonal ao plano coordenado **XY** (o eixo **Z**, que é ortogonal ao plano coordenado **XY**). Dessa forma, está provado que o plano projetante do eixo **Z** é **ortogonal** ao *plano axonométrico* e ao *plano coordenado XY*.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que a ortogonalidade entre planos é recíproca, conclui-se, dessa forma, que o plano coordenado **XY** e o *plano axonométrico* são, ambos, ortogonais ao plano projetante do eixo **Z**, pois qualquer deles verifica o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano projetante do eixo **Z**. Assim, tanto o *plano coordenado XY* como o *plano axonométrico* contêm a “família” de retas que é ortogonal ao plano projetante do eixo **Z**.

Acontece que o plano coordenado **XY** e o *plano axonométrico* são dois planos secantes (intersectam-se ao longo da reta suporte do lado **[AB]**), pelo que são planos com orientações diferentes e uma única “família” de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é uma reta dessa única “família” de retas que os dois planos têm em comum. Tendo em conta que se provou, atrás, que os dois planos têm, em comum, a “família” das retas ortogonais ao plano projetante do eixo **Z**, conclui-se que a reta de interseção entre os dois planos (a reta suporte do segmento **[AB]**) é, precisamente, uma reta ortogonal ao plano projetante do eixo **Z**. Assim sendo, o segmento **[AB]** é necessariamente **ortogonal** ao plano projetante do eixo **Z**, pelo que, de acordo com o **teorema da ortogonalidade entre retas e planos**, o segmento de reta **[AB]** é ortogonal a todas as retas do plano projetante do eixo **Z**.

A perspetiva do eixo **Z** é uma reta do plano projetante do eixo **Z**, pelo que está provada a ortogonalidade do lado **[AB]** em relação à perspetiva do eixo **Z**. A perspetiva do eixo **Z** é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano axonométrico*, pelo que a reta suporte do lado **[AB]** e a perspetiva do eixo **Z** são duas retas coplanares (estão contidas no *plano axonométrico*) – nesse sentido, as duas retas são **perpendiculares**. Está provada a **perpendicularidade** do lado **[AB]** do triângulo fundamental em relação à perspetiva do eixo **Z**.

O extenso raciocínio atrás exposto aplica-se indistintamente a qualquer lado do **triângulo fundamental**, pelo que se considera provada a **obliquidade** de um qualquer lado do **triângulo fundamental** em relação às perspetivas de dois dos *eixos coordenados* (os *eixos coordenados* com os quais é coplanar) e a **perpendicularidade** em relação à perspetiva do terceiro *eixo coordenado*.

## 1010.

O **primeiro aspeto fundamental** refere-se ao facto de os ângulos formados entre os *eixos coordenados* (que, **no espaço**, são ângulos retos) apresentarem **deformação** em perspetiva. De facto, as perspetivas dos ângulos retos formados pelos *eixos coordenados* (dois a dois) são **ângulos obtusos**. Assim, as perspetivas dos três *eixos coordenados* fazem, entre si, **três ângulos obtusos**.

O **segundo aspeto fundamental** refere-se ao facto de a posição do *plano axonométrico* em relação aos três *eixos coordenados* poder variar. De facto, os três ângulos que o *plano axonométrico* faz com os três *eixos coordenados* podem ser **todos iguais**, **todos diferentes** ou **dois iguais e diferentes do terceiro ângulo**.

## 1011.

A afirmação é **verdadeira**, pois embora, **no espaço**, o ângulo que qualquer par de *eixos coordenados* forma entre si seja um ângulo de  $90^\circ$  (um ângulo reto), em perspetiva, esse ângulo é um **ângulo obtuso**.

### Justificação:

Em primeiro lugar, há a referir que o ângulo formado por um qualquer par de *eixos coordenados* está contido num plano (o *plano coordenado* respetivo) que **não é paralelo** ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que a projeção (a perspetiva) desse ângulo **apresenta necessariamente deformação**. Assim, esse ângulo, em perspetiva, **não é um ângulo reto**. Analisando a deformação sofrida, conclui-se que a perspetiva desse ângulo reto é necessariamente um ângulo obtuso.

O *plano axonométrico* corta os três *eixos coordenados* em três pontos, que são fixos e por onde passam as perspetivas dos respetivos *eixos coordenados*. Cada par desses três pontos integra uma face lateral da **pirâmide axonométrica**, que é um **triângulo retângulo** cuja hipotenusa tem extremos nesse par de pontos. Os catetos do **triângulo retângulo**, em perspetiva (e em função da projeção ortogonal), ficam **reduzidos**, pelo que a amplitude dos dois ângulos agudos do **triângulo retângulo**, em perspetiva, **diminui**.

Uma vez que a soma dos **três ângulos internos** de um qualquer triângulo é sempre  $180^\circ$ , em perspetiva, o terceiro ângulo **aumenta**, pois os outros dois ângulos diminuíram (como acima se provou). Assim, o terceiro ângulo, em perspetiva, é um **ângulo obtuso**, pois a sua amplitude, aumentando, é superior a  $90^\circ$  (e inferior a  $180^\circ$ , pois a soma dos três ângulos internos é  $180^\circ$ ).

## 1012.

O fator que provoca a existência de diversos tipos de axonometrias ortogonais é o conjunto dos diferentes ângulos que o *plano axonométrico* pode fazer com os três *eixos coordenados*. De facto, os ângulos que o *plano axonométrico* pode fazer com os três *eixos coordenados* podem ser **todos iguais**, **dois iguais e um diferente** ou **todos diferentes**, situação que origina, precisamente, as diferentes representações axonométricas que a **Axonometria Ortogonal** permite – a **perspetiva isométrica**, a **perspetiva dimétrica** e a **perspetiva trimétrica** (respetivamente).

## 1013.

Uma **perspetiva isométrica** é uma **Axonometria Ortogonal** em que o *plano axonométrico* faz, com os três *eixos coordenados*, **três ângulos iguais**.

Em função disso, a **pirâmide axonométrica** é uma pirâmide regular, o **triângulo fundamental** é um triângulo **equilátero**, sendo que os três *eixos coordenados* são afetados pelo mesmo coeficiente de deformação ou de redução (existe **um único coeficiente de deformação**). Por fim, as perspetivas dos três eixos fazem, entre si, ângulos de  $120^\circ$ .



## 1014.

Uma **perspetiva dimétrica** é uma **Axonometria Ortogonal** em que o *plano axonométrico* faz, com dois dos *eixos coordenados*, **dois ângulos iguais**, fazendo um **ângulo diferente** com o terceiro *eixo coordenado*.

Em função disso, a **pirâmide axonométrica** não é uma pirâmide regular (embora seja uma pirâmide reta, pois o seu eixo é ortogonal ao plano da base), o **triângulo fundamental** é um triângulo **isósceles**, sendo que dois dos *eixos coordenados* (aqueles que fazem, com o *plano axonométrico*, o mesmo ângulo) são afetados pelo mesmo coeficiente de deformação (ou de redução) e o terceiro eixo coordenado é afetado por um coeficiente de deformação (ou de redução) diferente (existem **dois coeficientes de deformação**). Por fim, as perspetivas dos três eixos coordenados fazem, entre si, dois ângulos obtusos iguais e um terceiro ângulo, também obtuso, mas diferente dos outros dois.

## 1015.

Uma **perspetiva trimétrica** é uma **Axonometria Ortogonal** em que o *plano axonométrico* faz, com os três *eixos coordenados*, **três ângulos diferentes**.

Em função disso, a **pirâmide axonométrica** não é uma pirâmide regular (embora seja uma pirâmide reta, pois o seu eixo é ortogonal ao plano da base), o **triângulo fundamental** é um triângulo **escaleno**, sendo que os três *eixos coordenados* são afetados por coeficientes de deformação (ou de redução) diferentes (existem **três coeficientes de deformação**). Por fim, as perspetivas dos três eixos coordenados fazem, entre si, três ângulos obtusos diferentes.

## 1016.

Por **perspetivas de um ponto** entende-se o conjunto das representações, no *plano axonométrico*, do ponto e das suas projeções ortogonais nos três *planos coordenados*, ou seja, a perspetiva propriamente dita do ponto, a perspetiva da sua projeção horizontal, a perspetiva da sua projeção frontal e a perspetiva da sua projeção lateral.

## 1017.

Por **coeficiente de redução** (ou de **deformação**) entende-se o quociente (a razão) entre uma dada dimensão real (**no espaço**) e a sua projeção (representação bidimensional).

### Exemplifiquemos:

Na situação em que um dado segmento de reta é paralelo a um plano de projeção, a sua projeção nesse plano não apresenta qualquer deformação, pois não existe qualquer diferença entre o comprimento real do segmento e o comprimento da sua representação (diz-se, neste caso, que o segmento se projeta em verdadeira grandeza). O mesmo não se verifica quando o segmento não é paralelo ao plano de projeção, observando-se, nesse caso, a existência de uma diferença (que pode ser maior ou menor) entre o comprimento real do segmento e o comprimento da sua representação – à razão entre esses dois comprimentos chama-se, precisamente, **coeficiente de deformação**.

## 1018.

Um determinado objeto (um segmento de reta, por exemplo) projeta-se em verdadeira grandeza num plano se e só se o objeto (o segmento de reta) for paralelo a esse plano de projeção e **apenas nessa situação**. Assim, em todas as situações em que o objeto (o segmento de reta, por exemplo), não seja paralelo ao plano de projeção, a sua projeção nesse plano apresenta necessariamente uma **deformação** que, no caso da projeção ortogonal, é sempre uma **redução**.

Na situação das **Axonometrias Ortogonais**, nenhum dos três *eixos coordenados* (sobre os quais se medem as coordenadas de qualquer ponto) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que se observa **sempre** a existência de um **coeficiente de deformação** das medidas existentes nos *eixos coordenados* que, no caso, e por se tratar de uma **projeção ortogonal**, é sempre uma **redução**.

## 1019.

Numa **perspetiva isométrica**, os três *eixos coordenados* apresentam o mesmo **coeficiente de redução** (ou de deformação), pois o *plano axonométrico* faz ângulos iguais com os três *eixos coordenados*.

Numa **perspetiva dimétrica**, dois dos *eixos coordenados* apresentam o mesmo **coeficiente de redução** (ou de deformação), pois o plano axonométrico faz dois ângulos iguais com dois dos eixos coordenados (os eixos coordenados que apresentam o mesmo coeficiente de redução), sendo que o plano axonométrico faz um ângulo diferente com o terceiro eixo coordenado (que, por isso mesmo, apresenta um **coeficiente de redução** diferente).

Já na **perspetiva trimétrica (ou anisométrica)**, os três *eixos coordenados* apresentam **coeficientes de redução** (ou de deformação) diferentes, pois o plano axonométrico faz três ângulos diferentes com os três eixos coordenados.

## 1020.

Coeficiente de deformação (ou de redução) é a razão (o quociente) entre o comprimento de uma determinada medida em projeção (apresentando deformação ou não), e o comprimento real dessa mesma medida (no espaço).

Esse **coeficiente de deformação** depende diretamente do **ângulo entre o objeto e o plano de projeção**, sendo que, tratando-se de um segmento de reta, por exemplo, nas **Axonometrias Ortogonais**, o coeficiente de deformação pode ir desde não haver qualquer deformação (no caso em que o segmento é paralelo ao *plano axonométrico*), até à deformação (ou redução) máxima (no caso em que o segmento de reta é ortogonal ao *plano axonométrico* – a sua projeção, nesse caso, reduz-se a um ponto).

**1021.**

Por **coeficientes de redução predefinidos** entende-se um conjunto de fatores numéricos predeterminados matematicamente, que permitem, para certas perspectivas predefinidas, determinar os valores das coordenadas a medir nos *eixos coordenados*, depois de afetadas pelo **coeficiente de redução** inerente à projeção. Tal processa-se através do produto das dimensões reais (que estão contidas nos *eixos coordenados*) pelos respectivos **coeficientes de redução predefinidos**.

**1022.**

Consideremos a última das seis perspectivas trimétricas apresentadas na tabela referida no enunciado. A perspectiva do eixo **X** fará um ângulo de  $107^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z** e um ângulo de  $138^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y**. Note que a perspectiva do eixo **Y** fará, com a perspectiva do eixo **Z**, um ângulo de  $115^\circ$ . Note ainda que  $107^\circ + 138^\circ + 115^\circ = 360^\circ$ . Nessa perspectiva, o coeficiente de redução predefinido para o eixo **X** é de 0,81, o que significa que as abcissas (a representar sobre esse eixo) deverão ser multiplicadas por esse valor. Da mesma forma, o coeficiente de redução predefinido para o eixo **Y** é de 0,70, o que significa que os afastamentos (a representar nesse eixo) deverão ser multiplicados por esse valor. Por fim, o coeficiente de redução predefinido para o eixo **Z** é de 0,92, o que significa que as cotas (a representar nesse eixo) deverão ser multiplicadas por esse valor.

**1023.**

Por **plano projetante de um eixo** entende-se o plano **que projeta** esse eixo no *plano axonométrico* – é o plano ortogonal ao *plano axonométrico* que contém esse eixo.

**1024.**

Para determinar a **perspetiva de um eixo** conduz-se, por esse eixo, um plano projetante (que é ortogonal ao *plano axonométrico*) – a reta de interseção do plano projetante com o *plano axonométrico* é a **perspetiva desse eixo**.

**1025.**

A **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano a rebater com o plano para o qual se processa o rebatimento. No caso das perspectivas axonométricas, os rebatimentos processam-se **sempre** para o *plano axonométrico*. Assim, no rebatimento do plano projetante do eixo **X**, a **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano axonométrico* – a charneira do rebatimento é a **perspetiva do eixo X**.

**1026.**

A **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano a rebater com o plano para o qual se processa o rebatimento. No caso das perspectivas axonométricas, os rebatimentos processam-se **sempre** para o *plano axonométrico*. Assim, no rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, a **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Y** com o *plano axonométrico* – a charneira do rebatimento é a **perspetiva do eixo Y**.

**1027.**

A **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano a rebater com o plano para o qual se processa o rebatimento. No caso das perspectivas axonométricas, os rebatimentos processam-se **sempre** para o *plano axonométrico*. Assim, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, a **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano axonométrico* – a charneira do rebatimento é a **perspetiva do eixo Z**.

**1028.**

A **verdadeira grandeza** do ângulo que o eixo **X** faz com o *plano axonométrico* está (pode observar-se) no ângulo que o eixo **X** rebatido (o eixo  $X_r$ ) faz com a perspectiva do eixo **X**.

**1029.**

A **verdadeira grandeza** do ângulo que o eixo **Y** faz com o *plano axonométrico* está (pode observar-se) no ângulo que o eixo **Y** rebatido (o eixo  $Y_r$ ) faz com a perspectiva do eixo **Y**.

**1030.**

A **verdadeira grandeza** do ângulo que o eixo **Z** faz com o *plano axonométrico* está (pode observar-se) no ângulo que o eixo **Z** rebatido (o eixo  $Z_r$ ) faz com a perspectiva do eixo **Z**.

**1031.**

Uma **perspetiva isométrica** é uma **Axonometria Ortogonal** em que o *plano axonométrico* faz, com os três *eixos coordenados*, **três ângulos iguais**.

Em função disso, a **pirâmide axonométrica** é uma pirâmide regular, o **triângulo fundamental** é um triângulo **equilátero**, sendo que os três *eixos coordenados* são afetados pelo mesmo coeficiente de deformação ou de redução (existe **um único coeficiente de deformação**). Por fim, as perspectivas dos três eixos fazem, entre si, ângulos de  $120^\circ$ .

## 1032.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[ABC]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[ABC]$  são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas do ponto  $P$  medem-se nos eixos a que se referem – a abscissa do ponto  $P$  mede-se no eixo  $X$ , o afastamento do ponto  $P$  mede-se no eixo  $Y$  e a cota do ponto  $P$  no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto  $P$  se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto  $P$  sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo  $Z$  para o *plano axonométrico*, pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter rebatido outro eixo qualquer). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo  $Z$ ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo  $Z$  – tem-se imediatamente  $Z \equiv e$ .

O ponto  $C$  é um ponto do eixo  $Z$  e é, também, um ponto da perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $Q$  é o ponto em que o plano projetante do eixo  $Z$  corta o lado  $[AB]$  do *triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo  $Z$ ). Os pontos  $C$  e  $Q$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $C_r \equiv C$  e  $Q_r \equiv Q$ .*

O triângulo  $[COQ]$  está contido no plano projetante do eixo  $Z$  e é um **triângulo retângulo** no ponto  $O$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[CQ]$  (o ponto  $M$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $\overline{MC} = \overline{MQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[CQ]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $C_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo  $[C_r O_r Q_r]$  é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Z$  com o *plano coordenado XY*.

### Determinação das perspectivas das coordenadas do ponto P:

O eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z$  rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas do ponto  $P$  sobre o eixo  $Z_r$ .

Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as três coordenadas do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza (6 cm de **abscissa**, 5 cm de **afastamento** e 3 cm de **cota**). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , as perspectivas das coordenadas do ponto  $P$ , já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , a partir da perspectiva do ponto  $O$ , estão as perspectivas das três coordenadas do ponto  $P$  (a abscissa, o afastamento e a cota).

No entanto, as perspectivas da **abscissa** e do **afastamento** do ponto  $P$  estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspectiva do eixo  $X$  (a **abscissa**) e sobre a perspectiva do eixo  $Y$  (o **afastamento**). Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto  $O$ , transportaram-se as perspectivas da **abscissa** e do **afastamento** para a perspectiva do eixo  $X$  e a perspectiva do eixo  $Y$ , respetivamente.

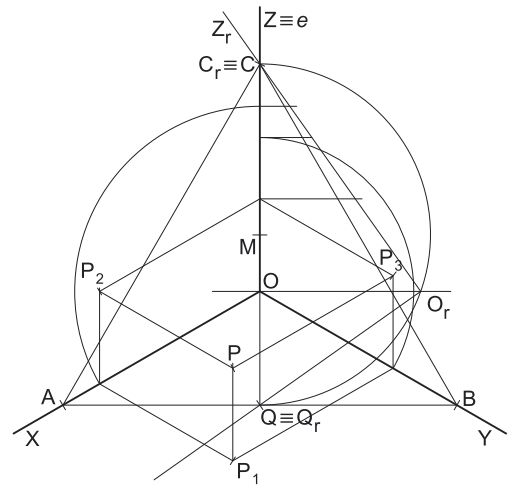
### Determinação das perspectivas do ponto P:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $P$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $P$ .  $P_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $P$ .  $P_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $P$ .  $P_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $P$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $P$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $P_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $P$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $P_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $P$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $P_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $P$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $P$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $P$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ , das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das coordenadas), representaram-se a **leve**.



## 1033.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas do ponto **T** medem-se nos eixos a que se referem – a abscissa do ponto **T** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **T** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **T** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **T** se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **T** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

**Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:**

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo **X** para o *plano axonométrico*, pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter rebatido outro eixo qualquer). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **X** – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto **A** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **X**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[BC]** do *triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **A** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $Q_r \equiv Q$ .*

O triângulo **[AOQ]** está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** no ponto **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MA} = \overline{MQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[AQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$  sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $A_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo **[A<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

**Determinação das perspectivas das coordenadas do ponto T:**

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas do ponto **T** sobre o eixo  $X_r$ .

Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as três coordenadas do ponto **T**, em verdadeira grandeza (3 cm de **abscissa**, 2 cm de **afastamento** e 6 cm de **cota**). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, as perspectivas das coordenadas do ponto **T**, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas das três coordenadas do ponto **T** (a abscissa, o afastamento e a cota).

No entanto, as perspectivas do **afastamento** e da **cota** do ponto **T** estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspectiva do eixo **Y** (o **afastamento**) e sobre a perspectiva do eixo **Z** (a **cota**). Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportaram-se as perspectivas do **afastamento** e da **cota** para a perspectiva do eixo **Y** e a perspectiva do eixo **Z**, respetivamente.

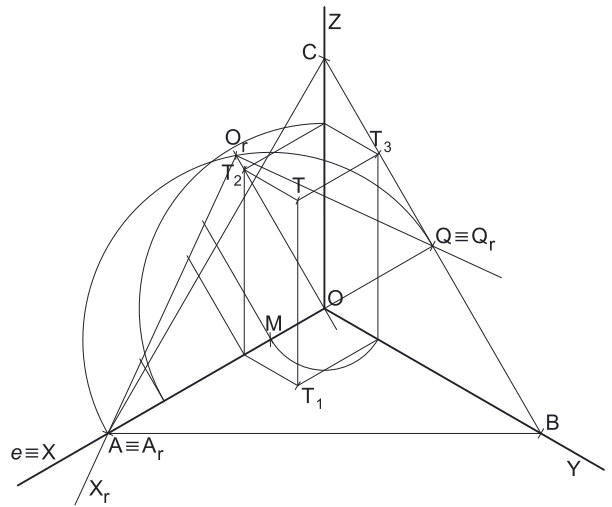
**Determinação das perspectivas do ponto T:**

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **T** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**T<sub>1</sub>**, **T<sub>2</sub>** e **T<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **T**. **T<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **T**. **T<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **T**. **T<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **T**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **T**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **T<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **T** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **T<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **T** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **T<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **T** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **T**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **T** são dois vértices espacialmente opostos.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano projetante do eixo **X**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das coordenadas), representaram-se a **leve**.



## 1034.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[ABC]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[ABC]$  são arbitrárias.

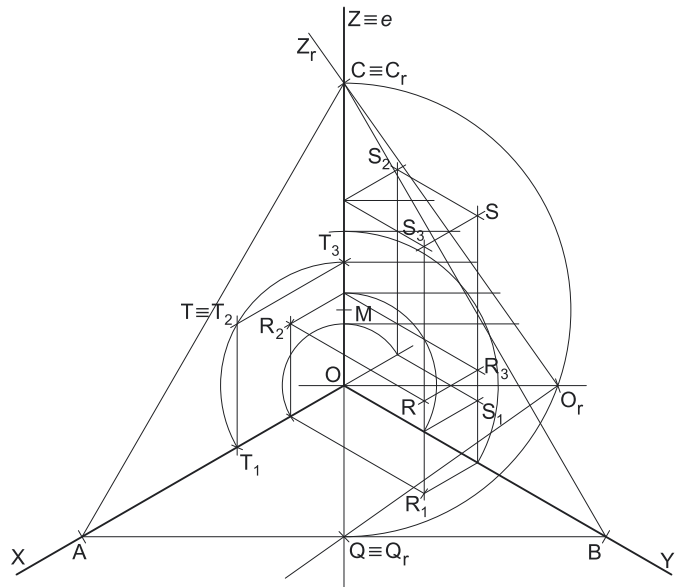
### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo  $X$ , os afastamentos medem-se no eixo  $Y$  e as cotas no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo  $Z$  para o *plano axonométrico*, pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter rebatido outro eixo qualquer). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo  $Z$ ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo  $Z$  – tem-se imediatamente  $Z \equiv e$ .



O ponto  $C$  é um ponto do eixo  $Z$  e é, também, um ponto da perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $Q$  é o ponto em que o plano projetante do eixo  $Z$  corta o lado  $[AB]$  do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo  $Z$ ). Os pontos  $C$  e  $Q$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $C_r \equiv C$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo  $[COQ]$  está contido no plano projetante do eixo  $Z$  e é um **triângulo retângulo** no ponto  $O$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[CQ]$  (o ponto  $M$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $MC = MQ$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[CQ]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$  sobre a semicircunferência. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $C_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo  $[C_r O_r Q_r]$  é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Z$  com o *plano coordenado XY*.

### Determinação das perspetivas das coordenadas dos três pontos:

O eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z$  rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos três pontos sobre o eixo  $Z_r$ .

Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os valores de todas as coordenadas dos três pontos, independentemente das coordenadas e dos pontos a que se referem – 2, 3, 4, 5 e 6. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , as perspetivas de todas aquelas coordenadas, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , a partir da perspectiva do ponto  $O$ , estão as perspetivas daquelas cinco medidas.

Dessas medidas todas, apenas as **cotas** se situam no eixo correto (a perspectiva do eixo  $Z$ ), pois todas as medidas referentes às **abcissas** e aos **afastamentos** dos três pontos se situam no eixo errado. De facto, as **perspetivas das abcissas** deveriam estar sobre a perspectiva do eixo  $X$  e as **perspetivas dos afastamentos** deveriam estar sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto  $O$ , transportaram-se as perspetivas das **abcissas** (2, -2 e 4) e dos **afastamentos** (5 e 3) para a perspectiva do eixo  $X$  e a perspectiva do eixo  $Y$ , respetivamente.

Salienta-se que a **abscissa** do ponto  $S$  é negativa mas que a sua medida já está deformada sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Assim, a **perspetiva da abscissa** do ponto  $S$  foi transportada para a **parte negativa** da perspectiva do eixo  $X$ .

### Determinação das perspetivas do ponto R:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto  $R$  determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $R$ .  $R_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $R$ .  $R_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto  $R$ .  $R_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto  $R$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **R**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **R**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **R** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **R**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **R** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **R**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **R** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **R**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **R** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas do ponto **S**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **S** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**S**<sub>1</sub>, **S**<sub>2</sub> e **S**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **S**. **S**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **S**. **S**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto **S**. **S**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **S**.

Uma vez que a abcissa do ponto **S** é negativa, **S**<sub>1</sub> (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **S**) situa-se para cima da perspectiva do eixo **Y**, tal como **S**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **S**) se situa para a direita da perspectiva do eixo **Z**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **S**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **S**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **S** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **S**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **S** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **S**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **S** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **S**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **S** são dois vértices espacialmente opostos.

Salienta-se que o ponto **S**, tendo abcissa negativa, se situa para a direita do plano coordenado **YZ**, o que se pode comprovar na resolução gráfica apresentada.

#### Determinação das perspectivas do ponto **T**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **T** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**T**<sub>1</sub>, **T**<sub>2</sub> e **T**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **T**. **T**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **T** – uma vez que o ponto **T** tem afastamento nulo, o ponto **T** situa-se no plano coordenado **XZ**, pelo que **T**<sub>1</sub> (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **T**) se situa sobre a perspectiva do eixo **X**. **T**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto **T**. **T**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **T** – mais uma vez atendendo a que o ponto **T** se situa no plano coordenado **XZ** (pois tem afastamento nulo), **T**<sub>3</sub> (a perspectiva da projeção lateral do ponto **T**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **Z**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **T** tem afastamento nulo, o ponto **T** situa-se no plano coordenado **XZ**, pelo que se tem imediatamente **T**<sub>2</sub> ≡ **T** (sendo **T** a perspectiva propriamente dita do ponto **T**).

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das coordenadas), representaram-se a **leve**.

## 1035.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120°. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o triângulo fundamental – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

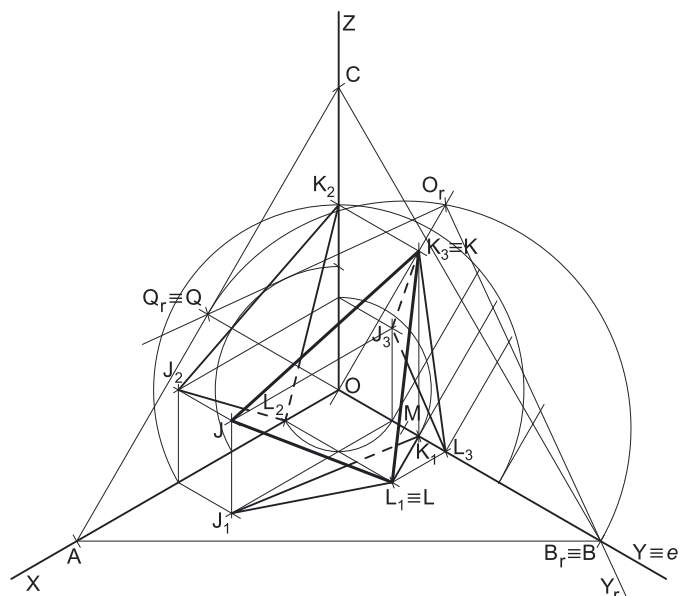
#### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma perspectiva isométrica, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo **Y** para o plano axonométrico, pelo rebatimento do seu plano projetante (mas poder-se-ia ter rebatido outro eixo qualquer). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Y**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Y** – tem-se imediatamente **Y** ≡ **e**.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O ponto **B** é um ponto do eixo **Y** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Y**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Y** corta o lado **[AC]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Y**). Os pontos **B** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $B_r \equiv B$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo **[BOQ]** está contido no plano projetante do eixo **Y** e é um **triângulo retângulo** no ponto **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Y** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[BQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MB} = \overline{MQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[BQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $B_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo **[B<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo **Y** com o *plano coordenado XZ*.

#### Determinação das perspectivas das coordenadas dos três pontos:

O eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos três pontos sobre o eixo  $Y_r$ .

Assim, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os valores de todas as coordenadas dos três pontos, independentemente das coordenadas e dos pontos a que se referem – 2, 3, 4 e 6. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas de todas aquelas coordenadas, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas daquelas quatro medidas.

Dessas medidas todas, apenas os **afastamentos** se situam no eixo correto (a perspectiva do eixo **Y**), pois todas as medidas referentes às **abscissas** e às **cotas** dos três pontos se situam no eixo errado. De facto, as **perspectivas das abscissas** deveriam estar sobre a perspectiva do eixo **X** e as **perspectivas das cotas** deveriam estar sobre a perspectiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportaram-se as perspectivas das **abscissas** (6 e 2) e das **cotas** (3 e 6) para a perspectiva do eixo **X** e a perspectiva do eixo **Z**, respetivamente.

#### Determinação das perspectivas do ponto J:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **J** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **J**.  $J_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **J**.  $J_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto **J**.  $J_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto **J**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **J**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $J_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de **J** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de  $J_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **J** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de  $J_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **J** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **J**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **J** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas do ponto K:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **K** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **K**.  $K_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **K** – uma vez que o ponto **K** tem abscissa nula, o ponto **K** situa-se no *plano coordenado YZ*, pelo que  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **K**) se situa sobre a perspectiva do eixo **Y**.  $K_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto **K** – mais uma vez atendendo a que o ponto **K** se situa no *plano coordenado YZ* (pois tem abscissa nula),  $K_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto **K**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **Z**.  $K_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto **K**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **K** tem abscissa nula, o ponto **K** situa-se no *plano coordenado YZ*, pelo que se tem imediatamente  $K_3 \equiv K$  (sendo **K** a perspectiva propriamente dita do ponto **K**).

#### Determinação das perspectivas do ponto L:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **L** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **L**.  $L_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **L**.  $L_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto **L** – uma vez que o ponto **L** tem cota nula, o ponto **L** situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que  $L_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto **L**) se situa sobre a perspectiva do eixo **X**.  $L_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto **L** – mais uma vez atendendo a que o ponto **L** se situa no *plano coordenado XY* (pois tem cota nula),  $L_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **L**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **L** tem cota nula, o ponto **L** situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente  $L_1 \equiv L$  (sendo **L** a perspectiva propriamente dita do ponto **L**).

#### Determinação das perspectivas do triângulo:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo **[JKL]** é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo **[J<sub>1</sub>K<sub>1</sub>L<sub>1</sub>]** é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo **[J<sub>2</sub>K<sub>2</sub>L<sub>2</sub>]** é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo **[J<sub>3</sub>K<sub>3</sub>L<sub>3</sub>]** é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo – partes das projeções do triângulo nos *planos coordenados* estão ocultas pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do triângulo **[JKL]** representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades assinaladas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das coordenadas.

## 1036.

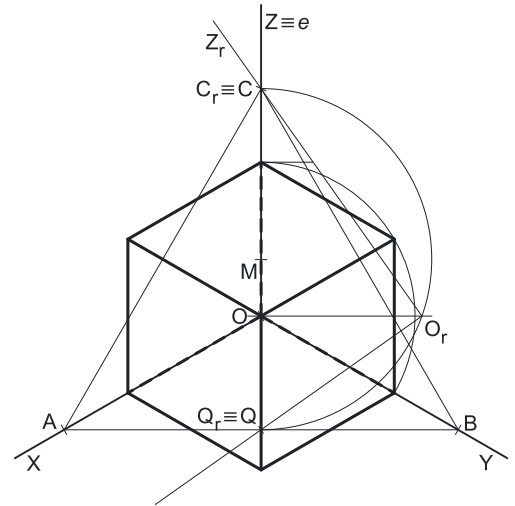
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

### Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir os 5 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos *eixos coordenados*. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhum dos eixos se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir o comprimento da aresta do cubo sobre as perspectivas dos eixos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).



### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo **Z** para o *plano axonométrico*, pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter rebatido outro eixo qualquer). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e$ .

O ponto **C** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[AB]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **C** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $C_r \equiv C$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo **[COQ]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** no ponto **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[CQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MC} = \overline{MQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[CQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **Or**, sobre a semicircunferência. O eixo **Zr** fica definido por **Or** e **Cr**, que é um ponto fixo. O triângulo **[CrOrQr]** é retângulo em **Or**. A reta definida por **Or** e por **Qr** (que não se identificou) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

### Determinação das perspetivas da medida da aresta do cubo:

O eixo **Zr** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza – já é possível medir a medida da aresta do cubo sobre o eixo **Zr**. Assim, sobre o eixo **Zr**, a partir de **Or** e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo) e, em seguida, inverteu-se o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) – isto permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva da medida da aresta do sólido (já reduzida – afetada pelo coeficiente de deformação).

Tendo em conta que os três eixos sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), há que transportar essa medida para as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**), onde se situam outras duas arestas do cubo. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportou-se a perspectiva da medida da aresta do cubo para as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Y**.

Este procedimento permitiu-nos obter as perspectivas dos **três vértices** do cubo que se situam nos *eixos coordenados* (para além do ponto **O**, que é um outro vértice do cubo).

### Determinação da perspetiva do cubo:

A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo sobre as perspectivas dos três eixos, desenharam-se os três paralelogramos dos quais as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** – esses paralelogramos são as perspectivas das três faces do cubo que se situam nos três *planos coordenados*. O desenho desses paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais **três vértices** do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspectivas de sete deles, falta-nos a perspectiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice **O**. Assim, determinou-se a perspectiva desse vértice conduzindo, pelas perspectivas dos três vértices anteriores, as perspectivas das arestas em falta (que são paralelas as perspectivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspectiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos *eixos coordenados*).

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte da medida da aresta do cubo), representaram-se a **leve**.

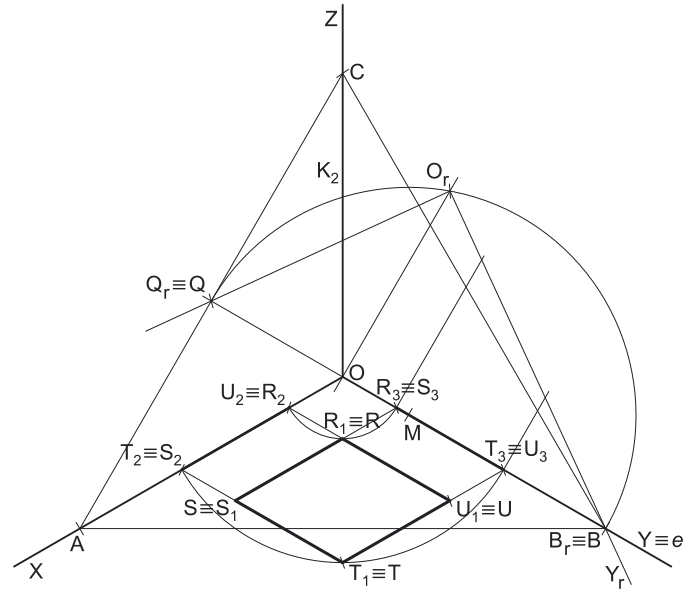
## 1037.

a) O quadrado está contido no *plano coordenado XY*, pelo que os pontos **T** e **U** têm necessariamente **cota nula** (todos os vértices do quadrado têm cota nula). Por outro lado, é possível constatar que o lado **[RS]** do quadrado é paralelo ao eixo **X**, pelo que o lado **[TU]** do polígono será igualmente paralelo ao eixo **X** (o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois). Por sua vez, os lados **[RU]** e **[ST]** serão necessariamente paralelos ao eixo **Y** (por serem perpendiculares aos lados **[RS]** e **[TU]**). Por fim, o lado **[RS]** mede 4 cm (a diferença entre as abscissas dos pontos **R** e **S**), que é a medida do lado do quadrado.

Por outro lado, o ponto **T**, sendo consecutivo ao ponto **S**, tem a mesma abscissa do ponto **S** (que é 6 cm) e o seu afastamento é 4 cm superior ao afastamento daquele ponto – o ponto **T** tem, assim, **6 cm de abscissa e 6 cm de afastamento** (e cota nula, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto **T** são ( 6; 6; 0).

O ponto **U** tem a mesma abscissa do ponto **R** e o mesmo afastamento do ponto **T** – o ponto **U** tem, assim, **2 cm de abscissa e 6 cm de afastamento** (e cota nula, como atrás se referiu). Dessa forma, as coordenadas do ponto **U** são ( 2; 6; 0).

Salienta-se que o quadrado se situa no espaço do 1ª *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.



### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de 120°. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas dos quatro pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. Salienta-se que os quatro pontos têm cota nula pelo que, na realidade, não há nenhuma cota a ser medida no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos outros dois *eixos coordenados* (onde se medem as abscissas e os afastamentos) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo **Y** para o *plano axonométrico*, pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter rebatido outro eixo qualquer). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Y**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Y** – tem-se imediatamente **Y ≡ e**.

O ponto **B** é um ponto do eixo **Y** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Y**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Y** corta o lado **[AC]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Y**). Os pontos **B** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente, **B\_r ≡ B** e **Q\_r ≡ Q**.

O triângulo **[BOQ]** está contido no plano projetante do eixo **Y** e é um **triângulo retângulo** no ponto **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Y** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[BQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio **MC = MQ**, desenhou-se a semicircunferência de que **[BQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O\_r**, sobre a semicircunferência. O eixo **Y\_r** fica definido por **O\_r** e **B\_r**, que é um ponto fixo. O triângulo **[B\_r O\_r Q\_r]** é retângulo em **O\_r**. A reta definida por **O\_r** e por **Q\_r** (que não se identificou) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo **Y** com o *plano coordenado XZ*.

#### Determinação das perspectivas das coordenadas dos quatro pontos:

O eixo **Y\_r** (o eixo **Y** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos quatro pontos sobre o eixo **Y\_r**.

Assim, sobre o eixo **Y\_r**, a partir de **O\_r** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os valores de todas as coordenadas dos quatro pontos, independentemente das coordenadas e dos pontos a que se referem – 2 e 6. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas daquelas coordenadas, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas daquelas duas medidas.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Dessas medidas todas, apenas os **afastamentos** se situam no eixo correto (a perspectiva do eixo **Y**), pois todas as medidas referentes às **abscissas** dos quatro pontos se situam no eixo errado. De facto, as **perspetivas das abscissas** deveriam estar sobre a perspectiva do eixo **X**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportaram-se as perspetivas das **abscissas** (2 e 6) para a perspectiva do eixo **X**.

#### Determinação das perspetivas do ponto **R**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **R** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro (**R<sub>1</sub>**, **R<sub>2</sub>** e **R<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **R**. **R<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **R**. **R<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **R** – atendendo a que o ponto **R** tem cota nula, o ponto **R** situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que **R<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **R**) se situa sobre a perspectiva do eixo **X**. **R<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **R** – mais uma vez atendendo a que o ponto **R** se situa no *plano coordenado XY* (pois tem cota nula), **R<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **R**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **R** tem cota nula, o ponto **R** situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente **R<sub>1</sub> ≡ R** (sendo **R** a perspectiva propriamente dita do ponto **R**).

#### Determinação das perspetivas dos pontos **S**, **T** e **U**:

As perspetivas dos pontos **S**, **T** e **U** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **R**. De facto, atendendo a que os três pontos têm cota nula, as perspetivas das suas projeções frontais (**S<sub>2</sub>**, **T<sub>2</sub>** e **U<sub>2</sub>**) situam-se necessariamente sobre a perspectiva do eixo **X**. De forma semelhante, e mais uma vez atendendo a que os três pontos têm cota nula, as perspetivas das suas projeções laterais (**S<sub>3</sub>**, **T<sub>3</sub>** e **U<sub>3</sub>**) situam-se necessariamente sobre a perspectiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que os três pontos têm cota nula, os três pontos situam-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente **S<sub>1</sub> ≡ S** (sendo **S** a perspectiva propriamente dita do ponto **S**), **T<sub>1</sub> ≡ T** (sendo **T** a perspectiva propriamente dita do ponto **T**) e **U<sub>1</sub> ≡ U** (sendo **U** a perspectiva propriamente dita do ponto **U**).

Salienta-se, ainda, que os pontos **R** e **U**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem **R<sub>2</sub> ≡ U<sub>2</sub>**, o mesmo acontecendo com os vértices **S** e **T**. Pelo seu lado, os pontos **R** e **S**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem **R<sub>3</sub> ≡ S<sub>3</sub>**, o mesmo acontecendo com os vértices **T** e **U**.

#### Determinação das perspetivas do quadrado:

Por fim, desenharam-se as perspetivas do quadrado. O losango **[RSTU]** é a perspectiva propriamente dita do quadrado. O segmento de reta **[T<sub>2</sub>U<sub>2</sub>]** é a perspectiva da projeção frontal do quadrado. O segmento de reta **[S<sub>3</sub>T<sub>3</sub>]** é a perspectiva da projeção lateral do quadrado.

#### Traçado:

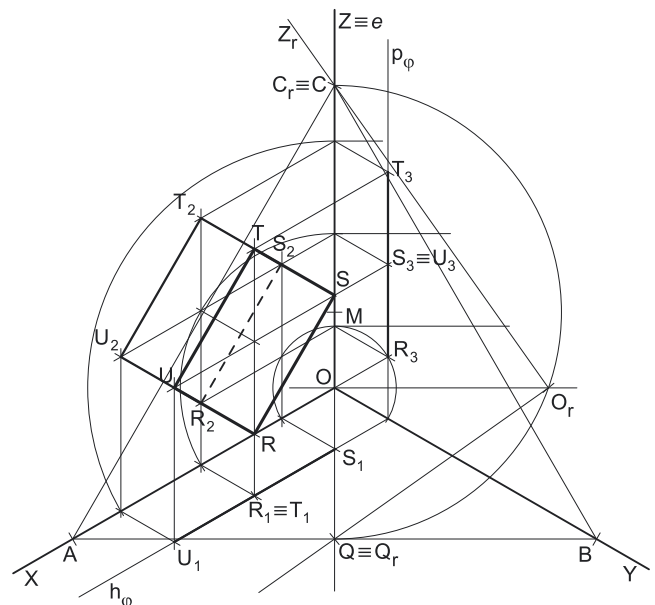
As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do quadrado **[RSTU]** representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspetivas das abscissas.

## 1038.

- a) O quadrado está contido num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **R** e **T**), pelo que os pontos **S** e **U** têm necessariamente **2 cm de afastamento** (todos os pontos de um plano frontal têm o mesmo afastamento). Os pontos **R** e **T** têm a mesma abscissa e o mesmo afastamento, pelo que é possível constatar que a diagonal **[RT]** do quadrado é vertical (paralela ao eixo **Z**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal **[SU]**), porque é perpendicular à diagonal **[RT]** e está contida num plano frontal (de frente), é necessariamente fronto-horizontal (paralela ao eixo **X**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bisetam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal **[RT]** tem necessariamente 5 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos **R** e **T**). Nesse sentido, os pontos **S** e **U** têm necessariamente **5 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal **[RT]** mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos **R** e **T**), pelo que a diagonal **[ST]** mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

Sendo assim, atendendo a que o ponto **S** é o vértice de menor abscissa do quadrado (como o enunciado refere expressamente), a sua abscissa é 3 cm inferior à abscissa dos pontos **R** e **T** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **S** tem **2 cm de abscissa**. As coordenadas do ponto **S** são (2; 2; 5).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, atendendo a que o ponto **U** é o vértice de maior abscissa do quadrado (por oposição ao vértice **S**), a sua abscissa é 3 cm superior à abscissa dos pontos **R** e **T** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **U** tem **8 cm de abscissa**. As coordenadas do ponto **U** são (8; 2; 5).

Salienta-se que o quadrado se situa no espaço do 1ª *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

## b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de 120°. Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas dos quatro pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspetivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo **Z** para o *plano axonométrico*, pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter rebatido outro eixo qualquer). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e$ .

O ponto **C** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspetiva do eixo **Z**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[AB]** do *triângulo fundamental (e também pertence à perspetiva do eixo **Z**). Os pontos **C** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $C_r \equiv C$  e  $Q_r \equiv Q$ .*

O triângulo **[COQ]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** no ponto **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[CQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MC = MQ$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[CQ]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[C<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. A reta definida por **O<sub>r</sub>** e por **Q<sub>r</sub>** (que não se identificou) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

### Determinação das perspetivas das coordenadas dos quatro pontos:

O eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos quatro pontos sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**.

Assim, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os valores de todas as coordenadas dos quatro pontos, independentemente das coordenadas e dos pontos a que se referem – 2, 5 e 8. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspetiva do eixo **Z**, as perspetivas daquelas coordenadas, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspetiva do eixo **Z**, a partir da perspetiva do ponto **O**, estão as perspetivas daquelas três medidas.

Dessas medidas todas, apenas as **cotas** se situam no eixo correto (a perspetiva do eixo **Z**), pois todas as medidas referentes às **abscissas** e aos **afastamentos** dos quatro pontos se situam no eixo errado. De facto, as **perspetivas das abscissas** deveriam estar sobre a perspetiva do eixo **X**, bem como as **perspetivas dos afastamentos** deveriam estar sobre a perspetiva do eixo **Y**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportaram-se as perspetivas das **abscissas** (2, 5 e 6) para a perspetiva do eixo **X**, bem como a perspetiva do **afastamento** (2) para a perspetiva do eixo **Y**.

### Representação do plano frontal (de frente) que contém o quadrado:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspetiva do eixo **Y**, um ponto que é a perspetiva do ponto do eixo **Y** que tem 2 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\varphi$  – **h<sub>φ</sub>** (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e **p<sub>φ</sub>** (a perspetiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que **h<sub>φ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **X**. Pelo seu lado, **p<sub>φ</sub>** (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abscissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Z**.

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral (**p<sub>φ</sub>**).

(continua na página seguinte)







(continuação da página anterior)

Pelo seu lado, atendendo a que o ponto **M** é o vértice de maior abcissa do quadrado (por oposição ao vértice **K**), a sua abcissa é 3 cm superior à abcissa dos pontos **J** e **L** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **M** tem **8 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto **M** são ( 8; 3; 0).

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e a sua base tem cota nula (pois situa-se no *plano coordenado XY*), o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem **7 cm de cota** ( $0 + 7 = 7$ ). Por outro lado, tratando-se de uma **pirâmide regular**, que é uma pirâmide reta, o seu vértice situa-se na mesma projetante horizontal do centro da base (o ponto médio das duas diagonais), que, como se referiu, tem **3 cm de afastamento** (o afastamento dos pontos **K** e **M**) e tem **5 cm de abcissa** (a abcissa dos pontos **J** e **L**). Assim, as coordenadas do ponto **V** são ( 5; 3; 7).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

## b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^{\circ}$ . Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

## Resolução:

As coordenadas dos cinco vértices da pirâmide medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspetivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo **X** para o *plano axonométrico*, pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter rebatido outro eixo qualquer). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo **X** – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto **A** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspetiva do eixo **X**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[BC]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspetiva do eixo **X**). Os pontos **A** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo **[AOQ]** está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** no ponto **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AQ]** (o ponto **N**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **N** e com raio  $\overline{NA} = \overline{NQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[AQ]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **A<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[A<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. A reta definida por **O<sub>r</sub>** e por **Q<sub>r</sub>** (que não se identificou) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

### Determinação das perspetivas das coordenadas dos quatro pontos:

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos cinco pontos sobre o eixo **X<sub>r</sub>**.

Assim, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os valores de todas as coordenadas dos cinco pontos, independentemente das coordenadas e dos pontos a que se referem – 2, 3, 5, 6, 7 e 8. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspetiva do eixo **X**, as perspetivas daquelas coordenadas, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspetiva do eixo **X**, a partir da perspetiva do ponto **O**, estão as perspetivas daquelas seis medidas.

Dessas medidas todas, apenas as **abcissas** se situam no eixo correto (a perspetiva do eixo **X**), pois todas as medidas referentes aos **afastamentos** e às **cotas** dos cinco pontos se situam no eixo errado. De facto, as **perspetivas dos afastamentos** deveriam estar sobre a perspetiva do eixo **Y**, bem como as **perspetivas das cotas** deveriam estar sobre a perspetiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportaram-se as perspetivas dos **afastamentos** (3 e 6) para a perspetiva do eixo **Y**, bem como a perspetiva da **cota** (7) para a perspetiva do eixo **Z**.

### Determinação das perspetivas do ponto L:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **L** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro (**L<sub>1</sub>**, **L<sub>2</sub>** e **L<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **L**. **L<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **L**. **L<sub>2</sub>** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **L** – atendendo a que o ponto **L** tem cota nula, o ponto **L** situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que **L<sub>2</sub>** (a perspetiva da projeção frontal do ponto **L**) se situa sobre a perspetiva do eixo **X**. **L<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **L** – mais uma vez atendendo a que o ponto **L** se situa no *plano coordenado XY* (pois tem cota nula), **L<sub>3</sub>** (a perspetiva da projeção lateral do ponto **L**) situa-se sobre a perspetiva do eixo **Y**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **L** tem cota nula, o ponto **L** situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente  $L_1 \equiv L$  (sendo **L** a perspetiva propriamente dita do ponto **L**).

#### Determinação das perspetivas dos pontos **J**, **K** e **M**:

As perspetivas dos pontos **J**, **K** e **M** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **L**. De facto, atendendo a que os três pontos têm cota nula, as perspetivas das suas projeções frontais ( $J_2$ ,  $K_2$  e  $M_2$ ) situam-se necessariamente sobre a perspetiva do eixo **X**. De forma semelhante, e mais uma vez atendendo a que os três pontos têm cota nula, as perspetivas das suas projeções laterais ( $J_3$ ,  $K_3$  e  $M_3$ ) situam-se necessariamente sobre a perspetiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que os três pontos têm cota nula, os três pontos situam-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente  $J_1 \equiv J$  (sendo **J** a perspetiva propriamente dita do ponto **J**),  $K_1 \equiv K$  (sendo **K** a perspetiva propriamente dita do ponto **K**) e  $M_1 \equiv M$  (sendo **M** a perspetiva propriamente dita do ponto **M**).

Sublinha-se que o ponto **J** tem cota e afastamento nulos, pelo que, na realidade, o ponto **J** é um ponto do eixo **X**. Assim, tem-se, imediatamente,  $J_1 \equiv J_2 \equiv J$ , sendo que  $J_3$  (a perspetiva da sua projeção lateral) está coincidente com **O** (a perspetiva da origem do referencial).

Salienta-se, ainda, que os pontos **J** e **L**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $J_2 \equiv L_2$ . Pelo seu lado, os pontos **K** e **M**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $K_3 \equiv M_3$ .

#### Determinação das perspetivas do ponto **V**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **V** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **V**.  $V_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **V**.  $V_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto **V**.  $V_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto **V**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **V**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de  $V_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de **V** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de  $V_2$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **V** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de  $V_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **V** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **V**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **V** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspetivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada [JVKLM]. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente da perspetiva do sólido. No entanto, a aresta [KM], da base, é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – a base [JKLM] e a face lateral [JKV]. Note que, na realidade, os vértices **J** e **K** são os vértices mais distantes do observador e, por isso, a aresta [JK] é invisível.

Já as arestas laterais [MV] e [LV] são duas arestas visíveis, da pirâmide, porque separam faces da pirâmide que são visíveis, em perspetiva. Note ainda que os vértices **L** e **M** são dos vértices da pirâmide que estão mais próximos do observador.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas da projeção frontal da pirâmide e a perspetiva da sua projeção lateral. Note que não se representou a perspetiva da projeção horizontal da pirâmide, porque a pirâmide assenta, pela sua base, no *plano coordenado XY*. Nestas situações, em que o sólido assenta num dos *planos coordenados*, a representação da projeção do sólido nesse *plano coordenado*, de uma forma geral, dificulta a leitura da resolução gráfica – nesse sentido, em geral, omite-se a representação dessa projeção.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo [ $M_2K_2V_2$ ]. A aresta lateral [JV] é invisível, em projeção frontal, mas está oculta pela aresta [LV] (que é visível, em projeção frontal). Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção frontal. No entanto, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo [ $J_3L_3V_3$ ]. A aresta lateral [KV] é invisível, em projeção lateral, mas está oculta pela aresta [MV] (que é visível, em projeção lateral). Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção lateral. Por outro lado, não existe qualquer parte da projeção lateral da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide, que é opaca, pelo que também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** (em projeção lateral).

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano projetante do eixo **X**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspetivas dos afastamentos e das cotas.

## 1040.

a) A base de menor afastamento do prisma (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano frontal (de frente) com 3 cm de afastamento (o afastamento dos pontos  $A$  e  $B$ ), pelo que os pontos  $C$  e  $D$  têm necessariamente **3 cm de afastamento** (todos os pontos de um plano frontal têm o mesmo afastamento). Por outro lado, é possível constatar que o lado  $[AB]$  do quadrado é fronto-horizontal (é paralelo ao eixo  $X$ ), pelo que o lado  $[CD]$  do polígono será igualmente fronto-horizontal (paralelo ao eixo  $X$ ), pois o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois. Por sua vez, os lados  $[BC]$  e  $[AD]$  serão necessariamente verticais (paralelos ao eixo  $Z$ ), por serem perpendiculares aos lados  $[AB]$  e  $[CD]$ ). Por fim, o lado  $[AB]$  mede 4 cm (a diferença entre as abcissas dos pontos  $A$  e  $B$ ), que é a medida do lado do quadrado.

Assim, o ponto  $C$ , sendo consecutivo ao ponto  $B$ , tem a mesma abcissa do ponto  $B$  (que é 6 cm) e a sua cota é 4 cm superior à cota daquele ponto – o ponto  $C$  tem, assim, **6 cm de abcissa e 6 cm de cota** (e 3 cm de afastamento, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto  $C$  são ( 6 ; 3 ; 6).

O ponto  $D$  tem a mesma abcissa do ponto  $A$  e a mesma cota do ponto  $C$  – o ponto  $D$  tem, assim, **2 cm de abcissa e 6 cm de cota** (e 3 cm de afastamento, como atrás se referiu). Dessa forma, as coordenadas do ponto  $D$  são ( 2 ; 3 ; 6).

Por fim, a altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as bases, o que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre os planos das duas bases. Uma vez que o prisma tem 7 cm de altura e a sua base de menor afastamento tem 3 cm de afastamento (como atrás se referiu), o plano que contém a base de maior afastamento tem **10 cm de afastamento** ( $3 + 7 = 10$ ). Nesse sentido, todos os vértices da base  $[A'B'C'D']$  (a base de maior afastamento do prisma) têm **10 cm de afastamento**.

Tendo em conta que se trata de um **prisma regular** (as suas arestas laterais são necessariamente ortogonais aos planos das bases), as arestas laterais do sólido estão contidas em retas de topo (retas projetantes frontais). Assim, todos os vértices da base  $[A'B'C'D']$  têm abcissa e cotas iguais aos dos vértices correspondentes da base de menor afastamento do sólido (a base  $[ABCD]$ ). Nesse sentido, as coordenadas dos quatro vértices da base  $[A'B'C'D']$  são:  $A'$  ( 2 ; 10 ; 2),  $B'$  ( 6 ; 10 ; 2),  $C'$  ( 6 ; 10 ; 6) e  $D'$  ( 2 ; 10 ; 6).

Salienta-se que o prisma se situa no espaço do  $1^a$  *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspetiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[PQR]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[PQR]$  são arbitrárias.

### Resolução:

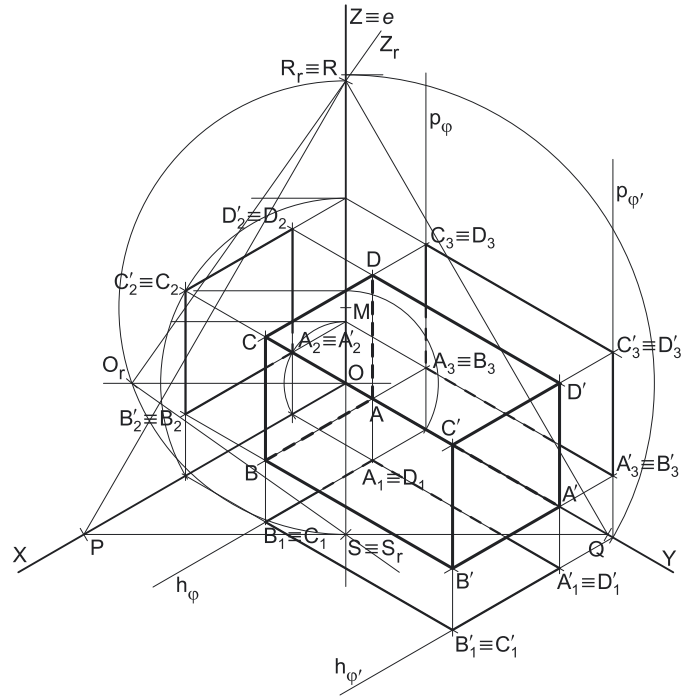
As coordenadas dos oito vértices do prisma medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo  $X$ , os afastamentos medem-se no eixo  $Y$  e as cotas no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspetivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo  $Z$  para o plano axonométrico, pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter rebatido outro eixo qualquer). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo  $Z$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo  $Z$  – tem-se imediatamente  $Z \equiv e$ .

O ponto  $R$  é um ponto do eixo  $Z$  e é, também, um ponto da perspetiva do eixo  $Z$ . O ponto  $S$  é o ponto em que o plano projetante do eixo  $Z$  corta o lado  $[PQ]$  do triângulo fundamental (e também pertence à perspetiva do eixo  $Z$ ). Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo [ROS] está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** no ponto **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo [R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>] é retângulo em **O<sub>r</sub>**. A reta definida por **O<sub>r</sub>** e por **S<sub>r</sub>** (que não se identificou) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o plano coordenado **XY**.

*Determinação das perspectivas das coordenadas dos oito pontos:*

O eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos oito pontos sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**.

Assim, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os valores de todas as coordenadas dos oito pontos, independentemente das coordenadas e dos pontos a que se referem – 2, 3, 6 e 10. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas daquelas coordenadas, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **XZ**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas daquelas quatro medidas.

Dessas medidas todas, apenas as **cotas** se situam no eixo correto (a perspectiva do eixo **Z**), pois todas as medidas referentes às **abscissas** e aos **afastamentos** dos oito pontos se situam no eixo errado. De facto, as **perspectivas das abscissas** deveriam estar sobre a perspectiva do eixo **X**, bem como as **perspectivas dos afastamentos** deveriam estar sobre a perspectiva do eixo **Y**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportaram-se as perspectivas das **abscissas** (2 e 6) para a perspectiva do eixo **X**, bem como as perspectivas dos **afastamentos** (3 e 10) para a perspectiva do eixo **Y**.

*Representação do plano frontal (de frente) que contém a base de menor afastamento do prisma:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Y**, um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo **Y** que tem 3 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o quadrado [ABCD] (a base de menor afastamento do sólido), sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  – **h<sub>φ</sub>** (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e **p<sub>φ</sub>** (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que **h<sub>φ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado, **p<sub>φ</sub>** (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**.

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral (**p<sub>φ</sub>**).

*Representação do plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do prisma:*

De forma semelhante à atrás exposta, pelo ponto da perspectiva do eixo **Y** que é a perspectiva do ponto do eixo **Y** que tem 10 cm de afastamento, conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi'$  – **h<sub>φ'</sub>** (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) e **p<sub>φ'</sub>** (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi'$ ). O plano  $\varphi'$  é o plano frontal (de frente) que contém o quadrado [A'B'C'D'] (a base de maior afastamento do sólido).

Note que **h<sub>φ'</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi'$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado, **p<sub>φ'</sub>** (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi'$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**.

O plano  $\varphi'$  é outro plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>φ'</sub>**). Por outro lado, o plano  $\varphi'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral (**p<sub>φ'</sub>**).

*Determinação das perspectivas do ponto A':*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A'** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A'<sub>1</sub>**, **A'<sub>2</sub>** e **A'<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A'**. **A'<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A'** e situa-se sobre a perspectiva de **h<sub>φ'</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. **A'<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A'**. **A'<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A'** e situa-se sobre **p<sub>φ'</sub>** (o traço lateral do plano  $\varphi'$ ), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A'**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A'<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A'** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A'<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A'** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A'<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A'** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A'**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A'** são dois vértices espacialmente opostos.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Determinação das perspetivas dos pontos $B'$ , $C'$ e $D'$ :

As perspetivas dos pontos  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto  $A'$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\varphi'$ , que é um plano projetante horizontal, as perspetivas das projeções horizontais dos três pontos ( $B'_1$ ,  $C'_1$  e  $D'_1$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\varphi'$ , que é um plano projetante lateral, as perspetivas das projeções laterais dos três pontos ( $B'_3$ ,  $C'_3$  e  $D'_3$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $p_{\varphi'}$  (o traço lateral do plano  $\varphi'$ ).

Os pontos  $B'$  e  $C'$  situam-se na mesma reta vertical (que é uma **reta projetante horizontal**), bem como os pontos  $A'$  e  $D'$ , pelo que as projeções horizontais daqueles dois pares de pontos estão coincidentes – tem-se, imediatamente,  $C'_1 \equiv B'_1$  e  $D'_1 \equiv A'_1$ . Os pontos  $A'$  e  $B'$  situam-se na mesma reta fronto-horizontal (que é uma **reta projetante lateral**), bem como os pontos  $C'$  e  $D'$ , pelo que as projeções laterais daqueles dois pares de pontos estão coincidentes – tem-se, imediatamente,  $A'_3 \equiv B'_3$  e  $C'_3 \equiv D'_3$ .

### Determinação das perspetivas do ponto $A$ :

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $A$ .  $A_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspetiva de  $h_{\varphi}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.  $A_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto  $A$ .  $A_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto  $A$  e situa-se sobre  $p_{\varphi}$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal conduziu-se, pela perspetiva de  $A_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$ ), pela perspetiva de  $A_2$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Y$ ) e pela perspetiva de  $A_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspetivas dos pontos $B$ , $C$ e $D$ :

As perspetivas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto  $A$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspetivas das projeções horizontais dos três pontos ( $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $h_{\varphi}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante lateral, as perspetivas das projeções laterais dos três pontos ( $B_3$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $p_{\varphi}$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Os pontos  $B$  e  $C$  situam-se na mesma reta vertical (que é uma **reta projetante horizontal**), bem como os pontos  $A$  e  $D$ , pelo que as projeções horizontais daqueles dois pares de pontos estão coincidentes – tem-se, imediatamente,  $C_1 \equiv B_1$  e  $D_1 \equiv A_1$ . Os pontos  $A$  e  $B$  situam-se na mesma reta fronto-horizontal (que é uma **reta projetante lateral**), bem como os pontos  $C$  e  $D$ , pelo que as projeções laterais daqueles dois pares de pontos estão coincidentes – tem-se, imediatamente,  $A_3 \equiv B_3$  e  $C_3 \equiv D_3$ .

### Determinação das perspetivas do prisma:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[BCDD'A'B']$ . Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – os vértices  $C'$  e  $A$ . O vértice  $C'$ , por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$  e  $[C'D']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e a aresta lateral  $[CC']$ . O vértice  $A$ , por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base  $[ABCD]$ ) e a aresta lateral  $[AA']$ . No entanto, salienta-se que a aresta lateral  $[AA']$  está parcialmente oculta pela aresta lateral  $[CC']$ , que é visível.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas da projeção horizontal, da projeção frontal e da projeção lateral do prisma.

A **perspetiva da projeção horizontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[C_1D_1D'_1C'_1]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção horizontal do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[A'_2B'_2C'_2D'_2]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção frontal do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[B_3C_3C'_3D'_3]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção lateral do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. Os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  (os planos que contêm as bases do prisma), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos respetivos traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) do prisma, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ , das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspetivas dos afastamentos e das cotas.



**1041.**

Uma **perspectiva dimétrica** é uma **Axonometria Ortogonal** em que o *plano axonométrico* faz, com dois dos *eixos coordenados*, **dois ângulos iguais**, fazendo um **ângulo diferente** com o *terceiro eixo coordenado*.

Em função disso, a **pirâmide axonométrica** não é uma pirâmide regular (embora seja uma pirâmide reta, pois o seu eixo é ortogonal ao plano da base), o **triângulo fundamental** é um triângulo **isósceles**, sendo que dois dos *eixos coordenados* (aqueles que fazem, com o *plano axonométrico*, o mesmo ângulo) são afetados pelo mesmo coeficiente de deformação (ou de redução) e o terceiro eixo coordenado é afetado por um coeficiente de deformação (ou de redução) diferente (existem **dois coeficientes de deformação**). Por fim, as perspectivas dos três eixos coordenados fazem, entre si, dois ângulos obtusos iguais e um terceiro ângulo, também obtuso, mas diferente dos outros dois.

**1042.**

Por **coeficiente de redução isolado** entende-se o coeficiente de redução (ou deformação) que, numa **perspectiva dimétrica**, afeta o *eixo coordenado* que faz, com o *plano axonométrico*, um **ângulo diferente** do ângulo que os outros dois *eixos coordenados* fazem com o *plano axonométrico*.

**1043.****a) Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz, com a perspectiva do eixo **X**, um ângulo de  $110^\circ$  e um ângulo de  $125^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $125^\circ$  ( $360^\circ - 110^\circ - 125^\circ = 125^\circ$ ). O eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada, pois a sua perspectiva faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos, ou seja, ângulos de  $125^\circ$ . Em seguida, desenhou-se o triângulo **[PQR]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[PQR]** são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a abcissa do ponto **A** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **A** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **A** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **A** se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **A** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspectiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como atrás se referiu, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **Y**.

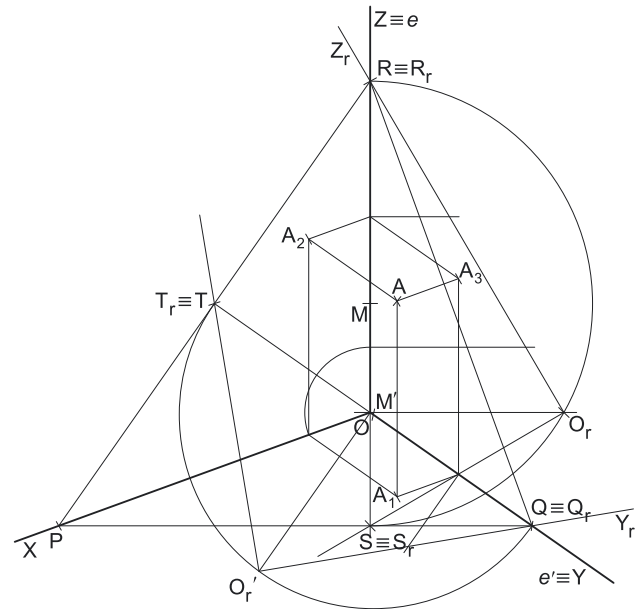
Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

**Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e do eixo Z e das perspectivas da abcissa e da cota do ponto A:**

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter recorrido ao rebatimento do eixo **X**). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e$ .

O ponto **R** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **S** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[AB]** do *triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .*

O triângulo **[ROS]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. A reta definida por **O<sub>r</sub>** e por **S<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z$  rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível, sobre o eixo  $Z_r$ , medir a **abscissa** e a **cota** do ponto  $A$  em verdadeira grandeza, mas não o seu **afastamento**.

Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se a **abscissa** (2 cm) e a **cota** (6 cm) do ponto  $A$ , em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , as perspectivas da **abscissa** e da **cota** do ponto  $A$ , já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , a partir da perspectiva do ponto  $O$ , estão as perspectivas da **abscissa** e da **cota** do ponto  $A$ .

No entanto, a perspectiva da **abscissa** do ponto  $A$  está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $X$ . Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto  $O$ , transportou-se a perspectiva da **abscissa** do ponto  $A$  para a perspectiva do eixo  $X$ .

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo  $Y$  e da perspectiva do afastamento do ponto  $A$ :*

O **afastamento** do ponto  $A$  mede-se sobre o eixo  $Y$ , que é o eixo que sofre uma **redução isolada** – nesse sentido, há que rebater o eixo  $Y$  para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo  $Y$ ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo  $Y$  – tem-se imediatamente  $Y \equiv e'$ .

O ponto  $Q$  é um ponto do eixo  $Y$  e é, também, um ponto da perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $T$  é o ponto em que o plano projetante do eixo  $Y$  corta o lado  $[PR]$  do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo  $Y$ ). Os pontos  $Q$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $Q_r \equiv Q$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo  $[QOT]$  está contido no plano projetante do eixo  $Y$  e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[QT]$  (o ponto  $M'$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio  $M'Q = M'T$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[QT]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira  $e'$  (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ ). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $Q_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo  $[Q_r O_r' T_r]$  é retângulo em  $O_r'$ . A reta definida por  $O_r'$  e por  $T_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Y$  com o *plano coordenado  $XZ$* .

O eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir o **afastamento** do ponto  $A$ , em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Y_r$ . Assim, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** (4 cm) do ponto  $A$ , em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma reta perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , a perspectiva do **afastamento** do ponto  $A$ , já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , a partir da perspectiva do ponto  $O$ , está a perspectiva do **afastamento** do ponto  $A$ .

*Determinação das perspectivas do ponto  $A$ :*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $A$ .  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ .  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ .  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

b) O eixo que sofre uma **redução isolada** é o eixo  $Y$  (como na alínea anterior se referiu). O eixo  $Y$  sofre uma **redução maior** do que os outros dois eixos, pois o eixo  $Y$  faz, com o *plano axonométrico*, um ângulo maior do que o ângulo que os outros dois eixos fazem com o *plano axonométrico*.

Note que o ângulo que o eixo  $Z$  faz com o *plano axonométrico* (que é igual ao ângulo que o eixo  $X$  faz com o *plano axonométrico*) está em verdadeira grandeza no ângulo entre a perspectiva do eixo  $Z$  e o eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z$  rebatido). De forma semelhante, o ângulo que o eixo  $Y$  faz com o *plano axonométrico* está em verdadeira grandeza no ângulo entre a perspectiva do eixo  $Y$  e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido).

O ângulo que o eixo  $Y$  faz com o *plano axonométrico* é maior do que o ângulo que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem com o *plano axonométrico*, pelo que o coeficiente de redução do eixo  $Y$  é menor do que o coeficiente de redução dos outros dois eixos (que é o mesmo) – note que a uma **redução maior** corresponde um **coeficiente de redução menor**.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  e do plano projetante do eixo  $Y$ , das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte da perspectiva da abscissa), representaram-se a **leve**.

## 1044.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo  $X$  e a perspectiva do eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $130^\circ$ , restam  $230^\circ$  para os outros dois ângulos ( $360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$ ). O eixo  $X$  é o eixo que sofre uma redução isolada, pelo que a sua perspectiva faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos – uma vez que a perspectiva do eixo  $X$  faz um ângulo de  $130^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Z$ , a perspectiva do eixo  $X$  faz outro ângulo de  $130^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Y$ , o que perfaz um total de  $260^\circ$  ( $2 \times 130^\circ = 260^\circ$ ). Assim, a perspectiva do eixo  $Y$  e a perspectiva do eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $100^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[ABC]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[ABC]$  são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas do ponto  $R$  medem-se nos eixos a que se referem – a abcissa do ponto  $R$  mede-se no eixo  $X$ , o afastamento do ponto  $R$  mede-se no eixo  $Y$  e a cota do ponto  $R$  no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto  $R$  se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto  $R$  sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como refere o enunciado expressamente, o eixo  $X$  é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ ) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo  $X$ .

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

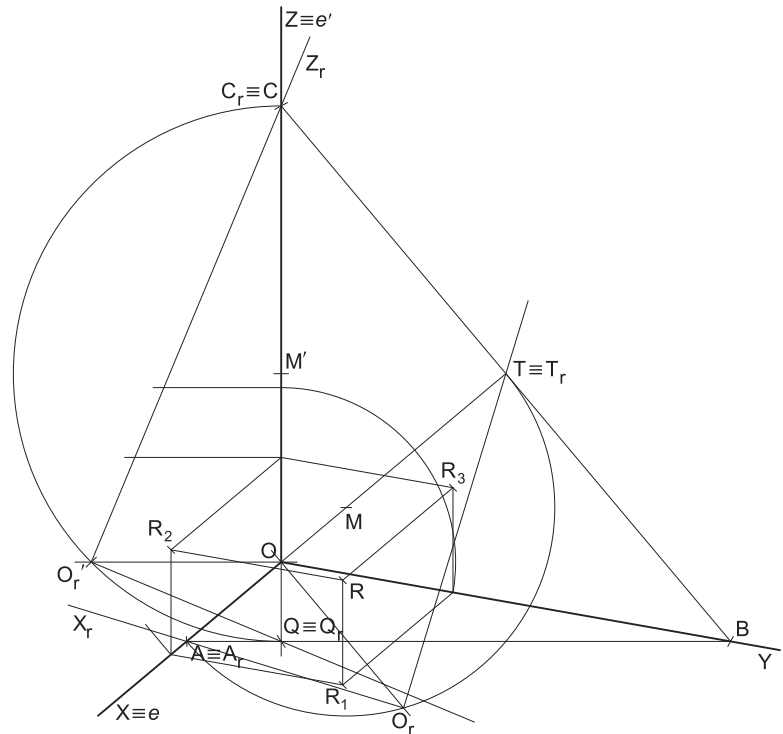
**Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo  $X$  e da perspetiva da abcissa do ponto  $R$ :**

A **abcissa** do ponto  $R$  mede-se sobre o eixo  $X$ , que é o eixo que sofre uma **redução isolada** – nesse sentido, há que rebater o eixo  $X$  para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo  $X$ ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo  $X$  – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto  $A$  é um ponto do eixo  $X$  e é, também, um ponto da perspectiva do eixo  $X$ . O ponto  $T$  é o ponto em que o plano projetante do eixo  $X$  corta o lado  $[BC]$  do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo  $X$ ). Os pontos  $A$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo  $[AOT]$  está contido no plano projetante do eixo  $X$  e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[AT]$  (o ponto  $M$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $\overline{MA} = \overline{MT}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[AT]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira  $e$  (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $A_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo  $[A_r O_r T_r]$  é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $T_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo  $X$  com o *plano coordenado*  $YZ$ .

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir a **abcissa** do ponto  $R$ , em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $X_r$ . Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** (7 cm) do ponto  $R$ , em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma reta perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , a perspectiva da **abcissa** do ponto  $R$ , já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo  $X$ , a partir da perspectiva do ponto  $O$ , está a perspectiva da **abcissa** do ponto  $R$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e do eixo Z e das perspectivas do afastamento e da cota do ponto R:*

Em seguida, optou-se por rebater o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter recorrido ao rebatimento do eixo **Y**). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e'$ .

O ponto **C** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[AB]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **C** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $C_r \equiv C$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo **[COQ]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[CQ]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $M'C = M'Q$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[CQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $C_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo **[C<sub>r</sub>O<sub>r</sub>'Q<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r'$ . A reta definida por  $O_r'$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **Y** e o eixo **Z** apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível, sobre o eixo  $Z_r$ , medir o **afastamento** e a **cota** do ponto **R**, em verdadeira grandeza.

Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se o **afastamento** (5 cm) e a **cota** (3 cm) do ponto **R**, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas do **afastamento** e da **cota** do ponto **R**, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas do **afastamento** e da **cota** do ponto **R**.

No entanto, a perspectiva do **afastamento** do ponto **R** está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo **Y**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportou-se a perspectiva do **afastamento** do ponto **R** para a perspectiva do eixo **Y**.

*Determinação das perspectivas do ponto R:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **R** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**R<sub>1</sub>**, **R<sub>2</sub>** e **R<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **R**. **R<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **R**. **R<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **R**. **R<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **R**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **R**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **R<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **R** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **R<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **R** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **R<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **R** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **R**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **R** são dois vértices espacialmente opostos.

**Resposta à questão:**

O eixo **X** (o eixo que sofre uma **redução isolada**) sofre uma **redução maior** do que os outros dois eixos, pois o eixo **X** faz, com o *plano axonométrico*, um ângulo maior do que o ângulo que os outros dois eixos fazem com o *plano axonométrico*.

Note que o ângulo que o eixo **Z** faz com o *plano axonométrico* (que é igual ao ângulo que o eixo **Y** faz com o *plano axonométrico*) está em verdadeira grandeza no ângulo entre a perspectiva do eixo **Z** e o eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido). De forma semelhante, o ângulo que o eixo **X** faz com o *plano axonométrico* está em verdadeira grandeza no ângulo entre a perspectiva do eixo **X** e o eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido).

O ângulo que o eixo **X** faz com o *plano axonométrico* é maior do que o ângulo que o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem com o *plano axonométrico*, pelo que o coeficiente de redução do eixo **X** é menor do que o coeficiente de redução dos outros dois eixos (que é o mesmo) – note que a uma **redução maior** corresponde um **coeficiente de redução menor**.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano projetante do eixo **Z** e do plano projetante do eixo **X**, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspectiva do afastamento), representaram-se a **leve**.

## 1045.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** (o eixo que sofre uma redução isolada) faz ângulos de  $125^\circ$  com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**), o que perfaz um total de  $250^\circ$  ( $2 \times 125^\circ = 250^\circ$ ), as perspectivas destes dois eixos fazem, entre si, um ângulo de  $110^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas dos pontos **M** e **N** medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas dos dois pontos se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como refere o enunciado expressamente, o eixo **X** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **X**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

**Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e da perspectiva das abscissas dos pontos M e N:**

As **abscissas** dos dois pontos medem-se sobre o eixo **X**, que é o eixo que sofre uma **redução isolada** – nesse sentido, há que rebater o eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **X** – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

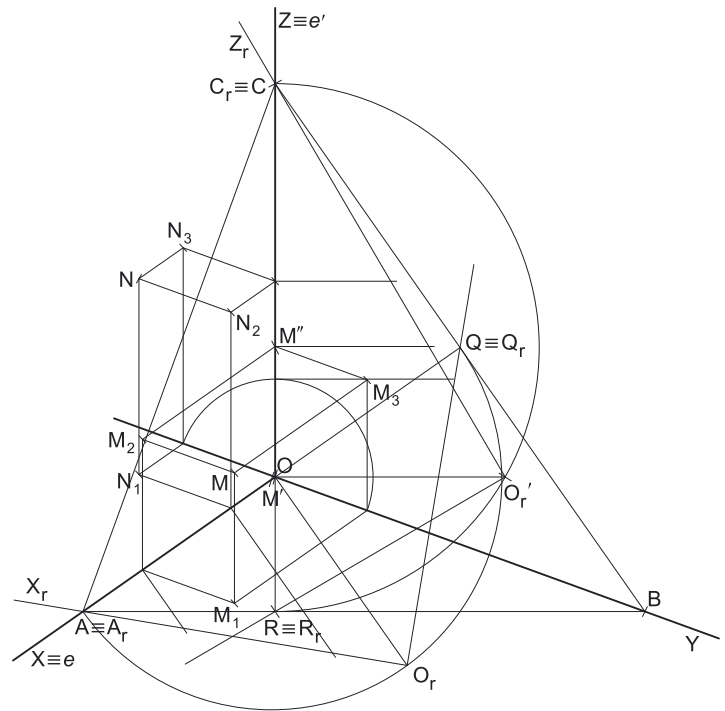
O ponto **A** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **X**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[BC]** do *triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **A** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $Q_r \equiv Q$ .*

O triângulo **[AOQ]** está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AQ]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $M'A = M'Q$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[AQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **A<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[A<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. A reta definida por **O<sub>r</sub>** e por **Q<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir as **abscissas** dos dois pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**. Assim, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos dois pontos (2 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, as perspectivas das **abscissas** dos dois pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas das **abscissas** do ponto **M** e do ponto **N**.

**Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e do eixo Z e das perspectivas dos afastamentos e das cotas dos pontos M e N:**

Em seguida, optou-se por rebater o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter recorrido ao rebatimento do eixo **Y**). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e'$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **C** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **R** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[AB]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **C** e **R** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $C_r \equiv C$  e  $R_r \equiv R$ .

O triângulo **[COR]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[CR]** (o ponto **M''**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M''** e com raio  $M''C = M''R$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[CR]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>'**, sobre a semicircunferência – **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>'** e **C<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[C<sub>r</sub>O<sub>r</sub>'R<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>'**. A reta definida por **O<sub>r</sub>'** e por **R<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **Y** e o eixo **Z** apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**, medir os **afastamentos** e as **cotas** dos dois pontos, em verdadeira grandeza.

Assim, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** (3 cm) e as **cotas** (4 cm e 6 cm) dos dois pontos, em verdadeira grandeza. Salienta-se que os dois pontos não têm o mesmo afastamento (o ponto **M** tem 3 cm de afastamento e o ponto **N** tem –3 de afastamento) mas, em valor absoluto, o valor é o mesmo – por isso mesmo, apenas se mediram os 3 cm. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas dos **afastamentos** e das **cotas** dos dois pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas dos **afastamentos** e das **cotas** dos dois pontos.

No entanto, as perspectivas dos **afastamentos** dos dois pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspectiva do eixo **Y**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportaram-se as perspectivas dos **afastamentos** dos dois pontos para a perspectiva do eixo **Y**. Note que o **afastamento** do ponto **M** se transportou para a **parte positiva** do eixo **Y** (porque o afastamento do ponto **M** é **positivo**), enquanto o **afastamento** do ponto **N** se transportou para a **parte negativa** do eixo **Y** (porque o afastamento do ponto **N** é **negativo**).

#### Determinação das perspectivas do ponto **M**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**M<sub>1</sub>**, **M<sub>2</sub>** e **M<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **M**. **M<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M**. **M<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **M**. **M<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **M**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **M**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **M<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **M<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **M<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **M**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **M** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas do ponto **N**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **N** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**N<sub>1</sub>**, **N<sub>2</sub>** e **N<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **N**. **N<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **N**. **N<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **N**. **N<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **N**.

Uma vez que o afastamento do ponto **N** é negativo, **N<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **N**) situa-se para cima da perspectiva do eixo **X**, tal como **N<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **N**) se situa para a esquerda da perspectiva do eixo **Z**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **N**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **N<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **N** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **N<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **N** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **N<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **N** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **N**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **N** são dois vértices espacialmente opostos.

Salienta-se que o ponto **N**, tendo afastamento negativo, se situa para trás do *plano coordenado XZ*, o que se pode comprovar na resolução gráfica apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido são dois pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano projetante do eixo **Z** e do plano projetante do eixo **X**, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte das perspectivas dos afastamentos dos dois pontos), representaram-se a **leve**.



## 1046.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz ângulos de  $115^\circ$  com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**), o que perfaz um total de  $230^\circ$  ( $2 \times 115^\circ = 230^\circ$ ), as perspectivas destes dois eixos fazem, entre si, um ângulo de  $130^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 230^\circ = 130^\circ$ ). Atendendo a que a perspectiva do eixo **Z** faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo **Z** é o eixo que sofre uma **redução isolada**. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas dos dois pontos se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo **Z** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **Z**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

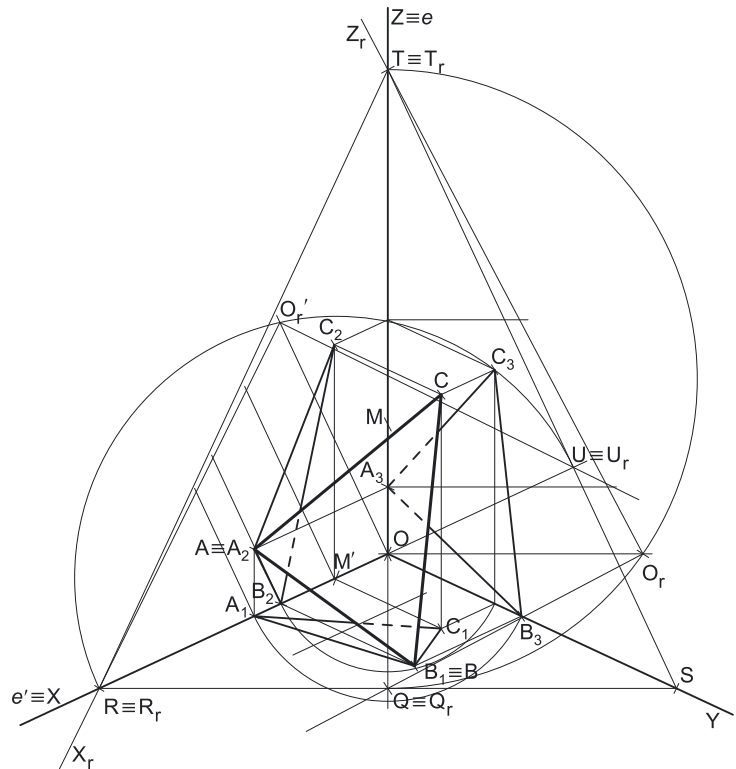
*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Z e da perspectiva das cotas dos três pontos:*

As **cotas** dos três pontos medem-se sobre o eixo **Z**, que é o eixo que sofre uma **redução isolada** – nesse sentido, há que rebater o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e$ .

O ponto **T** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[RS]** do *triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **T** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $Q_r \equiv Q$ .*

O triângulo **[TOQ]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[TQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MT = MQ$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[TQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo **[T<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir as **cotas** dos três pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Z_r$ . Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos (4 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza (salienta-se que o ponto **B** tem cota nula). Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas das **cotas** dos pontos **A** e **C**, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas das **cotas** do ponto **A** e do ponto **C**.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e do eixo Y e das perspectivas das abcissas e dos afastamentos dos três pontos:*

Em seguida, optou-se por rebater o eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter recorrido ao rebatimento do eixo **Y**). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **X** – tem-se imediatamente  $X \equiv e'$ .

O ponto **R** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **X**. O ponto **U** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[ST]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **R** e **U** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $U_r \equiv U$ .

O triângulo **[ROU]** está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RU]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $M'R = M'U$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RU]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **X**). O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>'U<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r'$ . A reta definida por  $O_r'$  e por  $U_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **X** e o eixo **Y** apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível, sobre o eixo  $X_r$ , medir as **abcissas** e os **afastamentos** dos três pontos, em verdadeira grandeza.

Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** (2, 4 e 5 cm) e os **afastamentos** (4 cm e 5 cm) dos três pontos, em verdadeira grandeza (saliente-se que o ponto **A** tem afastamento nulo). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, as perspectivas das **abcissas** e dos **afastamentos** dos três pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas das **abcissas** e dos **afastamentos** dos três pontos.

No entanto, as perspectivas dos **afastamentos** dos pontos **B** e **C** estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspectiva do eixo **Y**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportaram-se as perspectivas dos **afastamentos** dos dois pontos para a perspectiva do eixo **Y**.

*Determinação das perspectivas do ponto A:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A<sub>1</sub>**, **A<sub>2</sub>** e **A<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A** – uma vez que o ponto **A** tem afastamento nulo, o ponto **A** situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que **A<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**) se situa sobre a perspectiva do eixo **X**. **A<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**. **A<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A** – mais uma vez atendendo a que o ponto **A** se situa no *plano coordenado XZ* (pois tem afastamento nulo), **A<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **Z**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **A** tem afastamento nulo, o ponto **A** situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que se tem imediatamente  $A_2 \equiv A$  (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

*Determinação das perspectivas do ponto B:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **B** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**B<sub>1</sub>**, **B<sub>2</sub>** e **B<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **B**. **B<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**. **B<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **B** – uma vez que o ponto **B** tem cota nula, o ponto **B** situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que **B<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **B**) se situa sobre a perspectiva do eixo **X**. **B<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **B** – mais uma vez atendendo a que o ponto **B** se situa no *plano coordenado XY* (pois tem cota nula), **B<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **B**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **B** tem cota nula, o ponto **B** situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente  $B_1 \equiv B$  (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

*Determinação das perspectivas do ponto C:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **C** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**C<sub>1</sub>**, **C<sub>2</sub>** e **C<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **C**. **C<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**. **C<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**. **C<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **C**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **C<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **C<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **C<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **C** são dois vértices espacialmente opostos.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspectivas do triângulo:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo  $[ABC]$  é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo  $[A_1B_1C_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo  $[A_2B_2C_2]$  é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo  $[A_3B_3C_3]$  é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respectiva ocultação pelo próprio triângulo – partes das projeções do triângulo nos planos coordenados estão ocultas pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

#### Resposta à questão:

O eixo que sofre uma **redução isolada** é o eixo  $Z$ , como atrás se referiu. O eixo  $Z$  sofre uma **redução menor** do que os outros dois eixos, pois o eixo  $Z$  faz, com o plano axonométrico, um ângulo menor do que o ângulo que os outros dois eixos fazem com o plano axonométrico.

Note que o ângulo que o eixo  $X$  faz com o plano axonométrico (que é igual ao ângulo que o eixo  $Y$  faz com o plano axonométrico) está em verdadeira grandeza no ângulo entre a perspectiva do eixo  $X$  e o eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido). De forma semelhante, o ângulo que o eixo  $Z$  faz com o plano axonométrico está em verdadeira grandeza no ângulo entre a perspectiva do eixo  $Z$  e o eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z$  rebatido).

O ângulo que o eixo  $Z$  faz com o plano axonométrico é menor do que o ângulo que o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem com o plano axonométrico, pelo que o coeficiente de redução do eixo  $Z$  é maior do que o coeficiente de redução dos outros dois eixos (que é o mesmo) – note que a uma **redução menor** corresponde um **coeficiente de redução maior**.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do triângulo  $[ABC]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades assinaladas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  e do plano projetante do eixo  $X$ , das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas dos afastamentos dos pontos).

## 1047.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo  $X$  faz ângulos de  $105^\circ$  com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ ), o que perfaz um total de  $210^\circ$  ( $2 \times 105^\circ = 210^\circ$ ), as perspectivas destes dois eixos fazem, entre si, um ângulo de  $150^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$ ). Atendendo a que a perspectiva do eixo  $X$  faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo  $X$  é o eixo que sofre uma **redução isolada**. Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[ABC]$ , que é o triângulo fundamental – as dimensões do triângulo  $[ABC]$  são arbitrarias.

#### Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três planos coordenados, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três eixos coordenados e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto  $O$ . Assim, é necessário medir os 6 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos eixos coordenados. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhum dos eixos se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir o comprimento da aresta do cubo sobre as perspectivas dos eixos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

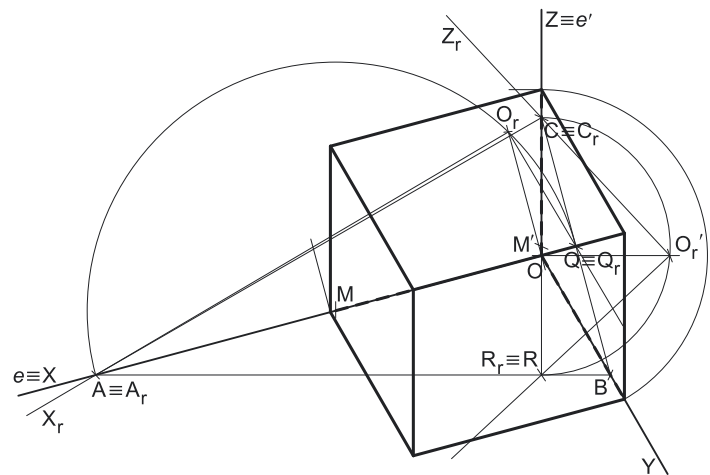
Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo  $X$  é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ ) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo  $X$ .

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo $X$ :

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo  $X$  para o plano axonométrico, pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo  $X$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo  $X$  – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **A** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **X**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[BC]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **A** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo **[AOQ]** está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** no ponto **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MA = MQ$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[AQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $A_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo **[A<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza – já é possível medir a medida da aresta do cubo sobre o eixo  $X_r$ . Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 6 cm (a medida da aresta do cubo) e, em seguida, inverteu-se o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) – isto permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **X**, a perspectiva da medida da aresta do sólido já reduzida (afetada pelo coeficiente de deformação que afeta a perspectiva do eixo **X**).

Este procedimento permitiu-nos obter a perspectiva do **vértice** do cubo que se situa no eixo **X** (para além do ponto **O**, que é um outro vértice do cubo).

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo **Y** e do eixo **Z**:

Em seguida, optou-se por rebater o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter recorrido ao rebatimento do eixo **Y**). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e'$ .

O ponto **C** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **R** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[AB]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **C** e **R** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $C_r \equiv C$  e  $R_r \equiv R$ .

O triângulo **[COR]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[CR]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $M'C = M'R$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[CR]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $C_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo **[C<sub>r</sub>O<sub>r</sub>'R<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r'$ . A reta definida por  $O_r'$  e por  $R_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza – já é possível medir a medida da aresta do cubo sobre o eixo  $Z_r$ . Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 6 cm (a medida da aresta do cubo) e, em seguida, inverteu-se o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) – isto permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva da medida da aresta do sólido já reduzida (afetada pelo coeficiente de deformação)

Tendo em conta que o eixo **Y** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), há que transportar essa medida para a perspectiva do eixo **Y**, onde se situa uma outra aresta do cubo. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportou-se a perspectiva da medida da aresta do cubo da perspectiva do eixo **Z** para a perspectiva do eixo **Y**.

Este procedimento permitiu-nos obter as perspectivas dos **vértices** do cubo que se situa no eixo **Y** e no eixo **Z** (para além do ponto **O**, que é outro vértice do cubo).

### Determinação da perspectiva do cubo:

A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo sobre as perspectivas dos três eixos, desenharam-se os três paralelogramos dos quais as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** – esses paralelogramos são as perspectivas das três faces do cubo que se situam nos três *planos coordenados*. O desenho desses paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais **três vértices** do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspectivas de sete deles, falta-nos a perspectiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice **O**. Assim, determinou-se a perspectiva desse vértice conduzindo, pelas perspectivas dos três vértices anteriores, as perspectivas das arestas em falta (que são paralelas às perspectivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspectiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos *eixos coordenados*).

### Resposta à questão:

O eixo em que se verifica a **maior redução** não é um único eixo mas, sim, um par de eixos – o eixo **Y** e o eixo **Z**, que sofrem, ambos, a mesma redução, que é maior do que a redução que afeta o eixo **X**.

De facto, o eixo **X** sofre uma **redução isolada**, como atrás se referiu. Por outro lado, o eixo **X** sofre uma **redução menor** do que os outros dois eixos, pois o eixo **X** faz, com o *plano axonométrico*, um ângulo menor do que o ângulo que os outros dois eixos fazem com o *plano axonométrico*.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

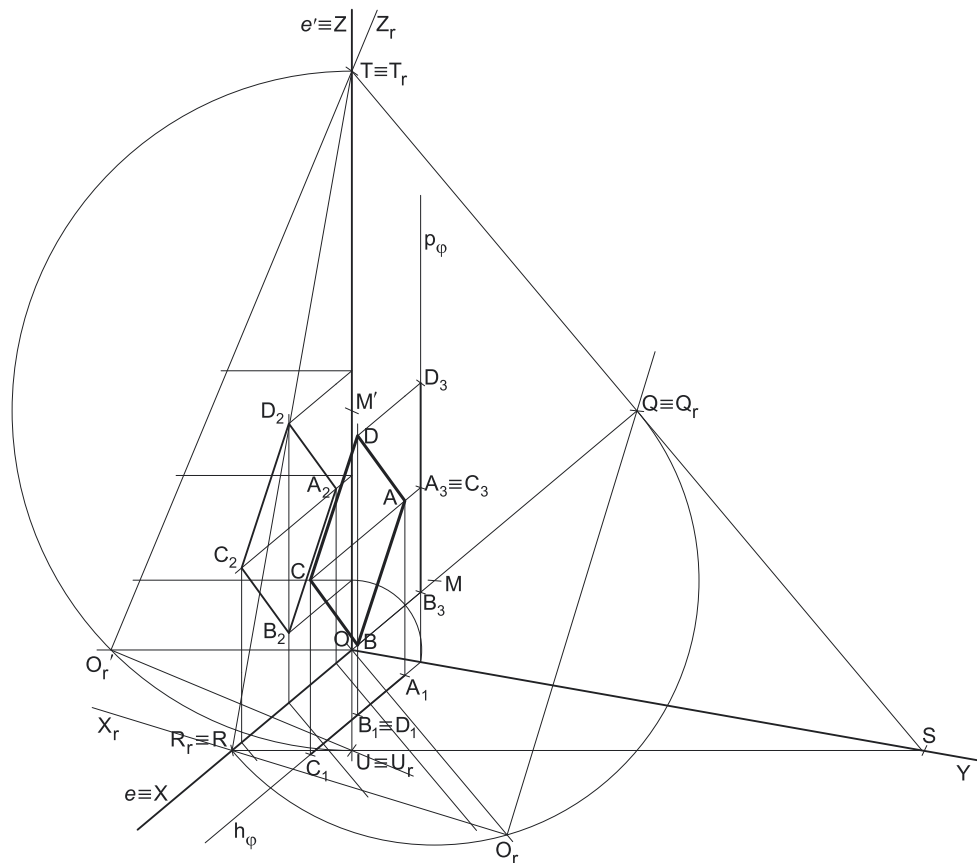
Note que o ângulo que o eixo **Z** faz com o *plano axonométrico* (que é igual ao ângulo que o eixo **Y** faz com o *plano axonométrico*) está em verdadeira grandeza no ângulo entre a perspectiva do eixo **Z** e o eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido). De forma semelhante, o ângulo que o eixo **X** faz com o *plano axonométrico* está em verdadeira grandeza no ângulo entre a perspectiva do eixo **X** e o eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido).

O ângulo que o eixo **Z** faz com o *plano axonométrico* (e que é igual ao ângulo que o eixo **Y** faz com o *plano axonométrico*) é maior do que o ângulo que o eixo **X** faz com o *plano axonométrico*, pelo que o coeficiente de redução do eixo **Z** (e do eixo **Y**, que sofre a mesma redução) é menor do que o coeficiente de redução do eixo **X** – note que a uma **redução maior** corresponde um **coeficiente de redução menor**.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano projetante do eixo **X**, do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da medida da aresta do cubo.

### 1048.



- a) O quadrado está contido num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **2 cm de afastamento** (todos os pontos de um plano frontal têm o mesmo afastamento). Os pontos **A** e **C** têm o mesmo afastamento e a mesma cota, pelo que é possível constatar que a diagonal **[AC]** do quadrado é fronto-horizontal (paralela ao eixo **X**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal **[BD]**), porque é perpendicular à diagonal **[AC]** e está contida num plano frontal (de frente), é necessariamente vertical (paralela ao eixo **Z**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal **[AC]** tem necessariamente 4 cm de abscissa (a média aritmética das abscissas dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **4 cm de abscissa**. Por outro lado, a diagonal **[AC]** mede 6 cm (a diferença entre as abscissas dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal **[BD]** mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

Tendo em conta que o enunciado é omissivo no que respeita à ordem dos vértices **B** e **D**, considerou-se (de forma arbitrária) que **B** é o vértice de menor cota do quadrado e que **D** é o seu vértice de maior cota. Considerando que o ponto **B** é o vértice de menor cota do quadrado, a sua cota é 3 cm inferior à cota dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **2 cm de cota**. As coordenadas do ponto **B** são (4; 2; 2).

Por fim, o ponto **D** é o vértice de maior cota do quadrado, pelo que a sua cota é 3 cm superior à cota dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **8 cm de cota**. As coordenadas do ponto **D** são (4; 2; 8).

Salienta-se que o quadrado se situa no espaço do 1.<sup>a</sup> Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz ângulos de  $130^\circ$  com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**), o que perfaz um total de  $260^\circ$  ( $2 \times 130^\circ = 260^\circ$ ), as perspectivas destes dois eixos fazem, entre si, um ângulo de  $100^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$ ). Atendendo a que a perspectiva do eixo **X** faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo **X** é o eixo que sofre uma **redução isolada**. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas dos quatro pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo **X** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo **X**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

#### *Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e da perspetiva das abcissas dos quatro pontos:*

As **abcissas** dos quatro pontos medem-se sobre o eixo **X**, que é o eixo que sofre uma **redução isolada** – nesse sentido, há que rebater o eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo **X** – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto **R** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspetiva do eixo **X**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[ST]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspetiva do eixo **X**). Os pontos **R** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo **[ROQ]** está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RQ]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. A reta definida por **O<sub>r</sub>** e por **Q<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir as **abcissas** dos quatro pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**. Assim, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos quatro pontos (1, 4 e 7 cm), em verdadeira grandeza (salienta-se que os pontos **B** e **D** têm a mesma abcissa). Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspetiva do eixo **X**, as perspectivas das **abcissas** dos quatro pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspetiva do eixo **X**, a partir da perspetiva do ponto **O**, estão as perspectivas das **abcissas** dos quatro vértices do quadrado.

#### *Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e do eixo Z e das perspectivas dos afastamentos e das cotas dos quatro pontos:*

Em seguida, optou-se por rebater o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter recorrido ao rebatimento do eixo **Y**). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e'$ .

O ponto **T** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspetiva do eixo **Z**. O ponto **U** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspetiva do eixo **Z**). Os pontos **T** e **U** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

O triângulo **[TOU]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[TU]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'T} = \overline{M'U}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[TU]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>'**, sobre a semicircunferência – **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **X**). O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>'** e **T<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[T<sub>r</sub>O<sub>r</sub>'U<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>'**. A reta definida por **O<sub>r</sub>'** e por **U<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z$  rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo  $Z$  e o eixo  $Y$  apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível, sobre o eixo  $Z_r$ , medir os **afastamentos** e as **cotas** dos quatro pontos, em verdadeira grandeza.

Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** (2, 5 e 8 cm) e o **afastamento** (2 cm) dos quatro pontos, em verdadeira grandeza (salienta-se que os quatro pontos têm o mesmo afastamento e que os pontos  $A$  e  $C$  têm a mesma cota). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , as perspectivas das **cotas** e dos **afastamentos** dos quatro pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , a partir da perspectiva do ponto  $O$ , estão as perspectivas das **cotas** e do **afastamento** dos quatro vértices do quadrado.

No entanto, a perspectiva do **afastamento** dos quatro pontos está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto  $O$ , transportou-se a perspectiva do **afastamento** dos quatro pontos para a perspectiva do eixo  $Y$ .

*Representação do plano frontal (de frente) que contém o quadrado:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo  $Y$  que tem 2 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto A:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $A$ .  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ .  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$  e situa-se sobre  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D:*

As perspectivas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $A$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos ( $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos ( $B_3$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $B$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $B_1 \equiv D_1$ . Pelo seu lado, os pontos  $A$  e  $C$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $A_3 \equiv C_3$ .

*Determinação das perspectivas do quadrado:*

Por fim, desenharam-se as perspectivas do quadrado. O quadrilátero  $[ABCD]$  (que é um paralelogramo) é a perspectiva propriamente dita do quadrado. O quadrilátero  $[A_2B_2C_2D_2]$  (que, neste caso, é outro paralelogramo) é a perspectiva da projeção frontal do quadrado. O segmento de reta  $[A_1C_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do quadrado (a projeção horizontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_\varphi$ , pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal). O segmento de reta  $[B_3D_3]$  é a perspectiva da projeção lateral do quadrado (a projeção lateral do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre  $p_\varphi$ , pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral).

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\varphi$  (o plano que contém o quadrado), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. A perspectiva do quadrado  $[ABCD]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ , do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ , das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspectiva do afastamento.



## 1049.

a) O losango está contido num plano de perfil com 3 cm de abcissa (a abcissa dos pontos **A** e **B**), pelo que os pontos **C** e **D** têm necessariamente **3 cm de abcissa** (todos os pontos de um plano de perfil têm a mesma abcissa). A diagonal **[AC]** do losango é vertical (paralela ao eixo **Z**), pelo que a diagonal **[BD]**, porque é perpendicular à diagonal **[AC]** e está contida num plano de perfil, é necessariamente de topo (paralela ao eixo **Y**).

Uma vez que a diagonal **[AC]** é vertical, o ponto **C** tem o mesmo afastamento do ponto **A** – o ponto **C** tem **3 cm de afastamento**. Uma vez que a diagonal **[BD]** é de topo, o ponto **D** tem a mesma cota do ponto **B** – o ponto **D** tem **4 cm de cota**.

Por outro lado, as duas diagonais do losango bisetam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais). O ponto médio da diagonal **[AC]** tem necessariamente 3 cm de afastamento (o afastamento do ponto **A**) e 4 cm de cota (a cota do ponto **B**). Assim, diagonal **[AC]** mede necessariamente 8 cm (o dobro da cota do ponto médio da diagonal **[AC]**), enquanto a diagonal **[BD]** mede necessariamente 6 cm (o dobro do afastamento do ponto médio da diagonal **[BD]**).

Nesse sentido, e atendendo a que o ponto **A** (que tem cota nula) é o extremo inferior da diagonal **[AC]**, o ponto **C** tem **8 cm de cota** ( $0 + 8 = 8$ ). As coordenadas do ponto **C** são ( 3; 3; 8).

Por fim, atendendo a que o ponto **B** tem afastamento nulo, o ponto **B** é extremo de menor afastamento da diagonal **[BD]**, que mede 6 cm, pelo que o ponto **D** tem **6 cm de afastamento** ( $0 + 6 = 6$ ). As coordenadas do ponto **D** são ( 3; 6; 4).

Salienta-se que o losango se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

## b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. A perspetiva do eixo **Z** faz um ângulo de  $115^\circ$  com a perspetiva do eixo **X** e um ângulo de  $130^\circ$  com a perspetiva do eixo **Y**, o que perfaz um total de  $245^\circ$  ( $115^\circ + 130^\circ = 245^\circ$ ). Assim, as perspetivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de  $115^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 245^\circ = 115^\circ$ ). Assim, a perspetiva do eixo **X** faz ângulos iguais (de  $115^\circ$ ) com as perspetivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**), pelo que o eixo **X** é o eixo que sofre uma **redução isolada**. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

## Resolução:

As coordenadas dos quatro pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspetivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

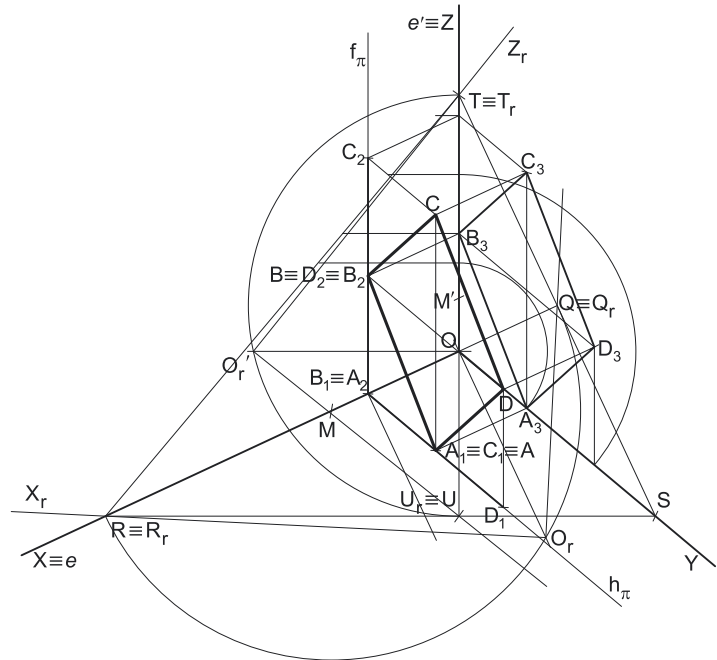
Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo **X** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspetivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo **X**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e da perspetiva da abcissa dos quatro pontos:

A **abcissa** dos quatro pontos mede-se sobre o eixo **X**, que é o eixo que sofre uma **redução isolada** – nesse sentido, há que rebater o eixo **X** para o plano axonométrico (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo **X** – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto **R** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspetiva do eixo **X**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[ST]** do triângulo fundamental (e também pertence à perspetiva do eixo **X**). Os pontos **R** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $Q_r \equiv Q$ .



(continuação da página anterior)

O triângulo [ROQ] está contido no plano projetante do eixo  $X$  e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RQ] (o ponto  $M$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $\overline{MR} = \overline{MQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RQ] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira  $e$  (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo [R $_r$ O $_r$ Q $_r$ ] é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo  $X$  com o *plano coordenado YZ*.

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir a **abscissa** dos quatro pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $X_r$ . Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** dos quatro pontos (3 cm), em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , a perspectiva da **abscissa** dos quatro pontos, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo  $X$ , a partir da perspectiva do ponto  $O$ , está a perspectiva da **abscissa** dos quatro vértices do losango.

*Representação do plano de perfil que contém o losango:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo  $X$  que tem 3 cm de abscissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém o losango, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de abscissa, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e do eixo Z e das perspectivas dos afastamentos e das cotas dos quatro pontos:*

Em seguida, optou-se por rebater o eixo  $Z$  para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter recorrido ao rebatimento do eixo  $Y$ ). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo  $Z$ ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo  $Z$  – tem-se imediatamente  $Z \equiv e'$ .

O ponto  $T$  é um ponto do eixo  $Z$  e é, também, um ponto da perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $U$  é o ponto em que o plano projetante do eixo  $Z$  corta o lado [RS] do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo  $Z$ ). Os pontos  $T$  e  $U$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

O triângulo [TOU] está contido no plano projetante do eixo  $Z$  e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [TU] (o ponto  $M'$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio  $\overline{M'T} = \overline{M'U}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [TU] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O'_r$ , sobre a semicircunferência –  $O'_r$  é o ponto  $O$  rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ ). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O'_r$  e  $T_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo [T $_r$ O $_r$ U $_r$ ] é retângulo em  $O'_r$ . A reta definida por  $O'_r$  e por  $U_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Z$  com o *plano coordenado XY*.

O eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z$  rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo  $Z$  e o eixo  $Y$  apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível, sobre o eixo  $Z_r$ , medir os **afastamentos** e as **cotas** dos quatro pontos, em verdadeira grandeza.

Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O'_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** (4 cm e 8 cm) e os **afastamentos** (3 cm e 6 cm) dos quatro pontos, em verdadeira grandeza. Salienta-se que o ponto  $A$  tem cota nula e que os pontos  $B$  e  $D$  têm a mesma cota. De forma semelhante, salienta-se que o ponto  $B$  tem afastamento nulo e que os pontos  $A$  e  $C$  têm o mesmo afastamento. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , as perspectivas das **cotas** e dos **afastamentos** dos quatro pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , a partir da perspectiva do ponto  $O$ , estão as perspectivas das **cotas** e dos **afastamentos** dos quatro vértices do quadrado.

No entanto, as perspectivas dos **afastamentos** dos quatro pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto  $O$ , transportaram-se as perspectivas dos **afastamentos** dos quatro pontos para a perspectiva do eixo  $Y$ .

*Determinação das perspectivas do ponto C:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $C$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $C$ .  $C_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.  $C_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $C$  e situa-se sobre  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.  $C_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **C**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **C**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **C**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **C**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **C** são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas dos pontos **A**, **B** e **D**:

As perspectivas dos pontos **A**, **B** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **C**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos (**A**<sub>1</sub>, **B**<sub>1</sub> e **D**<sub>1</sub>) situam-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos (**A**<sub>2</sub>, **B**<sub>2</sub> e **D**<sub>2</sub>) situam-se sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que o ponto **A** tem cota nula, pelo que o ponto **A** se situa no plano coordenado **XY** – assim, tem-se imediatamente **A**<sub>1</sub>  $\equiv$  **A** (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**). Por outro lado, o ponto **B** tem afastamento nulo, pelo que o ponto **B** se situa no plano coordenado **XZ** – assim, tem-se imediatamente **B**<sub>2</sub>  $\equiv$  **B** (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **A**<sub>1</sub>  $\equiv$  **C**<sub>1</sub>. Pelo seu lado, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem **B**<sub>2</sub>  $\equiv$  **D**<sub>2</sub>.

### Determinação das perspectivas do losango:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do losango. O quadrilátero **[ABCD]** (que é um paralelogramo) é a perspectiva propriamente dita do losango. O quadrilátero **[A<sub>3</sub>B<sub>3</sub>C<sub>3</sub>D<sub>3</sub>]** (que, neste caso, é outro paralelogramo) é a perspectiva da projeção lateral do losango. O segmento de reta **[A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]** é a perspectiva da projeção frontal do losango (a projeção frontal do losango reduz-se a um segmento de reta sobre  $f_\pi$ , pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal). O segmento de reta **[B<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** é a perspectiva da projeção horizontal do losango (a projeção horizontal do losango reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_\pi$ , pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal).

### Traçado:

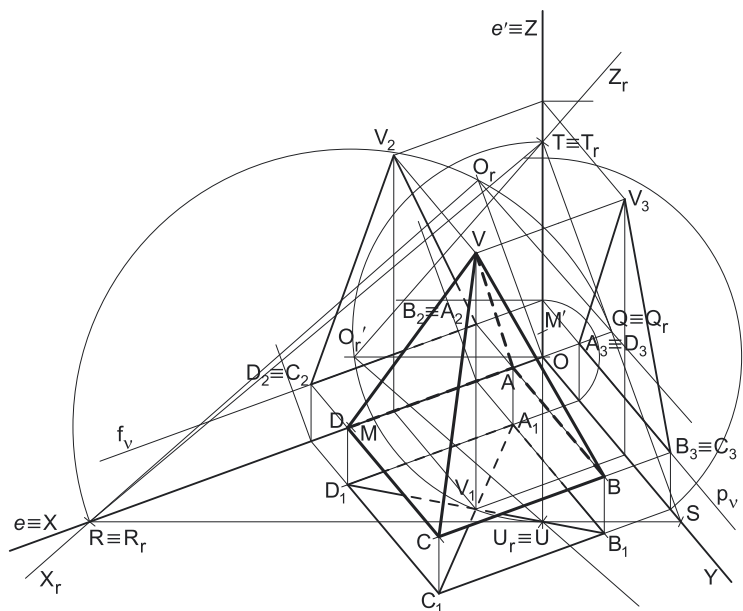
As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\pi$  (o plano que contém o losango), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e frontal) do plano se representaram a **leve**. A perspectiva do losango **[ABCD]** representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do losango, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano projetante do eixo **X**, do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas dos afastamentos.

## 1050.

a) A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano horizontal (de nível) com 2 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **B**), pelo que os pontos **C** e **D** têm necessariamente **2 cm de cota** (todos os pontos de um plano horizontal têm a mesma cota). Por outro lado, é possível constatar que o lado **[AB]** do quadrado é de topo (é paralelo ao eixo **Y**), pelo que o lado **[CD]** do polígono será igualmente de topo (paralelo ao eixo **Y**), pois o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois. Por sua vez, os lados **[BC]** e **[AD]** serão necessariamente fronto-horizontais (paralelos ao eixo **X**), por serem perpendiculares aos lados **[AB]** e **[CD]**). Por fim, o lado **[AB]** mede 5 cm (a diferença entre os afastamentos dos pontos **A** e **B**), que é a medida do lado do quadrado.

Assim, o ponto **C**, sendo consecutivo ao ponto **B**, tem o mesmo afastamento do ponto **B** (que é 7 cm) e a sua abcissa é 5 cm superior à abcissa daquele ponto – o ponto **C** tem, assim, **7 cm de afastamento** e **7 cm de abcissa** (e 2 cm de cota, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto **C** são (7; 7; 2).

O ponto **D** tem a mesma abcissa do ponto **C** (porque o lado **[CD]** é de topo) e o mesmo afastamento do ponto **A** (porque o lado **[AD]** é fronto-horizontais) – o ponto **D** tem, assim, **7 cm de abcissa** e **2 cm de afastamento** (e 2 cm de cota, como atrás se referiu). Dessa forma, as coordenadas do ponto **D** são (7; 2; 2).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e a sua base tem 2 cm de cota (a cota do plano horizontal que contém a base), o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem **9 cm de cota** ( $2 + 7 = 9$ ). Por outro lado, tratando-se de uma **pirâmide regular**, que é uma pirâmide reta, o seu vértice situa-se na mesma projetante horizontal do centro da base (o ponto médio das duas diagonais).

A abscissa do ponto médio das diagonais é a média aritmética das abscissas dos pontos **A** e **D**, que é 4,5 cm – o ponto **V** tem, assim, **4,5 cm de abscissa**. O afastamento do ponto médio das diagonais é a média aritmética dos afastamentos dos pontos **A** e **B**, que é 4,5 cm – o ponto **V** tem, assim, **4,5 cm de afastamento**. Dessa forma, as coordenadas do ponto **V** são (4,5; 4,5; 9).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do 1ª *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

#### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que o eixo **X** é o eixo que sofre um a redução isolada, a sua perspectiva faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**). As perspectivas do eixo **Y** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $140^\circ$ , pelo que o ângulo restante é um ângulo de  $220^\circ$  ( $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ ). Esse ângulo é a soma de dois ângulos iguais (os ângulos que a perspectiva do eixo **X** faz com as perspectivas dos outros dois eixos), pelo que a perspectiva do eixo **X** faz ângulos de  $110^\circ$  com as perspectivas dos outros dois eixos ( $220^\circ : 2 = 110^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrarias.

#### Resolução:

As coordenadas dos cinco vértices da pirâmide medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo **X** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **X**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e da perspectiva da abscissa dos cinco pontos:

As **abscissas** dos cinco pontos medem-se sobre o eixo **X**, que é o eixo que sofre uma **redução isolada** – nesse sentido, há que rebater o eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **X** – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto **R** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **X**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[ST]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **R** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo **[ROQ]** está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. A reta definida por **O<sub>r</sub>** e por **Q<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir as **abscissas** dos cinco pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**. Assim, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos cinco pontos (2 cm, 4,5 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. Salienta-se que os pontos **A** e **B** têm a mesma abscissa (2 cm), tal como os pontos **C** e **D** também têm a mesma abscissa (5 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, as perspectivas das **abscissas** dos cinco pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas das **abscissas** dos cinco vértices da pirâmide.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e do eixo Z e das perspectivas dos afastamentos e das cotas dos cinco pontos:

Em seguida, optou-se por rebater o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter recorrido ao rebatimento do eixo **Y**). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **T** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **U** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **T** e **U** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

O triângulo **[TOU]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[TU]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $M'T = M'U$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[TU]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **X**). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $T_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo **[T<sub>r</sub>O<sub>r</sub>'U<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r'$ . A reta definida por  $O_r'$  e por  $U_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **Z** e o eixo **Y** apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível, sobre o eixo  $Z_r$ , medir os **afastamentos** e as **cotas** dos cinco pontos, em verdadeira grandeza.

Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** (2 cm e 9 cm) e os **afastamentos** (2 cm, 4,5 cm e 7 cm) dos cinco pontos, em verdadeira grandeza. Salienta-se que os pontos **A** e **D** têm o mesmo afastamento (2 cm), tal como os pontos **B** e **C** têm também o mesmo afastamento (7 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas das **cotas** e dos **afastamentos** dos cinco pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas das **cotas** e dos **afastamentos** dos cinco vértices da pirâmide.

No entanto, as perspectivas dos **afastamentos** dos cinco pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspectiva do eixo **Y**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportaram-se as perspectivas dos **afastamentos** dos cinco pontos para a perspectiva do eixo **Y**.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo **Z** que tem 2 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a base da pirâmide, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de cota, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto A:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A<sub>1</sub>**, **A<sub>2</sub>** e **A<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**. **A<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A** e situa-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. **A<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A** e situa-se sobre  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D:*

As perspectivas dos pontos **B**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **A**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos (**B<sub>2</sub>**, **C<sub>2</sub>** e **D<sub>2</sub>**) situam-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos (**B<sub>3</sub>**, **C<sub>3</sub>** e **D<sub>3</sub>**) situam-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **B**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $A_2 \equiv B_2$ , o que acontece, também, com os pontos **C** e **D**. Pelo seu lado, os pontos **A** e **D**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $A_3 \equiv D_3$ , o que acontece, também, com os pontos **B** e **C**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspectivas do ponto V:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **V** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**V**<sub>1</sub>, **V**<sub>2</sub> e **V**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **V**. **V**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V**. **V**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto **V**. **V**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **V**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **V**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **V**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **V**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **V**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **V**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **V** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[BCDV]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **A**. Este, por ser o vértice mais distante do observador, é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**). Por outro lado, a aresta lateral **[CV]** é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Tendo em conta que o vértice **V** é o vértice de maior cota do sólido, este vértice é visível (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que nele convergem (todas as arestas laterais da pirâmide). Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção horizontal. No entanto, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. As arestas laterais **[AV]** e **[DV]** são invisíveis, em projeção frontal, mas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção frontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção frontal. No entanto, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[C<sub>3</sub>D<sub>3</sub>V<sub>3</sub>]**. As arestas laterais **[AV]** e **[BV]** são invisíveis, em projeção lateral, mas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção lateral. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção lateral. Por outro lado, não existe qualquer parte da projeção lateral da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** (em projeção lateral).

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\nu$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (frontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. As perspectivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano projetante do eixo **X**, do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas dos afastamentos.



## 1051.

a) A base mais à direita (de menor abcissa) do prisma (o quadrado [ABCD]) está contida no plano coordenado YZ, pelo que os pontos B e D têm necessariamente **abcissa nula** (todos os pontos do plano coordenado YZ têm abcissa nula). Os pontos A e C têm o mesmo afastamento e a mesma abcissa, pelo que é possível constatar que a diagonal [AC] do quadrado é vertical (paralela ao eixo Z). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal [BD]), porque é perpendicular à diagonal [AC] e está contida no plano coordenado YZ, é necessariamente de topo (paralela ao eixo Y). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bisetam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal [AC] tem necessariamente 4 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos A e C). Nesse sentido, os pontos B e D têm necessariamente **4 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal [AC] mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos A e C), pelo que a diagonal [BD] mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento). Tendo em conta que o enunciado é omissivo no que respeita à ordem dos vértices B e D, considerou-se (de forma arbitrária) que B é o vértice de menor afastamento do quadrado e que D é o seu vértice de maior afastamento.

Considerando-se que o ponto B é o vértice de menor afastamento do quadrado, o seu afastamento é 3 cm inferior ao afastamento dos pontos A e C (que é 7 cm) – nesse sentido, o ponto B tem **4 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto B são (0; 4; 4).

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto D é o vértice de maior afastamento do quadrado, o seu afastamento é 3 cm superior ao afastamento dos pontos A e C (que é 7 cm) – nesse sentido, o ponto D tem **10 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto D são (0; 10; 4).

Por fim, a altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as bases, o que, neste caso, corresponde à diferença das abcissas entre os planos das duas bases. Uma vez que o prisma tem 7 cm de altura e a sua base de menor abcissa tem abcissa nula (como atrás se referiu), o plano que contém a base mais à esquerda do prisma tem **7 cm de abcissa** (0 + 7 = 7). Nesse sentido, todos os vértices da base [A'B'C'D'] (a base mais à esquerda do prisma) têm **7 cm de abcissa**.

Tendo em conta que se trata de um **prisma regular** (as suas arestas laterais são necessariamente ortogonais aos planos das bases), as arestas laterais do sólido estão contidas em retas fronto-horizontais. Assim, todos os vértices da base [A'B'C'D'] têm afastamentos e cotas iguais aos dos vértices correspondentes da base mais à direita do sólido (a base [ABCD]). Nesse sentido, as coordenadas dos quatro vértices da base [A'B'C'D'] são: A' (7; 7; 1), B' (7; 4; 4), C' (7; 7; 7) e D' (7; 10; 4).

Salienta-se que o prisma se situa no espaço do 1ª Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspetiva do eixo X faz ângulos de 130° com as perspetivas dos outros dois eixos (o eixo Y e o eixo Z), o que perfaz um total de 260° (2 x 130° = 260°), as perspetivas destes dois eixos fazem, entre si, um ângulo de 100°, que é o ângulo restante (360° – 260° = 100°). Atendendo a que a perspetiva do eixo X faz ângulos iguais com as perspetivas dos outros dois eixos, o eixo X é o eixo que sofre uma **redução isolada**. Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

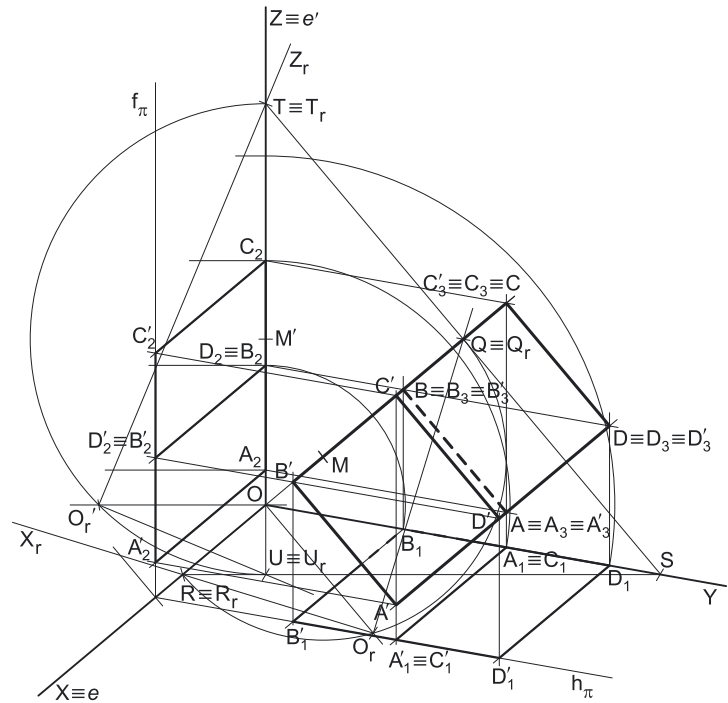
### Resolução:

As coordenadas dos oito pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo X, os afastamentos medem-se no eixo Y e as cotas no eixo Z. No entanto, nenhum dos eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspetivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo X é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo Y e o eixo Z) sofrem a mesma redução (as suas perspetivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo X.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e da perspectiva da abcissa da base mais à esquerda do prisma:*

As **abscissas** medem-se sobre o eixo **X**, que é o eixo que sofre uma **redução isolada** – nesse sentido, há que rebater o eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **X** – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto **R** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **X**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[ST]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **R** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo **[ROQ]** está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MR = MQ$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. A reta definida por **O<sub>r</sub>** e por **Q<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir a **abcissa** da base mais à esquerda do prisma, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**. Assim, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** daquela base (7 cm), em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, a perspectiva daquela **abcissa**, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O**, está a perspectiva da **abcissa** da base mais à direita do prisma (a base **[A'B'C'D']**).

*Representação do plano de perfil que contém a base [A'B'C'D'] do prisma:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **X**, um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo **X** que tem 7 cm de abcissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém a base **[A'B'C'D']**, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 7 cm de abcissa, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  – **h<sub>π</sub>** (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e **f<sub>π</sub>** (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que **h<sub>π</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**. Pelo seu lado, **f<sub>π</sub>** (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**.

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>π</sub>**). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal (**f<sub>π</sub>**).

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e do eixo Z e das perspectivas dos afastamentos e das cotas dos oito vértices do prisma:*

Em seguida, optou-se por rebater o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter recorrido ao rebatimento do eixo **Y**). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e'$ .

O ponto **T** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **U** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **T** e **U** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

O triângulo **[TOU]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[TU]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $M'T = M'U$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[TU]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>'**, sobre a semicircunferência – **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **X**). O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>'** e **T<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[T<sub>r</sub>O<sub>r</sub>'U<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>'**. A reta definida por **O<sub>r</sub>'** e por **U<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **Z** e o eixo **Y** apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**, medir os **afastamentos** e as **cotas** dos oito pontos, em verdadeira grandeza.

Assim, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** (1 cm, 4 cm e 7 cm) e os **afastamentos** (4 cm, 7 cm e 10 cm) dos oito pontos, em verdadeira grandeza. Salienta-se que os pontos **A** e **C** têm o mesmo afastamento (4 cm), tal como os pontos **B** e **D** têm a mesma cota (4 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas das **cotas** e dos **afastamentos** dos oito pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas das **cotas** e dos **afastamentos** dos oito vértices do prisma.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No entanto, as perspetivas dos **afastamentos** dos oito pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspetiva do eixo **Y**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportaram-se as perspetivas dos **afastamentos** dos oito pontos para a perspetiva do eixo **Y**.

### Determinação das perspetivas do ponto **A**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro (**A**<sub>1</sub>, **A**<sub>2</sub> e **A**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A**<sub>1</sub> é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A** – atendendo a que o ponto **A** tem abcissa nula, **A**<sub>1</sub> (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**) situa-se sobre a perspetiva do eixo **Y**. **A**<sub>2</sub> é a perspetiva da projeção frontal do ponto **A** – o ponto **A** situa-se no *plano coordenado YZ* (pois tem abcissa nula), pelo que **A**<sub>2</sub> (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) se situa sobre a perspetiva do eixo **Z**. **A**<sub>3</sub> é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **A** tem abcissa nula, o ponto **A** situa-se no *plano coordenado YZ*, pelo que se tem imediatamente **A**<sub>3</sub> ≡ **A** (sendo **A** a perspetiva propriamente dita do ponto **A**).

### Determinação das perspetivas dos pontos **B**, **C** e **D**:

As perspetivas dos pontos **B**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **A**. De facto, atendendo a que os três pontos têm abcissa nula, as perspetivas das suas projeções horizontais (**B**<sub>1</sub>, **C**<sub>2</sub> e **D**<sub>1</sub>) situam-se necessariamente sobre a perspetiva do eixo **Y**. De forma semelhante, e mais uma vez atendendo a que os três pontos têm abcissa nula, as perspetivas das suas projeções frontais (**B**<sub>2</sub>, **C**<sub>2</sub> e **D**<sub>2</sub>) situam-se necessariamente sobre a perspetiva do eixo **Z**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que os três pontos têm abcissa nula, os três pontos situam-se no *plano coordenado YZ*, pelo que se tem imediatamente **B**<sub>3</sub> ≡ **B** (sendo **B** a perspetiva propriamente dita do ponto **B**), **C**<sub>3</sub> ≡ **C** (sendo **C** a perspetiva propriamente dita do ponto **C**) e **D**<sub>3</sub> ≡ **D** (sendo **D** a perspetiva propriamente dita do ponto **D**).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **A**<sub>1</sub> ≡ **C**<sub>1</sub>.

### Determinação das perspetivas do ponto **A'**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A'** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro (**A'**<sub>1</sub>, **A'**<sub>2</sub> e **A'**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A'**. **A'**<sub>1</sub> é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A'** e situa-se sobre a perspetiva de **h**<sub>π</sub> (o traço horizontal do plano π), pois o plano π é um plano projetante horizontal. **A'**<sub>2</sub> é a perspetiva da projeção frontal do ponto **A'** e situa-se sobre a perspetiva de **f**<sub>π</sub> (o traço frontal do plano π), pois o plano π é um plano projetante frontal. **A'**<sub>3</sub> é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A'**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **A'**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **A'**<sub>1</sub>, a perspetiva da reta projetante horizontal de **A'** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **A'**<sub>2</sub> conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **A'** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **A'**<sub>3</sub> conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **A'** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **A'**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A'** são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspetivas dos pontos **B'**, **C'** e **D'**:

As perspetivas dos pontos **B'**, **C'** e **D'** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **A'**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano π, que é um plano projetante horizontal, as perspetivas das projeções horizontais dos três pontos (**B'**<sub>1</sub>, **C'**<sub>1</sub> e **D'**<sub>1</sub>) situam-se sobre a perspetiva de **h**<sub>π</sub> (o traço horizontal do plano π). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano π, que é um plano projetante frontal, as perspetivas das projeções frontais dos três pontos (**B'**<sub>2</sub>, **C'**<sub>2</sub> e **D'**<sub>2</sub>) situam-se sobre a perspetiva de **f**<sub>π</sub> (o traço frontal do plano π).

Os pontos **A'** e **C'** situam-se na mesma reta vertical (que é uma reta projetante horizontal), pelo que se tem, imediatamente, **A'**<sub>1</sub> ≡ **C'**<sub>1</sub>.

Os pontos **A** e **A'** situam-se na mesma reta fronto-horizontal (que é uma **reta projetante lateral**), pelo que se tem, imediatamente, **A**<sub>3</sub> ≡ **A'**<sub>3</sub>. De forma semelhante, também os pontos **B** e **B'** se situam na mesma reta projetante lateral, tal como os pontos **C** e **C'** e, ainda, os pontos **D** e **D'**, pelo que se tem, imediatamente, **B**<sub>3</sub> ≡ **B'**<sub>3</sub>, **C**<sub>3</sub> ≡ **C'**<sub>3</sub> e **D**<sub>3</sub> ≡ **D'**<sub>3</sub>.

### Determinação das perspetivas do prisma:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada **[CDD'A'B'C']**. Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – os vértices **A** e **B**. Estes dois vértices, por serem os vértices mais distantes do observador, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AD]**, **[AB]** e **[BC]** (da base **[ABCD]**) e as arestas laterais **[AA']** e **[BB']**. No entanto, as arestas **[AD]**, **[BC]**, **[AA']** e **[BB']** estão ocultas, em perspetiva, por arestas do prisma que são visíveis, pelo que a única invisibilidade a assinalar é a referente à aresta **[AB]** (da base **[ABCD]**). Note que a aresta **[C'D']** (da base **[A'B'C'D']**) é **visível**, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – a base **[ABCD]** e a face lateral **[CC'D'D]**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas da projeção horizontal e da projeção frontal do prisma. Note que a **projeção lateral** do prisma se reduz a um quadrado (o quadrado **[A'3B'3C'3D'3]**) que, estando coincidente com a base **[ABCD]**, está oculto por essa base e, por isso mesmo, não se distingue.

A **perspetiva da projeção horizontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo **[B1D1D'1B'1]**. Todas as arestas invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção horizontal do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **perspetiva da projeção frontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[A_2C_2C'_2A'_2]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, não existe qualquer parte da projeção frontal do prisma que esteja oculta pelo próprio prisma (que é opaco), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

#### Resposta à questão:

O eixo que sofre uma **redução isolada** é o eixo **Y** (como na alínea anterior se referiu). O eixo **Y** sofre uma **redução maior** do que os outros dois eixos, pois o eixo **Y** faz, com o *plano axonométrico*, um ângulo maior do que o ângulo que os outros dois eixos fazem com o *plano axonométrico*.

Note que o ângulo que o eixo **Z** faz com o *plano axonométrico* (que é igual ao ângulo que o eixo **X** faz com o *plano axonométrico*) está em verdadeira grandeza no ângulo entre a perspetiva do eixo **Z** e o eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido). De forma semelhante, o ângulo que o eixo **Y** faz com o *plano axonométrico* está em verdadeira grandeza no ângulo entre a perspetiva do eixo **Y** e o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido).

O ângulo que o eixo **Y** faz com o *plano axonométrico* é maior do que o ângulo que o eixo **X** e o eixo **Z** fazem com o *plano axonométrico*, pelo que o coeficiente de redução do eixo **Y** é menor do que o coeficiente de redução dos outros dois eixos (que é o mesmo) – note que a uma **redução maior** corresponde um **coeficiente de redução menor**.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\pi$  (o plano que contém a base mais à esquerda do prisma), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. A perspetiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (horizontal e frontal) do prisma, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano projetante do eixo **X**, do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspetivas dos afastamentos.

## 1052.

Uma **perspetiva trimétrica** é uma **Axometria Ortogonal** em que o *plano axonométrico* faz, com os três eixos coordenados, **três ângulos diferentes**.

Em função disso, a **pirâmide axonométrica** não é uma pirâmide regular (embora seja uma pirâmide reta, pois o seu eixo é ortogonal ao plano da base), o **triângulo fundamental** é um triângulo **escaleno**, sendo que os três eixos coordenados são afetados por coeficientes de deformação (ou de redução) diferentes (existem **três coeficientes de deformação**). Por fim, as perspetivas dos três eixos coordenados fazem, entre si, três ângulos obtusos diferentes.

## 1053.

#### Dados:

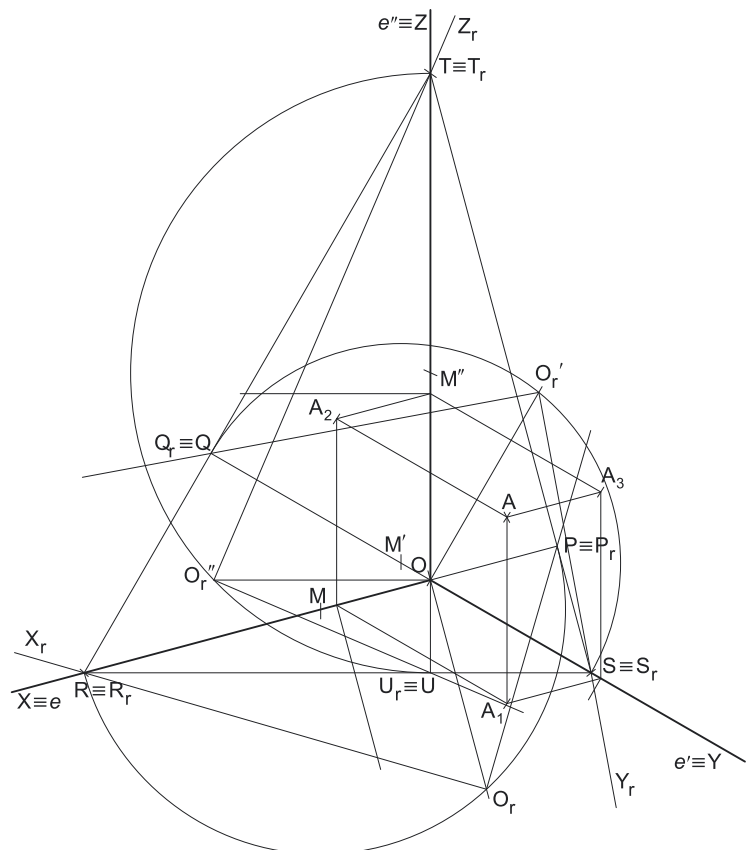
Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspetiva do eixo **Z** faz um ângulo de  $105^\circ$  com a perspetiva do eixo **X** e um ângulo de  $120^\circ$  com a perspetiva do eixo **Y**, as perspetivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de  $135^\circ$  ( $105^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

#### Resolução:

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a abscissa do ponto **A** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **A** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **A** mede-se no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **A** se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **A** sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspetivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e da perspectiva da abcissa do ponto A:*

Nesse sentido, começou-se por rebater o eixo **X** para o plano axonométrico (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **X** – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto **R** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **X**. O ponto **P** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado [ST] do triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **R** e **P** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $P_r \equiv P$ .

O triângulo [ROP] está contido no plano projetante do eixo **X** e é um triângulo retângulo em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RP] (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MP}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RP] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo [R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>P<sub>r</sub>] é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $P_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o plano coordenado **YZ**.

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir a **abcissa** do ponto **A**, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $X_r$ . Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** (3 cm) do ponto **A**, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, a perspectiva da **abcissa** do ponto **A**, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O**, está a perspectiva da **abcissa** do ponto **A**.

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e da perspectiva do afastamento do ponto A:*

Em seguida, rebateu-se o eixo **Y** para o plano axonométrico (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Y**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Y** – tem-se imediatamente  $Y \equiv e'$ .

O ponto **S** é um ponto do eixo **Y** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Y**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Y** corta o lado [RT] do triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo **Y**). Os pontos **S** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo [SOQ] está contido no plano projetante do eixo **Y** e é um triângulo retângulo em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Y** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [SQ] (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'S} = \overline{M'Q}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [SQ] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e'** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo [S<sub>r</sub>O<sub>r</sub>'Q<sub>r</sub>] é retângulo em  $O_r'$ . A reta definida por  $O_r'$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Y** com o plano coordenado **XZ**.

O eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir o **afastamento** do ponto **A**, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Y_r$ . Assim, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** (8 cm) do ponto **A**, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira **e'** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a perspectiva do **afastamento** do ponto **A**, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O**, está a perspectiva do **afastamento** do ponto **A**.

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Z e da perspectiva da cota do ponto A:*

Por fim rebateu-se o eixo **Z** para o plano axonométrico (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e''**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e''$ .

O ponto **T** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **U** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado [RS] do triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **T** e **U** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

O triângulo [TOU] está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um triângulo retângulo em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [TU] (o ponto **M''**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M''** e com raio  $\overline{M''T} = \overline{M''U}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [TU] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e''** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r''$ , sobre a semicircunferência –  $O_r''$  é o ponto **O** rebatido pelo seu terceiro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r''$  e  $T_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo [T<sub>r</sub>O<sub>r</sub>''U<sub>r</sub>] é retângulo em  $O_r''$ . A reta definida por  $O_r''$  e por  $U_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o plano coordenado **XY**.

O eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir a **cota** do ponto **A**, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Z_r$ . Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r''$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** (5 cm) do ponto **A**, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva da **cota** do ponto **A**, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O**, está a perspectiva da **cota** do ponto **A**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A**<sub>1</sub>, **A**<sub>2</sub> e **A**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**. **A**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**. **A**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Resposta à questão:

O eixo que sofre **maior deformação perspética** é o eixo **Y**. O eixo que sofre **menor deformação perspética** é o eixo **Z**.

**Justificação:** o ângulo que um determinado eixo faz com o *plano axonométrico* está contido no plano que contém esse eixo e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é o plano projetante desse eixo), sendo que, na prática, é o ângulo entre esse eixo e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva desse eixo). Assim, o ângulo que um determinado eixo faz com o *plano axonométrico* é o ângulo que esse eixo faz com a sua perspectiva. Uma vez que esse ângulo está contido no plano projetante desse eixo, ao rebatermos o plano projetante desse eixo, o ângulo está em verdadeira grandeza no ângulo entre esse eixo rebatido e a sua perspectiva.

O ângulo que o eixo **X** faz com o *plano axonométrico* (em verdadeira grandeza) é o ângulo que o eixo **X**<sub>r</sub> faz com a sua perspectiva. O ângulo que o eixo **Y** faz com o *plano axonométrico* (em verdadeira grandeza) é o ângulo que o eixo **Y**<sub>r</sub> faz com a sua perspectiva. O ângulo que o eixo **Z** faz com o *plano axonométrico* (em verdadeira grandeza) é o ângulo que o eixo **Z**<sub>r</sub> faz com a sua perspectiva.

Desses três ângulos, o ângulo que o eixo **Y** faz com o *plano axonométrico* é o **maior ângulo** e, por isso, o eixo **Y** é o eixo que sofre a **maior deformação perspética**. Por oposição, desses três ângulos, o ângulo que o eixo **Z** faz com o *plano axonométrico* é o **menor ângulo** e, por isso, o eixo **Z** é o eixo que sofre a **menor deformação perspética**.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento dos planos projetantes dos três eixos e das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

## 1054.

#### Dados:

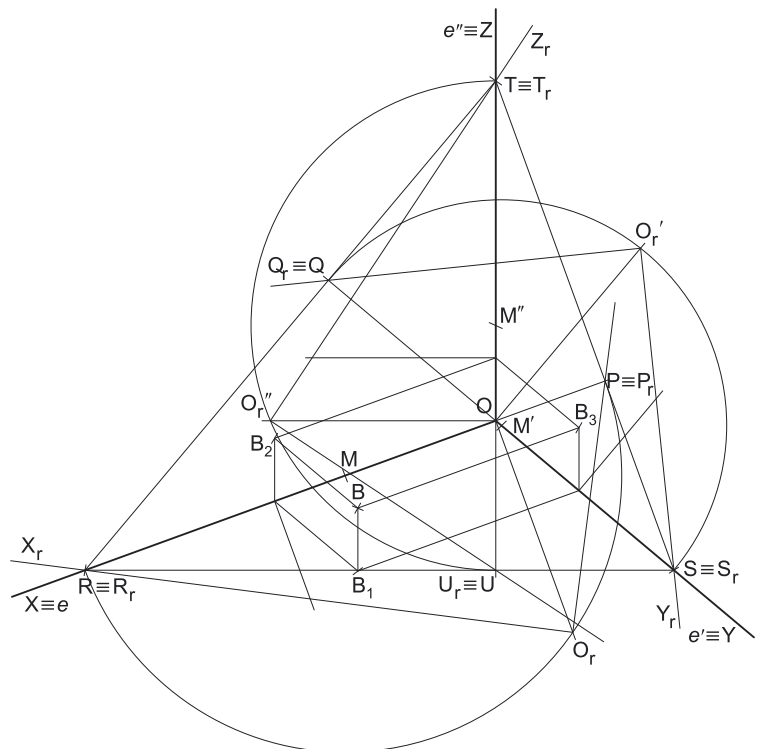
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de 110° com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de 130° com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de 120° (110° + 130° + 120° = 360°). Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

#### Resolução:

As coordenadas do ponto **B** medem-se nos eixos a que se referem – a abcissa do ponto **B** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **B** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **B** mede-se no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **B** se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **B** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três *eixos coordenados*, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e da perspectiva da abcissa do ponto B:

Nesse sentido, começou-se por rebater o eixo X para o plano axonométrico (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo X) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo X – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto R é um ponto do eixo X e é, também, um ponto da perspectiva do eixo X. O ponto P é o ponto em que o plano projetante do eixo X corta o lado [ST] do triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo X). Os pontos R e P são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $P_r \equiv P$ .

O triângulo [ROP] está contido no plano projetante do eixo X e é um **triângulo retângulo** em O. O rebatimento do plano projetante do eixo X processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RP] (o ponto M) – com o compasso, fazendo centro no ponto M e com raio  $\overline{MR} = \overline{MP}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RP] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira  $e$  (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo  $[R_r O_r P_r]$  é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $P_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo X com o plano coordenado YZ.

O eixo  $X_r$  (o eixo X rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir a **abcissa** do ponto B, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $X_r$ . Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** (7 cm) do ponto B, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo X, a perspectiva da **abcissa** do ponto B, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo X, a partir da perspectiva do ponto O, está a perspectiva da **abcissa** do ponto B.

## Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e da perspectiva do afastamento do ponto B:

Em seguida, rebateu-se o eixo Y para o plano axonométrico (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo Y) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo Y – tem-se imediatamente  $Y \equiv e'$ .

O ponto S é um ponto do eixo Y e é, também, um ponto da perspectiva do eixo Y. O ponto Q é o ponto em que o plano projetante do eixo Y corta o lado [RT] do triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo Y). Os pontos S e Q são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo [SOQ] está contido no plano projetante do eixo Y e é um **triângulo retângulo** em O. O rebatimento do plano projetante do eixo Y processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [SQ] (o ponto M') – com o compasso, fazendo centro no ponto M' e com raio  $\overline{M'S} = \overline{M'Q}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [SQ] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira  $e'$  (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto O rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo Y). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo  $[S_r O_r' Q_r]$  é retângulo em  $O_r'$ . A reta definida por  $O_r'$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo Y com o plano coordenado XZ.

O eixo  $Y_r$  (o eixo Y rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir o **afastamento** do ponto B, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Y_r$ . Assim, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** (4 cm) do ponto B, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira  $e'$  (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo Y, a perspectiva do **afastamento** do ponto B, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo Y, a partir da perspectiva do ponto O, está a perspectiva do **afastamento** do ponto B.

## Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Z e da perspectiva da cota do ponto B:

Por fim rebateu-se o eixo Z para o plano axonométrico (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e''$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo Z) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo Z – tem-se imediatamente  $Z \equiv e''$ .

O ponto T é um ponto do eixo Z e é, também, um ponto da perspectiva do eixo Z. O ponto U é o ponto em que o plano projetante do eixo Z corta o lado [RS] do triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo Z). Os pontos T e U são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

O triângulo [TOU] está contido no plano projetante do eixo Z e é um **triângulo retângulo** em O. O rebatimento do plano projetante do eixo Z processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [TU] (o ponto M'') – com o compasso, fazendo centro no ponto M'' e com raio  $\overline{M''T} = \overline{M''U}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [TU] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira  $e''$  (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r''$ , sobre a semicircunferência –  $O_r''$  é o ponto O rebatido pelo seu terceiro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo Z). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r''$  e  $T_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo  $[T_r O_r'' U_r]$  é retângulo em  $O_r''$ . A reta definida por  $O_r''$  e por  $U_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo Z com o plano coordenado XY.

O eixo  $Z_r$  (o eixo Z rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir a **cota** do ponto B, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Z_r$ . Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r''$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** (2 cm) do ponto B, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo Z, a perspectiva da **cota** do ponto B, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo Z, a partir da perspectiva do ponto O, está a perspectiva da **cota** do ponto B.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspectivas do ponto B:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **B** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**B**<sub>1</sub>, **B**<sub>2</sub> e **B**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **B**. **B**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**. **B**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto **B**. **B**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **B**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **B**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **B**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **B**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **B**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **B**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **B** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Resposta à questão:

O eixo que sofre **maior deformação perspética** é o eixo **Y**. O eixo que sofre **menor deformação perspética** é o eixo **X**.

**Justificação:** o ângulo que um determinado eixo faz com o *plano axonométrico* está contido no plano que contém esse eixo e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é o plano projetante desse eixo), sendo que, na prática, é o ângulo entre esse eixo e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva desse eixo). Assim, o ângulo que um determinado eixo faz com o *plano axonométrico* é o ângulo que esse eixo faz com a sua perspectiva. Uma vez que esse ângulo está contido no plano projetante desse eixo, ao rebatermos o plano projetante desse eixo, o ângulo está em verdadeira grandeza no ângulo entre esse eixo rebatido e a sua perspectiva.

O ângulo que o eixo **X** faz com o *plano axonométrico* (em verdadeira grandeza) é o ângulo que o eixo **X**<sub>r</sub> faz com a sua perspectiva. O ângulo que o eixo **Y** faz com o *plano axonométrico* (em verdadeira grandeza) é o ângulo que o eixo **Y**<sub>r</sub> faz com a sua perspectiva. O ângulo que o eixo **Z** faz com o *plano axonométrico* (em verdadeira grandeza) é o ângulo que o eixo **Z**<sub>r</sub> faz com a sua perspectiva.

Desses três ângulos, o ângulo que o eixo **Y** faz com o *plano axonométrico* é o **maior ângulo** e, por isso, o eixo **Y** é o eixo que sofre a **maior deformação perspética**. Por oposição, desses três ângulos, o ângulo que o eixo **X** faz com o *plano axonométrico* é o **menor ângulo** e, por isso, o eixo **X** é o eixo que sofre a **menor deformação perspética**.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento dos planos projetantes dos três eixos e das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

## 1055.

#### Dados:

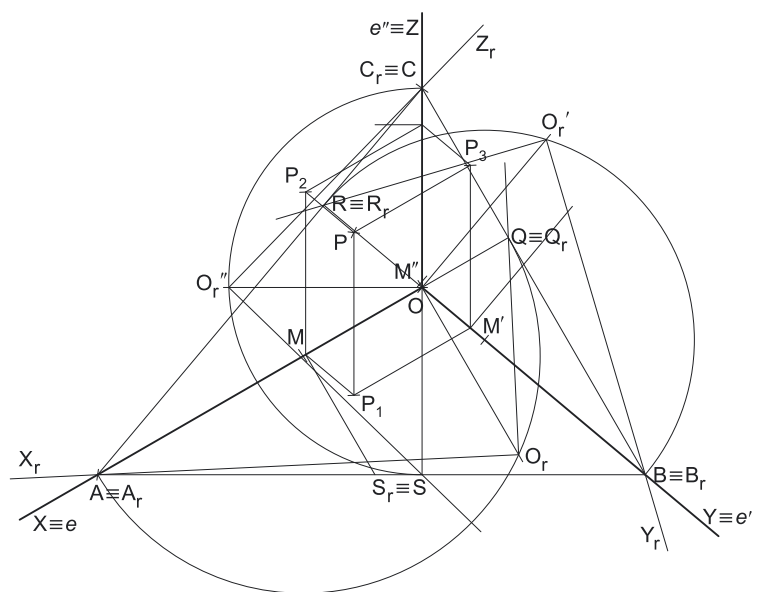
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de 110° com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de 120° com a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de 130° (110° + 120° + 130° = 360°). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

#### Resolução:

As coordenadas do ponto **P** medem-se nos eixos a que se referem – a abcissa do ponto **P** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **P** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **P** mede-se no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **P** se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **P** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e da perspectiva da abcissa do ponto P:*

Nesse sentido, começou-se por rebater o eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **X** – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto **A** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **X**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[BC]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **A** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo **[AOQ]** está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MA} = \overline{MQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[AQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **A<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[A<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. A reta definida por **O<sub>r</sub>** e por **Q<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir a **abcissa** do ponto **P**, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**. Assim, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** (4 cm) do ponto **P**, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, a perspectiva da **abcissa** do ponto **P**, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O**, está a perspectiva da **abcissa** do ponto **P**.

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e da perspectiva do afastamento do ponto P:*

Em seguida, rebateu-se o eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Y**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Y** – tem-se imediatamente  $Y \equiv e'$ .

O ponto **B** é um ponto do eixo **Y** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Y**. O ponto **R** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Y** corta o lado **[AC]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Y**). Os pontos **B** e **R** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $B_r \equiv B$  e  $R_r \equiv R$ .

O triângulo **[BOR]** está contido no plano projetante do eixo **Y** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Y** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[BR]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'B} = \overline{M'R}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[BR]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e'** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>'**, sobre a semicircunferência – **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>'** e **B<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[B<sub>r</sub>O<sub>r</sub>'R<sub>r</sub>']** é retângulo em **O<sub>r</sub>'**. A reta definida por **O<sub>r</sub>'** e por **R<sub>r</sub>'** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Y** com o *plano coordenado XZ*.

O eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir o **afastamento** do ponto **P**, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>**. Assim, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** (2 cm) do ponto **P**, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira **e'** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a perspectiva do **afastamento** do ponto **P**, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O**, está a perspectiva do **afastamento** do ponto **P**.

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Z e da perspectiva da cota do ponto P:*

Por fim rebateu-se o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e''**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e''$ .

O ponto **C** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **S** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[AB]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **C** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $C_r \equiv C$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo **[COS]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[CS]** (o ponto **M''**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M''** e com raio  $\overline{M''C} = \overline{M''S}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[CS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e''** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>''**, sobre a semicircunferência – **O<sub>r</sub>''** é o ponto **O** rebatido pelo seu terceiro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>''** e **C<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[C<sub>r</sub>O<sub>r</sub>''S<sub>r</sub>']** é retângulo em **O<sub>r</sub>''**. A reta definida por **O<sub>r</sub>''** e por **S<sub>r</sub>'** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir a **cota** do ponto **P**, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**. Assim, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>''** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** (6 cm) do ponto **P**, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva da **cota** do ponto **P**, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O**, está a perspectiva da **cota** do ponto **P**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspectivas do ponto P:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **P** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**P**<sub>1</sub>, **P**<sub>2</sub> e **P**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **P**. **P**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **P**. **P**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto **P**. **P**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **P**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **P**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **P**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **P** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **P**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **P** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **P**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **P** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **P**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **P** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento dos planos projetantes dos três eixos e das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

## 1056.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de 125° com a perspectiva do eixo **Z** e um ângulo de 120° com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de 115° (125° + 120° + 115° = 360°). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

#### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas medem-se no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas de qualquer dos três pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

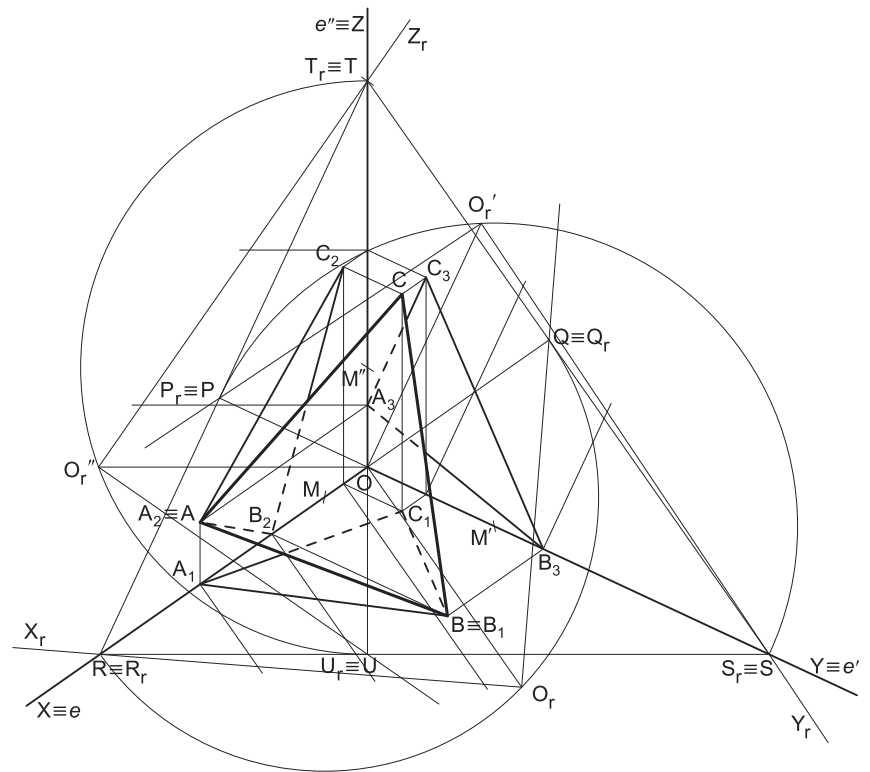
Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três *eixos coordenados*, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e das perspectivas das abcissas dos três pontos:

Nesse sentido, começou-se por rebater o eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **X** – tem-se imediatamente **X** = **e**.

O ponto **R** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **X**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[ST]** do *triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **R** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente, **R<sub>r</sub>** = **R** e **Q<sub>r</sub>** = **Q**.*



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo [ROQ] está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RQ] (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RQ] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$  sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo [R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>] é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir as **abscissas** dos três pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $X_r$ . Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos três pontos (1 cm, 4 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, as perspectivas das **abscissas** dos três pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas das **abscissas** dos três pontos.

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e das perspectivas dos afastamentos dos três pontos:*

Em seguida, rebateu-se o eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Y**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Y** – tem-se imediatamente  $Y \equiv e'$ .

O ponto **S** é um ponto do eixo **Y** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Y**. O ponto **P** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Y** corta o lado [RT] do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Y**). Os pontos **S** e **P** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $P_r \equiv P$ .

O triângulo [SOP] está contido no plano projetante do eixo **Y** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Y** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [SP] (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'S} = \overline{M'P}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [SP] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e'** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$  sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo [S<sub>r</sub>O<sub>r</sub>'P<sub>r</sub>] é retângulo em  $O_r'$ . A reta definida por  $O_r'$  e por  $P_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Y** com o *plano coordenado XZ*.

O eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir os **afastamentos** dos três pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Y_r$ . Assim, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos (2 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza (note que o ponto **A** tem afastamento nulo). Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira **e'** (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas dos **afastamentos** dos três pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas dos **afastamentos** dos três pontos.

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Z e das perspectivas das cotas dos três pontos:*

Por fim rebateu-se o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e''**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e''$ .

O ponto **T** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **U** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado [RS] do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **T** e **U** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

O triângulo [TOU] está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [TU] (o ponto **M''**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M''** e com raio  $\overline{M''T} = \overline{M''U}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [TU] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e''** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r''$  sobre a semicircunferência –  $O_r''$  é o ponto **O** rebatido pelo seu terceiro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r''$  e  $T_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo [T<sub>r</sub>O<sub>r</sub>''U<sub>r</sub>] é retângulo em  $O_r''$ . A reta definida por  $O_r''$  e por  $U_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir as **cotas** dos três pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Z_r$ . Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r''$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos (2 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza (note que o ponto **B** tem cota nula). Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas das **cotas** dos três pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas das **cotas** dos três pontos.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A**<sub>1</sub>, **A**<sub>2</sub> e **A**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A** – uma vez que o ponto **A** tem afastamento nulo, o ponto **A** situa-se no plano coordenado **XZ**, pelo que **A**<sub>1</sub> (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**) se situa sobre a perspectiva do eixo **X**. **A**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**. **A**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A** – mais uma vez atendendo a que o ponto **A** se situa no plano coordenado **XZ** (pois tem afastamento nulo), **A**<sub>3</sub> (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **Z**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **A** tem afastamento nulo, o ponto **A** situa-se no plano coordenado **XZ**, pelo que se tem imediatamente **A**<sub>2</sub> = **A** (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

#### Determinação das perspectivas do ponto B:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **B** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**B**<sub>1</sub>, **B**<sub>2</sub> e **B**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **B**. **B**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**. **B**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto **B** – uma vez que o ponto **B** tem cota nula, o ponto **B** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que **B**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **B**) se situa sobre a perspectiva do eixo **X**. **B**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **B** – mais uma vez atendendo a que o ponto **B** se situa no plano coordenado **XY** (pois tem cota nula), **B**<sub>3</sub> (a perspectiva da projeção lateral do ponto **B**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **B** tem cota nula, o ponto **B** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que se tem imediatamente **B**<sub>1</sub> = **B** (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

#### Determinação das perspectivas do ponto C:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **C** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**C**<sub>1</sub>, **C**<sub>2</sub> e **C**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **C**. **C**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**. **C**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**. **C**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **C**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **C**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **C**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **C**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **C** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas do triângulo:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo [**ABC**] é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo [**A**<sub>1</sub>**B**<sub>1</sub>**C**<sub>1</sub>] é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo [**A**<sub>2</sub>**B**<sub>2</sub>**C**<sub>2</sub>] é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo [**A**<sub>3</sub>**B**<sub>3</sub>**C**<sub>3</sub>] é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo – partes das projeções do triângulo nos planos coordenados estão ocultas pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

#### Resposta à questão:

O eixo que sofre **maior deformação perspética** é o eixo **X**.

**Justificação:** o ângulo que um determinado eixo faz com o plano axonométrico está contido no plano que contém esse eixo e é ortogonal ao plano axonométrico (que é o plano projetante desse eixo), sendo que, na prática, é o ângulo entre esse eixo e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva desse eixo). Assim, o ângulo que um determinado eixo faz com o plano axonométrico é o ângulo que esse eixo faz com a sua perspectiva. Uma vez que esse ângulo está contido no plano projetante desse eixo, ao reba termos o plano projetante desse eixo, o ângulo está em verdadeira grandeza no ângulo entre esse eixo rebatido e a sua perspectiva.

O ângulo que o eixo **X** faz com o plano axonométrico (em verdadeira grandeza) é o ângulo que o eixo **X**<sub>r</sub> faz com a sua perspectiva. O ângulo que o eixo **Y** faz com o plano axonométrico (em verdadeira grandeza) é o ângulo que o eixo **Y**<sub>r</sub> faz com a sua perspectiva. O ângulo que o eixo **Z** faz com o plano axonométrico (em verdadeira grandeza) é o ângulo que o eixo **Z**<sub>r</sub> faz com a sua perspectiva.

Desses três ângulos, o ângulo que o eixo **X** faz com o plano axonométrico é o **maior ângulo** e, por isso, o eixo **X** é o eixo que sofre a **maior deformação perspética**.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do triângulo [**ABC**] representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades assinaladas). As restantes linhas, porque são linhas de chamadas ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos planos projetantes dos três eixos e das perpendiculares à charneira.



## 1057.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo  $X$  faz um ângulo de  $105^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Y$  e um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Z$ , as perspectivas destes dois eixos (o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ ) fazem, entre si, um ângulo de  $135^\circ$  ( $105^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[ABC]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[ABC]$  são arbitrárias.

### Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três planos coordenados, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três eixos coordenados e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto  $O$ . Assim, é necessário medir os 5 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos eixos coordenados. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhum dos eixos se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir o comprimento da aresta do cubo sobre as perspectivas dos eixos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo $X$ :

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo  $X$  para o plano axonométrico, pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo  $X$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo  $X$  – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto  $A$  é um ponto do eixo  $X$  e é, também, um ponto da perspectiva do eixo  $X$ . O ponto  $Q$  é o ponto em que o plano projetante do eixo  $X$  corta o lado  $[BC]$  do triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo  $X$ ). Os pontos  $A$  e  $Q$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo  $[AOQ]$  está contido no plano projetante do eixo  $X$  e é um **triângulo retângulo** no ponto  $O$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[AQ]$  (o ponto  $M$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $\overline{MA} = \overline{MQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[AQ]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $A_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo  $[A_r O_r Q_r]$  é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo  $X$  com o plano coordenado  $YZ$ .

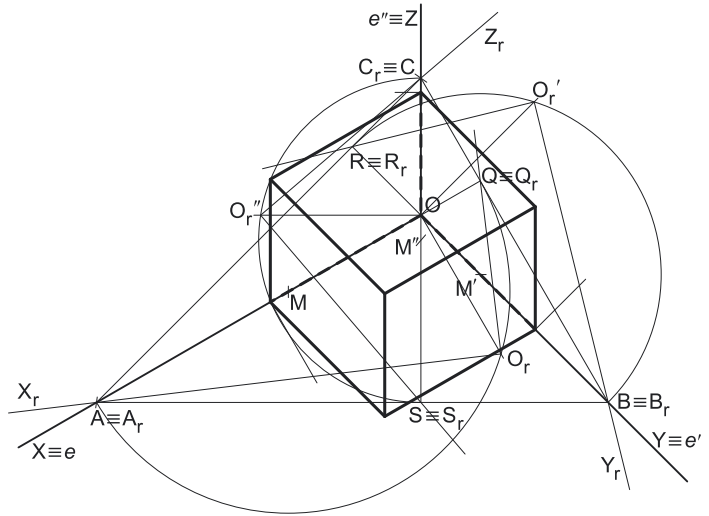
O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) está em verdadeira grandeza – já é possível medir a medida da aresta do cubo sobre o eixo  $X_r$ . Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo) e, em seguida, inverteu-se o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) – isto permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , a perspectiva da medida da aresta do sólido já reduzida (afetada pelo coeficiente de deformação que afeta a perspectiva do eixo  $X$ ).

Este procedimento permitiu-nos obter a perspectiva do **vértice** do cubo que se situa no eixo  $X$  (para além do ponto  $O$ , que é um outro vértice do cubo).

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo $Y$ :

Em seguida, optou-se por rebater o eixo  $Y$  para o plano axonométrico (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo  $Y$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo  $Y$  – tem-se imediatamente  $Y \equiv e'$ .

O ponto  $B$  é um ponto do eixo  $Y$  e é, também, um ponto da perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $R$  é o ponto em que o plano projetante do eixo  $Y$  corta o lado  $[AC]$  do triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo  $Y$ ). Os pontos  $B$  e  $R$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $B_r \equiv B$  e  $R_r \equiv R$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo [BOR] está contido no plano projetante do eixo **Y** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [BR] (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $M'B = M'R$ , desenhou-se a semicircunferência de que [BR] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $B_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo [ $B_r O_r' R_r$ ] é retângulo em  $O_r'$ . A reta definida por  $O_r'$  e por  $R_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Y** com o *plano coordenado XZ*.

O eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) está em verdadeira grandeza – já é possível medir a medida da aresta do cubo sobre o eixo  $Y_r$ . Assim, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo) e, em seguida, inverteu-se o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) – isto permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a perspectiva da medida da aresta do sólido já reduzida (afetada pelo coeficiente de deformação)

Este procedimento permitiu-nos obter a perspectiva do **vértice** do cubo que se situa no eixo **Y** (para além do ponto **O**, que é outro vértice do cubo).

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo **Z**:

Por fim, rebateteu-se o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter recorrido ao rebatimento do eixo **Z**). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e''$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e''$ .

O ponto **C** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **S** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado [AB] do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **C** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $C_r \equiv C$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo [COS] está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [CS] (o ponto **M''**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M''** e com raio  $M''C = M''S$ , desenhou-se a semicircunferência de que [CS] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r''$ , sobre a semicircunferência –  $O_r''$  é o ponto **O** rebatido pelo seu terceiro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r''$  e  $C_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo [ $C_r O_r'' S_r$ ] é retângulo em  $O_r''$ . A reta definida por  $O_r''$  e por  $S_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza – já é possível medir a medida da aresta do cubo sobre o eixo  $Z_r$ . Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r''$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo) e, em seguida, inverteu-se o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) – isto permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva da medida da aresta do sólido já reduzida (afetada pelo coeficiente de deformação)

Este procedimento permitiu-nos obter a perspectiva do **vértice** do cubo que se situa no eixo **Z** (para além do ponto **O**, que é outro vértice do cubo).

#### Determinação da perspectiva do cubo:

A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo sobre as perspectivas dos três eixos, desenharam-se os três paralelogramos dos quais as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** – esses paralelogramos são as perspectivas das três faces do cubo que se situam nos três *planos coordenados*. O desenho desses paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais **três vértices** do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspectivas de sete deles, falta-nos a perspectiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice **O**. Assim, determinou-se a perspectiva desse vértice conduzindo, pelas perspectivas dos três vértices anteriores, as perspectivas das arestas em falta (que são paralelas as perspectivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspectiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos *eixos coordenados*).

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso dos rebatimentos dos planos projetantes do eixo **X**, do eixo **Y** e do eixo **Z**, das perpendiculares à charneira.

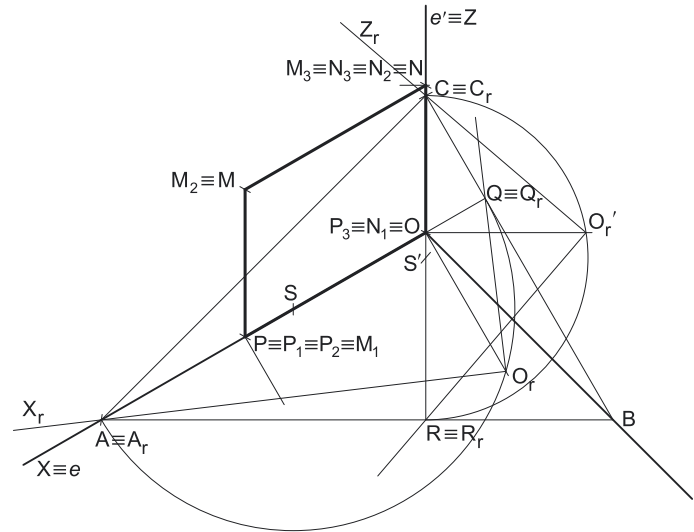
## 1058.

a) Um dos vértices do quadrado é o ponto **O** (a origem do referencial), cujas coordenadas são (0; 0; 0). Falta-nos, apenas, determinar as coordenadas do ponto **M**.

O quadrado está contido no *plano coordenado XZ*, pelo que o ponto **M** tem necessariamente **afastamento nulo** (todos os vértices do quadrado têm afastamento nulo). Por outro lado, é possível constatar que o lado **[OP]** do quadrado está contido no eixo **X**, pelo que o lado **[MN]** do polígono será paralelo ao eixo **X** (o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois). Assim, o lado **[MN]** é fronto-horizontal, pelo que o ponto **M** tem a mesma cota do ponto **N** – o ponto **M** tem **6 cm de cota**.

Por sua vez, os lados **[NO]** e **[MP]** são necessariamente verticais (paralelos ao eixo **Z**), por serem perpendiculares aos lados **[MN]** e **[OP]**. Exatamente por isso, o ponto **M** tem a mesma abscissa do ponto **P** – o ponto **M** tem, assim, **6 cm de abscissa**. As coordenadas do ponto **M** são (6; 0; 6).

Salienta-se que o quadrado se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.



b) **Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $105^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $135^\circ$  ( $105^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrarias.

**Resolução:**

As coordenadas dos quatro pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. Salienta-se que os quatro pontos têm afastamento nulo, pelo que, na realidade, não há nenhum afastamento a ser medido no eixo **Y**. No entanto, nenhum dos outros dois eixos coordenados (onde se medem as abscissas e as cotas) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Apesar de existirem **três coeficientes de deformação** distintos, e como atrás se referiu, apenas dois deles serão utilizados – os coeficientes de redução do eixo **X** (onde se medem as abscissas) e do eixo **Z** (onde se medem as cotas), pois todos os pontos têm afastamento nulo. Assim, o eixo **X** e o eixo **Z** (que apresentam coeficientes de redução distintos) são os *eixos coordenados* a rebater, de forma a ser possível determinar os respetivos coeficientes de deformação.

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e das perspectivas das abscissas dos quatro pontos:*

Nesse sentido, começou-se por rebater o eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento no *plano axonométrico* (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **X** – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto **A** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **X**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[BC]** do *triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **A** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $Q_r \equiv Q$ .*

O triângulo **[AOQ]** está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AQ]** (o ponto **S**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **S** e com raio  $\overline{SA} = \overline{SQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[AQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **A<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[A<sub>r</sub>O<sub>r</sub>Q<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. A reta definida por **O<sub>r</sub>** e por **Q<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir as **abscissas** dos quatro pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**. Assim, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos quatro pontos (6 cm), em verdadeira grandeza. Salienta-se que os pontos **O** e **N** têm abscissa nula e que os pontos **M** e **P** têm a mesma abscissa. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, a perspectiva da **abscissa** referida, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O**, está a perspectiva da **abscissa** pretendida.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Z e das perspectivas das cotas dos quatro pontos:*

Em seguida, rebateu-se o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e'$ .

O ponto **C** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **R** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[AB]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **C** e **R** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $C_r \equiv C$  e  $R_r \equiv R$ .

O triângulo **[COR]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[CR]** (o ponto **S'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **S'** e com raio  $S'C = S'R$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[CR]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e'** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>'**, sobre a semicircunferência – **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>'** e **C<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[C<sub>r</sub>O<sub>r</sub>'R<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>'**. A reta definida por **O<sub>r</sub>'** e por **R<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir as **cotas** dos quatro pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**. Assim, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos quatro pontos (6 cm), em verdadeira grandeza. Salienta-se que os pontos **O** e **P** têm cota nula e que os pontos **M** e **N** têm a mesma cota. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva da **cota** referida, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O**, está a perspectiva da **cota** pretendida.

*Determinação das perspectivas do ponto M:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**M<sub>1</sub>**, **M<sub>2</sub>** e **M<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **M**. **M<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M** – atendendo a que o ponto **M** tem afastamento nulo, o ponto **M** situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que **M<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M**) se situa sobre a perspectiva do eixo **X**. **M<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **M**. **M<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **M** – mais uma vez atendendo a que o ponto **M** se situa no *plano coordenado XZ* (pois tem afastamento nulo), **M<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **M**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **Z**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **M** tem afastamento nulo, o ponto **M** situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que se tem imediatamente  $M_2 \equiv M$  (sendo **M** a perspectiva propriamente dita do ponto **M**).

*Determinação das perspectivas dos pontos N e P:*

As perspectivas dos pontos **N** e **P** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **M**. De facto, atendendo a que os dois pontos têm afastamento nulo, as perspectivas das suas projeções horizontais (**N<sub>1</sub>** e **P<sub>1</sub>**) situam-se necessariamente sobre a perspectiva do eixo **X**. De forma semelhante, e mais uma vez atendendo a que os dois pontos têm afastamento nulo, as perspectivas das suas projeções laterais (**N<sub>3</sub>** e **P<sub>3</sub>**) situam-se necessariamente sobre a perspectiva do eixo **Z**.

Por outro lado, o ponto **P** tem também cota nula (é um ponto do eixo **X**), pelo que a perspectiva da sua projeção lateral (**P<sub>3</sub>**) está também sobre a perspectiva do eixo **Y** – tem-se, imediatamente,  $P_3 \equiv O$ . Por sua vez, o ponto **N** tem também abcissa nula (é um ponto do eixo **Z**), pelo que a perspectiva da sua projeção horizontal (**N<sub>1</sub>**) está também sobre a perspectiva do eixo **Y** – tem-se, imediatamente,  $N_1 \equiv O$ .

Por fim, e mais uma vez atendendo a que os dois pontos têm afastamento nulo, os dois pontos situam-se no *plano coordenado XZ*, pelo que se tem imediatamente  $N_2 \equiv N$  (sendo **N** a perspectiva propriamente dita do ponto **N**) e  $P_2 \equiv P$  (sendo **P** a perspectiva propriamente dita do ponto **P**). Tendo em conta que o ponto **P** é um ponto do eixo **X**, tem-se  $P \equiv P_2 \equiv P_1$ . De forma semelhante, tendo em conta que o ponto **N** é um ponto do eixo **Z**, tem-se  $N \equiv N_2 \equiv N_3$ .

Salienta-se, ainda, que os pontos **M** e **N**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $M_3 \equiv N_3$ . Pelo seu lado, os pontos **M** e **P**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $M_1 \equiv P_1$ .

*Determinação das perspectivas do quadrado:*

Por fim, desenharam-se as perspectivas do quadrado. O paralelogramo **[MNOP]** é a perspectiva propriamente dita do quadrado. A perspectiva da projeção frontal do quadrado está coincidente com a perspectiva do próprio quadrado. A perspectiva da projeção horizontal do quadrado está sobre a perspectiva do eixo **X**, coincidente com a perspectiva do lado inferior do quadrado (o lado **[OP]**). A perspectiva da projeção lateral do quadrado está sobre a perspectiva do eixo **Z**, coincidente com a perspectiva do lado mais à direita do quadrado (o lado **[ON]**).

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do quadrado **[MNOP]** representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano projetante do eixo **X**, do rebatimento do plano projetante do eixo **Z** e das perpendiculares à charneira.

## 1059.

a) A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano de perfil  $\pi$  (que tem a abcissa dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **2 cm de abcissa** (todos os vértices da base têm a abcissa do plano da base). Os pontos **A** e **C** têm a mesma abcissa e o mesmo afastamento, pelo que é possível constatar que a diagonal **[AC]** do quadrado é vertical (paralela ao eixo **Z**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal **[BD]**), porque é perpendicular à diagonal **[AC]** e está contida num plano de perfil, é necessariamente de topo (paralela ao eixo **Y**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bissetam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal **[AC]** tem necessariamente 5 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **C**) e 3 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos **A** e **C**). Assim, e porque a diagonal **[BD]** é de topo, os pontos **B** e **D** têm **3 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal **[AC]** mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal **[BD]** mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

Sendo assim, atendendo a que o ponto **B** é o vértice de menor afastamento do quadrado (como o enunciado refere expressamente), o seu afastamento é 3 cm inferior ao afastamento dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **2 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto **B** são (2; 2; 3).

Pelo seu lado, atendendo a que o ponto **D** é o vértice de maior afastamento do quadrado (por oposição ao vértice **B**), o seu afastamento é 3 cm superior ao afastamento dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **8 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto **D** são (2; 8; 3).

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença das abcissas entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 6 cm de altura e a sua base tem 2 cm de abcissa, o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem **8 cm de abcissa** ( $2 + 6 = 8$ ). Por outro lado, tratando-se de uma **pirâmide regular**, que é uma pirâmide reta, o seu vértice situa-se na mesma projetante lateral do centro da base (o ponto médio das duas diagonais), que, como se referiu, tem **5 cm de afastamento** (o afastamento dos pontos **A** e **C**) e tem **3 cm de cota** (a cota dos pontos **B** e **D**). Assim, as coordenadas do ponto **V** são (8; 5; 3).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

### b) Dados:

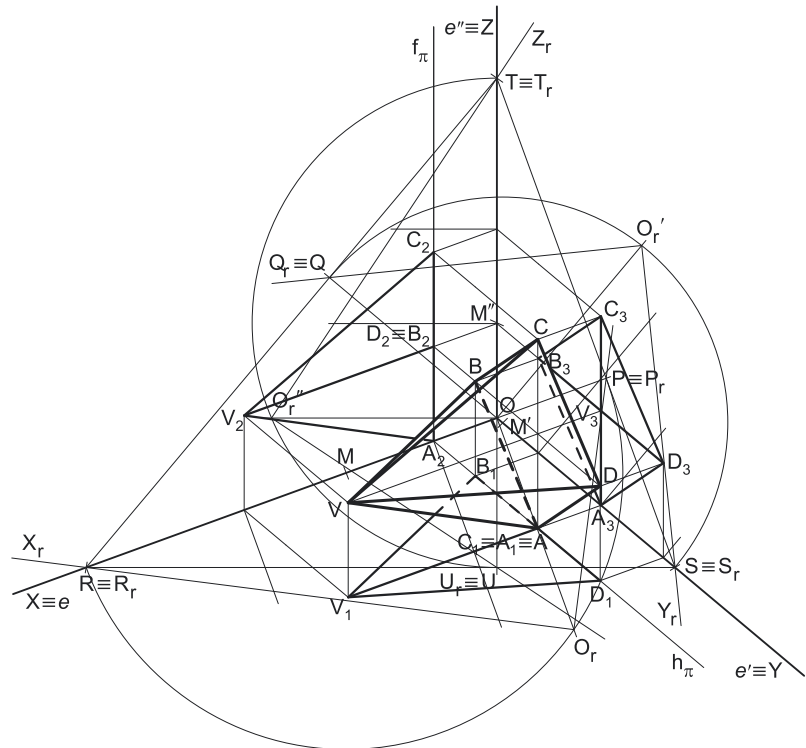
Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspetiva do eixo **Z** faz um ângulo de  $110^\circ$  com a perspetiva do eixo **X** e um ângulo de  $130^\circ$  com a perspetiva do eixo **Y**, as perspetivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de  $120^\circ$  ( $110^\circ + 130^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspetivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e das perspectivas das abcissas dos cinco pontos:*

Nesse sentido, começou-se por rebater o eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **X** – tem-se imediatamente  $\mathbf{X} \equiv \mathbf{e}$ .

O ponto **R** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **X**. O ponto **P** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[BC]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **R** e **P** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{R}_r \equiv \mathbf{R}$  e  $\mathbf{P}_r \equiv \mathbf{P}$ .

O triângulo **[ROP]** está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RP]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{\mathbf{MR}} = \overline{\mathbf{MP}}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RP]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>P<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. A reta definida por **O<sub>r</sub>** e por **P<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir as **abcissas** dos cinco pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**. Assim, sobre o eixo **X<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos cinco pontos (2 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Salienta-se que todos os vértices da base têm a mesma abscissa. Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, as perspectivas das **abcissas** referidas, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas das **abcissas** do plano da base e do vértice **V**, da pirâmide.

*Representação do plano de perfil que contém a base da pirâmide:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **X**, um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo **X** que tem 2 cm de abscissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém a base da pirâmide, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de abscissa, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  – **h<sub>π</sub>** (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e **f<sub>π</sub>** (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que **h<sub>π</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**. Pelo seu lado, **f<sub>π</sub>** (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**.

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>π</sub>**). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal (**f<sub>π</sub>**).

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e das perspectivas dos afastamentos dos cinco pontos:*

Em seguida, rebateu-se o eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Y**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Y** – tem-se imediatamente  $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{e}'$ .

O ponto **S** é um ponto do eixo **Y** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Y**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Y** corta o lado **[RT]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Y**). Os pontos **S** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $\mathbf{S}_r \equiv \mathbf{S}$  e  $\mathbf{Q}_r \equiv \mathbf{Q}$ .

O triângulo **[SOQ]** está contido no plano projetante do eixo **Y** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Y** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[SQ]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{\mathbf{M}'\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{M}'\mathbf{Q}}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[SQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e'** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>'**, sobre a semicircunferência – **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>'** e **S<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[S<sub>r</sub>O<sub>r</sub>'Q<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>'**. A reta definida por **O<sub>r</sub>'** e por **Q<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Y** com o *plano coordenado XZ*.

O eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir os **afastamentos** dos cinco pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>**. Assim, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Salienta-se que os pontos **A** e **C** têm o mesmo afastamento. Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas dos **afastamentos** dos cinco pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas dos **afastamentos** dos cinco pontos.

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Z e das perspectivas das cotas dos cinco pontos:*

Em seguida, rebateu-se o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e''**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $\mathbf{Z} \equiv \mathbf{e}''$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O ponto **T** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **U** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **T** e **U** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

O triângulo **[TOU]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[TU]** (o ponto **M''**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M''** e com raio  $M''T = M''U$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[TU]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e''** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>''**, sobre a semicircunferência – **O<sub>r</sub>''** é o ponto **O** rebatido pelo seu terceiro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>''** e **T<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[T<sub>r</sub>O<sub>r</sub>''U<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>''**. A reta definida por **O<sub>r</sub>''** e por **U<sub>r</sub>** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir as **cotas** dos cinco pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**. Assim, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>''** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos cinco pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza. Salienta-se que o ponto **A** tem cota nula e que os pontos **B** e **D** têm a mesma cota. Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas das **cotas** dos cinco pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O**, estão as perspectivas das **cotas** dos cinco pontos.

### Determinação das perspectivas do ponto C:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **C** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**C<sub>1</sub>**, **C<sub>2</sub>** e **C<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **C**. **C<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C** e situa-se sobre a perspectiva de **h<sub>π</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal. **C<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **C** e situa-se sobre **f<sub>π</sub>** (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal. **C<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **C**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **C<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **C<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **C<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **C** são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas dos pontos A, B e D:

As perspectivas dos pontos **A**, **B** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **C**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos (**A<sub>1</sub>**, **B<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>**) situam-se sobre a perspectiva de **h<sub>π</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos (**A<sub>2</sub>**, **B<sub>2</sub>** e **D<sub>2</sub>**) situam-se sobre a perspectiva de **f<sub>π</sub>** (o traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que o ponto **A** tem cota nula, pelo que o ponto **A** se situa no *plano coordenado XY* – assim, tem-se imediatamente  $A_1 \equiv A$  (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A_1 \equiv C_1$ . Pelo seu lado, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $B_2 \equiv D_2$ .

### Determinação das perspectivas do ponto V:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **V** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**V<sub>1</sub>**, **V<sub>2</sub>** e **V<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **V**. **V<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V**. **V<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **V**. **V<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **V**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **V**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **V<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **V<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **V<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **V**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **V** são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspectiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[AVBCD]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente da perspectiva do sólido. No entanto, a aresta **[AB]**, da base, é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – a base **[ABCD]** e a face lateral **[ABV]**. Note que, na realidade, os vértices **A** e **B** são os vértices mais distantes do observador e, por isso, a aresta **[AB]** é invisível. Já as arestas laterais **[CV]** e **[DV]** são duas arestas visíveis, da pirâmide, porque separam faces da pirâmide que são visíveis, em perspectiva. Note ainda que os vértices **C** e **D** são dos vértices da pirâmide que estão mais próximos do observador.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[B_1V_1D_1]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. No entanto, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[A_2V_2C_2]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. No entanto, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero  $[A_3B_3C_3D_3]$ . Tendo em conta que o vértice  $V$  é o vértice de maior abcissa do sólido, este vértice é visível (em projeção lateral), bem como todas as arestas que nele convergem (todas as arestas laterais da pirâmide). Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção lateral. No entanto, parte da projeção lateral da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos traços (horizontal e frontal) do plano se representaram a **leve**. As perspetivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso dos rebatimentos dos planos projetantes dos três eixos e das perpendiculares à charneira.

## 1060.

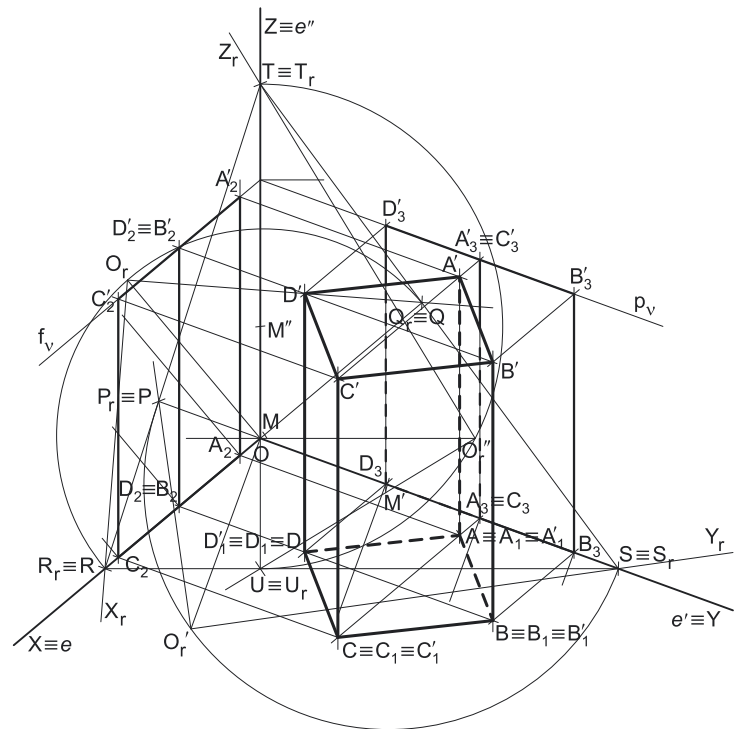
a) A base inferior do prisma (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida no *plano coordenado XY*, pelo que os restantes vértices da base inferior (os pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$ ) têm necessariamente **cota nula** (todos os pontos do *plano coordenado XY* têm cota nula). Trata-se de um **prisma regular**, com bases horizontais, pelo que as suas arestas laterais estão contidas em retas verticais (projetantes horizontais). Assim, o vértice  $C$ , da base  $[ABCD]$  (a base inferior) situa-se na mesma projetante horizontal do vértice  $C'$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e tem cota nula. Nesse sentido, as coordenadas do ponto  $C$  são  $(7; 7; 0)$ . Sublinha-se que  $[AC']$  é uma **diagonal espacial** do prisma, como o enunciado refere expressamente.

Os pontos  $A$  e  $C$  têm o mesmo afastamento e a mesma cota, pelo que é possível constatar que a diagonal  $[AC]$  do quadrado  $[ABCD]$  é fronto-horizontal (paralela ao eixo  $X$ ). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal  $[BD]$ ), porque é perpendicular à diagonal  $[AC]$  e está contida no *plano coordenado XY*, é necessariamente de topo (paralela ao eixo  $Y$ ). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado  $[ABCD]$  bisetam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal  $[AC]$  tem necessariamente 7 cm de afastamento (o afastamento dos pontos  $A$  e  $C$ ) e 4 cm de abcissa (a média aritmética das abcissas dos pontos  $A$  e  $C$ ). Nesse sentido, os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **4 cm de abcissa**. Por outro lado, a diagonal  $[AC]$  mede 6 cm (a diferença entre os afastamentos dos pontos  $A$  e  $C$ ), pelo que a diagonal  $[BD]$  mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento). Tendo em conta que o enunciado é omissivo no que respeita à ordem dos vértices  $B$  e  $D$ , considerou-se (de forma arbitrária) que  $B$  é o vértice de maior afastamento do quadrado e que  $D$  é o seu vértice de menor afastamento.

Considerando-se que o ponto  $B$  é o vértice de maior afastamento do quadrado, o seu afastamento é 3 cm superior ao afastamento dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 7 cm) – nesse sentido, o ponto  $B$  tem **10 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto  $B$  são  $(4; 10; 0)$ .

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto  $D$  é o vértice de menor afastamento do quadrado, o seu afastamento é 3 cm inferior ao afastamento dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 7 cm) – nesse sentido, o ponto  $D$  tem **4 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto  $D$  são  $(4; 4; 0)$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No que respeita aos vértices da base superior, atendendo a que o ponto  $C'$  (um dos vértices da base superior) tem 7 cm de cota e que essa base está contida num plano horizontal (de nível), os outros três vértices desta base têm, igualmente, **7 cm de cota**.

Uma vez que se trata de um **prisma regular** (as suas arestas laterais são necessariamente ortogonais aos planos das bases), as arestas laterais do sólido estão contidas em retas verticais (projetantes horizontais). Assim, todos os vértices da base  $[A'B'C'D']$  têm abcissas e afastamentos iguais aos dos vértices correspondentes da base inferior (a base  $[ABCD]$ ). Nesse sentido, as coordenadas dos restantes três vértices da base  $[A'B'C'D']$  são:  $A'$  ( 1; 7; 7),  $B'$  ( 4; 10; 7) e  $D'$  ( 4; 4; 7).

Salienta-se que o prisma se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

## b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspetiva do eixo  $X$  faz um ângulo de  $130^\circ$  com a perspetiva do eixo  $Z$  e um ângulo de  $120^\circ$  com a perspetiva do eixo  $Y$ , as perspetivas destes dois eixos (o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ ) fazem, entre si, um ângulo de  $110^\circ$  ( $130^\circ + 120^\circ + 110^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo  $X$ , os afastamentos medem-se no eixo  $Y$  e as cotas no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspetivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo $X$ e da perspetiva das abcissas dos oito vértices do prisma:

Nesse sentido, começou-se por rebater o eixo  $X$  para o plano axonométrico (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo  $X$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo  $X$  – tem-se imediatamente  $X \equiv e$ .

O ponto  $R$  é um ponto do eixo  $X$  e é, também, um ponto da perspetiva do eixo  $X$ . O ponto  $Q$  é o ponto em que o plano projetante do eixo  $X$  corta o lado  $[ST]$  do triângulo fundamental (e também pertence à perspetiva do eixo  $X$ ). Os pontos  $R$  e  $Q$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $Q_r \equiv Q$ .

O triângulo  $[ROQ]$  está contido no plano projetante do eixo  $X$  e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RQ]$  (o ponto  $M$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $\overline{MR} = \overline{MQ}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RQ]$  é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira  $e$  (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo  $[R_r O_r Q_r]$  é retângulo em  $O_r$ . A reta definida por  $O_r$  e por  $Q_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo  $X$  com o plano coordenado  $YZ$ .

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir as **abcissas** dos oito pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $X_r$ . Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos oito pontos (1 cm, 4 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspetiva do eixo  $X$ , as perspetivas das **abcissas** dos oito pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspetiva do eixo  $X$ , a partir da perspetiva do ponto  $O$ , estão as perspetivas das **abcissas** dos oito vértices do prisma.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo $Y$ e das perspetivas dos afastamentos dos oito pontos:

Em seguida, rebateu-se o eixo  $Y$  para o plano axonométrico (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo  $Y$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo  $Y$  – tem-se imediatamente  $Y \equiv e'$ .

O ponto  $S$  é um ponto do eixo  $Y$  e é, também, um ponto da perspetiva do eixo  $Y$ . O ponto  $P$  é o ponto em que o plano projetante do eixo  $Y$  corta o lado  $[RT]$  do triângulo fundamental (e também pertence à perspetiva do eixo  $Y$ ). Os pontos  $S$  e  $P$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $P_r \equiv P$ .

O triângulo  $[SOP]$  está contido no plano projetante do eixo  $Y$  e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[SP]$  (o ponto  $M'$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio  $\overline{M'S} = \overline{M'P}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[SP]$  é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira  $e'$  (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ ). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo  $[S_r O_r' P_r]$  é retângulo em  $O_r'$ . A reta definida por  $O_r'$  e por  $P_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Y$  com o plano coordenado  $XZ$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir os **afastamentos** dos oito pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Y_r$ . Assim, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos oito pontos (4 cm, 7 cm e 10 cm), em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , as perspectivas dos **afastamentos** dos oito pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , a partir da perspectiva do ponto  $O$ , estão as perspectivas dos **afastamentos** dos oito pontos.

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo  $Z$  e das perspectivas das cotas dos oito pontos:*

Em seguida, rebateu-se o eixo  $Z$  para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo  $Z$ ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo  $Z$  – tem-se imediatamente  $Z \equiv e''$ .

O ponto  $T$  é um ponto do eixo  $Z$  e é, também, um ponto da perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $U$  é o ponto em que o plano projetante do eixo  $Z$  corta o lado  $[RS]$  do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo  $Z$ ). Os pontos  $T$  e  $U$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

O triângulo  $[TOU]$  está contido no plano projetante do eixo  $Z$  e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[TU]$  (o ponto  $M''$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M''$  e com raio  $\overline{M''T} = \overline{M''U}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[TU]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira  $e''$  (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r''$ , sobre a semicircunferência –  $O_r''$  é o ponto  $O$  rebatido pelo seu terceiro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ ). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r''$  e  $T_r$ , que é um ponto fixo. O triângulo  $[T_r O_r'' U_r]$  é retângulo em  $O_r''$ . A reta definida por  $O_r''$  e por  $U_r$  (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Z$  com o *plano coordenado  $XY$* .

O eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z$  rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir a **cota** da base superior, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Z_r$ . Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r''$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** da base superior (7 cm), em verdadeira grandeza. Salienta-se que a base inferior tem cota nula, pois está contida no *plano coordenado  $XY$* . Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , a perspectiva da **cota** da base superior, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , a partir da perspectiva do ponto  $O$ , está a perspectiva da **cota** da base superior do prisma.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base  $[A'B'C'D']$  do prisma:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo  $Z$  que tem 7 cm de cota. O plano horizontal (e nível)  $v$  que contém a base  $[A'B'C'D']$ , sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 7 cm de cota, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral ou de perfil do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizantal do plano  $v$  com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado  $XZ$* ) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado  $XZ$* , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado  $YZ$* ) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado  $YZ$* , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto  $A$ :*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respectiva projeção do ponto  $A$ .  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ .  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$  – atendendo a que o ponto  $A$  tem cota nula,  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ) situa-se sobre a perspectiva do eixo  $X$ .  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$  – o ponto  $A$  situa-se no *plano coordenado  $XY$*  (pois tem cota nula), pelo que  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ) se situa sobre a perspectiva do eixo  $Y$ .

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto  $A$  tem cota nula, o ponto  $A$  situa-se no *plano coordenado  $XY$* , pelo que se tem imediatamente  $A_1 \equiv A$  (sendo  $A$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

*Determinação das perspectivas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$ :*

As perspectivas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $A$ . De facto, atendendo a que os três pontos têm cota nula, as perspectivas das suas projeções frontais ( $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ ) situam-se necessariamente sobre a perspectiva do eixo  $X$ . De forma semelhante, e mais uma vez atendendo a que os três pontos têm cota nula, as perspectivas das suas projeções laterais ( $B_3$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se necessariamente sobre a perspectiva do eixo  $Y$ .

Por fim, e mais uma vez atendendo a que os três pontos têm cota nula, os três pontos situam-se no *plano coordenado  $XY$* , pelo que se tem imediatamente  $B_1 \equiv B$  (sendo  $B$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ ),  $C_1 \equiv C$  (sendo  $C$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$ ) e  $D_1 \equiv D$  (sendo  $D$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta fronto-horizantal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $A_3 \equiv C_3$ . De forma idêntica, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $B_2 \equiv D_2$ .

### Determinação das perspetivas do ponto **A'**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A'** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A'_1$ ,  $A'_2$  e  $A'_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A'**.  $A'_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A'**.  $A'_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto **A'** e situa-se sobre a perspetiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.  $A'_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A'** e situa-se sobre a perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **A'**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de  $A'_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de **A'** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de  $A'_2$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **A'** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de  $A'_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **A'** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **A'**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A'** são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspetivas dos pontos **B'**, **C'** e **D'**:

As perspetivas dos pontos **B'**, **C'** e **D'** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **A'**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, as perspetivas das projeções frontais dos três pontos ( $B'_2$ ,  $C'_2$  e  $D'_{12}$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que também é um plano projetante lateral, as perspetivas das projeções laterais dos três pontos ( $B'_3$ ,  $C'_3$  e  $D'_3$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Os pontos **A'** e **C'** situam-se na mesma reta fronto-horizantal (que é uma reta projetante lateral), pelo que se tem, imediatamente,  $A'_3 \equiv C'_3$ . De forma idêntica, os pontos **B'** e **D'**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $B'_2 \equiv D'_2$ .

Os pontos **A** e **A'** situam-se na mesma reta vertical (que é uma reta projetante horizontal), pelo que se tem, imediatamente,  $A_1 \equiv A'_1$ . De forma semelhante, também os pontos **B** e **B'** se situam na mesma reta projetante horizontal, tal como os pontos **C** e **C'** e, ainda, os pontos **D** e **D'**, pelo que se tem, imediatamente,  $B_1 \equiv B'_1$ ,  $C_1 \equiv C'_1$  e  $D_1 \equiv D'_1$ .

### Determinação das perspetivas do prisma:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[BCDD'A'B']$ . Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – os vértices **C'** e **A**. O vértice **C'**, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$  e  $[C'D']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e a aresta lateral  $[CC']$ . O vértice **A**, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base  $[ABCD]$ ) e a aresta lateral  $[AA']$ .

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas da projeção horizontal, da projeção frontal e da projeção lateral do prisma. Note que a **projeção horizontal** do prisma se reduz a um quadrado (o quadrado  $[A'_1B'_1C'_1D'_1]$ ) que, estando coincidente com a base  $[ABCD]$ , está oculto por essa base e, por isso mesmo, não se distingue.

A **perspetiva da projeção frontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[A_2C_2C'_2A'_2]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção frontal do prisma que esteja oculta pelo próprio prisma (que é opaco), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[B_3C_3C'_3D'_3]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção lateral do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a base superior do prisma), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (frontal e horizontal) se representaram a **leve**. A perspetiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (frontal e lateral) do prisma, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso dos rebatimentos dos planos projetantes dos três eixos e das perpendiculares à charneira.

**1061.**

Por **plano coordenado** entende-se qualquer plano definido por dois **eixos coordenados** e, portanto, qualquer dos planos que contém uma das faces da **pirâmide axonométrica**.

Existem três **planos coordenados** – o plano **XY** (o *plano coordenado horizontal*, definido pelo eixo **X** e pelo eixo **Y**), o plano **XZ** (o *plano coordenado frontal*, definido pelo eixo **X** e pelo eixo **Z**) e o plano **YZ** (o *plano coordenado de perfil*, definido pelo eixo **Y** e pelo eixo **Z**).

Sublinha-se, por ser **muito importante**, que qualquer das faces da pirâmide axonométrica (que estão contidas nos planos coordenados) é **necessariamente** um triângulo retângulo em **O**.

**1062.**

No rebatimento do plano coordenado **XY**, a charneira do rebatimento é a reta que contém o lado do triângulo fundamental que está contido no plano coordenado **XY** (a reta de interseção do plano **XY** com o *plano axonométrico*).

**Justificação:**

Por charneira do rebatimento entende-se **sempre** a reta de interseção entre dois planos – o plano a rebater e o plano para o qual se processa o rebatimento. Uma vez que, em axonometrias, os rebatimentos se processam **exclusivamente** para o *plano axonométrico*, no rebatimento do plano coordenado **XY**, a **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano coordenado **XY** com o *plano axonométrico*. Assim, a charneira do rebatimento do plano coordenado **XY** é a reta suporte do lado do triângulo fundamental que está contido no plano coordenado **XY**.

**1063.**

No rebatimento do plano coordenado **XZ**, a charneira do rebatimento é a reta que contém o lado do triângulo fundamental que está contido no plano coordenado **XZ** (a reta de interseção do plano **XZ** com o *plano axonométrico*).

**Justificação:**

Por charneira do rebatimento entende-se **sempre** a reta de interseção entre dois planos – o plano a rebater e o plano para o qual se processa o rebatimento. Uma vez que, em axonometrias, os rebatimentos se processam **exclusivamente** para o *plano axonométrico*, no rebatimento do plano coordenado **XZ**, a **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano coordenado **XZ** com o *plano axonométrico*. Assim, a charneira do rebatimento do plano coordenado **XZ** é a reta suporte do lado do triângulo fundamental que está contido no plano coordenado **XZ**.

**1064.**

No rebatimento do plano coordenado **YZ**, a charneira do rebatimento é a reta que contém o lado do triângulo fundamental que está contido no plano coordenado **YZ** (a reta de interseção do plano **YZ** com o *plano axonométrico*).

**Justificação:**

Por charneira do rebatimento entende-se **sempre** a reta de interseção entre dois planos – o plano a rebater e o plano para o qual se processa o rebatimento. Uma vez que, em axonometrias, os rebatimentos se processam **exclusivamente** para o *plano axonométrico*, no rebatimento do plano coordenado **YZ**, a **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano coordenado **YZ** com o *plano axonométrico*. Assim, a charneira do rebatimento do plano coordenado **YZ** é a reta suporte do lado do triângulo fundamental que está contido no plano coordenado **YZ**.



## 1065.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **A** se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **A** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY** para o *plano axonométrico* (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois planos coordenados). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado [RS] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.

Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo [ROS] está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto **M**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M** é necessariamente o ponto em que a perspectiva do eixo **Z** interseta o lado [RS] do *triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MR = MS$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**, pelo que a perpendicular à charneira que passa por **O** é a própria perspectiva do eixo **Z**.*

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$  (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$  (que é outro ponto fixo). O triângulo [ $O_r R_r S_r$ ] é retângulo em  $O_r$ .

#### Determinação das perspetivas das coordenadas do ponto A:

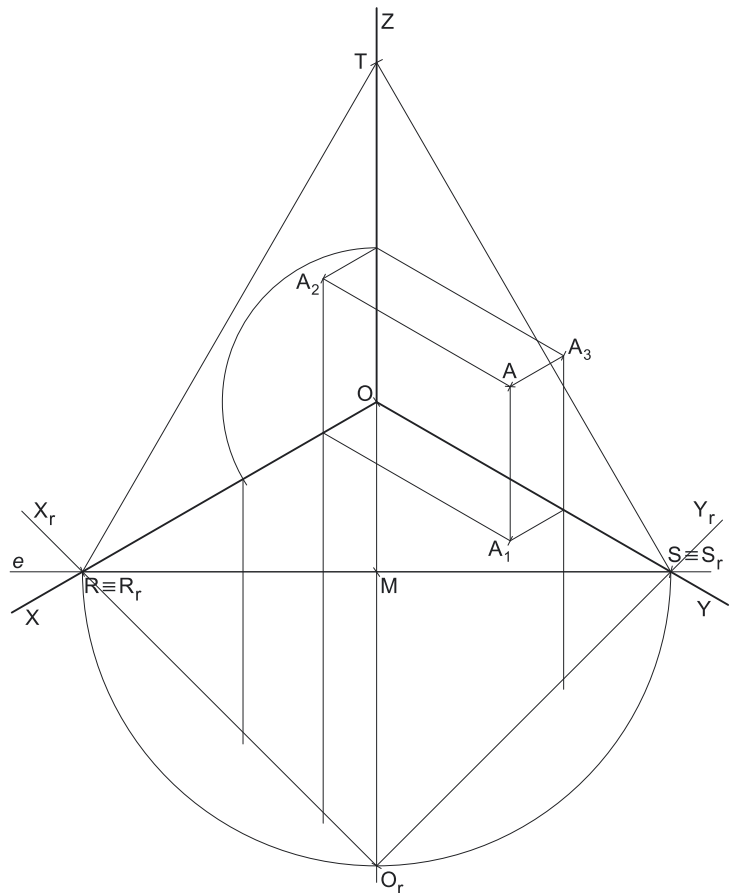
O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas do ponto **A** sobre qualquer daqueles dois eixos.

Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se a **abscissa** e a **cota** do ponto **A**, em verdadeira grandeza (2 cm e 5 cm, respetivamente). Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **A**, em verdadeira grandeza (7 cm). Note que a **cota** do ponto **A** poderia ter sido medida sobre o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido), pois os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas do ponto **A** já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo **X** estão as perspectivas da **abscissa** e da **cota** do ponto **A** e sobre a perspectiva do eixo **Y** está a perspectiva do **afastamento** do ponto **A**.

No entanto, a perspectiva da **cota** do ponto **A** está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportou-se a perspectiva da **cota** para a perspectiva do eixo **Z**.

#### Determinação das perspetivas do ponto A:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**.  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**.  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**.  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspectiva da cota), representaram-se a **leve**.

## 1066.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de 120°. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

#### Resolução:

As coordenadas do ponto **P** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **P** se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **P** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY** para o *plano axonométrico* (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.

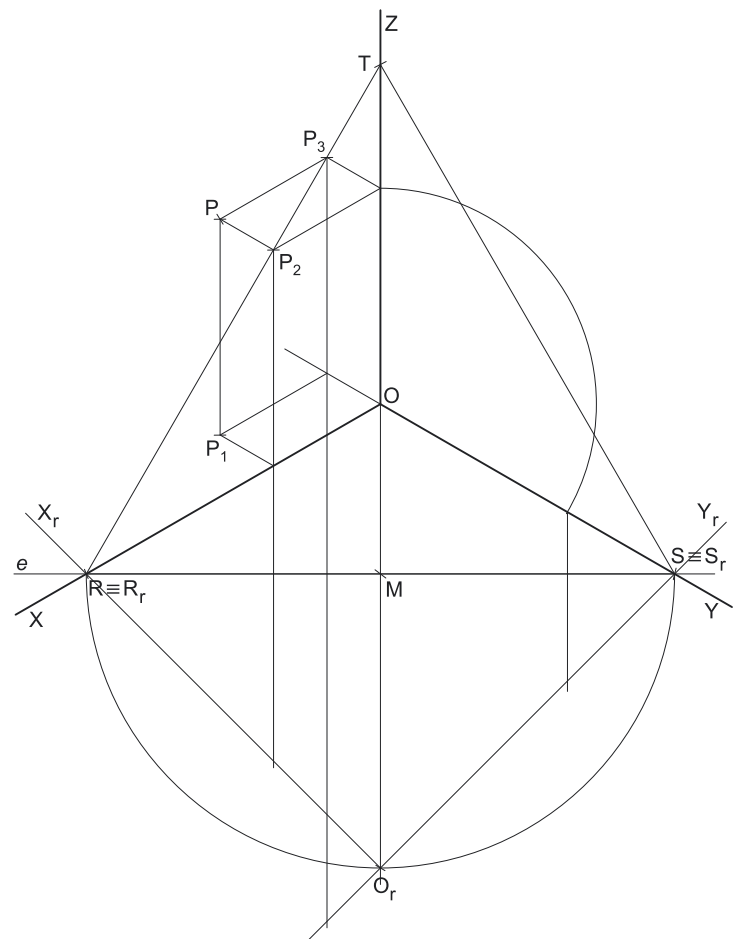
Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M** é necessariamente o ponto em que a perspectiva do eixo **Z** intersecta o lado **[RS]** do triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**, pelo que a perpendicular à charneira que passa por **O** é a própria perspectiva do eixo **Z**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>** (que é um ponto fixo). O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>** (que é outro ponto fixo). O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**.

#### Determinação das perspectivas das coordenadas do ponto P:

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) e o eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas do ponto **P** sobre qualquer daqueles dois eixos.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** do ponto  $P$  (4 cm), em verdadeira grandeza. Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$ , representaram-se, em verdadeira grandeza, o **afastamento** do ponto  $P$  (2 cm, no sentido negativo do eixo, pois o afastamento do ponto  $P$  é negativo), e a **cota** do ponto  $P$  (7 cm, no sentido positivo do eixo, pois a cota do ponto  $P$  é positiva). Note que a **cota** do ponto  $P$  poderia ter sido medida sobre o eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido), pois os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas do ponto  $P$  já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo  $X$  está a perspectiva da **abcissa** do ponto  $P$  e sobre a perspectiva do eixo  $Y$  estão as perspectivas do **afastamento** e da **cota** do ponto  $P$ . Note que o **afastamento** do ponto  $P$  está na parte negativa do eixo  $Y$ .

No entanto, a perspectiva da **cota** do ponto  $P$  está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto  $O$ , transportou-se a perspectiva da **cota** para a perspectiva do eixo  $Z$ .

### Determinação das perspectivas do ponto $P$ :

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $P$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $P$ .  $P_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $P$ .  $P_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $P$ .  $P_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $P$ .

Uma vez que o afastamento do ponto  $P$  é negativo,  $P_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $P$ ) situa-se para cima da perspectiva do eixo  $X$ , tal como  $P_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $P$ ) se situa para a esquerda da perspectiva do eixo  $Z$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $P$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $P_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $P$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $P_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $P$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $P_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $P$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $P$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $P$  são dois vértices espacialmente opostos.

Salienta-se que o ponto  $P$ , tendo afastamento negativo, se situa para trás do plano coordenado  $XZ$ , o que se pode comprovar na resolução gráfica apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O **triângulo fundamental** representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado  $XY$ , das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspectiva da cota), representaram-se a **leve**.

## 1067.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o **triângulo fundamental** – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

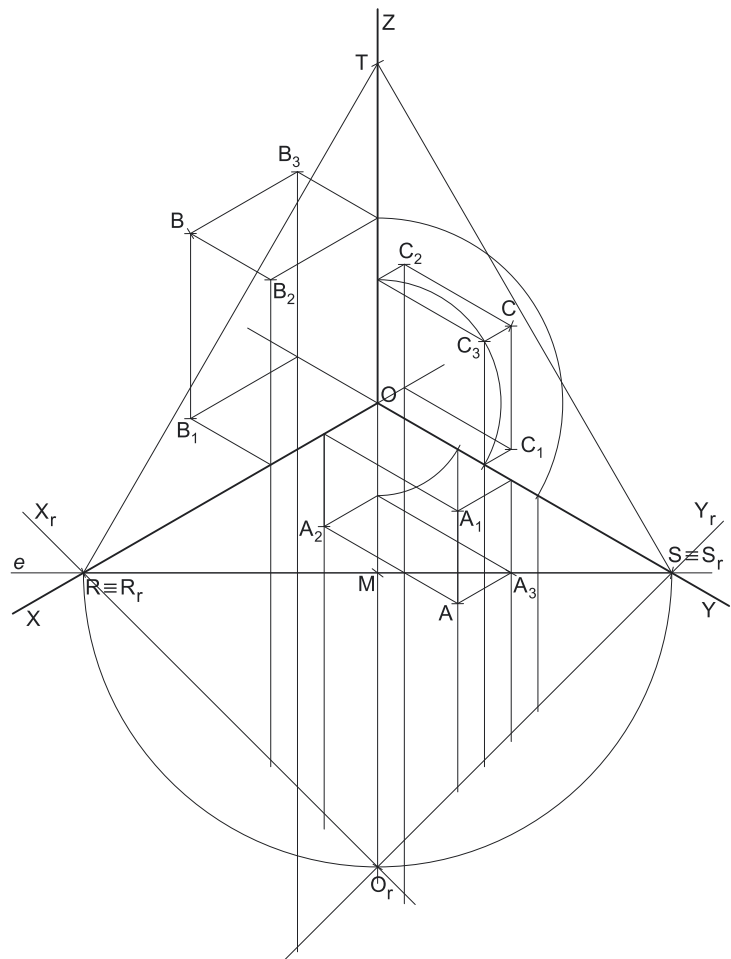
### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma daquelas coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano  $XY$  para o plano axonométrico (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois planos coordenados). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XY$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e$ ) é a reta suporte do lado  $[RS]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M** é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo **Z** interseja o lado **[RS]** do triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**, pelo que a perpendicular à charneira que passa por **O** é a própria perspetiva do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$  (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$  (que é outro ponto fixo). O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ .

*Determinação das perspetivas das coordenadas dos três pontos:*

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos três pontos sobre qualquer daqueles dois eixos.

Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, as **abscissas** dos pontos **A** e **B** (2 cm e 4 cm, respetivamente). Por outro lado, também sobre o eixo  $X_r$  e a partir de  $O_r$ , mas no sentido negativo do eixo, representou-se a abscissa do ponto **C** (1 cm). Tenha em conta que os pontos **A** e **B** têm **abscissa positiva** e que o ponto **C** tem **abscissa negativa**.

Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, os **afastamentos** dos pontos **A** e **C** (5 cm e 4 cm, respetivamente). Por outro lado, também sobre o eixo  $Y_r$  e a partir de  $O_r$ , mas no sentido negativo do eixo, representou-se o afastamento do ponto **B** (3 cm). Tenha em conta que os pontos **A** e **C** têm **afastamento positivo** e que o ponto **B** tem **afastamento negativo**.

Por outro lado, também sobre o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) e a partir de  $O_r$ , representaram-se, em verdadeira grandeza, as **cotas** dos três pontos (3 cm, 4 cm e 6 cm). Note que as **cotas** poderiam ter sido medidas sobre o eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido), pois os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução.

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos três pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspetiva do eixo **X** estão as perspetivas das **abscissas** dos três pontos e sobre a perspetiva do eixo **Y** estão as perspetivas dos **afastamentos** e das **cotas** dos três pontos. Note que o **afastamento** do ponto **B** está na parte negativa do eixo **Y** e que a **abscissa** do ponto **C** está na parte negativa do eixo **X**.

No entanto, as perspetivas das **cotas** dos três pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspetiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportaram-se as perspetivas das **cotas** para a perspetiva do eixo **Z**. Note que o ponto **A** tem **cota negativa**, pelo que a perspetiva da cota do ponto **A** foi transportada para a parte negativa do eixo **Z**.

*Determinação das perspetivas do ponto A:*

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro (**A<sub>1</sub>**, **A<sub>2</sub>** e **A<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**. **A<sub>2</sub>** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**. **A<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**.

Uma vez que a cota do ponto **A** é negativa, **A<sub>2</sub>** (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) situa-se para baixo da perspetiva do eixo **X**, tal como **A<sub>3</sub>** (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**) se situa para baixo da perspetiva do eixo **Y**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **A<sub>1</sub>**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **A<sub>3</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas intersejam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

Salienta-se que o ponto **A**, tendo cota negativa, se situa para baixo do *plano coordenado XY*, o que se pode comprovar na resolução gráfica apresentada.

*Determinação das perspetivas do ponto B:*

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **B** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro (**B<sub>1</sub>**, **B<sub>2</sub>** e **B<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **B**. **B<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **B**. **B<sub>2</sub>** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **B**. **B<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **B**.

Uma vez que o afastamento do ponto **B** é negativo, **B<sub>1</sub>** (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **B**) situa-se para cima da perspetiva do eixo **X**, tal como **B<sub>3</sub>** (a perspetiva da projeção lateral do ponto **B**) se situa para a esquerda da perspetiva do eixo **Z**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **B**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **B<sub>1</sub>**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **B** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **B<sub>2</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **B** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **B<sub>3</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **B** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas intersejam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **B**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **B** são dois vértices espacialmente opostos.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se que o ponto **B**, tendo afastamento negativo, se situa para trás do *plano coordenado XZ*, o que se pode comprovar na resolução gráfica apresentada.

**Determinação das perspectivas do ponto C:**

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **C** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**C<sub>1</sub>**, **C<sub>2</sub>** e **C<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **C**. **C<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**. **C<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**. **C<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**.

Uma vez que a abcissa do ponto **C** é negativa, **C<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**) situa-se para cima da perspectiva do eixo **Y**, tal como **C<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**) se situa para a direita da perspectiva do eixo **Z**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **C**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **C<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **C<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **C<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **C** são dois vértices espacialmente opostos.

Salienta-se que o ponto **C**, tendo abcissa negativa, se situa para a direita do *plano coordenado YZ*, o que se pode comprovar na resolução gráfica apresentada.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das cotas), representaram-se a **leve**.

## 1068.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de 120°. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

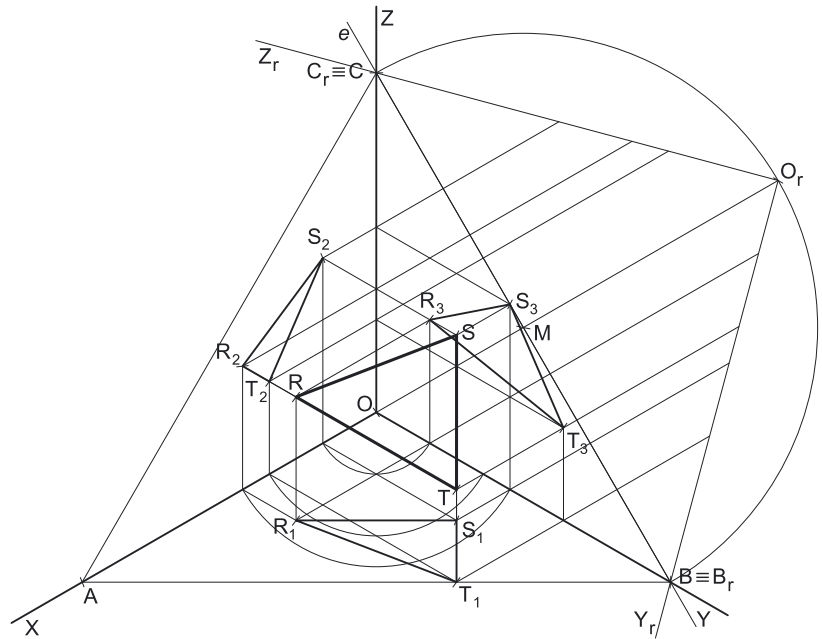
**Resolução:**

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma daquelas coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

**Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:**

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XZ** para o *plano axonométrico* (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[BC]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os pontos **B** e **C** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $B_r \equiv B$  e  $C_r \equiv C$ .

O triângulo **[BOC]** está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[BC]** (o ponto **M**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M** é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo **X** interseja o lado **[BC]** do triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MB} = \overline{MC}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[BC]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**, pelo que a perpendicular à charneira que passa por **O** é a própria perspetiva do eixo **X**.

O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $B_r$  (que é um ponto fixo). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $C_r$  (que é outro ponto fixo). O triângulo **[B<sub>r</sub>O<sub>r</sub>C<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ .

*Determinação das perspetivas das coordenadas dos três pontos:*

O eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) e o eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos três pontos sobre qualquer daqueles dois eixos.

Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, as **cotas** dos três pontos (3 cm, 4 cm e 6 cm).

Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, os **afastamentos** dos três pontos (2 cm, 5 cm e 7 cm). Por outro lado, também sobre o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) e a partir de  $O_r$ , e ainda no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, as **abscissas** dos três pontos (2 cm, 4 cm e 5 cm). Note que as **cotas** poderiam ter sido medidas sobre o eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido), pois os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução.

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos três pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspetiva do eixo **Z** estão as perspetivas das **cotas** dos três pontos e sobre a perspetiva do eixo **Y** estão as perspetivas dos **afastamentos** e das **abscissas** dos três pontos.

No entanto, as perspetivas das **abscissas** dos três pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspetiva do eixo **X**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportaram-se as perspetivas das **abscissas** para a perspetiva do eixo **X**.

*Determinação das perspetivas do ponto R:*

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **R**, determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro (**R<sub>1</sub>**, **R<sub>2</sub>** e **R<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **R**. **R<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **R**. **R<sub>2</sub>** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **R**. **R<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **R**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **R**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **R<sub>1</sub>**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **R** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **R<sub>2</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **R** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **R<sub>3</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **R** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas intersejam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **R**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **R** são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspetivas dos pontos S e T:*

As perspetivas dos pontos **S** e **T** e das suas projeções (horizontal, frontal e lateral) determinaram-se de forma semelhante à atrás exposta, para a determinação das perspetivas do ponto **R**.

*Determinação das perspetivas do triângulo:*

Por fim, desenharam-se as perspetivas do triângulo. O triângulo **[RST]** é a perspetiva propriamente dita do triângulo. O triângulo **[R<sub>1</sub>S<sub>1</sub>T<sub>1</sub>]** é a perspetiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo **[R<sub>2</sub>S<sub>2</sub>T<sub>2</sub>]** é a perspetiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo **[R<sub>3</sub>S<sub>3</sub>T<sub>3</sub>]** é a perspetiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo – uma pequena parte da projeção frontal do triângulo está oculta pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

**Traçado:**

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva do triângulo **[RST]** representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades assinaladas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do *plano coordenado XZ*, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspetivas das abscissas), representaram-se a **leve**.



## 1069.

a) O quadrado está contido num plano de perfil com 5 cm de abscissa (a abscissa dos pontos **A** e **B**), pelo que os pontos **C** e **D** têm necessariamente **5 cm de abscissa** (todos os pontos de um plano de perfil têm a mesma abscissa). Os pontos **A** e **B** têm a mesma abscissa e o mesmo afastamento, pelo que é possível constatar que o lado **[AB]** do quadrado é vertical (é paralelo ao eixo **Z**). Nesse sentido, o lado **[CD]** do polígono será igualmente paralelo ao eixo **Z** (o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois). Por sua vez, os lados **[AD]** e **[BC]**, porque são perpendiculares aos lados **[AB]** e **[CD]** e estão contidos num plano de perfil, serão necessariamente de topo (paralelos ao eixo **Y**). Por fim, o lado **[AB]** mede 4 cm (a diferença entre as cotas dos pontos **A** e **B**), que é a medida do lado do quadrado.

Por outro lado, o ponto **C** tem a mesma cota (6 cm) do ponto **B** (pois o lado **[BC]** é de topo), e o seu afastamento é 4 cm superior ao afastamento do ponto **B** (que é 3 cm) – o ponto **C** tem, assim, **6 cm de cota** e **7 cm de afastamento** (e 5 cm de abscissa, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto **C** são (5; 7; 6).

Por sua vez, o ponto **D** tem a mesma cota (2 cm) do ponto **A** (pois o lado **[AD]** é de topo), e o seu afastamento é 4 cm superior ao afastamento do ponto **A** (que é 3 cm) – o ponto **D** tem, assim, **2 cm de cota** e **7 cm de afastamento** (e 5 cm de abscissa, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto **D** são (5; 7; 2).

Salienta-se que o quadrado se situa no espaço do 1ª *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120°. Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas dos quatro pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspetivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY** para o plano axonométrico (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois planos coordenados). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XY**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente.

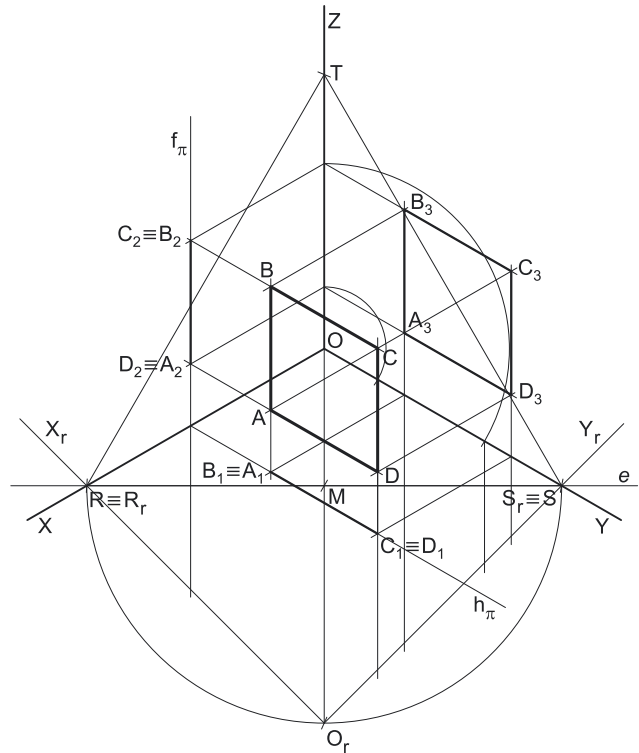
Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo **[ROS]** está contido no plano coordenado **XY** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M** é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo **Z** interseja o lado **[RS]** do triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MR = MS$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O**, é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**, pelo que a perpendicular à charneira que passa por **O** é a própria perspetiva do eixo **Z**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>** (que é um ponto fixo). O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>** (que é outro ponto fixo). O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**.

#### Determinação das perspetivas das coordenadas dos três pontos:

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) e o eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos três pontos sobre qualquer daqueles dois eixos.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se, em verdadeira grandeza, a **abscissa** do plano de perfil que contém o quadrado (5 cm).

Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, os **afastamentos** dos quatro pontos (3 cm e 7 cm) – salienta-se que os pontos **A** e **B** têm o mesmo afastamento, tal como os pontos **C** e **D** também têm o mesmo afastamento.

Por outro lado, também sobre o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) e a partir de  $O_r$ , e ainda no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, as **cotas** dos quatro pontos (2 cm e 6 cm) – salienta-se que os pontos **A** e **D** têm a mesma cota, tal como os pontos **B** e **C** também têm a mesma cota. Note ainda que as **cotas** poderiam ter sido medidas sobre o eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido), pois os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução.

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos três pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo **X** está a perspectiva da **abscissa** do plano de perfil e sobre a perspectiva do eixo **Y** estão as perspectivas dos **afastamentos** e das **cotas** dos quatro pontos.

No entanto, as perspectivas das **cotas** dos quatro pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspectiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportaram-se as perspectivas das **cotas** para a perspectiva do eixo **Z**.

*Representação do plano de perfil que contém o quadrado:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **X**, um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo **X** que tem 5 cm de abscissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 5 cm de abscissa, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**. Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**.

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto A:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**.  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A** e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A** e situa-se sobre  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D:*

As perspectivas dos pontos **B**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **C**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos ( $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos ( $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **B**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A_1 \equiv B_1$  (tal como os pontos **C** e **D**, pelo que se tem igualmente  $C_1 \equiv D_1$ ). Pelo seu lado, os pontos **A** e **D**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $A_2 \equiv D_2$  (tal como os pontos **B** e **C**, pelo que se tem igualmente  $B_2 \equiv C_2$ ).

*Determinação das perspectivas do quadrado:*

Por fim, desenharam-se as perspectivas do quadrado. O quadrilátero  $[ABCD]$  (que é um losango) é a perspectiva propriamente dita do quadrado. O quadrilátero  $[A_3B_3C_3D_3]$  (que, neste caso, é outro losango) é a perspectiva da projeção lateral do quadrado. O segmento de reta  $[C_2D_2]$  é a perspectiva da projeção frontal do quadrado (a projeção frontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre  $f_\pi$ , pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal). O segmento de reta  $[B_1C_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do quadrado (a projeção horizontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_\pi$ , pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal).

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\pi$  (o plano que contém o losango), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e frontal) do plano se representaram a **leve**. A perspectiva do quadrado  $[ABCD]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado **XY**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas dos cotas.

## 1070.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

### Resolução:

Tendo em conta que o cubo tem arestas paralelas a dois dos eixos coordenados, depreende-se que o cubo tem faces paralelas aos *planos coordenados*. A aresta [AB] é paralela ao eixo **X**, ou seja, é fronto-horizantal, e mede 4 cm – assim, os pontos **A** e **B** têm a mesma cota e o mesmo afastamento e a abscissa do ponto **B** é 4 cm superior à abscissa do ponto **A**. Nesse sentido, as coordenadas do ponto **B** são (6; 1; 3). A aresta [AD] é paralela ao eixo **Y**, ou seja, é de topo, e mede 4 cm – assim, os pontos **A** e **D** têm a mesma cota e a mesma abscissa e o afastamento do ponto **D** é 4 cm superior ao afastamento do ponto **A**. Nesse sentido, as coordenadas do ponto **D** são (2; 5; 3). As coordenadas do ponto **C** são necessariamente (6; 5; 3).

Por outro lado, a face superior do cubo está contida num plano horizontal (de nível) que se situa 4 cm (a medida da aresta do cubo) acima da face inferior (a face [ABCD]). Tendo em conta que a face inferior tem 3 cm de cota, o plano horizontal (de nível) que contém a face superior tem 7 cm de cota ( $3 + 4 = 7$ ).

As coordenadas dos vértices do cubo medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma daquelas coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY** para o *plano axonométrico* (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado [RS] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.

Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

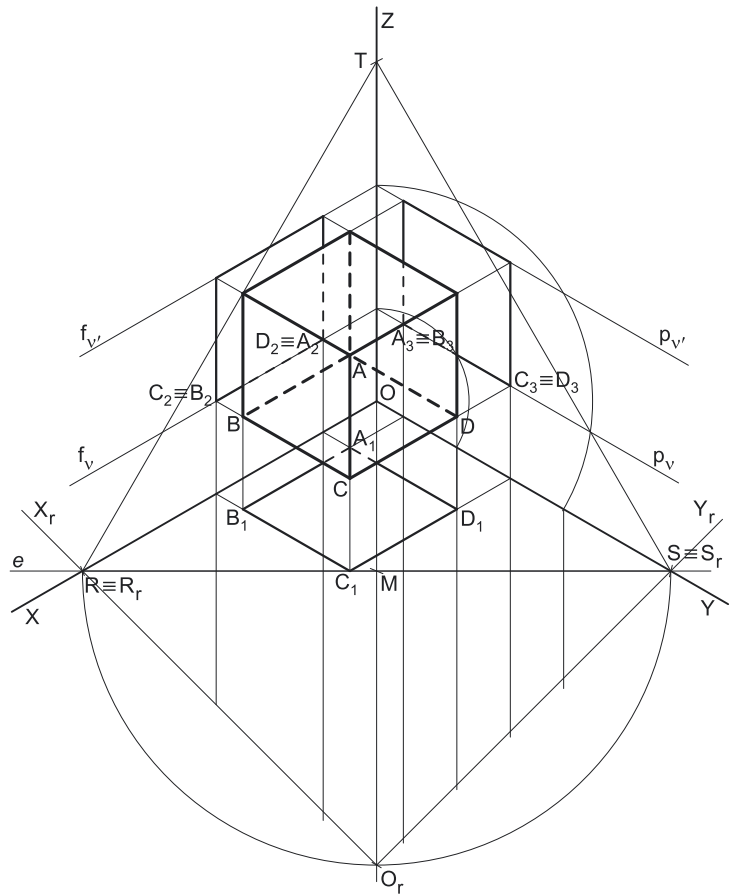
O triângulo [ROS] está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto **M**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M** é necessariamente o ponto em que a perspectiva do eixo **X** interseca o lado [RS] do triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MR = MS$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**, pelo que a perpendicular à charneira que passa por **O** é a própria perspectiva do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$  (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$  (que é outro ponto fixo). O triângulo [R $O_r$ S $_r$ ] é retângulo em  $O_r$ .

### Determinação das perspectivas das coordenadas dos vértices do cubo:

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos oito vértices do cubo sobre qualquer daqueles dois eixos.

Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, as **abscissas** dos oito vértices do cubo (2 cm e 6 cm).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, os **afastamentos** dos oito vértices do cubo (1 cm e 5 cm). Por outro lado, também sobre o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) e a partir de  $O_r$ , e ainda no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, as **cotas** dos oito vértices do cubo (3 cm e 7 cm). Note que as **cotas** poderiam ter sido medidas sobre o eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido), pois os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução.

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos oito pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo  $X$  estão as perspectivas das **abcissas** dos oito pontos e sobre a perspectiva do eixo  $Y$  estão as perspectivas dos **afastamentos** e das **cotas** dos oito pontos.

No entanto, as perspectivas das **cotas** dos oito pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto  $O$ , transportaram-se as perspectivas das **cotas** para a perspectiva do eixo  $Z$ .

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a face inferior do cubo:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo  $Z$  que tem 2 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o quadrado  $[ABCD]$  (a face inferior), sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de cota, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v - f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a face superior do cubo:*

De forma semelhante à atrás exposta, pelo ponto da perspectiva do eixo  $Z$  que é a perspectiva do ponto do eixo  $Z$  que tem 7 cm de cota, conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v' - f_{v'}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v'$ ) e  $p_{v'}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v'$ ). O plano  $v'$  é o plano horizontal (de nível) que contém a face superior do cubo.

Note que  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v'$  com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{v'}$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v'$ ) é uma reta de topo do plano  $v'$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v'$  é outro plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). Por outro lado, o plano  $v'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{v'}$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto A:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $A$ .  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ .  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$  e situa-se sobre  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D:*

As perspectivas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $A$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos ( $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos ( $B_3$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Os pontos  $A$  e  $B$  situam-se na mesma reta fronto-horizontal (que é uma reta projetante lateral), bem como os pontos  $C$  e  $D$ , pelo que as projeções laterais daqueles dois pares de pontos estão coincidentes – tem-se, imediatamente,  $A_3 \equiv B_3$  e  $C_3 \equiv D_3$ . Os pontos  $B$  e  $C$  situam-se na mesma reta de topo (que é uma reta projetante frontal), bem como os pontos  $A$  e  $D$ , pelo que as projeções frontais daqueles dois pares de pontos estão coincidentes – tem-se, imediatamente,  $C_2 \equiv B_2$  e  $D_2 \equiv A_2$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das perspectivas dos vértices da face superior do cubo:

As perspectivas de cada um dos vértices da face superior do cubo (que não se identificaram) determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **A**. Salienta-se que a omissão das notações referentes aos vértices da face superior do sólido visou, sobretudo, evitar o excesso de notações que, neste caso, sobrecarregariam em muito a resolução gráfica apresentada e nada acrescentariam à mesma.

## Determinação das perspectivas do cubo:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do cubo**, começando pelo seu contorno aparente. Existem dois vértices do cubo que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – o vértice **A** e o vértice da face superior que é espacialmente oposto a **A**. Esse vértice, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem. Já o vértice **A**, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]** (da face **ABCD**) e a aresta **[AA']**. No entanto, salienta-se que a aresta lateral **[AA']** está parcialmente oculta pela aresta lateral **[CC']**, que é visível.

Note que não se identificaram os vértices da face superior do sólido, para evitar o excesso de notações na resolução gráfica, o que dificultaria, em muito, a sua leitura.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas da projeção horizontal, da projeção frontal e da projeção lateral do cubo.

A **perspetiva da projeção horizontal do cubo** é limitada pelo paralelogramo que é a projeção horizontal da face superior do cubo. Todas as arestas invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção horizontal do cubo é invisível (por estar oculta pelo próprio cubo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal do cubo** é limitada pelo paralelogramo que é a projeção frontal da face de maior afastamento do sólido. Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção frontal do cubo é invisível (por estar oculta pelo próprio cubo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do cubo** é limitada pelo paralelogramo que resulta da projeção lateral da face mais à esquerda do sólido. Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção lateral do cubo é invisível (por estar oculta pelo próprio cubo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. Os planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as faces horizontais do cubo), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) do cubo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das cotas), representaram-se a **leve**.

## 1071.

a) A base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano horizontal (de nível) com 7 cm de cota (a cota dos pontos  $A$  e  $B$ ), pelo que os pontos  $C$  e  $D$  têm necessariamente **7 cm de cota** (todos os pontos de um plano horizontal têm a mesma cota). Por outro lado, é possível constatar que o lado  $[AB]$  do quadrado é fronto-horizontal (é paralelo ao eixo  $X$ ), pelo que o lado  $[CD]$  do polígono será igualmente fronto-horizontal (paralelo ao eixo  $X$ ), pois o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois. Por sua vez, os lados  $[BC]$  e  $[AD]$  serão necessariamente de topo (paralelos ao eixo  $Y$ ), por serem perpendiculares aos lados  $[AB]$  e  $[CD]$ ). Por fim, o lado  $[AB]$  mede 4 cm (a diferença entre as abcissas dos pontos  $A$  e  $B$ ), que é a medida do lado do quadrado.

Assim, o ponto  $C$ , sendo consecutivo ao ponto  $B$ , tem a mesma abcissa do ponto  $B$  (que é 6 cm) e o seu afastamento é 4 cm superior ao afastamento daquele ponto – o ponto  $C$  tem, assim, **6 cm de abcissa** e **7 cm de afastamento** (e 7 cm de cota, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto  $C$  são (6; 7; 7).

O ponto  $D$  tem a mesma abcissa do ponto  $A$  (porque o lado  $[AD]$  é de topo) e o mesmo afastamento do ponto  $C$  (porque o lado  $[CD]$  é fronto-horizontal) – o ponto  $D$  tem, assim, **2 cm de abcissa** e **7 cm de afastamento** (e 7 cm de cota, como atrás se referiu). Dessa forma, as coordenadas do ponto  $D$  são (2; 7; 7).

Por fim, o enunciado refere expressamente que o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) tem **cota nula**. Por outro lado, tratando-se de uma **pirâmide regular**, que é uma pirâmide reta, o seu vértice situa-se na mesma projetante horizontal do centro da base (o ponto médio das duas diagonais).

A abcissa do ponto médio das diagonais é a média aritmética das abcissas dos pontos  $A$  e  $B$ , que é 4 cm – o ponto  $V$  tem, assim, **4 cm de abcissa**. O afastamento do ponto médio das diagonais é a média aritmética dos afastamentos dos pontos  $A$  e  $D$ , que é 5 cm – o ponto  $V$  tem, assim, **5 cm de afastamento**. Dessa forma, as coordenadas do ponto  $V$  são (4; 5; 0).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

## b) Dados:

As coordenadas dos vértices da pirâmide medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma daquelas coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

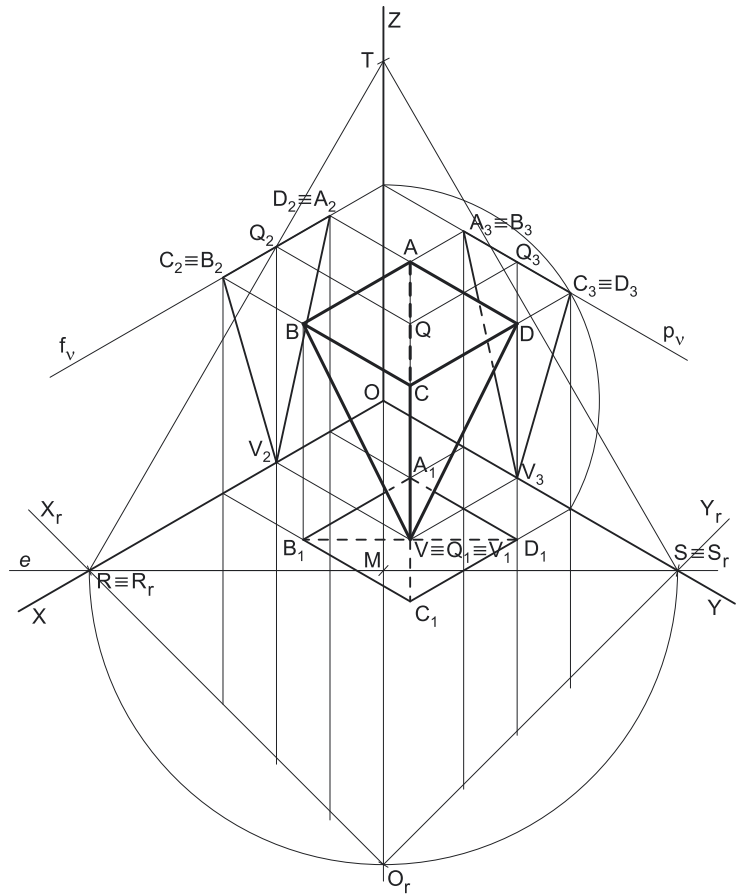
Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspetivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

*Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:*

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano  $XY$  para o *plano axonométrico* (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e$ ) é a reta suporte do lado  $[RS]$  do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.

Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo  $[ROS]$  está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RS]$  (o ponto  $M$ ) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto  $M$  é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo  $X$  interseja o lado  $[RS]$  do triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $MR = MS$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RS]$  é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Z$ , pelo que a perpendicular à charneira que passa por  $O$  é a própria perspetiva do eixo  $Z$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$  (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$  (que é outro ponto fixo). O triângulo  $[R_r, O_r, S_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

*Determinação das perspectivas das coordenadas dos vértices da pirâmide:*

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos cinco pontos sobre qualquer daqueles dois eixos.

Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, as **abcissas** dos cinco vértices da pirâmide (2 cm, 4 cm e 6 cm).

Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, os **afastamentos** dos cinco vértices da pirâmide (3 cm, 5 cm e 7 cm). Por outro lado, também sobre o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) e a partir de  $O_r$ , e ainda no sentido positivo do eixo, representou-se, em verdadeira grandeza, a **cota** do plano da base da pirâmide (7 cm). Note que a **cota** poderia ter sido medida sobre o eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido), pois os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução.

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos cinco pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo  $X$  estão as perspectivas das **abcissas** dos cinco pontos e sobre a perspectiva do eixo  $Y$  estão as perspectivas dos **afastamentos** e das **cotas** dos cinco pontos.

No entanto, a perspectiva da **cota** do plano da base está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto  $O$ , transportou-se a perspectiva da **cota** para a perspectiva do eixo  $Z$ .

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo  $Z$  que tem 7 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a base da pirâmide, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 7 cm de cota, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto A:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $A$ .  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ .  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$  e situa-se sobre  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D:*

As perspectivas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $A$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos ( $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos ( $B_3$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A$  e  $B$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $A_3 \equiv B_3$ , o que acontece, também, com os pontos  $C$  e  $D$ . Pelo seu lado, os pontos  $A$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $A_2 \equiv D_2$ , o que acontece, também, com os pontos  $B$  e  $C$ .

*Determinação das perspectivas do ponto V:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $V$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $V$ .  $V_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V$ .  $V_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $V$  – uma vez que o ponto  $V$  tem cota nula, o ponto  $V$  situa-se no plano coordenado  $XY$ , pelo que  $V_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $V$ ) se situa sobre a perspectiva do eixo  $X$ .  $V_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $V$  – mais uma vez atendendo a que o ponto  $V$  se situa no plano coordenado  $XY$  (pois tem cota nula),  $V_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $V$ ) situa-se sobre a perspectiva do eixo  $Y$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **V** tem cota nula, o ponto **V** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que se tem imediatamente  $V_1 \equiv V$  (sendo **V** a perspectiva propriamente dita do ponto **V**).

#### Determinação das perspectivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ABVD]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **C**. Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**). Por outro lado, a aresta lateral **[AV]** é **invisível**, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais **[ABV]** e **[ADV]**. Note que a aresta **[AV]** está parcialmente oculta pela aresta lateral **[CV]**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Tendo em conta que o vértice **V** é o vértice de menor cota do sólido, este vértice é invisível (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que nele convergem (todas as arestas laterais da pirâmide). Assim, a **invisibilidade por projeção** a assinalar, em projeção horizontal, refere-se a todas as arestas laterais da pirâmide. Por outro lado, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>]**. As arestas laterais **[AV]** e **[BV]** são invisíveis, em projeção frontal, mas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção frontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção frontal. No entanto, uma pequena parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[B<sub>3</sub>C<sub>3</sub>V<sub>3</sub>]**. As arestas laterais **[AV]** e **[DV]** são invisíveis, em projeção lateral, mas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção lateral. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção lateral. Por outro lado, parte da projeção lateral da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O **triângulo fundamental** representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\nu$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (frontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. As perspectivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado **XY**, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspetiva da cota.

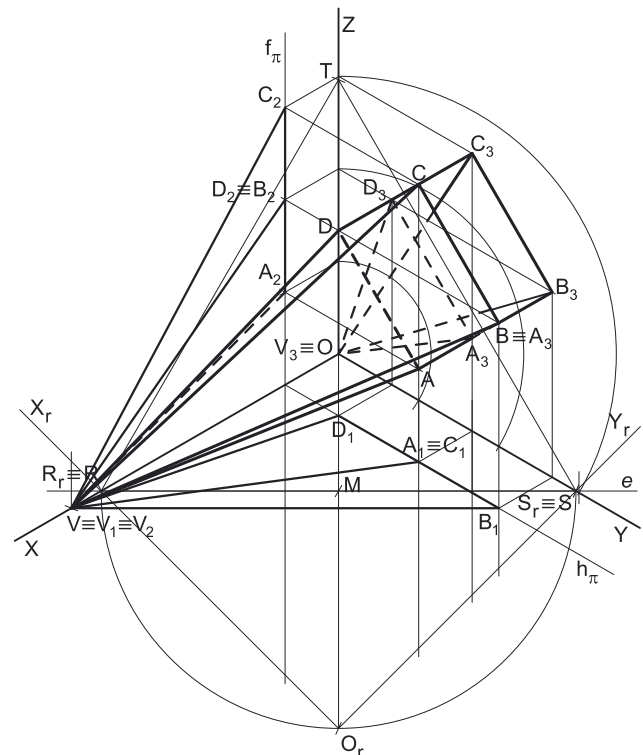
## 1072.

- a) O quadrado **[ABCD]** está contido num plano de perfil com 2 cm de abcissa (a abcissa dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **2 cm de abcissa** (todos os pontos de um plano de perfil têm a mesma abcissa). Os pontos **A** e **C** têm o mesmo afastamento e a mesma abcissa, pelo que é possível constatar que a diagonal **[AC]** do quadrado é vertical (paralela ao eixo **Z**). Nesse sentido, a outra diagonal **[BD]**, porque é perpendicular à diagonal **[AC]** e está contida num plano de perfil, é necessariamente de topo (paralela ao eixo **Y**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal **[AC]** tem necessariamente 6 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **6 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal **[AC]** mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal **[BD]** mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

Tendo em conta que o ponto **B** é o vértice de maior afastamento do quadrado (como o enunciado refere expressamente), o seu afastamento é 3 cm superior ao afastamento dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **8 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto **B** são (2; 8; 6).

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto **D** é o vértice de menor afastamento do quadrado (por oposição ao vértice **B**), o seu afastamento é 3 cm inferior ao afastamento dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **2 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto **D** são (2; 2; 6).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença das abcissas entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e a sua base tem 2 cm de abscissa, o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem **10 cm de abscissa** ( $2 + 8 = 10$ ). O ponto **V** é um ponto do eixo **X** (como o enunciado refere expressamente), pelo que o ponto **V** tem **afastamento e cota** nulos. Nesse sentido, as coordenadas do ponto **V** são ( 10; 0; 0).

## b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

## Resolução:

As coordenadas dos cinco vértices da pirâmide medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY** para o *plano axonométrico* (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.

Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M** é necessariamente o ponto em que a perspectiva do eixo **X** interseja o lado **[RS]** do triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MR = MS$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**, pelo que a perpendicular à charneira que passa por **O** é a própria perspectiva do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$  (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$  (que é outro ponto fixo). O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ .

### Determinação das perspetivas das coordenadas dos vértices da pirâmide:

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos cinco pontos sobre qualquer daqueles dois eixos.

Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, as **abcissas** do plano da base e do ponto **V** (2 cm e 10 cm).

Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, os **afastamentos** dos cinco vértices da pirâmide (2 cm, 5 cm e 8 cm). Por outro lado, também sobre o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) e a partir de  $O_r$ , e ainda no sentido positivo do eixo, representou-se, em verdadeira grandeza, as **cotas** dos cinco vértices da pirâmide (3 cm, 6 cm e 9 cm). Note que as **cotas** poderiam ter sido medidas sobre o eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido), pois os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução.

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos cinco pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo **X** estão as perspectivas das **abcissas** dos cinco pontos e sobre a perspectiva do eixo **Y** estão as perspectivas dos **afastamentos** e das **cotas** dos cinco pontos.

No entanto, as perspectivas das **cotas** dos cinco pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspectiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportaram-se as perspectivas das **cotas** para a perspectiva do eixo **Z**.

### Representação do plano de perfil que contém a base da pirâmide:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **X**, um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo **X** que tem 2 cm de abscissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém a base da pirâmide, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de abscissa, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

#### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $A$ .  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$  e situa-se sobre  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D:

As perspectivas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $A$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos ( $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos ( $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que o ponto  $A$  tem cota nula, pelo que o ponto  $A$  se situa no plano coordenado  $XY$  – assim, tem-se imediatamente  $A_1 \equiv A$  (sendo  $A$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A$  e  $C$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A_1 \equiv C_1$ . Pelo seu lado, os pontos  $B$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $B_2 \equiv D_2$ .

#### Determinação das perspectivas do ponto V:

O ponto  $V$  é um ponto com cota e afastamento nulos – um ponto do eixo  $X$ . Assim, tanto  $V_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $V$ ) como  $V_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V$ ) se situam no eixo  $X$ . Já  $V_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $V$ ) se situa no eixo  $Y$ , pelo que está coincidente com a origem do referencial (ponto  $O$ ), o que se assinalou convenientemente.

Uma vez que o ponto  $V$  se situa no eixo  $X$  (pois tem cota e afastamento nulos), tem-se imediatamente  $V_1 \equiv V_2 \equiv V$  (sendo  $V$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $V$ ).

#### Determinação das perspectivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada  $[ABCDV]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente da perspectiva do sólido. No entanto, a aresta  $[AD]$ , da base, é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – a base  $[ABCD]$  e a face lateral  $[ADV]$ . Note que, na realidade, os vértices  $A$  e  $D$  são os vértices mais distantes do observador e, por isso, a aresta  $[AD]$  é invisível. Já as arestas laterais  $[BV]$  e  $[CV]$  são duas arestas visíveis, da pirâmide, porque separam faces da pirâmide que são visíveis, em perspetiva. Note ainda que os vértices  $B$  e  $C$  são dos vértices da pirâmide que estão mais próximos do observador.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[B_1V_1D_1]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção horizontal da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção horizontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[A_2V_2C_2]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. No entanto, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pela linha poligonal  $[A_3B_3C_3D_3V_3]$ . A única aresta da pirâmide que está oculta, em projeção lateral, é a aresta  $[AD]$ , facto que se assinalou convenientemente – a aresta  $[AD]$  é, assim, a única **invisibilidade por projeção**, em projeção lateral. No entanto, parte da projeção lateral da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e frontal) do plano se representaram a **leve**. As perspectivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado **XY**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das cotas.

## 1073.

O recurso ao **rebatimento dos planos coordenados** permite-nos, num só rebatimento, obtermos **dois eixos rebatidos**. No caso da **perspetiva dimétrica**, uma vantagem do recurso ao **rebatimento dos planos coordenados** em vez do **recurso ao rebatimento do plano projetante de um eixo** reside no facto de podermos, nesse rebatimento, rebater dois eixos com coeficientes de redução distintos – esse procedimento permite-nos, num só rebatimento, obtermos os dois coeficientes de redução dessa perspetiva dimétrica.

## 1074.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz ângulos de  $130^\circ$  com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**), o que perfaz um total de  $260^\circ$  ( $2 \times 130^\circ = 260^\circ$ ), as perspectivas destes dois eixos fazem, entre si, um ângulo de  $100^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$ ). Atendendo a que a perspectiva do eixo **Z** faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo **Z** é o eixo que sofre uma **redução isolada**. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **A** se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **A** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

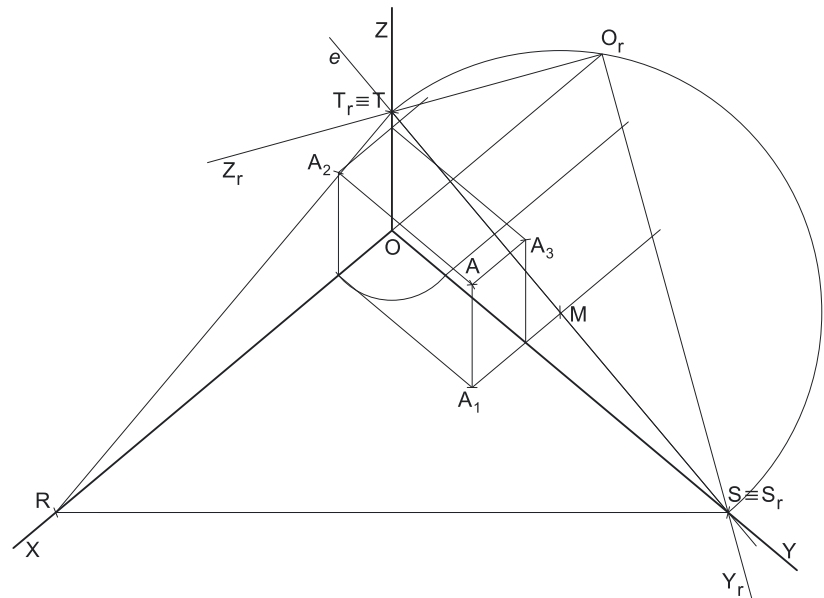
Por outro lado, e como atrás se referiu, o eixo **Z** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **Z**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **YZ**, pois o *plano coordenado YZ* contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o *plano coordenado XZ* (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o *plano coordenado XY*, pois o eixo **X** e o eixo **Y** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **Z**).

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[ST]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo [SOT] está contido no *plano coordenado YZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado YZ* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [ST] (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MS} = \overline{MT}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [ST] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**.

O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **T<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O triângulo [S<sub>r</sub>O<sub>r</sub>T<sub>r</sub>] é retângulo em **O<sub>r</sub>**.

*Determinação das perspectivas das coordenadas do ponto A:*

O eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y** rebatido) e o eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **X** e o eixo **Y** apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo **Z** apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspectiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas do ponto **A** (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como em seguida, se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representaram-se a **abscissa** e o **afastamento** do ponto **A**, em verdadeira grandeza (2 cm e 5 cm, respetivamente). Sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **A**, em verdadeira grandeza (5 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas do ponto **A** já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo **Y** estão as perspectivas da **abscissa** e do **afastamento** do ponto **A** e sobre a perspectiva do eixo **Z** está a perspectiva da **cota** do ponto **A**.

No entanto, a perspectiva da **abscissa** do ponto **A** está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo **X**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportou-se a perspectiva da **abscissa** para a perspectiva do eixo **X**.

*Determinação das perspectivas do ponto A:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A<sub>1</sub>**, **A<sub>2</sub>** e **A<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**. **A<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**. **A<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

**Resposta à questão:**

O eixo que sofre a **redução isolada** é o eixo **Z** (como atrás se referiu), pois é o eixo que faz, com o *plano axonométrico*, um ângulo diferente do ângulo que os outros dois eixos fazem com o *plano axonométrico*. Por isso mesmo, o eixo **Z** é o eixo cuja perspectiva faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do *plano coordenado YZ*, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspectiva da abscissa), representaram-se a **leve**.



## 1075.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. O eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada, pelo que a sua perspectiva faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos – uma vez que a perspectiva do eixo **Y** faz um ângulo de  $110^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva do eixo **Y** faz outro ângulo de  $110^\circ$  com a perspectiva do eixo **X**, o que perfaz um total de  $220^\circ$  ( $2 \times 110^\circ = 220^\circ$ ). Assim, a perspectiva do eixo **X** e a perspectiva do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $140^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas do ponto **M** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **M** se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **M** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem da mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como atrás se referiu, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **Y**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o *plano coordenado XY* contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o *plano coordenado YZ* (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o *plano coordenado XZ*, pois o eixo **X** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **Y**).

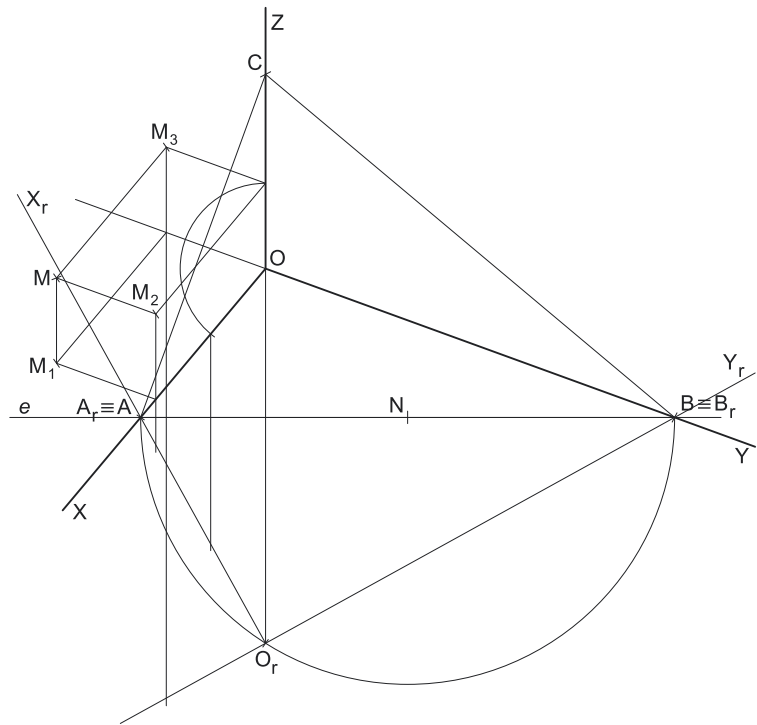
Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[AB]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **A** e **B** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $B_r \equiv B$ .

O triângulo **[AOB]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AB]** (o ponto **N**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **N** e com raio  $\overline{NA} = \overline{NB}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[AB]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **A<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **B<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[A<sub>r</sub>O<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**.

### Determinação das perspectivas das coordenadas do ponto **M**:

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) e o eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **X** e o eixo **Z** apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo **Y** apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspectiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas do ponto **M** (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como Em seguida, se expõe.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se a **abscissa** e a **cota** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (6 cm e 3 cm, respetivamente). Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido negativo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (3 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas do ponto **M** já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspetiva do eixo **X** estão as perspetivas da **abscissa** e da **cota** do ponto **M** e sobre a perspetiva do eixo **Y** está a perspetiva do **afastamento** do ponto **M**.

No entanto, a perspetiva da **cota** do ponto **M** está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspetiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportou-se a perspetiva da **cota** para a perspetiva do eixo **Z**.

Note que a perspetiva do afastamento do ponto **M** se situa na parte negativa da perspetiva do eixo **Y**, pois o ponto **M** tem **afastamento negativo**.

#### Determinação das perspetivas do ponto **M**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **M**.  $M_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **M**.  $M_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto **M**.  $M_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto **M**.

Uma vez que o afastamento do ponto **M** é negativo,  $M_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **M**) situa-se para cima da perspetiva do eixo **X**, tal como  $M_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **M**) se situa para a esquerda da perspetiva do eixo **Z**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **M**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de  $M_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de **M** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de  $M_2$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **M** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de  $M_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **M** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **M**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **M** são dois vértices espacialmente opostos.

Salienta-se que o ponto **M**, tendo afastamento negativo, se situa para trás do plano coordenado **XZ**, o que se pode comprovar na resolução gráfica apresentada.

#### Resposta à questão:

O eixo que sofre **maior redução** não é um eixo mas, sim, dois eixos – o eixo **X** e o eixo **Z**. De facto, estes dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução sofrida pelo eixo **Y** – o eixo **Y** é o eixo que faz, com o plano axonométrica, o menor ângulo e, por isso, sofre a **menor redução**. Uma vez que o eixo **X** e o eixo **Z** têm o mesmo coeficiente de redução (como atrás se referiu) e essa redução é **maior** do que a redução sofrida pelo eixo **Y**, o eixo **X** e o eixo **Z** são, ambos, os eixos que sofrem a **maior redução**.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado **XY**, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspetiva da cota), representaram-se a **leve**.

## 1076.

### Dados:

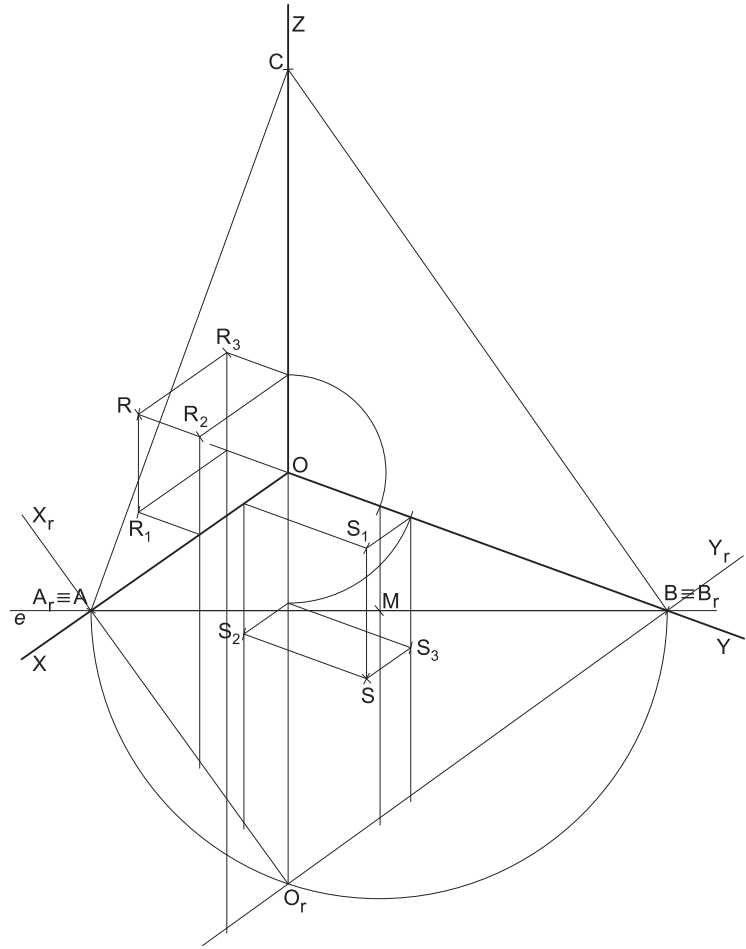
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. O eixo **X** é o eixo que sofre uma redução isolada, pelo que a sua perspectiva faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos – a perspectiva do eixo **X** faz ângulos de  $125^\circ$  com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**), o que perfaz um total de  $250^\circ$  ( $2 \times 125^\circ = 250^\circ$ ). Assim, a perspectiva do eixo **Y** e a perspectiva do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $110^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas dos pontos **R** e **S** medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano *axonométrico*), pelo que as coordenadas dos dois pontos não se projetam em verdadeira grandeza no plano *axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas dos dois pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como o enunciado refere expressamente, o eixo **X** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **X**.



Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o plano coordenado **XY** contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o plano coordenado **XZ** (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o plano coordenado **YZ**, pois o eixo **Y** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **X**).

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XY**) com o plano *axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[AB]** do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos **A** e **B** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $B_r \equiv B$ .

O triângulo **[AOB]** está contido no plano coordenado **XY** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao plano *axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AB]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MA} = \overline{MB}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[AB]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **Or**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **Or** e **A<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **Or** e **B<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[A<sub>r</sub>O<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**.

### Determinação das perspetivas das coordenadas dos dois pontos:

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) e o eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **Y** e o eixo **Z** apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo **X** apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspetiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas dos dois pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como Em seguida, se expõe.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos pontos **R** e **S**, em verdadeira grandeza (4 cm e 2 cm, respetivamente).

Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se, em verdadeira grandeza, o **afastamento** do ponto **S** (4 cm). Por outro lado, também sobre o eixo  $Y_r$  e a partir de  $O_r$ , mas no sentido negativo do eixo, representou-se o afastamento do ponto **R** (2 cm). Tenha em conta que o ponto **S** tem **afastamento positivo** e que o ponto **R** tem **afastamento negativo**.

Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, ainda, as **cotas** dos dois pontos (3 cm e 4 cm), em verdadeira grandeza.

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos dois pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspetiva do eixo **X** estão as perspetivas das **abcissas** dos dois pontos e sobre a perspetiva do eixo **Y** estão as perspetivas dos **afastamentos** e das **cotas** dos dois pontos. Note que o **afastamento** do ponto **R** está na parte negativa do eixo **Y**.

No entanto, as perspetivas das **cotas** dos dois pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspetiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportaram-se as perspetivas das **cotas** para a perspetiva do eixo **Z**. Note que o ponto **S** tem **cota negativa**, pelo que a perspetiva da cota do ponto **S** foi transportada para a parte negativa do eixo **Z**.

#### Determinação das perspetivas do ponto **R**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **R** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **R**.  $R_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **R**.  $R_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto **R**.  $R_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto **R**.

Uma vez que o afastamento do ponto **R** é negativo,  $R_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **R**) situa-se para cima da perspetiva do eixo **X**, tal como  $R_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **R**) se situa para a esquerda da perspetiva do eixo **Z**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **R**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de  $R_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de **R** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de  $R_2$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **R** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de  $R_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **R** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **R**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **R** são dois vértices espacialmente opostos.

Salienta-se que o ponto **R**, tendo afastamento negativo, se situa para trás do *plano coordenado XZ*, o que se pode comprovar na resolução gráfica apresentada.

#### Determinação das perspetivas do ponto **S**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **S** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **S**.  $S_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **S**.  $S_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto **S**.  $S_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto **S**.

Uma vez que a cota do ponto **S** é negativa,  $S_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **S**) situa-se para baixo da perspetiva do eixo **X**, tal como  $S_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **S**) se situa para baixo da perspetiva do eixo **Y**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **S**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de  $S_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de **S** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de  $S_2$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **S** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de  $S_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **S** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **S**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **S** são dois vértices espacialmente opostos.

Salienta-se que o ponto **S**, tendo cota negativa, se situa para baixo do *plano coordenado XY*, o que se pode comprovar na resolução gráfica apresentada.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido são dois pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspetivas das cotas), representaram-se a **leve**.

## 1077.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz ângulos de  $105^\circ$  com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**), o que perfaz um total de  $210^\circ$  ( $2 \times 105^\circ = 210^\circ$ ), as perspectivas destes dois eixos fazem, entre si, um ângulo de  $150^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$ ). Atendendo a que a perspectiva do eixo **X** faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo **X** é o eixo que sofre uma **redução isolada**. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as coordenadas dos três pontos não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas dos três pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como atrás se referiu, o eixo **X** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **X**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

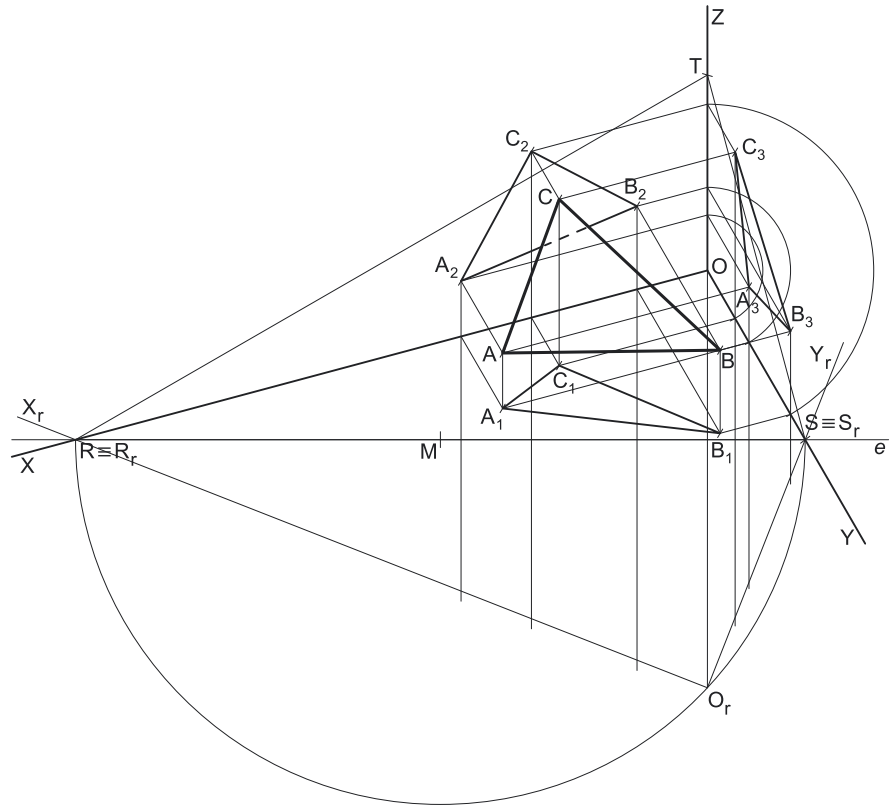
### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorre para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o *plano coordenado XY* contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o *plano coordenado XZ* (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o *plano coordenado YZ*, pois o eixo **Y** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **X**).

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MR = MS$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspetivas das coordenadas dos três pontos:

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo  $X$  apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspetiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas dos três pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como em seguida, se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos três pontos, em verdadeira grandeza (2 cm, 5 cm e 7 cm).

Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, os **afastamentos** dos três pontos (2 cm, 3 cm e 6 cm). Também sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e ainda no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos (2 cm, 3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza.

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos três pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspetiva do eixo  $X$  estão as perspetivas das **abcissas** dos três pontos e sobre a perspetiva do eixo  $Y$  estão as perspetivas dos **afastamentos** e das **cotas** dos três pontos.

No entanto, as perspetivas das **cotas** dos três pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto  $O$ , transportaram-se as perspetivas das **cotas** para a perspetiva do eixo  $Z$ .

#### Determinação das perspetivas do ponto A:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $A$ .  $A_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $A$ .  $A_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto  $A$ .  $A_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto  $A$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal conduziu-se, pela perspetiva de  $A_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$ ), pela perspetiva de  $A_2$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Y$ ) e pela perspetiva de  $A_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspetivas dos pontos B e C:

As perspetivas dos pontos  $B$  e  $C$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto  $A$ .

#### Determinação das perspetivas do triângulo:

Por fim, desenharam-se as perspetivas do triângulo. O triângulo  $[ABC]$  é a perspetiva propriamente dita do triângulo. O triângulo  $[A_1B_1C_1]$  é a perspetiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo  $[A_2B_2C_2]$  é a perspetiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo  $[A_3B_3C_3]$  é a perspetiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo – parte da projeção frontal do triângulo está oculta pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

#### Resposta à questão:

O eixo que sofre **maior redução** não é um eixo mas, sim, dois eixos – o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ . De facto, estes dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução sofrida pelo eixo  $X$  – o eixo  $X$  é o eixo que faz, com o *plano axonométrico*, o menor ângulo e, por isso, sofre a **menor redução**. Uma vez que o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  têm o mesmo coeficiente de redução (como atrás se referiu) e essa redução é **maior** do que a redução sofrida pelo eixo  $X$ , o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  são, ambos, os eixos que sofrem a **maior redução**.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva do triângulo  $[ABC]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo a invisibilidade referida). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado  $XY$ , das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspetivas das cotas.



## 1078.

a) O quadrado está contido num plano frontal (de frente) com 3 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **3 cm de afastamento** (todos os pontos de um plano frontal têm o mesmo afastamento). Os pontos **A** e **C** têm o mesmo afastamento e a mesma abscissa, pelo que é possível constatar que a diagonal **[AC]** do quadrado é vertical (paralela ao eixo **Z**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal **[BD]**), porque é perpendicular à diagonal **[AC]** e está contida num plano frontal (de frente), é necessariamente fronto-horizantal (paralela ao eixo **X**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bisseitam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal **[AC]** tem necessariamente 4 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **4 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal **[AC]** mede 8 cm (a diferença entre as cotas dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal **[BD]** mede igualmente 8 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

O ponto **B** é o vértice de maior abscissa do quadrado (como o enunciado refere expressamente), pelo que a sua abscissa é 4 cm superior à abscissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **9 cm de abscissa**. As coordenadas do ponto **B** são ( 9 ; 3 ; 4).

Por fim, o ponto **D** é o vértice de menor abscissa do quadrado (por oposição ao ponto **B**), pelo que a sua abscissa é 4 cm inferior à abscissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **1 cm de abscissa**. Assim, as coordenadas do ponto **D** são ( 1 ; 3 ; 4).

Salienta-se que o quadrado se situa no espaço do 1ª *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada, a sua perspetiva faz ângulos iguais com as perspetivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**). As perspetivas do eixo **X** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 110°, pelo que o ângulo restante é um ângulo de 250° (360° – 110° = 250°). Esse ângulo é a soma de dois ângulos iguais (os ângulos que a perspetiva do eixo **Y** faz com as perspetivas dos outros dois eixos), pelo que a perspetiva do eixo **Y** faz ângulos de 125° com as perspetivas dos outros dois eixos (250° : 2 = 125°). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrarias.

### Resolução:

As coordenadas dos quatro vértices do quadrado medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

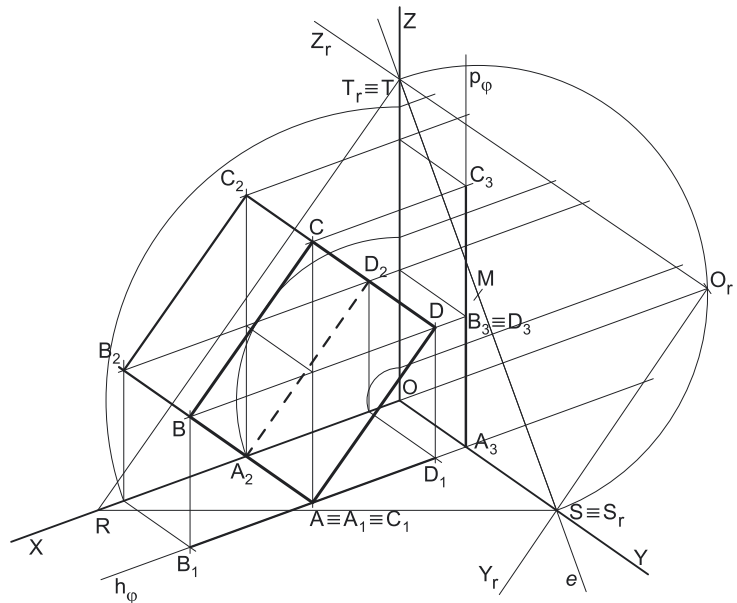
Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspetivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspetivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo **Y**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o plano coordenado **XY** contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com um **único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o plano coordenado **YZ** (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o plano coordenado **XZ**, pois o eixo **X** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **Y**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XY$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e$ ) é a reta suporte do lado  $[RS]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo  $[ROS]$  está contido no plano coordenado  $XY$  e é um triângulo retângulo em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RS]$  (o ponto  $M$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $MR = MS$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RS]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Z$ .

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_rO_rS_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

*Determinação das perspectivas das coordenadas dos quatro pontos:*

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo  $X$  apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspectiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas dos quatro pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como Em seguida, se expõe.

Nesse sentido, o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se, em verdadeira grandeza, o afastamento do plano frontal (de frente) que contém o quadrado (3 cm).

Sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos quatro pontos, em verdadeira grandeza (1 cm, 5 cm e 9 cm). Também sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e ainda no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos quatro pontos (4 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Note que o ponto  $A$  tem cota nula e que os pontos  $B$  e  $D$  têm a mesma cota.

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos quatro pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo  $X$  estão as perspectivas das **abscissas** e das **cotas** dos quatro pontos e sobre a perspectiva do eixo  $Y$  está a perspectiva do **afastamento** do plano frontal (de frente) que contém o quadrado.

No entanto, as perspectivas das **cotas** dos quatro pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto  $O$ , transportaram-se as perspectivas das **cotas** para a perspectiva do eixo  $Z$ .

*Representação do plano frontal (de frente) que contém o quadrado:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo  $Y$  que tem 3 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto B:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $B$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $B$ .  $B_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.  $B_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$ .  $B_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $B$  e situa-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $B_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $B_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $B_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $B$  são dois vértices espacialmente opostos.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Determinação das perspectivas dos pontos A, C e D:

As perspectivas dos pontos **A**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **B**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos (**A**<sub>1</sub>, **C**<sub>1</sub> e **D**<sub>1</sub>) situam-se sobre a perspectiva de **h**<sub>φ</sub> (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos (**A**<sub>3</sub>, **C**<sub>3</sub> e **D**<sub>3</sub>) situam-se sobre a perspectiva de **p**<sub>φ</sub> (o traço lateral do plano  $\varphi$ ).

O ponto **A** tem cota nula, pelo que o ponto **A** se situa no plano coordenado **XY** – assim, tem-se imediatamente **A**<sub>1</sub> ≡ **A** (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **A**<sub>1</sub> ≡ **C**<sub>1</sub>. Pelo seu lado, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem **B**<sub>3</sub> ≡ **D**<sub>3</sub>.

### Determinação das perspectivas do quadrado:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do quadrado. O quadrilátero **[ABCD]** (que, neste caso, é um retângulo) é a perspectiva propriamente dita do quadrado. O quadrilátero **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]** (que, neste caso, é outro retângulo) é a perspectiva da projeção frontal do quadrado. O segmento de reta **[B<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** é a perspectiva da projeção horizontal do quadrado (a projeção horizontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre **h**<sub>φ</sub>, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal). O segmento de reta **[A<sub>3</sub>C<sub>3</sub>]** é a perspectiva da projeção lateral do quadrado (a projeção lateral do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre **p**<sub>φ</sub>, pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral). Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio quadrado – parte da projeção frontal do quadrado está oculta pelo próprio quadrado (que é uma **figura opaca**).

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O **triângulo fundamental** representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\varphi$  (o plano que contém o quadrado), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. A perspectiva do quadrado **[ABCD]** representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado **XY**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das cotas.

## 1079.

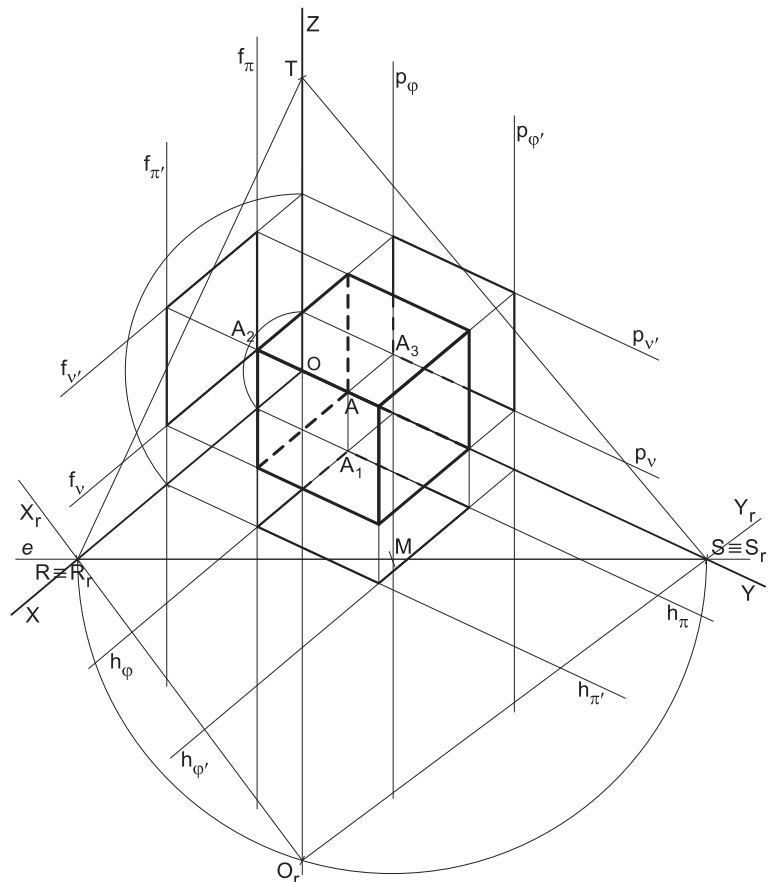
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de 115° com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de 130° com a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de 115°, que é o ângulo restante (115° + 130° + 115° = 360°). Atendendo a que a perspectiva do eixo **Y** faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos (ângulos de 115°), é possível concluir que o eixo **Y** é o eixo que sofre uma **redução isolada**. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o **triângulo fundamental** – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

### Resolução:

Tendo em conta que o cubo (que tem 4 cm de aresta) tem uma face contida num plano frontal (de frente) com 3 cm de afastamento, o sólido tem outra face frontal (de frente) que tem necessariamente 7 cm de afastamento (3 + 4 = 7). Por outro lado, atendendo a que o cubo tem uma face contida num plano de perfil com 2 cm de abscissa, o sólido tem outra face de perfil que tem necessariamente 6 cm de abscissa (2 + 4 = 6). Por fim, se o cubo tem faces frontais e faces de perfil, o cubo tem, também, faces horizontais. Assim, a face inferior do cubo está contida num plano horizontal (de nível) com 2 cm de cota (a cota do ponto **A**), pelo que a face superior tem necessariamente 6 cm de cota (2 + 4 = 6).

As coordenadas das faces do cubo medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos *coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o plano *axonométrico*), pelo que nenhuma daquelas coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano *axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspetivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspetivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo **Y**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o *plano coordenado XY* contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o *plano coordenado YZ* (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o *plano coordenado XZ*, pois o eixo **X** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **Y**).

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_r O_r S_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

#### Determinação das perspetivas das coordenadas das faces do cubo:

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **Y** e o eixo **Z** apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo **X** apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspetiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas das faces do cubo (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como Em seguida, se expõe.

Nesse sentido, o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, os **afastamentos** das duas faces frontais (de frente) do cubo (3 cm e 7 cm).

Sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** das duas faces de perfil do cubo, em verdadeira grandeza (2 cm e 6 cm). Tendo em conta que os valores das **cotas** das faces horizontais (de nível) do cubo são os mesmos das **abscissas** das faces de perfil (2 cm e 6 cm), já temos, sobre o eixo  $X_r$ , as **cotas** das faces horizontais (de nível) do cubo.

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas das faces do cubo, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspetiva do eixo **X** estão as perspetivas das **abscissas** e das **cotas** das faces de perfil e das faces horizontais (de nível) do cubo e sobre a perspetiva do eixo **Y** estão as perspetivas dos **afastamentos** das faces frontais (de frente) do cubo.

No entanto, as perspetivas das **cotas** das faces horizontais (de nível) do cubo estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspetiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportaram-se as perspetivas das **cotas** para a perspetiva do eixo **Z**.

#### Representação do plano frontal (de frente) que contém a face de menor afastamento do cubo:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspetiva do eixo **Y**, um ponto que é a perspetiva do ponto do eixo **Y** que tem 3 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Z**.

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Representação do plano frontal (de frente) que contém a face de maior afastamento do cubo:

De forma semelhante à atrás exposta, pelo ponto da perspectiva do eixo **Y** que é a perspectiva do ponto do eixo **Y** que tem 7 cm de afastamento, conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi'$  –  $h_{\varphi'}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) e  $p_{\varphi'}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi'$ ). O plano  $\varphi'$  é o plano frontal (de frente) que contém a face de maior afastamento do cubo.

Note que  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi'$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_{\varphi'}$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi'$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**.

O plano  $\varphi'$  é outro plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral ( $p_{\varphi'}$ ).

## Representação do plano de perfil que contém a face mais à direita do cubo:

A determinação gráfica dos coeficientes de redução permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **X**, um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo **X** que tem 2 cm de abcissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém o losango, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de abcissa, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_{\pi}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_{\pi}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que  $h_{\pi}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**. Pelo seu lado,  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**.

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal ( $h_{\pi}$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_{\pi}$ ).

## Representação do plano de perfil que contém a face mais à esquerda do cubo:

De forma semelhante à atrás exposta, pelo ponto da perspectiva do eixo **X** que é a perspectiva do ponto do eixo **X** que tem 6 cm de abcissa, conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi'$  –  $h_{\pi'}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi'$ ) e  $f_{\pi'}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi'$ ). O plano  $\pi'$  é o plano de perfil que contém a face mais à esquerda do cubo.

Note que  $h_{\pi'}$  (o traço horizontal do plano  $\pi'$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi'$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**. Pelo seu lado,  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi'$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**.

O plano  $\pi'$  é outro plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal ( $h_{\pi'}$ ). Por outro lado, o plano  $\pi'$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_{\pi'}$ ).

## Representação do plano horizontal (de nível) que contém a face inferior do cubo:

A determinação gráfica dos coeficientes de redução permitiu-nos, ainda, determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo **Z** que tem 2 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a face inferior do cubo, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de cota, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

## Representação do plano horizontal (de nível) que contém a face superior do cubo:

De forma semelhante à atrás exposta, pelo ponto da perspectiva do eixo **Z** que é a perspectiva do ponto do eixo **Z** que tem 6 cm de cota, conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v'$  –  $f_{v'}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v'$ ) e  $p_{v'}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v'$ ). O plano  $v'$  é o plano horizontal (de nível) que contém a face superior do cubo.

Note que  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v'$  com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_{v'}$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v'$ ) é uma reta de topo do plano  $v'$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano  $v'$  é outro plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). Por outro lado, o plano  $v'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_{v'}$ ).

#### Determinação das perspetivas do ponto A:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro (**A**<sub>1</sub>, **A**<sub>2</sub> e **A**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**.

**A**<sub>1</sub> é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A** e é o ponto de concorrência da perspetiva de  $h_{\pi}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) com a perspetiva de  $h_{\phi}$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) – salienta-se que o ponto **A** pertence simultaneamente ao plano  $\pi$  e ao plano  $\phi$ , que são dois planos projetantes horizontais.

**A**<sub>2</sub> é a perspetiva da projeção frontal do ponto **A** e é o ponto de concorrência da perspetiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) com a perspetiva de  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) – salienta-se que o ponto **A** pertence simultaneamente ao plano  $v$  e ao plano  $\pi$ , que são dois planos projetantes frontais.

**A**<sub>3</sub> é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A** e é o ponto de concorrência da perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) com a perspetiva de  $p_{\pi}$  (o traço lateral do plano  $\pi$ ) – salienta-se que o ponto **A** pertence simultaneamente ao plano  $v$  e ao plano  $\pi$ , que são dois planos projetantes laterais.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **A**<sub>1</sub>, a perspetiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **A**<sub>2</sub> conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **A**<sub>3</sub> conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspetivas dos restantes vértices do cubo:

As perspetivas de cada um dos restantes vértices do cubo (que não se identificaram) determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **A**. Salienta-se que a omissão das notações referentes aos restantes vértices do sólido visou, sobretudo, evitar o excesso de notações que, neste caso, sobrecarregariam em muito a resolução gráfica apresentada e nada acrescentariam à mesma.

#### Determinação das perspetivas do cubo:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do cubo**, começando pelo seu contorno aparente. Existem dois vértices do cubo que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – o vértice **A** e o vértice da face superior que é espacialmente oposto a **A**. Esse vértice, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem. Já o vértice **A**, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem. No entanto, salienta-se que a aresta que converge no ponto **A** e que é paralela ao eixo **Y** está parcialmente oculta por uma aresta do sólido, que é visível.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas da projeção horizontal, da projeção frontal e da projeção lateral do cubo.

A **perspetiva da projeção horizontal do cubo** é o paralelogramo resultante da projeção horizontal da face superior do cubo (e está limitada pelas perspetivas dos traços horizontais dos planos  $\pi$ ,  $\pi'$ ,  $\phi$  e  $\phi'$ ). Todas as arestas invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção horizontal do cubo é invisível (por estar oculta pelo próprio cubo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal do cubo** é o paralelogramo resultante da projeção frontal da face de maior afastamento do cubo (e está limitada pelas perspetivas dos traços frontais dos planos  $\pi$ ,  $\pi'$ ,  $v$  e  $v'$ ). Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção frontal do cubo é invisível (por estar oculta pelo próprio cubo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do cubo** é o paralelogramo resultante da projeção lateral da face mais à esquerda do cubo (e está limitada pelas perspetivas dos traços laterais dos planos  $\pi$ ,  $\pi'$ ,  $\phi$  e  $\phi'$ ). Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção lateral do cubo é invisível (por estar oculta pelo próprio cubo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. Os planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as faces horizontais do cubo), os planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos que contêm as faces de perfil do cubo) e os planos  $\phi$  e  $\phi'$  (os planos que contêm as faces frontais do cubo), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos respetivos traços se representaram a **leve**. A perspetiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) do cubo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspetivas das cotas), representaram-se a **leve**.



## 1080.

a) Tendo em conta que os pontos **A** e **C** têm cota nula, a base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida no *plano coordenado XY*, pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **cota nula** (todos os pontos do plano coordenado **XY** têm cota nula). Os pontos **A** e **C** têm o mesmo afastamento e a mesma cota, pelo que é possível constatar que a diagonal **[AC]** do quadrado **[ABCD]** é fronto-horizontal (paralela ao eixo **X**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal **[BD]**), porque é perpendicular à diagonal **[AC]** e está contida no plano coordenado **XY**, é necessariamente de topo (paralela ao eixo **Y**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado **[ABCD]** bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal **[AC]** tem necessariamente 5 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **C**) e 4 cm de abcissa (a média aritmética das abscissas dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **4 cm de abcissa**. Por outro lado, a diagonal **[AC]** mede 6 cm (a diferença entre as abscissas dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal **[BD]** mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

Atendendo a que o ponto **D** é o vértice de maior afastamento do quadrado (como o enunciado refere expressamente), o seu afastamento é 3 cm superior ao afastamento dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **8 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto **D** são ( 4; 8; 0).

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto **B** é o vértice de menor afastamento do quadrado (por oposição ao vértice **D**), o seu afastamento é 3 cm inferior ao afastamento dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **2 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto **B** são ( 4; 2; 0).

Por fim, a altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as bases, o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre os planos das duas bases. Uma vez que o prisma tem 7 cm de altura e a sua base inferior tem cota nula (como atrás se referiu), o plano que contém a base superior tem **7 cm de cota** ( $0 + 7 = 7$ ). Nesse sentido, todos os vértices da base **[A'B'C'D']** (a base superior do prisma) têm **7 cm de cota**.

Uma vez que se trata de um **prisma regular** (as suas arestas laterais são necessariamente ortogonais aos planos das bases), as arestas laterais do sólido estão contidas em retas verticais (projetantes horizontais). Assim, todos os vértices da base **[A'B'C'D']** têm abscissas e afastamentos iguais aos dos vértices correspondentes da base inferior (a base **[ABCD]**). Nesse sentido, as coordenadas dos restantes três vértices da base **[A'B'C'D']** são: **A'** ( 1; 5; 7), **B'** ( 4; 2; 7), **C'** ( 7; 5; 7) e **D'** ( 4; 8; 7).

Salienta-se que o prisma se situa no espaço do  $1^a$  *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

### b) Dados:

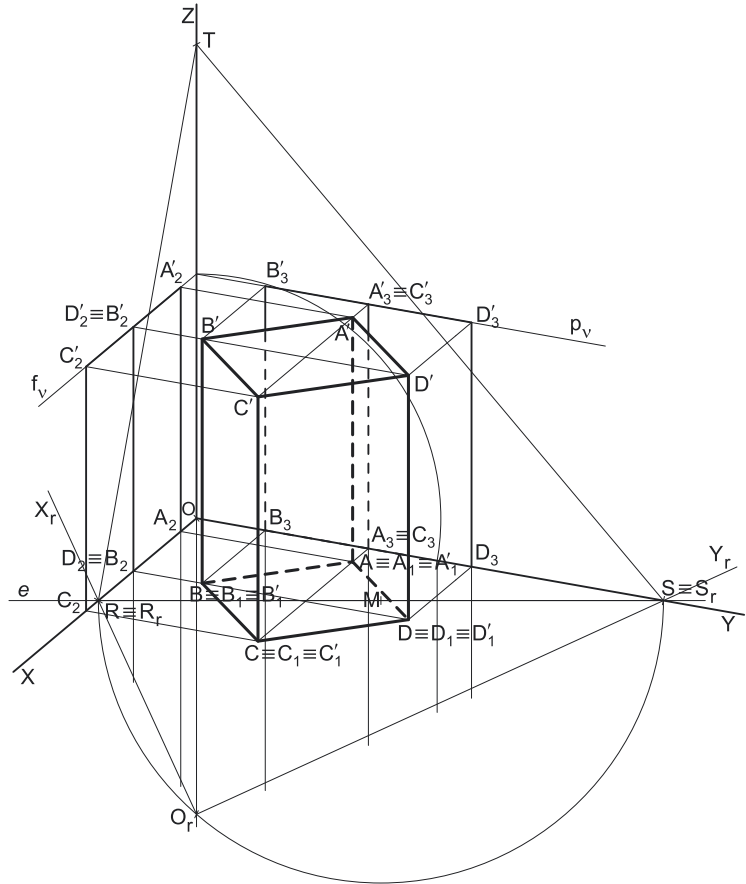
Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados*. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspetiva do eixo **X** faz ângulos de  $130^\circ$  com as perspetivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**), o que perfaz um total de  $260^\circ$  ( $2 \times 130^\circ = 260^\circ$ ), as perspetivas destes dois eixos fazem, entre si, um ângulo de  $100^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$ ). Atendendo a que a perspetiva do eixo **X** faz ângulos iguais com as perspetivas dos outros dois eixos, o eixo **X** é o eixo que sofre uma **redução isolada**. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas dos cinco vértices do prisma medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspetivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo **X** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspetivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo **X**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

*Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:*

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o *plano coordenado XY* contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o *plano coordenado XZ* (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o *plano coordenado YZ*, pois o eixo **Y** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **X**).

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MR = MS$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_rO_rS_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

*Determinação das perspectivas das coordenadas dos oito pontos:*

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **Y** e o eixo **Z** apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo **X** apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspectiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas dos oito pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como Em seguida, se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos oito pontos, em verdadeira grandeza (1 cm, 4 cm e 7 cm).

Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se, em verdadeira grandeza, os **afastamentos** dos oito pontos, em verdadeira grandeza (2 cm, 5 cm e 8 cm). Também sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e ainda no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** da base superior do prisma (7 cm), em verdadeira grandeza.

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos três pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo **X** estão as perspectivas das **abcissas** dos oito pontos e sobre a perspectiva do eixo **Y** estão as perspectivas dos **afastamentos** dos oito pontos e, ainda, a perspectiva da **cota** do plano da base superior do sólido.

No entanto, a perspectiva da **cota** do plano da base superior do prisma está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportou-se a perspectiva da **cota** para a perspectiva do eixo **Z**.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base [A'B'C'D'] do prisma:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo **Z** que tem 7 cm de cota. O plano horizontal (e nível) **v** que contém a base **[A'B'C'D']**, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 7 cm de cota, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano **v** –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano **v**) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral ou de perfil do plano **v**).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano **v**) é uma reta fronto-horizontal do plano **v** com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral ou de perfil do plano **v**) é uma reta de topo do plano **v**, com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

O plano **v** é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano **v** é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto A:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A<sub>1</sub>**, **A<sub>2</sub>** e **A<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**. **A<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A** – atendendo a que o ponto **A** tem cota nula, **A<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **X**. **A<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A** – mais uma vez atendendo a que o ponto **A** se situa no *plano coordenado XY* (pois tem cota nula), pelo que **A<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**) se situa sobre a perspectiva do eixo **Y**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **A** tem cota nula, o ponto **A** situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente  $A_1 \equiv A$  (sendo **A** a perspetiva propriamente dita do ponto **A**).

*Determinação das perspetivas dos pontos B, C e D:*

As perspetivas dos pontos **B**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **A**. De facto, atendendo a que os três pontos têm cota nula, as perspetivas das suas projeções frontais ( $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ ) situam-se necessariamente sobre a perspetiva do eixo **X**. De forma semelhante, e mais uma vez atendendo a que os três pontos têm cota nula, as perspetivas das suas projeções laterais ( $B_3$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se necessariamente sobre a perspetiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que os três pontos têm cota nula, os três pontos situam-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente  $B_1 \equiv B$  (sendo **B** a perspetiva propriamente dita do ponto **B**),  $C_1 \equiv C$  (sendo **C** a perspetiva propriamente dita do ponto **C**) e  $D_1 \equiv D$  (sendo **D** a perspetiva propriamente dita do ponto **D**).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta fronto-horizantal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $A_3 \equiv C_3$ . De forma idêntica, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $B_2 \equiv D_2$ .

*Determinação das perspetivas do ponto A':*

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A'** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A'_1$ ,  $A'_2$  e  $A'_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A'**.  $A'_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A'**.  $A'_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto **A'** e situa-se sobre a perspetiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.  $A'_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A'** e situa-se sobre a perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **A'**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de  $A'_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de **A'** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de  $A'_2$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **A'** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de  $A'_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **A'** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **A'**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A'** são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspetivas dos pontos B', C' e D':*

As perspetivas dos pontos **B'**, **C'** e **D'** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **A'**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, as perspetivas das projeções frontais dos três pontos ( $B'_2$ ,  $C'_2$  e  $D'_{12}$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que também é um plano projetante lateral, as perspetivas das projeções laterais dos três pontos ( $B'_3$ ,  $C'_3$  e  $D'_3$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Os pontos **A'** e **C'** situam-se na mesma reta fronto-horizantal (que é uma reta projetante lateral), pelo que se tem, imediatamente,  $A'_3 \equiv C'_3$ . De forma idêntica, os pontos **B'** e **D'**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $B'_2 \equiv D'_2$ .

Os pontos **A** e **A'** situam-se na mesma reta vertical (que é uma reta projetante horizontal), pelo que se tem, imediatamente,  $A_1 \equiv A'_1$ . De forma semelhante, também os pontos **B** e **B'** se situam na mesma reta projetante horizontal, tal como os pontos **C** e **C'** e, ainda, os pontos **D** e **D'**, pelo que se tem, imediatamente,  $B_1 \equiv B'_1$ ,  $C_1 \equiv C'_1$  e  $D_1 \equiv D'_1$ .

*Determinação das perspetivas do prisma:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[BCDD'A'B']$ . Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – os vértices **C'** e **A**. O vértice **C'**, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$  e  $[C'D']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e a aresta lateral  $[CC']$ . O vértice **A**, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base  $[ABCD]$ ) e a aresta lateral  $[AA']$ .

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas da projeção horizontal, da projeção frontal e da projeção lateral do prisma. Note que a **projeção horizontal** do prisma se reduz a um quadrado (o quadrado  $[A'_1B'_1C'_1D'_1]$ ) que, estando coincidente com a base  $[ABCD]$ , está oculto por essa base e, por isso mesmo, não se distingue.

A **perspetiva da projeção frontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[A_2C_2C'_2A'_2]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção frontal do prisma que esteja oculta pelo próprio prisma (que é opaco), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[B_3C_3C'_3D'_3]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção lateral do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

## Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a base superior do prisma), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (frontal e horizontal) se representaram a **leve**. A perspetiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (frontal e lateral) do prisma, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado **XY**, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspetiva das cotas.

## 1081.

a) A base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos  $A$  e  $C$ ), pelo que os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **2 cm de afastamento** (todos os pontos de um plano frontal têm o mesmo afastamento). Os pontos  $A$  e  $C$  têm o mesmo afastamento e a mesma abcissa, pelo que é possível constatar que a diagonal  $[AC]$  do quadrado é vertical (paralela ao eixo  $Z$ ). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal  $[BD]$ ), porque é perpendicular à diagonal  $[AC]$  e está contida num plano frontal (de frente), é necessariamente fronto-horizontal (paralela ao eixo  $X$ ). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bisetam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal  $[AC]$  tem necessariamente 6 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos  $A$  e  $C$ ). Nesse sentido, os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **6 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal  $[AC]$  mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos  $A$  e  $C$ ), pelo que a diagonal  $[BD]$  mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

O ponto  $B$  é o vértice de maior abcissa do quadrado (como o enunciado refere expressamente), pelo que a sua abcissa é 3 cm superior à abcissa dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto  $B$  tem **8 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto  $B$  são (8; 2; 6).

Pelo seu lado, o ponto  $D$  é o vértice de menor abcissa do quadrado (por oposição ao ponto  $B$ ), pelo que a sua abcissa é 3 cm inferior à abcissa dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto  $D$  tem **2 cm de abcissa**. Assim, as coordenadas do ponto  $D$  são (2; 2; 6).

Por fim, apesar de não serem pedidas as coordenadas do ponto  $V$  (o vértice da pirâmide), expõem-se, em seguida, todos os raciocínios que nos permitiram determiná-las. A altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e a sua base tem 2 cm de afastamento, o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) tem **9 cm de afastamento** ( $2 + 7 = 9$ ). A aresta lateral  $[CV]$  é de perfil, pelo que os pontos  $C$  e  $V$  têm a mesma abcissa – o ponto  $V$  tem, assim, **5 cm de abcissa**. Finalmente, o ponto  $V$  é o traço horizontal da reta suporte da aresta  $[CV]$ , pelo que o ponto  $V$  tem cota nula. Nesse sentido, as coordenadas do ponto  $V$  são (5; 9; 0).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

## b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. A perspectiva do eixo  $X$  faz um ângulo de  $140^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Z$ , pelo que o ângulo restante é um ângulo de  $220^\circ$  ( $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ ). Note que não pode haver mais nenhum ângulo de  $140^\circ$ , pois, caso houvesse um outro ângulo de  $140^\circ$ , o terceiro ângulo seria um ângulo de  $80^\circ$  ( $220^\circ - 140^\circ = 80^\circ$ ), que é um **ângulo agudo**. Ora, os ângulos que as perspectivas dos eixos fazem, entre si são necessariamente **ângulos obtusos**.

Assim, conclui-se que não pode haver dois ângulos de  $140^\circ$ . No entanto, tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois dos ângulos que as perspectivas dos eixos fazem entre si são iguais. Assim, a soma dos dois ângulos iguais é  $220^\circ$  (o ângulo restante), pelo que a perspectiva do eixo  $Y$  faz ângulos de  $110^\circ$  ( $220^\circ : 2 = 110^\circ$ ) com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo  $X$  e o eixo  $Z$ ). Dessa forma, o eixo  $Y$  é o eixo que sofre a **redução isolada**.

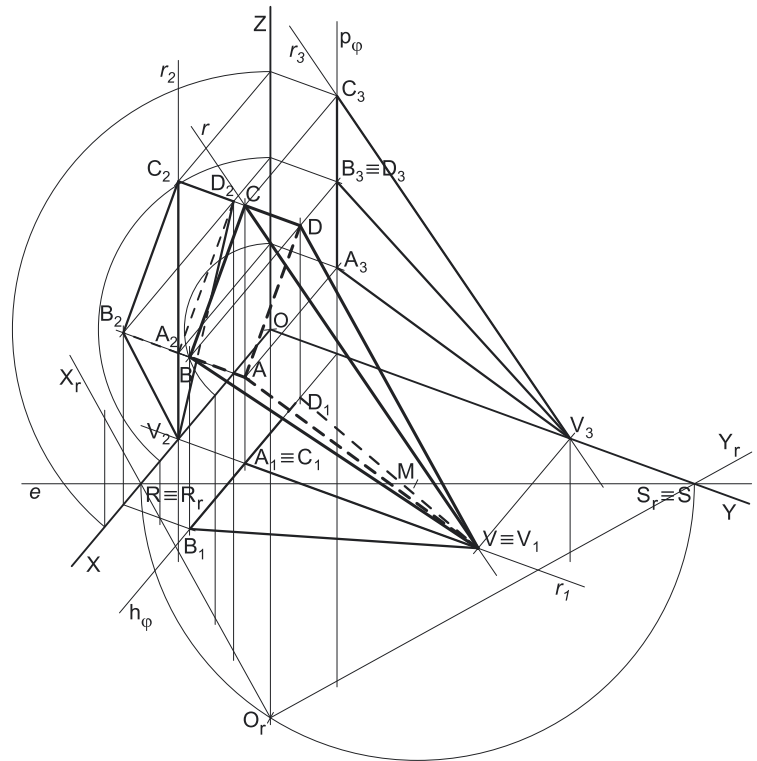
Note que, nesta situação, optou-se por não se desenhar o *triângulo fundamental*, por tal, na prática, não ser necessário (como adiante se exporá).

## Resolução:

As coordenadas dos cinco vértices da pirâmide medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo  $X$ , os afastamentos medem-se no eixo  $Y$  e as cotas no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspetivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo  $Y$  é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo  $X$  e o eixo  $Z$ ) sofrem a mesma redução (as suas perspetivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo  $Y$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o *plano coordenado XY* contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o *plano coordenado YZ* (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o *plano coordenado XZ*, pois o eixo **X** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **Y**).

Assim, Em primeiro lugar, desenhou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental* – note que não se desenhou o *triângulo fundamental* na sua totalidade, por tal não ser necessário. De facto, para a resolução do exercício, basta a representação do lado do *triângulo fundamental* que é a charneira do rebatimento a efetuar, como a resolução gráfica ilustra.

Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MR = MS$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ .

### Determinação das perspetivas das coordenadas dos cinco pontos:

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **Y** e o eixo **Z** apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo **X** apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspetiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas dos cinco pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como Em seguida, se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se, em verdadeira grandeza, o **afastamento** do plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide (2 cm), bem como o afastamento do ponto **V** (9 cm).

Sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos cinco pontos, em verdadeira grandeza (2 cm, 5 cm e 8 cm). Também sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e ainda no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos cinco pontos (3 cm, 6 cm e 9 cm), em verdadeira grandeza.

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos cinco pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspetiva do eixo **X** estão as perspetivas das **abscissas** e das **cotas** dos cinco pontos e sobre a perspetiva do eixo **Y** estão as perspetivas dos **afastamentos** do plano frontal (de frente) que contém a base e do ponto **V**.

No entanto, as perspetivas das **cotas** dos cinco pontos estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspetiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportaram-se as perspetivas das **cotas** para a perspetiva do eixo **Z**.

### Representação do plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspetiva do eixo **Y**, um ponto que é a perspetiva do ponto do eixo **Y** que tem 2 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\phi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\phi$  –  $h_\phi$  (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ) e  $p_\phi$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $\phi$ ).

Note que  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\phi$  com cota nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_\phi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\phi$ ) é uma reta vertical do plano  $\phi$ , com abcissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Z**.

O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ). Por outro lado, o plano  $\phi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_\phi$ ).

### Determinação das perspetivas do ponto A:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro (**A<sub>1</sub>**, **A<sub>2</sub>** e **A<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A** e situa-se sobre a perspetiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. **A<sub>2</sub>** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**. **A<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A** e situa-se sobre a perspetiva de  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas dos pontos **B**, **C** e **D**:

As perspectivas dos pontos **B**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **A**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos (**B**<sub>1</sub>, **C**<sub>1</sub> e **D**<sub>1</sub>) situam-se sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos (**B**<sub>3</sub>, **C**<sub>3</sub> e **D**<sub>3</sub>) situam-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **A**<sub>1</sub>  $\equiv$  **C**<sub>1</sub>. Pelo seu lado, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem **B**<sub>3</sub>  $\equiv$  **D**<sub>3</sub>.

#### Determinação das perspectivas do ponto **V**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **V** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**V**<sub>1</sub>, **V**<sub>2</sub> e **V**<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **V**. **V**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V**. **V**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto **V** – uma vez que o ponto **V** tem cota nula, o ponto **V** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que **V**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **V**) se situa sobre a perspectiva do eixo **X**. **V**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **V** – mais uma vez atendendo a que o ponto **V** se situa no plano coordenado **XY** (pois tem cota nula), **V**<sub>3</sub> (a perspectiva da projeção lateral do ponto **V**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **V** tem cota nula, o ponto **V** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que se tem imediatamente **V**<sub>1</sub>  $\equiv$  **V** (sendo **V** a perspectiva propriamente dita do ponto **V**).

#### Determinação das perspectivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a perspectiva da pirâmide, começando pelo seu contorno aparente – o contorno aparente da perspectiva da pirâmide é a linha quebrada fechada [**BCDV**]. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **A**. Este é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas [**AB**] e [**AD**], da base, e a aresta lateral [**AV**]). Por outro lado, a aresta lateral [**CV**] é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais [**BCV**] e [**CDV**].

Note que, apesar de não ser necessário, se identificaram as perspectivas da reta **r**, a reta de perfil que contém a aresta lateral [**CV**] da pirâmide. Note que a reta **r** está definida por dois pontos – o ponto **C** e o ponto **V**. Assim, **r** é a perspectiva propriamente dita da reta **r**, **r**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal da reta **r** (e está definida por **C**<sub>1</sub> e por **V**<sub>1</sub>), **r**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal da reta **r** (e está definida por **C**<sub>2</sub> e por **V**<sub>2</sub>) e, por fim, **r**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral da reta **r** (e está definida por **C**<sub>3</sub> e por **V**<sub>3</sub>).

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A perspectiva da projeção horizontal da pirâmide é limitada pelo triângulo [**B**<sub>1</sub>**D**<sub>1</sub>**V**<sub>1</sub>]. A aresta lateral [**AV**] é invisível, em projeção horizontal, mas está oculta pela aresta [**CV**], que é visível, em projeção horizontal. Assim, não existe qualquer invisibilidade por projeção, em projeção horizontal. No entanto, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma invisibilidade por ocultação.

A perspectiva da projeção frontal da pirâmide é limitada pelo quadrilátero [**B**<sub>2</sub>**C**<sub>2</sub>**D**<sub>2</sub>**V**<sub>2</sub>]. As arestas [**AB**] e [**AD**], da base, são invisíveis, em projeção frontal, consistindo, assim, na única invisibilidade por projeção a assinalar, em projeção frontal. Por outro lado, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma invisibilidade por ocultação.

A perspectiva da projeção lateral da pirâmide é limitada pelo triângulo [**A**<sub>3</sub>**C**<sub>3</sub>**V**<sub>3</sub>]. A aresta lateral [**DV**] é invisível, em projeção lateral, mas está oculta pela aresta [**BV**], que é visível, em projeção lateral. Assim, não existe qualquer invisibilidade por projeção, em projeção lateral. Por outro lado, não existe qualquer parte da projeção lateral da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide, que é opaca, pelo que também não existe qualquer invisibilidade por ocultação (em projeção lateral).

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a médio, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva da pirâmide representou-se a forte (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\varphi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a leve. As perspectivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a médio-forte (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a leve – caso da charneira do rebatimento (reta **e**), do rebatimento do plano coordenado **XY**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das cotas.



## 1082.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo  $Z$  faz um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo  $X$  e um ângulo de  $105^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Y$ , as perspectivas destes dois eixos (o eixo  $X$  e o eixo  $Y$ ) fazem, entre si, um ângulo de  $135^\circ$  ( $120^\circ + 105^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas do ponto  $A$  medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo  $X$ , o **afastamento** mede-se no eixo  $Y$  e a **cota** no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto  $A$  se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto  $A$  sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação do eixo $X$ e do eixo $Y$ :

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano  $XY$ , pois o plano coordenado  $XY$  contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se poderia ter optado por rebater um outro plano coordenado qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro plano coordenado, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois planos coordenados.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XY$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e$ ) é a reta suporte do lado  $[RS]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

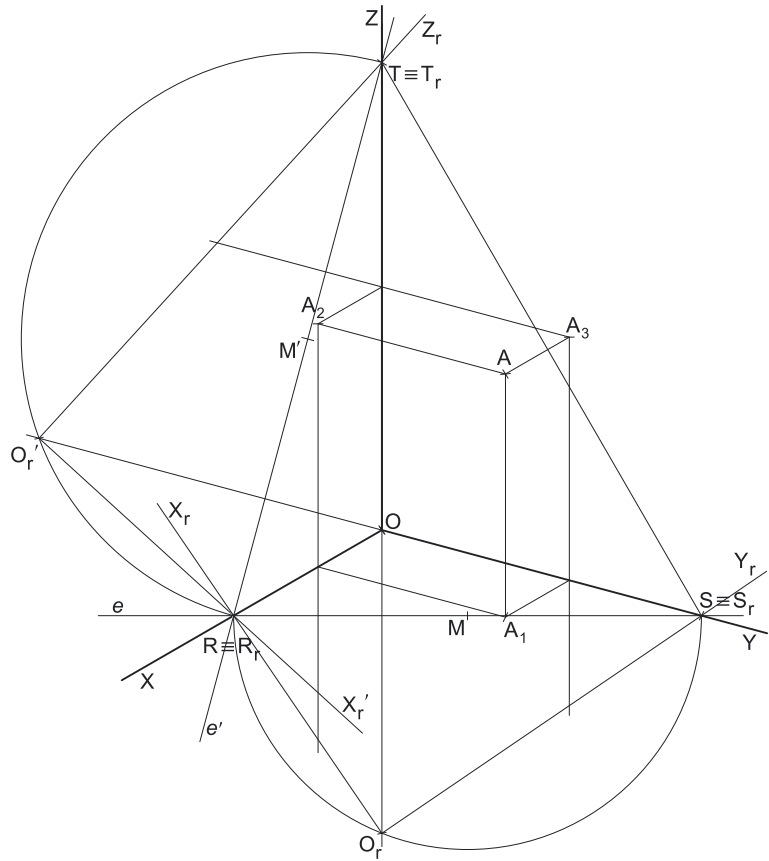
O triângulo  $[ROS]$  está contido no plano coordenado  $XY$  e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RS]$  (o ponto  $M$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RS]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Z$ .

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$  (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$  (que é outro ponto fixo). O triângulo  $[R_r O_r S_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

### Determinação das perspetivas da abscissa e do afastamento do ponto $A$ :

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir a **abscissa** e o **afastamento** do ponto  $A$  (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respetivamente), como Em seguida, se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $A$ , em verdadeira grandeza (3 cm). Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto  $A$ , em verdadeira grandeza (6 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se aquelas coordenadas do ponto  $A$ , já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo  $X$  está a perspectiva da **abscissa** do ponto  $A$  e sobre a perspectiva do eixo  $Y$  está a perspectiva do **afastamento** do ponto  $A$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Z:

Tendo em conta que o eixo **Z** apresenta um coeficiente de deformação diferente dos coeficientes de deformação dos outros dois eixos, é necessário determinar o coeficiente de deformação do eixo **Z**, o que se processou rebatendo o eixo **Z**, pelo **rebatimento dos planos coordenados**. Nesse sentido, optou-se por rebater o plano **XZ** (que contém o eixo **Z**), mas poder-se-ia ter rebatido o plano **YZ**, pois é outro *plano coordenado* que também contém o eixo **Z**.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado [RT] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo [ROT] está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RT] (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'R} = \overline{M'T}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RT] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto **O**, rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do *plano coordenado XZ*). Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Y**.

O eixo  $X_r'$  fica definido por  $O_r'$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo (o eixo  $X_r'$  é o eixo **X**, rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do *plano coordenado XZ*). O eixo  $Z_r'$  fica definido por  $O_r'$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo [ $R_r O_r' T_r$ ] é retângulo em  $O_r'$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **X** – o eixo **X** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

#### Determinação da perspectiva da cota do ponto A:

O eixo  $X_r'$  (o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XZ*) e o eixo  $Z_r'$  (o eixo **Z** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir a **abscissa** e a **cota** do ponto **A** (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respetivamente), como Em seguida, se expõe.

No entanto, como já se havia determinado previamente a perspectiva da **abscissa** do ponto **A** (através do rebatimento do *plano coordenado XY*), a utilidade do eixo  $X_r'$  para a sequência do exercício é nula.

Assim, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **A**, em verdadeira grandeza (7 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se a **cota** do ponto **A**, já reduzida (afetada pelo coeficiente de deformação), sobre a perspectiva do eixo **Z**.

#### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A<sub>1</sub>**, **A<sub>2</sub>** e **A<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**. **A<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**. **A<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Resposta à questão:

O eixo que sofre **maior redução** é o eixo **X**. O eixo que sofre a **menor redução** é o eixo **Z**.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e **XZ** e das perpendiculares às charneiras), representaram-se a **leve**.

## 1083.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo  $Z$  faz um ângulo de  $130^\circ$  com a perspectiva do eixo  $X$  e um ângulo de  $110^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Y$ , as perspectivas destes dois eixos (o eixo  $X$  e o eixo  $Y$ ) fazem, entre si, um ângulo de  $120^\circ$  ( $130^\circ + 110^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas do ponto  $M$  medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo  $X$ , o **afastamento** mede-se no eixo  $Y$  e a **cota** no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto  $M$  se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto  $M$  sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação do eixo $X$ e do eixo $Y$ :

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano  $XY$ , pois o plano coordenado  $XY$  contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se poderia ter optado por rebater um outro *plano coordenado* qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro *plano coordenado*, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois *planos coordenados*.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e$ ) é a reta suporte do lado  $[RS]$  do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo  $[ROS]$  está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RS]$  (o ponto  $N$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $N$  e com raio  $NR = NS$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RS]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Z$ .

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$  (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$  (que é outro ponto fixo). O triângulo  $[R_r O_r S_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

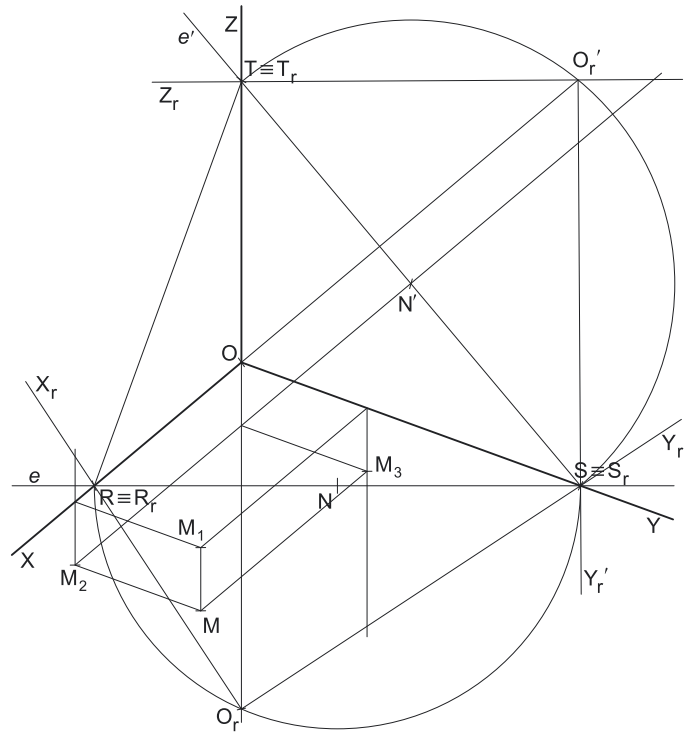
#### Determinação das perspetivas da abscissa e do afastamento do ponto $M$ :

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir a **abscissa** e o **afastamento** do ponto  $M$  (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respetivamente), como Em seguida, se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $M$ , em verdadeira grandeza (8 cm). Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto  $M$ , em verdadeira grandeza (4 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se aquelas coordenadas do ponto  $M$ , já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo  $X$  está a perspectiva da **abscissa** do ponto  $M$  e sobre a perspectiva do eixo  $Y$  está a perspectiva do **afastamento** do ponto  $M$ .

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo $Z$ :

Tendo em conta que o eixo  $Z$  apresenta um coeficiente de deformação diferente dos coeficientes de deformação dos outros dois eixos, é necessário determinar o coeficiente de deformação do eixo  $Z$ , o que se processou rebatendo o eixo  $Z$ , pelo **rebatimento dos planos coordenados**. Nesse sentido, optou-se por rebater o plano  $YZ$  (que contém o eixo  $Z$ ), mas poder-se-ia ter rebatido o plano  $XZ$ , pois é outro *plano coordenado* que também contém o eixo  $Z$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado [ST] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo [SOT] está contido no *plano coordenado YZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **YZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [ST] (o ponto **N'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **N'** e com raio  $N'S = N'T$ , desenhou-se a semicircunferência de que [ST] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto **O**, rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do *plano coordenado YZ*). Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**.

O eixo  $Y_r'$  fica definido por  $O_r'$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo (o eixo  $Y_r'$  é o eixo **Y**, rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do *plano coordenado YZ*). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo [S $_r$ O $_r'$ T $_r$ ] é retângulo em  $O_r'$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **Y** – o eixo **Y** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

#### Determinação da perspectiva da cota do ponto **M**:

O eixo  $Y_r'$  (o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado YZ*) e o eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir o **afastamento** e a **cota** do ponto **M** (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respetivamente), como Em seguida, se expõe.

No entanto, como já se havia determinado previamente a perspectiva do **afastamento** do ponto **M** (através do rebatimento do *plano coordenado XY*), a utilidade do eixo  $Y_r'$  para a sequência do exercício é nula.

Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido negativo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (2 cm) – note que o ponto **M** tem **cota negativa**. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se a **cota** do ponto **M**, já reduzida (afetada pelo coeficiente de deformação), sobre a perspectiva do eixo **Z**. Note que a **cota** do ponto **M** está na parte negativa do eixo **Z**.

#### Determinação das perspectivas do ponto **M**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**M<sub>1</sub>**, **M<sub>2</sub>** e **M<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **M**. **M<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M**. **M<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **M**. **M<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **M**.

Uma vez que a cota do ponto **M** é negativa, **M<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **M**) situa-se para baixo da perspectiva do eixo **X**, tal como **M<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **M**) se situa para baixo da perspectiva do eixo **Y**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **M**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **M<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **M<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **M<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **M**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **M** são dois vértices espacialmente opostos.

Salienta-se que o ponto **M**, tendo cota negativa, se situa para baixo do *plano coordenado XY*, o que se pode comprovar na resolução gráfica apresentada.

#### Resposta à questão:

O eixo que sofre **maior redução** é o eixo **X**. O eixo que sofre a **menor redução** é o eixo **Y**.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e **YZ** e das perpendiculares às charneiras), representaram-se a **leve**.

## 1084.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de  $110^\circ$  com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de  $135^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de  $115^\circ$  ( $110^\circ + 135^\circ + 115^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as coordenadas dos três pontos não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas de qualquer dos três pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação do eixo **X** e do eixo **Y**:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o plano coordenado **XY** contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se poderia ter optado por rebater um outro *plano coordenado* qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro *plano coordenado*, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois *planos coordenados*.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[AB]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **A** e **B** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $B_r \equiv B$ .

O triângulo **[AOB]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AB]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MA = MB$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[AB]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $A_r$  (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $B_r$  (que é outro ponto fixo). O triângulo **[A<sub>r</sub>O<sub>r</sub>B<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ .

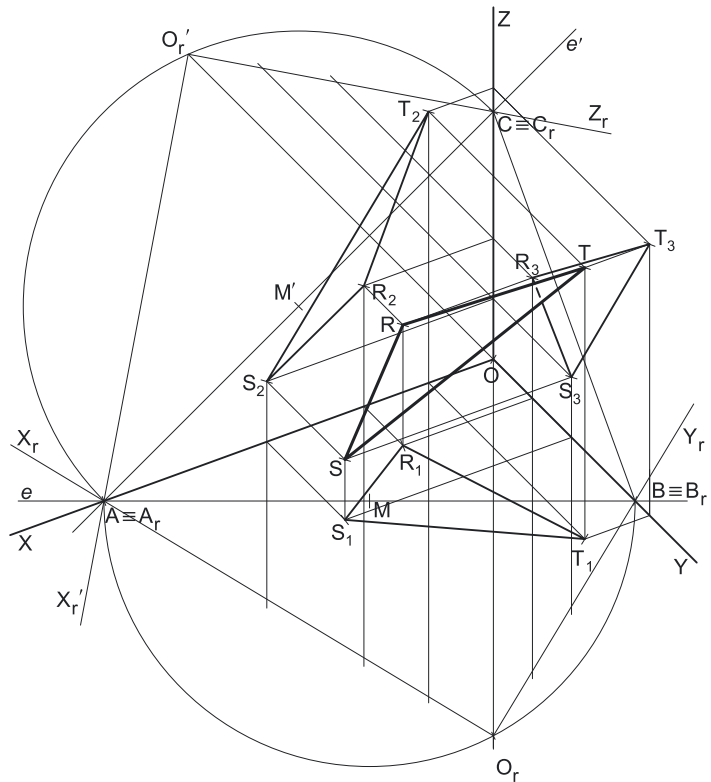
#### Determinação das perspetivas das abscissas e dos afastamentos dos três pontos:

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir as **abscissas** e os **afastamentos** dos três pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respetivamente), como Em seguida, se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos três pontos, em verdadeira grandeza (2 cm, 4 cm e 7 cm). Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos, em verdadeira grandeza (2 cm, 4 cm e 8 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as perspetivas daquelas coordenadas, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo **X** estão as perspetivas das **abscissas** e sobre a perspectiva do eixo **Y** estão as perspetivas dos **afastamentos**.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo **Z**:

Tendo em conta que o eixo **Z** apresenta um coeficiente de deformação diferente dos coeficientes de deformação dos outros dois eixos, é necessário determinar o coeficiente de deformação do eixo **Z**, o que se processou rebatendo o eixo **Z**, pelo **rebatimento dos planos coordenados**. Nesse sentido, optou-se por rebater o plano **XZ** (que contém o eixo **Z**), mas poder-se-ia ter rebatido o plano **YZ**, pois é outro *plano coordenado* que também contém o eixo **Z**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XZ$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado  $[AC]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos  $A$  e  $C$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $C_r \equiv C$ .

O triângulo  $[AOC]$  está contido no plano coordenado  $XZ$  e é um triângulo retângulo em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XZ$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[AC]$  (o ponto  $M'$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio  $M'A = M'C$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[AC]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto  $O$ , rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ). Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Y$ .

O eixo  $X_r'$  fica definido por  $O_r'$  e  $A_r$ , que é um ponto fixo (o eixo  $X_r'$  é o eixo  $X$ , rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $C_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[A_r O_r' C_r]$  é retângulo em  $O_r'$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo  $X$  – o eixo  $X$  foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes planos coordenados.

*Determinação das perspectivas das cotas dos três pontos:*

O eixo  $X_r'$  (o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ) e o eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir as **abscissas** e as **cotas** dos três pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respetivamente), como Em seguida, se expõe.

No entanto, como já se havia determinado previamente as perspectivas das **abscissas** dos três pontos (através do rebatimento do plano coordenado  $XY$ ), a utilidade do eixo  $X_r'$  para a sequência do exercício é nula.

Assim, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos, em verdadeira grandeza (2 cm, 4 cm e 9 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as perspectivas das **cotas** dos três pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação), sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .

*Determinação das perspectivas do ponto A:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $R$ , determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $R$ .  $R_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $R$ .  $R_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $R$ .  $R_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $R$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $R$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $R_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $R$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $R_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $R$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $R_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $R$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $R$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $R$  são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas dos pontos S e T:*

As perspectivas dos pontos  $S$  e  $T$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $R$ .

*Determinação das perspectivas do triângulo:*

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo  $[RST]$  é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo  $[R_1 S_1 T_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo  $[R_2 S_2 T_2]$  é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo  $[R_3 S_3 T_3]$  é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo – parte da projeção lateral do triângulo está oculta pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do triângulo  $[RST]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo a invisibilidade referida). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos planos coordenados  $XY$  e  $XZ$  e das perpendiculares à charneira.



## 1085.

a) Tendo em conta que a diagonal [AC] é vertical, o ponto C tem a mesma abscissa e o mesmo afastamento que o ponto A – o ponto C tem, assim, **3 cm de abscissa e 3 cm de afastamento**. Por outro lado, a diagonal [AC] mede 6 cm, pelo que a cota do ponto C é 6 cm superior à cota do ponto A – o ponto C tem, assim, **7 cm de cota** ( $1 + 6 = 7$ ). Nesse sentido, as coordenadas do ponto C são (3; 3; 7).

O quadrado está contido num plano frontal (de frente) com 3 cm de afastamento (o afastamento dos pontos A e C), pelo que os pontos B e D têm necessariamente **3 cm de afastamento** (todos os pontos de um plano frontal têm o mesmo afastamento). A diagonal [AC] do quadrado é vertical (paralela ao eixo Z), pelo que a outra diagonal (a diagonal [BD]), porque é perpendicular à diagonal [AC] e está contida num plano frontal (de frente), é necessariamente fronto-horizontal (paralela ao eixo X). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal [AC] tem necessariamente 4 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos A e C). Nesse sentido, os pontos B e D têm necessariamente **4 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal [AC] mede 6 cm, pelo que a diagonal [BD] mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

O ponto D é o vértice de menor abscissa do quadrado (como o enunciado refere expressamente), pelo que a sua abscissa é 3 cm inferior à abscissa dos pontos A e C (que é 3 cm) – nesse sentido, o ponto D tem **abscissa nula** ( $3 - 3 = 0$ ). As coordenadas do ponto D são (0; 3; 4).

Por fim, o ponto B é o vértice de maior abscissa do quadrado (por oposição ao vértice D), pelo que a sua abscissa é 3 cm superior à abscissa dos pontos A e C (que é 3 cm) – nesse sentido, o ponto B tem **6 cm de abscissa**. As coordenadas do ponto B são (6; 3; 4).

Salienta-se que o quadrado se situa no espaço do 1<sup>a</sup> Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspetiva do eixo Z faz um ângulo de 110° com a perspetiva do eixo X e um ângulo de 120° com a perspetiva do eixo Y, as perspetivas destes dois eixos (o eixo X e o eixo Y) fazem, entre si, um ângulo de 130° ( $110^\circ + 120^\circ + 130^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

### Resolução:

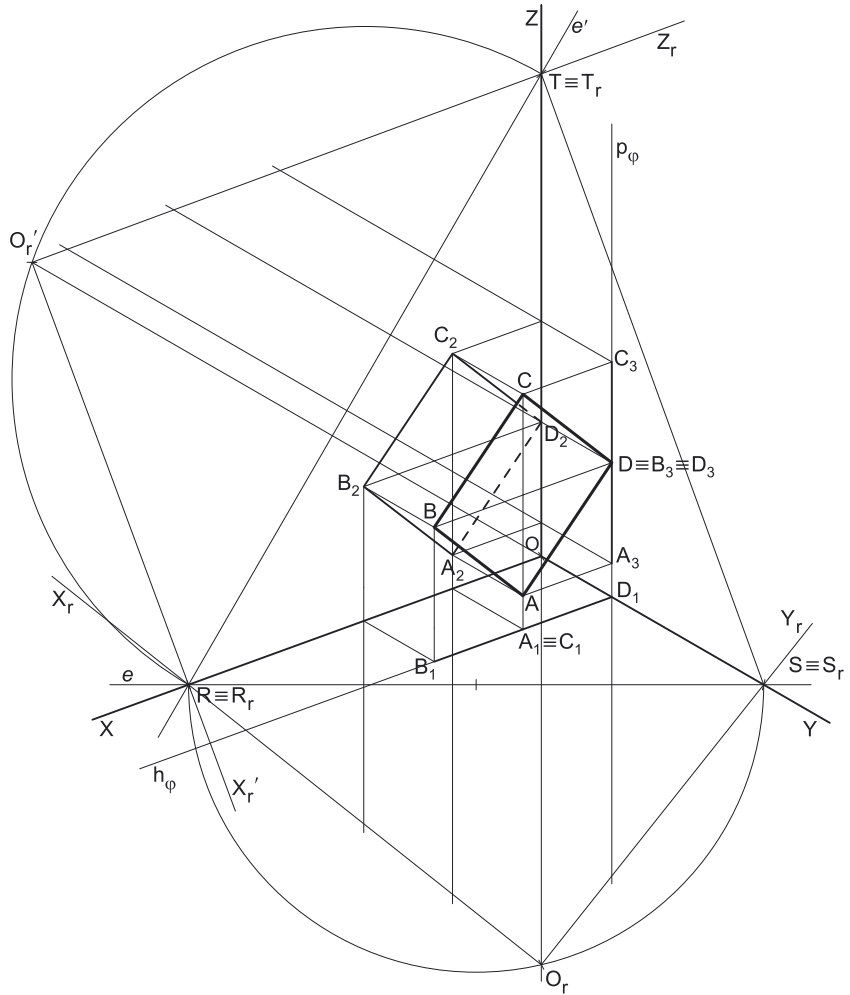
As coordenadas dos quatro pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo X, os afastamentos medem-se no eixo Y e as cotas no eixo Z. No entanto, nenhum dos eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspetivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação do eixo X e do eixo Y:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano XY, pois o plano coordenado XY contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se poderia ter optado por rebater um outro plano coordenado qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro plano coordenado, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois planos coordenados.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XY$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e$ ) é a reta suporte do lado  $[RS]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo  $[ROS]$  está contido no plano coordenado  $XY$  e é um triângulo retângulo em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RS]$  (o ponto  $M$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $MR = MS$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RS]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Z$ .

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$  (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$  (que é outro ponto fixo). O triângulo  $[R_rO_rS_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

*Determinação das perspectivas das abcissas e dos afastamentos dos quatro pontos:*

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir as **abcissas** e os **afastamentos** dos quatro pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respetivamente), como Em seguida, se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos quatro pontos, em verdadeira grandeza (3 cm e 6 cm). Note que o ponto  $D$  tem abcissa nula e que os pontos  $A$  e  $C$  têm a mesma abcissa. Sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do plano frontal (de frente) que contém o quadrado, em verdadeira grandeza (3 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as perspectivas daquelas coordenadas, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo  $X$  estão as perspectivas das **abcissas** e sobre a perspectiva do eixo  $Y$  está a perspectiva do **afastamento** do plano frontal (de frente).

*Representação do plano frontal (de frente) que contém o quadrado:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo  $Y$  que tem 3 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo  $Z$ :*

Tendo em conta que o eixo  $Z$  apresenta um coeficiente de deformação diferente dos coeficientes de deformação dos outros dois eixos, é necessário determinar o coeficiente de deformação do eixo  $Z$ , o que se processou rebatendo o eixo  $Z$ , pelo **rebatimento dos planos coordenados**. Nesse sentido, optou-se por rebater o plano  $XZ$  (que contém o eixo  $Z$ ), mas poder-se-ia ter rebatido o plano  $YZ$ , pois é outro plano coordenado que também contém o eixo  $Z$ .

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XZ$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado  $[RT]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo  $[ROT]$  está contido no plano coordenado  $XZ$  e é um triângulo retângulo em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XZ$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RT]$  (o ponto  $M'$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio  $M'R = M'T$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RT]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto  $O$ , rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ). Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Y$ .

O eixo  $X_r'$  fica definido por  $O_r'$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo (o eixo  $X_r'$  é o eixo  $X$ , rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_rO_r'T_r]$  é retângulo em  $O_r'$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo  $X$  – o eixo  $X$  foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes planos coordenados.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Determinação das perspetivas das cotas dos quatro pontos:

O eixo  $X_r'$  (o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ) e o eixo  $Z_r'$  (o eixo  $Z$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir as **abscissas** e as **cotas** dos quatro pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respetivamente), como Em seguida, se expõe.

No entanto, como já se havia determinado previamente as perspetivas das **abscissas** dos quatro pontos (através do rebatimento do plano coordenado  $XY$ ), a utilidade do eixo  $X_r'$  para a sequência do exercício é nula.

Assim, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos quatro pontos, em verdadeira grandeza (1 cm, 4 cm e 7 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as perspetivas das **cotas** dos quatro pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação), sobre a perspetiva do eixo  $Z$ .

### Determinação das perspetivas do ponto A:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $A$ .  $A_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspetiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.  $A_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto  $A$ .  $A_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspetiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal conduziu-se, pela perspetiva de  $A_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$ ), pela perspetiva de  $A_2$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Y$ ) e pela perspetiva de  $A_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspetivas dos pontos B, C e D:

As perspetivas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto  $A$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspetivas das projeções horizontais dos três pontos ( $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante lateral, as perspetivas das projeções laterais dos três pontos ( $B_3$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ).

O ponto  $D$  tem abscissa nula, pelo que o ponto  $D$  se situa no plano coordenado  $YZ$  – assim, tem-se imediatamente  $D_3 \equiv D$  (sendo  $D$  a perspetiva propriamente dita do ponto  $D$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A$  e  $C$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A_1 \equiv C_1$ . Pelo seu lado, os pontos  $B$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $B_3 \equiv D_3$ .

### Determinação das perspetivas do quadrado:

Por fim, desenharam-se as perspetivas do quadrado. O quadrilátero  $[ABCD]$  (que é um paralelogramo) é a perspetiva propriamente dita do quadrado. O quadrilátero  $[A_2B_2C_2D_2]$  (que, neste caso, é outro paralelogramo) é a perspetiva da projeção frontal do quadrado. O segmento de reta  $[B_1D_1]$  é a perspetiva da projeção horizontal do quadrado (a projeção horizontal do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre  $h_\varphi$ , pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal). O segmento de reta  $[A_3C_3]$  é a perspetiva da projeção lateral do quadrado (a projeção lateral do quadrado reduz-se a um segmento de reta sobre  $p_\varphi$ , pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral). Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio quadrado – parte da projeção frontal do quadrado está oculta pelo próprio quadrado (que é uma **figura opaca**).

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\varphi$  (o plano que contém o quadrado), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. A perspetiva do quadrado  $[ABCD]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos planos coordenados  $XY$  e  $XZ$  e das perpendiculares à charneira.

**1086.**

a) Um dos vértices do quadrado é o ponto **O** (a origem do referencial), cujas coordenadas são ( 0; 0; 0). Falta-nos, apenas, determinar as coordenadas dos pontos **M** e **V**.

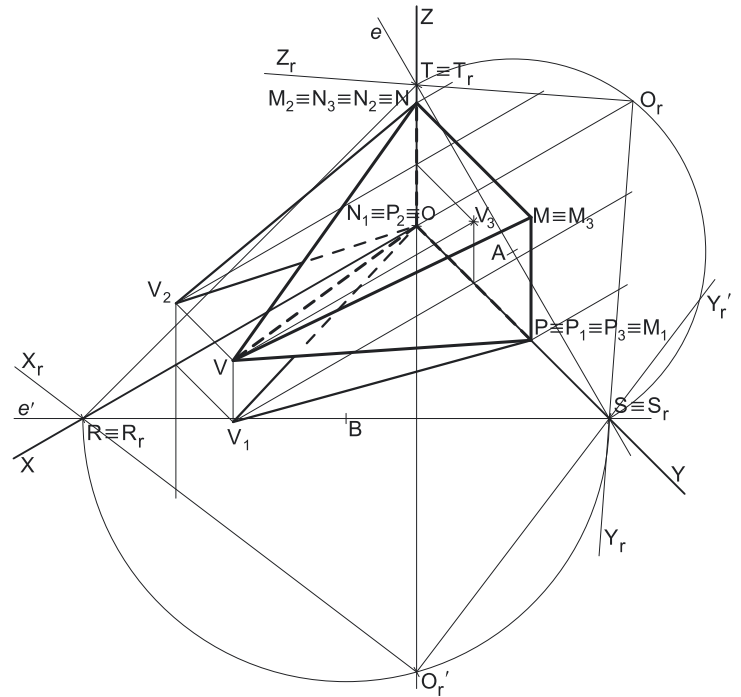
O quadrado está contido no *plano coordenado YZ*, pelo que o ponto **M** tem necessariamente **abscissa nula** (todos os vértices do quadrado **[MNOP]** têm abscissa nula). Por outro lado, é possível constatar que o lado **[OP]** do quadrado está contido no eixo **Y**, pelo que o lado **[MN]** do polígono será paralelo ao eixo **Y** (o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois). Assim, o lado **[MN]** é de topo, pelo que o ponto **M** tem a mesma cota do ponto **N** – o ponto **M** tem **5 cm de cota**.

Por sua vez, os lados **[NO]** e **[MP]** são necessariamente verticais (paralelos ao eixo **Z**), por serem perpendiculares aos lados **[MN]** e **[OP]**. Exatamente por isso, o ponto **M** tem o mesmo afastamento do ponto **P** – o ponto **M** tem, assim, **5 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto **M** são ( 0; 5; 5).

Salienta-se que o quadrado se situa no espaço do 1ª *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença das abscissas entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e a sua base tem abscissa nula, o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem **8 cm de abscissa** (0 + 8 = 8). Por outro lado, tratando-se de uma **pirâmide regular**, que é uma pirâmide reta, o seu vértice situa-se na mesma projetante lateral do centro da base (o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio das duas diagonais tem necessariamente **2,5 cm de afastamento** (a média aritmética dos afastamentos dos lados verticais do quadrado **[MNOP]**) e **2,5 cm de cota** (a média aritmética das cotas dos lados de topo do quadrado **[MNOP]**). Assim, as coordenadas do ponto **V** são ( 8; 2,5; 2,5).



**b) Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de 105° com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de 120° com a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de 135° (105° + 120° + 135° = 360°). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas dos quatro pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três *eixos coordenados*, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

*Determinação gráfica dos coeficientes de deformação do eixo Y e do eixo Z.*

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **YZ**, pois o plano coordenado **YZ** contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se poderia ter optado por rebater um outro *plano coordenado* qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro *plano coordenado*, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois *planos coordenados*.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[ST]** do *triângulo fundamental*, que se identifica imediatamente. Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente, **S<sub>r</sub> ≡ S** e **T<sub>r</sub> ≡ T**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo [SOT] está contido no *plano coordenado YZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **YZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [ST] (o ponto **A**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **A** e com raio  $\overline{AS} = \overline{AT}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [ST] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**.

O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$  (que é um ponto fixo). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$  (que é outro ponto fixo). O triângulo [ $S_rO_rT_r$ ] é retângulo em  $O_r$ .

*Determinação das perspectivas dos afastamentos e das cotas dos cinco pontos:*

O eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) e o eixo  $Z_r$  (o eixo **Z** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir os **afastamentos** e as **cotas** dos cinco pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respectivamente), como Em seguida, se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos, em verdadeira grandeza (2,5 cm e 5 cm). Note que os pontos **O** e **N** têm afastamento nulo e que os pontos **M** e **P** têm o mesmo afastamento. Sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos cinco pontos, em verdadeira grandeza (2,5 cm e 5 cm). Note que os pontos **O** e **P** têm cota nula e que os pontos **M** e **N** têm a mesma cota. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as perspectivas daquelas coordenadas, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo **Y** estão as perspectivas dos **afastamentos** e sobre a perspectiva do eixo **Z** estão as perspectivas das **cotas** dos cinco pontos.

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X:*

Tendo em conta que o eixo **X** apresenta um coeficiente de deformação diferente dos coeficientes de deformação dos outros dois eixos, é necessário determinar o coeficiente de deformação do eixo **X**, o que se processou rebatendo o eixo **X**, pelo **rebatimento dos planos coordenados**. Nesse sentido, optou-se por rebater o plano **XY** (que contém o eixo **X**), mas poder-se-ia ter rebatido o plano **XZ**, pois é outro *plano coordenado* que também contém o eixo **X**.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado [RS] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo [ROS] está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto **B**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **B** e com raio  $\overline{BR} = \overline{BS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto **O**, rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do *plano coordenado XY*). Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r'$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r'$  fica definido por  $O_r'$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo (o eixo  $Y_r'$  é o eixo **Y**, rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do *plano coordenado XY*). O triângulo [ $R_rO_r'S_r$ ] é retângulo em  $O_r'$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **Y** – o eixo **Y** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

*Determinação das perspectivas do afastamento do vértice da pirâmide:*

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) e o eixo  $Y_r'$  (o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY*) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir as **abscissas** e os **afastamentos** dos cinco pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respectivamente), como Em seguida, se expõe.

No entanto, como já se havia determinado previamente as perspectivas dos **afastamentos** dos cinco pontos (através do rebatimento do *plano coordenado YZ*), a utilidade do eixo  $Y_r'$  para a sequência do exercício é nula.

Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do vértice da pirâmide (8 cm), em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se a perspectiva da **abscissa** do ponto **V**, já reduzida (afetada pelo coeficiente de deformação), sobre a perspectiva do eixo **X**.

*Determinação das perspectivas do ponto M:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **M**.  $M_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M** – atendendo a que o ponto **M** tem abscissa nula, o ponto **M** situa-se no *plano coordenado YZ*, pelo que  $M_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M**) se situa sobre a perspectiva do eixo **Y**.  $M_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto **M** – mais uma vez atendendo a que o ponto **M** se situa no *plano coordenado YZ* (pois tem abscissa nula),  $M_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto **M**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **Z**.  $M_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto **M**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **M** tem abscissa nula, o ponto **M** situa-se no *plano coordenado YZ*, pelo que se tem imediatamente  $M_3 \equiv M$  (sendo **M** a perspectiva propriamente dita do ponto **M**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação das perspectivas dos pontos N e P:*

As perspectivas dos pontos **N** e **P** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **M**. De facto, atendendo a que os dois pontos têm abcissa nula, as perspectivas das suas projeções horizontais (**N<sub>1</sub>** e **P<sub>1</sub>**) situam-se necessariamente sobre a perspectiva do eixo **Y**. De forma semelhante, e mais uma vez atendendo a que os dois pontos têm abcissa nula, as perspectivas das suas projeções frontais (**N<sub>2</sub>** e **P<sub>2</sub>**) situam-se necessariamente sobre a perspectiva do eixo **Z**.

Por outro lado, o ponto **P** tem também cota nula (é um ponto do eixo **Y**), pelo que a perspectiva da sua projeção frontal (**P<sub>2</sub>**) está também sobre a perspectiva do eixo **X** – tem-se, imediatamente, **P<sub>2</sub> ≡ O**. Por sua vez, o ponto **N** tem também abcissa nula (é um ponto do eixo **Z**), pelo que a perspectiva da sua projeção horizontal (**N<sub>1</sub>**) está também sobre a perspectiva do eixo **Y** – tem-se, imediatamente, **N<sub>1</sub> ≡ O**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que os dois pontos têm abcissa nula, os dois pontos situam-se no *plano coordenado YZ*, pelo que se tem imediatamente **N<sub>3</sub> ≡ N** (sendo **N** a perspectiva propriamente dita do ponto **N**) e **P<sub>3</sub> ≡ P** (sendo **P** a perspectiva propriamente dita do ponto **P**). Tendo em conta que o ponto **P** é um ponto do eixo **y**, tem-se **P ≡ P<sub>1</sub> ≡ P<sub>3</sub>**. De forma semelhante, tendo em conta que o ponto **N** é um ponto do eixo **Z**, tem-se **N ≡ N<sub>2</sub> ≡ N<sub>3</sub>**.

Salienta-se, ainda, que os pontos **M** e **N**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem **M<sub>2</sub> ≡ N<sub>2</sub>**. Pelo seu lado, os pontos **M** e **P**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **M<sub>1</sub> ≡ P<sub>1</sub>**.

*Determinação das perspectivas da pirâmide:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada [**MNVP**]. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **O**. Este, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas [**NO**] e [**OP**], da base, e a aresta lateral [**OV**]). Por outro lado, a aresta lateral [**MV**] é **visível**, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais [**MNV**] e [**MPV**].

Por fim, representaram-se, ainda, a perspectiva da projeção frontal da pirâmide e a perspectiva da sua projeção horizontal. Note que não se representou a perspectiva da projeção lateral da pirâmide, porque a pirâmide assenta, pela sua base, no *plano coordenado YZ*. Nestas situações, em que o sólido assenta num dos *planos coordenados*, em geral, a representação da projeção do sólido nesse plano coordenado, de uma forma geral, dificulta a leitura da resolução gráfica – nesse sentido, em geral, omite-se a representação dessa projeção.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo [**M<sub>1</sub>N<sub>1</sub>V<sub>1</sub>**]. Todas as arestas do sólido que são invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção horizontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção horizontal. No entanto, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo [**C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>**]. Todas as arestas do sólido que são invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção frontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção frontal. No entanto, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal e frontal) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados YZ* e *XY* e das perpendiculares às charneiras.



## 1087.

a) A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **2 cm de afastamento** (todos os pontos de um plano frontal têm o mesmo afastamento). Os pontos **A** e **C** têm o mesmo afastamento e a mesma abscissa, pelo que é possível constatar que a diagonal **[AC]** do quadrado é vertical (paralela ao eixo **Z**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal **[BD]**), porque é perpendicular à diagonal **[AC]** e está contida num plano frontal (de frente), é necessariamente fronto-horizantal (paralela ao eixo **X**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal **[AC]** tem necessariamente 3 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **3 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal **[AC]** mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal **[BD]** mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

O ponto **B** é o vértice de menor abscissa do quadrado (como o enunciado refere expressamente), pelo que a sua abscissa é 3 cm inferior à abscissa dos pontos **A** e **C** (que é 6 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **3 cm de abscissa**. As coordenadas do ponto **B** são (3; 2; 3).

Pelo seu lado, o ponto **D** é o vértice de maior abscissa do quadrado (por oposição ao ponto **B**), pelo que a sua abscissa é 3 cm superior à abscissa dos pontos **A** e **C** (que é 6 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **9 cm de abscissa**. Assim, as coordenadas do ponto **D** são (9; 2; 3).

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e a sua base tem 2 cm de afastamento, o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem **10 cm de afastamento** ( $2 + 8 = 10$ ). O eixo da pirâmide está contido numa reta horizontal (de nível), pelo que a cota do ponto **V** é igual à cota do centro do quadrado que, como atrás se referiu, tem 3 cm de cota – o ponto **V** tem, assim, **3 cm de cota**. Por fim, é dado que o ponto **V** tem abscissa nula, pelo que as coordenadas do ponto **V** são (0; 10; 3).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspetiva do eixo **X** faz um ângulo de  $120^\circ$  com a perspetiva do eixo **Y** e um ângulo de  $110^\circ$  com a perspetiva do eixo **Z**, as perspetivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $13^\circ$  ( $120^\circ + 110^\circ + 130^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

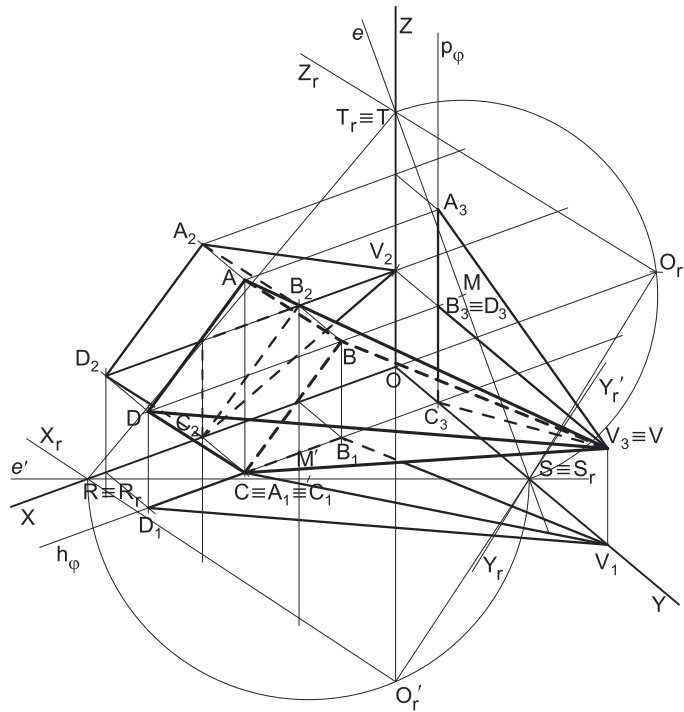
Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspetivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação do eixo **Y** e do eixo **Z**:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **YZ**, pois o plano coordenado **YZ** contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se se poderia ter optado por rebater um outro plano coordenado qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro plano coordenado, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois planos coordenados.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **YZ**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[ST]** do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo [SOT] está contido no plano coordenado YZ e é um triângulo retângulo em O. O rebatimento do plano coordenado YZ processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [ST] (o ponto M) – com o compasso, fazendo centro no ponto M e com raio  $\overline{MS} = \overline{MT}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [ST] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto O é, afinal, o plano projetante do eixo X.

O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$  (que é um ponto fixo). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$  (que é outro ponto fixo). O triângulo [ $S_rO_rT_r$ ] é retângulo em  $O_r$ .

*Determinação das perspectivas dos afastamentos e das cotas dos cinco pontos:*

O eixo  $Y_r$  (o eixo Y rebatido) e o eixo  $Z_r$  (o eixo Z rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir os **afastamentos e as cotas** dos cinco pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respetivamente), como Em seguida, se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos, em verdadeira grandeza (2 cm e 10 cm). Sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos cinco pontos, em verdadeira grandeza (3 cm e 6 cm) – note que os pontos B, D e V têm a mesma cota e que o ponto C tem cota nula. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as perspectivas daquelas coordenadas, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo Y estão as perspectivas dos **afastamentos** e sobre a perspectiva do eixo Z estão as perspectivas das **cotas** dos cinco pontos.

*Representação do plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo Y, um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo Y que tem 2 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo X. Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo Z.

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado XY) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado XY, sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado YZ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado YZ, sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X:*

Tendo em conta que o eixo X apresenta um coeficiente de deformação diferente dos coeficientes de deformação dos outros dois eixos, é necessário determinar o coeficiente de deformação do eixo X, o que se processou rebatendo o eixo X, pelo **rebatimento dos planos coordenados**. Nesse sentido, optou-se por rebater o plano XY (que contém o eixo X), mas poder-se-ia ter rebatido o plano XZ, pois é outro plano coordenado que também contém o eixo X.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado XY) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado [RS] do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos R e S são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo [ROS] está contido no plano coordenado XY e é um triângulo retângulo em O. O rebatimento do plano coordenado XY processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto M') – com o compasso, fazendo centro no ponto M' e com raio  $\overline{M'R} = \overline{M'S}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r'$ , sobre a semicircunferência –  $O_r'$  é o ponto O, rebatido pelo seu segundo rebatimento (o rebatimento do plano coordenado XY). Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto O é, afinal, o plano projetante do eixo Z.

O eixo  $X_r'$  fica definido por  $O_r'$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r'$  fica definido por  $O_r'$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo (o eixo  $Y_r'$  é o eixo Y, rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do plano coordenado XY). O triângulo [ $R_rO_r'S_r$ ] é retângulo em  $O_r'$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo Y – o eixo Y foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes planos coordenados.

*Determinação das perspectivas das abcissas dos cinco pontos:*

O eixo  $X_r'$  (o eixo X rebatido) e o eixo  $Y_r'$  (o eixo Y rebatido pelo rebatimento do plano coordenado XY) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir as **abcissas e os afastamentos** dos cinco pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respetivamente), como Em seguida, se expõe.

No entanto, como já se havia determinado previamente as perspectivas dos **afastamentos** dos cinco pontos (através do rebatimento do plano coordenado YZ), a utilidade do eixo  $Y_r'$  para a sequência do exercício é nula.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos cinco pontos (3 cm, 6 cm e 9 cm), em verdadeira grandeza – note que o ponto  $V$  tem abcissa nula e que os pontos  $A$  e  $C$  têm a mesma abcissa. Invertendo o rebatimento, com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as perspectivas das **abcissas** dos cinco pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação), sobre a perspectiva do eixo  $X$ .

### Determinação das perspectivas do ponto $A$ :

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $A$ .  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ .  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspectiva de  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas dos pontos $B$ , $C$ e $D$ :

As perspectivas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $A$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\phi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos ( $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\phi$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos ( $B_3$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A$  e  $C$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A_1 \equiv C_1$ . Pelo seu lado, os pontos  $B$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $B_3 \equiv D_3$ .

### Determinação das perspectivas do ponto $V$ :

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $V$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $V$ .  $V_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V$  – uma vez que o ponto  $V$  tem abcissa nula, o ponto  $V$  situa-se no *plano coordenado*  $YZ$ , pelo que  $V_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V$ ) se situa sobre a perspectiva do eixo  $Y$ .  $V_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $V$  – mais uma vez atendendo a que o ponto  $V$  se situa no *plano coordenado*  $YZ$  (pois tem abcissa nula),  $V_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $V$ ) situa-se sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .  $V_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $V$ .

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto  $V$  tem abcissa nula, o ponto  $V$  situa-se no *plano coordenado*  $YZ$ , pelo que se tem imediatamente  $V_3 \equiv V$  (sendo  $V$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $V$ ).

### Determinação das perspectivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada  $[AVDC]$ . Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice  $B$ . Este, por ser o vértice mais distante do observador, é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base, e a aresta lateral  $[BV]$ ). Por outro lado, a aresta lateral  $[DV]$  é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais  $[ADV]$  e  $[CDV]$ .

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[B_1D_1V_1]$ . A aresta lateral  $[CV]$  é invisível, em projeção horizontal, mas está oculta pela aresta  $[AV]$ , que é visível, em projeção horizontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção horizontal. No entanto, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero  $[A_2V_2C_2D_2]$ . As arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base, são invisíveis, em projeção frontal, consistindo, assim, na única **invisibilidade por projeção** a assinalar, em projeção frontal. Por outro lado, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[A_3C_3V_3]$ . A aresta lateral  $[BV]$  é invisível, em projeção lateral, mas está oculta pela aresta  $[DV]$ , que é visível, em projeção lateral. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção lateral. Por outro lado, parte da projeção lateral da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\phi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. As perspectivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso das charneiras do rebatimento (retas  $e$  e  $e'$ ), do rebatimento dos *planos coordenados*  $XY$  e  $YZ$  e, ainda, das perpendiculares à charneira.

**1088.**

O **método dos cortes** consiste numa evolução do **método do rebatimento dos planos coordenados**, uma vez que recorre precisamente ao rebatimento dos planos coordenados. A principal **diferença** entre os dois processos consiste no facto de:

- no **rebatimento dos planos coordenados**, os *planos coordenados* são rebatidos para o exterior da *pirâmide axonométrica* (o arco do rebatimento do ponto **O** é exterior à *pirâmide axonométrica*);
- no **método dos cortes**, os *planos coordenados* são rebatidos para o interior da *pirâmide axonométrica* (o arco do rebatimento do ponto **O** é interior à *pirâmide axonométrica*), ao que se segue uma **translação** desse rebatimento ao longo dos planos ortogonais à charneira que contém os arcos do rebatimento.

**1089.**

As **vantagens** deste novo método são:

1. por um lado, a translação do *plano coordenado* em rebatimento faz com que a área desse *plano coordenado* em rebatimento fique fora da área em que se processa a representação perspetiva dos objetos, evitando a sobreposição de traçados que acontece no **método do rebatimento dos planos coordenados**;
2. por outro lado, o *plano coordenado*, em rebatimento, fica rebatido em **sentido direto**, ou seja, as projeções do objeto nos *planos coordenados* em rebatimento apresentam-se com a orientação da sua perspetiva, sendo possível, assim, criar **relações diretas** entre a perspetiva de uma qualquer projeção do objeto e o rebatimento dessa projeção (ao contrário do que acontece no **método do rebatimento dos planos coordenados**, em que a relação entre o rebatimento e a sua representação perspetiva é uma **relação invertida**).

**1090.**

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

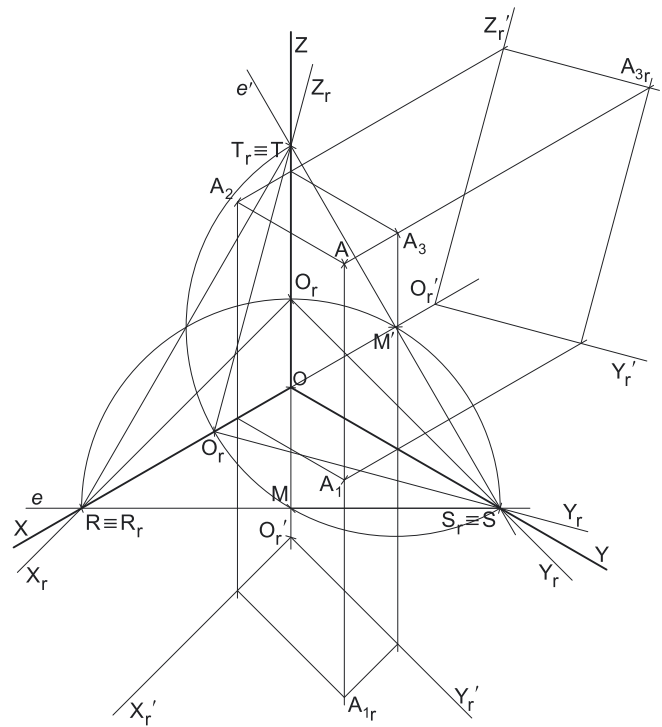
**Resolução:**

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspetivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

*Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:*

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY** (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .*



A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M** é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo **Z** interseja o lado **[RS]** do *triângulo fundamental*. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto **O<sub>r</sub>** fica sobre a perspetiva do eixo **Z**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e transladado, é o plano  $X_r'O_r'Y_r'$ .

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas do ponto **A** sobre qualquer daqueles dois eixos. No entanto, optou-se por resolver este exercício recorrendo à prévia representação do ponto **A** em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, para o que é necessário rebater outro *plano coordenado*. Nesse sentido, optou-se por rebater o *plano coordenado YZ*.

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado **[ST]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo **[SOT]** está contido no *plano coordenado YZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **YZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[ST]** (o ponto **M'**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M'** é necessariamente o ponto em que a perspectiva do eixo **X** interseja o lado **[ST]** do *triângulo fundamental*. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $M'R = M'S$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **YZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo **X**.

O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo **[S<sub>r</sub>O<sub>r</sub>T<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **Y** – o eixo **Y** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **X**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **YZ**, rebatido e transladado, é o plano  $Y_r'O_r'Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $Y_r$  e dois  $Y_r'$ .

### Determinação das perspetivas do ponto **A**:

A determinação das perspetivas do ponto **A** poder-se-ia processar a partir das perspetivas das suas coordenadas, como nas situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e transladados) das respetivas projeções do ponto **A**, em rebatimento.

Assim, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **A** (2 cm, em verdadeira grandeza). Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **A** (4 cm, em verdadeira grandeza). A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ , que é a **projeção horizontal** do ponto **A** em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**).

De forma semelhante, no plano **YZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **A** (4 cm, em verdadeira grandeza). Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **A** (7 cm, em verdadeira grandeza). A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{3r}$ , que é a **projeção lateral** do ponto **A** em rebatimento (no rebatimento do plano **YZ**).

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{3r}$  (a **projeção lateral** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **A**.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **A** sobre as perspetivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspectiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**),  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**) e  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**).

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e **YZ**, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e lateral) do ponto **A** em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.



## 1091.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas do ponto  $P$  medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo  $X$ , o **afastamento** mede-se no eixo  $Y$  e a **cota** no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspetivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

**Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:**

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano  $XY$  (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois planos coordenados). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XY$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e$ ) é a reta suporte do lado [RS] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o plano coordenado ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do plano coordenado processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo [ROS] está contido no plano coordenado  $XY$  e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto  $M$ ) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto  $M$  é necessariamente o ponto em que a perspectiva do eixo  $Z$  interseca o lado [RS] do *triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Z$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $XY$  para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .*

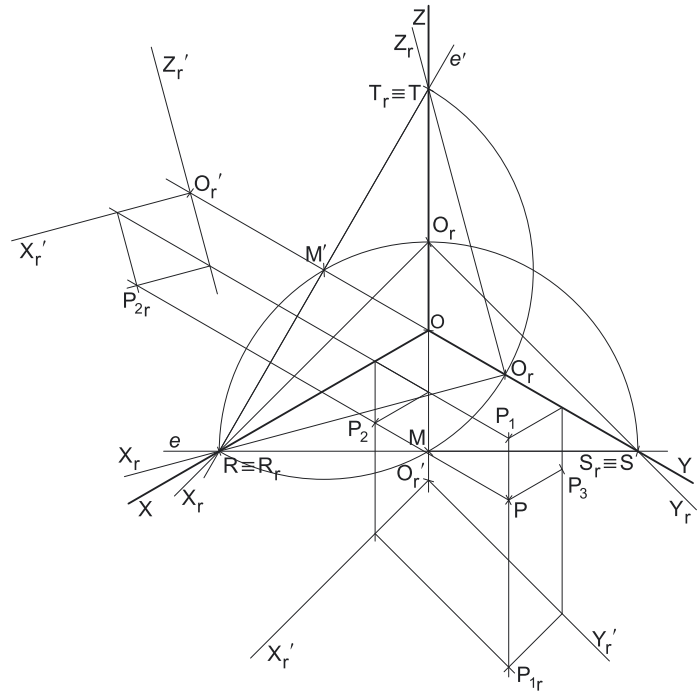
O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo [ $R_r O_r S_r$ ] é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XY$ , rebatido e transladado, é o plano  $X_r' O_r' Y_r'$ .

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas do ponto  $P$  sobre qualquer daqueles dois eixos. No entanto, optou-se por resolver este exercício recorrendo à prévia representação do ponto  $P$  em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, para o que é necessário rebater outro plano coordenado. Nesse sentido, optou-se por rebater o plano coordenado  $XZ$ .

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XZ$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado [RT] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O triângulo [ROT] está contido no plano coordenado XZ e é um **triângulo retângulo** em O. O rebatimento do plano coordenado XZ processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [ST] (o ponto M') – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto M' é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo Y interseca o lado [RT] do triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto M' e com raio  $M'R = M'T$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RT] é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto O é, afinal, o plano projetante do eixo Y. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano XZ para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspetiva do eixo Y.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_rO_rT_r]$  é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo X – o eixo X foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes planos coordenados.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XZ rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo Y) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto O rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano XZ, rebatido e transladado, é o plano  $X_r'O_r'Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $X_r$  e dois  $X_r'$ .

### Determinação das perspetivas do ponto P:

A determinação das perspetivas do ponto P poder-se-ia processar a partir das perspetivas das suas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois planos coordenados rebatidos (e transladados) das respetivas projeções do ponto P, em rebatimento.

Assim, no plano XY rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto P (2 cm, em verdadeira grandeza). Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto P (5 cm, em verdadeira grandeza). A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $P_{1r}$ , que é a **projeção horizontal** do ponto P em rebatimento (no rebatimento do plano XY).

De forma semelhante, no plano XZ rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto P (2 cm, em verdadeira grandeza). Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no **sentido negativo** do eixo, representou-se a **cota** do ponto P (2 cm, em verdadeira grandeza) – note que o ponto P tem **cota negativa**. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $P_{2r}$ , que é a **projeção frontal** do ponto P em rebatimento (no rebatimento do plano XZ).

Em seguida, conduziu-se, por  $P_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto P em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $P_{2r}$  (a **projeção frontal** do ponto P em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto P.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto P sobre as perspetivas dos respetivos eixos coordenados e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos O e P são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a O) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos planos coordenados foi possível, ainda, representar  $P_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto P),  $P_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto P) e  $P_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto P).

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo X, eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos planos coordenados XY e XZ, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e lateral) do ponto P em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

## 1092.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[ABC]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[ABC]$  são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspetivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

*Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:*

O processo geométrico auxiliar a que se recorre para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano  $XY$  (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e$ ) é a reta suporte do lado  $[AB]$  do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos  $A$  e  $B$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $B_r \equiv B$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo  $[AOB]$  está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[AB]$  (o ponto  $M$ ) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto  $M$  é necessariamente o ponto em que a perspectiva do eixo  $Z$  intersecta o lado  $[AB]$  do *triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $MA = MB$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[AB]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Z$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $XY$  para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .*

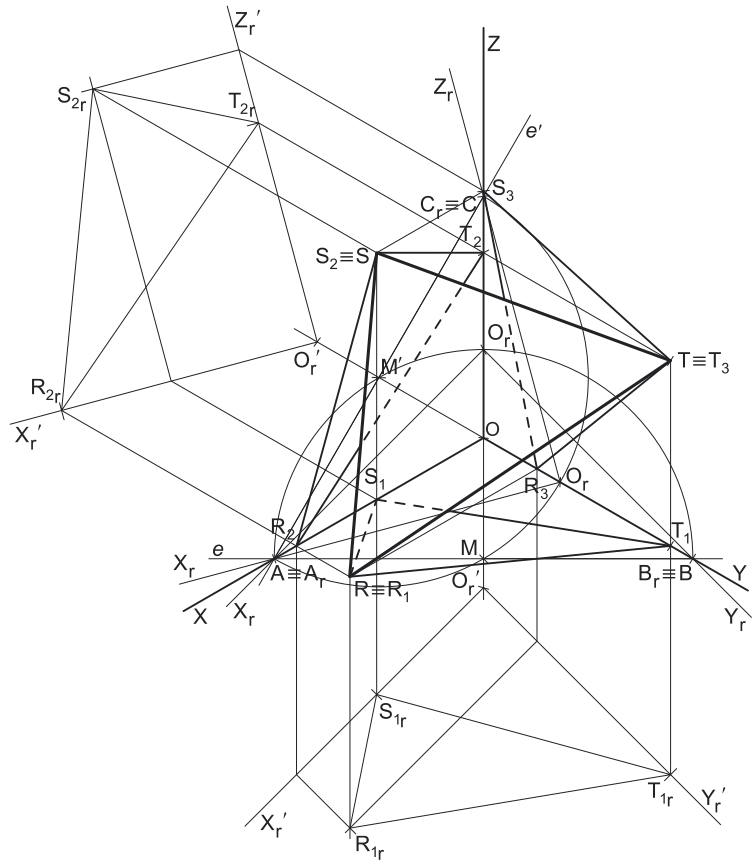
O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $A_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $B_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[A_r O_r B_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XY$ , rebatido e transladado, é o plano  $X_r' O_r' Y_r'$ .

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos três pontos sobre qualquer daqueles dois eixos. No entanto, optou-se por resolver este exercício recorrendo à prévia representação dos pontos em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, para o que é necessário rebater outro *plano coordenado*. Nesse sentido, optou-se por rebater o *plano coordenado XZ*.

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado  $[AC]$  do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos  $A$  e  $C$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $C_r \equiv C$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo **[AOC]** está contido no plano coordenado **XZ** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AC]** (o ponto **M'**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M'** é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo **Y** interseja o lado **[AC]** do triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $M'A = M'C$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[AC]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Y**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XZ** para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto **O<sub>r</sub>** fica sobre a perspetiva do eixo **Y**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **A<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **C<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[A<sub>r</sub>O<sub>r</sub>C<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **X** – o eixo **X** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes planos coordenados.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O<sub>r</sub>** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo **Y**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Z<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XZ**, rebatido e transladado, é o plano **X<sub>r</sub>'O<sub>r</sub>'Z<sub>r</sub>'**.

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois **O<sub>r</sub>**, dois **O<sub>r</sub>'**, dois **X<sub>r</sub>** e dois **X<sub>r</sub>'**.

### Determinação das perspetivas dos três pontos:

A determinação das perspetivas dos três pontos poder-se-ia processar a partir das perspetivas das respetivas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois planos coordenados rebatidos (e transladados) das respetivas projeções dos três pontos, em rebatimento.

Assim, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo **X<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos três pontos (4 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza – note que o ponto **T** tem abcissa nula. Em seguida, no eixo **Y<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos (2 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza – note que o ponto **S** tem afastamento nulo. A partir destas duas coordenadas foi possível representar **R<sub>1r</sub>**, **S<sub>1r</sub>** e **T<sub>1r</sub>**, que são as **projeções horizontais** dos pontos **R**, **S** e **T** (respetivamente), em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**). Por fim, desenhou-se o triângulo **[R<sub>1r</sub>S<sub>1r</sub>T<sub>1r</sub>]**, que é a projeção horizontal do triângulo **[RST]**, em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**).

De forma semelhante, no plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **X<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos três pontos (4 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza – recorde que o ponto **T** tem abcissa nula. Em seguida, no eixo **Z<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos (6 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza – note que o ponto **R** tem cota nula. A partir destas duas coordenadas foi possível representar **R<sub>2r</sub>**, **S<sub>2r</sub>** e **T<sub>2r</sub>**, que são as **projeções frontais** dos pontos **R**, **S** e **T** (respetivamente), em rebatimento (no rebatimento do plano **XZ**). Por fim, desenhou-se o triângulo **[R<sub>2r</sub>S<sub>2r</sub>T<sub>2r</sub>]**, que é a projeção frontal do triângulo **[RST]**, em rebatimento (no rebatimento do plano **XZ**).

Em seguida, conduziu-se, por **R<sub>1r</sub>** (a **projeção horizontal** do ponto **R** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e**) e, por **R<sub>2r</sub>** (a **projeção frontal** do ponto **R** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta **e'**). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **R**. O procedimento exposto repetiu-se para os pontos **S** e **T**, o que nos permitiu determinar as perspetivas propriamente ditas destes pontos.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **R** sobre as perspetivas dos respetivos eixos coordenados e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **R** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos planos coordenados foi possível, ainda, representar **R<sub>1</sub>** (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **R**), **R<sub>2</sub>** (a perspetiva da projeção frontal do ponto **R**) e **R<sub>3</sub>** (a perspetiva da projeção lateral do ponto **R**).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os pontos **S** e **T**, o que nos permitiu determinar as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral do ponto **S** (**S<sub>1</sub>**, **S<sub>2</sub>** e **S<sub>3</sub>**) e do ponto **T** (**T<sub>1</sub>**, **T<sub>2</sub>** e **T<sub>3</sub>**).

### Determinação das perspetivas do triângulo:

Por fim, desenharam-se as perspetivas do triângulo. O triângulo **[RST]** é a perspetiva propriamente dita do triângulo. O triângulo **[R<sub>1</sub>S<sub>1</sub>T<sub>1</sub>]** é a perspetiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo **[R<sub>2</sub>S<sub>2</sub>T<sub>2</sub>]** é a perspetiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo **[R<sub>3</sub>S<sub>3</sub>T<sub>3</sub>]** é a perspetiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo – parte das projeções horizontais, frontal e lateral do triângulo estão ocultas pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva do triângulo **[RST]** representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos planos coordenados **XY** e **XZ**, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) dos pontos **R**, **S** e **T** e do próprio triângulo em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

## 1093.

**Determinação das coordenadas dos vértices do prisma:**

Tendo em conta que os pontos **A** e **B** têm cota nula, a base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida no *plano coordenado XY*, pelo que os pontos **C** e **D** têm necessariamente **cota nula** (todos os pontos do plano coordenado **XY** têm cota nula). Por outro lado, os pontos **A** e **B** têm o mesmo afastamento e a mesma abcissa, pelo que o lado **[AB]** do quadrado é de topo (é paralelo ao eixo **Y**). Assim, o lado **[CD]** do polígono será igualmente de topo (paralelo ao eixo **Y**), pois o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois. Por sua vez, os lados **[BC]** e **[AD]** serão necessariamente fronto-horizontais (paralelos ao eixo **X**), por estarem contidos num plano horizontal (o plano coordenado **XY**) e por serem perpendiculares aos lados **[AB]** e **[CD]**). Por fim, o lado **[AB]** mede 4 cm (a diferença entre os afastamentos dos pontos **A** e **B**), que é a medida do lado do quadrado.

Assim, atendendo a que o lado **[BC]** é fronto-horizantal, o ponto **C** tem o mesmo afastamento do ponto **B** (que é 7 cm) e a sua abcissa é 4 cm superior à abcissa do ponto **B** – o ponto **C** tem, assim, **7 cm de afastamento** e **6 cm de abcissa** (e cota nula, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto **C** são ( 6 ; 7 ; 0).

Atendendo a que o lado **[AD]** do quadrado é também fronto-horizantal, o ponto **D** tem o mesmo afastamento do ponto **A** (que é 3 cm). Por sua vez, o lado **[CD]** é de topo, pelo que o ponto **D** tem a mesma abcissa do ponto **C** (que é 6 cm). Assim, o ponto **D** tem **6 cm de abcissa** e **3 cm de afastamento** (e cota nula) – as coordenadas do ponto: **D** são ( 6 ; 3 ; 0).

Por fim, a altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as bases, o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre os planos das duas bases. Uma vez que o prisma tem 6 cm de altura e a sua base inferior tem cota nula (como atrás se referiu), o plano que contém a base superior tem **6 cm de cota** ( $0 + 6 = 6$ ). Nesse sentido, todos os vértices da base **[A'B'C'D']** (a base superior do prisma) têm **6 cm de cota**.

Tendo em conta que se trata de um **prisma regular** (as suas arestas laterais são necessariamente ortogonais aos planos das bases), as arestas laterais do sólido estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais). Assim, todos os vértices da base **[A'B'C'D']** têm abcissa e afastamento iguais aos dos vértices correspondentes da base inferior do sólido (a base **[ABCD]**). Nesse sentido, as coordenadas dos quatro vértices da base **[A'B'C'D']** são: **A'** ( 2 ; 3 ; 6), **B'** ( 2 ; 7 ; 6), **C'** ( 6 ; 7 ; 6) e **D'** ( 6 ; 3 ; 6).

Salienta-se que o prisma se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

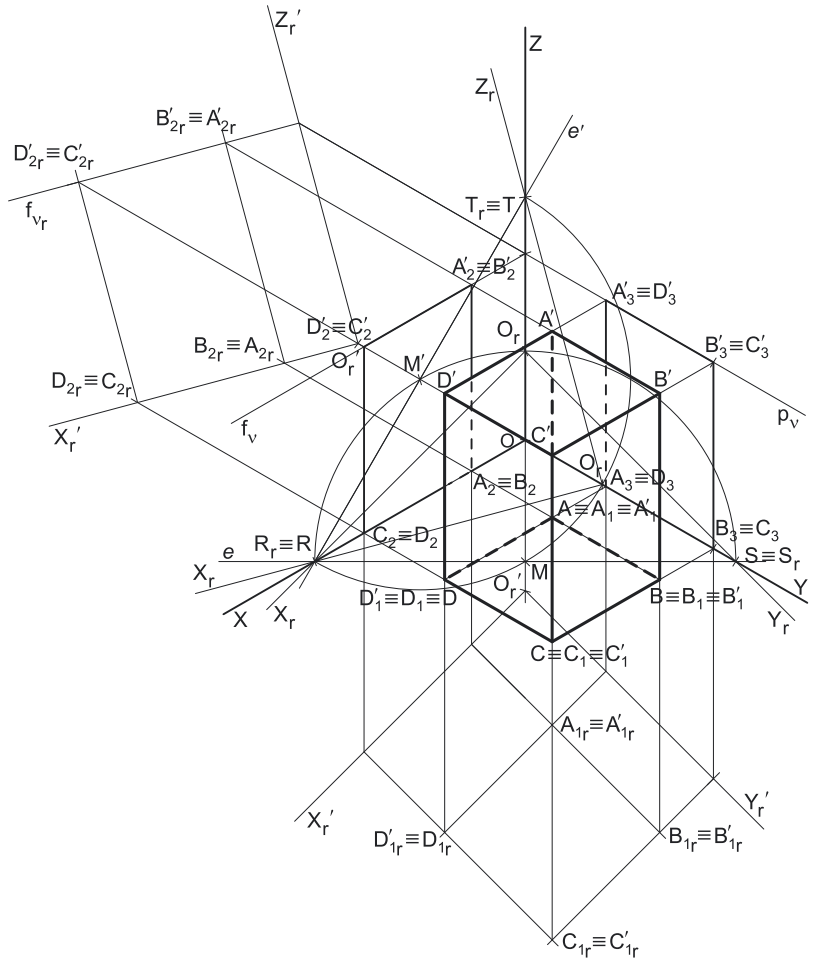
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas dos oito pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspetivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY** (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M** é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo **Z** interseca o lado **[RS]** do *triângulo fundamental*. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspetiva do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e trasladado, é o plano  $X_r'O_r'Y_r'$ .

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos oito pontos sobre qualquer daqueles dois eixos. No entanto, optou-se por resolver este exercício recorrendo à prévia representação do prisma em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, para o que é necessário rebater outro *plano coordenado*. Nesse sentido, optou-se por rebater o *plano coordenado XZ*.

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é a reta suporte do lado **[RT]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo **[ROT]** está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RT]** (o ponto **M'**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M'** é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo **Y** interseca o lado **[RT]** do *triângulo fundamental*. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'R} = \overline{M'T}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RT]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Y**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspetiva do eixo **Y**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>T<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **X** – o eixo **X** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo **Y**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **XZ**, rebatido e trasladado, é o plano  $X_r'O_r'Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $X_r$  e dois  $X_r'$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Representação dos oito pontos e do prisma em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:*

A determinação das perspetivas dos oito pontos poder-se-ia processar a partir das perspetivas das respetivas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e transladados) das respetivas projeções dos oito pontos, em rebatimento.

Assim, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos oito pontos (2 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos oito pontos (3 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$ ,  $C_{1r}$  e  $D_{1r}$ , que são as **projeções horizontais** dos pontos **A**, **B**, **C** e **D** (respetivamente), em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**). Tendo em conta que as arestas laterais do prisma são projetantes horizontais, as projeções horizontais dos vértices da base **[A'B'C'D']** estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices da base **[ABCD]** – tem-se, imediatamente,  $A'_{1r} \equiv A_{1r}$ ,  $B'_{1r} \equiv B_{1r}$ ,  $C'_{1r} \equiv C_{1r}$  e  $D'_{1r} \equiv D_{1r}$ .

Assim, desenhou-se o quadrado **[A'₁B'₁C'₁D'₁]** (que está coincidente com o quadrado **[A₁B₁C₁D₁]**) e que é a **projeção horizontal do prisma**, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado **XY**).

Já no plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos oito pontos (2 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do plano da base superior (6 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{2r}$ ,  $B_{2r}$ ,  $C_{2r}$  e  $D_{2r}$  (que são as **projeções frontais** dos vértices da base inferior, em rebatimento – no rebatimento do plano coordenado **XZ**), bem como  $A'_{2r}$ ,  $B'_{2r}$ ,  $C'_{2r}$  e  $D'_{2r}$  (que são as **projeções frontais** dos vértices da base superior, em rebatimento – no rebatimento do plano coordenado **XZ**).

Note que se tem  $A_{2r} \equiv B_{2r}$  e  $C_{2r} \equiv D_{2r}$ , pois os pontos **A** e **B** situam-se na mesma reta projetante frontal, assim como os pontos **C** e **D** se situam na mesma reta projetante frontal. De forma semelhante tem-se, também,  $A'_{2r} \equiv B'_{2r}$  e  $C'_{2r} \equiv D'_{2r}$ , pois os pontos **A'** e **B'** situam-se na mesma reta projetante frontal, assim como os pontos **C'** e **D'** se situam na mesma reta projetante frontal.

Por fim desenhou-se o retângulo **[B₁C₁C'₁B'₁]**, que é a **projeção frontal** do prisma, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado **XZ**).

Este procedimento permitiu-nos obter a representação do prisma em Dupla Projeção Ortogonal, através da sua **projeção horizontal** (em rebatimento, no rebatimento do plano coordenado **XY**) e da sua **projeção frontal** (em rebatimento, no rebatimento do plano coordenado **XZ**).

*Determinação das perspetivas dos oito vértices do prisma:*

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e**) e, por  $A_{2r}$  (a **projeção frontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta **e'**). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **A**. O procedimento exposto repetiu-se para os restantes vértices do prisma (os pontos **C**, **D**, **A'**, **B'**, **C'** e **D'**), o que nos permitiu determinar as perspetivas propriamente ditas de todos aqueles pontos.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **A** sobre as perspetivas dos respetivos eixos *coordenados* e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**),  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) e  $A_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os restantes vértices do prisma (os pontos **C**, **D**, **A'**, **B'**, **C'** e **D'**), o que nos permitiu determinar as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral de todos aqueles pontos.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base [A'B'C'D'] do prisma:*

Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do prisma. O plano  $v$  é um plano projetante frontal (porque é ortogonal ao plano **XZ**), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Assim, desenhou-se  $f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ), que passa necessariamente pelas perspetivas das projeções frontais dos vértices da base superior do prisma.

Por outro lado, o plano  $v$  é também um plano projetante lateral (porque é ortogonal ao plano **YZ**), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ). Assim, desenhou-se  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ), passando necessariamente pelas perspetivas das projeções laterais dos vértices da base superior do prisma.

As perspetivas do traço frontal ( $f_v$ ) e do traço lateral ( $p_v$ ) do plano  $v$  são necessariamente concorrentes num ponto da perspetiva do eixo **Z**.

*Determinação das perspetivas do prisma:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada **[BCDD'A'B']**. Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – os vértices **C'** e **A**. O vértice **C'**, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[B'C']** e **[C'D']** (da base **[A'B'C'D']**) e a aresta lateral **[CC']**. O vértice **A**, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]** (da base **[ABCD]**) e a aresta lateral **[AA']**. No entanto, salienta-se que a aresta lateral **[AA']** está parcialmente oculta pela aresta lateral **[CC']**, que é visível.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas da projeção frontal e da projeção lateral do prisma. Note que a **projeção horizontal** do prisma se reduz a um quadrado (o quadrado **[A'₁B'₁C'₁D'₁]**) que, estando coincidente com a base **[ABCD]**, está oculto por essa base e, por isso mesmo, não se distingue.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

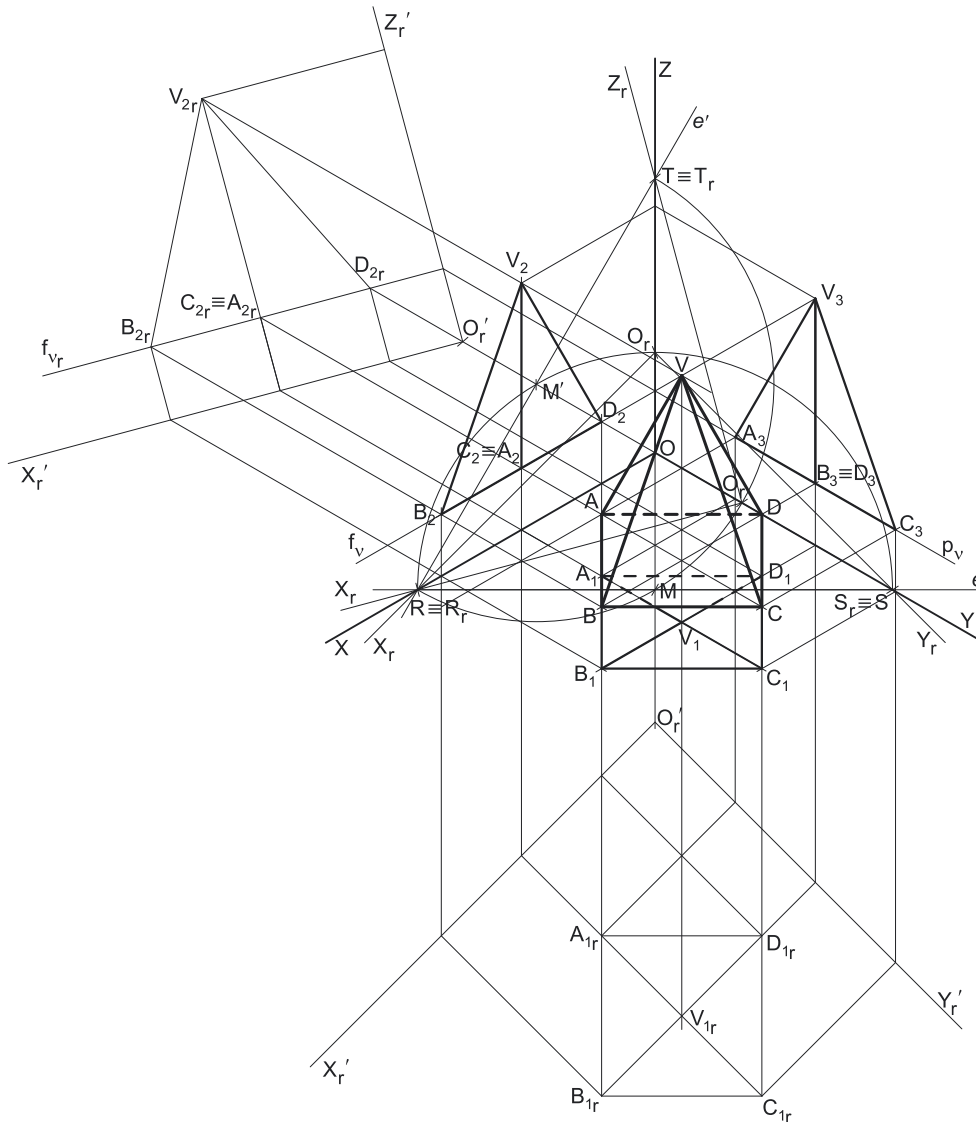
A **perspetiva da projeção frontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[B_2C_2C'_2D'_2]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção frontal do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[C_3D_3D'_3C'_3]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção lateral do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

**Traçado:**

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a base superior do prisma), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (frontal e lateral) do prisma, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY e XZ*, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) do prisma em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

## 1094.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

- a) A base da pirâmide (o quadrado [ABCD]) está contida num plano horizontal (de nível) com 2 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **2 cm de cota** (todos os vértices da base têm 2 cm de cota). Os pontos **A** e **C** têm a mesma abcissa e a mesma cota, pelo que é possível constatar que a diagonal [AC] do quadrado é de topo (paralela ao eixo **Y**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal [BD]), porque é perpendicular à diagonal [AC] e está contida num plano horizontal (de nível), é necessariamente fronto-horizontal (paralela ao eixo **X**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal [AC] tem necessariamente 6 cm de afastamento (a média aritmética dos afastamentos dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **6 cm de afastamento**. Por outro lado, a diagonal [AC] mede 6 cm (a diferença entre os afastamentos dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal [BD] mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

Sendo assim, atendendo a que o ponto **B** é o vértice de maior abcissa do quadrado (como o enunciado refere expressamente), a sua abcissa é 3 cm superior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **8 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto **B** são ( 8; 6; 2).

Pelo seu lado, atendendo a que o ponto **D** é o vértice de menor abcissa do quadrado (por oposição ao vértice **B**), a sua abcissa é 3 cm inferior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **2 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto **D** são ( 2; 6; 2).

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 6 cm de altura e a sua base tem 2 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **C**), o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem **8 cm de cota** ( $2 + 6 = 8$ ). Por outro lado, tratando-se de uma **pirâmide regular**, que é uma pirâmide reta, o seu vértice situa-se na mesma projetante horizontal do centro da base (o ponto médio das duas diagonais), que, como se referiu, tem **6 cm de afastamento** (o afastamento dos pontos **B** e **D**) e tem **5 cm de abcissa** (a abcissa dos pontos **A** e **C**). Assim, as coordenadas do ponto **V** são ( 5; 8; 8).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

#### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^{\circ}$ . Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

#### Resolução:

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspetivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY** (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado [RS] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo [ROS] está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto **M**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M** é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo **Z** intersesta o lado [RS] do *triângulo fundamental*. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MR = MS$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspetiva do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo [ $R_r O_r S_r$ ] é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XY$ , rebatido e transladado, é o plano  $X_r'O_r'Y_r'$ .

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos cinco pontos sobre qualquer daqueles dois eixos. No entanto, optou-se por resolver este exercício recorrendo à prévia representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, para o que é necessário rebater outro plano coordenado. Nesse sentido, optou-se por rebater o plano coordenado  $XZ$ .

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XZ$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado  $[RT]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo  $[ROT]$  está contido no plano coordenado  $XZ$  e é um triângulo retângulo em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XZ$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RT]$  (o ponto  $M'$ ) – note que, tratando-se de uma perspectiva isométrica, o ponto  $M'$  é necessariamente o ponto em que a perspectiva do eixo  $Y$  interseca o lado  $[RT]$  do triângulo fundamental. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio  $\overline{M'R} = \overline{M'T}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RT]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Y$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $XZ$  para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $Y$ .

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_rO_rT_r]$  é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo  $X$  – o eixo  $X$  foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes planos coordenados.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Y$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XZ$ , rebatido e transladado, é o plano  $X_r'O_r'Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o método dos cortes) existe uma sistemática repetição de notações, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $X_r$  e dois  $X_r'$ .

### Representação dos cinco pontos e da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:

A determinação das perspectivas dos cinco pontos poder-se-ia processar a partir das perspectivas das respetivas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois planos coordenados rebatidos (e transladados) das respetivas projeções dos cinco pontos, em rebatimento.

Assim, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos (3 cm, 6 cm e 9 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$ ,  $C_{1r}$ ,  $D_{1r}$  e  $V_{1r}$ , que são as **projeções horizontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). Em seguida, desenhou-se a **projeção horizontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $XY$ ).

Já no plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** do plano da base e do vértice da pirâmide (2 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{2r}$ ,  $B_{2r}$ ,  $C_{2r}$ ,  $D_{2r}$  e  $V_{2r}$ , que são as **projeções frontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ). Em seguida, desenhou-se a **projeção frontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ).

Este procedimento permitiu-nos obter a representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, através da sua **projeção horizontal** (em rebatimento, no rebatimento do plano coordenado  $XY$ ) e da sua **projeção frontal** (em rebatimento, no rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ).

### Determinação das perspectivas dos cinco vértices da pirâmide:

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto  $A$  em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{2r}$  (a **projeção frontal** do ponto  $A$  em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto  $A$ . O procedimento exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $V$ ), o que nos permitiu determinar as perspectivas propriamente ditas de todos aqueles pontos.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **A** sobre as perspetivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar **A<sub>1</sub>** (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**), **A<sub>2</sub>** (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) e **A<sub>3</sub>** (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**), o que nos permitiu determinar as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral de todos aqueles pontos.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide:*

Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide. O plano  $v$  é um plano projetante frontal (porque é ortogonal ao plano **XZ**), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Assim, desenhou-se  $f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ), que passa necessariamente pelas perspetivas das projeções frontais dos vértices da base da pirâmide.

Por outro lado, o plano  $v$  é também um plano projetante lateral (porque é ortogonal ao plano **YZ**), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ). Assim, desenhou-se  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ), passando necessariamente pelas perspetivas das projeções laterais dos vértices da base da pirâmide.

As perspetivas do traço frontal ( $f_v$ ) e do traço lateral ( $p_v$ ) do plano  $v$  são necessariamente concorrentes num ponto da perspetiva do eixo **Z**.

*Determinação das perspetivas da pirâmide:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ABCDV]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente da perspetiva do sólido. No entanto, a aresta **[AD]**, da base, é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – a base **[ABCD]** e a face lateral **[ADV]**. Note que, na realidade, os vértices **A** e **D** são os vértices mais distantes do observador e, por isso, a aresta **[AD]** é invisível. Já as arestas laterais **[BV]** e **[CV]** são duas arestas visíveis, da pirâmide, porque separam faces da pirâmide que são visíveis, em perspetiva. Note ainda que os vértices **B** e **C** são dos vértices da pirâmide que estão mais próximos do observador.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo retângulo **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. O vértice **V**, da pirâmide, é o vértice de maior cota, pelo que todas as arestas laterais da pirâmide são visíveis, em projeção horizontal – não há, em projeção horizontal, qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. No entanto, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção frontal da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[A<sub>3</sub>V<sub>3</sub>C<sub>3</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção lateral da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção lateral, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e **XZ**, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) da pirâmide em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

## 1095.

a) A base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida no *plano coordenado XZ*, pelo que os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **afastamento nulo** (todos os pontos do *plano coordenado XZ* têm afastamento nulo). Os pontos  $A$  e  $C$  têm o mesmo afastamento e a mesma abscissa, pelo que é possível concluir que a diagonal  $[AC]$  do quadrado é vertical (paralela ao eixo  $Z$ ). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal  $[BD]$ ), porque é perpendicular à diagonal  $[AC]$  e está contida no *plano coordenado XZ*, é necessariamente fronto-horizontal (paralela ao eixo  $X$ ). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal  $[AC]$  tem necessariamente 3 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos  $A$  e  $C$ ). Nesse sentido, os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **3 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal  $[AC]$  mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos  $A$  e  $C$ ), pelo que a diagonal  $[BD]$  mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

O ponto  $B$  é o vértice de maior abscissa do quadrado (como o enunciado refere expressamente), pelo que a sua abscissa é 3 cm superior à abscissa dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto  $B$  tem **8 cm de abscissa**. As coordenadas do ponto  $B$  são (8; 0; 3).

Pelo seu lado, o ponto  $D$  é o vértice de menor abscissa do quadrado (por oposição ao ponto  $B$ ), pelo que a sua abscissa é 3 cm inferior à abscissa dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto  $D$  tem **2 cm de abscissa**. Assim, as coordenadas do ponto  $D$  são (2; 0; 3).

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e a sua base tem afastamento nulo (pois está contida no *plano coordenado XZ*), o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) tem **7 cm de afastamento** ( $0 + 7 = 7$ ). A aresta lateral  $[CV]$  é de topo (projetante frontal), pelo que o ponto  $V$  e o ponto  $C$  têm a mesma abscissa e a mesma cota – o ponto  $V$  tem, assim, **5 cm de abscissa e 6 cm de cota**, pelo que as coordenadas do ponto  $V$  são (5; 7; 6).

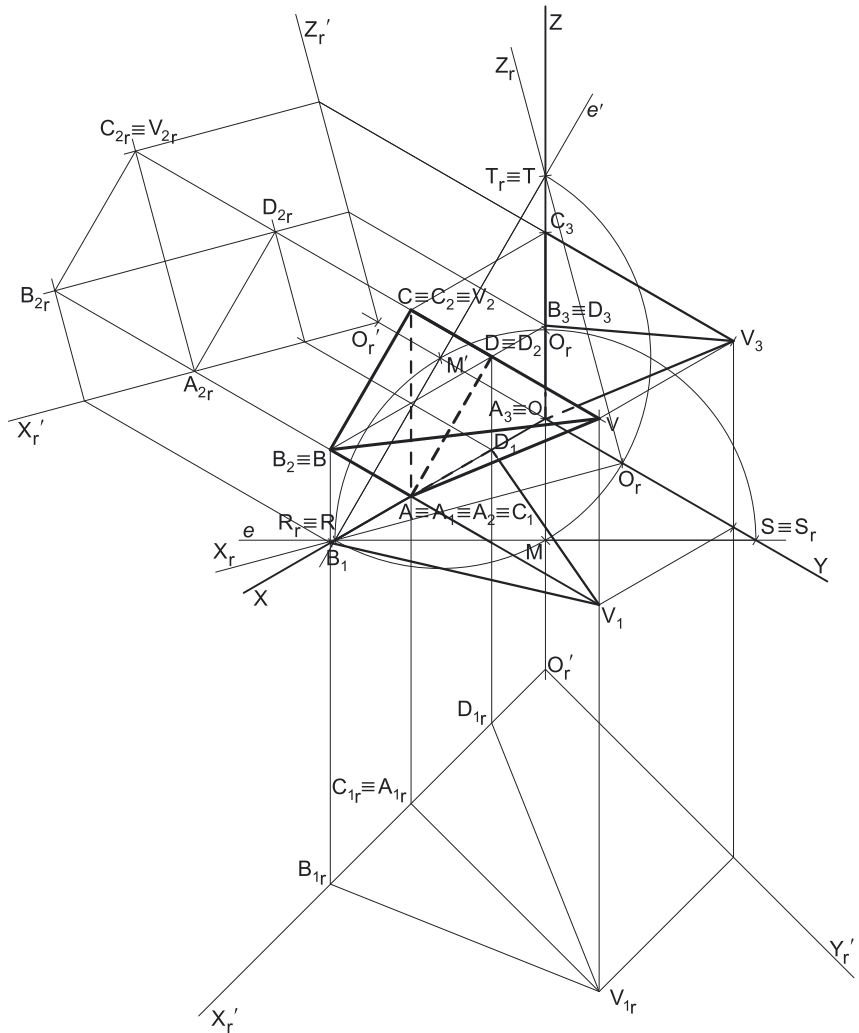
Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^a$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspetiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspetivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

*Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:*

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY** (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M** é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo **Z** interseca o lado **[RS]** do *triângulo fundamental*. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto **O<sub>r</sub>** fica sobre a perspetiva do eixo **Z**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O<sub>r</sub>** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e trasladado, é o plano **X<sub>r</sub>'O<sub>r</sub>'Y<sub>r</sub>'**.

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) e o eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos cinco pontos sobre qualquer daqueles dois eixos. No entanto, optou-se por resolver este exercício recorrendo à prévia representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, para o que é necessário rebater outro *plano coordenado*. Nesse sentido, optou-se por rebater o *plano coordenado XZ*.

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é a reta suporte do lado **[RT]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo **[ROT]** está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RT]** (o ponto **M'**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M'** é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo **Y** interseca o lado **[RT]** do *triângulo fundamental*. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'R} = \overline{M'T}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RT]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Y**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto **O<sub>r</sub>** fica sobre a perspetiva do eixo **Y**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **T<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>T<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **X** – o eixo **X** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O<sub>r</sub>** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo **Y**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Z<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XZ**, rebatido e trasladado, é o plano **X<sub>r</sub>'O<sub>r</sub>'Z<sub>r</sub>'**.

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois **O<sub>r</sub>**, dois **O<sub>r</sub>'**, dois **X<sub>r</sub>** e dois **X<sub>r</sub>'**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Representação dos cinco pontos e da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:*

A determinação das perspectivas dos cinco pontos poder-se-ia processar a partir das perspectivas das respetivas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e transladados) das respetivas projeções dos cinco pontos, em rebatimento.

Assim, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do vértice da pirâmide (7 cm), em verdadeira grandeza – recorde que todos os vértices da base têm afastamento nulo. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$ ,  $C_{1r}$ ,  $D_{1r}$  e  $V_{1r}$ , que são as **projeções horizontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**). Em seguida, desenhou-se a **projeção horizontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XY*).

Já no plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos cinco pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – recorde que o ponto **A** tem cota nula. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{2r}$ ,  $B_{2r}$ ,  $C_{2r}$ ,  $D_{2r}$  e  $V_{2r}$ , que são as **projeções frontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XZ*). Em seguida, desenhou-se a **projeção frontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XZ*).

Este procedimento permitiu-nos obter a representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, através da sua **projeção horizontal** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado XY*) e da sua **projeção frontal** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado XZ*).

*Determinação das perspectivas dos cinco vértices da pirâmide:*

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e**) e, por  $A_{2r}$  (a **projeção frontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta **e'**). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **A**. O procedimento exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**), o que nos permitiu determinar as perspectivas propriamente ditas de todos aqueles pontos.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspectivas das coordenadas do ponto **A** sobre as perspectivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspectiva do paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**),  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**) e  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**), o que nos permitiu determinar as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral de todos aqueles pontos.

*Determinação das perspectivas da pirâmide:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ABCV]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **D**. Este, por ser o vértice mais distante do observador, é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AD]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[DV]**). No entanto, as arestas **[CD]** e **[DV]** estão ocultas pela aresta lateral **[CV]**, que é visível, pelo que, nesta situação, a única invisibilidade a assinalar, em perspetiva, é a referente à aresta **[AD]** da base. Note que, **nesta situação particular**, a face lateral **[CDV]** da pirâmide está contida num **plano projetante** (em perspetiva), pelo que a sua perspetiva se reduz a um segmento de reta (o segmento **[CV]**), pois apresenta a deformação máxima. Por outro lado, a aresta lateral **[BV]** é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal e lateral da pirâmide. Note que não se representou a perspectiva da projeção frontal da pirâmide, porque a pirâmide assenta, pela sua base, no *plano coordenado XZ*. Nestas situações, em que o sólido assenta num dos *planos coordenados*, a representação da projeção do sólido nesse *plano coordenado*, de uma forma geral, dificulta a leitura da resolução gráfica – nesse sentido, em geral, omite-se a representação dessa projeção.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[B<sub>1</sub>V<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. No entanto, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[A<sub>3</sub>V<sub>3</sub>C<sub>3</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. No entanto, parte da projeção lateral da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e *XZ*, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) da pirâmide em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

## 1096.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que o eixo **Z** é o eixo que sofre uma redução isolada, a sua perspectiva faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**). As perspectivas do eixo **X** e do eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $150^\circ$ , pelo que o ângulo restante é um ângulo de  $210^\circ$  ( $360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$ ). Esse ângulo é a soma de dois ângulos iguais (os ângulos que a perspectiva do eixo **Z** faz com as perspectivas dos outros dois eixos), pelo que a perspectiva do eixo **Z** faz ângulos de  $105^\circ$  com as perspectivas dos outros dois eixos ( $210^\circ : 2 = 105^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como o enunciado refere expressamente, o eixo **Z** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **Z**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

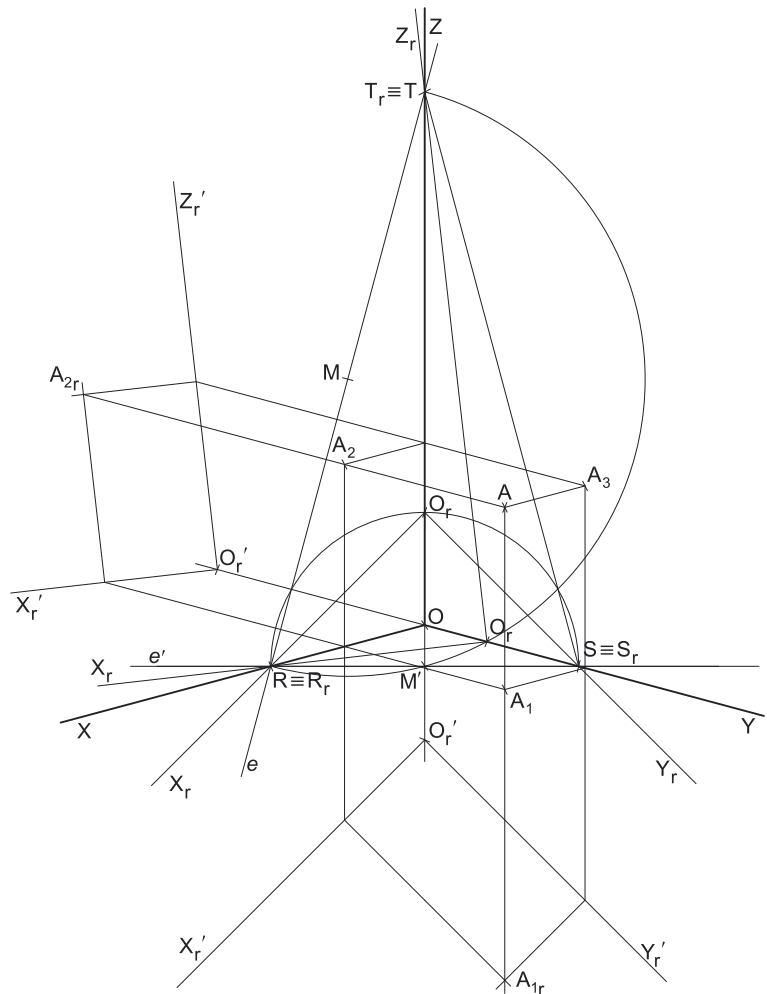
**Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:**

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XZ**, pois o *plano coordenado XZ* contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o *plano coordenado YZ* (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o *plano coordenado XY*, pois o eixo **X** e o eixo **Y** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **Z**).

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RT]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo **[ROT]** está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RT]** (o ponto **M**). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $MR = MT$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RT]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Y**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto **O<sub>r</sub>** fica sobre a perspectiva do eixo **Y**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_rO_rT_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Y$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XZ$ , rebatido e trasladado, é o plano  $X_r'O_r'Z_r'$ .

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo  $Z$  apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspectiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas ponto  $A$  (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como em seguida, se expõe.

No entanto, optou-se por resolver este exercício recorrendo à prévia representação do ponto  $A$  em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, para o que é necessário rebater outro plano coordenado. Nesse sentido, optou-se por rebater o plano coordenado  $XY$ .

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XY$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado  $[RS]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo  $[ROS]$  está contido no plano coordenado  $XY$  e é um triângulo retângulo em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RS]$  (o ponto  $M'$ ). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio  $M'R = M'S$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RS]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Z$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $XY$  para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_rO_rS_r]$  é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo  $X$  – o eixo  $X$  foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes planos coordenados.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XY$ , rebatido e trasladado, é o plano  $X_r'O_r'Y_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o método dos cortes) existe uma sistemática repetição de notações, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $X_r$  e dois  $X_r'$ .

### Determinação das perspectivas do ponto A:

A determinação das perspectivas do ponto  $A$  poder-se-ia processar a partir das perspectivas das suas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois planos coordenados rebatidos (e trasladados) das respetivas projeções do ponto  $A$ , em rebatimento.

Assim, no plano  $XY$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $A$  (3 cm, em verdadeira grandeza). Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto  $A$  (6 cm, em verdadeira grandeza). A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ , que é a **projeção horizontal** do ponto  $A$  em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ).

De forma semelhante, no plano  $XZ$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $A$  (3 cm, em verdadeira grandeza). Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto  $A$  (5 cm, em verdadeira grandeza). A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{2r}$ , que é a **projeção frontal** do ponto  $A$  em rebatimento (no rebatimento do plano  $XZ$ ).

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto  $A$  em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e'$ ) e, por  $A_{2r}$  (a **projeção frontal** do ponto  $A$  em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto  $A$ .

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspectivas das coordenadas do ponto  $A$  sobre as perspectivas dos respetivos eixos coordenados e, assim, concluir a construção da perspectiva do paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a  $O$ ) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos planos coordenados foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ),  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ) e  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e *XZ*, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e lateral) do ponto **A** em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

## 1097.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. O eixo **X** é o eixo que sofre uma redução isolada, pelo que a sua perspectiva faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos – tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $125^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y**, a perspectiva do eixo **X** faz, também, um ângulo de  $125^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, o que perfaz um total de  $250^\circ$  ( $2 \times 125^\circ = 250^\circ$ ). Assim, a perspectiva do eixo **Y** e a perspectiva do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $110^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas do ponto **P** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como o enunciado refere expressamente, o eixo **Z** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **Z**.

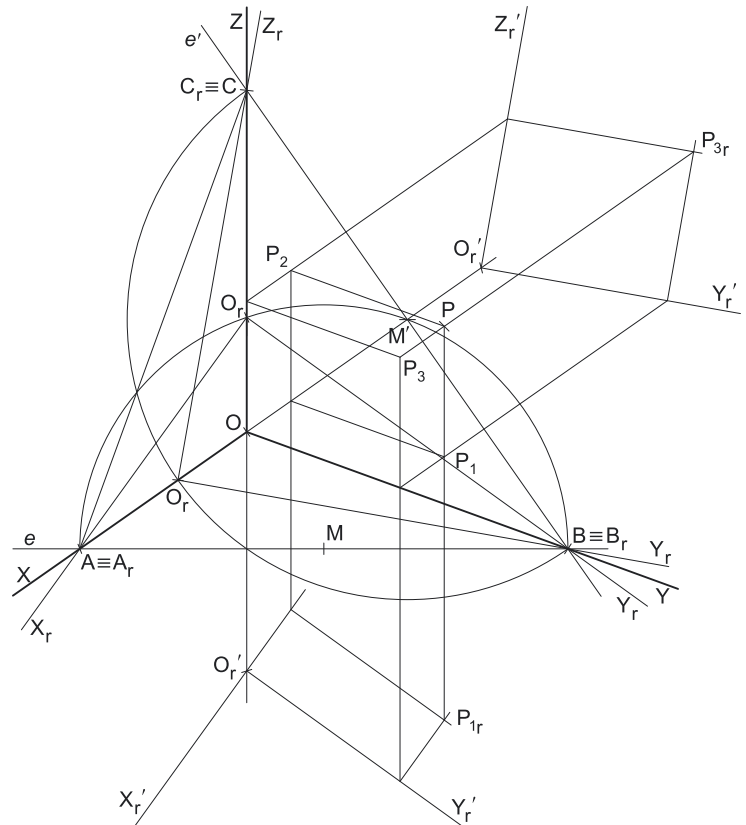
Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebateamento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o *plano coordenado XY* contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebateamento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o *plano coordenado XZ* (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o *plano coordenado YZ*, pois o eixo **Y** e o eixo **Y** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebateamento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **X**).

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebateamento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebateamento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebateamento dos planos coordenados**, o rebateamento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebateamento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebateamento). Nesse sentido, a charneira do rebateamento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[AB]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **A** e **B** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $B_r \equiv B$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo  $[AOB]$  está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[AB]$  (o ponto  $M$ ). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $\overline{MA} = \overline{MB}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[AB]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Z$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $XY$  para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $A_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $B_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[A_rO_rB_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XY$ , rebatido e trasladado, é o plano  $X_r'O_r'Y_r'$ .

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo  $X$  apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspectiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas do ponto  $P$  (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como em seguida, se expõe.

No entanto, optou-se por resolver este exercício recorrendo à prévia representação do ponto  $P$  em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, para o que é necessário rebater outro *plano coordenado*. Nesse sentido, optou-se por rebater o *plano coordenado YZ*.

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado  $[BC]$  do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos  $B$  e  $C$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $B_r \equiv B$  e  $C_r \equiv C$ .

O triângulo  $[BOC]$  está contido no *plano coordenado YZ* e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do *plano coordenado YZ* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[BC]$  (o ponto  $M'$ ). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio  $\overline{M'B} = \overline{M'C}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[BC]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $X$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $YZ$  para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $X$ .

O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $B_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $C_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[B_rO_rC_r]$  é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo  $Y$  – o eixo  $Y$  foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $YZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $X$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $YZ$ , rebatido e trasladado, é o plano  $Y_r'O_r'Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $Y_r$  e dois  $Y_r'$ .

### Determinação das perspectivas do ponto $P$ :

A determinação das perspectivas do ponto  $P$  poder-se-ia processar a partir das perspectivas das suas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e trasladados) das respetivas projeções do ponto  $P$ , em rebatimento.

Assim, no plano  $XY$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no **sentido negativo** do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $P$  (2 cm, em verdadeira grandeza) – note que o ponto  $P$  tem **abscissa negativa**. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto  $P$  (5 cm, em verdadeira grandeza). A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $P_{1r}$ , que é a **projeção horizontal** do ponto  $P$  em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ).

De forma semelhante, no plano  $YZ$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto  $P$  (5 cm, em verdadeira grandeza). Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto  $P$  (4 cm, em verdadeira grandeza). A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $P_{3r}$ , que é a **projeção lateral** do ponto  $P$  em rebatimento (no rebatimento do plano  $YZ$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, conduziu-se, por  $P_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto **P** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $P_{3r}$  (a **projeção lateral** do ponto **P** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **P**.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **P** sobre as perspetivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **P** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $P_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **P**),  $P_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **P**) e  $P_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **P**).

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e *YZ*, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e lateral) do ponto **P** em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

## 1098.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados*. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. O eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada, pelo que a sua perspetiva faz ângulos iguais com as perspetivas dos outros dois eixos – tendo em conta que a perspetiva do eixo **Y** faz um ângulo de  $115^\circ$  com a perspetiva do eixo **X**, a perspetiva do eixo **Y** faz, também, um ângulo de  $115^\circ$  com a perspetiva do eixo **Z**, o que perfaz um total de  $230^\circ$  ( $2 \times 115^\circ = 230^\circ$ ). Assim, a perspetiva do eixo **X** e a perspetiva do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $130^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 230^\circ = 130^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

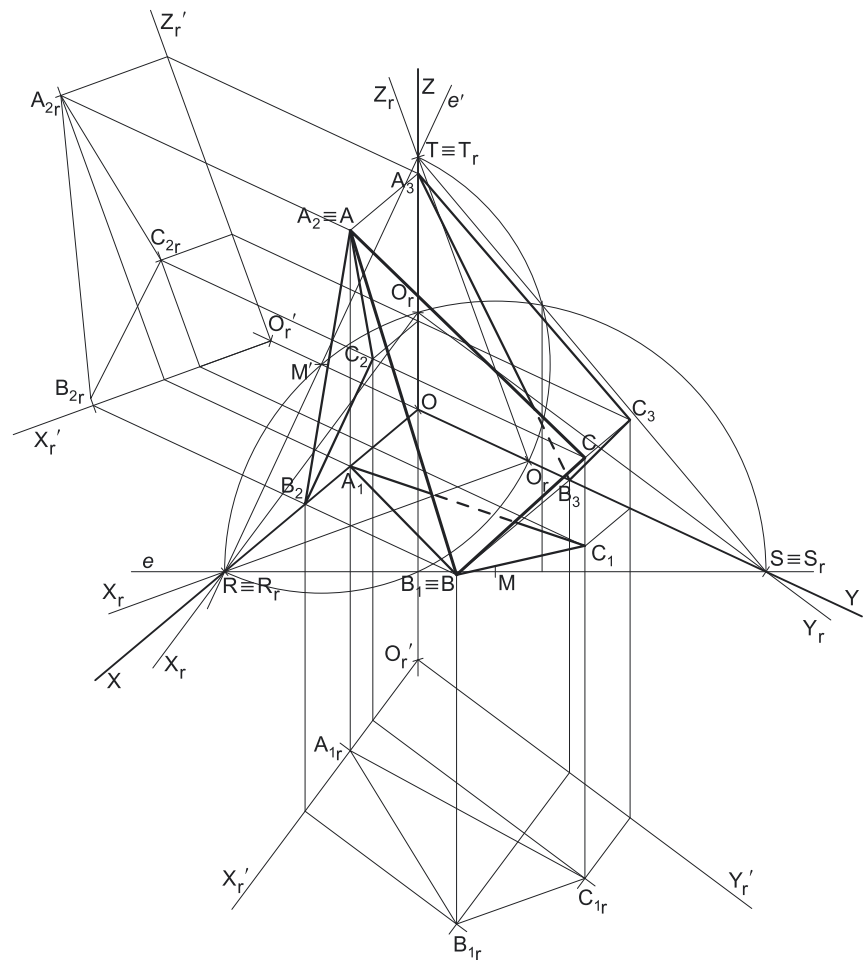
#### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspetivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspetivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como o enunciado refere expressamente, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspetivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo **Y**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o *plano coordenado XY* contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com um **único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o *plano coordenado YZ* (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o *plano coordenado XZ*, pois o eixo **X** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **Y**).

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto **O<sub>r</sub>** fica sobre a perspectiva do eixo **Z**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O<sub>r</sub>** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e transladado, é o plano **X<sub>r</sub>'O<sub>r</sub>'Y<sub>r</sub>'**.

O eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X** rebatido) e o eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **X** e o eixo **Z** apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo **Y** apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspectiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas dos três pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como Em seguida, se expõe.

No entanto, optou-se por resolver este exercício recorrendo à prévia representação dos três pontos em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, para o que é necessário rebater outro *plano coordenado*. Nesse sentido, optou-se por rebater o *plano coordenado XZ*.

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é a reta suporte do lado **[RT]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo **[ROT]** está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RT]** (o ponto **M'**). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'R} = \overline{M'T}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RT]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Y**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto **O<sub>r</sub>** fica sobre a perspectiva do eixo **Y**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **T<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>T<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **X** – o eixo **X** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O<sub>r</sub>** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Y**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Z<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XZ**, rebatido e transladado, é o plano **X<sub>r</sub>'O<sub>r</sub>'Z<sub>r</sub>'**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $X_r$  e dois  $X_r'$ .

#### Determinação das perspetivas dos três pontos:

A determinação das perspetivas dos três pontos poder-se-ia processar a partir das perspetivas das respetivas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e transladados) das respetivas projeções dos três pontos, em rebatimento.

Assim, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos três pontos (2 cm, 3 cm e 5 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos (5 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza – note que o ponto **A** tem afastamento nulo. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$  e  $C_{1r}$ , que são as **projeções horizontais** dos pontos **A**, **B** e **C** (respetivamente), em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**). Por fim, desenhou-se o triângulo  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}]$ , que é a projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**).

De forma semelhante, no plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos três pontos (2 cm, 3 cm e 5 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos (3 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza – note que o ponto **B** tem cota nula. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{2r}$ ,  $B_{2r}$  e  $C_{2r}$ , que são as **projeções frontais** dos pontos **A**, **B** e **C** (respetivamente), em rebatimento (no rebatimento do plano **XZ**). Por fim, desenhou-se o triângulo  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}]$ , que é a projeção frontal do triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento (no rebatimento do plano **XZ**).

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{2r}$  (a **projeção frontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **A**. O procedimento exposto repetiu-se para os pontos **B** e **C**, o que nos permitiu determinar as perspetivas propriamente ditas destes pontos.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **A** sobre as perspetivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**),  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) e  $A_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os pontos **B** e **C**, o que nos permitiu determinar as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral do ponto **B** ( $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$ ) e do ponto **C** ( $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ ).

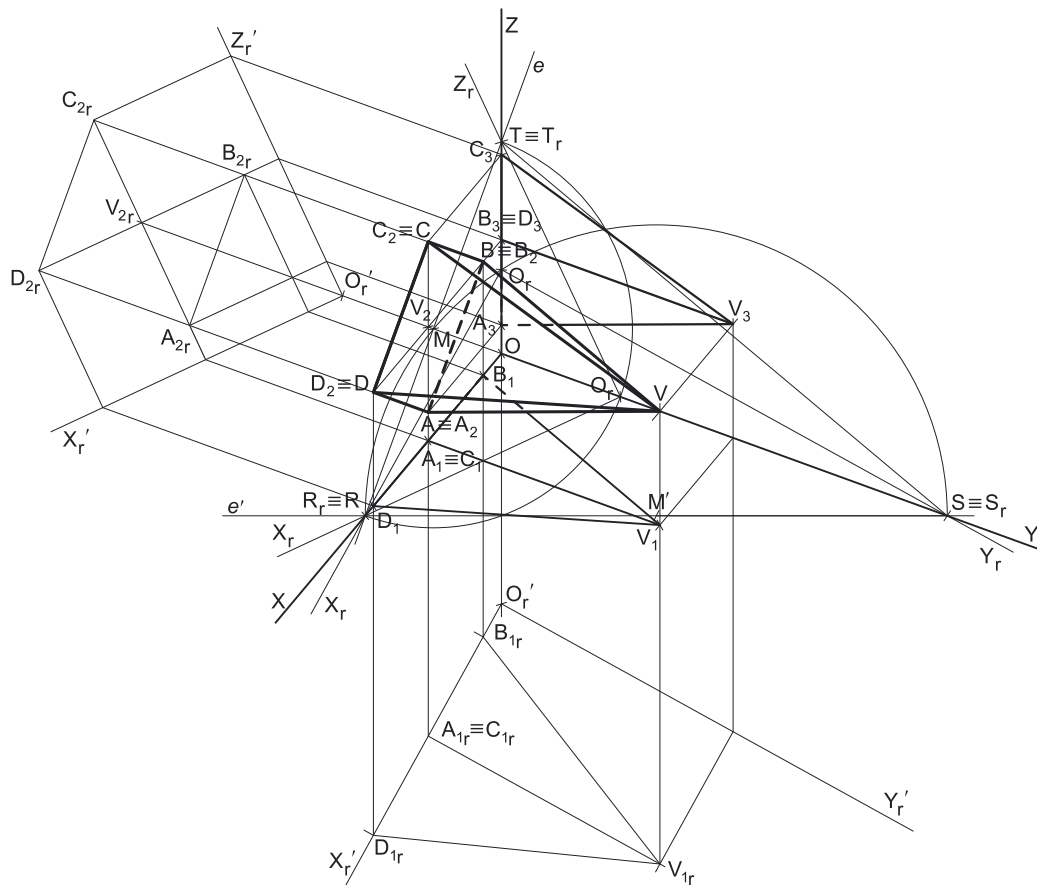
#### Determinação das perspetivas do triângulo:

Por fim, desenharam-se as perspetivas do triângulo. O triângulo  $[ABC]$  é a perspetiva propriamente dita do triângulo. O triângulo  $[A_1B_1C_1]$  é a perspetiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo  $[A_2B_2C_2]$  é a perspetiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo  $[A_3B_3C_3]$  é a perspetiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo – parte das projeções horizontal e lateral do triângulo estão ocultas pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva do triângulo  $[ABC]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e **XZ**, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) dos pontos **A**, **B** e **C** e do próprio triângulo em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

1099.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. A perspectiva do eixo X faz um ângulo de  $140^\circ$  com a perspectiva do eixo Z, pelo que o ângulo restante é um ângulo de  $220^\circ$  ( $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ ). Note que não pode haver mais nenhum ângulo de  $140^\circ$ , pois, caso houvesse um outro ângulo de  $140^\circ$ , o terceiro ângulo seria um ângulo de  $80^\circ$  ( $220^\circ - 140^\circ = 80^\circ$ ), que é um **ângulo agudo**. Ora, os ângulos que as perspectivas dos eixos fazem, entre si são necessariamente **ângulos obtusos**.

Assim, conclui-se que não pode haver dois ângulos de  $140^\circ$ . No entanto, tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois dos ângulos que as perspectivas dos eixos fazem entre si são iguais. Assim, a soma dos dois ângulos iguais é  $220^\circ$  (o ângulo restante), pelo que a perspectiva do eixo Y faz ângulos de  $110^\circ$  ( $220^\circ : 2 = 110^\circ$ ) com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo X e o eixo Z). Dessa forma, o eixo Y é o eixo que sofre a **redução isolada**.

Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

**Resolução:**

Note que os dados não nos permitem de uma forma direta, determinar as coordenadas dos restantes vértices da pirâmide, ao contrário de situações anteriores. Ainda assim, e de acordo com o efetuado em exercícios anteriores, é possível começar por **representar a pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal**, recorrendo ao rebatimento de dois dos *planos coordenados* e, dessa forma, a partir de duas projeções do sólido (em rebatimento), construir a sua perspectiva. Nesse sentido, todos os raciocínios se mantêm.

As coordenadas dos vértices da pirâmide medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo X, os afastamentos medem-se no eixo Y e as cotas no eixo Z. No entanto, nenhum dos *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo Y é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo X e o eixo Z) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo Y.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação. Por outro lado, e como acima atrás se referiu, para construir a perspectiva da pirâmide é necessário, nesta situação, começar por **representar a pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal**, em rebatimento, para o que é necessário rebater dois *planos coordenados*.

*Rebatimento de dois planos coordenados, para a determinação gráfica dos coeficientes de deformação e para a representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal:*

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**). De facto, a grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

Tendo em conta que a base da pirâmide se situa no *plano coordenado* **XZ**, o quadrado **[ABCD]** está em verdadeira grandeza em projeção frontal (a projeção do quadrado no *plano coordenado* **XZ**), optou-se, precisamente, por rebater o plano **XZ**. Em primeiro lugar,

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado* **XZ**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RT]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo **[ROT]** está contido no *plano coordenado* **XZ** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RT]** (o ponto **M**). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MT}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RT]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Y**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo **Y**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>T<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Y**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **XZ**, rebatido e trasladado, é o plano  $X_r'O_r'Z_r'$ .

Tendo em conta que se pretende **representar a pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal**, em rebatimento (recorrendo ao rebatimento de dois *planos coordenados*), é necessário recorrer ao rebatimento de um outro *plano coordenado* – o plano **XY** ou o plano **YZ**. Nesse sentido, optou-se por rebater o *plano coordenado* **XY**.

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado* **XY**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado* **XY** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M'**). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'R} = \overline{M'S}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **X** – o eixo **X** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e trasladado, é o plano  $X_r'O_r'Y_r'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $X_r$  e dois  $X_r'$ .

*Representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:*

Tendo em conta que o quadrado  $[ABCD]$  se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XZ$ , começou-se por construir a projeção frontal da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XZ$ ). Assim, no plano  $XZ$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos **A** e **B** (4 cm e 1 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos pontos **A** e **B** (1 cm e 4 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{2_r}$  e  $B_{2_r}$ , que são as **projeções frontais** dos pontos **A** e **B**, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ).

A partir de  $A_{2_r}$  e de  $B_{2_r}$ , efetuaram-se os traçados necessários à construção do quadrado  $[A_{2_r}B_{2_r}C_{2_r}D_{2_r}]$ , em verdadeira grandeza, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XZ$ ) – este procedimento permitiu-nos desenhar a **projeção frontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ). De facto, tendo em conta que se trata de uma **pirâmide regular**, o eixo da pirâmide está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta de topo (uma reta projetante frontal). Assim, a projeção frontal do ponto **V** (o vértice da pirâmide) está coincidente com a projeção frontal do centro do quadrado –  $V_{2_r}$  é a projeção frontal do ponto **V**, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XZ$ ) e situa-se no centro do quadrado  $[A_{2_r}B_{2_r}C_{2_r}D_{2_r}]$ .

Note que, na construção efetuada, foi possível determinar graficamente as coordenadas (abscissas e cotas) dos restantes vértices da pirâmide – o ponto **C** tem 4 cm de abscissa e 7 cm de cota e o ponto **D** tem 7 cm de abscissa e 4 cm de cota. Por fim, o ponto **V** tem 4 cm de abscissa e 4 cm de cota. Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e a sua base tem afastamento nulo, o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem 7 cm de afastamento ( $0 + 7 = 7$ ).

Assim, no plano  $XY$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos cinco vértices (1 cm, 4 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **V** (7 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1_r}$ ,  $B_{1_r}$ ,  $C_{1_r}$ ,  $D_{1_r}$  e  $V_{1_r}$ , que são as **projeções horizontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). Em seguida, desenhou-se a **projeção horizontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $XY$ ).

Este procedimento permitiu-nos obter a representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, através da sua **projeção horizontal** (em rebatimento, no rebatimento do plano coordenado  $XY$ ) e da sua **projeção frontal** (em rebatimento, no rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ).

*Determinação das perspetivas dos cinco vértices da pirâmide:*

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{2_r}$  (a **projeção frontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{1_r}$  (a **projeção horizontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **A**. O procedimento exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**), o que nos permitiu determinar as perspetivas propriamente ditas de todos aqueles pontos.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **A** sobre as perspetivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**),  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) e  $A_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**), o que nos permitiu determinar as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral de todos aqueles pontos.

*Determinação das perspetivas da pirâmide:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada  $[ADCBV]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente da perspetiva do sólido. No entanto, a aresta  $[AB]$ , da base, é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – a base  $[ABCD]$  e a face lateral  $[ABV]$ . Note que, na realidade, os vértices **A** e **B** são os vértices mais distantes do observador e, por isso, a aresta  $[AB]$  é invisível. Já as arestas laterais  $[CV]$  e  $[DV]$  são duas arestas visíveis, da pirâmide, porque separam faces da pirâmide que são visíveis, em perspetiva. Note ainda que os vértices **C** e **D** são dos vértices da pirâmide que estão mais próximos do observador.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas das projeções horizontal e lateral da pirâmide. Note que não se representou a perspetiva da projeção frontal da pirâmide, porque a pirâmide assenta, pela sua base, no plano coordenado  $XZ$ . Nestas situações, em que o sólido assenta num dos *planos coordenados*, a representação da projeção do sólido nesse plano coordenado, de uma forma geral, dificulta a leitura da resolução gráfica – nesse sentido, em geral, omite-se a representação dessa projeção.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[B_1V_1D_1]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. No entanto, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[A_3V_3C_3]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. No entanto, parte da projeção lateral da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

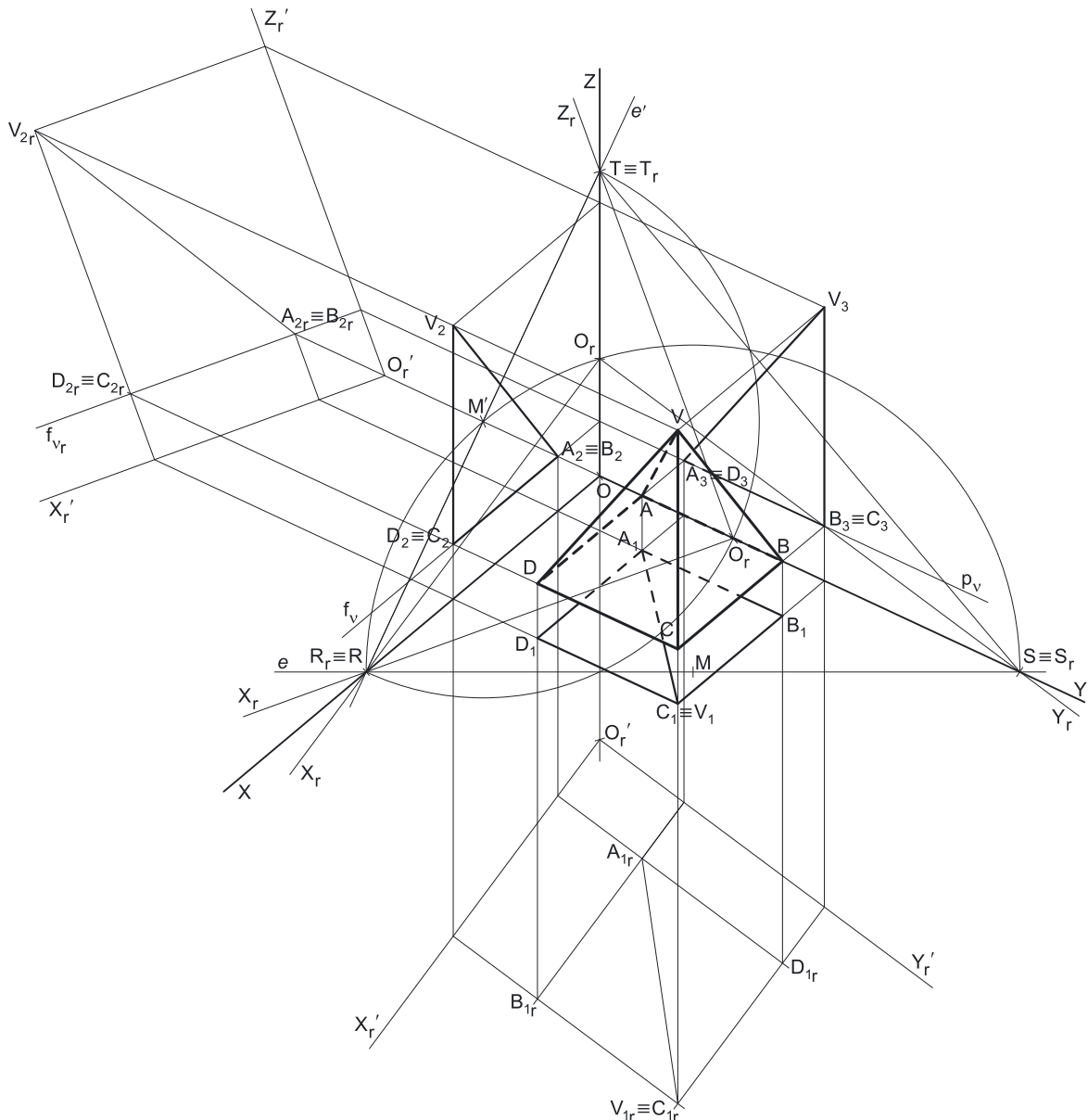
(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY e XZ*, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) da pirâmide em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

**1100.**



- a) Tendo em conta que os pontos **A** e **B** têm 2 cm de cota, a base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano horizontal (de nível) com 2 cm de cota, pelo que os pontos **C** e **D** têm necessariamente **2 cm de cota** (todos os pontos de um plano horizontal têm a mesma cota). Por outro lado, os pontos **A** e **B** têm o mesmo afastamento e a mesma cota, pelo que é possível concluir que o lado **[AB]** do quadrado é fronto-horizontal. (é paralelo ao eixo **X**). Assim, o lado **[CD]** do polígono será igualmente fronto-horizontal (paralelo ao eixo **X**), pois o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois. Por sua vez, os lados **[BC]** e **[AD]** serão necessariamente de topo horizontais (paralelos ao eixo **Y**), por estarem contidos num plano horizontal (o plano da base) e por serem perpendiculares aos lados **[AB]** e **[CD]**). Por fim, o lado **[AB]** mede 5 cm (a diferença entre as abcissas dos pontos **A** e **B**), que é a medida do lado do quadrado.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, atendendo a que o lado [BC] é de topo, o ponto C tem a mesma abcissa do ponto B (que é 7 cm) e o seu afastamento é 5 cm superior ao afastamento do ponto B (que é 3 cm) – o ponto C tem, assim, **8 cm de afastamento** e **7 cm de abcissa** (e 2 cm de cota, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto C são (7; 8; 2).

Atendendo a que o lado [AD] do quadrado é também de topo, o ponto D tem a mesma abcissa do ponto A (que é 3 cm). Por sua vez, o lado [CD] é fronto-horizontal, pelo que o ponto D tem o mesmo afastamento do ponto C (que é 8 cm). Assim, o ponto D tem **3 cm de abcissa** e **8 cm de afastamento** (e 2 cm de cota) – as coordenadas do ponto D são (3; 8; 2).

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto V) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e a sua base tem 2 cm de cota (a cota dos pontos A e B), o ponto V (o vértice da pirâmide) tem **10 cm de cota** ( $2 + 8 = 10$ ). Por outro lado, atendendo a que a aresta lateral [CV] é vertical, o ponto V tem a mesma abcissa e o mesmo afastamento do ponto C, ou seja, o ponto V tem **7 cm de abcissa** e **7 cm de afastamento**. Assim, as coordenadas do ponto V são (7; 7; 10).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do 1ª Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

#### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que o eixo Y é o eixo que sofre uma redução isolada, a sua perspetiva faz ângulos iguais com as perspetivas dos outros dois eixos (o eixo X e o eixo Z). As perspetivas do eixo X e do eixo Z fazem, entre si, um ângulo de  $130^\circ$ , pelo que o ângulo restante é um ângulo de  $230^\circ$  ( $360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$ ). Esse ângulo é a soma de dois ângulos iguais (os ângulos que a perspetiva do eixo Y faz com as perspetivas dos outros dois eixos), pelo que a perspetiva do eixo Y faz ângulos de  $115^\circ$  com as perspetivas dos outros dois eixos ( $230^\circ : 2 = 115^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrarias.

#### Resolução:

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo X, os **afastamentos** medem-se no eixo Y e as **cotas** no eixo Z. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspetivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como o enunciado refere expressamente, o eixo Y é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo X e o eixo Z) sofrem a mesma redução (as suas perspetivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo Y.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano XY, pois o plano coordenado XY contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o plano coordenado YZ (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o plano coordenado XZ, pois o eixo X e o eixo Z sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo Y).

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o plano coordenado ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do plano coordenado processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado XY) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta e) é a reta suporte do lado [RS] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos R e S são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo [ROS] está contido no plano coordenado XY e é um **triângulo retângulo** em O. O rebatimento do plano coordenado XY processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto M). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto M e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto O é, afinal, o plano projetante do eixo Y. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano XY para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspetiva do eixo Z.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_rO_rS_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XY$ , rebatido e transladado, é o plano  $X_r'O_r'Y_r'$ .

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo  $Y$  apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspectiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas dos cinco pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como Em seguida, se expõe.

No entanto, optou-se por resolver este exercício recorrendo à prévia **representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal**, em rebatimento, para o que é necessário rebater outro *plano coordenado*. Nesse sentido, optou-se por rebater o *plano coordenado XZ*.

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado  $[RT]$  do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r = R$  e  $T_r = T$ .

O triângulo  $[ROT]$  está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XZ$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RT]$  (o ponto  $M'$ ). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio  $M'R = M'T$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RT]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Y$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $XZ$  para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $Y$ .

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_rO_rT_r]$  é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo  $X$  – o eixo  $X$  foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Y$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XZ$ , rebatido e transladado, é o plano  $X_r'O_r'Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $X_r$  e dois  $X_r'$ .

#### *Representação dos cinco pontos e da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:*

A determinação das perspectivas dos cinco pontos poder-se-ia processar a partir das perspectivas das respetivas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e transladados) das respetivas projeções dos cinco pontos, em rebatimento.

Assim, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos cinco pontos (2 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos (3 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$ ,  $C_{1r}$ ,  $D_{1r}$  e  $V_{1r}$ , que são as **projeções horizontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). Em seguida, desenhou-se a **projeção horizontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XY*).

Já no plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos cinco pontos (2 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** do plano da base e do vértice da pirâmide (2 cm e 10 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{2r}$ ,  $B_{2r}$ ,  $C_{2r}$ ,  $D_{2r}$  e  $V_{2r}$ , que são as **projeções frontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XZ*). Em seguida, desenhou-se a **projeção frontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XZ*).

Este procedimento permitiu-nos obter a representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, através da sua **projeção horizontal** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado XY*) e da sua **projeção frontal** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado XZ*).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das perspetivas dos cinco vértices da pirâmide:

Em seguida, conduziu-se, por  $A_1$  (a **projeção horizontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e**) e, por  $A_2$  (a **projeção frontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta **e'**). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **A**. O procedimento exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**), o que nos permitiu determinar as perspetivas propriamente ditas de todos aqueles pontos.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **A** sobre as perspetivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**),  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) e  $A_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**), o que nos permitiu determinar as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral de todos aqueles pontos.

## Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide:

Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide. O plano  $v$  é um plano projetante frontal (porque é ortogonal ao plano **XZ**), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Assim, desenhou-se  $f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ), que passa necessariamente pelas perspetivas das projeções frontais dos vértices da base da pirâmide.

Por outro lado, o plano  $v$  é também um plano projetante lateral (porque é ortogonal ao plano **YZ**), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ). Assim, desenhou-se  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ), passando necessariamente pelas perspetivas das projeções laterais dos vértices da base da pirâmide.

As perspetivas do traço frontal ( $f_v$ ) e do traço lateral ( $p_v$ ) do plano  $v$  são necessariamente concorrentes num ponto da perspetiva do eixo **Z**.

## Determinação das perspetivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada [**BCDV**]. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **A**. Este, por ser o vértice mais distante do observador, é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas [**AB**] e [**AD**], da base, e a aresta lateral [**AV**]). Por outro lado, a aresta lateral [**CV**] é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais [**BCV**] e [**CDV**].

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero [ $A_1B_1V_1D_1$ ]. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Note que a aresta lateral [**AV**] é visível em projeção horizontal. Por outro lado, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

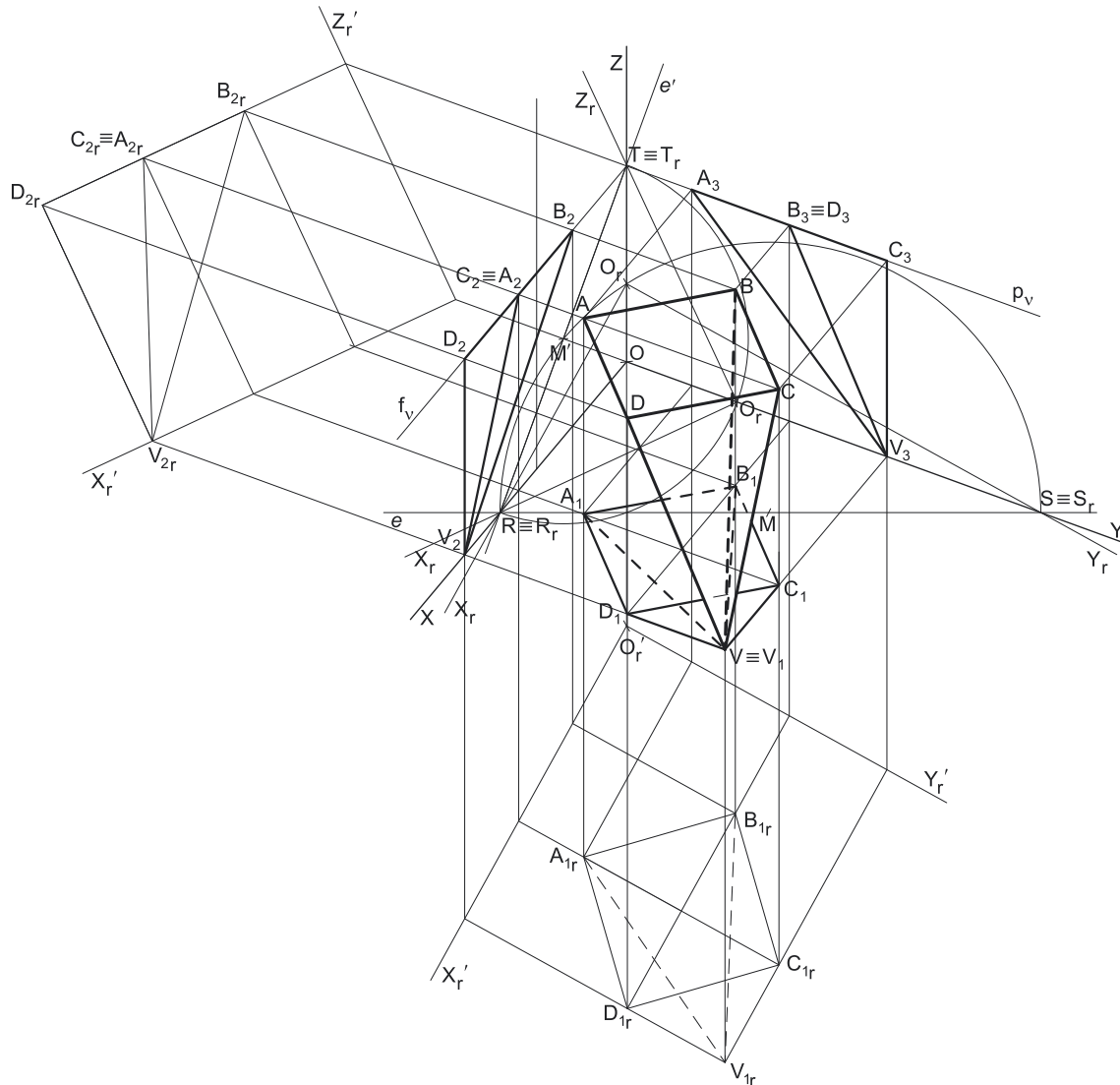
A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo [ $B_2C_2V_2$ ]. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, não existe qualquer parte da projeção frontal da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** (em projeção lateral).

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo [ $C_3D_3V_3$ ]. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção lateral), pelo que em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. No entanto, parte da projeção lateral da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

## Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e **XZ**, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) da pirâmide em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

1101.



a) A base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano horizontal (de nível) com 7 cm de cota (a cota dos pontos  $A$  e  $C$ ), pelo que os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **7 cm de cota** (todos os pontos de um plano horizontal têm a mesma cota). Os pontos  $A$  e  $C$  têm a mesma abcissa e a mesma cota, pelo que é possível concluir que a diagonal  $[AC]$  do quadrado é de topo (paralela ao eixo  $Y$ ). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal  $[BD]$ ), porque é perpendicular à diagonal  $[AC]$  e está contida num plano horizontal (de nível), é necessariamente fronto-horizontal (paralela ao eixo  $X$ ). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal  $[AC]$  tem necessariamente 5 cm de afastamento (a média aritmética dos afastamentos dos pontos  $A$  e  $C$ ). Nesse sentido, os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **5 cm de afastamento**. Por outro lado, a diagonal  $[AC]$  mede 6 cm (a diferença entre os afastamentos dos pontos  $A$  e  $C$ ), pelo que a diagonal  $[BD]$  mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

O ponto  $B$  é o vértice de menor abcissa do sólido (como o enunciado refere expressamente), pelo que a sua abcissa é 3 cm inferior à abcissa dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 6 cm) – nesse sentido, o ponto  $B$  tem **3 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto  $B$  são ( 3; 5; 7).

Pelo seu lado, o ponto  $D$  é o vértice de maior abcissa do sólido (por oposição ao ponto  $B$ ), pelo que a sua abcissa é 3 cm superior à abcissa dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 6 cm) – nesse sentido, o ponto  $D$  tem **9 cm de abcissa**. Assim, as coordenadas do ponto  $D$  são ( 9; 5; 7).

Tendo em conta que o enunciado refere, expressamente, que o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) tem **cota nula**, a cota do ponto  $V$  é dada no enunciado. A aresta lateral  $[DV]$  é de perfil, pelo que o ponto  $V$  tem a mesma abcissa do ponto  $D$  (todos os pontos de uma reta de perfil têm a mesma abcissa). Assim o ponto  $V$  tem **9 cm de abcissa**. A aresta lateral  $[CV]$  é frontal (de frente), pelo que o ponto  $V$  tem o mesmo afastamento do ponto  $C$  (todos os pontos de uma reta frontal têm o mesmo afastamento). Assim o ponto  $V$  tem **8 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto  $V$  são ( 9; 8; 0).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^a$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. A perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $140^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, pelo que o ângulo restante é um ângulo de  $220^\circ$  ( $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ ). Note que não pode haver mais nenhum ângulo de  $140^\circ$ , pois, caso houvesse um outro ângulo de  $140^\circ$ , o terceiro ângulo seria um ângulo de  $80^\circ$  ( $220^\circ - 140^\circ = 80^\circ$ ), que é um **ângulo agudo**. Ora, os ângulos que as perspectivas dos eixos fazem, entre si são necessariamente **ângulos obtusos**.

Assim, conclui-se que não pode haver dois ângulos de  $140^\circ$ . No entanto, tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois dos ângulos que as perspectivas dos eixos fazem entre si são iguais. Assim, a soma dos dois ângulos iguais é  $220^\circ$  (o ângulo restante), pelo que a perspectiva do eixo **Y** faz ângulos de  $110^\circ$  ( $220^\circ : 2 = 110^\circ$ ) com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**). Dessa forma, o eixo **Y** é o eixo que sofre a **redução isolada**.

Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

#### Resolução:

As coordenadas dos vértices da pirâmide medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **Y**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação. Por outro lado, e como acima atrás se referiu, para construir a perspectiva da pirâmide é necessário, nesta situação, começar por **representar a pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal**, em rebatimento, para o que é necessário rebater dois *planos coordenados*.

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o *plano coordenado XY* contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o *plano coordenado YZ* (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o *plano coordenado XZ*, pois o eixo **X** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **Y**).

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Y**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto **O<sub>r</sub>** fica sobre a perspectiva do eixo **Z**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O<sub>r</sub>** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e trasladado, é o plano **X<sub>r</sub>'O<sub>r</sub>'Y<sub>r</sub>'**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo  $Y$  apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspectiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas dos cinco pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como Em seguida, se expõe.

No entanto, optou-se por resolver este exercício recorrendo à prévia **representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal**, em rebatimento, para o que é necessário rebater outro *plano coordenado*. Nesse sentido, optou-se por rebater o *plano coordenado XZ*.

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado [RT] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo [ROT] está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XZ$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RT] (o ponto  $M'$ ). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio  $M'R = M'T$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RT] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Y$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $XZ$  para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $Y$ .

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo [ $R_rO_rT_r$ ] é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo  $X$  – o eixo  $X$  foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Y$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XZ$ , rebatido e transladado, é o plano  $X_r'O_r'Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $X_r$  e dois  $X_r'$ .

*Representação dos cinco pontos e da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:*

A determinação das perspectivas dos cinco pontos poder-se-ia processar a partir das perspectivas das respetivas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e transladados) das respetivas projeções dos cinco pontos, em rebatimento.

Assim, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos cinco pontos (3 cm, 6 cm e 9 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$ ,  $C_{1r}$ ,  $D_{1r}$  e  $V_{1r}$ , que são as **projeções horizontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). Em seguida, desenhou-se a **projeção horizontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XY*).

Já no plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos cinco pontos (3 cm, 6 cm e 9 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do plano da base (7 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{2r}$ ,  $B_{2r}$ ,  $C_{2r}$ ,  $D_{2r}$  e  $V_{2r}$ , que são as **projeções frontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XZ*). Em seguida, desenhou-se a **projeção frontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XZ*).

Este procedimento permitiu-nos obter a representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, através da sua **projeção horizontal** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado XY*) e da sua **projeção frontal** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado XZ*).

*Determinação das perspectivas dos cinco vértices da pirâmide:*

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto  $A$  em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{2r}$  (a **projeção frontal** do ponto  $A$  em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto  $A$ . O procedimento exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $V$ ), o que nos permitiu determinar as perspectivas propriamente ditas de todos aqueles pontos.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspectivas das coordenadas do ponto  $A$  sobre as perspectivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspectiva do paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a  $O$ ) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ),  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ) e  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**), o que nos permitiu determinar as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral de todos aqueles pontos.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide:*

Em seguida, representou-se o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide. O plano  $v$  é um plano projetante frontal (porque é ortogonal ao plano **XZ**), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Assim, desenhou-se  $f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ), que passa necessariamente pelas perspetivas das projeções frontais dos vértices da base da pirâmide.

Por outro lado, o plano  $v$  é também um plano projetante lateral (porque é ortogonal ao plano **YZ**), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ). Assim, desenhou-se  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ), passando necessariamente pelas perspetivas das projeções laterais dos vértices da base da pirâmide.

As perspetivas do traço frontal ( $f_v$ ) e do traço lateral ( $p_v$ ) do plano  $v$  são necessariamente concorrentes num ponto da perspetiva do eixo **Z**.

*Determinação das perspetivas da pirâmide:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ABCDV]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente da perspetiva do sólido. No entanto, a aresta lateral **[BV]** é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]**. De forma semelhante, também a aresta lateral **[AV]** é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais **[ABV]** e **[ADV]**. Apesar disso, a aresta **[AV]** está oculta por arestas da pirâmide que são visíveis, em perspetiva – a aresta **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[DV]**. Assim, nesta situação, a única invisibilidade a assinalar, em perspetiva, é a referente à aresta lateral **[BV]**. Note que, **nesta situação particular**, a face lateral **[ADV]** da pirâmide está contida num **plano projetante** (em perspetiva), pelo que a sua perspetiva se reduz a um segmento de reta (o segmento **[AV]**), pois apresenta a deformação máxima. Por outro lado, a aresta **[CD]**, da base, é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – a base **[ABCD]** e a face lateral **[CDV]**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo pentágono irregular **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. As arestas laterais **[AV]** e **[BV]** são invisíveis, em projeção horizontal, sendo essa a única **invisibilidade por projeção** a assinalar. Já a aresta **[CD]**, da base, é visível em projeção horizontal. Por outro lado, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, não existe qualquer parte da projeção frontal da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** (em projeção lateral).

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[A<sub>3</sub>V<sub>3</sub>C<sub>3</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção lateral), pelo que em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, não existe qualquer parte da projeção frontal da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** (em projeção lateral).

## Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e *XZ*, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) da pirâmide em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

**1102.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo  $Z$  faz um ângulo de  $140^\circ$  com a perspectiva do eixo  $X$  e um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Y$ , as perspectivas destes dois eixos (o eixo  $X$  e o eixo  $Y$ ) fazem, entre si, um ângulo de  $100^\circ$  ( $140^\circ + 120^\circ + 100^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas do ponto  $A$  medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo  $X$ , o **afastamento** mede-se no eixo  $Y$  e a **cota** no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projecção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspetivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

**Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:**

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano  $XY$ , pois o plano coordenado  $XY$  contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se poderia ter optado por rebater um outro plano coordenado qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro plano coordenado, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois planos coordenados.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XY$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e$ ) é a reta suporte do lado  $[RS]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o plano coordenado ser rebatido para o interior da pirâmide axonométrica e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do plano coordenado processava-se para fora da pirâmide axonométrica).

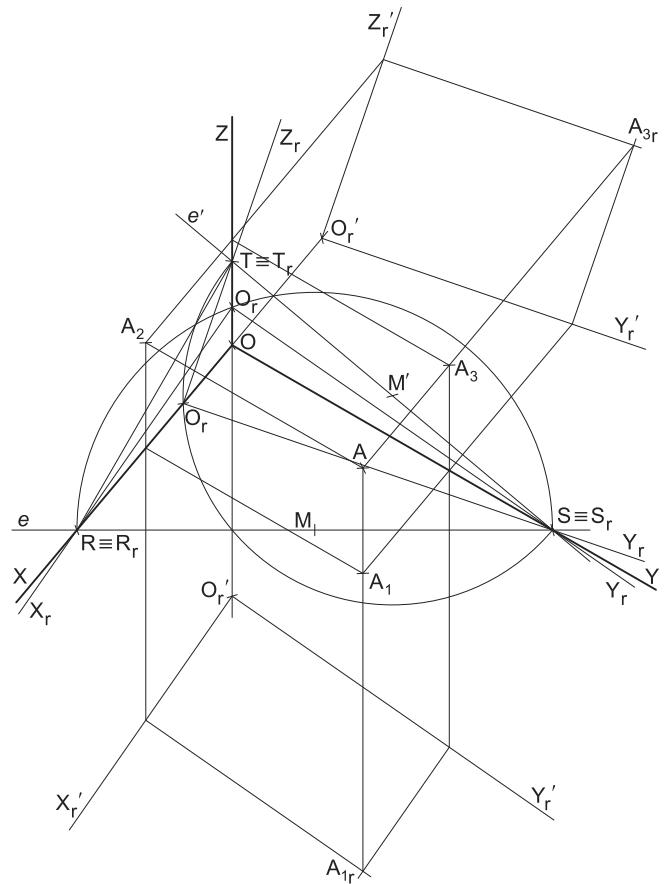
O triângulo  $[ROS]$  está contido no plano coordenado  $XY$  e é um **triângulo retângulo** em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RS]$  (o ponto  $M$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RS]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$  sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Z$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $XY$  para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_r O_r S_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XY$ , rebatido e transladado, é o plano  $X_r' O_r' Y_r'$ .

Tendo em conta que, numa **perspetiva trimétrica**, é necessário rebater os três eixos coordenados (porque os três apresentam coeficientes de deformação diferentes), é necessário, agora, rebater um dos outros dois planos coordenados (ambos contêm o eixo que nos falta rebater – o eixo  $Z$ ). Optou-se por rebater o plano coordenado  $YZ$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $YZ$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado  $[ST]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos  $S$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo  $[SOT]$  está contido no plano coordenado  $YZ$  e é um triângulo retângulo em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $YZ$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[ST]$  (o ponto  $M'$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio  $M'S = M'T$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[ST]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $X$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $YZ$  para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $X$ .

O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[S_rO_rT_r]$  é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo  $Y$  – o eixo  $Y$  foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes planos coordenados.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $YZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $X$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $YZ$ , rebatido e transladado, é o plano  $Y_r'O_r'Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o método dos cortes) existe uma sistemática repetição de notações, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $Y_r$  e dois  $Y_r'$ .

#### Determinação das perspectivas do ponto A:

A determinação das perspectivas do ponto  $A$  poder-se-ia processar a partir das perspectivas das suas coordenadas, como em situações anteriores, mas, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois planos coordenados rebatidos (e transladados) das respetivas projeções do ponto  $A$ , em rebatimento.

Assim, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $A$  (4 cm, em verdadeira grandeza). Ainda no plano  $XY$  rebatido, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto  $A$  (7 cm, em verdadeira grandeza). A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ , que é a **projeção horizontal** do ponto  $A$  em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ).

Por sua vez, no plano  $YZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto  $A$  (7 cm, em verdadeira grandeza). Ainda no plano  $YZ$  rebatido, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto  $A$  (5 cm, em verdadeira grandeza). A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{3r}$ , que é a **projeção lateral** do ponto  $A$  em rebatimento (no rebatimento do plano  $YZ$ ).

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto  $A$  em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{3r}$  (a **projeção lateral** do ponto  $A$  em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto  $A$ .

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspectivas das coordenadas do ponto  $A$  sobre as perspectivas dos respetivos eixos coordenados e, assim, concluir a construção da perspectiva do paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a  $O$ ) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos planos coordenados foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ),  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ) e  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ).

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos planos coordenados  $XY$  e  $YZ$ , da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e lateral) do ponto  $A$  em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

## 1103.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $135^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de  $110^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $115^\circ$  ( $135^\circ + 110^\circ + 115^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas do ponto **P** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

**Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:**

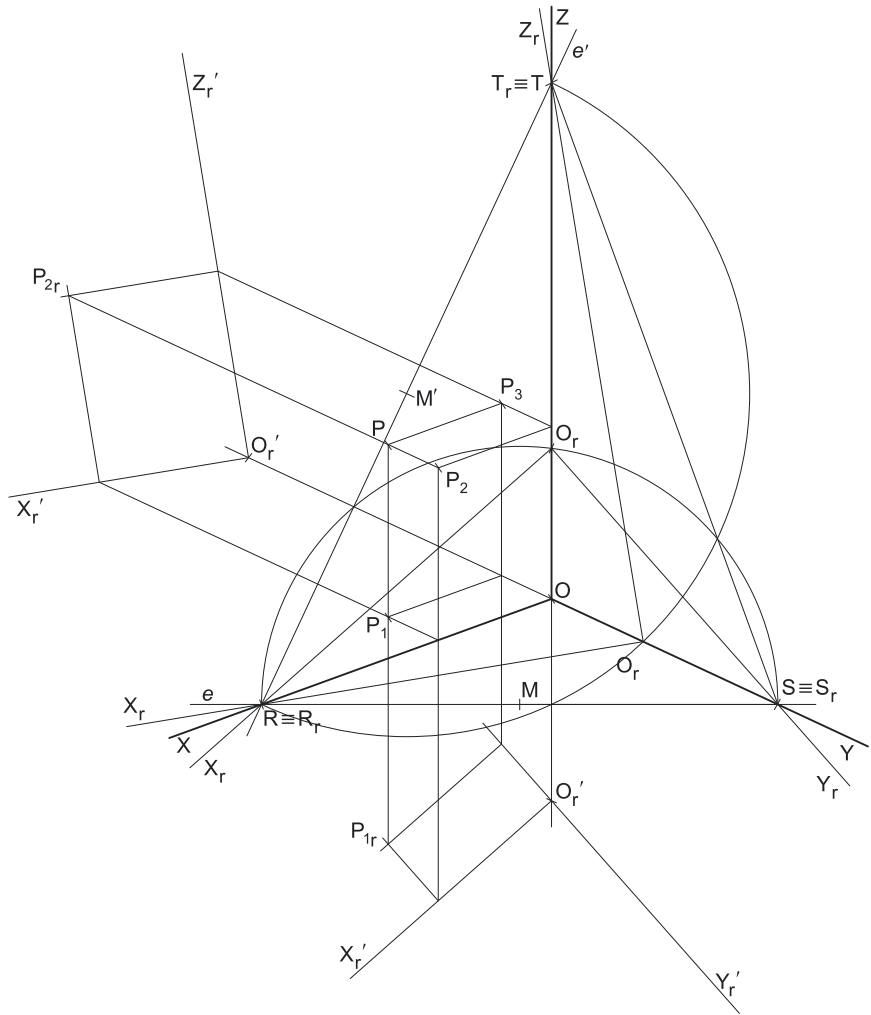
O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o plano coordenado **XY** contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se poderia ter optado por rebater um outro *plano coordenado* qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro *plano coordenado*, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois *planos coordenados*.

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e transladado, é o plano  $X_r'O_r'Y_r'$ .

Tendo em conta que, numa **perspetiva trimétrica**, é necessário rebater os três eixos coordenados (porque os três apresentam coeficientes de deformação diferentes), é necessário, agora, rebater um dos outros dois *planos coordenados* (ambos contêm o eixo que nos falta rebater – o eixo **Z**). Optou-se por rebater o *plano coordenado XZ*.

Assim, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado **[RT]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo **[ROT]** está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RT]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'R} = \overline{M'T}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RT]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Y**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo **Y**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>T<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **X** – o eixo **X** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Y**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **XZ**, rebatido e transladado, é o plano  $X_r'O_r'Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $X_r$  e dois  $X_r'$ .

#### Determinação das perspetivas do ponto **P**:

A determinação das perspetivas do ponto **P** poder-se-ia processar a partir das perspetivas das suas coordenadas, como em situações anteriores, mas, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e transladados) das respetivas projeções do ponto **A**, em rebatimento.

Assim, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **P** (4 cm, em verdadeira grandeza). Ainda no plano **XY** rebatido, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no **sentido negativo** do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **P** (2 cm, em verdadeira grandeza) – note que o ponto **P** tem **afastamento negativo**. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $P_{1r}$ , que é a **projeção horizontal** do ponto **P** em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**).

Por sua vez, no plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **P** (4 cm, em verdadeira grandeza). Ainda no plano **XZ** rebatido, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **P** (5 cm, em verdadeira grandeza). A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $P_{2r}$ , que é a **projeção frontal** do ponto **P** em rebatimento (no rebatimento do plano **XZ**).

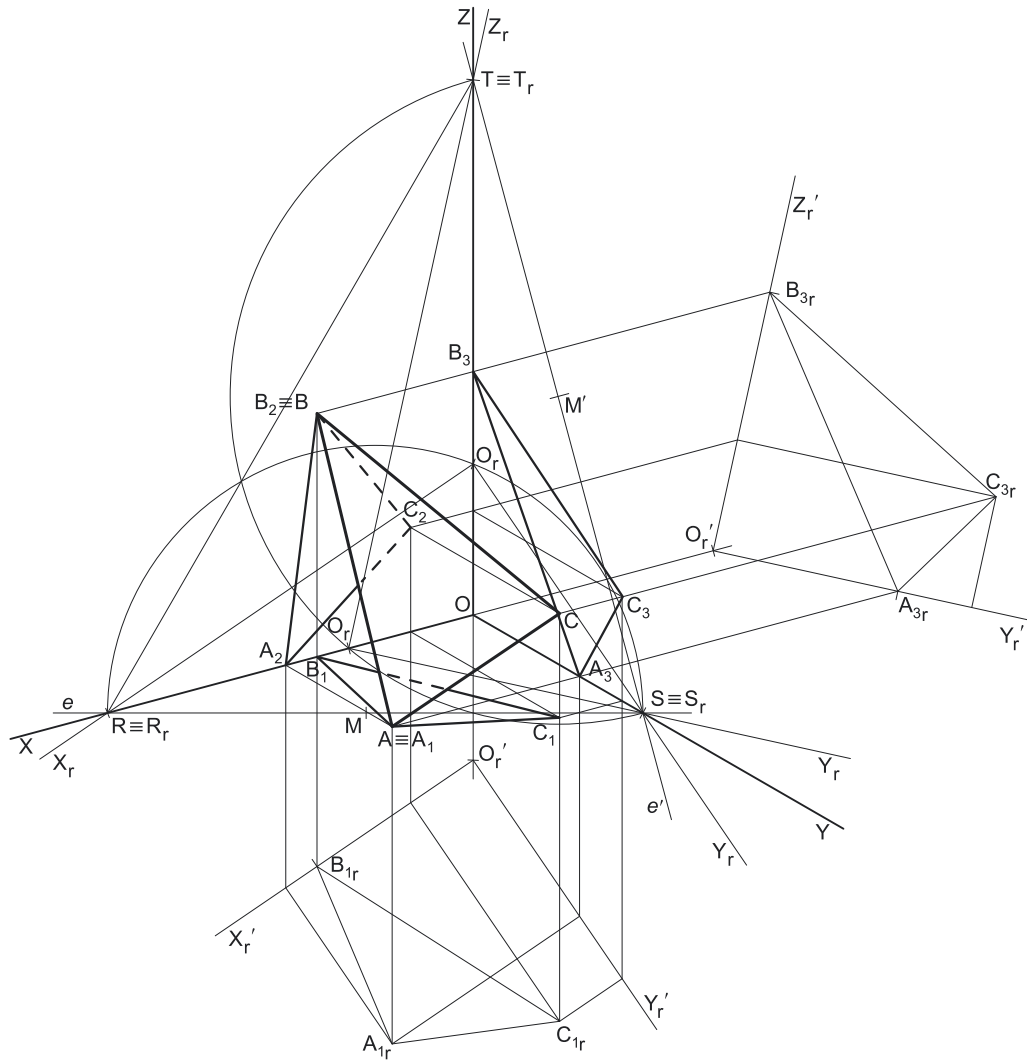
Em seguida, conduziu-se, por  $P_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto **P** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $P_{2r}$  (a **projeção frontal** do ponto **P** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **P**.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **P** sobre as perspetivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **P** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $P_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **P**),  $P_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **P**) e  $P_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **P**).

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e **XZ**, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) do ponto **P** em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

1104.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de  $105^\circ$  com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de  $135^\circ$  ( $105^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três *eixos coordenados*, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

*Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:*

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o plano coordenado **XY** contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se poderia ter optado por rebater um outro *plano coordenado* qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro *plano coordenado*, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois *planos coordenados*.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XY$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e$ ) é a reta suporte do lado  $[RS]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

A grande diferença entre este processo (o método dos cortes) e o anterior (o rebatimento dos planos coordenados) consiste no facto de, neste processo, o plano coordenado ser rebatido para o interior da pirâmide axonométrica e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no rebatimento dos planos coordenados, o rebatimento do plano coordenado processava-se para fora da pirâmide axonométrica).

O triângulo  $[ROS]$  está contido no plano coordenado  $XY$  e é um triângulo retângulo em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RS]$  (o ponto  $M$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RS]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Z$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $XY$  para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_rO_rS_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XY$ , rebatido e transladado, é o plano  $X_r'O_r'Y_r'$ .

Tendo em conta que, numa perspectiva trimétrica, é necessário rebater os três eixos coordenados (porque os três apresentam coeficientes de deformação diferentes), é necessário, agora, rebater um dos outros dois planos coordenados (ambos contêm o eixo que nos falta rebater – o eixo  $Z$ ). Optou-se por rebater o plano coordenado  $YZ$ .

Assim, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $YZ$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado  $[ST]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos  $S$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo  $[SOT]$  está contido no plano coordenado  $YZ$  e é um triângulo retângulo em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $YZ$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[ST]$  (o ponto  $M'$ ) – com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio  $\overline{M'S} = \overline{M'T}$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[ST]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $X$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $YZ$  para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $X$ .

O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[S_rO_rT_r]$  é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo  $Y$  – o eixo  $Y$  foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes planos coordenados.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $YZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $X$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $YZ$ , rebatido e transladado, é o plano  $Y_r'O_r'Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o método dos cortes) existe uma sistemática repetição de notações, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $Y_r$  e dois  $Y_r'$ .

#### Determinação das perspectivas dos três pontos:

A determinação das perspectivas dos três pontos poder-se-ia processar a partir das perspectivas das respetivas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois planos coordenados rebatidos (e transladados) das respetivas projeções dos três pontos, em rebatimento.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos três pontos (2 cm, 5 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos (5 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza – note que o ponto **B** tem afastamento nulo. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$  e  $C_{1r}$ , que são as **projeções horizontais** dos pontos **A**, **B** e **C** (respectivamente), em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). Por fim, desenhou-se o triângulo  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}]$ , que é a projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ).

De forma semelhante, no plano  $YZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos (5 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza – recorde que o ponto **B** tem afastamento nulo. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos (3 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza – note que o ponto **A** tem cota nula. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{3r}$ ,  $B_{3r}$  e  $C_{3r}$ , que são as **projeções laterais** dos pontos **A**, **B** e **C** (respectivamente), em rebatimento (no rebatimento do plano  $YZ$ ). Por fim, desenhou-se o triângulo  $[A_{3r}B_{3r}C_{3r}]$ , que é a projeção lateral do triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento (no rebatimento do plano  $YZ$ ).

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{3r}$  (a **projeção lateral** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **A**. O procedimento exposto repetiu-se para os pontos **B** e **C**, o que nos permitiu determinar as perspetivas propriamente ditas destes pontos.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **A** sobre as perspetivas dos respetivos eixos *coordenados* e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**),  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) e  $A_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os pontos **B** e **C**, o que nos permitiu determinar as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral do ponto **B** ( $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$ ) e do ponto **C** ( $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ ).

#### Determinação das perspetivas do triângulo:

Por fim, desenharam-se as perspetivas do triângulo. O triângulo  $[ABC]$  é a perspetiva propriamente dita do triângulo. O triângulo  $[A_1B_1C_1]$  é a perspetiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo  $[A_2B_2C_2]$  é a perspetiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo  $[A_3B_3C_3]$  é a perspetiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo – parte das projeções horizontal e frontal do triângulo estão ocultas pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva do triângulo  $[ABC]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados*  $XY$  e  $YZ$ , da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) dos pontos **A**, **B** e **C** e do próprio triângulo em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

## 1105.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de  $105^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de  $135^\circ$  ( $120^\circ + 105^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

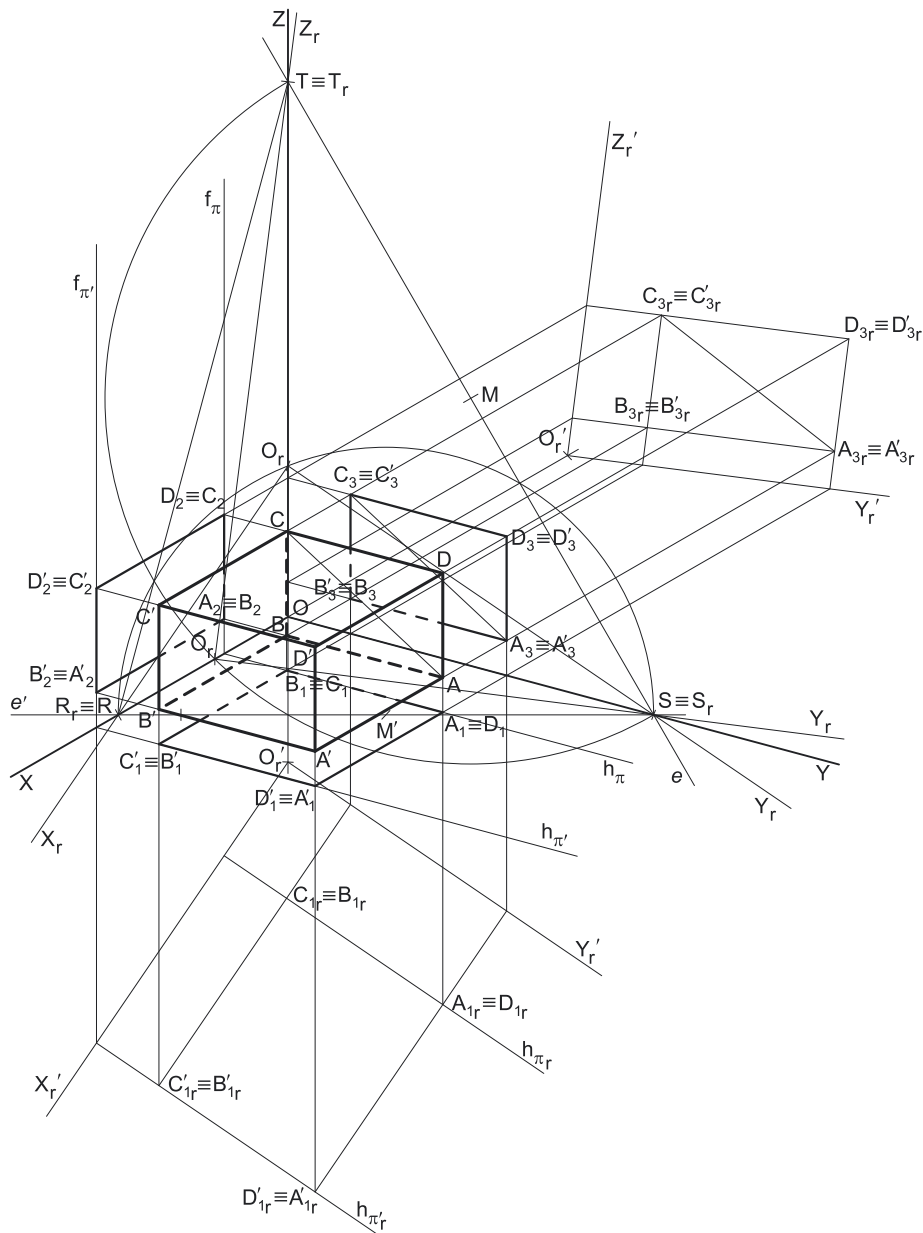
### Resolução:

Note que os dados não nos permitem de uma forma direta, determinar as coordenadas dos restantes vértices do sólido, ao contrário de situações anteriores. Ainda assim, e de acordo com o efetuado em exercícios anteriores, é possível começar por **representar o paralelepípedo em Dupla Projeção Ortogonal**, recorrendo ao rebatimento de dois dos planos coordenados e, dessa forma, a partir de duas projeções do sólido (em rebatimento), construir a sua perspectiva. Nesse sentido, todos os raciocínios se mantêm.

As coordenadas dos vértices do sólido medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação. Por outro lado, e como acima atrás se referiu, para construir a perspectiva da pirâmide é necessário, nesta situação, começar por **representar o paralelepípedo em Dupla Projeção Ortogonal**, em rebatimento, para o que é necessário rebater dois planos coordenados.



*Rebatimento de dois planos coordenados, para a determinação gráfica dos coeficientes de deformação e para a representação do paralelepípedo em Dupla Projeção Ortogonal:*

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**). De facto, a grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o plano coordenado ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do plano coordenado processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que o retângulo [ABCD] (a base mais à direita do sólido) está contido num plano de perfil (que é paralelo ao *plano coordenado* **YZ**), o retângulo [ABCD] projeta-se em verdadeira grandeza em projeção lateral (a projeção do retângulo no *plano coordenado* **YZ** não tem deformação), optou-se, precisamente, por rebater o plano **YZ**. Em primeiro lugar,

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado* **YZ**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado [ST] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo [SOT] está contido no *plano coordenado* **YZ** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **YZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [ST] (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MS} = \overline{MT}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [ST] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **YZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo **X**.

O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo [ $S_r O_r T_r$ ] é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **X**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **YZ**, rebatido e trasladado, é o plano  $Y_r' O_r' Z_r'$ .

Tendo em conta que, numa **perspetiva trimétrica**, é necessário rebater os três eixos coordenados (porque os três apresentam coeficientes de deformação diferentes), é necessário, agora, rebater um dos outros dois *planos coordenados* (ambos contêm o eixo que nos falta rebater – o eixo **X**). Por outro lado, tendo em conta que se pretende **representar o paralelepípedo em Dupla Projeção Ortogonal**, em rebatimento (recorrendo ao rebatimento de dois *planos coordenados*), é necessário recorrer ao rebatimento de um outro *plano coordenado* – o plano **XY** ou o plano **XZ**. Nesse sentido, optou-se por rebater o *plano coordenado* **XY**.

Assim, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado* **XY**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é a reta suporte do lado [RS] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo [ROS] está contido no *plano coordenado* **XY** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'R} = \overline{M'S}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo [ $R_r O_r S_r$ ] é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **Y** – o eixo **Y** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e trasladado, é o plano  $X_r' O_r' Y_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $Y_r$  e dois  $Y_r'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Representação do paralelepípedo em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:*

Tendo em conta que o retângulo  $[ABCD]$  se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $YZ$ , começou-se por construir a projeção lateral do paralelepípedo, em rebatimento (no rebatimento do plano  $YZ$ ). Assim, no plano  $YZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **A** e **C** (7 cm e 2 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos pontos **A** e **C** (1 cm e 4 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_3$  e  $C_3$ , que são as **projeções laterais** dos pontos **A** e **C**, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $XZ$ ).

A partir de  $A_3$  e de  $C_3$ , efetuaram-se os traçados necessários à construção do retângulo  $[A_3B_3C_3D_3]$  (a projeção lateral do retângulo  $[ABCD]$ ), em verdadeira grandeza, em rebatimento (no rebatimento do plano  $YZ$ ) e atendendo aos dados. Uma vez que o lado  $[AB]$ , do retângulo, é paralelo ao eixo  $Y$  (é de topo), a projeção lateral desse lado (o segmento  $[A_3B_3]$ ) é necessariamente paralelo ao eixo  $Y_r'$ . Por outro lado, uma vez que os lados de um retângulo são perpendiculares entre si dois a dois, o lado  $[BC]$ , do retângulo, é necessariamente paralelo ao eixo  $Z$  (é vertical) – a sua projeção lateral (o segmento  $[B_3C_3]$ ) é necessariamente paralela ao eixo  $Z_r'$ .

O procedimento atrás exposto permitiu-nos desenhar o retângulo  $[A_3B_3C_3D_3]$ , que é a projeção lateral do retângulo  $[ABCD]$ , em rebatimento (no rebatimento do plano  $YZ$ ). Um paralelepípedo é um prisma retangular reto, cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos que contêm as bases – neste caso, e porque as bases estão contidas em planos de perfil, as arestas laterais do sólido estão contidas em retas fronto-horizontais, que são retas projetantes laterais. Tendo em conta que as arestas laterais do paralelepípedo são projetantes laterais, as projeções laterais dos vértices da base  $[A'B'C'D']$  estão coincidentes com as projeções laterais dos vértices da base  $[ABCD]$  – tem-se, imediatamente,  $A'_{3r} \equiv A_3$ ,  $B'_{3r} \equiv B_3$ ,  $C'_{3r} \equiv C_3$  e  $D'_{3r} \equiv D_3$ . O retângulo  $[A'_{3r}B'_{3r}C'_{3r}D'_{3r}]$  (que está coincidente com o retângulo  $[A_3B_3C_3D_3]$ ) é a **projeção lateral do paralelepípedo**, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $YZ$ ).

Note que, na construção efetuada, foi possível determinar graficamente as coordenadas (afastamentos e cotas) dos restantes vértices do sólido – o ponto **B** tem 2 cm de afastamento e 1 cm de cota e o ponto **D** tem 7 cm de afastamento e 4 cm de cota.

Em seguida, efetuou-se a construção da projeção horizontal do paralelepípedo, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). A altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as bases, o que, neste caso, corresponde à diferença das abcissas dos planos de perfil que contêm as bases. Tendo em conta que o paralelepípedo tem 6 cm de altura e que a base mais à direita (o retângulo  $[ABCD]$ ) está contida num plano de perfil  $\pi$  com 2 cm de abcissa (a abcissa dos pontos **A** e **C**), o plano  $\pi'$  (o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do sólido) tem necessariamente 8 cm de abcissa ( $2 + 6 = 8$ ).

Assim, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos planos  $\pi$  e  $\pi'$  (2 cm e 8 cm, respetivamente), o que nos permitiu representar os respetivos traços horizontais em rebatimento –  $h_{\pi r}$  é, em rebatimento, o traço horizontal do plano  $\pi$  (o plano que contém a base mais à direita do sólido) e  $h_{\pi' r}$  é, também em rebatimento, o traço horizontal do plano  $\pi'$  (o plano que contém a base mais à esquerda do sólido). Note que os traços horizontais dos dois planos, sendo duas retas de topo, são paralelos ao eixo  $Y$  – assim,  $h_{\pi r}$  e  $h_{\pi' r}$  são, ambos, paralelos ao eixo  $Y_r'$ .

Em seguida, ainda no plano  $XY$  rebatido e transladado, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos vértices do retângulo  $[ABCD]$  (2 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$ ,  $C_{1r}$  e  $D_{1r}$ , que são as **projeções horizontais** dos vértices do retângulo, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $YZ$ ). Note que se tem  $A_{1r} \equiv D_{1r}$  e  $B_{1r} \equiv C_{1r}$ , pois os pontos **A** e **D** situam-se na mesma reta projetante horizontal, assim como os pontos **B** e **C** se situam também na mesma reta projetante horizontal.

Por fim desenhou-se o retângulo que é a **projeção horizontal** do paralelepípedo, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $YZ$ ), o que nos permitiu determinar as projeções horizontais, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $XY$ ), dos vértices da base  $[A'B'C'D']$  –  $A'_{1r}$ ,  $B'_{1r}$ ,  $C'_{1r}$  e  $D'_{1r}$ . Note que se tem  $A'_{1r} \equiv D'_{1r}$  e  $B'_{1r} \equiv C'_{1r}$ , pois os pontos **A'** e **B'** situam-se na mesma reta projetante horizontal, assim como os pontos **B'** e **C'** se situam também na mesma reta projetante horizontal.

Todo este procedimento permitiu-nos obter a representação do prisma em Dupla Projeção Ortogonal, através da sua **projeção horizontal** (em rebatimento, no rebatimento do plano coordenado  $XY$ ) e da sua **projeção lateral** (em rebatimento, no rebatimento do plano coordenado  $YZ$ ).

*Determinação das perspetivas dos oito vértices do paralelepípedo:*

Em seguida, conduziu-se, por  $A_3$  (a **projeção lateral** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **A**. O procedimento exposto repetiu-se para os restantes vértices do prisma (os pontos **C**, **D**, **A'**, **B'**, **C'** e **D'**), o que nos permitiu determinar as perspetivas propriamente ditas de todos aqueles pontos.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **A** sobre as perspetivas dos respetivos eixos coordenados e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos planos coordenados foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**),  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) e  $A_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os restantes vértices do prisma (os pontos **C**, **D**, **A'**, **B'**, **C'** e **D'**), o que nos permitiu determinar as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral de todos aqueles pontos.

*Representação do plano  $\pi$ , o plano de perfil que contém a base  $[ABCD]$  do paralelepípedo:*

Em seguida, representou-se o plano  $\pi$ , o plano de perfil que contém a base mais à direita do paralelepípedo. O plano  $\pi$  é um plano projetante frontal (porque é ortogonal ao plano  $XZ$ ), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço frontal ( $f_{\pi}$ ). Assim, desenhou-se  $f_{\pi}$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi$ ), que passa necessariamente pelas perspetivas das projeções frontais dos vértices da base  $[ABCD]$  do paralelepípedo.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, o plano  $\pi$  é também um plano projetante horizontal (porque é ortogonal ao plano  $XY$ ), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Assim, desenhou-se  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ), passando necessariamente pelas perspectivas das projeções horizontais dos vértices da base  $[ABCD]$  do paralelepípedo.

As perspectivas do traço frontal ( $f_\pi$ ) e do traço horizontal ( $h_\pi$ ) do plano  $\pi$  são necessariamente concorrentes num ponto da perspectiva do eixo  $X$ .

*Representação do plano  $\pi'$ , o plano de perfil que contém a base  $[A'B'C'D']$  do paralelepípedo:*

Representou-se, ainda, o plano  $\pi'$ , o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do paralelepípedo. O plano  $\pi'$  é um plano projetante frontal (porque é ortogonal ao plano  $XZ$ ), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço frontal ( $f_{\pi'}$ ). Assim, desenhou-se  $f_{\pi'}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi'$ ), que passa necessariamente pelas perspectivas das projeções frontais dos vértices da base  $[A'B'C'D']$  do paralelepípedo.

Por outro lado, o plano  $\pi'$  é também um plano projetante horizontal (porque é ortogonal ao plano  $XY$ ), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço horizontal ( $h_{\pi'}$ ). Assim, desenhou-se  $h_{\pi'}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi'$ ), passando necessariamente pelas perspectivas das projeções horizontais dos vértices da base  $[A'B'C'D']$  do paralelepípedo.

As perspectivas do traço frontal ( $f_{\pi'}$ ) e do traço horizontal ( $h_{\pi'}$ ) do plano  $\pi'$  são necessariamente concorrentes num ponto da perspectiva do eixo  $X$ .

*Determinação das perspectivas do paralelepípedo:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do paralelepípedo**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[AA'B'C'D]$ . Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – os vértices  $D'$  e  $B$ . O vértice  $D'$ , por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'D']$  e  $[C'D']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e a aresta lateral  $[DD']$ . O vértice  $B$ , por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$  (da base  $[ABCD]$ ) e a aresta lateral  $[BB']$ .

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas da projeção horizontal, da projeção frontal e da projeção lateral do paralelepípedo.

A **perspetiva da projeção horizontal do paralelepípedo** é limitada pelo paralelogramo  $[C_1D_1D'_1C'_1]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção horizontal do paralelepípedo é invisível (por estar oculta pelo próprio paralelepípedo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal do paralelepípedo** é limitada pelo paralelogramo  $[A_2D_2D'_2A'_2]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção frontal do paralelepípedo é invisível (por estar oculta pelo próprio paralelepípedo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[A'_3B'_3C'_3D'_3]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção lateral do paralelepípedo é invisível (por estar oculta pelo próprio paralelepípedo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. Os planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos que contêm as bases do paralelepípedo), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. A perspectiva do paralelepípedo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) do paralelepípedo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados*  $XY$  e  $YZ$ , da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e lateral) do paralelepípedo em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.



## 1106.

a) A base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida no plano coordenado  $YZ$ , pelo que os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **abscissa nula** (todos os pontos do plano coordenado  $YZ$  têm abscissa nula). Os pontos  $A$  e  $C$  têm o mesmo afastamento e a mesma abscissa, pelo que é possível concluir que a diagonal  $[AC]$  do quadrado é vertical (paralela ao eixo  $Z$ ). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal  $[BD]$ ), porque é perpendicular à diagonal  $[AC]$  e está contida no plano coordenado  $YZ$ , é necessariamente de topo (paralela ao eixo  $Y$ ). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bisetam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal  $[AC]$  tem necessariamente 3 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos  $A$  e  $C$ ). Nesse sentido, os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **3 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal  $[AC]$  mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos  $A$  e  $C$ ), pelo que a diagonal  $[BD]$  mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

O ponto  $B$  é o vértice de menor afastamento da base (como o enunciado refere expressamente), pelo que o seu afastamento é 3 cm inferior ao afastamento dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto  $B$  tem **2 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto  $B$  são  $(0; 2; 3)$ .

Pelo seu lado, o ponto  $D$  é o vértice de maior afastamento da base (por oposição ao ponto  $B$ ), pelo que o seu afastamento é 3 cm superior ao afastamento dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto  $D$  tem **8 cm de afastamento**. Assim, as coordenadas do ponto  $D$  são  $(0; 8; 3)$ .

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença das abcissas entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e a sua base tem abscissa nula (pois está contida no plano coordenado  $YZ$ ), o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) tem **7 cm de abscissa** ( $0 + 7 = 7$ ). A aresta lateral  $[BV]$  é frontal (de frente), pelo que o ponto  $V$  e o ponto  $B$  têm o mesmo afastamento (todos os pontos de uma reta frontal têm o mesmo afastamento) – o ponto  $V$  tem, assim, **2 cm de afastamento**. A aresta lateral  $[CV]$  é horizontal (de nível), pelo que o ponto  $V$  e o ponto  $C$  têm a mesma cota (todos os pontos de uma reta horizontal têm a mesma cota) – o ponto  $V$  tem, assim, **6 cm de cota**. Assim, as coordenadas do ponto  $V$  são  $(7; 2; 6)$ .

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^a$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

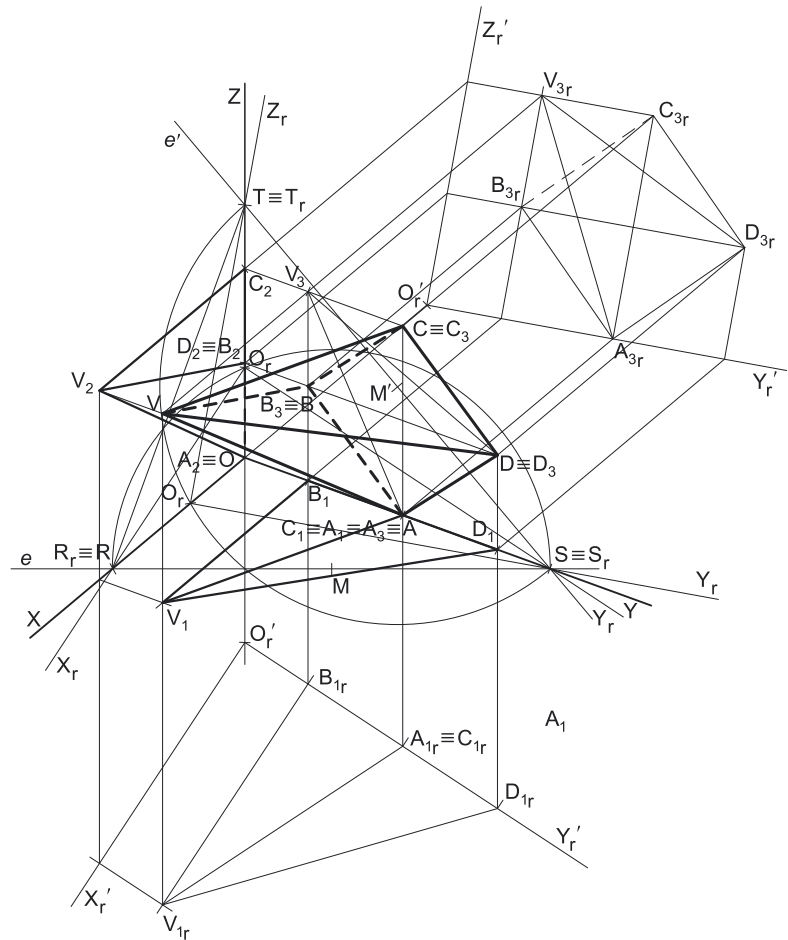
### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspetiva do eixo  $X$  faz um ângulo de  $130^\circ$  com a perspetiva do eixo  $Y$  e um ângulo de  $120^\circ$  com a perspetiva do eixo  $Z$ , as perspetivas destes dois eixos (o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ ) fazem, entre si, um ângulo de  $110^\circ$  ( $130^\circ + 120^\circ + 110^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o triângulo fundamental – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas cinco vértices da pirâmide medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspetivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três *eixos coordenados*, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

*Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:*

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY** (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e trasladado, é o plano  $X_r'O_r'Y_r'$ .

Tendo em conta que, numa **perspetiva trimétrica**, é necessário rebater os três eixos coordenados (porque os três apresentam coeficientes de deformação diferentes), é necessário, agora, rebater um dos outros dois *planos coordenados* (ambos contêm o eixo que nos falta rebater – o eixo **Z**). Optou-se por rebater o *plano coordenado YZ*.

Assim, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é a reta suporte do lado **[ST]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo **[SOT]** está contido no *plano coordenado YZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **YZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[ST]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'S} = \overline{M'T}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[ST]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **YZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo **X**.

O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo **[S<sub>r</sub>O<sub>r</sub>T<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **Y** – o eixo **Y** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **X**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **YZ**, rebatido e trasladado, é o plano  $Y_r'O_r'Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $Y_r$  e dois  $Y_r'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Representação dos cinco pontos e da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:

A determinação das perspectivas dos cinco pontos poder-se-ia processar a partir das perspectivas das respetivas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e transladados) das respetivas projeções dos cinco pontos, em rebatimento.

Assim, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do vértice da pirâmide (7 cm), em verdadeira grandeza – recorde que os vértices da base têm abscissa nula. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco vértices da pirâmide (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$ ,  $C_{1r}$ ,  $D_{1r}$  e  $V_{1r}$ , que são as **projeções horizontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**). Em seguida, desenhou-se a **projeção horizontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XY*).

Já no plano **YZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos cinco pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – recorde que o ponto **A** tem cota nula. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{3r}$ ,  $B_{3r}$ ,  $C_{3r}$ ,  $D_{3r}$  e  $V_{3r}$ , que são as **projeções laterais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado YZ*). Em seguida, desenhou-se a **projeção lateral da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado YZ*).

Este procedimento permitiu-nos obter a representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, através da sua **projeção horizontal** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado XY*) e da sua **projeção lateral** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado YZ*).

## Determinação das perspectivas dos cinco vértices da pirâmide:

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e**) e, por  $A_{3r}$  (a **projeção lateral** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta **e'**). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **A**. O procedimento exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**), o que nos permitiu determinar as perspectivas propriamente ditas de todos aqueles pontos.

Em seguida, invertem-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspectivas das coordenadas do ponto **A** sobre as perspectivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspectiva do paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**),  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**) e  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**), o que nos permitiu determinar as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral de todos aqueles pontos.

## Determinação das perspectivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[AVCD]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **B**. Este, por ser o vértice mais distante do observador, é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[BV]**). Por outro lado, a aresta lateral **[DV]** é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais **[ADV]** e **[CDV]**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal e frontal da pirâmide. Note que não se representou a perspectiva da projeção lateral da pirâmide, porque a pirâmide assenta, pela sua base, no *plano coordenado YZ*. Nestas situações, em que o sólido assenta num dos *planos coordenados*, a representação da projeção do sólido nesse *plano coordenado*, de uma forma geral, dificulta a leitura da resolução gráfica – nesse sentido, em geral, omite-se a representação dessa projeção.

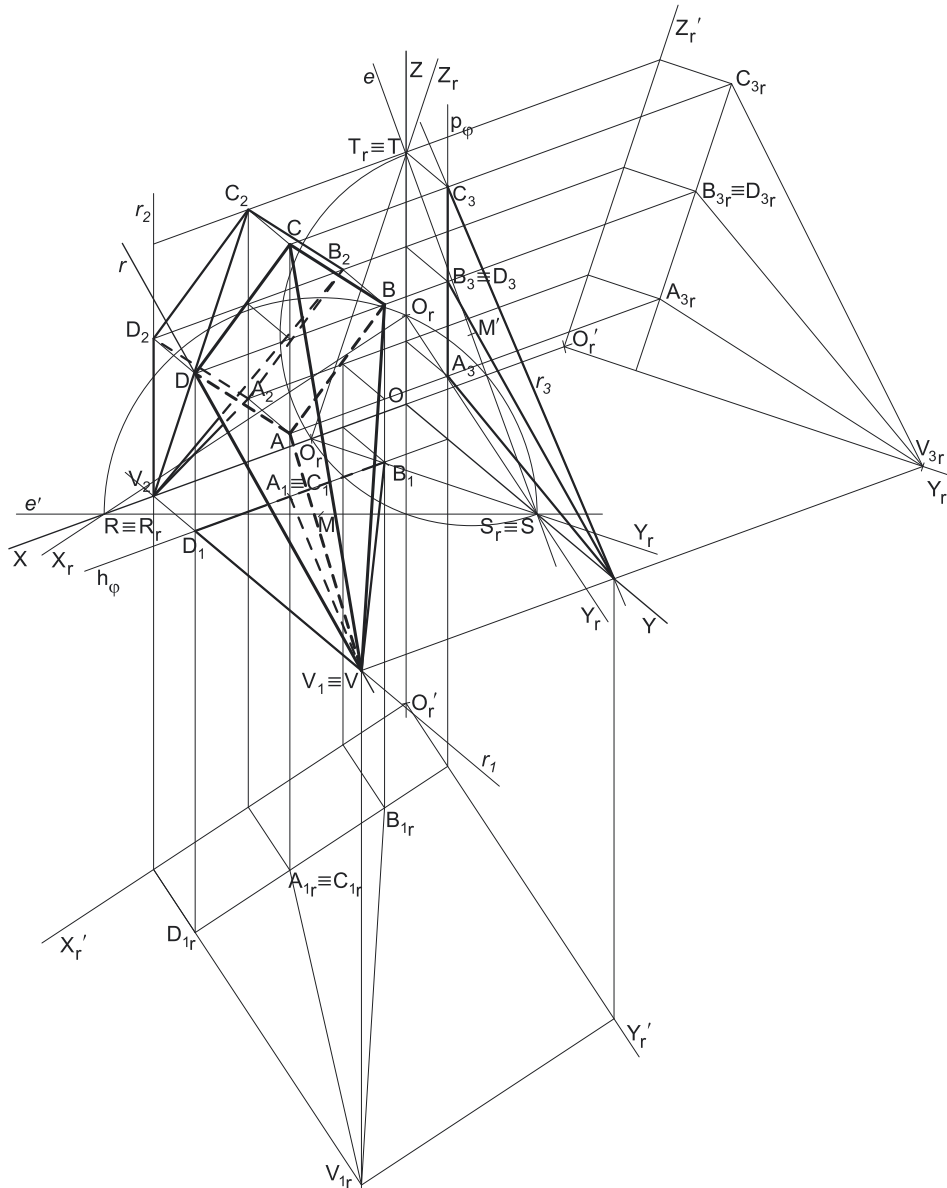
A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[B<sub>1</sub>V<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção horizontal da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção horizontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[A<sub>2</sub>V<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. No entanto, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal e frontal) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e **YZ**, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) da pirâmide em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

1107.



- a) A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **2 cm de afastamento** (todos os pontos de um plano frontal têm o mesmo afastamento). Os pontos **A** e **C** têm o mesmo afastamento e a mesma abcissa, pelo que é possível concluir que a diagonal **[AC]** do quadrado é vertical (paralela ao eixo **Z**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal **[BD]**), porque é perpendicular à diagonal **[AC]** e está contida num plano frontal (de frente), é necessariamente fronto-horizontal (paralela ao eixo **X**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bisetam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal **[AC]** tem necessariamente 5 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **5 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal **[AC]** mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal **[BD]** mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

O ponto **B** é o vértice de menor abcissa do sólido (como o enunciado refere expressamente), pelo que a sua abcissa é 3 cm inferior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **2 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto **B** são ( 2; 2; 5).

Pelo seu lado, o ponto **D** é o vértice de maior abcissa do sólido (por oposição ao ponto **B**), pelo que a sua abcissa é 3 cm superior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **8 cm de abcissa**. Assim, as coordenadas do ponto **D** são ( 8; 2; 5).

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e a sua base tem 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **C**), o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem **10 cm de afastamento** ( $2 + 8 = 10$ ). A aresta lateral **[DV]** é de perfil, pelo que o ponto **V** e o ponto **D** têm a mesma abcissa (todos os pontos de uma reta de perfil têm a mesma abcissa) – o ponto **V** tem, assim, **8 cm de abcissa**. O vértice **V**, da pirâmide, tem **cota nula** (é dado no enunciado), pelo que as suas coordenadas são ( 8; 10; 0).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do 1ª *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

## b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados*. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspetiva do eixo **Y** faz um ângulo de 120° com a perspetiva do eixo **X** e um ângulo de 130° com a perspetiva do eixo **Z**, as perspetivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de 110° (120° + 130° + 110° = 360°). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

## Resolução:

As coordenadas dos cinco vértices da pirâmide medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspetivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três *eixos coordenados*, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY** (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto **O<sub>r</sub>** fica sobre a perspetiva do eixo **Z**.

O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[R<sub>r</sub>O<sub>r</sub>S<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O<sub>r</sub>** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>** (o eixo **Y<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e trasladado, é o plano **X<sub>r</sub>'O<sub>r</sub>'Y<sub>r</sub>'**.

Tendo em conta que, numa **perspetiva trimétrica**, é necessário rebater os três eixos coordenados (porque os três apresentam coeficientes de deformação diferentes), é necessário, agora, rebater um dos outros dois *planos coordenados* (ambos contêm o eixo que nos falta rebater – o eixo **Z**). Optou-se por rebater o *plano coordenado YZ*.

Assim, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é a reta suporte do lado **[ST]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo **[SOT]** está contido no *plano coordenado YZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **YZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[ST]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'S} = \overline{M'T}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[ST]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **YZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto **O<sub>r</sub>** fica sobre a perspetiva do eixo **X**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[S_r O_r T_r]$  é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo  $Y$  – o eixo  $Y$  foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $YZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $X$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $YZ$ , rebatido e transladado, é o plano  $Y_r' O_r' Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $Y_r$  e dois  $Y_r'$ .

#### Representação dos cinco pontos e da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:

A determinação das perspectivas dos cinco pontos poder-se-ia processar a partir das perspectivas das respetivas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e transladados) das respetivas projeções dos cinco pontos, em rebatimento.

Assim, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** do plano da base e do vértice da pirâmide (2 cm e 10 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$ ,  $C_{1r}$ ,  $D_{1r}$  e  $V_{1r}$ , que são as **projeções horizontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). Em seguida, desenhou-se a **projeção horizontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XY*).

Já no plano  $YZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** do plano da base e do vértice da pirâmide (2 cm e 10 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{3r}$ ,  $B_{3r}$ ,  $C_{3r}$ ,  $D_{3r}$  e  $V_{3r}$ , que são as **projeções laterais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado YZ*). Em seguida, desenhou-se a **projeção lateral da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado YZ*).

Este procedimento permitiu-nos obter a representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, através da sua **projeção horizontal** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado XY*) e da sua **projeção lateral** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado YZ*).

#### Determinação das perspectivas dos cinco vértices da pirâmide:

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a **projeção horizontal** do ponto  $A$  em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{3r}$  (a **projeção lateral** do ponto  $A$  em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto  $A$ . O procedimento exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $V$ ), o que nos permitiu determinar as perspetivas propriamente ditas de todos aqueles pontos.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto  $A$  sobre as perspetivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a  $O$ ) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ),  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $A$ ) e  $A_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $A$ ).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $V$ ), o que nos permitiu determinar as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral de todos aqueles pontos.

#### Representação do plano $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide:

Em seguida, representou-se o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide. O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (porque é ortogonal ao plano  $XY$ ), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Assim, desenhou-se  $h_\varphi$  (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ), que passa necessariamente pelas perspetivas das projeções horizontal dos vértices da base da pirâmide.

Por outro lado, o plano  $\varphi$  é também um plano projetante lateral (porque é ortogonal ao plano  $YZ$ ), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ). Assim, desenhou-se  $p_\varphi$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ), passando necessariamente pelas perspetivas das projeções laterais dos vértices da base da pirâmide.

As perspetivas do traço horizontal ( $h_\varphi$ ) e do traço lateral ( $p_\varphi$ ) do plano  $\varphi$  são necessariamente concorrentes num ponto da perspetiva do eixo  $Y$ .

#### Determinação das perspetivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada  $[BCDV]$ . Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice  $A$ . Este, por ser o vértice mais distante do observador, é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$ , da base, e a aresta lateral  $[AV]$ ). Por outro lado, a aresta lateral  $[CV]$  é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais  $[BCV]$  e  $[CDV]$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Note que, apesar de não ser necessário, se identificaram as perspectivas da reta  $r$ , a reta de perfil que contém a aresta lateral  $[DV]$  da pirâmide. Note que a reta  $r$  está definida por dois pontos – o ponto  $D$  e o ponto  $V$ . Assim,  $r$  é a perspectiva propriamente dita da reta  $r$ ,  $r_1$  é a perspectiva da projeção horizontal da reta  $r$  (e está definida por  $D_1$  e por  $V_1$ ),  $r_2$  é a perspectiva da projeção frontal da reta  $r$  (e está definida por  $D_2$  e por  $V_2$ ) e, por fim,  $r_3$  é a perspectiva da projeção lateral da reta  $r$  (e está definida por  $D_3$  e por  $V_3$ ).

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[B_1V_1D_1]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. No entanto, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo pentágono irregular  $[A_2B_2C_2D_2V_2]$ . A aresta  $[AD]$ , da base, é invisível em projeção frontal, enquanto as arestas laterais  $[BV]$  e  $[CV]$  são visíveis, em projeção frontal, pelo que a única **invisibilidade por projeção** a assinalar (em projeção frontal) é a referente à aresta  $[AD]$ , da base. Por outro lado, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[A_3V_3C_3]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção lateral da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção lateral, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\varphi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal e frontal) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados*  $XY$  e  $YZ$ , da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) da pirâmide em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

## 1108.

Por **axonometrias ortogonais normalizadas** entendem-se as representações axonométricas em que são predefinidos tanto os ângulos entre as perspectivas dos eixos como os respetivos coeficientes de redução (coeficientes de redução normalizados).

## 1109.

O critério para a determinação dos **coeficientes de redução normalizados** foi o arredondamento, às décimas ou às unidades, dos coeficientes de redução das axonometrias ortogonais em que **a representação dos objetos mais se aproxima da percepção visual humana** desse objeto. Assim, e de uma forma geral, as **axonometrias ortogonais normalizadas** visam uma representação expedita e de execução simplificada das formas perspectivadas, em que seja possível, sem grandes deformações perspéticas, reconhecer, de forma imediata, o objeto representado.

## 1110.

Uma **perspetiva isométrica normalizada** é uma **representação axonométrica ortogonal** em que:

1. os ângulos que as perspectivas dos três eixos fazem entre si (ângulos axonométricos) é de  $120^\circ$ ;
2. o **coeficiente de deformação (ou de redução)** é igual a 1, ou seja, as coordenadas medem-se sobre as perspectivas dos eixos respetivos, diretamente em verdadeira grandeza (a deformação é desprezada).

**1111.**

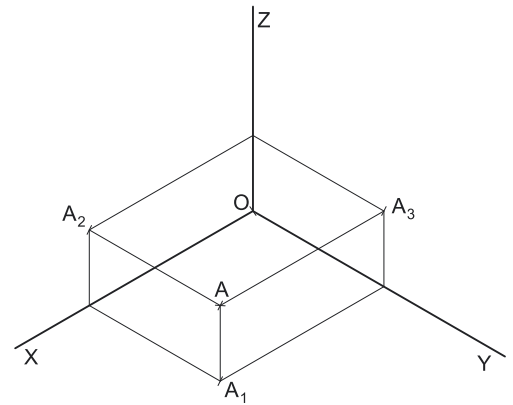
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120°. Há a salientar que a perspectiva do eixo Z se representa, convencionalmente, na vertical.

**Resolução:**

Numa perspectiva isométrica normalizada, o coeficiente de deformação (ou de redução) que afeta os três eixos é 1, ou seja, a deformação é desprezada (considera-se que não existe qualquer deformação). Nesse sentido, representaram-se as coordenadas do ponto A sobre os respetivos eixos, em verdadeira grandeza.

Assim, sobre a perspectiva do eixo X, a partir da perspectiva do ponto O e no sentido positivo do eixo, representou-se a abscissa do ponto A em verdadeira grandeza (5 cm). De forma semelhante, sobre a perspectiva do eixo Y, a partir da perspectiva do ponto O e no sentido positivo do eixo, representou-se o afastamento do ponto A em verdadeira grandeza (4 cm). Por fim, sobre a perspectiva do eixo Z, a partir da perspectiva do ponto O e no sentido positivo do eixo, representou-se a cota do ponto A em verdadeira grandeza (2 cm).



*Determinação das perspectivas do ponto A:*

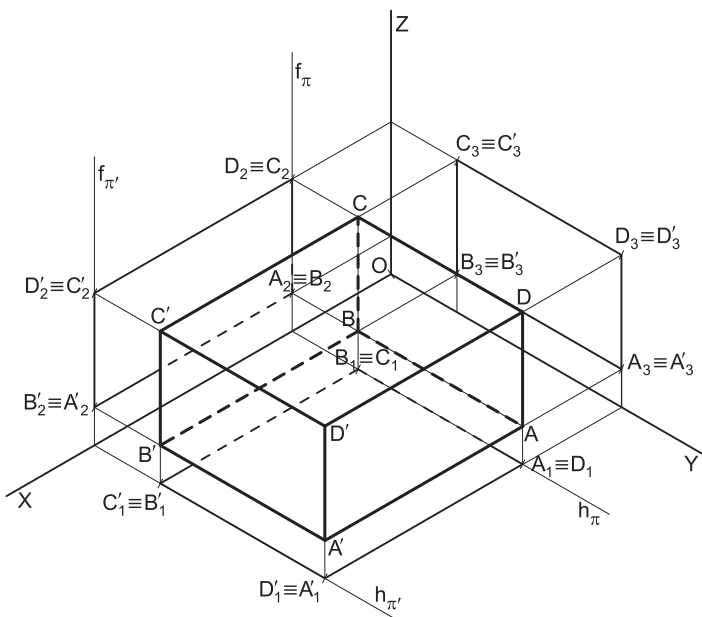
A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto A determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub> e A<sub>3</sub>), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em O e o outro na respetiva projeção do ponto A. A<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto A. A<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto A. A<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto A.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto A. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de A<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de A (que é paralela à perspectiva do eixo Z), pela perspectiva de A<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de A (que é paralela à perspectiva do eixo Y) e pela perspectiva de A<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de A (que é paralela à perspectiva do eixo X) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto A, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos O e A são dois vértices espacialmente opostos.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo X, eixo Y e eixo Z) representaram-se a médio, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a forte. As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a leve.

**1112.**



**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120°. Há a salientar que a perspectiva do eixo Z se representa, convencionalmente, na vertical.

São dadas das coordenadas dos pontos A e C e, partir da resolução do exercício 1105., é possível deduzir as coordenadas dos restantes vértices do paralelepípedo, que são: B (3; 2; 1), D (3; 7; 4), A' (8; 7; 1), B' (8; 2; 1), C' (8; 2; 4) e D' (8; 7; 4).

**Resolução:**

Numa perspectiva isométrica normalizada, o coeficiente de deformação (ou de redução) que afeta os três eixos é 1, ou seja, a deformação é desprezada (considera-se que não existe qualquer deformação). Nesse sentido, representaram-se as coordenadas dos oito vértices do sólido sobre os respetivos eixos, em verdadeira grandeza.

Assim, sobre a perspectiva do eixo X, a partir da perspectiva do ponto O e no sentido positivo do eixo, representaram-se as abscissas dos planos de perfil que contêm as bases do sólido, em verdadeira grandeza (3 cm e 8 cm). De forma semelhante, sobre a perspectiva do eixo Y, a partir da perspectiva do ponto O e no sentido positivo do eixo, representaram-se os afastamentos dos oito vértices do paralelepípedo, em verdadeira grandeza (2 cm e 7 cm). Por fim, sobre a perspectiva do eixo Z, a partir da perspectiva do ponto O e no sentido positivo do eixo, representaram-se as cotas dos oito vértices do sólido, em verdadeira grandeza (1 cm e 4 cm).

*Representação dos planos de perfil que contêm as bases do paralelepípedo:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo X, dois pontos que são as perspectivas dos pontos do eixo X que têm 3 cm e 8 cm de abscissa.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano de perfil  $\pi$  que contém a base mais à direita do paralelepípedo, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de abcissa, contém necessariamente o ponto do eixo  $X$  que tem 3 cm de abcissa. Assim, pela perspectiva desse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

O plano de perfil  $\pi'$  que contém a base mais à esquerda do paralelepípedo, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 8 cm de abcissa, contém necessariamente o ponto do eixo  $X$  que tem 8 cm de abcissa. Assim, pela perspectiva desse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi'$  –  $h_{\pi'}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi'$ ) e  $f_{\pi'}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi'$ ).

Salienta-se que  $h_{\pi'}$  (o traço horizontal do plano  $\pi'$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi'$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi'$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\pi'$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\pi'}$ ). Por outro lado, o plano  $\pi'$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_{\pi'}$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto $A$ :

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $A$ .  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$  e situa-se sobre  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas dos pontos $B$ , $C$ e $D$ :

As perspectivas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $C$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos ( $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos ( $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A$  e  $B$ , porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $A_2 \equiv B_2$  (tal como os pontos  $C$  e  $D$ , pelo que se tem igualmente  $C_2 \equiv D_2$ ). Pelo seu lado, os pontos  $A$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A_1 \equiv D_1$  (tal como os pontos  $B$  e  $C$ , pelo que se tem igualmente  $B_1 \equiv C_1$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto $A'$ :

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A'$  determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A'_1$ ,  $A'_2$  e  $A'_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $A'$ .  $A'_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A'$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_{\pi'}$  (o traço horizontal do plano  $\pi'$ ), pois o plano  $\pi'$  é um plano projetante horizontal.  $A'_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A'$  e situa-se sobre  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ), pois o plano  $\pi'$  é um plano projetante frontal.  $A'_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A'$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $A'$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $A'_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $A'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $A'_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $A'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $A'_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $A'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A'$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A'$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas dos pontos $B'$ , $C'$ e $D'$ :

As perspectivas dos pontos  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $C$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\pi'$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos ( $B'_1$ ,  $C'_1$  e  $D'_1$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $h_{\pi'}$  (o traço horizontal do plano  $\pi'$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $\pi'$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos ( $B'_2$ ,  $C'_2$  e  $D'_2$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A'$  e  $B'$ , porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $A'_2 \equiv B'_2$  (tal como os pontos  $C'$  e  $D'$ , pelo que se tem igualmente  $C'_2 \equiv D'_2$ ). Pelo seu lado, os pontos  $A'$  e  $D'$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A'_1 \equiv D'_1$  (tal como os pontos  $B'$  e  $C'$ , pelo que se tem igualmente  $B'_1 \equiv C'_1$ ).

Por fim, salienta-se que os pontos  $A$  e  $A'$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $A_3 \equiv A'_3$ , o que se verifica igualmente em relação aos pontos  $B$  e  $B'$ , em relação aos pontos  $C$  e  $C'$  e, ainda, em relação aos pontos  $D$  e  $D'$ , pelo que se tem igualmente  $B_3 \equiv B'_3$ ,  $C_3 \equiv C'_3$  e  $D_3 \equiv D'_3$ .

#### Determinação das perspetivas do paralelepípedo:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do paralelepípedo**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[AA'B'C'D]$ . Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – os vértices  $D'$  e  $B$ . O vértice  $D'$ , por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'D']$  e  $[C'D']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e a aresta lateral  $[DD']$ . O vértice  $B$ , por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$  (da base  $[ABCD]$ ) e a aresta lateral  $[BB']$ .

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas da projeção horizontal, da projeção frontal e da projeção lateral do paralelepípedo.

A **perspetiva da projeção horizontal do paralelepípedo** é limitada pelo paralelogramo  $[C_1D_1D'_1C'_1]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção horizontal do paralelepípedo é invisível (por estar oculta pelo próprio paralelepípedo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal do paralelepípedo** é limitada pelo paralelogramo  $[A_2D_2D'_2A'_2]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção frontal do paralelepípedo é invisível (por estar oculta pelo próprio paralelepípedo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[A'_3B'_3C'_3D'_3]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção lateral do paralelepípedo é invisível (por estar oculta pelo próprio paralelepípedo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. Os planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos que contêm as bases do paralelepípedo), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos respetivos traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. A perspetiva do paralelepípedo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) do paralelepípedo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

## 1113.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspetiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical.

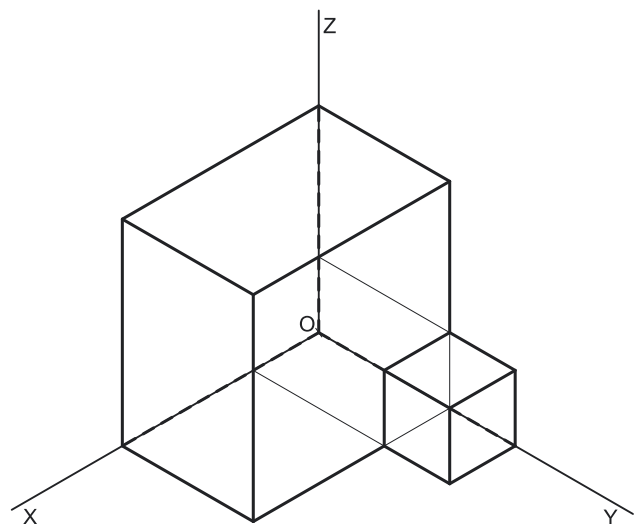
#### Resolução:

Numa perspetiva isométrica normalizada, o **coeficiente de deformação (ou de redução)** que afeta os três eixos é 1, ou seja, a deformação é desprezada (considera-se que não existe qualquer deformação). Nesse sentido, representaram-se as coordenadas dos oito vértices do sólido sobre os respetivos eixos, **em verdadeira grandeza**.

Como o sólido se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do sólido estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto  $O$ . Assim, há que representar, sobre cada eixo e a partir da perspetiva do ponto  $O$ , a medida da respetiva aresta do sólido.

Nesse sentido, sobre a perspetiva do eixo  $X$ , a partir da perspetiva do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a **medida total** da aresta do sólido que está contida no eixo  $X$  (6 cm), bem como as **medidas parcelares** (2 cm e 4 cm), respeitando a ordem destas na figura.

De forma semelhante, sobre a perspetiva do eixo  $Y$ , a partir da perspetiva do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a **medida total** da aresta do sólido que está contida no eixo  $Y$  (6 cm), bem como as **medidas parcelares** (2 cm e 4 cm), respeitando a ordem destas na figura.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a **medida total** da aresta do sólido que está contida no eixo **Z** (6 cm), bem como as **medidas parcelares** (2 cm e 4 cm), respeitando a ordem destas na figura.

A partir das medições efetuadas (sobre as perspectivas dos eixos), construíram-se as projeções do objeto sobre os respetivos *planos coordenados*, baseadas em paralelas às perspectivas dos eixos.

*Determinação da perspectiva do objeto:*

Pelas perspectivas das projeções de cada um dos vértices do objeto (que não se identificaram) conduziram-se as perspectivas das respetivas retas projetantes, obtendo as respetivas perspectivas (a semelhança do que se processa na determinação das perspectivas de um ponto).

Esse procedimento permitiu-nos determinar, sucessiva e simultaneamente, as perspectivas de cada uma das arestas do sólido. Estas permitiram-nos desenhar a perspectiva do objeto, na qual se assinalaram convenientemente as invisibilidades existentes.

Salienta-se que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um paralelepípedo e um cubo), as faces do objeto que resultam de duas faces complanares daqueles objetos (a face que está contida no plano **XY** e a face que está contida no plano **YZ**) **não apresentam** qualquer linha divisória. De facto, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente “o objeto”), aquelas faces apresentariam uma linha divisória que identificaria, precisamente, o plano que separaria fisicamente os dois sólidos.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do objeto representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

## 1114.

Uma **perspectiva dimétrica normalizada** é uma **representação axonométrica ortogonal** em que:

1. a perspectiva do eixo **Y** faz ângulos de  $131^\circ 30'$  com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) que, por sua vez, fazem um ângulo de  $97^\circ$  entre si;
2. o **coeficiente de deformação (ou redução)** do eixo **X** e do eixo **Z** é igual a 1 e o **coeficiente de deformação (ou redução)** do eixo **Y** é 0,5 – assim, as **abscissas** e as **cotas** (que se medem no eixo **X** e no eixo **Z**, respetivamente) medem-se em verdadeira grandeza, enquanto os **afastamentos** (que se medem no eixo **Y**) são multiplicados por 0,5 (a dimensão medida sobre a perspectiva do eixo **Y** é metade da dimensão real).

## 1115.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. A perspectiva do eixo **Y** faz ângulos de  $131^\circ 30'$  com as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Y** ( $2 \times 131^\circ 30' = 263^\circ$ ) que, por sua vez, fazem um ângulo de  $97^\circ$  entre si ( $263^\circ + 97^\circ = 360^\circ$ ).

**Resolução:**

Numa perspectiva isométrica normalizada, o **coeficiente de deformação (ou redução)** que afeta o eixo **X** e o eixo **Z** é 1 (ou seja, a deformação é desprezada – considera-se que não existe qualquer deformação), enquanto o eixo **Y** apresenta um **coeficiente de deformação (ou redução)** isolado de 0,5.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **M** em verdadeira grandeza (4 cm). De forma semelhante, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **M** em verdadeira grandeza (5 cm)

Por fim, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **M** multiplicado pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado, que é 0,5 – assim, sobre a perspectiva do eixo **Y** mediram-se 3 cm, que é o valor do afastamento do ponto **M**, reduzido pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado ( $6 \text{ cm} \times 0,5 = 3 \text{ cm}$ ).

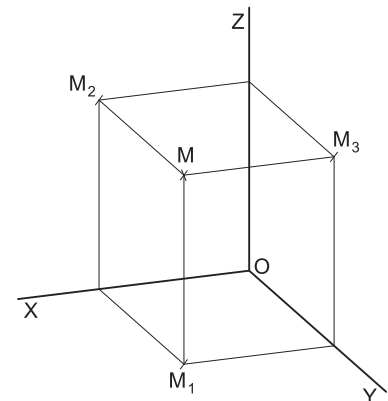
*Determinação das perspectivas do ponto M:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**M<sub>1</sub>**, **M<sub>2</sub>** e **M<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **M**. **M<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M**. **M<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **M**. **M<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **M**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **M**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **M<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **M<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **M<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **M**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **M** são dois vértices espacialmente opostos.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.



**1116.****Dados:**

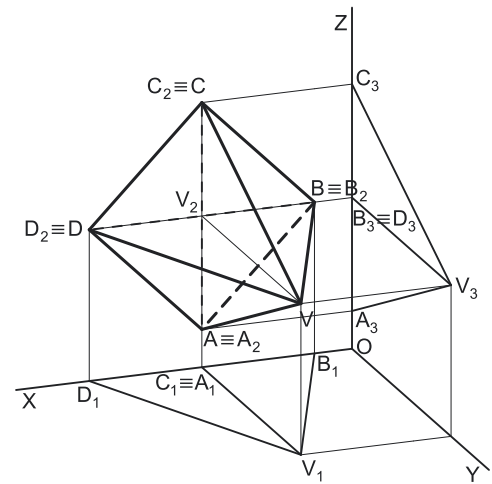
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. A perspectiva do eixo **Y** faz ângulos de  $131^\circ 30'$  com as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Z** ( $2 \times 131^\circ 30' = 263^\circ$ ) que, por sua vez, fazem um ângulo de  $97^\circ$  entre si ( $263^\circ + 97^\circ = 360^\circ$ ).

São dadas as coordenadas dos pontos **A** e **B** e, partir da resolução do exercício **1099.**, é possível deduzir as coordenadas dos restantes vértices da pirâmide, que são: **C** (4; 0; 7), **D** (7; 0; 4) e **V** (4; 7; 4).

**Resolução:**

Numa perspectiva dimétrica normalizada, o **coeficiente de deformação (ou redução)** que afeta o eixo **X** e o eixo **Z** é 1 (ou seja, a deformação é desprezada – considera-se que não existe qualquer deformação), enquanto o eixo **Y** apresenta um **coeficiente de deformação (ou redução)** isolado de 0,5.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos cinco vértices da pirâmide, em verdadeira grandeza (1 cm, 4 cm e 7 cm). De forma semelhante, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos cinco vértices da pirâmide, em verdadeira grandeza (1 cm, 4 cm e 7 cm)



Por fim, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **V** (recorde que a base da pirâmide tem afastamento nulo), multiplicado pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado, que é 0,5 – assim, sobre a perspectiva do eixo **Y** mediram-se 3,5 cm, que é o valor do afastamento do ponto **V**, reduzido pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado ( $7 \text{ cm} \times 0,5 = 3,5 \text{ cm}$ ).

**Determinação das perspectivas do ponto A:**

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A<sub>1</sub>**, **A<sub>2</sub>** e **A<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. – uma vez que o ponto **A** tem afastamento nulo, o ponto **A** situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que **A<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**) se situa sobre a perspectiva do eixo **X**. **A<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**. **A<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A** – mais uma vez atendendo a que o ponto **A** se situa no *plano coordenado XZ* (pois tem afastamento nulo), **A<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **A** tem afastamento nulo, o ponto **A** situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que se tem imediatamente **A<sub>2</sub> ≡ A** (sendo **T** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

**Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D:**

As perspectivas dos pontos **B**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **A**. Atendendo a que os três pontos têm afastamento nulo (situam-se no *plano coordenado XZ*), as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos (**B<sub>1</sub>**, **C<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>**) situam-se sobre a perspectiva do eixo **X**. De forma semelhante, e porque os três pontos se situam no *plano coordenado XZ* (porque têm afastamento nulo), as perspectivas das projeções laterais dos três pontos (**B<sub>3</sub>**, **C<sub>3</sub>** e **D<sub>3</sub>**) situam-se sobre a perspectiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que os pontos **B**, **C** e **D** têm afastamento nulo, os três pontos situam-se no *plano coordenado XZ*, pelo que se tem imediatamente **B<sub>2</sub> ≡ B**, **C<sub>2</sub> ≡ C** e **D<sub>2</sub> ≡ D** (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**, **C** a perspectiva propriamente dita do ponto **C** e **D** a perspectiva propriamente dita do ponto **D**).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **A<sub>1</sub> ≡ C<sub>1</sub>**. Pelo seu lado, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem **B<sub>3</sub> ≡ D<sub>3</sub>**.

**Determinação das perspectivas do ponto V:**

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **V** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**V<sub>1</sub>**, **V<sub>2</sub>** e **V<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **V**. **V<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V**. **V<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **V**. **V<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **V**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **V**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **V<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **V<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **V<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **V**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **V** são dois vértices espacialmente opostos.

**Determinação das perspectivas da pirâmide:**

Por fim, desenhou-se a **perspectiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ADCBV]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente da perspectiva do sólido. No entanto, a aresta **[AB]**, da base, é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – a base **[ABCD]** e a face lateral **[ABV]**. Note que, na realidade, os vértices **A** e **B** são os vértices mais distantes do observador e, por isso, a aresta **[AB]** é invisível. Já as arestas laterais **[CV]** e **[DV]** são duas arestas visíveis, da pirâmide, porque separam faces da pirâmide que são visíveis, em perspectiva. Note ainda que os vértices **C** e **D** são dos vértices da pirâmide que estão mais próximos do observador.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal e lateral da pirâmide. Note que não se representou a perspectiva da projeção frontal da pirâmide, porque a pirâmide assenta, pela sua base, no *plano coordenado XZ*. Nestas situações, em que o sólido assenta num dos *planos coordenados*, a representação da projeção do sólido nesse *plano coordenado*, de uma forma geral, dificulta a leitura da resolução gráfica – nesse sentido, em geral, omite-se a representação dessa projeção.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[B_1V_1D_1]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção horizontal da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção horizontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[A_3V_3C_3]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção lateral da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção horizontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (horizontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

## 1117.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. A perspetiva do eixo **Y** faz ângulos de  $131^\circ 30'$  com as perspetivas do eixo **X** e do eixo **Y** ( $2 \times 131^\circ 30' = 263^\circ$ ) que, por sua vez, fazem um ângulo de  $97^\circ$  entre si ( $263^\circ + 97^\circ = 360^\circ$ ).

### Resolução:

Numa perspetiva dimétrica normalizada, o **coeficiente de deformação (ou redução)** que afeta o eixo **X** e o eixo **Z** é 1 (ou seja, a deformação é desprezada – considera-se que não existe qualquer deformação), enquanto o eixo **Y** apresenta um **coeficiente de deformação (ou redução)** isolado de 0,5.

Como o sólido se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do sólido estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, há que representar, sobre cada eixo e a partir da perspetiva do ponto **O**, a medida da respetiva aresta do sólido.

Nesse sentido, sobre a perspetiva do eixo **X**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a **medida total** da aresta do sólido que está contida no eixo **X** (6 cm), bem como as **medidas parcelares** (2 cm e 4 cm), respeitando a ordem destas na figura.

De forma semelhante, sobre a perspetiva do eixo **Z**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a **medida total** da aresta do sólido que está contida no eixo **Z** (6 cm), bem como as **medidas parcelares** (2 cm e 4 cm), respeitando a ordem destas na figura.

Por fim, sobre a perspetiva do eixo **Y**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as medidas referentes às arestas do sólido que são paralelas ao eixo **Y** (4 cm e 2 cm), mas multiplicadas pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado, que é 0,5 – assim, sobre a perspetiva do eixo **Y** mediram-se 2 cm (que é a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **Y**, reduzida pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $4 \text{ cm} \times 0,5 = 2 \text{ cm}$ ) e 1 cm (que é a medida da aresta do cubo que se justapõe ao sólido, reduzida pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $2 \text{ cm} \times 0,5 = 1 \text{ cm}$ ).

A partir das medições efetuadas (sobre as perspetivas dos eixos), construíram-se as projeções do objeto sobre os respetivos *planos coordenados*, baseadas em paralelas às perspetivas dos eixos.

### Determinação da perspetiva do objeto:

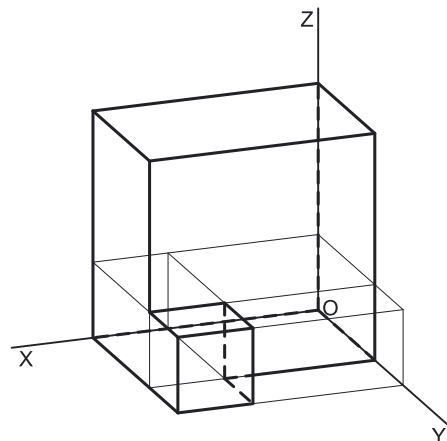
Pelas perspetivas das projeções de cada um dos vértices do objeto (que não se identificaram) conduziram-se as perspetivas das respetivas retas projetantes, obtendo as respetivas perspetivas (a semelhança do que se processa na determinação das perspetivas de um ponto).

Esse procedimento permitiu-nos determinar, sucessiva e simultaneamente, as perspetivas de cada uma das arestas do sólido. Estas permitiram-nos desenhar a perspetiva do objeto, na qual se assinalaram convenientemente as invisibilidades existentes.

Salienta-se que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um paralelepípedo e um cubo), as faces do objeto que resultam de duas faces complanares daqueles objetos (a face que está contida no plano **XY** e a face que é paralela à face contida no plano **YZ**) **não apresentam** qualquer linha divisória. De facto, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente “o objeto”), aquelas faces apresentariam uma linha divisória que identificaria, precisamente, o plano que separaria fisicamente os dois sólidos.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do objeto representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.



**1118.**

Uma **perspectiva trimétrica normalizada** é uma **representação axonométrica ortogonal** em que:

1. a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de  $95^\circ$  com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de  $108^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y** (sendo que as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $157^\circ$ , que é o ângulo restante);
2. o **coeficiente de deformação (ou redução)** do eixo **Z** é igual a 1, o **coeficiente de deformação (ou redução)** do eixo **X** é 0,9 e o **coeficiente de deformação (ou redução)** do eixo **Y** é 0,5 – assim, as **cotas** (que se medem no eixo **Z**) medem-se em verdadeira grandeza, enquanto as **abscissas** (que se medem no eixo **X**) são multiplicadas por 0,9 e os **afastamentos** (que se medem no eixo **Y**) são multiplicados por 0,5.

**1119.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. As perspectivas do eixo **X** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $95^\circ$  e as perspectivas do eixo **Y** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $108^\circ$  (o ângulo entre as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Y** é  $157^\circ$  (o ângulo restante, pois  $95^\circ + 108^\circ + 157^\circ = 360^\circ$ )).

**Resolução:**

Numa perspectiva trimétrica normalizada, o **coeficiente de deformação (ou redução)** que afeta o eixo **Z** é 1 (ou seja, a deformação é desprezada – considera-se que não existe qualquer deformação), enquanto o eixo **X** apresenta um **coeficiente de deformação (ou redução)** de 0,9 e o eixo **Y** apresenta um **coeficiente de deformação (ou redução)** de 0,5.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **G** em verdadeira grandeza (3 cm).

Sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **G** multiplicada pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado, que é 0,9 – assim, sobre a perspectiva do eixo **X** mediram-se 4,5 cm, que é o valor da abscissa do ponto **G**, reduzida pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado ( $5 \text{ cm} \times 0,9 = 4,5 \text{ cm}$ ).

Por fim, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **G**, multiplicado pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado, que é 0,5 – assim, sobre a perspectiva do eixo **Y** mediram-se 3 cm, que é o valor do afastamento do ponto **M**, reduzido pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado ( $6 \text{ cm} \times 0,5 = 3 \text{ cm}$ ).

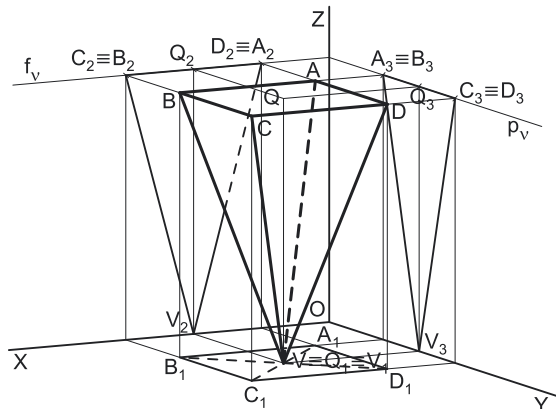
**Determinação das perspectivas do ponto G:**

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **G** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**G<sub>1</sub>**, **G<sub>2</sub>** e **G<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **G**. **G<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **G**. **G<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **G**. **G<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **G**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **G**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **G<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **G** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **G<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **G** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **G<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **G** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **G**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **G** são dois vértices espacialmente opostos.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

**1120.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. As perspectivas do eixo **X** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $95^\circ$  e as perspectivas do eixo **Y** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $108^\circ$  (o ângulo entre as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Y** é  $157^\circ$  (o ângulo restante, pois  $95^\circ + 108^\circ + 157^\circ = 360^\circ$ )).

São dadas as coordenadas dos pontos **A** e **B** e, partir da resolução do exercício **1071**., é possível deduzir as coordenadas dos restantes vértices da pirâmide, que são: **C** ( 6 ; 7 ; 7), **D** ( 2 ; 7 ; 7) e **V** ( 4 ; 5 ; 0).

**Resolução:**

Numa perspectiva trimétrica normalizada, o **coeficiente de deformação (ou redução)** que afeta o eixo **Z** é 1 (ou seja, a deformação é desprezada – considera-se que não existe qualquer deformação), enquanto o eixo **X** apresenta um **coeficiente de deformação (ou redução)** de 0,9 e o eixo **Y** apresenta um **coeficiente de deformação (ou redução)** de 0,5.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, sobre a perspetiva do eixo **Z**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do plano da base da pirâmide, em verdadeira grandeza (7 cm).

Sobre a perspetiva do eixo **X**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos cinco vértices da pirâmide, multiplicados pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado, que é 0,9 – assim, sobre a perspetiva do eixo **X** mediram-se 1,8 cm (que é o valor da abscissa dos pontos **A** e **D**, reduzida pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $2 \text{ cm} \times 0,9 = 1,8 \text{ cm}$ ), 5,4 cm (que é o valor da abscissa dos pontos **B** e **C**, reduzida pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $6 \text{ cm} \times 0,9 = 5,4 \text{ cm}$ ) e 3,6 cm (que é o valor da abscissa do ponto **V**, reduzida pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $4 \text{ cm} \times 0,9 = 3,6 \text{ cm}$ ).

Por fim, sobre a perspetiva do eixo **Y**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco vértices da pirâmide, multiplicados pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado, que é 0,5 – assim, sobre a perspetiva do eixo **Y** mediram-se 1,5 cm (que é o valor do afastamento dos pontos **A** e **B**, reduzido pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $3 \text{ cm} \times 0,5 = 1,5 \text{ cm}$ ), 3,5 cm (que é o valor do afastamento dos pontos **C** e **D**, reduzido pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $7 \text{ cm} \times 0,5 = 3,5 \text{ cm}$ ) e 2,5 cm (que é o valor do afastamento do ponto **V**, reduzido pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $5 \text{ cm} \times 0,5 = 2,5 \text{ cm}$ ).

### Determinação das perspetivas do ponto **A**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspetivas das suas projecções nas faces do triedro (**A<sub>1</sub>**, **A<sub>2</sub>** e **A<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projecção do ponto **A**. **A<sub>1</sub>** é a perspetiva da projecção horizontal do ponto **A**. **A<sub>2</sub>** é a perspetiva da projecção frontal do ponto **A** e situa-se sobre a perspetiva de **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. **A<sub>3</sub>** é a perspetiva da projecção lateral do ponto **A** e situa-se sobre a perspetiva de **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **A<sub>1</sub>**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **A<sub>3</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspetivas dos pontos **B**, **C** e **D**:

As perspetivas dos pontos **B**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **A**. Os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, pelo que as perspetivas das projecções frontais dos três pontos (**B<sub>2</sub>**, **C<sub>2</sub>** e **D<sub>2</sub>**) se situam sobre a perspetiva do traço frontal do plano  $v$  (**f<sub>v</sub>**). De forma semelhante, e ainda atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $v$  (que também é um plano projetante lateral), as perspetivas das projecções laterais dos três pontos (**B<sub>3</sub>**, **C<sub>3</sub>** e **D<sub>3</sub>**) situam-se sobre a perspetiva do traço lateral do plano  $v$  (**p<sub>v</sub>**).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **D**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projecções frontais coincidentes, pelo que se tem **A<sub>2</sub> ≡ D<sub>2</sub>** (o que se verifica, também, em relação aos pontos **B** e **D**). Pelo seu lado, os pontos **A** e **B**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projecções laterais coincidentes, pelo que se tem **A<sub>3</sub> ≡ B<sub>3</sub>** (o que se verifica, também, para os pontos **C** e **D**).

### Determinação das perspetivas do ponto **V**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **V** determinaram-se as perspetivas das suas projecções nas faces do triedro (**V<sub>1</sub>**, **V<sub>2</sub>** e **V<sub>3</sub>**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projecção do ponto **V**. **V<sub>1</sub>** é a perspetiva da projecção horizontal do ponto **V**. **V<sub>2</sub>** é a perspetiva da projecção frontal do ponto **V** – uma vez que o ponto **V** tem cota nula, o ponto **V** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que **V<sub>2</sub>** (a perspetiva da projecção frontal do ponto **V**) se situa sobre a perspetiva do eixo **X**. **V<sub>3</sub>** é a perspetiva da projecção lateral do ponto **V** – mais uma vez atendendo a que o ponto **V** se situa no plano coordenado **XY** (pois tem cota nula), **V<sub>3</sub>** (a perspetiva da projecção lateral do ponto **V**) situa-se sobre a perspetiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **V** tem cota nula, o ponto **V** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que se tem imediatamente **V<sub>1</sub> ≡ V** (sendo **V** a perspetiva propriamente dita do ponto **V**).

### Determinação das perspetivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada [**ABVD**]. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **C**. Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas [**BC**] e [**CD**], da base, e a aresta lateral [**CV**]). Por outro lado, a aresta lateral [**AV**] é **invisível**, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais [**ABV**] e [**ADV**].

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas das projecções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projecção horizontal da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero [**A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>**]. Tendo em conta que o vértice **V** é o vértice de menor cota do sólido, este vértice é invisível (em projecção horizontal), bem como todas as arestas que nele convergem (todas as arestas laterais da pirâmide). Assim, a **invisibilidade por projecção** a assinalar, em projecção horizontal, refere-se a todas as arestas laterais da pirâmide. Por outro lado, parte da projecção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projecção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo [**C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>V<sub>2</sub>**]. Todas as arestas invisíveis, em projecção frontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projecção frontal), pelo que, em projecção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projecção** a assinalar. No entanto, parte da projecção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[B_3C_3V_3]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção lateral da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção lateral, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano  $v$  (o plano que contém a base superior do prisma), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (horizontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

## 1121.

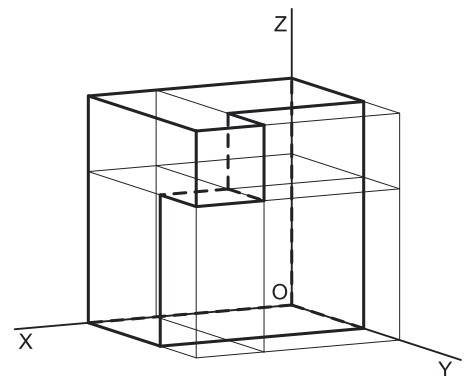
#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. As perspetivas do eixo **X** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $95^\circ$  e as perspetivas do eixo **Y** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $108^\circ$  (o ângulo entre as perspetivas do eixo **X** e do eixo **Y** é  $157^\circ$  (o ângulo restante, pois  $95^\circ + 108^\circ + 157^\circ = 360^\circ$ )).

#### Resolução:

Numa perspetiva trimétrica normalizada, o **coeficiente de deformação (ou redução)** que afeta o eixo **Z** é 1 (ou seja, a deformação é desprezada – considera-se que não existe qualquer deformação), enquanto o eixo **X** apresenta um **coeficiente de deformação (ou redução)** de 0,9 e o eixo **Y** apresenta um **coeficiente de deformação (ou redução)** de 0,5.

Como o sólido se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do sólido estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, há que representar, sobre cada eixo e a partir da perspetiva do ponto **O**, a medida da respetiva aresta do sólido.



Nesse sentido, sobre a perspetiva do eixo **Z**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a **medida total** da aresta do sólido que está contida no eixo **Z** (6 cm), bem como as **medidas parcelares** (2 cm e 4 cm), respeitando a ordem destas na figura.

Já sobre a perspetiva do eixo **X**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as medidas referentes às arestas do sólido que são paralelas ao eixo **Z** (4 cm e 2 cm), mas multiplicadas pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado, que é 0,9 – assim, sobre a perspetiva do eixo **Z** mediram-se 5,4 cm (que é a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **Z**, reduzida pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $6 \text{ cm} \times 0,9 = 5,4 \text{ cm}$ ) e 1,8 cm (que é a medida da aresta do cubo que se justapôs ao sólido, reduzida pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $2 \text{ cm} \times 0,9 = 1,8 \text{ cm}$ ).

Por fim, sobre a perspetiva do eixo **Y**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as medidas referentes às arestas do sólido que são paralelas ao eixo **Y** (4 cm e 2 cm), mas multiplicadas pelo **coeficiente de deformação (ou redução)** normalizado, que é 0,5 – assim, sobre a perspetiva do eixo **Y** mediram-se 2 cm (que é a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **Y**, reduzida pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $4 \text{ cm} \times 0,5 = 2 \text{ cm}$ ) e 1 cm (que é a medida da aresta do cubo que se justapôs ao sólido, reduzida pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $2 \text{ cm} \times 0,5 = 1 \text{ cm}$ ).

A partir das medições efetuadas (sobre as perspetivas dos eixos), construíram-se as projeções do objeto sobre os respetivos *planos coordenados*, baseadas em paralelas às perspetivas dos eixos.

#### Determinação da perspetiva do objeto:

Pelas perspetivas das projeções de cada um dos vértices do objeto (que não se identificaram) conduziram-se as perspetivas das respetivas retas projetantes, obtendo as respetivas perspetivas (a semelhança do que se processa na determinação das perspetivas de um ponto).

Esse procedimento permitiu-nos determinar, sucessiva e simultaneamente, as perspetivas de cada uma das arestas do sólido. Estas permitiram-nos desenhar a perspetiva do objeto, na qual se assinalaram convenientemente as invisibilidades existentes.

Salienta-se que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um paralelepípedo e um cubo), as faces do objeto que resultam de duas faces complanares daqueles objetos (a face superior do objeto e a face que é paralela à face contida no plano **YZ**) **não apresentam** qualquer linha divisória. De facto, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente “o objeto”), aquelas faces apresentariam uma linha divisória que identificaria, precisamente, o plano que separaria fisicamente os dois sólidos.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do objeto representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

## 1122.

A incorreção científica que afeta a representação de objetos nas **axonometrias ortogonais normalizadas** tem a ver com o facto de estas **não considerarem as deformações existentes**, decorrentes do facto de nem os *eixos coordenados* nem os *planos coordenados* serem paralelos ao plano de projecção (o *plano axonométrico*). De facto, as **axonometrias ortogonais normalizadas** ou ignoram as deformações existentes ou convencionam coeficientes de redução (ou deformação) que **não são os reais**.

Exemplificando o exposto recorrendo à **perspetiva dimétrica normalizada**, nesta representam-se as **abcissas** e as **cotas** em verdadeira grandeza sobre os respetivos eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**, respetivamente), ignorando completamente a deformação existente, o que, **na realidade**, não se verifica, pois nenhum daqueles dois eixos é paralelo ao *plano axonométrico* e, por isso, nenhum daqueles dois eixos se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*.

Por outro lado, ainda na **perspetiva dimétrica normalizada**, também o coeficiente de redução que é estipulado para os **afastamentos** (coeficiente de 0,5) é apenas uma aproximação (às décimas) do coeficiente de redução **real**.

Assim, o erro que afeta a representação de qualquer objeto numa **axonometria ortogonal normalizada** tem a ver com o facto de não haver uma **relação real** entre o objeto, no espaço, e a sua representação (perspetiva) no *plano axonométrico*, relação essa que passa necessariamente pela existência de coeficientes de redução **reais**, sempre que não haja situações de paralelismo em relação ao plano de projecção (o *plano axonométrico*).

## 1123.

Sempre que uma determinada dimensão não é paralela ao plano de projecção em que se projeta, essa dimensão sofre uma **deformação**. No caso específico da **projecção ortogonal**, essa deformação é sempre uma **redução** (daí que o **coeficiente de deformação**, em projecção ortogonal, também se pode chamar de **coeficiente de redução**).

Assim, sempre que se representa uma determinada dimensão **sem qualquer redução** (nas situações em que se verifica a existência de uma **redução**), está-se necessariamente a considerar que essa dimensão, no espaço, é **superior** à dimensão representada, ou seja, que existe uma **ampliação da dimensão real**.

Consideremos um exemplo – consideremos um ponto **A** ( 2 ; 3 ; 5). Consideremos a representação desse ponto numa **perspetiva isométrica normalizada**. Nesse caso, o coeficiente de redução é 1 em todos os eixos, pelo que as coordenadas são representadas em verdadeira grandeza sobre os respetivos eixos. No entanto, como existe necessariamente uma redução (porque nenhum dos eixos coordenados é paralelo ao plano axonométrico), representando 3 cm de abcissa (por exemplo), em perspetiva, esses 3 cm são efetivamente a abcissa reduzida. Assim, esses 3 cm correspondem à **redução** de um valor que é necessariamente maior do que 3 cm. Nesse sentido, ao representarmos o ponto **A** numa **perspetiva isométrica normalizada**, estamos a considerar que, **no espaço**, as coordenadas do ponto **A** são maiores do que as coordenadas dadas (e, por isso, estão **ampliadas**).

## 1124.

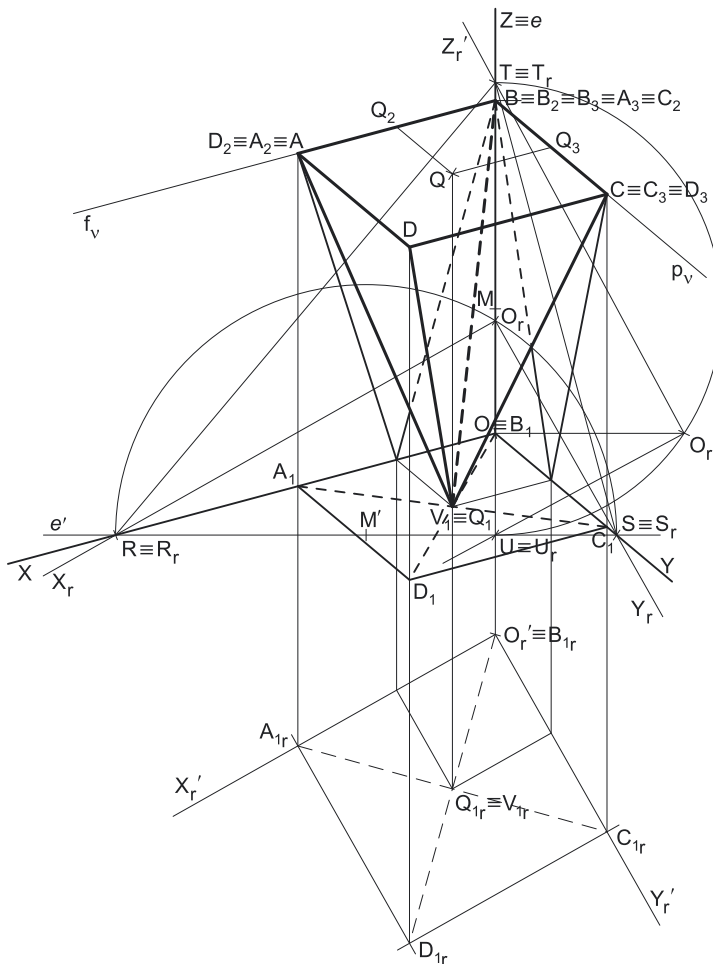
### Determinação das coordenadas dos vértices da pirâmide:

Tendo em conta que os pontos **A** e **C** têm 10 cm de cota, a base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano  $h_{10}$  (de nível) com 10 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **C**). Assim, os pontos **B** e **D** têm **10 cm de cota** (todos os pontos de um plano horizontal têm a mesma cota). Por outro lado, o ponto **B** é um ponto do eixo **Z**, pelo que o ponto **B** tem **abcissa nula** e tem, também, **afastamento nulo**. Assim, as coordenadas do ponto **B** são ( 0 ; 0 ; 10).

Os pontos **A** e **B** têm o mesmo afastamento e a mesma cota, pelo que o lado **[AB]** do quadrado é fronto-horizontal (é paralelo ao eixo **X**). Assim, o lado **[CD]** do polígono será igualmente fronto-horizontal (paralelo ao eixo **X**), pois o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois. Por sua vez, os lados **[BC]** e **[AD]** serão necessariamente de topo (paralelos ao eixo **Y**), por estarem contidos num plano horizontal e por serem perpendiculares aos lados **[AB]** e **[CD]**). Por fim, o lado **[AB]** mede 6 cm (a diferença entre as abcissas dos pontos **A** e **B**), que é a medida do lado do quadrado.

Assim, atendendo a que o lado **[CD]** é fronto-horizontal, o ponto **D** tem o mesmo afastamento do ponto **C** – o ponto **D** tem, assim, **6 cm de afastamento**. Por outro lado, o lado **[AD]** é de topo, pelo que o ponto **D** tem a mesma abcissa do ponto **A** – o ponto **D** tem, assim, **6 m de abcissa**. Nesse sentido, as coordenadas do ponto **D** são ( 6 ; 6 ; 10).

Por outro lado, tratando-se de uma **pirâmide regular**, que é uma pirâmide reta, o eixo do sólido está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta vertical (projetante horizontal). Assim, o vértice da pirâmide situa-se na mesma projetante horizontal do centro da base, que é o ponto **Q** (o ponto médio das duas diagonais). O ponto **Q** tem 10 cm de cota (porque está contido no plano da base), tem 3 cm de abcissa (a média das abcissas dos pontos **A** e **B** e tem 3 cm de afastamento (a média dos afastamentos dos pontos **A** e **D**). Assim, o ponto **V** tem **3 cm de abcissa** (a abcissa do ponto **Q**), tem **3 cm de afastamento** (o afastamento do ponto **Q**) e tem **cota nula** (é dado no enunciado). Assim, as coordenadas do ponto **V** são ( 3 ; 3 ; 0).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de  $105^\circ$  com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de  $130^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de  $125^\circ$  ( $105^\circ + 130^\circ + 125^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

#### Resolução:

As coordenadas cinco vértices da pirâmide medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três *eixos coordenados*, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi um **método misto** – recorreu-se ao **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**) para a determinação gráfica dos coeficientes de redução do eixo **X** e do eixo **Y** e ao **método do rebatimento do plano projetante de um eixo** para a determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo **Z**.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Z:

Assim, rebateu-se o eixo **Z** para o *plano axonométrico*, pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Nesse sentido, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente  $Z \equiv e$ .

O ponto **T** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **U** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[RS]** do *triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **T** e **U** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .*

O triângulo **[TOU]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** no ponto **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[TU]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MT} = \overline{MU}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[TU]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, sobre a semicircunferência. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **T<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O triângulo **[T<sub>r</sub>O<sub>r</sub>U<sub>r</sub>]** é retângulo em **O<sub>r</sub>**. A reta definida por **O<sub>r</sub>** e por **U<sub>r</sub>** (que não se identificou) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza. Assim, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, representou-se a cota do plano da base (10 cm), em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma reta perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva da cota da base da pirâmide, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O**, está a perspectivas da cota do plano da base.

Atendendo a que o vértice **B**, da base, é um ponto do eixo **Z** (é o ponto do eixo **Z** que tem 10 cm de cota), o ponto da perspectiva do eixo **Z** que corresponde à perspectiva da cota é, na realidade, a perspectiva do ponto **B**. Assim, representou-se o ponto **B**, pelas suas perspectivas. Uma vez que o ponto **B** é um ponto do eixo **Z** tem-se  $B \equiv B_2 \equiv B_3$  (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**, **B<sub>1</sub>** a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B** e **B<sub>2</sub>** a perspectiva da projeção frontal do ponto **B**) – **B<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**) está coincidente com a perspectiva do ponto **O** ( $O \equiv B_1$ ).

#### Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base **[A'B'C'D']** do prisma:

Tendo em conta que o ponto **B** é o ponto do eixo **Z** que tem 10 cm de cota (a cota do plano da base da pirâmide), o plano horizontal (e nível) **v** que contém a base da pirâmide, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 10 cm de cota, contém necessariamente o ponto **B**.

Assim, pela perspectiva do ponto **B** conduziram-se as perspectivas dos traços do plano **v** – **f<sub>v</sub>** (a perspectiva do traço frontal do plano **v**) e **p<sub>v</sub>** (a perspectiva do traço lateral ou de perfil do plano **v**).

Note que **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano **v**) é uma reta fronto-horizontal do plano **v** com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado, **p<sub>v</sub>** (o traço lateral ou de perfil do plano **v**) é uma reta de topo do plano **v**, com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

O plano **v** é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal (**f<sub>v</sub>**). Por outro lado, o plano **v** é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral (**p<sub>v</sub>**).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação gráfica dos coeficientes de deformação do eixo X e do eixo Y:

Como atrás se referiu, para determinar os coeficientes de deformação do eixo X e do eixo Y optou-se por recorrer ao **método do cortes**, rebatendo o *plano coordenado XY* (que é o *plano coordenado* que contém os dois eixos cujos coeficientes de deformação se pretende determinar). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é a reta suporte do lado [RS] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos R e S são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo [ROS] está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em O. O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto M') – com o compasso, fazendo centro no ponto M' e com raio  $M'R = M'S$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto O é, afinal, o plano projetante do eixo Z. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano XY para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo Z.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_r, O_r, S_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XY rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo Z) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto O rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r$  está definido por um ponto e uma direção). O plano XY, rebatido e trasladado, é o plano  $X_r' O_r' Y_r'$ .

Em seguida, no plano XY rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos cinco pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – recorde que os pontos B e C têm abcissa nula. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – recorde que os pontos A e B têm afastamento nulo. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}, B_{1r}, C_{1r}, D_{1r}$  e  $V_{1r}$ , que são as **projeções horizontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XY*). Em seguida, desenhou-se a **projeção horizontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XY*).

## Determinação das perspectivas dos cinco vértices da pirâmide:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto A determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1, A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em O e o outro na respetiva projeção do ponto A.  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto A – atendendo a que o ponto A tem afastamento nulo,  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto A) situa-se sobre a perspectiva do eixo X.  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto A.  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto A – mais uma vez atendendo a que o ponto A se situa no *plano coordenado XZ* (pois tem afastamento nulo),  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto A) situa-se sobre a perspectiva do eixo Z.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto A tem afastamento nulo, o ponto A situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que se tem imediatamente  $A_2 \equiv A$  (sendo A a perspectiva propriamente dita do ponto A).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os restantes vértices da base da pirâmide (os pontos C e D), o que nos permitiu determinar as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral daqueles dois pontos.

Em relação ao ponto C,  $C_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto C – atendendo a que o ponto C tem abcissa nula,  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto C) situa-se sobre a perspectiva do eixo Y.  $C_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto C – mais uma vez atendendo a que o ponto C se situa no *plano coordenado YZ* (pois tem abcissa nula),  $C_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto C) situa-se sobre a perspectiva do eixo Z. Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto C tem abcissa nula, o ponto C situa-se no *plano coordenado YZ*, pelo que se tem imediatamente  $C_3 \equiv C$  (sendo C a perspectiva propriamente dita do ponto C).

Note que o plano  $v$  (o plano que contém a base da pirâmide) é um plano projetante frontal, pelo que as perspectivas das projeções frontais de todos os vértices da base (os pontos A, B, C e D) se situam sobre a perspectiva do traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é também um plano projetante lateral, pelo que as perspectivas das projeções laterais de todos os vértices da base se situam sobre a perspectiva do traço lateral do plano  $v$  ( $p_v$ ).

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto V determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro ( $V_1, V_2$  e  $V_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em O e o outro na respetiva projeção do ponto V.  $V_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto V.  $V_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto V – atendendo a que o ponto V tem cota nula,  $V_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto V) situa-se sobre a perspectiva do eixo X.  $V_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto V – o ponto V situa-se no *plano coordenado XY* (pois tem cota nula), pelo que  $V_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto V) se situa sobre a perspectiva do eixo Y.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **V** tem cota nula, o ponto **V** situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente  $V_1 \equiv V$  (sendo **V** a perspetiva propriamente dita do ponto **V**).

Sublinha-se que, apesar de não ser absolutamente necessário, se optou por se representar o ponto **Q** (o centro da base), pelas suas perspetivas.

#### *Determinação das perspetivas da pirâmide:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ABCV]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **D**. Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é visível, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AD]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[DV]**). Por outro lado, a aresta lateral **[BV]** é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. O vértice **V** é o vértice de menor cota da pirâmide, pelo que é invisível (em projeção horizontal) bem como todas as arestas que nele convergem – assim, todas as arestas laterais da pirâmide são invisíveis em projeção horizontal, sendo essa a **invisibilidade por projeção** a assinalar (em projeção horizontal). Por outro lado, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

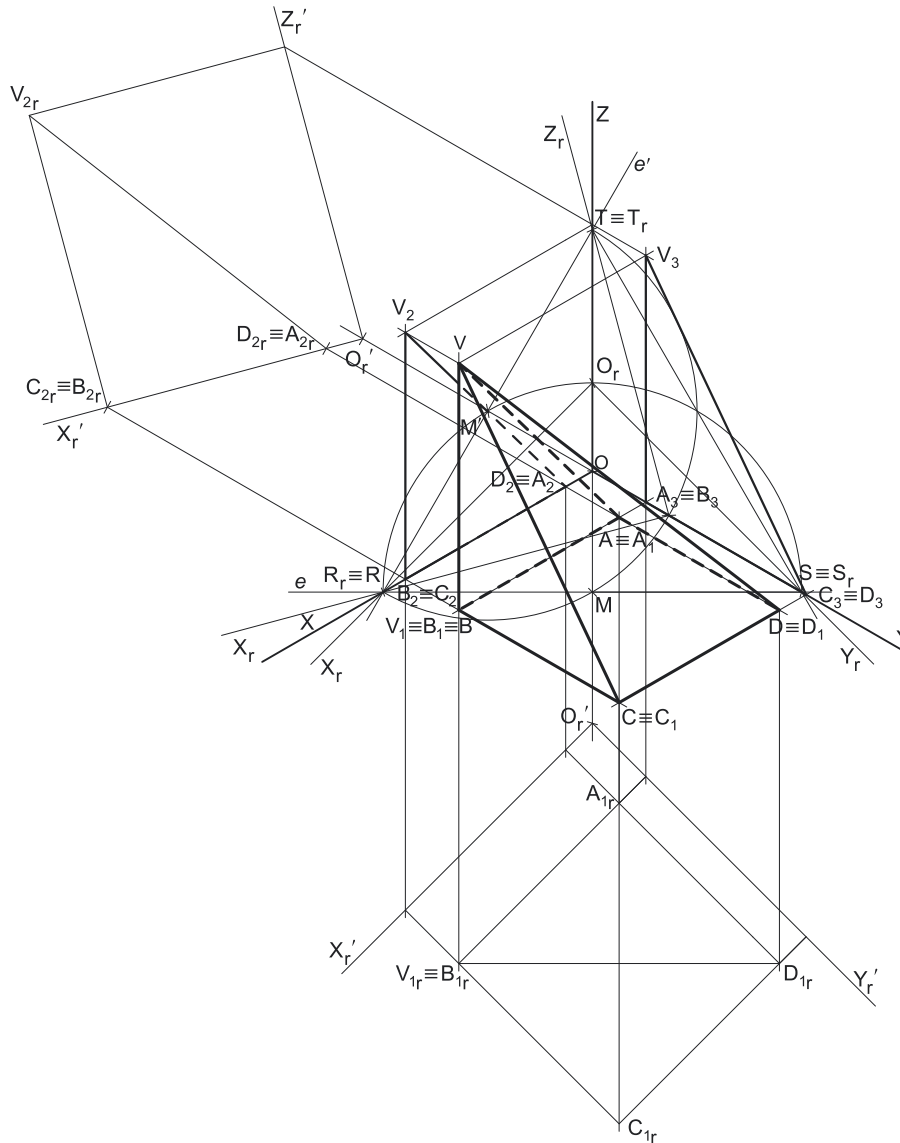
A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[C<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. Por outro lado, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[A<sub>3</sub>V<sub>3</sub>D<sub>3</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. No entanto, parte da projeção lateral da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

#### **Traçado:**

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano *v* (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, do rebatimento do *plano coordenado XY*, da translação o plano **XY** em rebatimento, da representação da projeção horizontal da pirâmide em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

1125.



a) Tendo em conta que os pontos **A** e **B** têm cota nula, a base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida no *plano coordenado XY* (que é um plano horizontal com cota nula), pelo que os pontos **C** e **D** têm necessariamente **cota nula** (todos os pontos do *plano coordenado XY* têm cota nula). Por outro lado, os pontos **A** e **B** têm o mesmo afastamento e a mesma cota, pelo que é possível concluir que o lado **[AB]** do quadrado é fronto-horizontal (é paralelo ao eixo **X**). Assim, o lado **[CD]** do polígono será igualmente fronto-horizontal (paralelo ao eixo **X**), pois o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois. Por sua vez, os lados **[BC]** e **[AD]** serão necessariamente de topo horizontais (paralelos ao eixo **Y**), por estarem contidos num plano horizontal (o plano da base) e por serem perpendiculares aos lados **[AB]** e **[CD]**). Por fim, o lado **[AB]** mede 6 cm (a diferença entre as abscissas dos pontos **A** e **B**), que é a medida do lado do quadrado.

Assim, atendendo a que o lado **[BC]** é de topo, o ponto **C** tem a mesma abscissa do ponto **B** (que é 7 cm) e o seu afastamento é 6 cm superior ao afastamento do ponto **B** (que é 2 cm) – o ponto **C** tem, assim, **8 cm de afastamento e 7 cm de abscissa** (e cota nula, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto **C** são ( 7 ; 8 ; 0).

Atendendo a que o lado **[AD]** do quadrado é também de topo, o ponto **D** tem a mesma abscissa do ponto **A** (que é 1 cm). Por sua vez, o lado **[CD]** é fronto-horizontal, pelo que o ponto **D** tem o mesmo afastamento do ponto **C** (que é 8 cm). Assim, o ponto **D** tem **1 cm de abscissa e 8 cm de afastamento** (e cota nula) – as coordenadas do ponto: **D** são ( 1 ; 8 ; 0).

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e a sua base tem cota nula (porque se situa no *plano coordenado XY*), o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem **8 cm de cota** ( $0 + 8 = 8$ ). Por outro lado, atendendo a que o ponto **V** se situa na mesma projetante horizontal do ponto **B**, o ponto **V** tem a mesma abscissa e o mesmo afastamento do ponto **B**, ou seja, o ponto **V** tem **7 cm de abscissa e 2 cm de afastamento**. Assim, as coordenadas do ponto **V** são ( 7 ; 2 ; 8).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**b) Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

**Resolução:**

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

*Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:*

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY** (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado [RS] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo [ROS] está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto **M**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M** é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo **Z** interseca o lado [RS] do *triângulo fundamental*. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MR} = \overline{MS}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspetiva do eixo **Z**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo [ $R_r O_r S_r$ ] é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e trasladado, é o plano  $X_r' O_r' Y_r'$ .

O eixo  $X_r$  (o eixo **X** rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos cinco pontos sobre qualquer daqueles dois eixos. No entanto, optou-se por resolver este exercício recorrendo à prévia representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, para o que é necessário rebater outro *plano coordenado*. Nesse sentido, optou-se por rebater o *plano coordenado XZ*.

Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é a reta suporte do lado [RT] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo [ROT] está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RT] (o ponto **M'**) – note que, tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, o ponto **M'** é necessariamente o ponto em que a perspetiva do eixo **Y** interseca o lado [RT] do *triângulo fundamental*. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'R} = \overline{M'T}$ , desenhou-se a semicircunferência de que [RT] é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Y**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspetiva do eixo **Y**.

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo [ $R_r O_r T_r$ ] é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **X** – o eixo **X** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O<sub>r</sub>** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo **Y**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>** (o eixo **X<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Z<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Z<sub>r</sub>** (o eixo **Z<sub>r</sub>'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XZ**, rebatido e transladado, é o plano **X<sub>r</sub>'O<sub>r</sub>'Z<sub>r</sub>'**.

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois **O<sub>r</sub>**, dois **O<sub>r</sub>'**, dois **X<sub>r</sub>** e dois **X<sub>r</sub>'**.

*Representação dos cinco pontos e da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:*

A determinação das perspetivas dos cinco pontos poder-se-ia processar a partir das perspetivas das respetivas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e transladados) das respetivas projeções dos cinco pontos, em rebatimento.

Assim, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo **X<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos cinco pontos (1 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo **Y<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos (2 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. A partir destas duas coordenadas foi possível representar **A<sub>1r</sub>**, **B<sub>1r</sub>**, **C<sub>1r</sub>**, **D<sub>1r</sub>** e **V<sub>1r</sub>**, que são as **projeções horizontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**). Em seguida, desenhou-se a **projeção horizontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XY*).

Já no plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **X<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos cinco pontos (1 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo **Z<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do vértice da pirâmide (8 cm), em verdadeira grandeza. Este procedimento permitiu-nos representar **A<sub>2r</sub>**, **B<sub>2r</sub>**, **C<sub>2r</sub>**, **D<sub>2r</sub>** e **V<sub>2r</sub>**, que são as **projeções frontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XZ*). Em seguida, desenhou-se a **projeção frontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XZ*).

O procedimento atrás exposto permitiu-nos obter a representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, através da sua **projeção horizontal** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado XY*) e da sua **projeção frontal** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado XZ*).

*Determinação das perspetivas dos cinco vértices da pirâmide:*

Em seguida, conduziu-se, por **A<sub>1r</sub>** (a **projeção horizontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e**) e, por **A<sub>2r</sub>** (a **projeção frontal** do ponto **A** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta **e'**). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **A**. O procedimento exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**), o que nos permitiu determinar as perspetivas propriamente ditas de todos aqueles pontos.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **A** sobre as perspetivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar **A<sub>1</sub>** (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**), **A<sub>2</sub>** (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) e **A<sub>3</sub>** (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**), o que nos permitiu determinar as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral de todos aqueles pontos.

*Determinação das perspetivas da pirâmide:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[BCDV]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **A**. Este, por ser o vértice mais distante do observador, é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**). Por outro lado, a aresta lateral **[CV]** é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas das projeções frontal e lateral da pirâmide. Note que não se representou a perspetiva da projeção horizontal da pirâmide, porque a pirâmide assenta, pela sua base, no *plano coordenado XY*. Nestas situações, em que o sólido assenta num dos *planos coordenados*, a representação da projeção do sólido nesse *plano coordenado*, de uma forma geral, dificulta a leitura da resolução gráfica – nesse sentido, em geral, omite-se a representação dessa projeção.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[C<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. No entanto, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

(continua na página seguinte)

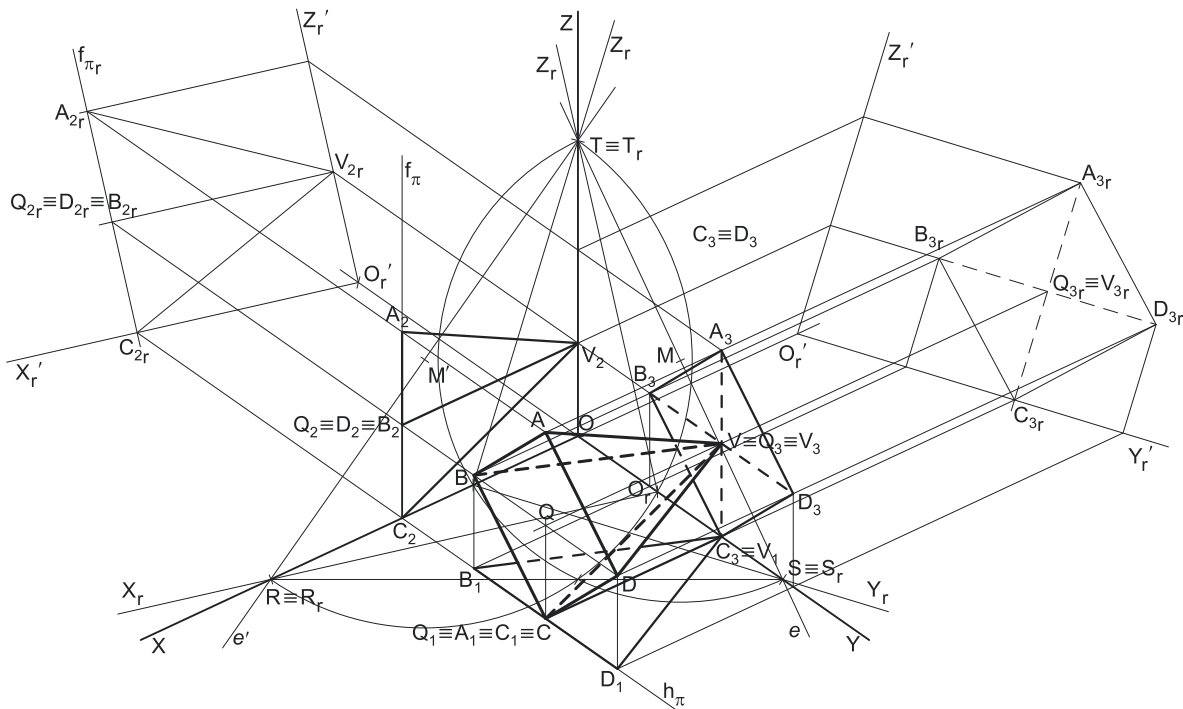
(continuação da página anterior)

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[B_3V_3C_3]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção lateral da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção lateral, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos *planos coordenados XY e XZ*, da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) da pirâmide em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

## 1126.



- a) A base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano de perfil com 6 cm de abscissa (a abscissa dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **6 cm de abscissa** (todos os pontos de um plano de perfil têm a mesma abscissa). Os pontos **A** e **C** têm o mesmo afastamento e a mesma abscissa, pelo que é possível constatar que a diagonal  $[AC]$  do quadrado é vertical (paralela ao eixo **Z**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal  $[BD]$ ), porque é perpendicular à diagonal  $[AC]$  e está contida num plano de perfil, é necessariamente de topo (paralela ao eixo **Y**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bisetam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal  $[AC]$  tem necessariamente 3 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **3 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal  $[AC]$  mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal  $[BD]$  mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

O ponto **B** é o vértice de menor afastamento da pirâmide (como o enunciado refere expressamente), pelo que o seu afastamento é 3 cm inferior ao afastamento dos pontos **A** e **C** (que é 6 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **3 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto **B** são ( 6; 3; 3).

Pelo seu lado, o ponto **D** é o vértice de maior afastamento do sólido (por oposição ao ponto **B**), pelo que o seu afastamento é 3 cm superior ao afastamento dos pontos **A** e **C** (que é 6 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **9 cm de afastamento**. Assim, as coordenadas do ponto **D** são ( 6; 9; 3).

Trata-se de uma **pirâmide regular**, que é uma pirâmide reta, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, uma reta fronto-horizontal. Assim, o vértice da pirâmide situa-se na mesma fronto-horizontal do centro da base (o ponto médio das duas diagonais), que tem **6 cm de afastamento** (o afastamento dos pontos **A** e **C**) e, como atrás se referiu, **3 cm de cota** (a cota dos pontos **B** e **D**). Por fim, o enunciado refere expressamente que o ponto **V** tem **abscissa nula**. Assim, as coordenadas do ponto **V** são ( 0; 6; 3).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do 1ª *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

## b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados*. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspetiva do eixo **X** faz um ângulo de 125° com a perspetiva do eixo **Y** e um ângulo de 115° com a perspetiva do eixo **Z**, as perspetivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de 120° (115° + 125° + 120° = 360°). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

### Resolução:

As coordenadas cinco vértices da pirâmide medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspetivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três *eixos coordenados*, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **YZ** (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[ST]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser trasladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

O triângulo **[SOT]** está contido no *plano coordenado YZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do *plano coordenado YZ* processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[ST]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio  $\overline{MS} = \overline{MT}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[ST]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **YZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspetiva do eixo **X**.

O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo **[S<sub>r</sub>O<sub>r</sub>T<sub>r</sub>]** é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo **X**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano **YZ**, rebatido e trasladado, é o plano  $Y_r'O_r'Z_r'$ .

Tendo em conta que, numa **perspetiva trimétrica**, é necessário rebater os três eixos coordenados (porque os três apresentam coeficientes de deformação diferentes), é necessário, agora, rebater um dos outros dois *planos coordenados* (ambos contêm o eixo que nos falta rebater – o eixo **X**). Optou-se por rebater o *plano coordenado XZ*.

Assim, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é a reta suporte do lado **[RT]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O triângulo **[ROT]** está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RT]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio  $\overline{M'R} = \overline{M'T}$ , desenhou-se a semicircunferência de que **[RT]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Y**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XZ** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspetiva do eixo **Y**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_r O_r T_r]$  é retângulo em  $O_r$ . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo  $Z$  – o eixo  $Z$  foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Y$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$  (o eixo  $Z_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XZ$ , rebatido e transladado, é o plano  $X_r' O_r' Z_r'$ .

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois  $O_r$ , dois  $O_r'$ , dois  $Z_r$  e dois  $Z_r'$ .

*Representação dos cinco pontos e da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:*

A determinação das perspectivas dos cinco pontos poder-se-ia processar a partir das perspectivas das respetivas coordenadas, como em situações anteriores, mas, como atrás se referiu, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e transladados) das respetivas projeções dos cinco pontos, em rebatimento.

Assim, no plano  $YZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos (3 cm, 6 cm e 9 cm), em verdadeira grandeza. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos cinco pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – recorde que o ponto  $C$  tem cota nula. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{3_r}$ ,  $B_{3_r}$ ,  $C_{3_r}$ ,  $D_{3_r}$  e  $V_{3_r}$ , que são as **projeções laterais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado YZ*). Em seguida, desenhou-se a **projeção lateral da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado YZ*).

Já no plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do plano de base (6 cm), em verdadeira grandeza – recorde que o ponto  $V$  tem abscissa nula. Em seguida, no eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos cinco vértices da pirâmide (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – recorde que o ponto  $C$  tem cota nula. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{2_r}$ ,  $B_{2_r}$ ,  $C_{2_r}$ ,  $D_{2_r}$  e  $V_{2_r}$ , que são as **projeções frontais** dos cinco vértices da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XZ*). Em seguida, desenhou-se a **projeção frontal da pirâmide**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XZ*).

Este procedimento permitiu-nos obter a representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, através da sua **projeção frontal** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado XZ*) e da sua **projeção lateral** (em rebatimento, no rebatimento do *plano coordenado YZ*).

*Determinação das perspectivas dos cinco vértices da pirâmide:*

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{3_r}$  (a **projeção lateral** do ponto  $A$  em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{2_r}$  (a **projeção frontal** do ponto  $A$  em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta  $e'$ ). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto  $A$ . O procedimento exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $V$ ), o que nos permitiu determinar as perspectivas propriamente ditas de todos aqueles pontos.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspectivas das coordenadas do ponto  $A$  sobre as perspectivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspectiva do paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a  $O$ ) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ),  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ) e  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ).

O procedimento atrás exposto repetiu-se para os restantes vértices da pirâmide (os pontos  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $V$ ), o que nos permitiu determinar as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral de todos aqueles pontos.

*Representação do plano de perfil que contém a base da pirâmide:*

Em seguida, representou-se o plano  $\pi$ , o plano de perfil que contém a base da pirâmide. O plano  $\pi$  é um plano projetante frontal (porque é ortogonal ao plano  $XZ$ ), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ). Assim, desenhou-se  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ), que passa necessariamente pelas perspectivas das projeções frontais dos vértices da base da pirâmide.

Por outro lado, o plano  $\pi$  é também um plano projetante horizontal (porque é ortogonal ao plano  $XY$ ), pelo que projeta todos os seus pontos e retas sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Assim, desenhou-se  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ), passando necessariamente pelas perspectivas das projeções horizontais dos vértices da base da pirâmide.

As perspectivas do traço frontal ( $f_\pi$ ) e do traço horizontal ( $h_\pi$ ) do plano  $\pi$  são necessariamente concorrentes num ponto da perspectiva do eixo  $X$ .

*Determinação das perspectivas da pirâmide:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada  $[ABCDV]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente da perspectiva do sólido. No entanto, a aresta  $[AD]$ , da base, é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – a base  $[ABCD]$  e a face lateral  $[ADV]$ . Note que, na realidade, os vértices  $A$  e  $D$  são os vértices mais próximos do observador e, por isso, a aresta  $[AD]$  é visível. Já as arestas laterais  $[BV]$  e  $[CV]$  são duas arestas invisíveis, da pirâmide, porque separam faces da pirâmide que são invisíveis, em perspetiva. Note ainda que os vértices  $B$  e  $C$  são dos vértices da pirâmide que estão mais distantes do observador.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[B_1V_1D_1]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. No entanto, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[A_2V_2C_2]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas da pirâmide que são visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção frontal da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção horizontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero  $[A_3B_3C_3D_3]$ . O vértice  $V$  é o vértice de menor abcissa da pirâmide, pelo que é invisível (em projeção lateral) bem como todas as arestas que nele convergem – assim, todas as arestas laterais da pirâmide são invisíveis em projeção lateral, sendo essa a **invisibilidade por projeção** a assinalar (em projeção lateral). Por outro lado, parte da projeção lateral da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\pi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento dos planos coordenados  $YZ$  e  $XZ$ , da translação daqueles planos em rebatimento, da representação das projeções (horizontal e frontal) da pirâmide em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos.

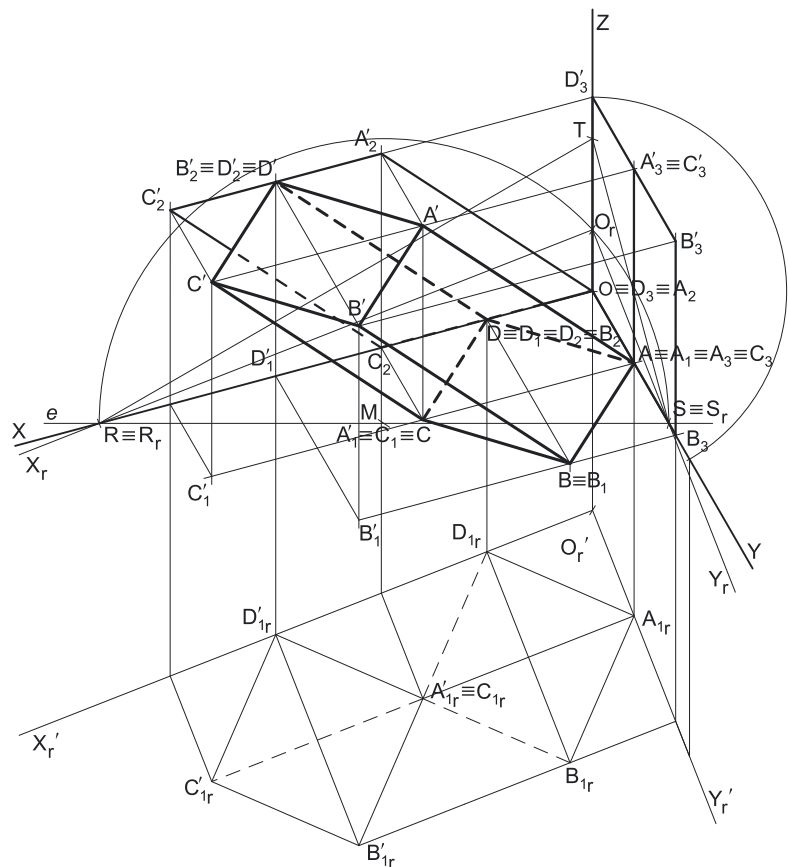
## 1127.

a) A base inferior do prisma (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida no *plano coordenado XY*, pelo que os restantes vértices da base inferior (os pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$ ) têm necessariamente **cota nula** (todos os pontos do plano coordenado  $XY$  têm cota nula). Por outro lado, a base superior do prisma (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ) está contida num plano horizontal (de nível) com 7 cm de cota (a cota do ponto  $A$ ), pelo que os restantes vértices da base superior (os pontos  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ ) têm necessariamente **7 cm de cota** (todos os pontos de um plano horizontal têm a mesma cota).

O ponto  $A'$  (que é um vértice da base superior) situa-se na mesma projetante horizontal do vértice  $C$  (da base inferior), pelo que os dois pontos têm a mesma abcissa e o mesmo afastamento. Tendo em conta que o ponto  $C$  tem cota nula (como atrás se referiu), as coordenadas do ponto  $C$  são  $(6; 3; 0)$ . Sublinha-se que  $[A'C]$  é uma **diagonal espacial** do prisma.

Os pontos  $A$  e  $C$  têm o mesmo afastamento e a mesma cota, pelo que é possível constatar que a diagonal  $[AC]$  do quadrado  $[ABCD]$  é fronto-horizontal (paralela ao eixo  $X$ ). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal  $[BD]$ ), porque é perpendicular à diagonal  $[AC]$  e está contida no *plano coordenado XY*, é necessariamente de topo (paralela ao eixo  $Y$ ). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado  $[ABCD]$  bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal  $[AC]$  tem necessariamente 3 cm de afastamento (o afastamento dos pontos  $A$  e  $C$ ) e 3 cm de abcissa (a média aritmética das abcissas dos pontos  $A$  e  $C$ ). Nesse sentido, os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **3 cm de abcissa**. Por outro lado, a diagonal  $[AC]$  mede 6 cm (a diferença entre os afastamentos dos pontos  $A$  e  $C$ ), pelo que a diagonal  $[BD]$  mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento). Tendo em conta que o enunciado é omissivo no que respeita à ordem dos vértices  $B$  e  $D$ , considerou-se (de forma arbitrária) que  $B$  é o vértice de maior afastamento do quadrado e que  $D$  é o seu vértice de menor afastamento.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Considerando-se que o ponto **B** é o vértice de maior afastamento do quadrado, o seu afastamento é 3 cm superior ao afastamento dos pontos **A** e **C** (que é 3 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **6 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto **B** são ( 3; 6; 0).

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto **D** é o vértice de menor afastamento do quadrado (por oposição ao vértice **B**), o seu afastamento é 3 cm inferior ao afastamento dos pontos **A** e **C** (que é 3 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **afastamento nulo**. As coordenadas do ponto **D** são ( 3; 0; 0).

No que respeita à base superior que tem 7 cm de cota, como atrás se referiu, sabe-se que se trata de um quadrado semelhante ao quadrado **[ABCD]**. Nesse sentido, a diagonal **[A'C']** é fronto-horizontal e mede 6 cm (que é o comprimento da diagonal **[AC]**). Assim, os pontos **A'** e **C'** têm o mesmo afastamento, pelo que o ponto **C'** tem **3 cm de afastamento**. Por outro lado, a abcissa do ponto **C'** é 6 cm (o comprimento da diagonal) superior à abcissa do ponto **A'**, pelo que o ponto **C'** tem **12 cm de abcissa**. Assim, as coordenadas do ponto **C'** são ( 12; 3; 7).

Uma vez que a diagonal **[A'C']** do quadrado **[A'B'C'D']** é fronto-horizontal (paralela à diagonal **[AC]** e paralela ao eixo **X**), a outra diagonal (a diagonal **[B'D']**), porque é perpendicular à diagonal **[A'C']** e está contida num plano horizontal (de nível), é necessariamente de topo (paralela ao eixo **Y**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado **[A'B'C'D']** bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal **[A'C']** tem necessariamente 3 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A'** e **C'**) e 9 cm de abcissa (a média aritmética das abcissas dos pontos **A'** e **C'**). Nesse sentido, os pontos **B'** e **D'** têm necessariamente **9 cm de abcissa**. Por outro lado, a diagonal **[B'D']** mede necessariamente 6 cm (que é o comprimento da diagonal **[BD]**). Mantendo-se, na base **[A'B'C'D']**, a relação dos vértices da base **[ABCD]**, o ponto **B'** é o vértice de maior afastamento do quadrado **[A'B'C'D']** e **D'** é o seu vértice de menor afastamento.

Assim, o afastamento do ponto **B'** é 3 cm superior ao afastamento dos pontos **A'** e **C'** (que é 3 cm) – nesse sentido, o ponto **B'** tem **6 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto **B'** são ( 9; 6; 7).

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto **D'** é o vértice de menor afastamento do quadrado (por oposição ao vértice **B**), o seu afastamento é 3 cm inferior ao afastamento dos pontos **A'** e **C'** (que é 3 cm) – nesse sentido, o ponto **D'** tem **afastamento nulo**. As coordenadas do ponto **D'** são ( 9; 0; 7).

Salienta-se que o prisma se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

#### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados*. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que o eixo **X** é o eixo que sofre uma redução isolada, a sua perspetiva faz ângulos iguais com as perspetivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**). As perspetivas do eixo **Y** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $150^\circ$ , pelo que o ângulo restante é um ângulo de  $210^\circ$  ( $360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$ ). Esse ângulo é a soma de dois ângulos iguais (os ângulos que a perspetiva do eixo **X** faz com as perspetivas dos outros dois eixos), pelo que a perspetiva do eixo **X** faz ângulos de  $105^\circ$  com as perspetivas dos outros dois eixos ( $210^\circ : 2 = 105^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

#### Resolução:

As coordenadas dos oito pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspetivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como o enunciado refere expressamente, o eixo **X** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspetivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo **X**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

#### Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o *plano coordenado XY* contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com um **único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o *plano coordenado XZ* (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o *plano coordenado YZ*, pois o eixo **Y** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **X**).

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XY$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta  $e$ ) é a reta suporte do lado  $[RS]$  do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O triângulo  $[ROS]$  está contido no plano coordenado  $XY$  e é um triângulo retângulo em  $O$ . O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto  $O$  ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto  $O$ ). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de  $[RS]$  (o ponto  $M$ ). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio  $MR = MS$ , desenhou-se a semicircunferência de que  $[RS]$  é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto  $O$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se  $O_r$ , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto  $O$  é, afinal, o plano projetante do eixo  $Y$ . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano  $XY$  para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto  $O_r$  fica sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .

O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O triângulo  $[R_r O_r S_r]$  é retângulo em  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto  $O_r$  ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido, após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$  (o eixo  $X_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y_r'$  está definido por um ponto e uma direção). O plano  $XY$ , rebatido e transladado, é o plano  $X_r' O_r' Y_r'$ .

*Determinação das perspectivas das coordenadas dos oito pontos:*

O eixo  $X_r$  (o eixo  $X$  rebatido) e o eixo  $Y_r$  (o eixo  $Y$  rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo  $X$  apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspectiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas dos oito pontos (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como Em seguida, se expõe.

Nesse sentido, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos oito pontos (3 cm, 6 cm, 9 cm e 12 cm), em verdadeira grandeza – recorde que o ponto  $A$  tem abscissa nula. Em seguida, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos oito pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – tenha em conta que os pontos  $D$  e  $D'$  têm afastamento nulo, os pontos  $A$ ,  $A'$ ,  $C$  e  $C'$  têm o mesmo afastamento, assim como os pontos  $B$  e  $B'$  também têm o mesmo afastamento. A partir destas duas coordenadas foi possível representar  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$ ,  $C_{1r}$ ,  $D_{1r}$ ,  $A'_{1r}$ ,  $B'_{1r}$ ,  $C'_{1r}$  e  $D'_{1r}$ , que são as **projeções horizontais** dos oito vértices do prisma, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $XY$ ). Em seguida, desenhou-se a **projeção horizontal do prisma**, em rebatimento (no rebatimento do plano coordenado  $XY$ ).

Por fim, atendendo a que o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  apresentam a mesma deformação, mediu-se, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, a **cota** da base superior do prisma (7 cm), em verdadeira grandeza),

Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos oito pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo  $X$  estão as perspectivas das **abscissas** dos oito pontos e sobre a perspectiva do eixo  $Y$  estão as perspectivas dos **afastamentos** e das **cotas** dos oito pontos.

No entanto, a perspectiva da **cota** do plano da base superior do prisma está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto  $O$ , transportou-se a perspectiva da **cota** para a perspectiva do eixo  $Z$ .

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base superior do prisma:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo  $Z$  que tem 7 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a base superior do prisma, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 7 cm de cota, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspetivas do ponto **A**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**.  $A_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**.  $A_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto **A** – atendendo a que o ponto **A** tem cota nula,  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) situa-se sobre a perspetiva do eixo **X**.  $A_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A** – o ponto **A** situa-se no plano coordenado **XY** (pois tem cota nula), pelo que  $A_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**) se situa sobre a perspetiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **A** tem cota nula, o ponto **A** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que se tem imediatamente  $A_1 \equiv A$  (sendo **A** a perspetiva propriamente dita do ponto **A**).

#### Determinação das perspetivas dos pontos **B**, **C** e **D**:

As perspetivas dos pontos **B**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **A**. De facto, atendendo a que os três pontos têm cota nula, as perspetivas das suas projeções frontais ( $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ ) situam-se necessariamente sobre a perspetiva do eixo **X**. De forma semelhante, e mais uma vez atendendo a que os três pontos têm cota nula, as perspetivas das suas projeções laterais ( $B_3$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se necessariamente sobre a perspetiva do eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que os três pontos têm cota nula, os três pontos situam-se no plano coordenado **XY**, pelo que se tem imediatamente  $B_1 \equiv B$  (sendo **B** a perspetiva propriamente dita do ponto **B**),  $C_1 \equiv C$  (sendo **C** a perspetiva propriamente dita do ponto **C**) e  $D_1 \equiv D$  (sendo **D** a perspetiva propriamente dita do ponto **D**).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $A_3 \equiv C_3$ . De forma idêntica, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $B_2 \equiv D_2$ .

#### Determinação das perspetivas do ponto **A'**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A'** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro ( $A'_1$ ,  $A'_2$  e  $A'_3$ ), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A'**.  $A'_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A'**.  $A'_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto **A'** e situa-se sobre a perspetiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.  $A'_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A'** e situa-se sobre a perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **A'**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de  $A'_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de **A'** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de  $A'_2$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **A'** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de  $A'_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **A'** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **A'**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A'** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspetivas dos pontos **B'**, **C'** e **D'**:

As perspetivas dos pontos **B'**, **C'** e  $D'_1$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **A'**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, as perspetivas das projeções frontais dos três pontos ( $B'_2$ ,  $C'_2$  e  $D'_{12}$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). De forma semelhante, e porque os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que também é um plano projetante lateral, as perspetivas das projeções laterais dos três pontos ( $B'_3$ ,  $C'_3$  e  $D'_{13}$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Os pontos **A'** e **C'** situam-se na mesma reta fronto-horizontal (que é uma reta projetante lateral), pelo que se tem, imediatamente,  $A'_3 \equiv C'_3$ . De forma idêntica, os pontos **B'** e  $D'_1$ , porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $B'_2 \equiv D'_{12}$ .

Os pontos **C** e **A'** situam-se na mesma reta projetante horizontal, pelo que se tem, imediatamente,  $C_1 \equiv A'_1$ .

#### Determinação das perspetivas do prisma:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[ABCC'D'A']$ . Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – os vértices **B'** e **D**. O vértice **B'**, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$  e  $[B'C']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e a aresta lateral  $[BB']$ . O vértice **D**, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AD]$  e  $[CD]$  (da base  $[ABCD]$ ) e a aresta lateral  $[DD']$ .

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas da projeção horizontal, da projeção frontal e da projeção lateral do prisma. Note que não se representou a perspetiva da projeção horizontal do prisma, porque o prisma assenta, pela sua base, no plano coordenado **XY**. Nestas situações, em que o sólido assenta num dos planos coordenados, a representação da projeção do sólido nesse plano coordenado, de uma forma geral, dificulta a leitura da resolução gráfica – nesse sentido, em geral, omite-se a representação dessa projeção.

A **perspetiva da projeção frontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[A_2C_2C'_2A'_2]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. No entanto, parte da projeção frontal do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A **perspetiva da projeção lateral do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[B_3C_3C'_3D'_3]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção lateral do prisma que esteja oculta pelo próprio prisma (que é opaco), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a base superior do prisma), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (frontal e lateral) do prisma, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, da translação daquele plano em rebatimento, da representação da projeção horizontal do prisma em rebatimento, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos e, ainda, do arco de transporte da perspetiva da cota.

## 24

## AXONOMETRIAS CLINOGONAIS (OU OBLÍQUAS): CAVALEIRA E PLANOMÉTRICA

### 1128.

As **axonometrias oblíquas (ou clinogonais)** são as representações perspetivas nas quais o *plano axonométrico* (ou *quadro*) é paralelo a um dos *planos coordenados* (ou é um dos *planos coordenados*) e em que as retas projetantes, sendo paralelas entre si (trata-se do **Sistema de Projeção Paralela ou Cilíndrica**), são **oblíquas** ao *plano axonométrico* (o plano de projeção), pois recorrem ao **Sistema de Projeção Oblíqua (ou Clinogonal)**.

### 1129.

No referencial em Geometria Descritiva, qualquer *eixo coordenado* é **ortogonal** ao *plano coordenado* que não contém esse eixo – o eixo **Z**, por exemplo (que não está contido no *plano coordenado XY*), é ortogonal ao plano **XY**.

Uma vez que o *plano axonométrico*, nas **axonometrias oblíquas**, contém um dos *planos coordenados* (ou é paralelo a um dos *planos coordenados*), conclui-se que o *plano axonométrico* ou contém dois *eixos coordenados* (se o *plano axonométrico* for um dos *planos coordenados*) ou é paralelo a dois *eixos coordenados* (se o *plano axonométrico* for paralelo a um dos *planos coordenados*).

Assim, sempre que o *plano axonométrico* seja um dos *planos coordenados*, o *plano axonométrico* contém **necessariamente** dois *eixos coordenados* (os dois eixos que estão contidos nesse *plano coordenado*) e o terceiro eixo (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) é necessariamente **ortogonal** ao *plano axonométrico*.

Caso o *plano axonométrico* seja paralelo a um dos *planos coordenados*, há dois *eixos coordenados* que são paralelos ao *plano axonométrico*, sendo que o terceiro eixo (o eixo que não é paralelo ao *plano axonométrico*) é necessariamente **ortogonal** ao *plano axonométrico*.

### 1130.

Por **plano projetante de um eixo** entende-se o plano **que projeta** esse eixo no *plano axonométrico* – é o plano ortogonal ao *plano axonométrico* que contém esse eixo.

Sublinha-se que esta definição é universal, não dependendo de se tratar das **axonometrias ortogonais** ou das **axonometrias oblíquas** (ver resposta à questão 1023. deste **Livro de Exercícios**)

### 1131.

Tal como nas **axonometrias ortogonais**, também nas **axonometrias oblíquas (ou clinogonais)** o **plano projetante de um dado eixo** está definido por duas retas concorrentes – o próprio eixo e uma reta projetante, concorrente com esse eixo.

### 1132.

Por **direção das projetantes** entende-se o **ângulo** que o plano projetante do eixo que é ortogonal ao *plano axonométrico* faz com os *planos coordenados* que são ortogonais ao *plano axonométrico*, ou seja, o ângulo que a perspetiva do eixo ortogonal ao *plano axonométrico* faz com as perspetivas dos outros dois eixos.

### 1133.

Por **inclinação das projetantes** entende-se o ângulo que as retas projetantes (que são paralelas entre si) fazem com o *plano axonométrico*.

### 1134.

Por coeficiente de deformação entende-se a razão (o quociente) entre o comprimento de uma determinada medida em projeção (apresentando deformação ou não), e o comprimento real dessa mesma medida (no espaço).

No caso das **axonometrias oblíquas**, esse **coeficiente de deformação** depende não só do **ângulo entre o objeto e o plano de projeção** como, também, da **inclinação das projetantes**, ou seja, do ângulo que as retas projetantes fazem com o plano de projeção (o *plano axonométrico*).

### 1135.

A afirmação é verdadeira. Ao longo do estudo efetuado sobre as **axonometrias ortogonais**, observou-se que todas as deformações provocadas pela projeção (em que as retas projetante eram ortogonais ao plano de projeção) eram, necessariamente, **reduções**, ou seja, a dimensão representada era sempre inferior à dimensão real. Por isso mesmo, nas **axonometrias ortogonais**, o **coeficiente de deformação** também se podia chamar de **coeficiente de redução** (porque a deformação se tratava, sempre, de uma **redução**). Sublinha-se que, nas **axonometrias ortogonais**, o **coeficiente de deformação (ou redução)** varia exclusivamente em função do ângulo que essa dimensão apresentava em relação ao *plano axonométrico*.

Já nas **axonometrias oblíquas (ou clinogonais)**, o mesmo não acontece, uma vez que a deformação de uma dada dimensão não depende, apenas, ao ângulo que essa dimensão apresenta em relação ao *plano axonométrico* mas, também, da inclinação das retas projetantes (o ângulo que as retas projetantes fazem com o *plano axonométrico*). Assim, em determinadas situações, a perspetiva de uma determinada dimensão pode ser **maior** do que essa dimensão real (no espaço), ou seja, pode verificar-se a existência de uma **ampliação** face à dimensão real. Exatamente por isso, nas **axonometrias oblíquas (ou clinogonais)**, o **coeficiente de deformação** nunca se pode chamar de **coeficiente de redução**, pois a deformação pode ser uma **redução**, uma **isometria** ou uma **ampliação**.

## 1136.

Na situação em que a **inclinação das projetantes é 45°**, o **coeficiente de deformação é 1**, ou seja, não existe deformação nas dimensões projetadas do terceiro eixo – as dimensões projetam-se em verdadeira grandeza (trata-se de uma **isometria**).

Na situação em que a **inclinação das projetantes é superior a 45°**, o **coeficiente de deformação é inferior a 1**, ou seja, as dimensões do terceiro eixo projetam-se reduzidas (trata-se de uma **redução**).

Já na situação em que a **inclinação das projetantes é inferior a 45°**, o **coeficiente de deformação é superior a 1**, ou seja, as dimensões do terceiro eixo projetam-se ampliadas (trata-se de uma **ampliação**).

## 1137.

Para se determinar a **perspetiva de um ponto** numa **perspetiva axonométrica oblíqua (ou clinogonal)** conduz-se, por esse ponto, uma reta projetante – a reta de interseção do plano projetante com o *plano axonométrico* (o plano de projeção) é a **perspetiva desse ponto**. Note que, tratando-se de uma **axonometria oblíqua**, a reta projetante é necessariamente **oblíqua** ao plano axonométrico.

## 1138.

Tal como nas **axonometrias ortogonais**, também nas **axonometrias oblíquas (ou clinogonais)**, para se determinar a **perspetiva de um dado eixo** (que é uma reta) conduz-se, por esse eixo (essa reta), um plano projetante – a reta de interseção do plano projetante com o *plano axonométrico* é a **perspetiva desse eixo**.

## 1139.

Uma **perspetiva cavaleira** é uma **axonometria oblíqua** em que o *plano axonométrico* é qualquer dos *planos coordenados* que contêm o eixo **Z** (o plano **XZ** ou o plano **YZ**) ou é paralelo a um desses *planos coordenados*.

No primeiro caso (em que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**), as perspetivas do eixo **X** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90° e projetam-se em verdadeira grandeza, pois ou estão contidos no *plano axonométrico* ou são paralelos ao *plano axonométrico*. Nesse sentido, o coeficiente de deformação afeta apenas o terceiro eixo (o eixo **Y**).

No segundo caso (em que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**), as perspetivas do eixo **Y** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90° e projetam-se em verdadeira grandeza, pois ou estão contidos no *plano axonométrico* ou são paralelos ao *plano axonométrico*. Nesse sentido, o coeficiente de deformação afeta apenas o terceiro eixo (o eixo **X**).

Note que, sempre que se considere que o *plano axonométrico* é um dos *planos coordenados*, as perspetivas dos eixos contidos nesse *plano coordenado* são os próprios eixos.

## 1140.

Uma **perspetiva planométrica (ou militar)** é uma **axonometria oblíqua** em que o *plano axonométrico* é o *plano coordenado XY* ou é paralelo ao *plano coordenado XY*. Assim, as perspetivas do eixo **X** e do eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90° e projetam-se em verdadeira grandeza, pois ou estão contidos no *plano axonométrico* ou são paralelos ao *plano axonométrico*. Nesse sentido, o coeficiente de deformação afeta apenas o terceiro eixo (o eixo **Z**).

Note que, sempre que se considere que o *plano axonométrico* é o próprio *plano coordenado XY*, as perspetivas dos dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) são os próprios eixos.

## 1141.

Numa **perspetiva militar (ou planométrica)**, o **plano projetante do eixo Z** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **Z** e uma reta projetante, concorrente com o eixo **Z**.

## 1142.

Sendo dada uma determinada **direção das projetantes** (que indica um determinado ponto de vista) é a **inclinação das projetantes** que origina diferentes deformações do objeto, permitindo, para esse ponto de vista, uma visão mais rasante ou mais elevada em relação ao objeto. Assim, a **inclinação das projetantes** pode provocar originar diferentes graus de **redução** visual das dimensões deformadas (caso se trate de uma **redução**), pode não originar deformação visual alguma (caso se trate de uma **isometria**) ou pode, ainda, originar diferentes graus de ampliação visual da dimensão deformada (caso se trate de uma **ampliação**).

## 1143.

Sendo dada uma determinada **inclinação das projetantes** (que indica um ponto de vista numa determinada posição, mais rasante ou mais elevada em relação ao objeto), é a **direção das projetantes** que origina diferentes formas de ver esse mesmo objeto, definindo diferentes posições do ponto de vista em relação ao objeto. Assim, para uma mesma inclinação das projetantes, o objeto pode ser visto mais de frente, mais de lado, mais de trás, mais de cima, mais de baixo, etc.

**1144.**

Numa **axonometria oblíqua (ou clinogonal)**, é possível considerar indistintamente que o *plano axonométrico* (o plano de projeção) é paralelo a um dos *planos coordenados* ou é um dos *planos coordenados*.

Nesse sentido, caso se considere que o *plano axonométrico é paralelo* a um dos *planos coordenados*, dois dos *eixos coordenados* (os eixos que estão contidos nesse *plano coordenado*) são necessariamente **paralelos** ao *plano axonométrico*, pelo que se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (não apresentam deformação).

Por outro lado, caso se considere que o *plano axonométrico é um dos planos coordenados*, dois dos *eixos coordenados* (os eixos que estão contidos nesse *plano coordenado*) estão necessariamente **contidos** no *plano axonométrico*, pelo que estão em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (não apresentam deformação).

**1145.**

Numa **perspetiva militar (ou planométrica)**, a coordenada que apresenta deformação é a **cota**.

**Justificação:**

Numa **perspetiva militar (ou planométrica)**, o *plano axonométrico* (o plano de projeção) é paralelo ao plano **XY** ou é o próprio plano **XY**. Nesse sentido, o eixo **X** e o eixo **Y** ou são paralelos ao *plano axonométrico* ou estão contidos no *plano axonométrico*, pelo que aqueles eixos **se projetam em verdadeira grandeza** no *plano axonométrico*. Dessa forma, nem as **abcissas** (que se medem no eixo **X**) nem os **afastamentos** (que se medem no eixo **Y**) sofrem qualquer deformação.

Por oposição, o eixo **Z** é o único *eixo coordenado* que não é paralelo ao *plano axonométrico*, pelo que é **o único eixo que sofre deformação** em perspetiva. Tendo em conta que as **cotas** se medem no eixo **Z**, a **cota** é, assim, a única coordenada que sofre deformação.

**1146.**

Numa **perspetiva cavaleira** em que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**, a coordenada que apresenta deformação é a **abscissa**.

**Justificação:**

Numa **perspetiva cavaleira** em que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**, o *plano axonométrico* (o plano de projeção) contém o eixo **Y** e o eixo **Z**, pelo que estes dois eixos **se projetam em verdadeira grandeza** no *plano axonométrico*. Dessa forma, nem os **afastamentos** (que se medem no eixo **Y**) nem as **cotas** (que se medem no eixo **Z**) sofrem qualquer deformação.

Por oposição, o eixo **X** é o único *eixo coordenado* que não está contido ao *plano axonométrico* (nem é paralelo ao *plano axonométrico*), pelo que é **o único eixo que sofre deformação** em perspetiva. Tendo em conta que as **abcissas** se medem no eixo **X**, a **abscissa** é, assim, a única coordenada que sofre deformação.

**1147.**

Numa **perspetiva cavaleira** em que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, o *plano axonométrico* (o plano de projeção) contém o eixo **X** e o eixo **Z**, pelo que estes dois eixos **estão em verdadeira grandeza** no *plano axonométrico*. Dessa forma, tanto as **abcissas** (que se medem no eixo **X**) como as **cotas** (que se medem no eixo **Z**) projetam-se no *plano axonométrico* sem qualquer deformação (o eixo **X** e o eixo **Z** **não apresentam qualquer deformação**).

Por oposição, o eixo **Y** é o único *eixo coordenado* que não está contido ao *plano axonométrico* (nem é paralelo ao *plano axonométrico*), pelo que é **o único eixo que sofre deformação** em perspetiva. Tendo em conta que os **afastamentos** se medem no eixo **Y**, o **afastamento** é, assim, a única coordenada que sofre deformação.

Por outro lado, atendendo a que a deformação do eixo **Y** depende da inclinação das projetantes, os **afastamentos** podem ficar reduzidos (caso a deformação seja uma **redução**), podem ficar com o mesmo comprimento (caso se trate de uma **isometria**) ou podem, ainda, ficar ampliados (caso se trate de uma **ampliação**).

**1148.**

Numa **perspetiva cavaleira** em que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**, o *plano axonométrico* (o plano de projeção) contém o eixo **Y** e o eixo **Z**, pelo que estes dois eixos **estão em verdadeira grandeza** no *plano axonométrico*. Dessa forma, tanto os **afastamentos** (que se medem no eixo **Y**) como as **cotas** (que se medem no eixo **Z**) projetam-se no *plano axonométrico* sem qualquer deformação (o eixo **Y** e o eixo **Z** **não apresentam qualquer deformação**).

Por oposição, o eixo **X** é o único *eixo coordenado* que não está contido ao *plano axonométrico* (nem é paralelo ao *plano axonométrico*), pelo que é **o único eixo que sofre deformação** em perspetiva. Tendo em conta que as **abcissas** se medem no eixo **X**, a **abscissa** é, assim, a única coordenada que sofre deformação.

Por outro lado, atendendo a que a deformação do eixo **X** depende da inclinação das projetantes, as **abcissas** podem ficar reduzidos (caso a deformação seja uma **redução**), podem ficar com o mesmo comprimento (caso se trate de uma **isometria**) ou podem, ainda, ficar ampliados (caso se trate de uma **ampliação**).

**1149.**

A **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano a rebater com o plano para o qual se processa o rebatimento. No caso das perspetivas axonométricas, os rebatimentos processam-se **sempre** para o *plano axonométrico* (que, na situação apresentada, é o plano **XZ**). Assim, no rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, a **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Y** com o *plano axonométrico* – a charneira do rebatimento é a **perspetiva do eixo Y**.

## 1150.

A **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano a rebater com o plano para o qual se processa o rebatimento. No caso das perspectivas axonométricas, os rebatimentos processam-se **sempre** para o *plano axonométrico* (que, na situação apresentada, é o plano **YZ**). Assim, no rebatimento do plano projetante do eixo **X**, a **charneira do rebatimento** é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano axonométrico* – a charneira do rebatimento é a **perspetiva do eixo X**.

## 1151.

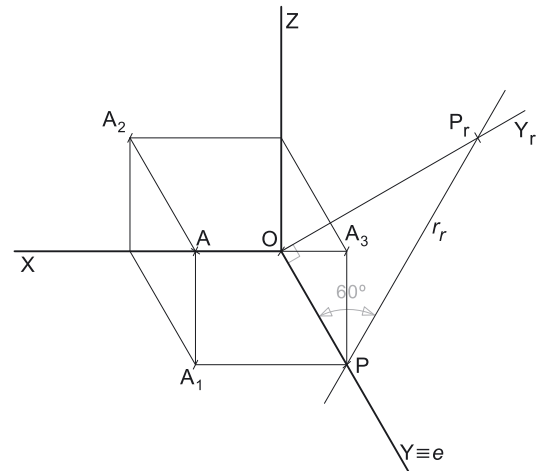
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – nesse sentido, o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X**, um ângulo de  $120^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $150^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

### Resolução:

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** do ponto **A** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** do ponto **A** mede-se no eixo **Y** e a **cota** do ponto **A** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **A** (4 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **A** (3 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e da cota do ponto **A** foi possível determinar, de forma direta, a perspetiva da projeção frontal do ponto **A** – **A<sub>2</sub>**.



Já no que respeita ao eixo **Y** (onde se mede o **afastamento** do ponto **A**), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o **afastamento** do ponto **A** não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o **afastamento** é a coordenada do ponto **A** que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir o **afastamento** do ponto **A** sobre a perspetiva do eixo **Y**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

O **afastamento** do ponto **A**, porque se mede no eixo **Y**, está afetado pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Y<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspetiva do eixo **Y**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se o **afastamento** do ponto **A**, em verdadeira grandeza (6 cm), determinando-se um ponto **P<sub>r</sub>** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do ponto **A** ( $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto **A**, em verdadeira grandeza). Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de  $60^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $60^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta **r** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo **Y**). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta **r** e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspetiva do eixo **Y**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspetiva do eixo **Y** (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspetiva do eixo **Y** é a perspetiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspetiva do eixo **Y**).

O segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspetiva do afastamento do ponto **A** –  $\overline{OP}$  é a perspetiva do afastamento do ponto **A**.

### Determinação das perspetivas do ponto A:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspetivas da sua projeção horizontal (**A<sub>1</sub>**) e da sua projeção lateral (**A<sub>3</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **A<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **A<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **A<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A** e **A<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal, conduziu-se, pela perspetiva de **A<sub>1</sub>**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **A<sub>3</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Y<sub>r</sub>** e da reta **r<sub>r</sub>**), representaram-se a **leve**.

**1152.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – nesse sentido, o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo **X** e do eixo **Z**, ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

**Resolução:**

As coordenadas do ponto **R** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** do ponto **R** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** do ponto **R** mede-se no eixo **Y** e a **cota** do ponto **R** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **R** (5 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **R** (4 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e da cota do ponto **R** foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção frontal do ponto **R** – **R<sub>2</sub>**.

Já no que respeita ao eixo **Y** (onde se mede o **afastamento** do ponto **R**), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o **afastamento** do ponto **R** não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o **afastamento** é a coordenada do ponto **R** que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir o **afastamento** do ponto **R** sobre a perspectiva do eixo **Y**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

**Determinação gráfica do coeficiente de deformação:**

O **afastamento** do ponto **R**, porque se mede no eixo **Y**, está afetado pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Y<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo **Y**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se o **afastamento** do ponto **R**, em verdadeira grandeza (3 cm), determinando-se um ponto **P<sub>r</sub>** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do ponto **R** (**OP<sub>r</sub>** é o afastamento do ponto **R**, em verdadeira grandeza). Por **P<sub>r</sub>**, conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $45^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de  $45^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $45^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta **r** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo **Y**). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta **r** e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Y**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **Y** (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **Y** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **Y**).

O segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto **R** – **OP** é a perspectiva do afastamento do ponto **R**.

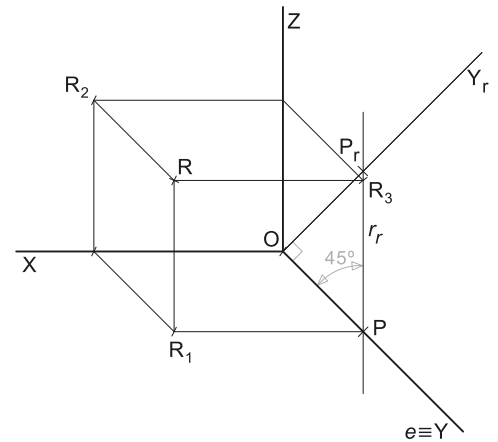
**Determinação das perspectivas do ponto R:**

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **R** determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal (**R<sub>1</sub>**) e da sua projeção lateral (**R<sub>3</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **R<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **R<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **R<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **R** e **R<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **R**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **R**. Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de **R<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **R** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **R<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **R** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **R<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **R** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **R**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **R** são dois vértices espacialmente opostos.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Y<sub>r</sub>** e da reta **r<sub>r</sub>**), representaram-se a **leve**.





## 1153.

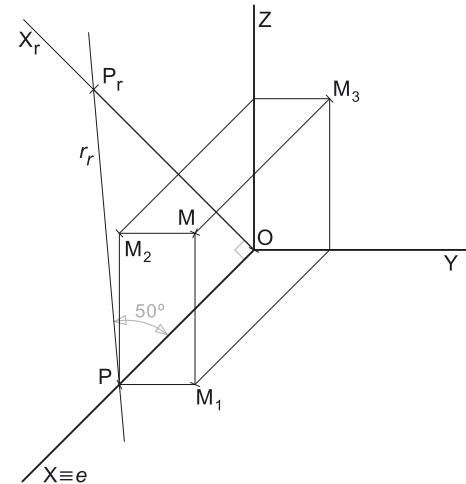
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o *plano axonométrico* é o plano **YZ** – nesse sentido, o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo **Y** e do eixo **Z**, ângulos de 135° (que são dois ângulos obtusos).

### Resolução:

As coordenadas do ponto **M** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** do ponto **M** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** do ponto **M** mede-se no eixo **Y** e a **cota** do ponto **M** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **Y** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **M** (2 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **M** (4 cm) em verdadeira grandeza. A partir do afastamento e da cota do ponto **M** foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção lateral do ponto **M** – **M<sub>3</sub>**.



Já no que respeita ao eixo **X** (onde se mede a **abscissa** do ponto **M**), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que a **abscissa** do ponto **M** não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **abscissa** é a coordenada do ponto **M** que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir a **abscissa** do ponto **M** sobre a perspectiva do eixo **X**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A **abscissa** do ponto **M**, porque se mede no eixo **X**, está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano **YZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **X**. O eixo **X** rebatido (o eixo **X<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **X**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **X<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo **X**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **X<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se a **abscissa** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (6 cm), determinando-se um ponto **P<sub>r</sub>** – o ponto **P** é um ponto do eixo **X** com a abscissa do ponto **M** (**OP<sub>r</sub>** é a abscissa do ponto **M**, em verdadeira grandeza). Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 50°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de 50°, pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 50° – esse ângulo está contido no plano que contém a reta **r** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo **X**). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta **r** e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **X**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **X** (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **X** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **X**).

O segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto **M** – **OP** é a perspectiva da abscissa do ponto **M**.

### Determinação das perspectivas do ponto **M**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal (**M<sub>1</sub>**) e da sua projeção frontal (**M<sub>2</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **M<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **M<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **M<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M** e **M<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **M**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **M**. Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de **M<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **M<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **M<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersestavam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **M**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **M** são dois vértices espacialmente opostos.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **X<sub>r</sub>** e da reta **r<sub>r</sub>**), representaram-se a **leve**.

## 1154.

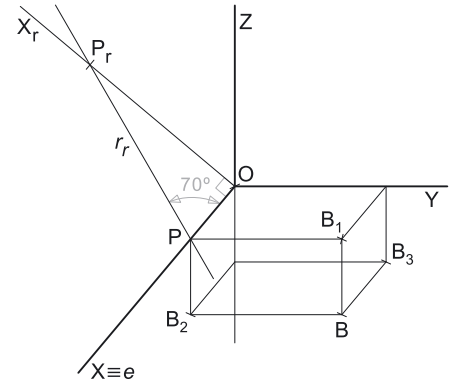
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **Y** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **YZ** – nesse sentido, o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de  $130^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $140^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

**Resolução:**

As coordenadas do ponto **B** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** do ponto **B** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** do ponto **B** mede-se no eixo **Y** e a **cota** do ponto **B** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **Y** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **B** (4 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no **sentido negativo** do eixo, representou-se a **cota** do ponto **B** (2 cm) em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto **B** tem **cota negativa**. A partir do afastamento e da cota do ponto **B** foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção lateral do ponto **B** – **B<sub>3</sub>**.



Já no que respeita ao eixo **X** (onde se mede a **abscissa** do ponto **B**), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que a **abscissa** do ponto **B** não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **abscissa** é a coordenada do ponto **B** que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir a **abscissa** do ponto **B** sobre a perspectiva do eixo **X**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

**Determinação gráfica do coeficiente de deformação:**

A **abscissa** do ponto **B**, porque se mede no eixo **X**, está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano **YZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **X**. O eixo **X** rebatido (o eixo **X<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **X**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **X<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo **X**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **X<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se a **abscissa** do ponto **B**, em verdadeira grandeza (6 cm), determinando-se um ponto **P<sub>r</sub>** – o ponto **P** é um ponto do eixo **X** com a abscissa do ponto **B** (**OP<sub>r</sub>** é a abscissa do ponto **B**, em verdadeira grandeza). Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $70^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de  $70^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $70^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta **r** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo **X**). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta **r** e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **X**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **X** (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **X** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **X**).

O segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto **B** – **OP** é a perspectiva da abscissa do ponto **B**.

**Determinação das perspectivas do ponto B:**

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **B** determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal (**B<sub>1</sub>**) e da sua projeção frontal (**B<sub>2</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **B<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **B<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **B<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B** e **B<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **B**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **B**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **B<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **B<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **B<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **B**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **B** são dois vértices espacialmente opostos.

Salienta-se que o ponto **B**, tendo cota negativa, se situa para baixo do *plano coordenado XY*, o que se pode comprovar na resolução gráfica apresentada.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **X<sub>r</sub>**, e da reta **r<sub>r</sub>**), representaram-se a **leve**.

## 1155.

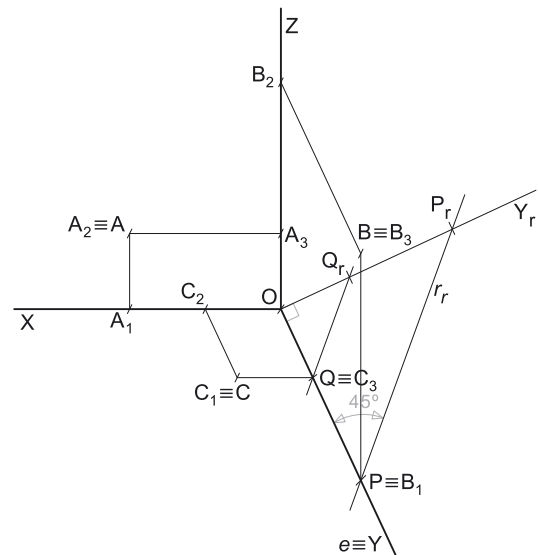
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $X$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $XZ$  – nesse sentido, o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$ , um ângulo de  $115^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $155^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . Uma vez que o plano axonométrico é o plano  $XZ$ , dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos três pontos (2 cm e 4 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto  $B$  tem abscissa nula. De forma semelhante, sobre o eixo  $Z$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos (2 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto  $C$  tem cota nula. A partir das abscissas e das cotas dos três pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções frontais –  $A_3$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ,  $B_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$  e  $C_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $C$ .



Note que  $B_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$ ) se situa no eixo  $Z$ , pois o ponto  $B$  tem abscissa nula. De forma semelhante,  $C_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $C$ ) situa-se no eixo  $X$ , pois o ponto  $C$  tem cota nula.

Já no que respeita ao eixo  $Y$  (onde se medem os **afastamentos** dos três pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que os **afastamentos** não se projetam em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o **afastamento** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir os **afastamentos** dos três pontos sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

Os **afastamentos** dos três pontos, porque se medem no eixo  $Y$ , estão afetados pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o plano axonométrico (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ ).

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $Y_r$  (e no sentido positivo do eixo), representaram-se os **afastamentos** dos três pontos (2 cm e 5 cm), em verdadeira grandeza (salienta-se que o ponto  $A$  tem afastamento nulo), determinando-se dois pontos – os pontos  $P_r$  e  $Q_r$ . O ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Y$  com o afastamento do ponto  $B$  ( $OP_r = 5$  cm e é o afastamento do ponto  $B$ , em verdadeira grandeza). O ponto  $Q$  é um ponto do eixo  $Y$  com o afastamento do ponto  $C$  ( $OQ_r = 2$  cm e é o afastamento do ponto  $C$ , em verdadeira grandeza).

Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $45^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $P$ , sobre a perspectiva do eixo  $Y$  – o segmento  $OP$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto  $B$  ( $OP$  é a perspectiva do afastamento do ponto  $B$ ).

A inclinação das projetantes é de  $45^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, no espaço, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $45^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano axonométrico (que é, na prática, o plano projetante do eixo  $Y$ ). Note que se trata do ângulo entre uma reta e um plano, pelo que o ângulo entre a reta  $r$  e o plano axonométrico corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Y$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Y$  (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Y$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Y$ ).

Por  $Q_r$  conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $45^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $Q$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $Q$ , sobre a perspectiva do eixo  $Y$  – o segmento  $OQ$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto  $C$  ( $OQ$  é a perspectiva do afastamento do ponto  $C$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto A:

$A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$  – uma vez que o ponto  $A$  tem afastamento nulo, o ponto  $A$  situa-se no plano coordenado  $XZ$ , pelo que  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ) se situa sobre o eixo  $X$ .  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$  – mais uma vez atendendo a que o ponto  $A$  se situa no plano coordenado  $XZ$  (pois tem afastamento nulo),  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ) situa-se sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto  $A$  tem afastamento nulo, o ponto  $A$  situa-se no plano coordenado  $XZ$ , pelo que se tem imediatamente  $A_2 \equiv A$  (sendo  $A$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Determinação das perspectivas do ponto B:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **B** determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal (**B**<sub>1</sub>) e da sua projeção lateral (**B**<sub>3</sub>), recorrendo ao paralelogramo de que **B**<sub>3</sub> e **O** são dois vértices opostos. **B**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B** – uma vez que o ponto **B** tem abcissa nula, o ponto **B** situa-se no plano coordenado **YZ**, pelo que **B**<sub>1</sub> (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**) se situa sobre a perspectiva do eixo **Y**. Note que a perspectiva de **B**<sub>1</sub> está coincidente com a perspectiva do ponto **P**. **B**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **B**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **B** tem abcissa nula, o ponto **B** situa-se no plano coordenado **YZ**, pelo que se tem imediatamente **B**<sub>3</sub> ≡ **B** (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

### Determinação das perspectivas do ponto C:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **C** determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal (**C**<sub>1</sub>) e da sua projeção lateral (**C**<sub>3</sub>), recorrendo ao paralelogramo de que **C**<sub>1</sub> e **O** são dois vértices opostos. **C**<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**. **C**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C** – uma vez que o ponto **C** tem cota nula, o ponto **C** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que **C**<sub>3</sub> (a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**) se situa sobre a perspectiva do eixo **Y**. Note que a perspectiva de **C**<sub>3</sub> está coincidente com a perspectiva do ponto **Q**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **C** tem cota nula, o ponto **C** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que se tem imediatamente **C**<sub>1</sub> ≡ **C** (sendo **C** a perspectiva propriamente dita do ponto **C**).

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **X**<sub>r</sub>, da reta **r**<sub>r</sub> e da reta paralela a **r**<sub>r</sub> que não se identificou), representaram-se a **leve**.

## 1156.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **Y** e ao eixo **Z**, conclui-se que o plano axonométrico é o plano **YZ** – nesse sentido, o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 150° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de 120° (que é outro ângulo obtuso).

### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **YZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **Y** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

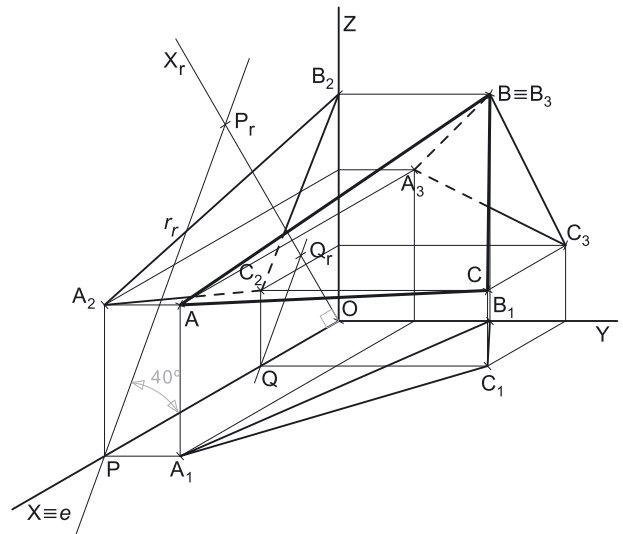
Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos (2 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto **B** tem afastamento nulo. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos (2 cm, 4 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza. A partir dos afastamentos e das cotas dos três pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções laterais – **A**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**, **B**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **B** e **C**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**.

Já no que respeita ao eixo **X** (onde se medem as **abcissas** dos três pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que as **abcissas** não se projetam em verdadeira grandeza no plano axonométrico (a **abcissa** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **abcissas** dos três pontos sobre a perspectiva do eixo **X**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

As **abcissas** dos três pontos, porque se medem no eixo **X**, estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **X** para o plano axonométrico (o plano **YZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **X**. O eixo **X** rebatido (o eixo **X**<sub>r</sub>) fica perpendicular à perspectiva do eixo **X**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **X**<sub>r</sub> está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo **X**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **X**<sub>r</sub> (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as **abcissas** dos três pontos (2 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza (salienta-se que o ponto **B** tem abcissa nula), determinando-se dois pontos – os pontos **P**<sub>r</sub> e **Q**<sub>r</sub>. O ponto **P** é um ponto do eixo **X** com a abcissa do ponto **A** (**OP**<sub>r</sub> = 6 cm e é a abcissa do ponto **A**, em verdadeira grandeza). O ponto **Q** é um ponto do eixo **X** com a abcissa do ponto **C** (**OQ**<sub>r</sub> = 2 cm e é a abcissa do ponto **C**, em verdadeira grandeza).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por  $P_r$ , conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $40^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $P$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto  $A$  ( $OP$  é a perspectiva da abscissa do ponto  $A$ ).

A inclinação das projetantes é de  $40^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $40^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo  $X$ ). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta  $r$  e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $X$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $X$  (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $X$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $X$ ).

Por  $Q_r$ , conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $40^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $Q$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $Q$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OQ]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto  $C$  ( $OQ$  é a perspectiva da abscissa do ponto  $C$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $A_1$ ) e da sua projeção frontal ( $A_2$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $A_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $A_2$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$  e  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas do ponto B:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $B$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $B_1$ ) e da sua projeção frontal ( $B_2$ ).  $B_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$  – uma vez que o ponto  $B$  tem abscissa nula, o ponto  $B$  situa-se no *plano coordenado YZ*, pelo que  $B_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ) se situa sobre a perspectiva do eixo  $Y$ .  $B_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$  – mais uma vez atendendo a que o ponto  $B$  se situa no *plano coordenado YZ* (pois tem abscissa nula),  $B_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$ ) situa-se sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto  $B$  tem abscissa nula, o ponto  $B$  situa-se no *plano coordenado YZ*, pelo que se tem imediatamente  $B_3 = B$  (sendo  $B$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto C:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $C$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $C_1$ ) e da sua projeção frontal ( $C_2$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $C_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $C_2$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $C_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$  e  $C_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $C$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $C$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $C_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $C$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $C_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $C$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $C_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $C$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $C$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas do triângulo:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo  $[ABC]$  é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo  $[A_1B_1C_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo  $[A_2B_2C_2]$  é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo  $[A_3B_3C_3]$  é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo – partes da projeção frontal e da projeção lateral do triângulo estão ocultas pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

### Traçado:

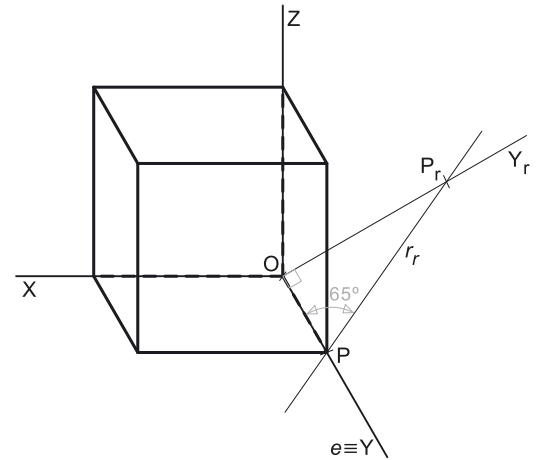
As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do triângulo  $[ABC]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades assinaladas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo  $X_r$ , da reta  $r_r$  e da reta paralela a  $r_r$ , que não se identificou), representaram-se a **leve**.

**1157.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X**, um ângulo de  $120^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $150^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

**Resolução:**

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir os 5 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos *eixos coordenados*. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).



Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo). De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo). A partir destas duas arestas é possível construir, de forma direta, o quadrado que é a face do cubo que está contida no plano **XZ**. Este procedimento permitiu-nos determinar as perspectivas de **quatro vértices** do cubo (os quatro vértices que estão contidos no plano **XZ**).

Já no que respeita ao eixo **Y** (onde se situa uma outra aresta do cubo), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que aquela aresta não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (esta aresta é a aresta que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir o comprimento da aresta do cubo sobre a perspectiva do eixo **Y**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

**Determinação gráfica do coeficiente de deformação:**

A aresta do cubo que está contida no eixo **Y** está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Y<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo **Y**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo), em verdadeira grandeza, obtendo-se um ponto **P<sub>r</sub>** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** que dista 5 cm do ponto **O** ( $\overline{OP}$  é a aresta do cubo, em verdadeira grandeza). Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $65^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de  $65^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $65^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta **r** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo **Y**). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta **r** e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Y**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **Y** (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **Y** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **Y**).

O segmento  $[\overline{OP}]$  é, assim, a perspectiva da aresta do cubo que está contida no eixo **Y** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do comprimento da aresta do cubo que se situa no eixo **Y**.

**Determinação da perspectiva do cubo:**

A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo que está contida no eixo **Y**, desenharam-se os dois paralelogramos que são as perspectivas das faces do cubo que estão contidas no plano **XY** e no plano **YZ**. O desenho desses dois paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais **dois vértices** do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspectivas de sete deles, falta-nos a perspectiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice **O**. Assim, determinou-se a perspectiva desse vértice conduzindo as perspectivas das arestas em falta (que são paralelas às perspectivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspectiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos *eixos coordenados*).

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Y<sub>r</sub>** e da reta **r<sub>r</sub>**), representaram-se a **leve**.



## 1158.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **Y** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **YZ** – o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de  $150^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $120^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

### Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir os 5 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos *eixos coordenados*. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **Y** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo). De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo). A partir destas duas arestas é possível construir, de forma direta, o quadrado que é a face do cubo que está contida no plano **YZ**. Este procedimento permitiu-nos determinar as perspectivas de **quatro vértices** do cubo (os quatro vértices que estão contidos no plano **YZ**).

Já no que respeita ao eixo **X** (onde se situa uma outra aresta do cubo), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que aquela aresta não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (esta aresta é a aresta que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir o comprimento da aresta do cubo sobre a perspectiva do eixo **X**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A aresta do cubo que está contida no eixo **X** está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano **YZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **X**. O eixo **X** rebatido (o eixo **X<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **X**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **X<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo **X**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **X<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo), em verdadeira grandeza, obtendo-se um ponto **P<sub>r</sub>** – o ponto **P** é um ponto do eixo **X** que dista 5 cm do ponto **O** (**OP** é a aresta do cubo, em verdadeira grandeza). Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $40^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de  $40^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $40^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta **r** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo **X**). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta **r** e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **X**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **X** (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **X** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **X**).

O segmento **[OP]** é, assim, a perspectiva da aresta do cubo que está contida no eixo **X** – **OP** é a perspectiva do comprimento da aresta do cubo que se situa do eixo **X**.

### Determinação da perspectiva do cubo:

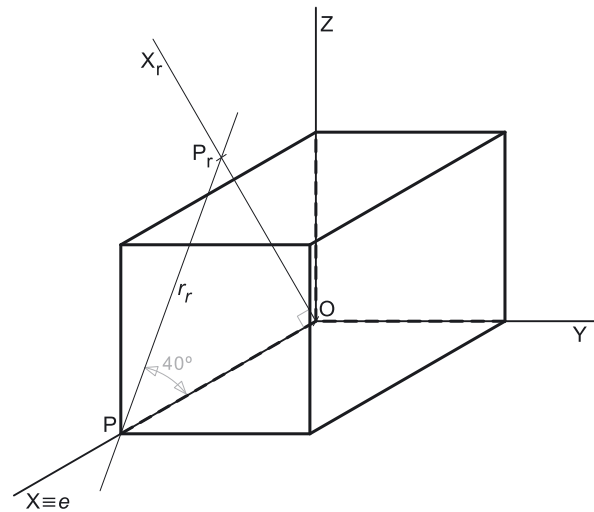
A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo que está contida no eixo **X**, desenharam-se os dois paralelogramos que são as perspectivas das faces do cubo que estão contidas no plano **XY** e no plano **XZ**. O desenho desses dois paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais **dois vértices** do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspectivas de sete deles, falta-nos a perspectiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice **O**. Assim, determinou-se a perspectiva desse vértice conduzindo as perspectivas das arestas em falta (que são paralelas às perspectivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspectiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos *eixos coordenados*).

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **X<sub>r</sub>** e da reta **r<sub>r</sub>**), representaram-se a **leve**.



## 1159.

- a) O quadrado está contido num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **2 cm de afastamento** (todos os pontos de um plano frontal têm o mesmo afastamento). Os pontos **A** e **C** têm a mesma abcissa e o mesmo afastamento, pelo que é possível constatar que a diagonal **[AC]** do quadrado é vertical (paralela ao eixo **Z**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal **[BD]**), porque é perpendicular à diagonal **[AC]** e está contida num plano frontal (de frente), é necessariamente fronto-horizontal (paralela ao eixo **X**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bisetam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal **[AC]** tem necessariamente 3 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **3 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal **[AC]** mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal **[BD]** mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

Sendo assim, atendendo a que o ponto **B** é o vértice de menor abcissa do quadrado (como o enunciado refere expressamente), a sua abcissa é 3 cm inferior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **2 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto **B** são ( 2; 2; 3).

Por fim, atendendo a que o ponto **D** é o vértice de maior abcissa do quadrado (por oposição ao vértice **B**), a sua abcissa é 3 cm superior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **8 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto **D** são ( 8; 2; 3).

Salienta-se que o quadrado se situa no espaço do 1.<sup>o</sup> Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

## b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o plano axonométrico é o plano **XZ** – nesse sentido, o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspetiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo **X**, um ângulo de 130° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de 140° (que é outro ângulo obtuso).

## Resolução:

As coordenadas dos quatro pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **XZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos quatro pontos (3 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos quatro pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto **A** tem cota nula. A partir das abscissas e das cotas dos quatro pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspetivas das respetivas projeções frontais – **A<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**, **B<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **B**, **C<sub>2</sub>** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **C** e **D<sub>2</sub>** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **D**.

Note que **A<sub>2</sub>** (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) se situa no eixo **X**, pois o ponto **A** tem cota nula.

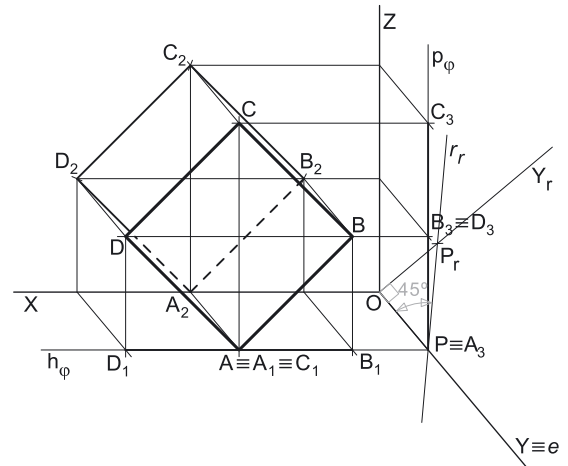
Já no que respeita ao eixo **Y** (onde se mede o **afastamento** do plano frontal que contém o quadrado), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o **afastamento** não se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o **afastamento** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir o **afastamento** do plano frontal (de frente) sobre a perspetiva do eixo **Y**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

## Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

O **afastamento** do plano frontal (de frente) que contém o quadrado, porque se mede no eixo **Y**, está afetado pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o plano axonométrico (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Y<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspetiva do eixo **Y**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), representou-se o **afastamento** do plano frontal (de frente) que contém o quadrado (2 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se um ponto **P<sub>r</sub>**. O ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do plano frontal (de frente) que contém o quadrado ( $\overline{OP} = 2$  cm e é o afastamento do plano frontal, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 45°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspetiva do ponto **P**, sobre a perspetiva do eixo **Y** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspetiva do afastamento do plano frontal (de frente) que contém o quadrado (**OP** é a perspetiva do afastamento do plano frontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inclinação das projetantes é de  $45^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $45^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano axonométrico (que é, na prática, o plano projetante do eixo  $Y$ ). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta  $r$  e o plano axonométrico corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Y$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Y$  (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Y$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Y$ ).

### Representação do plano frontal (de frente) que contém o quadrado:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , a perspectiva do ponto  $P$ , que é o ponto do eixo  $Y$  que tem 2 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento, contém necessariamente o ponto  $P$ .

Assim, pela perspectiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $A_1$ ) e da sua projeção lateral ( $A_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $A_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $A_3$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.  $A_2$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$  e situa-se sobre  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

O ponto  $A$  tem cota nula, pelo que o ponto  $A$  se situa no plano coordenado  $XY$ . Nesse sentido,  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ) situa-se sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Note que a perspectiva de  $A_3$  está coincidente com a perspectiva do ponto  $P$ .

Por fim, e ainda atendendo a que o ponto  $A$  tem cota nula, o ponto  $A$  situa-se no plano coordenado  $XY$ , pelo que se tem imediatamente  $A_1 \equiv A$  (sendo  $A$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto B:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $B$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $B_1$ ) e da sua projeção lateral ( $B_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $B_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $B_3$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $B_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.  $B_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $B$  e situa-se sobre  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $B_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $B_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $B_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $B$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas dos pontos C e D:

As perspectivas dos pontos  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $B$ . Atendendo a que os dois pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos dois pontos ( $C_1$  e  $D_1$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ). De forma semelhante, e porque os dois pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos dois pontos ( $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A$  e  $C$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A_1 \equiv C_1$ . Pelo seu lado, os pontos  $B$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $B_3 \equiv D_3$ .

### Determinação das perspectivas do quadrado:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do quadrado. O quadrado  $[ABCD]$  é a perspectiva propriamente dita do quadrado. O quadrado  $[A_2B_2C_2D_2]$  é a perspectiva da projeção frontal do quadrado. Salienta-se que parte da projeção frontal do quadrado está oculta pelo próprio quadrado (que é uma figura opaca), o que se assinalou convenientemente, com a convenção usada para o efeito (a traço interrompido). O segmento de reta  $[B_1D_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do quadrado, que se reduz a um segmento de reta sobre  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. O segmento de reta  $[A_3C_3]$  é a perspectiva da projeção lateral do quadrado, que se reduz a um segmento de reta sobre  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se que a perspectiva propriamente dita do quadrado é, também ela, um **quadrado**, tal como a perspectiva da sua projeção frontal é outro **quadrado** – os quadrados  $[ABCD]$  e  $[A_2B_2C_2D_2]$  são dois quadrados geometricamente iguais e são geometricamente iguais ao quadrado  $[ABCD]$  no espaço. Tal, deve-se ao facto de o plano que contém o quadrado (o plano  $\phi$ ) ser paralelo ao *plano axonométrico* (o plano  $XZ$ ), pelo que a projeção do quadrado não apresenta qualquer deformação (o plano que contém a figura é **paralelo ao plano de projeção**).

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano  $\phi$  (o plano que contém o quadrado), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. A perspectiva do quadrado  $[ABCD]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades assinaladas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo  $Y_r$  e da reta  $r_r$ ), representaram-se a **leve**.

## 1160.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $Y$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano  $YZ$  – nesse sentido, o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $X$  (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo  $Y$ , um ângulo de  $140^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $130^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

As coordenadas dos pontos  $A$  e  $C$  são dadas no enunciado. As coordenadas dos pontos  $B$  e  $D$  foram determinadas na alínea **a)** do exercício anterior e são:  $B(2; 2; 3)$  e  $D(8; 2; 3)$ .

#### Resolução:

As coordenadas dos quatro pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano  $YZ$ , dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo  $Y$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do plano frontal (de frente) que contém o quadrado (2 cm), em verdadeira grandeza. Por outro lado, sobre o eixo  $Z$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos quatro pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto  $A$  tem cota nula. A partir dos afastamentos e das cotas dos quatro pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções laterais –  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ,  $B_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $B$ ,  $C_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C$  e  $D_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $D$ .

Note que  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ) se situa no eixo  $Y$ , pois o ponto  $A$  tem cota nula (é um ponto do plano  $XY$ ).

Já no que respeita ao eixo  $X$  (onde se medem as **abscissas** dos quatro pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as **abscissas** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **abscissa** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **abscissas** dos quatro pontos sobre a perspectiva do eixo  $X$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

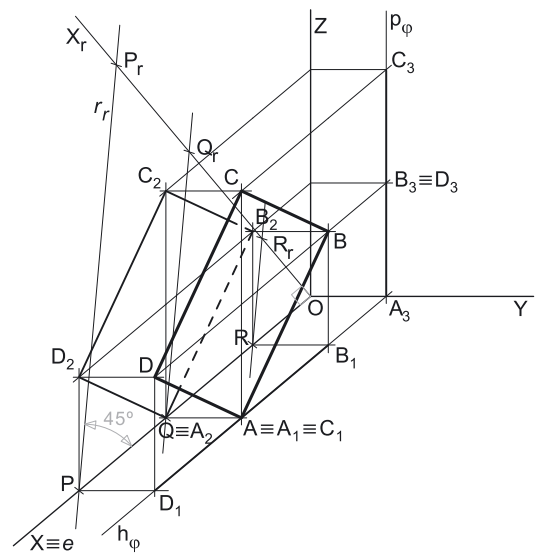
#### Representação do plano frontal (de frente) que contém o quadrado:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , a perspectiva de um ponto, que é o ponto do eixo  $Y$  que tem 2 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\phi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, pela perspectiva desse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano –  $h_\phi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ) e  $p_\phi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\phi$ ).

Note que  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\phi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\phi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\phi$ ) é uma reta vertical do plano  $\phi$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado*  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado*  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ). Por outro lado, o plano  $\phi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado*  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado*  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\phi$ ). Por isso mesmo, o traço lateral do plano  $\phi$  ( $p_\phi$ ) contém as projeções laterais dos quatro vértices do quadrado ( $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

As **abscissas** dos quatro pontos, porque se medem no eixo  $X$ , estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  para o *plano axonométrico* (o plano  $YZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $X$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ ).

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $X_r$  (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as **abscissas** dos quatro pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se três pontos – os pontos  $P_r$ ,  $Q_r$  e  $R_r$ . O ponto  $P$  é um ponto do eixo  $X$  com a abscissa do ponto  $D$  ( $OP_r = 8$  cm e é a abscissa do ponto  $D$ , em verdadeira grandeza). O ponto  $Q$  é um ponto do eixo  $X$  com a abscissa dos pontos  $A$  e  $C$  ( $OQ_r = 5$  cm e é a abscissas dos pontos  $A$  e  $C$ , em verdadeira grandeza). O ponto  $R$  é um ponto do eixo  $X$  com a abscissa do ponto  $B$  ( $OR_r = 2$  cm e é a abscissa do ponto  $B$ , em verdadeira grandeza).

Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $45^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $P$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto  $D$  ( $OP$  é a perspectiva da abscissa do ponto  $D$ ).

A inclinação das projetantes é de  $45^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $45^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo  $X$ ). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta  $r$  e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $X$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $X$  (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $X$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $X$ ).

Por  $Q_r$  conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $45^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $Q$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $Q$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OQ]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa dos pontos  $A$  e  $C$  ( $OQ$  é a perspectiva da abscissa dos pontos  $A$  e  $C$ ).

Por  $R_r$  conduziu-se uma outra reta (que também não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $45^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $R$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $R$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OR]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto  $B$  ( $OR$  é a perspectiva da abscissa do ponto  $B$ ).

#### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $A_1$ ) e da sua projeção frontal ( $A_2$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $A_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $A_2$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ .

Atendendo a que o ponto  $A$  tem cota nula, o ponto  $A$  situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente  $A_1 \equiv A$  (sendo  $A$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

#### Determinação das perspectivas do ponto B:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $B$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $B_1$ ) e da sua projeção frontal ( $B_2$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $B_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $B_2$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $B_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.  $B_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $B_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $B_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $B_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $B$  são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas dos pontos C e D:

As perspectivas dos pontos  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $B$ . Atendendo a que os dois pontos pertencem ao plano  $\phi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos dois pontos ( $C_1$  e  $D_1$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A$  e  $C$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A_1 \equiv C_1$ . Pelo seu lado, os pontos  $B$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $B_3 \equiv D_3$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspectivas do quadrado:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do quadrado. O quadrilátero  $[ABCD]$  (que é um paralelogramo) é a perspectiva propriamente dita do quadrado. O quadrilátero  $[A_2B_2C_2D_2]$  (que é outro paralelogramo) é a perspectiva da projeção frontal do quadrado. Salienta-se que parte da projeção frontal do quadrado está oculta pelo próprio quadrado (que é uma figura opaca), o que se assinalou convenientemente, com a convenção usada para o efeito (a traço interrompido). O segmento de reta  $[B_1D_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do quadrado, que se reduz a um segmento de reta sobre  $h_\phi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. O segmento de reta  $[A_3C_3]$  é a perspectiva da projeção lateral do quadrado, que se reduz a um segmento de reta sobre  $p_\phi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano  $\phi$  (o plano que contém o quadrado), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. A perspectiva do quadrado  $[ABCD]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades assinaladas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo  $X_r$  e da reta  $r_r$ ), representaram-se a **leve**.

## 1161.

- a) A base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida no plano coordenado  $XZ$ , pelo que os pontos  $C$  e  $D$  têm necessariamente **afastamento nulo** (todos os vértices do quadrado  $[ABCD]$  têm afastamento nulo). Por outro lado, é possível constatar que o lado  $[AB]$  do quadrado é paralelo ao eixo  $X$ , pelo que o lado  $[CD]$  do polígono será igualmente paralelo ao eixo  $X$  (o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois). Por sua vez, os lados  $[AD]$  e  $[BC]$  serão necessariamente verticais (paralelos ao eixo  $Z$ ), por serem perpendiculares aos lados  $[AB]$  e  $[CD]$ . Por fim, o lado  $[AB]$  mede 4 cm (a diferença entre as abcissas dos pontos  $A$  e  $B$ ), que é a medida do lado do quadrado.

Por outro lado, o ponto  $C$ , sendo consecutivo ao ponto  $B$ , tem a mesma abcissa do ponto  $B$  (que é 6 cm) e a sua cota é 4 cm superior à cota daquele ponto – o ponto  $C$  tem, assim, **6 cm de abcissa e 7 cm de cota** (e afastamento nulo, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto  $C$  são ( 6; 0; 7).

O ponto  $D$  tem a mesma abcissa do ponto  $A$  e a mesma cota do ponto  $C$  – o ponto  $D$  tem, assim, **2 cm de abcissa e 7 cm de cota** (e afastamento nulo, como atrás se referiu). Dessa forma, as coordenadas do ponto  $D$  são ( 2; 0; 7).

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 9 cm de altura e a sua base tem afastamento nulo (pois está contida no plano  $XZ$ ), o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) tem **9 cm de afastamento** ( $0 + 9 = 9$ ). Por outro lado, tratando-se de uma **pirâmide regular**, que é uma pirâmide reta, o seu vértice situa-se na mesma projetante frontal do centro da base (o ponto médio das duas diagonais).

A abcissa do ponto médio das diagonais é a média aritmética das abcissas dos pontos  $A$  e  $C$ , que é 4 cm – o ponto  $V$  tem, assim, **4 cm de abcissa**. A cota do ponto médio das diagonais é a média aritmética das cotas dos pontos  $A$  e  $C$ , que é 5 cm – o ponto  $V$  tem, assim, **5 cm de cota**. Dessa forma, as coordenadas do ponto  $V$  são ( 4; 9; 5).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^a$  *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

#### b) Dados:

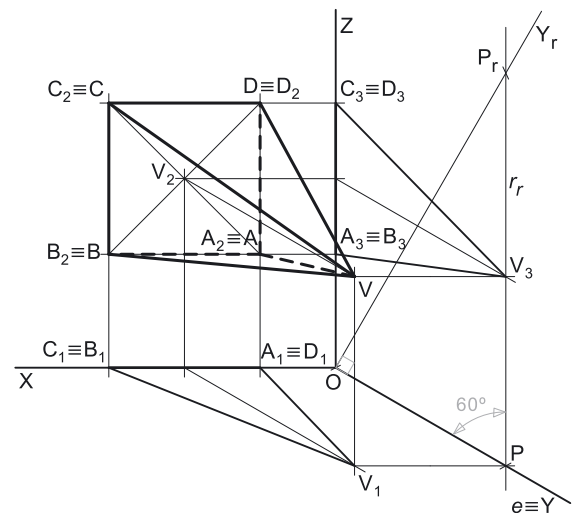
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $X$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $XZ$  – nesse sentido, o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$ , um ângulo de  $150^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $120^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

#### Resolução:

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . Uma vez que o plano axonométrico é o plano  $XZ$ , dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos cinco pontos (2 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza. Por outro lado, sobre o eixo  $Z$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos quatro pontos (3 cm, 5 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. A partir das abcissas e das cotas dos cinco pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respectivas projeções frontais –  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ,  $B_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$ ,  $C_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $C$ ,  $D_2$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $D$  e  $V_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $V$ .

(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

Já no que respeita ao eixo **Y** (onde se medem os **afastamentos** dos cinco pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que os **afastamentos** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o **afastamento** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir o **afastamento** do vértice da pirâmide (pois os vértices da base têm afastamento nulo) sobre a perspetiva do eixo **Y**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

O **afastamento** do vértice da pirâmide, porque se mede no eixo **Y**, está afetado pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Y<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspetiva do eixo **Y**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), representou-se o **afastamento** do vértice da pirâmide (9 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se um ponto **P<sub>r</sub>**. O ponto **P** é o ponto do eixo **Y** com o afastamento do ponto **V** ( $OP_r = 9$  cm e é o afastamento do ponto **V**, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspetiva do ponto **P**, sobre a perspetiva do eixo **Y** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspetiva do afastamento do ponto **V** ( $OP$  é a perspetiva do afastamento do ponto **V**).

A inclinação das projetantes é de 60°, pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 60° – esse ângulo está contido no plano que contém a reta **r** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo **Y**). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta **r** e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspetiva do eixo **Y**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspetiva do eixo **Y** (que é a charneira do rebatimento **e**, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspetiva do eixo **Y** é a perspetiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspetiva do eixo **Y**).

### Determinação das perspetivas do ponto A:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspetivas da sua projeção horizontal (**A<sub>1</sub>**) e da sua projeção lateral (**A<sub>3</sub>**). Uma vez que o ponto **A** tem afastamento nulo (é um ponto do plano **XZ**), a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A** (**A<sub>1</sub>**) situa-se sobre o eixo **X**, tal como a perspetiva da sua projeção lateral (**A<sub>3</sub>**) se situa no eixo **Z**.

Atendendo mais uma vez a que o ponto **A** tem afastamento nulo, o ponto **A** situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que se tem imediatamente **A<sub>2</sub> ≡ A** (sendo **A** a perspetiva propriamente dita do ponto **A**).

### Determinação das perspetivas dos pontos B, C e D:

As perspetivas dos pontos **B**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **A**. Atendendo a que os três pontos se situam no plano **XZ** (pois têm afastamento nulo), as perspetivas das projeções horizontais dos três pontos (**B<sub>1</sub>**, **C<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>**) situam-se sobre o eixo **X**, tal como as perspetivas das suas projeções laterais (**B<sub>3</sub>**, **C<sub>3</sub>** e **D<sub>3</sub>**) se situam no eixo **Z**.

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **D**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **A<sub>1</sub> ≡ B<sub>1</sub>** (o mesmo acontecendo com os pontos **B** e **C**). Pelo seu lado, os pontos **A** e **B**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem **A<sub>3</sub> ≡ B<sub>3</sub>** (o mesmo acontecendo com os pontos **C** e **D**).

### Determinação das perspetivas do ponto V:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **V** determinaram-se as perspetivas da sua projeção horizontal (**V<sub>1</sub>**) e da sua projeção lateral (**V<sub>3</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **V<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **V<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos). **V<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **V**. **V<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **V**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **V**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **V<sub>1</sub>**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **V** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **V<sub>2</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **V** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **V<sub>3</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **V** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **V**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **V** são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspetivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[BCDV]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **A**. Este vértice é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**). Por outro lado, a aresta lateral **[CV]** é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]**.

Por fim, representaram-se, ainda, a perspetiva da projeção horizontal da pirâmide e a perspetiva da sua projeção lateral. Note que não se representou a perspetiva da projeção frontal da pirâmide, porque a pirâmide assenta, pela sua base, no *plano coordenado XZ*. Nestas situações, em que o sólido assenta num dos *planos coordenados*, a representação da projeção do sólido nesse *plano coordenado*, de uma forma geral, dificulta a leitura da resolução gráfica – nesse sentido, em geral, omite-se a representação dessa projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[C_1D_1V_1]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção horizontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar, em projeção horizontal. Por outro lado, não existe qualquer parte da projeção horizontal da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide, que é opaca, pelo que também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** (em projeção horizontal).

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[B_3C_3V_3]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção lateral. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção lateral. No entanto, uma pequena parte da projeção lateral da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções (horizontal e lateral) da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo  $Y_r$  e da reta  $r_r$ ), representaram-se a **leve**.

## 1162.

- a) A base de menor afastamento do prisma (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano frontal (de frente) pelo que os restantes vértices dessa base (os pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$ ) têm necessariamente **2 cm de afastamento**, que é o afastamento do ponto  $A$  (todos os pontos de um plano frontal têm o mesmo afastamento).

A diagonal  $[AC]$  do quadrado  $[ABCD]$  é vertical (como o enunciado refere expressamente), pelo que o ponto  $C$  tem a mesma abcissa do ponto  $A$  – o ponto  $C$  tem, assim, **5 cm de abcissa**. Por outro lado, e como o enunciado também refere, as diagonais medem 6 cm. Assim, a cota do ponto  $C$  é 6 cm superior à cota do ponto  $A$ , pelo que o ponto  $C$  tem **7 cm de cota** – as coordenadas do ponto  $C$  são ( 5; 2; 7).

Uma vez que a diagonal  $[AC]$  é vertical (paralela ao eixo  $Z$ ), a outra diagonal (a diagonal  $[BD]$ ), porque é perpendicular à diagonal  $[AC]$  e está contida num plano frontal (de frente), é necessariamente fronto-horizontal (paralela ao eixo  $X$ ). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado  $[ABCD]$  bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal  $[AC]$  tem necessariamente 5 cm de abcissa (a abcissa dos pontos  $A$  e  $C$ ) e 4 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos  $A$  e  $C$ ). Nesse sentido, os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **4 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal  $[BD]$  também mede 6 cm. Uma vez que o ponto  $B$  é o vértice de menor abcissa do quadrado (como o enunciado refere expressamente), a sua abcissa é 3 cm inferior à abcissa dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto  $B$  tem **2 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto  $B$  são ( 2; 2; 4).

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto  $D$  é o vértice de maior abcissa do quadrado (por oposição ao vértice  $B$ ), a sua abcissa é 3 cm superior à abcissa dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto  $D$  tem **8 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto  $D$  são ( 8; 2; 4).

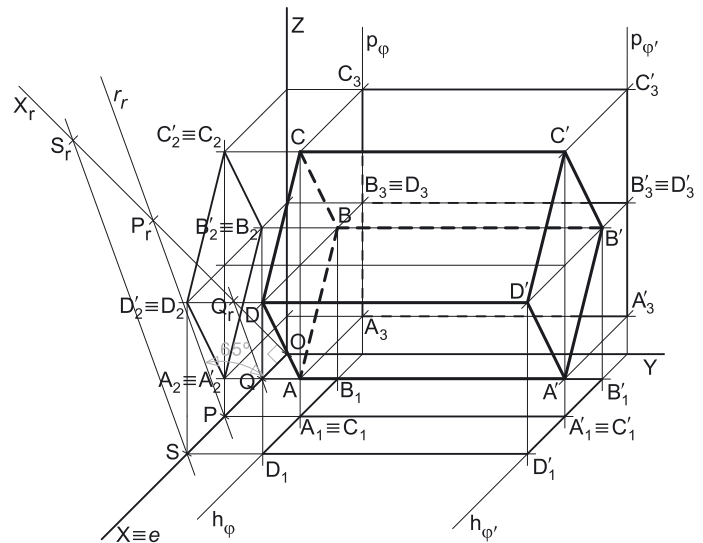
A altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as bases, o que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre os planos das duas bases. Uma vez que o prisma tem 7 cm de altura e a sua base de menor afastamento tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $A$ ), o plano que contém a base de maior afastamento tem **9 cm de afastamento** ( $2 + 7 = 9$ ). Nesse sentido, todos os vértices da base  $[A'B'C'D']$  (a base de maior afastamento do prisma) têm **9 cm de afastamento**.

Trata-se de um **prisma regular**, com bases frontais (de frente), pelo que as suas arestas laterais estão contidas em retas de topo (projetantes frontais) – os vértices da base de maior afastamento (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ) têm as abcissas e as cotas dos vértices correspondentes da base de menor afastamento (o quadrado  $[ABCD]$ ). Nesse sentido, as coordenadas dos quatro vértices da base  $[A'B'C'D']$  são:  $A'$  ( 5; 9; 1),  $B'$  ( 2; 9; 4),  $C'$  ( 5; 9; 7) e  $D'$  ( 8; 9; 4).

Salienta-se que o prisma se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

#### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos *coordenados*. Há a salientar que a perspetiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao plano projetante do eixo  $X$ , deduz-se que esses ângulos reportam ao eixo  $Y$  e ao eixo  $Z$ , pelo que o *plano axonométrico* é o plano  $YZ$  – nesse sentido, o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos (o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ ), ângulos de  $135^\circ$  (que é são dois ângulos obtusos).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Resolução:

As coordenadas dos oito vértices do prisma medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **YZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **Y** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos planos frontais (de frente) que contêm as duas bases do prisma (2 cm e 9 cm), em verdadeira grandeza. Por outro lado, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos oito vértices do prisma (1 cm, 4 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. A partir dos afastamentos e das cotas dos oito pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspetivas das respetivas projeções laterais – **A<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**, **B<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **B**, **C<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **C**, **D<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **D**, **A'<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A'**, **B'<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **B'**, **C'<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **C'** e **D'<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **D'**.

Por outro lado, no que respeita ao eixo **X** (onde se medem as **abcissas** dos oito pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que as **abcissas** não se projetam em verdadeira grandeza no plano axonométrico (a **abscissa** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **abcissas** dos oito pontos sobre a perspetiva do eixo **X**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

### Representação do plano frontal (de frente) $\varphi$ que contém a base **[ABCD]** do prisma:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre o eixo **Y**, um ponto com 2 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém a base de menor afastamento do prisma (o quadrado **[ABCD]**), sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\varphi$  – **h<sub>φ</sub>** (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e **p<sub>φ</sub>** (o traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que **h<sub>φ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a perspetiva de **h<sub>φ</sub>** é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **X**. Pelo seu lado, **p<sub>φ</sub>** (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abscissa nula – **p<sub>φ</sub>** é necessariamente paralelo ao eixo **Z**.

O plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral ou de perfil (**p<sub>φ</sub>**). Por isso mesmo, o traço lateral do plano  $\varphi$  (**p<sub>φ</sub>**) contém as projeções laterais dos quatro vértices do quadrado (**A<sub>3</sub>**, **B<sub>3</sub>**, **C<sub>3</sub>** e **D<sub>3</sub>**). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante horizontal (é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**).

### Representação do plano frontal (de frente) $\varphi'$ que contém a base **[A'B'C'D']** do prisma:

Na sequência da determinação dos afastamentos sobre a perspetiva do eixo **Y**, determinou-se, sobre o eixo **Y**, um ponto com 9 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi'$  que contém a base **[A'B'C'D']** do prisma, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 9 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\varphi'$  – **h<sub>φ'</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) e **p<sub>φ'</sub>** (a perspetiva do traço lateral do plano  $\varphi'$ ).

À semelhança da situação anterior, **h<sub>φ'</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi'$  com cota nula, pelo que **h<sub>φ'</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) é necessariamente paralelo ao eixo **X**. Também de forma semelhante à situação anterior, a perspetiva de **p<sub>φ'</sub>** (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi'$ , com abscissa nula, pelo que a perspetiva de **p<sub>φ'</sub>** é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Z**.

O plano  $\varphi'$  é outro plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta igualmente todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>φ'</sub>**). Por isso mesmo, o traço horizontal do plano  $\varphi'$  (**h<sub>φ'</sub>**) contém as projeções horizontais dos quatro vértices do quadrado **[A'B'C'D']** (**A'<sub>1</sub>**, **B'<sub>1</sub>**, **C'<sub>1</sub>** e **D'<sub>1</sub>**). Por outro lado, o plano  $\varphi'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral (**p<sub>φ'</sub>**).

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

As **abcissas** dos oito pontos, porque se medem no eixo **X**, estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **X** para o plano axonométrico (o plano **YZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **X**. O eixo **X** rebatido (o eixo **X<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspetiva do eixo **X**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **X<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspetiva do eixo **X**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **X<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as **abcissas** dos oito pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se três pontos – o ponto **P<sub>r</sub>**, o ponto **Q<sub>r</sub>** e o ponto **S<sub>r</sub>**. O ponto **P** é um ponto do eixo **X** com a abscissa dos pontos **A** e **C** (**OP<sub>r</sub>** = 5 cm e é a abscissa dos pontos **A** e **C**, em verdadeira grandeza). O ponto **Q** é um ponto do eixo **X** com a abscissa do ponto **B** (**OQ<sub>r</sub>** = 2 cm e é a abscissa do ponto **B**, em verdadeira grandeza). O ponto **S** é um ponto do eixo **X** com a abscissa do ponto **D** (**OS<sub>r</sub>** = 8 cm e é a abscissa do ponto **D**, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 65°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspetiva do ponto **P**, sobre a perspetiva do eixo **X** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspetiva da abscissa dos pontos **A** e **C** (**OP** é a perspetiva da abscissa dos pontos **A** e **C**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inclinação das projetantes é de  $65^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $65^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo  $X$ ). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta  $r$  e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $X$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $X$  (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $X$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $X$ ).

Por  $Q_r$  conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $65^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $Q$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $Q$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OQ]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto  $B$  ( $OQ$  é a perspectiva da abscissa do ponto  $B$ ).

Por fim, pelo ponto  $S_r$  conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $S$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $S$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OS]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto  $D$  ( $OS$  é a perspectiva da abscissa do ponto  $D$ ).

#### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal ( $A_2$ ) e da sua projeção horizontal ( $A_1$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $A_2$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $A_1$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ .  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D:

As perspectivas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $A$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\phi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos ( $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A$  e  $C$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A_1 \equiv C_1$ . Por outro lado, os pontos  $B$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $B_3 \equiv D_3$ .

#### Determinação das perspectivas dos pontos A', B', C' e D':

As perspectivas dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $A$ . Atendendo a que os quatro pontos pertencem ao plano  $\phi'$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos quatro pontos ( $A'_1$ ,  $B'_1$ ,  $C'_1$  e  $D'_1$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $h_{\phi'}$  (o traço horizontal do plano  $\phi'$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A'$  e  $C'$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A'_1 \equiv C'_1$ . Por outro lado, os pontos  $B'$  e  $D'$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $B'_3 \equiv D'_3$ .

Por fim, os vértices da base de maior afastamento (os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ ) e os vértices correspondentes da base de menor afastamento (os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , respetivamente) situam-se nas mesmas retas projetantes frontais, pelo que têm as respetivas projeções frontais coincidentes – tem-se  $A'_2 \equiv A_2$ ,  $B'_2 \equiv B_2$ ,  $C'_2 \equiv C_2$  e  $D'_2 \equiv D_2$ .

#### Determinação das perspectivas do prisma:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[AA'B'C'D]$ . Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspectiva do sólido – os vértices  $B$  e  $D'$ . O vértice  $D'$ , por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'D']$  e  $[C'D']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e a aresta lateral  $[DD']$ . O vértice  $B$ , por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$  (da base  $[ABCD])$  e a aresta lateral  $[BB']$ .

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas da projeção horizontal, da projeção frontal e da projeção lateral do prisma.

A **perspetiva da projeção horizontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[B_1D_1D'_1B'_1]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção horizontal do prisma que esteja oculta pelo próprio prisma (que é opaco), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **perspetiva da projeção frontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[A'_2B'_2C'_2D'_2]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção frontal do prisma que esteja oculta pelo próprio prisma (que é opaco), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[A_3C_3C'_3A'_3]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção lateral do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. Os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  (os planos frontais que contêm as bases do prisma), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos respetivos traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva do prisma, com as respetivas invisibilidades devidamente assinaladas, representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do prisma (com as respetivas invisibilidades), integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **X<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>** e das retas paralelas a **r<sub>r</sub>** que não se identificaram), representaram-se a **leve**.

## 1163.

a) O quadrado  $[ABCD]$  (a base da pirâmide) está contido num plano horizontal (de nível) com 7 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **7 cm de cota** (todos os pontos de um plano horizontal têm a mesma cota). Os pontos **A** e **C** têm a mesma abcissa e a mesma cota, pelo que é possível constatar que a diagonal  $[AC]$  do quadrado é de topo (paralela ao eixo **Y**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal  $[BD]$ ), porque é perpendicular à diagonal  $[AC]$  e está contida num plano horizontal (de nível), é necessariamente fronto-horizantal (paralela ao eixo **X**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bisseitam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal  $[AC]$  tem necessariamente 3 cm de afastamento (a média aritmética dos afastamentos dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **3 cm de afastamento**. Por outro lado, a diagonal  $[AC]$  mede 6 cm (a diferença entre os afastamentos dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal  $[BD]$  mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

Tendo em conta que o ponto **B** é o vértice de maior abcissa da base (como o enunciado refere expressamente), a sua abcissa é 3 cm superior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **8 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto **B** são (8; 3; 7).

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto **D** é o vértice de menor abcissa da base (por oposição ao vértice **B**), a sua abcissa é 3 cm inferior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **3 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto **D** são (3; 3; 7).

A aresta lateral  $[CV]$  é frontal (de frente), pelo que o ponto **V** e o ponto **C** têm o mesmo afastamento (todos os pontos de uma reta frontal têm o mesmo afastamento) – o ponto **V** tem, assim, **6 cm de afastamento**. A aresta lateral  $[BV]$  é de perfil, pelo que o ponto **V** e o ponto **B** têm a mesma abcissa (todos os pontos de uma reta de perfil têm a mesma abcissa) – o ponto **V** tem, assim, **8 cm de abcissa**. O ponto **V** tem **cota nula** (como o enunciado refere expressamente), pelo que as coordenadas do ponto **V** são (8; 6; 0).

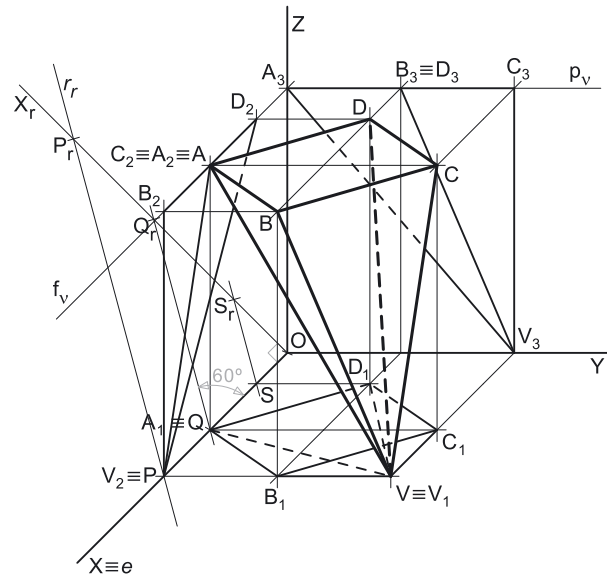
Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos *coordenados*. Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **Y** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **YZ** – nesse sentido, o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo **Y** e do eixo **Z**, ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

### Resolução:

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**, dois dos eixos *coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **Y** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto **A** tem afastamento nulo. Por outro lado, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide (que é 7 cm), em verdadeira grandeza. A partir dos afastamentos e das cotas dos cinco pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respectivas projeções laterais – **A<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**, **B<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **B**, **C<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**, **D<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **D** e **V<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **V**.

Salienta-se que o ponto **V** tem cota nula (é um ponto do *plano coordenado XY*), pelo que **V<sub>3</sub>** (a sua projeção lateral) se situa necessariamente no eixo **Y**. De forma semelhante, salienta-se que o ponto **A** tem afastamento nulo (é um ponto do *plano coordenado XZ*), pelo que **A<sub>3</sub>** (a sua projeção lateral) se situa necessariamente no eixo **Z**.

Por outro lado, no que respeita ao eixo **X** (onde se medem as **abscissas** dos cinco pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as **abscissas** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **abscissa** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **abscissas** dos cinco pontos sobre a perspectiva do eixo **X**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

#### Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre o eixo **Z**, um ponto com 7 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**), sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 7 cm de cota, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a perspectiva de  $f_v$  é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abscissa nula –  $p_v$  é necessariamente paralela ao eixo **Y**.

O plano  $v$  é um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ou de perfil ( $p_v$ ). Por isso mesmo, o traço lateral do plano  $v$  ( $p_v$ ) contém as projeções laterais dos quatro vértices do quadrado (**A<sub>3</sub>**, **B<sub>3</sub>**, **C<sub>3</sub>** e **D<sub>3</sub>**). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ).

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

As **abscissas** dos cinco pontos, porque se medem no eixo **X**, estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano **YZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo **X**. O eixo **X** rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo **X**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo **X**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo  $X_r$  (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as **abscissas** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se três pontos – o ponto **P<sub>r</sub>**, o ponto **Q<sub>r</sub>** e o ponto **S<sub>r</sub>**. O ponto **P** é um ponto do eixo **X** com a abscissa dos pontos **B** e **V** ( $OP_r = 8$  cm e é a abscissa dos pontos **B** e **V**, em verdadeira grandeza). O ponto **Q** é um ponto do eixo **X** com a abscissa dos pontos **A** e **C** ( $OQ_r = 5$  cm e é a abscissa dos pontos **A** e **C**, em verdadeira grandeza). O ponto **S** é um ponto do eixo **X** com a abscissa do ponto **D** ( $OS_r = 2$  cm e é a abscissa do ponto **D**, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **P**, sobre a perspectiva do eixo **X** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa dos pontos **B** e **V** ( $OP$  é a perspectiva da abscissa dos pontos **B** e **V**).

A inclinação das projetantes é de  $60^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $60^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo **X**). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta  $r$  e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **X**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo **X** (que é a charneira do rebatimento  $e$ , por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo **X** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo **X**).

Por **Q<sub>r</sub>**, conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto **Q**, em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **Q**, sobre a perspectiva do eixo **X** – o segmento **[OQ]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa dos pontos **A** e **C** ( $OQ$  é a perspectiva da abscissa dos pontos **A** e **C**).

Por fim, pelo ponto **S<sub>r</sub>**, conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto **S**, em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **S**, sobre a perspectiva do eixo **X** – o segmento **[OS]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto **D** ( $OS$  é a perspectiva da abscissa do ponto **D**).

#### Determinação das perspectivas do ponto **B**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **B** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**B<sub>2</sub>**) e da sua projeção horizontal (**B<sub>1</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **B<sub>2</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **B<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos). **B<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **B** e situa-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. **B<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **B**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **B**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **B**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **B**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **B**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **B** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas do ponto **A**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**A**<sub>2</sub>) e da sua projeção horizontal (**A**<sub>1</sub>). O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que o ponto **A** se situa no plano coordenado **XZ**. Nesse sentido, **A**<sub>1</sub> (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**) situa-se sobre o eixo **X**.

Por fim, e ainda atendendo a que o ponto **A** tem afastamento nulo, o ponto **A** situa-se no plano coordenado **XZ**, pelo que se tem imediatamente **A**<sub>2</sub> ≡ **A** (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

#### Determinação das perspectivas dos pontos **C** e **D**:

As perspectivas dos pontos **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **B**. Atendendo a que os dois pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das projeções frontais dos dois pontos (**C**<sub>2</sub> e **D**<sub>2</sub>) situam-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem **A**<sub>2</sub> ≡ **C**<sub>2</sub>. Por outro lado, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem **B**<sub>3</sub> ≡ **D**<sub>3</sub>.

#### Determinação das perspectivas do ponto **V**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **V** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**V**<sub>2</sub>) e da sua projeção horizontal (**V**<sub>1</sub>). O ponto **V** tem cota nula, pelo que o ponto **V** se situa no plano coordenado **XY**. Nesse sentido, **V**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **V**) situa-se sobre a perspectiva do eixo **X**.

Por fim, e ainda atendendo a que o ponto **V** tem cota nula, o ponto **V** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que se tem imediatamente **V**<sub>1</sub> ≡ **V** (sendo **V** a perspectiva propriamente dita do ponto **V**).

#### Determinação das perspectivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[AVCD]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **B**. Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[BV]**). Por outro lado, a aresta lateral **[DV]** é **invisível**, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais **[ADV]** e **[CDV]**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo pentágono irregular **[A<sub>1</sub>V<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. As arestas laterais **[AV]** e **[DV]** são invisíveis, em projeção horizontal, consistindo, assim, na única **invisibilidade por projeção** a assinalar, em projeção horizontal (as restantes arestas, nomeadamente a aresta **[BC]** da base, são visíveis em projeção horizontal). Por outro lado, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção frontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção frontal. No entanto, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[A<sub>3</sub>V<sub>3</sub>C<sub>3</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção lateral. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção lateral. Por outro lado, existe uma parte da projeção lateral da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano  $v$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (frontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **X<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>** e das retas paralelas a **r<sub>r</sub>** que não se identificaram), representaram-se a **leve**.

## 1164.

a) O quadrado  $[ABCD]$  (a base da pirâmide) está contido num plano de perfil com 2 cm de abcissa (a abcissa dos pontos  $A$  e  $C$ ), pelo que os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **2 cm de abcissa** (todos os pontos de um plano de perfil têm a mesma abcissa). Os pontos  $A$  e  $C$  têm o mesmo afastamento e a mesma abcissa, pelo que é possível constatar que a diagonal  $[AC]$  do quadrado é vertical (paralela ao eixo  $Z$ ). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal  $[BD]$ ), porque é perpendicular à diagonal  $[AC]$  e está contida num plano de perfil, é necessariamente de topo (paralela ao eixo  $Y$ ). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal  $[AC]$  tem necessariamente 5 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos  $A$  e  $C$ ). Nesse sentido, os pontos  $B$  e  $D$  têm necessariamente **5 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal  $[AC]$  mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos  $A$  e  $C$ ), pelo que a diagonal  $[BD]$  mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

Tendo em conta que o ponto  $B$  é o vértice de menor afastamento da base (como o enunciado refere expressamente), o seu afastamento é 3 cm inferior ao afastamento dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto  $B$  tem **2 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto  $B$  são  $(2; 2; 5)$ .

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto  $D$  é o vértice de maior afastamento do quadrado (por oposição ao vértice  $B$ ), o seu afastamento é 3 cm superior ao afastamento dos pontos  $A$  e  $C$  (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto  $D$  tem **8 cm de afastamento**. As coordenadas do ponto  $D$  são  $(2; 8; 5)$ .

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença das abcissas entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e a sua base tem 2 cm de abcissa, o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) tem **9 cm de abcissa** ( $2 + 7 = 9$ ). A aresta lateral  $[AV]$  é horizontal (como o enunciado refere expressamente), pelo que o ponto  $V$  e o ponto  $A$  têm a mesma cota (todos os pontos de uma reta horizontal têm a mesma cota) – assim, o ponto  $V$  tem **2 cm de cota**. Por outro lado, a aresta lateral  $[DV]$  é frontal (como o enunciado refere expressamente), pelo que o ponto  $V$  e o ponto  $D$  têm o mesmo afastamento (todos os pontos de uma reta frontal têm o mesmo afastamento) – assim, o ponto  $V$  tem **8 cm de afastamento**. Nesse sentido, as coordenadas do ponto  $V$  são  $(9; 8; 2)$ .

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\circ}$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

## b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $Y$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $YZ$  – nesse sentido, o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^{\circ}$ . A perspectiva do eixo  $X$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $130^{\circ}$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Y$ , um ângulo de  $140^{\circ}$  (que é outro ângulo obtuso).

## Resolução:

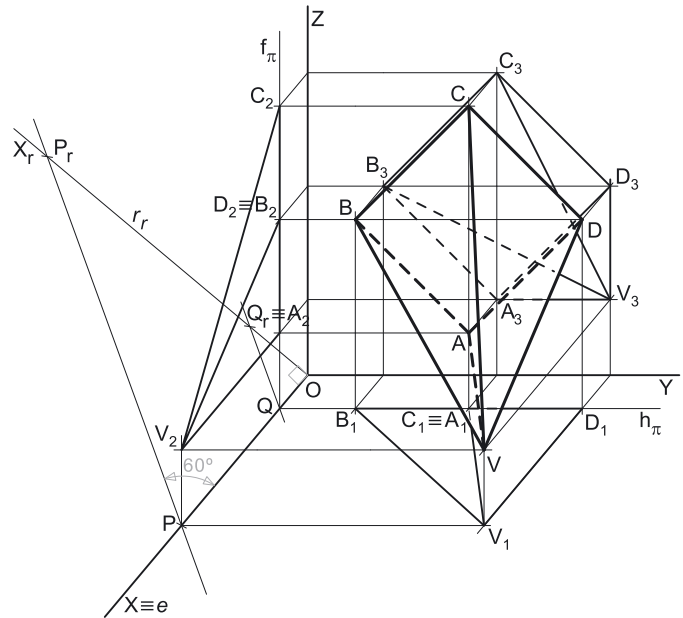
As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . Uma vez que o plano axonométrico é o plano  $YZ$ , dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo  $Y$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Por outro lado, sobre o eixo  $Z$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. A partir dos afastamentos e das cotas dos cinco pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções laterais –  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ,  $B_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $B$ ,  $C_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C$ ,  $D_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $D$  e  $V_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $V$ .

Por outro lado, no que respeita ao eixo  $X$  (onde se medem as **abcissas** dos cinco pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que as **abcissas** não se projetam em verdadeira grandeza no plano axonométrico (a **abcissa** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **abcissas** dos cinco pontos sobre a perspectiva do eixo  $X$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

## Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

As **abcissas** dos cinco pontos, porque se medem no eixo  $X$ , estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  para o plano axonométrico (o plano  $YZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $X$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **X**, (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as **abscissas** dos cinco pontos (2 cm e 9 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se dois pontos – o ponto **P<sub>r</sub>** e o ponto **Q<sub>r</sub>**. O ponto **P** é um ponto do eixo **X** com a abscissa do vértice da pirâmide ( $\overline{OP_r} = 9$  cm e é a abscissa do ponto **V**, em verdadeira grandeza). O ponto **Q** é um ponto do eixo **X** com a abscissa do plano da base ( $\overline{OQ_r} = 2$  cm e é a abscissa do plano da base, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **P**, sobre a perspectiva do eixo **X** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto **V** (**OP** é a perspectiva da abscissa do ponto **V**).

A inclinação das projetantes é de 60°, pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 60° – esse ângulo está contido no plano que contém a reta **r** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo **X**). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta **r** e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **X**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **X** (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **X** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **X**).

Por **Q<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – essa reta é a reta projetante do ponto **Q**, em rebatimento e é paralela à reta **r<sub>r</sub>**. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **Q**, sobre a perspectiva do eixo **X** – o segmento **[OQ]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do plano da base (**OQ** é a perspectiva da abscissa do plano da base).

### Representação do plano de perfil que contém a base da pirâmide:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **X**, um ponto que é a perspectiva do ponto do eixo **X** que tem 2 cm de abscissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém a base da pirâmide, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de abscissa, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  – **h <sub>$\pi$</sub>**  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e **f <sub>$\pi$</sub>**  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que **h <sub>$\pi$</sub>**  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo **Y**. Pelo seu lado, **f <sub>$\pi$</sub>**  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo **Z**.

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h <sub>$\pi$</sub>** ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal (**f <sub>$\pi$</sub>** ).

### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**A<sub>2</sub>**) e da sua projeção horizontal (**A<sub>1</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **A<sub>2</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **A<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos). **A<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A** e situa-se sobre a perspectiva de **f <sub>$\pi$</sub>**  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal. **A<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A** e situa-se sobre a perspectiva de **h <sub>$\pi$</sub>**  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas dos pontos B, C, D e V:

As perspectivas dos pontos **B**, **C**, **D** e **V** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **A**. Atendendo a que os pontos **B**, **C** e **D** pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos (**B<sub>2</sub>**, **C<sub>2</sub>** e **D<sub>2</sub>**) situam-se sobre a perspectiva de **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano  $v$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **A<sub>1</sub>  $\equiv$  C<sub>1</sub>**. Por outro lado, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem **B<sub>2</sub>  $\equiv$  D<sub>2</sub>**.

### Determinação das perspectivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspectiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[BCDV]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **A**. Este é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**). Por outro lado, a aresta lateral **[CV]** é **visível**, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se que a perspetiva propriamente dita da base é, também ela, um **quadrado**, tal como a perspetiva da sua projeção frontal é outro **quadrado** – os quadrados  $[ABCD]$  e  $[A_2B_2C_2D_2]$  são dois quadrados geometricamente iguais e são geometricamente iguais ao quadrado  $[ABCD]$  no espaço. Tal, deve-se ao facto de o plano que contém o quadrado (o plano  $\pi$ ) ser paralelo ao *plano axonométrico* (o plano  $YZ$ ), pelo que a projeção do quadrado não apresenta qualquer deformação (o plano que contém a figura é **paralelo ao plano de projeção**). Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[B_1V_1D_1]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção horizontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção horizontal. Por outro lado, existe uma parte da projeção horizontal da pirâmide que é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[A_2V_2C_2]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção frontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção frontal. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção frontal da pirâmide que esteja oculta pela própria pirâmide, que é opaca, pelo que também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** (em projeção frontal).

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo pentágono irregular  $[A_3V_3D_3C_3B_3]$ . As arestas laterais  $[BV]$  e  $[CV]$  são visíveis, em projeção lateral. Já a aresta  $[AD]$ , da base, é invisível (em projeção lateral), pelo que a única **invisibilidade por projeção** a assinalar, em projeção lateral, é a referente à aresta  $[AD]$ , da base. Por outro lado, parte da projeção lateral da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano  $\pi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos traços (horizontal e frontal) do plano se representaram a **leve**. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo  $X_r$ , da reta  $r_r$  e da reta paralela a  $r_r$  que não se identificou), representaram-se a **leve**.

## 1165.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspetiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo  $X$ , um ângulo de  $120^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Y$ , um ângulo de  $150^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

#### Resolução:

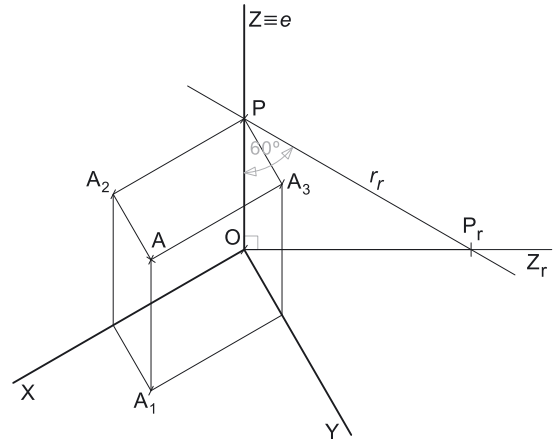
As coordenadas do ponto  $A$  medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** do ponto  $A$  mede-se no eixo  $X$ , o **afastamento** do ponto  $A$  mede-se no eixo  $Y$  e a **cota** do ponto  $A$  no eixo  $Z$ . Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$ , dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $A$  (4 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo  $Y$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto  $A$  (2 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e do afastamento do ponto  $A$  foi possível determinar, de forma direta, a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $A - A_1$ .

Já no que respeita ao eixo  $Z$  (onde se mede a **cota** do ponto  $A$ ), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que a **cota** do ponto  $A$  não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **cota** é a coordenada do ponto  $A$  que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir a **cota** do ponto  $A$  sobre a perspetiva do eixo  $Z$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A **cota** do ponto  $A$ , porque se mede no eixo  $Z$ , está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspetiva do eixo  $Z$ ).



(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

A inclinação das projetantes é de  $40^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $40^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo  $Z$ ). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta  $r$  e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Z$  (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Z$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Z$ ).

O segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do ponto  $M$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota do ponto  $M$ .

#### Determinação das perspectivas do ponto $M$ :

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $M$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal ( $M_2$ ) e da sua projeção lateral ( $M_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $M_2$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $M_3$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $M_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $M$  e  $M_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $M$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $M$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $M_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $M$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $M_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $M$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $M_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $M$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $M$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $M$  são dois vértices espacialmente opostos.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo  $Z_r$  e da reta  $r_r$ ), representaram-se a **leve**.

## 1167.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo  $X$ , um ângulo de  $155^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Y$ , um ângulo de  $115^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

#### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$ , dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

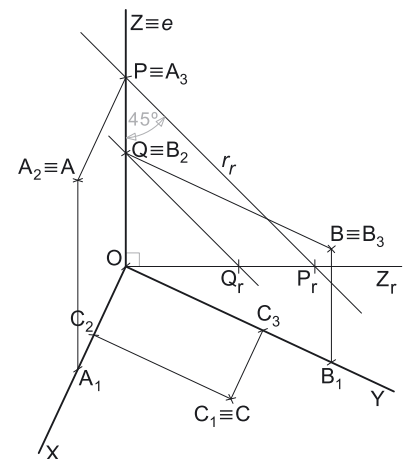
Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos três pontos (2 cm e 3 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto  $B$  tem abscissa nula. De forma semelhante, sobre o eixo  $Y$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos (4 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto  $A$  tem afastamento nulo. A partir das abscissas e dos afastamentos dos três pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções horizontais –  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ,  $B_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$  e  $C_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ .

Note que  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ) se situa no eixo  $X$ , pois o ponto  $A$  tem afastamento nulo. De forma semelhante,  $B_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ) situa-se no eixo  $Y$ , pois o ponto  $B$  tem abscissa nula.

Já no que respeita ao eixo  $Z$  (onde se medem as **cotas** dos três pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as **cotas** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **cota** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **cotas** dos três pontos sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

As **cotas** dos três pontos, porque se medem no eixo  $Z$ , estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z**, (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as **cotas** dos três pontos (3 cm e 5 cm), em verdadeira grandeza (salienta-se que o ponto **C** tem cota nula), determinando-se dois pontos – os pontos **P<sub>r</sub>** e **Q<sub>r</sub>**. O ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do ponto **A** ( $\overline{OP_r} = 5$  cm e é a cota do ponto **A**, em verdadeira grandeza). O ponto **Q** é um ponto do eixo **Z** com a cota do ponto **B** ( $\overline{OQ_r} = 3$  cm e é a cota do ponto **B**, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 45°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **P**, sobre a perspectiva do eixo **Z** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do ponto **A** ( $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota do ponto **A**).

A inclinação das projetantes é de 45°, pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 45° – esse ângulo está contido no plano que contém a reta **r** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo **Z**). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta **r** e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **Z** (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **Z** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **Z**).

Por **Q<sub>r</sub>**, conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de 45°) – essa reta é a reta projetante do ponto **Q**, em rebatimento e é paralela à reta **r<sub>r</sub>**. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **Q**, sobre a perspectiva do eixo **Z** – o segmento **[OQ]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do ponto **B** ( $\overline{OQ}$  é a perspectiva da cota do ponto **B**).

#### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**A<sub>2</sub>**) e da sua projeção lateral (**A<sub>3</sub>**), recorrendo ao paralelogramo de que **A<sub>2</sub>** e **O** são dois vértices opostos. **A<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A** – uma vez que o ponto **A** tem afastamento nulo, o ponto **A** situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que **A<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**) se situa sobre a perspectiva do eixo **Z**. Note que a perspectiva de **A<sub>3</sub>** está coincidente com a perspectiva do ponto **P**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **A** tem afastamento nulo, o ponto **A** situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que se tem imediatamente **A<sub>2</sub> ≡ A** (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

#### Determinação das perspectivas do ponto B:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **B** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**B<sub>2</sub>**) e da sua projeção lateral (**B<sub>3</sub>**), recorrendo ao paralelogramo de que **B<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos. **B<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **B** – uma vez que o ponto **B** tem abcissa nula, o ponto **B** situa-se no *plano coordenado YZ*, pelo que **B<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **B**) se situa sobre a perspectiva do eixo **Z**. Note que a perspectiva de **B<sub>2</sub>** está coincidente com a perspectiva do ponto **Q**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **B** tem abcissa nula, o ponto **B** situa-se no *plano coordenado YZ*, pelo que se tem imediatamente **B<sub>3</sub> ≡ B** (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

#### Determinação das perspectivas do ponto C:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **C** (que tem cota nula) determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**C<sub>2</sub>**) e da sua projeção lateral (**C<sub>3</sub>**). **C<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **C** – uma vez que o ponto **C** tem cota nula, o ponto **C** situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que **C<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**) se situa sobre o eixo **X**. **C<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C** – mais uma vez atendendo a que o ponto **C** se situa no *plano coordenado XY* (pois tem cota nula), **C<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**) situa-se sobre o eixo **Y**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **C** tem cota nula, o ponto **C** situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente **C<sub>1</sub> ≡ C** (sendo **C** a perspectiva propriamente dita do ponto **C**).

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Z<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>** e da reta paralela a **r<sub>r</sub>** que não se identificou), representaram-se a **leve**.

## 1168.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo  $X$ , um ângulo de  $125^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Y$ , um ângulo de  $145^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

**Resolução:**

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$ , dois dos eixos coordenados estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos três pontos (4 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto  $B$  tem abscissa nula. De forma semelhante, sobre o eixo  $Y$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos (2 cm, 3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e dos afastamentos dos três pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções horizontais –  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ,  $B_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$  e  $C_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ .

Note que  $B_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ) se situa no eixo  $Y$ , pois o ponto  $B$  tem abscissa nula.

Já no que respeita ao eixo  $Z$  (onde se medem as **cotas** dos três pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as **cotas** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **cota** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **cotas** dos três pontos sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

**Determinação gráfica do coeficiente de deformação:**

As **cotas** dos três pontos, porque se medem no eixo  $Z$ , estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ ).

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $Z_r$  (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as **cotas** dos três pontos (2 cm, 4 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se três pontos – os pontos  $P_r$ ,  $Q_r$  e  $R_r$ . O ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota do ponto  $A$  ( $OP_r = 4$  cm e é a cota do ponto  $A$ , em verdadeira grandeza). O ponto  $Q$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota do ponto  $B$  ( $OQ_r = 6$  cm e é a cota do ponto  $B$ , em verdadeira grandeza). O ponto  $R$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota do ponto  $C$  ( $OR_r = 2$  cm e é a cota do ponto  $C$ , em verdadeira grandeza).

Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $35^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $P$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do ponto  $A$  ( $OP$  é a perspectiva da cota do ponto  $A$ ).

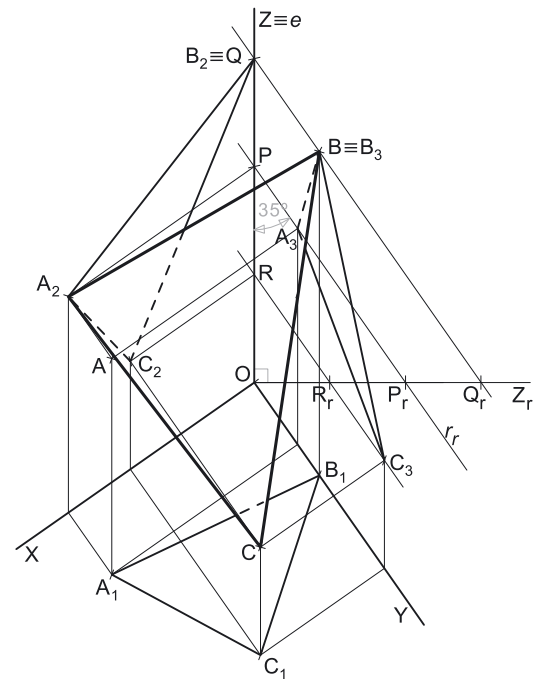
A inclinação das projetantes é de  $35^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $35^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo  $Z$ ). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta  $r$  e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Z$  (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Z$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Z$ ).

Por  $Q_r$  conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $35^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $Q$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $Q$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$  – o segmento  $[OQ]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do ponto  $B$  ( $OQ$  é a perspectiva da cota do ponto  $B$ ).

Por  $R_r$  conduziu-se uma outra reta (que também não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $35^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $R$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $R$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$  – o segmento  $[OR]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do ponto  $C$  ( $OR$  é a perspectiva da cota do ponto  $C$ ).

**Determinação das perspectivas do ponto A:**

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal ( $A_2$ ) e da sua projeção lateral ( $A_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $A_2$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $A_3$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$  e  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas do ponto **B**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **B** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**B**<sub>2</sub>) e da sua projeção lateral (**B**<sub>3</sub>), recorrendo ao paralelogramo de que **B**<sub>3</sub> e **O** são dois vértices opostos. **B**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto **B** – uma vez que o ponto **B** tem abcissa nula, o ponto **B** situa-se no plano coordenado **YZ**, pelo que **B**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **B**) se situa sobre a perspectiva do eixo **Z**. Note que a perspectiva de **B**<sub>2</sub> está coincidente com a perspectiva do ponto **Q**.

Por fim, e mais uma vez atendendo a que o ponto **B** tem abcissa nula, o ponto **B** situa-se no plano coordenado **YZ**, pelo que se tem imediatamente **B**<sub>3</sub> ≡ **B** (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

### Determinação das perspectivas do ponto **C**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **C** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**C**<sub>2</sub>) e da sua projeção lateral (**C**<sub>3</sub>), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **C**<sub>2</sub> e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **C**<sub>3</sub> e **O** são dois vértices opostos) – **C**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção frontal do ponto **C** e **C**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **C**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **C**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **C**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **C**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **C** são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas do triângulo:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo [**ABC**] é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo [**A**<sub>1</sub>**B**<sub>1</sub>**C**<sub>1</sub>] é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo [**A**<sub>2</sub>**B**<sub>2</sub>**C**<sub>2</sub>] é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo [**A**<sub>3</sub>**B**<sub>3</sub>**C**<sub>3</sub>] é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo – partes das perspectivas das três projeções do triângulo estão ocultas pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do triângulo [**ABC**] representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades assinaladas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **X**<sub>r</sub>, da reta **r**<sub>r</sub> e da reta paralela a **r**<sub>r</sub> que não se identificou), representaram-se a **leve**.

## 1169.

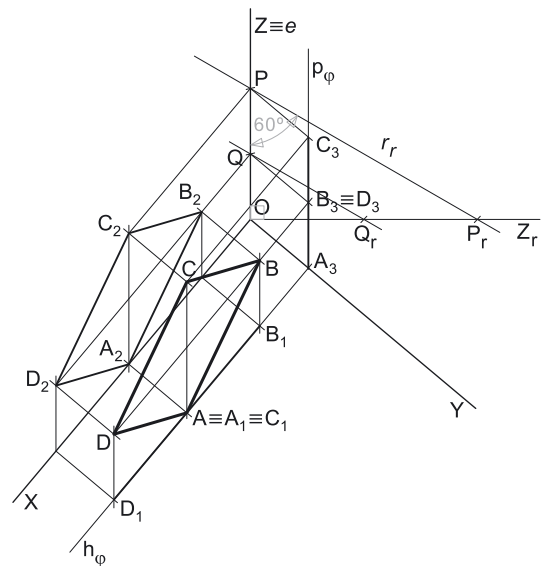
a) O quadrado está contido num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **2 cm de afastamento** (todos os pontos de um plano frontal têm o mesmo afastamento). Os pontos **A** e **C** têm a mesma abcissa e o mesmo afastamento, pelo que é possível constatar que a diagonal [**AC**] do quadrado é vertical (paralela ao eixo **Z**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal [**BD**]), porque é perpendicular à diagonal [**AC**] e está contida num plano frontal (de frente), é necessariamente fronto-horizontal (paralela ao eixo **X**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bisseam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal [**AC**] tem necessariamente 3 cm de cota (a média aritmética das cotas dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **3 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal [**AC**] mede 6 cm (a diferença entre as cotas dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal [**BD**] mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

Sendo assim, atendendo a que o ponto **B** é o vértice de menor abcissa do quadrado (como o enunciado refere expressamente), a sua abcissa é 3 cm inferior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **2 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto **B** são (2; 2; 3).

Por fim, atendendo a que o ponto **D** é o vértice de maior abcissa do quadrado (por oposição ao vértice **B**), a sua abcissa é 3 cm superior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **8 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto **D** são (8; 2; 3).

Salienta-se que o quadrado se situa no espaço do 1ª *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**b) Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X**, um ângulo de  $125^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de  $145^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

**Resolução:**

As coordenadas dos quatro pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XY**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos quatro pontos (3 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Por outro lado, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do plano frontal (de frente) que contém o quadrado (2 cm), em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e dos afastamentos dos quatro pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções horizontais – **A<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**, **B<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**, **C<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C** e **D<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **D**.

Já no que respeita ao eixo **Z** (onde se medem as **cotas** dos quatro pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as **cotas** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **cota** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **cotas** dos quatro pontos sobre a perspectiva do eixo **Z**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

*Representação do plano frontal (de frente) que contém o quadrado:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre o eixo **Y**, um ponto com 2 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  – **h<sub>φ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e **p<sub>φ</sub>** (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que **h<sub>φ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – **h<sub>φ</sub>** é necessariamente paralela ao eixo **X**. Pelo seu lado, **p<sub>φ</sub>** (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**.

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**). Por isso mesmo, o traço horizontal do plano  $\varphi$  (**h<sub>φ</sub>**) contém as projeções horizontais dos quatro vértices do quadrado (**A<sub>1</sub>**, **B<sub>1</sub>**, **C<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>**). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral (**p<sub>φ</sub>**).

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação:*

As **cotas** dos quatro pontos, porque se medem no eixo **Z**, estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo **Z**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as **cotas** dos quatro pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza (salienta-se que o ponto **A** tem cota nula), determinando-se dois pontos – o ponto **P<sub>r</sub>** e o ponto **Q<sub>r</sub>**. O ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do ponto **C** ( $\overline{OP} = 6$  cm e é a cota do ponto **C**, em verdadeira grandeza). O ponto **Q** é um ponto do eixo **Z** com a cota dos pontos **B** e **D** ( $\overline{OQ} = 3$  cm e é a cota dos pontos **B** e **D**, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $45^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **P**, sobre a perspectiva do eixo **Z** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do ponto **C** (**OP** é a perspectiva da cota do ponto **C**).

A inclinação das projetantes é de  $45^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $45^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta **r** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo **Z**). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta **r** e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **Z** (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **Z** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **Z**).

Por **Q<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $45^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto **Q**, em rebatimento e é paralela à reta **r<sub>r</sub>**. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **Q**, sobre a perspectiva do eixo **Z** – o segmento **[OQ]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota dos pontos **B** e **D** (**OQ** é a perspectiva da cota dos pontos **B** e **D**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**A**<sub>2</sub>) e da sua projeção lateral (**A**<sub>3</sub>). O ponto **A** tem cota nula, pelo que o ponto **A** se situa no plano coordenado **XY**. Nesse sentido, **A**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**) situa-se sobre o eixo **X**, tal como **A**<sub>3</sub> (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**) se situa sobre o eixo **Y**. Note que **A**<sub>3</sub> (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**) se situa também sobre **p**<sub>φ</sub> (o traço lateral do plano φ), pois o plano φ é um plano projetante lateral.

Por fim, e ainda atendendo a que o ponto **A** tem cota nula, o ponto **A** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que se tem imediatamente **A**<sub>1</sub> ≡ **A** (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

#### Determinação das perspectivas do ponto B:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **B** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**B**<sub>2</sub>) e da sua projeção lateral (**B**<sub>3</sub>), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **B**<sub>2</sub> e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **B**<sub>3</sub> e **O** são dois vértices opostos). **B**<sub>2</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**. **B**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **B** e situa-se sobre **p**<sub>φ</sub> (o traço lateral do plano φ), pois o plano φ é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **B**. Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de **B**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **B**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **B**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **B**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **B** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas dos pontos C e D:

As perspectivas dos pontos **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **B**. Atendendo a que os dois pontos pertencem ao plano φ, que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos dois pontos (**C**<sub>3</sub> e **D**<sub>3</sub>) situam-se sobre a perspectiva de **p**<sub>φ</sub> (o traço lateral do plano φ).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **A**<sub>1</sub> ≡ **C**<sub>1</sub>. Pelo seu lado, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem **B**<sub>3</sub> ≡ **D**<sub>3</sub>.

#### Determinação das perspectivas do quadrado:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do quadrado. O quadrilátero **[ABCD]** (que é um paralelogramo) é a perspectiva propriamente dita do quadrado. O quadrilátero **[A**<sub>2</sub>**B**<sub>2</sub>**C**<sub>2</sub>**D**<sub>2</sub>**]** (que é outro paralelogramo) é a perspectiva da projeção frontal do quadrado. O segmento de reta **[B**<sub>1</sub>**D**<sub>1</sub>**]** é a perspectiva da projeção horizontal do quadrado, que se reduz a um segmento de reta sobre **h**<sub>φ</sub> (a perspectiva do traço horizontal do plano φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal. O segmento de reta **[A**<sub>3</sub>**C**<sub>3</sub>**]** é a perspectiva da projeção lateral do quadrado, que se reduz a um segmento de reta sobre **p**<sub>φ</sub> (a perspectiva do traço lateral do plano φ), pois o plano φ é um plano projetante lateral.

Salienta-se que, nesta situação, **não existe** qualquer **invisibilidade por ocultação** a assinalar – não existe nenhuma parte de qualquer das projeções do quadrado que, em perspectiva, estejam ocultas pelo quadrado.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano φ (o plano que contém o quadrado), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. A perspectiva do quadrado **[ABCD]** representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades assinaladas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Z**<sub>r</sub>, da reta **r**<sub>r</sub> e da reta paralela a **r**<sub>r</sub> que não se identificou), representaram-se a **leve**.

## 1170.

**Dados:**

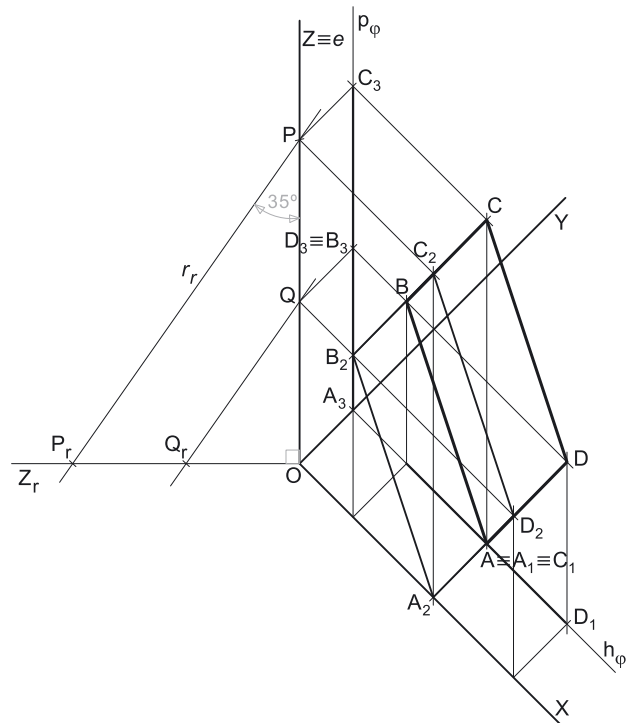
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$ , um ângulo de  $135^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Y$ , um ângulo de  $45^\circ$  (que é um ângulo agudo).

As coordenadas dos pontos  $A$  e  $C$  são dadas no enunciado. As coordenadas dos pontos  $B$  e  $D$  foram determinadas na alínea **a**) do exercício anterior e são:  $B(2; 2; 3)$  e  $D(8; 2; 3)$ .

**Resolução:**

As coordenadas dos quatro pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . Uma vez que o plano axonométrico é o plano  $XY$ , dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos quatro pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Por outro lado, sobre o eixo  $Y$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do plano frontal (de frente) que contém o quadrado (2 cm), em verdadeira grandeza. A partir das abcissas e dos afastamentos dos quatro pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções horizontais –  $A_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ,  $B_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ,  $C_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $C$  e  $D_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $D$ .



Note que, dadas as condições da perspetiva (a direção das projetantes, fornecida no enunciado), nesta situação, o ponto de vista situa-se fora do  $1^a$  Triedro, por detrás do plano coordenado  $XZ$ . Por esse motivo, as projeções horizontais dos quatro pontos situam-se para cima do eixo  $X$ .

Já no que respeita ao eixo  $Z$  (onde se medem as **cotas** dos quatro pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que as **cotas** não se projetam em verdadeira grandeza no plano axonométrico (a **cota** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **cotas** dos quatro pontos sobre a perspetiva do eixo  $Z$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

**Representação do plano frontal (de frente) que contém o quadrado:**

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre o eixo  $Y$ , um ponto com 2 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\phi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\phi$  –  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) e  $p_\phi$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $\phi$ ).

Note que  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\phi$  com cota nula –  $h_\phi$  é necessariamente paralela ao eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\phi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\phi$ ) é uma reta vertical do plano  $\phi$ , com abcissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ). Por isso mesmo, o traço horizontal do plano  $\phi$  ( $h_\phi$ ) contém as projeções horizontais dos quatro vértices do quadrado ( $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ). Por outro lado, o plano  $\phi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\phi$ ).

**Determinação gráfica do coeficiente de deformação:**

As **cotas** dos quatro pontos, porque se medem no eixo  $Z$ , estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o plano axonométrico (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspetiva do eixo  $Z$ ).

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $Z_r$  (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as **cotas** dos quatro pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza (salienta-se que o ponto  $A$  tem cota nula), determinando-se dois pontos – o ponto  $P_r$  e o ponto  $Q_r$ . O ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota do ponto  $C$  ( $OP_r = 6$  cm e é a cota do ponto  $C$ , em verdadeira grandeza). O ponto  $Q$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota dos pontos  $B$  e  $D$  ( $OQ_r = 3$  cm e é a cota dos pontos  $B$  e  $D$ , em verdadeira grandeza).

Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $35^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspetiva do ponto  $P$ , sobre a perspetiva do eixo  $Z$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspetiva da cota do ponto  $C$  ( $OP$  é a perspetiva da cota do ponto  $C$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A inclinação das projetantes é de  $35^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $35^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é, na prática, o **plano projetante** do eixo  $Z$ ). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta  $r$  e o *plano axonométrico* corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Z$  (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Z$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Z$ ).

Por  $Q_r$  conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $45^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $Q$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $Q$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$  – o segmento  $[OQ]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota dos pontos  $B$  e  $D$  ( $\overline{OQ}$  é a perspectiva da cota dos pontos  $B$  e  $D$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal ( $A_2$ ) e da sua projeção lateral ( $A_3$ ). O ponto  $A$  tem cota nula, pelo que o ponto  $A$  se situa no *plano coordenado XY*. Nesse sentido,  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ) situa-se sobre o eixo  $X$ , tal como  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ) se situa sobre o eixo  $Y$ . Note que  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ) se situa também sobre  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral.

Por fim, e ainda atendendo a que o ponto  $A$  tem cota nula, o ponto  $A$  situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente  $A_1 \equiv A$  (sendo  $A$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto B:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $B$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal ( $B_2$ ) e da sua projeção lateral ( $B_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $B_2$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $B_3$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $B_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$ .  $B_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $B$  e situa-se sobre  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $B_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $B_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $B_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $B$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas dos pontos C e D:

As perspectivas dos pontos  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $B$ . Atendendo a que os dois pontos pertencem ao plano  $\phi$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos dois pontos ( $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A$  e  $C$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A_1 \equiv C_1$ . Pelo seu lado, os pontos  $B$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $B_3 \equiv D_3$ .

### Determinação das perspectivas do quadrado:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do quadrado. O quadrilátero  $[ABCD]$  (que é um paralelogramo) é a perspectiva propriamente dita do quadrado. O quadrilátero  $[A_2B_2C_2D_2]$  (que é outro paralelogramo) é a perspectiva da projeção frontal do quadrado. O segmento de reta  $[B_1D_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do quadrado, que se reduz a um segmento de reta sobre  $h_\phi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. O segmento de reta  $[A_3C_3]$  é a perspectiva da projeção lateral do quadrado, que se reduz a um segmento de reta sobre  $p_\phi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral.

Salienta-se que, nesta situação, **não existe** qualquer **invisibilidade por ocultação** a assinalar – não existe nenhuma parte de qualquer das projeções do quadrado que, em perspectiva, estejam ocultas pelo quadrado.

Mais uma vez se chama a atenção para o facto de, dadas as condições da perspectiva (a direção das projetantes, fornecida no enunciado), nesta situação, o ponto de vista se situar fora do  $1^\circ$  *Triedro*, por detrás do *plano coordenado XZ*. Por esse motivo, o quadrado é «observado» por detrás do *plano coordenado XZ*. Nesse sentido, admite-se que o *plano coordenado XZ* é transparente, para que seja possível que o quadrado seja visto através dele. Assim, apesar de haver uma sobreposição da perspectiva da projeção frontal do quadrado em relação à perspectiva propriamente dita do quadrado, não é possível considerar qualquer **invisibilidade por ocultação**, pois a projeção frontal da figura se situa num plano que é considerado transparente.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano  $\phi$  (o plano que contém o quadrado), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. A perspectiva do quadrado  $[ABCD]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo  $Z_r$ , da reta  $r_r$  e da reta paralela a  $r_r$  que não se identificou), representaram-se a **leve**.

## 1171.

- a) A base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) está contida num plano frontal (de frente), pelo que os pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  têm necessariamente **7 cm de afastamento**, que é o afastamento do ponto  $A$  (todos os pontos de um plano frontal têm o mesmo afastamento). Por outro lado, é dado que o lado  $[AB]$  do quadrado é vertical, ou seja, paralelo ao eixo  $X$ . Assim, o lado  $[CD]$  do polígono será igualmente paralelo ao eixo  $Z$  (o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois). Por sua vez, os lados  $[AD]$  e  $[BC]$  serão necessariamente fronto-horizontais (paralelos ao eixo  $X$ ), por serem perpendiculares aos lados  $[AB]$  e  $[CD]$  e estarem contidos num plano frontal (de frente). Por fim, o lado  $[AB]$  mede 6 cm (é dado no enunciado).

Assim, o ponto  $B$ , situando-se na reta vertical que passa por  $A$ , tem a mesma abcissa do ponto  $A$  (que é 2 cm) e a sua cota é 6 cm (o lado do quadrado) superior à cota daquele ponto – o ponto  $B$  tem, assim, **2 cm de abcissa e 8 cm de cota** (e 7 cm de afastamento, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto  $B$  são (2; 7; 8).

Por outro lado, o ponto  $C$ , sendo consecutivo ao ponto  $B$ , tem a mesma cota do ponto  $B$  (que é 8 cm) e a sua abcissa é 6 cm superior à abcissa daquele ponto – o ponto  $C$  tem, assim, **8 cm de cota e 8 cm de abcissa** (e 7 cm de afastamento, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto  $C$  são (8; 7; 8).

O ponto  $D$  tem a mesma cota do ponto  $A$  e a mesma abcissa do ponto  $C$  – o ponto  $D$  tem, assim, **8 cm de abcissa e 2 cm de cota** (e 7 cm de afastamento, como atrás se referiu). Dessa forma, as coordenadas do ponto  $D$  são (8; 7; 2).

Por fim, tratando-se de uma **pirâmide regular**, que é uma pirâmide reta, o seu vértice situa-se na mesma projetante frontal do centro da base (o ponto médio das duas diagonais). A abcissa do ponto médio das diagonais é a média aritmética das abcissas dos pontos  $A$  e  $C$ , que é 5 cm – o ponto  $V$  tem, assim, **5 cm de abcissa**. A cota do ponto médio das diagonais é a média aritmética das cotas dos pontos  $A$  e  $C$ , que é 5 cm – o ponto  $V$  tem, assim, **5 cm de cota**. O ponto  $V$  tem **afastamento nulo** (é dado no enunciado), pelo que as coordenadas do ponto  $V$  são (5; 0; 5).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

## b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo  $X$  e do eixo  $Y$ , ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

## Resolução:

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$ , dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Por outro lado, sobre o eixo  $Y$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide (que é 7 cm), em verdadeira grandeza. A partir das abcissas e dos afastamentos dos cinco pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções horizontais –  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ,  $B_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ,  $C_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ,  $D_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $D$  e  $V_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V$ .

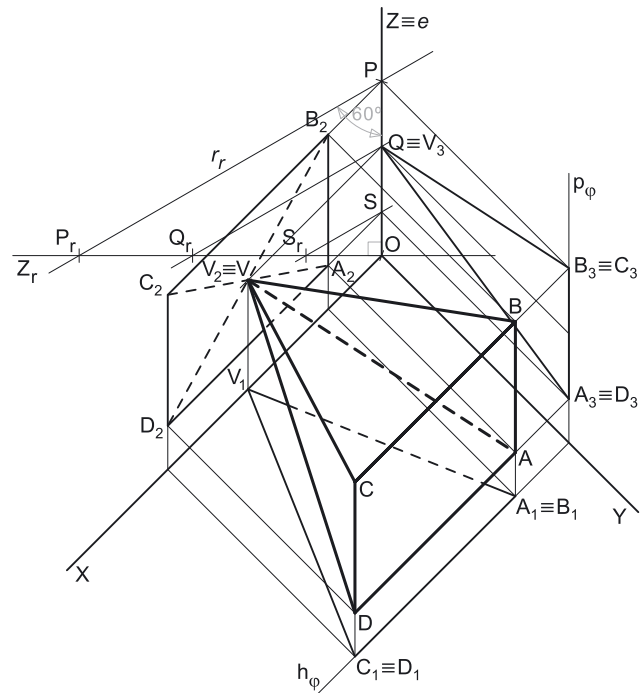
Salienta-se que o ponto  $V$  tem afastamento nulo (é um ponto do *plano coordenado XZ*), pelo que  $V_1$  (a sua projeção horizontal) se situa necessariamente no eixo  $X$ .

Por outro lado, no que respeita ao eixo  $Z$  (onde se medem as **cotas** dos cinco pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as **cotas** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **cota** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **cotas** dos cinco pontos sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

## Representação do plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre o eixo  $Y$ , um ponto com 7 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\phi$  que contém a base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ), sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 7 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\phi$  –  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) e  $p_\phi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\phi$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizantal do plano  $\varphi$  com cota nula –  $h_\varphi$  é necessariamente paralela ao eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por isso mesmo, o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ) contém as projeções horizontais dos quatro vértices do quadrado ( $A_1, B_1, C_1$  e  $D_1$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

As cotas dos cinco pontos, porque se medem no eixo  $Z$ , estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o plano axonométrico (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ ).

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $Z_r$  (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as cotas dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se três pontos – o ponto  $P_r$ , o ponto  $Q_r$  e o ponto  $S_r$ . O ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota dos pontos  $B$  e  $C$  ( $OP_r = 8$  cm e é a cota dos pontos  $B$  e  $C$ , em verdadeira grandeza). O ponto  $Q$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota do ponto  $V$  ( $OQ_r = 5$  cm e é a cota do ponto  $V$ , em verdadeira grandeza). O ponto  $S$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota dos pontos  $A$  e  $D$  ( $OS_r = 2$  cm e é a cota dos pontos  $A$  e  $D$ , em verdadeira grandeza).

Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_p$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_p$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $P$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota dos pontos  $B$  e  $C$  ( $OP$  é a perspectiva da cota dos pontos  $B$  e  $C$ ).

A inclinação das projetantes é de  $60^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, no espaço, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $60^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano axonométrico (que é, na prática, o plano projetante do eixo  $Z$ ). Note que se trata do ângulo entre uma reta e um plano, pelo que o ângulo entre a reta  $r$  e o plano axonométrico corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Z$  (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Z$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Z$ ).

Por  $Q_r$  conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $Q$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_p$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $Q$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$  – o segmento  $[OQ]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do ponto  $V$  ( $OQ$  é a perspectiva da cota do ponto  $V$ ).

Por fim, pelo ponto  $S_r$  conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $S$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_p$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $S$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$  – o segmento  $[OS]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota dos pontos  $A$  e  $D$  ( $OS$  é a perspectiva da cota dos pontos  $A$  e  $D$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal ( $A_2$ ) e da sua projeção lateral ( $A_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $A_2$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $A_3$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ .  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D:

As perspectivas dos pontos  $B, C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $A$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos ( $B_3, C_3$  e  $D_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A$  e  $B$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A_1 \equiv B_1$  (o que acontece também com os pontos  $C$  e  $D$ , pelo que se tem igualmente  $C_1 \equiv D_1$ ). Por outro lado, os pontos  $A$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizantal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $A_3 \equiv D_3$  (o que acontece também com os pontos  $B$  e  $C$ , pelo que se tem igualmente  $B_3 \equiv C_3$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto V:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $V$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal ( $V_2$ ) e da sua projeção lateral ( $V_3$ ). O ponto  $V$  tem afastamento nulo, pelo que o ponto  $V$  se situa no plano coordenado  $XZ$ . Nesse sentido,  $V_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $V$ ) situa-se sobre o eixo  $Z$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, e ainda atendendo a que o ponto **V** tem afastamento nulo, o ponto **V** situa-se no plano coordenado **XZ**, pelo que se tem imediatamente  $V_2 \equiv V$  (sendo **V** a perspetiva propriamente dita do ponto **V**).

#### Determinação das perspetivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ABVD]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **C**. Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**). Por outro lado, a aresta lateral **[AV]** é **invisível**, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais **[ABV]** e **[ADV]**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção horizontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção horizontal. No entanto, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Tendo em conta que o vértice **V** é o vértice de menor afastamento do sólido, este vértice é invisível (em projeção frontal), bem como todas as arestas que nele convergem (todas as arestas laterais da pirâmide). Assim, a **invisibilidade por projeção** a assinalar em projeção frontal é a referente à totalidade das arestas laterais da pirâmide. Por outro lado, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[C<sub>3</sub>D<sub>3</sub>V<sub>3</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção lateral. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção lateral. Por outro lado, existe uma ínfima parte da projeção lateral da pirâmide que é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano  $\phi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Z<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>** e das retas paralelas a **r<sub>r</sub>**, que não se identificaram), representaram-se a **leve**.

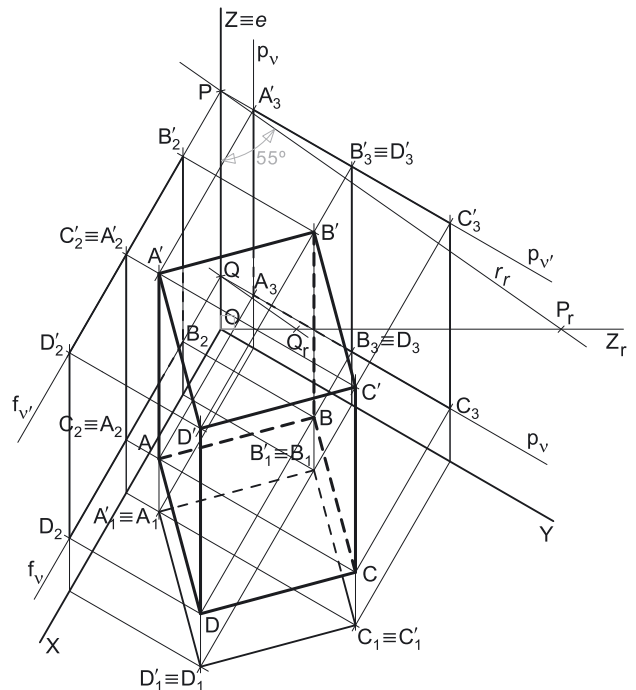
## 1172.

a) A base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano horizontal (de nível) pelo que os restantes vértices dessa base (os pontos **B**, **C** e **D**) têm necessariamente **2 cm de cota**, que é a cota do ponto **A** (todos os pontos de um plano horizontal têm a mesma cota).

A diagonal **[AC]** do quadrado **[ABCD]** é de topo (como o enunciado refere expressamente), pelo que o ponto **C** tem a mesma abcissa do ponto **A** – o ponto **C** tem, assim, **5 cm de abcissa**. Por outro lado, e como o enunciado também refere, as diagonais medem 6 cm. Assim, o afastamento do ponto **C** é 6 cm superior ao afastamento do ponto **A**, pelo que o ponto **C** tem **7 cm de afastamento** – as coordenadas do ponto **C** são (5; 7; 2).

Uma vez que a diagonal **[AC]** é de topo (paralela ao eixo **Y**), a outra diagonal (a diagonal **[BD]**), porque é perpendicular à diagonal **[AC]** e está contida num plano horizontal (de nível), é necessariamente fronto-horizontal (paralela ao eixo **X**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado **[ABCD]** bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal **[AC]** tem necessariamente 5 cm de abcissa (a abcissa dos pontos **A** e **C**) e 4 cm de afastamento (a média aritmética dos afastamentos dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **4 cm de afastamento**. Por outro lado, a diagonal **[BD]** também mede 6 cm. Uma vez que o ponto **B** é o vértice de menor abcissa do quadrado (como o enunciado refere expressamente), a sua abcissa é 3 cm inferior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **2 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto **B** são (2; 4; 2).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto **D** é o vértice de maior abscissa do quadrado (por oposição ao vértice **B**), a sua abscissa é 3 cm superior à abscissa dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **8 cm de abscissa**. As coordenadas do ponto **D** são (8; 4; 2).

A altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as bases, o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre os planos das duas bases. Uma vez que o prisma tem 7 cm de altura e a sua base inferior tem 2 cm de cota (a cota do ponto **A**), o plano que contém a base superior tem **9 cm de cota** ( $2 + 7 = 9$ ). Nesse sentido, todos os vértices da base [**A'B'C'D'**] (a base superior do prisma) têm **9 cm de cota**.

Trata-se de um **prisma regular**, com bases horizontais (de nível), pelo que as suas arestas laterais estão contidas em retas verticais (projetantes horizontais) – os vértices da base superior (o quadrado [**A'B'C'D'**]) têm as abscissas e os afastamentos dos vértices correspondentes da base inferior (o quadrado [**ABCD**]). Nesse sentido, as coordenadas dos quatro vértices da base [**A'B'C'D'**] são: **A'** (5; 1; 9), **B'** (2; 4; 9), **C'** (5; 7; 9) e **D'** (8; 4; 9).

Salienta-se que o prisma se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

#### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de  $150^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de  $120^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

#### Resolução:

As coordenadas dos oito pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **XY**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos oito pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Por outro lado, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos oito vértices do prisma (1 cm, 4 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e dos afastamentos dos oito pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspetivas das respetivas projeções horizontais – **A<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**, **B<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **B**, **C<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **C**, **D<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **D**, **A'<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A'**, **B'<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **B'**, **C'<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **C'** e **D'<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **D'**.

Por outro lado, no que respeita ao eixo **Z** (onde se medem as **cotas** dos oito pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que as **cotas** não se projetam em verdadeira grandeza no plano axonométrico (a cota é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **cotas** dos oito pontos sobre a perspetiva do eixo **Z**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

As **cotas** dos oito pontos, porque se medem no eixo **Z**, estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o plano axonométrico (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspetiva do eixo **Z**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as **cotas** dos planos horizontais (de nível) que contêm as bases do prisma (2 cm e 9 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se dois pontos – o ponto **P<sub>r</sub>** e o ponto **Q<sub>r</sub>**. O ponto **Q** é um ponto do eixo **Z** com a cota da base inferior do prisma ( $\overline{OQ} = 2$  cm e é a cota do plano da base inferior, em verdadeira grandeza). O ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do plano da base superior do prisma ( $\overline{OP} = 9$  cm e é a cota do plano da base superior do prisma, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>**, conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspetiva do ponto **P**, sobre a perspetiva do eixo **X** – o segmento [**OP**] é, assim, um segmento representativo da perspetiva da cota do plano da base superior do prisma (**OP** é a perspetiva da cota do plano da base superior do sólido).

A inclinação das projetantes é de  $55^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, no espaço, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $55^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta **r** e é ortogonal ao plano axonométrico (que é, na prática, o plano projetante do eixo **Z**). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta **r** e o plano axonométrico corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspetiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspetiva do eixo **Z** (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspetiva do eixo **Z** é a perspetiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspetiva do eixo **Z**).

Por **Q<sub>r</sub>**, conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto **Q**, em rebatimento e é paralela à reta **r<sub>r</sub>**. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspetiva do ponto **Q**, sobre a perspetiva do eixo **Z** – o segmento [**OQ**] é, assim, um segmento representativo da perspetiva da cota do plano da base inferior do prisma (**OQ** é a perspetiva da cota do plano da base inferior do sólido).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base [ABCD] do prisma:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva de um ponto com 2 cm de cota (o ponto **Q**). O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a base inferior do prisma (o quadrado [ABCD]), sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de cota, contém necessariamente o ponto **Q**.

Assim, pela perspectiva do ponto **Q** conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a perspectiva de  $f_v$  é necessariamente paralela ao eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a perspectiva de  $p_v$  é necessariamente paralela ao eixo **Y**.

O plano  $v$  é um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral ou de perfil ( $p_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ).

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base [A'B'C'D'] do prisma:*

A determinação do coeficiente de redução do eixo **Z** permitiu-nos, ainda, determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva de um ponto com 9 cm de cota (o ponto **P**). O plano horizontal (de nível)  $v'$  que contém a base superior do prisma (o quadrado [A'B'C'D']), sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 9 cm de cota, contém necessariamente o ponto **P**.

Assim, pela perspectiva do ponto **P** conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v'$  –  $f_{v'}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v'$ ) e  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ).

Note que  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v'$  com afastamento nulo – a perspectiva de  $f_{v'}$  é necessariamente paralela ao eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_{v'}$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v'$ ) é uma reta de topo do plano  $v'$ , com abcissa nula – a perspectiva de  $p_{v'}$  é necessariamente paralela ao eixo **Y**.

O plano  $v'$  é um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral ou de perfil ( $p_{v'}$ ). Por outro lado, o plano  $v'$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto A:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal ( $A_2$ ) e da sua projeção lateral ( $A_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $A_2$  e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $A_3$  e **O** são dois vértices opostos).  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A** e situa-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A** e situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D:*

As perspectivas dos pontos **B**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **A**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos ( $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Por outro lado, e porque os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que é também um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos ( $B_3$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $A_2 \equiv C_2$ . Por outro lado, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $B_3 \equiv D_3$ .

*Determinação das perspectivas dos pontos A', B', C' e D':*

As perspectivas dos pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **A**. Atendendo a que os quatro pontos pertencem ao plano  $v'$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das projeções frontais dos quatro pontos ( $A'_2$ ,  $B'_2$ ,  $C'_2$  e  $D'_2$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ). Por outro lado, e porque os quatro pontos pertencem ao plano  $v'$ , que é também um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos quatro pontos ( $A'_3$ ,  $B'_3$ ,  $C'_3$  e  $D'_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A'** e **C'**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $A'_2 \equiv C'_2$ . Por outro lado, os pontos **B'** e **D'**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $B'_3 \equiv D'_3$ .

Por fim, os vértices da base superior (os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**) e os vértices correspondentes da base inferior (os pontos **A**, **B**, **C** e **D**, respetivamente) situam-se nas mesmas retas projetantes horizontais, pelo que têm as respetivas projeções horizontais coincidentes – tem-se  $A'_1 \equiv A_1$ ,  $B'_1 \equiv B_1$ ,  $C'_1 \equiv C_1$  e  $D'_1 \equiv D_1$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação das perspectivas do prisma:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[AA'B'C'DD']$ . Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – os vértices **B** e **D'**. O vértice **D'**, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'D']$  e  $[C'D']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e a aresta lateral  $[DD']$ . O vértice **B**, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$  (da base  $[ABCD]$ ) e a aresta lateral  $[BB']$ .

Sublinha-se que as bases do prisma são paralelas ao plano de projeção (*plano axonométrico*), pelo que se projetam em verdadeira grandeza – nesse sentido, as perspetivas das bases não apresentam qualquer deformação (as duas bases são quadrados e as suas perspetivas são, ainda, dois quadrados, geometricamente iguais aos quadrados das bases, **no espaço**).

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas da projeção horizontal, da projeção frontal e da projeção lateral do prisma.

A **perspetiva da projeção horizontal do prisma** é limitada pelo quadrado  $[A_1B_1C_1D_1]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, parte da projeção horizontal do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[B_2D_2D'_2B'_2]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. No entanto, parte da projeção frontal do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[A_3C_3C'_3A'_3]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Parte da projeção lateral do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

## Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. Os planos  $v$  e  $v'$  (os planos horizontais que contêm as bases do prisma), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos respetivos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva do prisma, com as respetivas invisibilidades devidamente assinaladas, representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do prisma (com as respetivas invisibilidades), integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo  $Z_r$ , da reta  $r_r$  e das retas paralelas a  $r_r$ , que não se identificaram), representaram-se a **leve**.

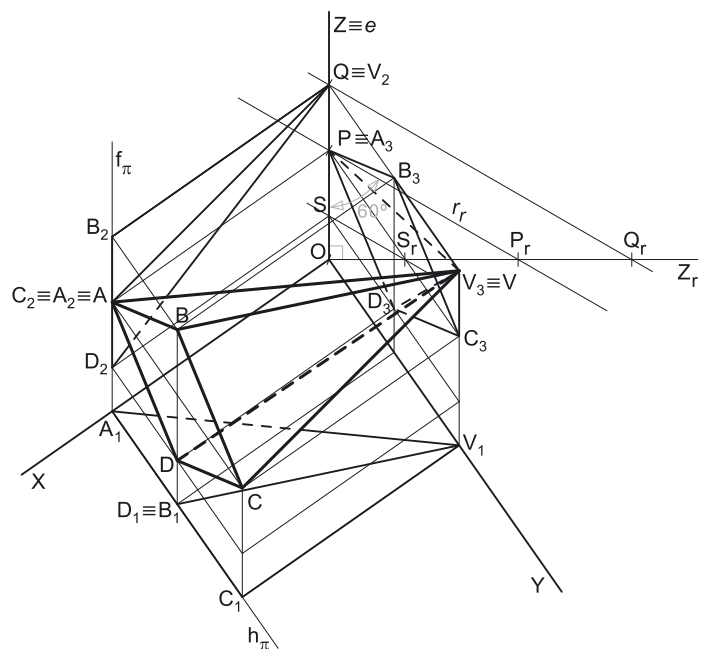
## 1173.

a) O quadrado  $[ABCD]$  (a base da pirâmide) está contido num plano de perfil com 7 cm de abcissa (a abcissa dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **7 cm de abcissa** (todos os pontos de um plano de perfil têm a mesma abcissa). Os pontos **A** e **C** têm a mesma abcissa e a mesma cota, pelo que é possível constatar que a diagonal  $[AC]$  do quadrado é de topo (paralela ao eixo **Y**). Nesse sentido, a outra diagonal (a diagonal  $[BD]$ ), porque é perpendicular à diagonal  $[AC]$  e está contida num plano de perfil, é necessariamente vertical (paralela ao eixo **Z**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bisseitam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal  $[AC]$  tem necessariamente 3 cm de afastamento (a média aritmética dos afastamentos dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **3 cm de afastamento**. Por outro lado, a diagonal  $[AC]$  mede 6 cm (a diferença entre os afastamentos dos pontos **A** e **C**), pelo que a diagonal  $[BD]$  mede igualmente 6 cm (tratando-se de um quadrado, as duas diagonais são perpendiculares entre si e têm o mesmo comprimento).

Tendo em conta que o ponto **B** é o vértice de maior cota da base (como o enunciado refere expressamente), a sua cota é 3 cm superior à cota dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **8 cm de cota**. As coordenadas do ponto **B** são (7; 3; 8).

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto **D** é o vértice de menor cota do quadrado (por oposição ao vértice **B**), a sua cota é 3 cm inferior à cota dos pontos **A** e **C** (que é 5 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **3 cm de cota**. As coordenadas do ponto **D** são (7; 3; 2).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A aresta lateral [BV] é horizontal (como o enunciado refere expressamente), pelo que o ponto V e o ponto B têm a mesma cota (todos os pontos de uma reta horizontal têm a mesma cota) – assim, o ponto V tem **8 cm de cota**. Por outro lado, a aresta lateral [CV] é frontal (como o enunciado refere expressamente), pelo que o ponto V e o ponto C têm o mesmo afastamento (todos os pontos de uma reta frontal têm o mesmo afastamento) – assim, o ponto V tem **6 cm de afastamento**. Por fim, o enunciado refere expressamente que o ponto V (o vértice da pirâmide) tem **abscissa nula**, pelo que as coordenadas do ponto V são (0; 6; 8).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do 1ª *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

#### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo Z se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano XY – assim, o eixo X e o eixo Y fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo Z (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo X um ângulo de 125° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo Y, um ângulo de 145° (que é outro ângulo obtuso).

#### Resolução:

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo X, os **afastamentos** medem-se no eixo Y e as **cotas** no eixo Z. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano XY, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo X e o eixo Y (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo X, a partir do ponto O e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do plano da base (que é 7 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o vértice da pirâmide tem abscissa nula. Por outro lado, sobre o eixo Y, a partir do ponto O e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos (3 cm e 6 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto A tem afastamento nulo. A partir das abscissas e dos afastamentos dos cinco pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções horizontais – A<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto A, B<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto B, C<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto C, D<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto D e V<sub>1</sub> é a perspectiva da projeção horizontal do ponto V.

Salienta-se que o ponto V tem abscissa nula (é um ponto do *plano coordenado YZ*), pelo que V<sub>1</sub> (a sua projeção horizontal) se situa necessariamente no eixo Y. Salienta-se ainda que o ponto A tem afastamento nulo (é um ponto do *plano coordenado XZ*), pelo que A<sub>1</sub> (a sua projeção horizontal) se situa necessariamente no eixo X.

Por outro lado, no que respeita ao eixo Z (onde se medem as **cotas** dos cinco pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as **cotas** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **cota** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **cotas** dos cinco pontos sobre a perspectiva do eixo Z, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

#### Representação do plano de perfil que contém a base da pirâmide:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre o eixo X, um ponto com 7 cm de abscissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém a base da pirâmide (o quadrado [ABCD]), sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 7 cm de abscissa, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula –  $h_\pi$  é necessariamente paralela ao eixo Y. Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal ou de perfil do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo Z.

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por isso mesmo, o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ) contém as projeções horizontais dos quatro vértices do quadrado (A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> e D<sub>1</sub>). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

As **cotas** dos cinco pontos, porque se medem no eixo Z, estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo Z para o *plano axonométrico* (o plano XY). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo Z. O eixo Z rebatido (o eixo Z<sub>r</sub>) fica perpendicular à perspectiva do eixo Z. O ponto O é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo Z<sub>r</sub> está, assim, definido por um ponto (o ponto O) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo Z).

A partir do ponto O, sobre o eixo Z<sub>r</sub> (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as **cotas** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se três pontos – o ponto P<sub>r</sub>, o ponto Q<sub>r</sub> e o ponto S<sub>r</sub>. O ponto P é um ponto do eixo Z com a cota dos pontos A e C ( $\overline{OP} = 5$  cm e é a cota dos pontos A e C, em verdadeira grandeza). O ponto Q é um ponto do eixo Z com a cota dos pontos B e V ( $\overline{OQ} = 8$  cm e é a cota dos pontos B e V, em verdadeira grandeza). O ponto S é um ponto do eixo Z com a cota do ponto D ( $\overline{OS} = 2$  cm e é a cota do ponto D, em verdadeira grandeza).

Por P<sub>r</sub> conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto P, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto P, sobre a perspectiva do eixo Z – o segmento [OP] é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota dos pontos A e C ( $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota dos pontos A e C).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inclinação das projetantes é de  $60^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $60^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém a reta  $r$  e é ortogonal ao plano axonométrico (que é, na prática, o plano projetante do eixo  $Z$ ). Note que se trata do **ângulo entre uma reta e um plano**, pelo que o ângulo entre a reta  $r$  e o plano axonométrico corresponde, na realidade, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Z$  (que é a charneira do rebatimento e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Z$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Z$ ).

Por  $Q_r$  conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $Q$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $Q$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$  – o segmento  $[OQ]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota dos pontos  $B$  e  $V$  ( $\overline{OQ}$  é a perspectiva da cota dos pontos  $B$  e  $V$ ).

Por fim, pelo ponto  $S_r$  conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $S$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $S$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$  – o segmento  $[OS]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do ponto  $D$  ( $\overline{OS}$  é a perspectiva da cota do ponto  $D$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $A$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal ( $A_2$ ) e da sua projeção lateral ( $A_3$ ). O ponto  $A$  tem afastamento nulo, pelo que o ponto  $A$  se situa no plano coordenado  $XZ$ . Nesse sentido,  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ) situa-se sobre o eixo  $Z$ .

Por fim, e ainda atendendo a que o ponto  $A$  tem afastamento nulo, o ponto  $A$  situa-se no plano coordenado  $XZ$ , pelo que se tem imediatamente  $A_2 \equiv A$  (sendo  $A$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto B:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $B$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal ( $B_2$ ) e da sua projeção lateral ( $B_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $B_2$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $B_3$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $B_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$  e situa-se sobre a resp de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.  $B_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $B$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $B_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $B_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $B_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $B$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas dos pontos C e D:

As perspectivas dos pontos  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $B$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções frontais dos dois pontos ( $C_2$  e  $D_2$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A$  e  $C$ , porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $A_2 \equiv C_2$ . Por outro lado, os pontos  $B$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $B_1 \equiv D_1$ .

### Determinação das perspectivas do ponto V:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $V$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal ( $V_2$ ) e da sua projeção lateral ( $V_3$ ). O ponto  $V$  tem abcissa nula, pelo que o ponto  $V$  se situa no plano coordenado  $YZ$ . Nesse sentido,  $V_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $V$ ) situa-se sobre o eixo  $Z$ .

Por fim, e ainda atendendo a que o ponto  $V$  tem abcissa nula, o ponto  $V$  situa-se no plano coordenado  $YZ$ , pelo que se tem imediatamente  $V_3 \equiv V$  (sendo  $V$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $V$ ).

### Determinação das perspectivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada  $[AVCD]$ . Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice  $B$ . Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base, e a aresta lateral  $[BV]$ ). Por outro lado, a aresta lateral  $[DV]$  é **invisível**, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais  $[ADV]$  e  $[CDV]$ .

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[A_1C_1V_1]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção horizontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção horizontal. No entanto, parte da projeção horizontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Sobre o eixo  $Y_r'$  marcou-se um ponto  $P_r'$ , qualquer – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Y$  com um determinado afastamento ( $\overline{OP_r'}$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano  $XY$ ). Tendo em conta que a **direção de afinidade  $d$**  é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$ , a **direção de afinidade  $d$**  é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade  $d$** .

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o plano axonométrico (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto  $P$  para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Y$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ , enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto  $P$  (o mesmo ponto  $P$ ) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$ .

A inclinação das projetantes é de  $60^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $60^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo  $Y$  e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Y$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Y$  (que é a charneira  $e$ , por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Y$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Y$ ).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade  $d$**  relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** pedida – a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ .

- b) De acordo com o enunciado, é pedida a direção  $d'$ , que é **direção de afinidade** que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $YZ$ . Assim, em primeiro lugar, há que rebater o plano coordenado  $YZ$  para o plano axonométrico (o plano  $XZ$ ). Ao rebater o plano  $YZ$  sobre o plano axonométrico, a charneira do rebatimento (reta  $e''$ ) é o eixo  $Z$ , que se identificou imediatamente. O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r''$ ) fica coincidente com o eixo  $X$ , facto que se assinalou devidamente –  $X \equiv Y_r''$ . O eixo  $Y_r''$  é o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano  $YZ$ .

Sobre o eixo  $Y_r''$  há que representar um ponto qualquer, com um determinado afastamento. Tendo em conta os procedimentos da alínea anterior, optou-se por recorrer ao mesmo ponto  $P$  da alínea anterior. Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'} = \overline{OP}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto  $P$  para o eixo  $Y_r''$ , determinando-se o ponto  $P_r''$  – note  $P_r''$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Y$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano coordenado  $YZ$ ). Assim,  $\overline{OP_r''}$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano coordenado  $YZ$ . Note que, nesta situação, o arco de transporte do afastamento do ponto  $P$  já tinha sido desenhado (na alínea anterior), pelo que  $P_r''$  é, na realidade, o ponto em que o eixo  $Y_r''$  interseja o arco de circunferência desenhado na alínea anterior.

Sublinha-se que o ponto  $P_r''$  é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $YZ$ , enquanto o ponto  $P_r$  era o ponto  $P$  rebatido pelo plano projetante do eixo  $Y$  e  $P_r'$  era o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$ .

Tendo em conta que a **direção de afinidade  $d'$**  é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $YZ$ , a **direção de afinidade  $d'$**  é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $YZ$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade  $d'$** . No entanto, de acordo com os procedimentos expostos na alínea anterior, o coeficiente de deformação do eixo  $Y$  já foi determinado.

De facto, o segmento  $[OP]$  (determinado na alínea anterior) é o segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade  $d'$**  relaciona o rebatimento do plano  $YZ$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r''$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d'$ ) é a **direção de afinidade** pedida – a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $YZ$ .

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é duas direções de afinidade (a direção  $d$  e a direção  $d'$ ), pelo que aquelas duas linhas se representaram a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo  $Y_r$ , da reta  $r_r$  e, ainda do arco que nos permitiu transportar o afastamento do ponto  $P$  para todos os rebatimentos efetuados.



## 1177.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos *coordenados*. Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o *plano axonométrico* é o plano **YZ** – o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **Y** um ângulo de  $130^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $140^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

- a) De acordo com o enunciado, é pedida a direção **d**, que é **direção de afinidade** que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XY*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater o *plano coordenado XY* para o *plano axonométrico* (o plano **YZ**). Ao rebater o plano **XY** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é o eixo **Y**, que se identificou imediatamente. O eixo **X** rebatido (o eixo  $X_r'$ ) fica coincidente com o eixo **Z**, facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv X_r'$ . O eixo  $X_r'$  é o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do plano **XY**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XY** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **X**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY* com a notação  $X_r'$ , optando-se por manter a notação  $X_r$  para o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Sobre o eixo  $X_r'$  marcou-se um ponto  $P_r'$ , qualquer – o ponto **P** é um ponto do eixo **X** com uma determinada abcissa ( $\overline{OP_r'}$  é a abcissa do ponto **P**, em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano **XY**). Tendo em conta que a **direção de afinidade d** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XY*, a **direção de afinidade d** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **X**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade d**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano **YZ**). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **X**. O eixo **X** rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo **X**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo **X**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **abcissa** do ponto **P** para o eixo  $X_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **X**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **X**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a abcissa do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **X**. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $50^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **X**, enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY*.

A inclinação das projetantes é de  $50^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r_r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $50^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **X** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r_r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspetiva do eixo **X**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspetiva do eixo **X** (que é a charneira **e**, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspetiva do eixo **X** é a perspetiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspetiva do eixo **X**).

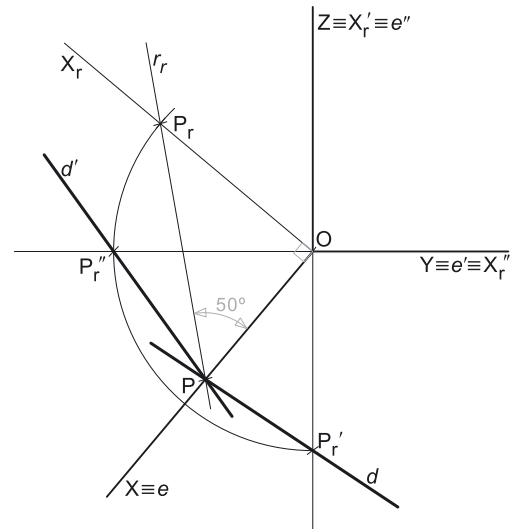
O segmento  $\overline{OP}$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva da abcissa do ponto **P** –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da abcissa do ponto **P**.

A **direção de afinidade d** relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** pedida – a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**.

- b) De acordo com o enunciado, é pedida a direção **d'**, que é **direção de afinidade** que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XZ*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater o *plano coordenado XZ* para o *plano axonométrico* (o plano **YZ**). Ao rebater o plano **XZ** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta **e''**) é o eixo **Z**, que se identificou imediatamente. O eixo **X** rebatido (o eixo  $X_r''$ ) fica coincidente com o eixo **Y**, facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv X_r''$ . O eixo  $X_r''$  é o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do plano **XZ**.

Sobre o eixo  $X_r''$  há que representar um ponto qualquer, com um determinado afastamento. Tendo em conta os procedimentos da alínea anterior, optou-se por recorrer ao mesmo ponto **P** da alínea anterior. Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'} = \overline{OP}$ , transportou-se a **abcissa** do ponto **P** para o eixo  $X_r''$ , determinando-se o ponto  $P_r''$  – note  $P_r''$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **X**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do *plano coordenado XZ*). Assim,  $\overline{OP_r''}$  é a abcissa do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do *plano coordenado XZ*. Note que, nesta situação, o arco de transporte da abcissa do ponto **P** já tinha sido desenhado (na alínea anterior), pelo que  $P_r''$  é, na realidade, o ponto em que o eixo  $X_r''$  interseca o arco de circunferência desenhado na alínea anterior.

Sublinha-se que o ponto  $P_r''$  é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XZ*, enquanto o ponto  $P_r$  era o ponto **P** rebatido pelo plano projetante do eixo **X** e  $P_r'$  era o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY*.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Tendo em conta que a **direção de afinidade  $d'$**  é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XZ*, a **direção de afinidade  $d'$**  é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **X**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade  $d'$** . No entanto, de acordo com os procedimentos expostos na alínea anterior, o coeficiente de deformação do eixo **X** já foi determinado.

De facto, o segmento **[OP]** (determinado na alínea anterior) é o segmento representativo da perspectiva da abcissa do ponto **P** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da abcissa do ponto **P**.

A **direção de afinidade  $d'$**  relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r''$  e pela perspectiva do ponto **P** (a reta  $d'$ ) é a **direção de afinidade** pedida – a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é duas direções de afinidade (a direção  $d$  e a direção  $d'$ ), pelo que aquelas duas linhas se representaram a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo  $Y_r$ , da reta  $r_r$  e, ainda do arco que nos permitiu transportar a abcissa do ponto **P** para todos os rebatimentos efetuados.

## 1178.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que o eixo que não está contido no *plano axonométrico* é o eixo **Y**, depreende-se que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**. Nesse sentido, o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de  $45^\circ$  (que é um ângulo agudo) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $135^\circ$  (que é um ângulo obtuso).

- a) De acordo com o enunciado, é pedida a direção  $d$ , que é **direção de afinidade** que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XY*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater o *plano coordenado XY* para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Ao rebater o plano **XY** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é o eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Y** rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo **Z**, facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do plano **XY**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XY** com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY* com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

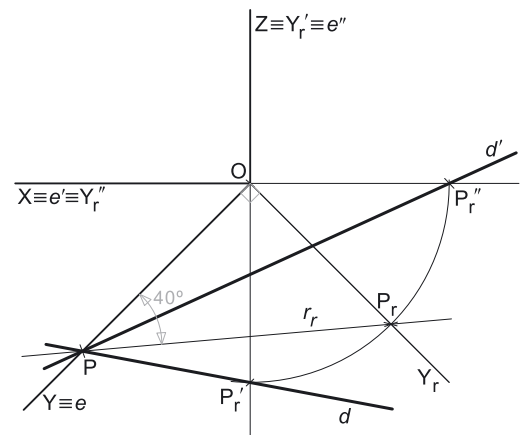
Sobre o eixo  $Y_r'$  marcou-se um ponto  $P_r'$ , qualquer – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com um determinado afastamento ( $\overline{OP_r'}$  é o afastamento do ponto **P**, em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano **XY**). Tendo em conta que a **direção de afinidade  $d$**  é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XY*, a **direção de afinidade  $d$**  é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Y**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade  $d$** .

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **Y**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto **P** para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Y**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $40^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY*.

A inclinação das projetantes é de  $40^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r_r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $40^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Y** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r_r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Y**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo **Y** (que é a charneira  $e$ , por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo **Y** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo **Y**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto  $P - \overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade  $d$**  relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** pedida – a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ .

- b) De acordo com o enunciado, é pedida a direção  $d'$ , que é **direção de afinidade** que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado*  $YZ$ . Assim, em primeiro lugar, há que rebater o *plano coordenado*  $YZ$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XZ$ ). Ao rebater o plano  $YZ$  sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta  $e''$ ) é o eixo  $Z$ , que se identificou imediatamente. O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r''$ ) fica coincidente com o eixo  $X$ , facto que se assinalou devidamente –  $X \equiv Y_r''$ . O eixo  $Y_r''$  é o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano  $YZ$ .

Sobre o eixo  $Y_r''$  há que representar um ponto qualquer, com um determinado afastamento. Tendo em conta os procedimentos da alínea anterior, optou-se por recorrer ao mesmo ponto  $P$  da alínea anterior. Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'} = \overline{OP}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto  $P$  para o eixo  $Y_r''$ , determinando-se o ponto  $P_r''$  – note  $P_r''$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Y$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do *plano coordenado*  $YZ$ ). Assim,  $\overline{OP_r''}$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do *plano coordenado*  $YZ$ .

Sublinha-se que o ponto  $P_r''$  é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado*  $YZ$ , enquanto o ponto  $P_r$  era o ponto  $P$  rebatido pelo plano projetante do eixo  $Y$  e  $P_r'$  era o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado*  $XY$ .

Tendo em conta que a **direção de afinidade  $d'$**  é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado*  $YZ$ , a **direção de afinidade  $d'$**  é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $YZ$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade  $d'$** . No entanto, de acordo com os procedimentos expostos na alínea anterior, o coeficiente de deformação do eixo  $Y$  já foi determinado.

De facto, o segmento  $[OP]$  (determinado na alínea anterior) é o segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto  $P - \overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade  $d'$**  relaciona o rebatimento do plano  $YZ$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r''$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d'$ ) é a **direção de afinidade** pedida – a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $YZ$ .

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é duas direções de afinidade (a direção  $d$  e a direção  $d'$ ), pelo que aquelas duas linhas se representaram a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo  $Y_r$ , da reta  $r_r$ , e, ainda do arco que nos permitiu transportar a abscissa do ponto  $P$  para todos os rebatimentos efetuados.

## 1179.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o *plano axonométrico* é o plano  $XZ$  – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $130^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $140^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

#### Resolução:

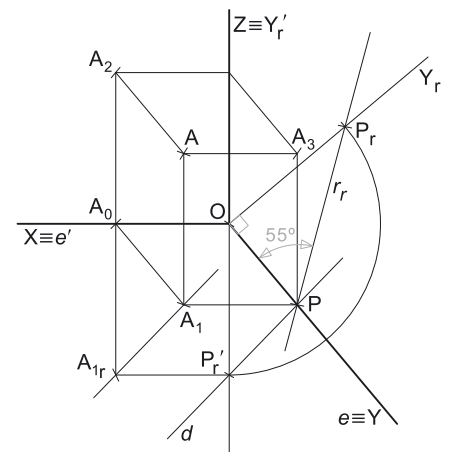
As coordenadas do ponto  $A$  medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** do ponto  $A$  mede-se no eixo  $X$ , o **afastamento** do ponto  $A$  mede-se no eixo  $Y$  e a **cota** do ponto  $A$  no eixo  $Z$ . Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano  $XZ$ , dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $A$  (3 cm) em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $A_0$ . De forma semelhante, sobre o eixo  $Z$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto  $A$  (4 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e da cota do ponto  $A$  foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A - A_2$ .

Já no que respeita ao eixo  $Y$  (onde se mede o afastamento do ponto  $A$ ), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o **afastamento** do ponto  $A$  não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o **afastamento** é a coordenada do ponto  $A$  que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir o **afastamento** do ponto  $A$  sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

#### Determinação da direção de afinidade:

O enunciado refere expressamente o recurso à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer *plano coordenado* para o *plano axonométrico*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater um dos dois *planos coordenados* ortogonais ao *plano axonométrico* (o plano  $XY$  ou o plano  $YZ$ ) e, dessa forma, representar o ponto  $A$  através de quaisquer duas das suas três projeções (em Dupla Projeção Ortogonal, independentemente das duas projeções escolhidas).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que já temos a projeção frontal do ponto **A**, optou-se por rebater o *plano coordenado XY* (o *plano coordenado horizontal*) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projeção Ortogonal já estudada e, assim, representar o ponto **A** pelas suas duas projeções – a sua projeção horizontal e a sua projeção frontal.

Ao rebater o plano **XY** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é o eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>'**) fica coincidente com o eixo **Z**, facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo **Y<sub>r</sub>'** é o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do plano **XY**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XY** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY* com a notação **Y<sub>r</sub>'**, optando-se por manter a notação **Y<sub>r</sub>** para o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Sobre o eixo **Y<sub>r</sub>'** mediu-se o **afastamento** do ponto **A**, em verdadeira grandeza (4 cm), o que nos permitiu determinar um ponto **P<sub>r</sub>'** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do ponto **A** ( $\overline{OP_r'}$  é o afastamento do ponto **A**, em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano **XY**). Em seguida, transportou-se o afastamento do ponto **A** para a linha de chamada do ponto **A** (que se prolongou para baixo do eixo **X**), o que nos permitiu determinar **A<sub>1r</sub>** – **A<sub>1r</sub>** é a projeção horizontal do ponto **A**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XY*).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XY* (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Y**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Y<sub>r</sub>** está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **Y**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto **P** (que é 4 cm) para o eixo **Y<sub>r</sub>**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Y**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. Por **P<sub>r</sub>**, conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 55°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto **P<sub>r</sub>** é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, enquanto o ponto **P<sub>r</sub>'** era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY*.

A inclinação das projetantes é de 55°, pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 55° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Y** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Y**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **Y** (que é a charneira **e**, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **Y** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **Y**).

O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto **A** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento do ponto **A**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>'** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação das perspectivas do ponto A:*

As projeções do ponto **A** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **A** – a linha de chamada do ponto **A** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **A<sub>1</sub>**, outro extremo em **A<sub>2</sub>** e um vértice no eixo **X** (em **A<sub>0</sub>**). A parte da linha de chamada do ponto **A** que está contida no plano **XY** é o segmento **[A<sub>0</sub>A<sub>1</sub>]** – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento **[A<sub>0</sub>A<sub>1r</sub>]**. A perspectiva desse segmento tem um extremo em **A<sub>0</sub>** e é paralela à perspectiva do eixo **Y**.

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta **[A<sub>0</sub>A<sub>1</sub>]**. Em seguida, por **A<sub>1r</sub>**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto **A** (a reta suporte do segmento **[A<sub>0</sub>A<sub>1</sub>]**) é **A<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XY**.

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto **A** determinou-se a perspectiva de **A<sub>3</sub>**, a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **A<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **A<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersejam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo **Y<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d**, do arco de transporte do afastamento do ponto **A** para o rebatimento do plano projetante do eixo **Y** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XY**, à inversão do seu rebatimento e à representação do ponto **A** em Dupla Projeção Ortogonal.

## 1180.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o *plano axonométrico* é o plano **YZ** – o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo **Y** e do eixo **Z**, ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

**Resolução:**

As coordenadas do ponto **M** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** do ponto **M** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** do ponto **M** mede-se no eixo **Y** e a **cota** do ponto **M** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **Y** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **M** (3 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **M** (2 cm) em verdadeira grandeza. A partir do afastamento e da cota do ponto **M** foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projecção lateral do ponto **M** – **M<sub>3</sub>**.

Já no que respeita ao eixo **X** (onde se mede a abscissa do ponto **M**), este eixo não é paralelo ao plano de projecção (o *plano axonométrico*), pelo que a **abscissa** do ponto **M** não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **abscissa** é a coordenada do ponto **M** que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir a **abscissa** do ponto **M** sobre a perspectiva do eixo **X**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

**Determinação da direção de afinidade:**

O enunciado refere expressamente o recurso à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer *plano coordenado* para o *plano axonométrico*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater um dos dois *planos coordenados* ortogonais ao *plano axonométrico* (o plano **XY** ou o plano **XZ**) e, dessa forma, representar o ponto **M** através de quaisquer duas das suas três projecções (em Dupla Projecção Ortogonal, independentemente das duas projecções escolhidas).

Tendo em conta que já temos a projecção lateral do ponto **M**, optou-se por rebater o *plano coordenado XY* (o *plano coordenado horizontal*) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projecção Ortogonal já estudada e, assim, representar o ponto **M** pelas suas duas projecções – a sua projecção horizontal e a sua projecção lateral.

Ao rebater o plano **XY** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é o eixo **Y**, que se identificou imediatamente. O eixo **X** rebatido (o eixo **X<sub>r</sub>'**) fica coincidente com o eixo **Z**, facto que se assinalou devidamente – **Z ≡ X<sub>r</sub>'**. O eixo **X<sub>r</sub>'** é o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do plano **XY**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XY** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **X**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY* com a notação **X<sub>r</sub>'**, optando-se por manter a notação **X<sub>r</sub>** para o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

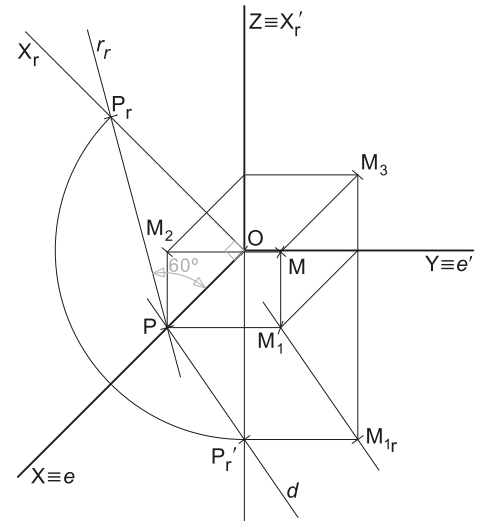
Sobre o eixo **X<sub>r</sub>'** mediu-se a **abscissa** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (5 cm), o que nos permitiu determinar um ponto **P<sub>r</sub>'** – o ponto **P** é um ponto do eixo **X** com a abscissa do ponto **M** (**OP<sub>r</sub>'** é a abscissa do ponto **M**, em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano **XY**). Em seguida, transportou-se a abscissa do ponto **M** para a linha de chamada do ponto **M** (que se prolongou para baixo do eixo **Y**), o que nos permitiu determinar **M<sub>1r</sub>** – **M<sub>1r</sub>** é a projecção horizontal do ponto **M**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XY*).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XY* (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **X**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano **YZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **X**. O eixo **X** rebatido (o eixo **X<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **X**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **X<sub>r</sub>** está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **X**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **abscissa** do ponto **P** (que é 5 cm) para o eixo **X<sub>r</sub>**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **X**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **X**). Assim,  $\overline{OP_r'}$  é a abscissa do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **X**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto **P<sub>r</sub>** é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **X**, enquanto o ponto **P<sub>r</sub>'** era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY*.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inclinação das projetantes é de  $60^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $60^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo  $Y$  e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $X$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $X$  (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $X$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $X$ ).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto  $M$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da abscissa do ponto  $M$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ ).

### Inversão do rebatimento do plano coordenado $XY$ e determinação das perspectivas do ponto $M$ :

As projeções do ponto  $M$  (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $M$  – a linha de chamada do ponto  $M$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $M_1$ , outro extremo em  $M_3$  e um vértice no eixo  $Y$ . **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto  $M$  que está contida no plano  $XY$  é o segmento de reta perpendicular ao eixo  $Y$  e que tem um extremo em  $A_1$  e o outro extremo no eixo  $Y$ . **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto  $M$  é o segmento que é perpendicular ao eixo  $Y$  e que tem um extremo em  $M_1$ , e o outro extremo no eixo  $Y$ . **Em perspectiva**, essa parte da linha de chamada do ponto  $M$  (a parte que se situa no plano  $XY$ ) é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$  e tem um extremo no eixo  $Y$ .

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspectiva** da parte da linha de chamada do ponto  $M$  que se situa no plano  $XY$ . Em seguida, por  $M_1$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto  $M$  (anteriormente desenhada) é  $M_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $M$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XY$ .

A partir das perspectivas da abscissa e da cota do ponto  $M$  determinou-se a perspectiva de  $M_2$ , a sua projeção frontal (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que  $M_2$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $M_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $M$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $M$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $M_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $M$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $M_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $M$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $M_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $M$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas intersejam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $M$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $M$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo  $X_r$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$ , do arco de transporte da abscissa do ponto  $M$  para o rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $XY$ , à inversão do seu rebatimento e à representação do ponto  $M$  em Dupla Projeção Ortogonal.

## 1181.

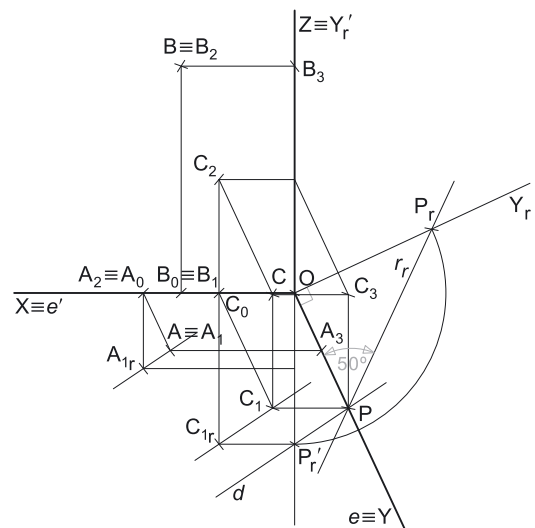
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $X$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano  $XZ$  – nesse sentido, o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $115^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $155^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo  $X$ , os **afastamentos** medem-se no eixo  $Y$  e as **cotas** no eixo  $Z$ . Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano  $XZ$ , dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos três pontos (2 cm, 3 cm e 4 cm) em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $A_0$ ,  $B_0$  e  $C_0$ . De forma semelhante, sobre o eixo  $Z$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos (3 cm e 6 cm) em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto  $A$  tem cota nula. A partir das abscissas e das cotas dos três pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos –  $A_2$ ,  $B_2$  e  $C_2$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Salienta-se que o ponto **A** tem cota nula, pelo que a sua projeção frontal ( $A_2$ ) se situa necessariamente sobre o eixo **X**. De forma semelhante, e atendendo ao facto de que o ponto **B** tem afastamento nulo (é um ponto do plano **XZ**), a sua projeção horizontal ( $B_1$ ) situa-se no eixo **X**, tal como a sua projeção lateral ( $B_3$ ) se situa no eixo **Z**.

Por outro lado, e ainda atendendo a que o ponto **B** é um ponto do plano **XZ** (que é o próprio *plano axonométrico*), a perspectiva propriamente dita do ponto **B** determina-se de forma direta, pois está coincidente com a sua projeção frontal – tem-se, imediatamente,  $B \equiv B_2$  (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

Já no que respeita ao eixo **Y** (onde se medem os afastamentos dos três pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que os **afastamentos** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o **afastamento** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir os **afastamentos** dos três pontos sobre a perspectiva do eixo **Y**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

#### Determinação da direção de afinidade:

O enunciado refere expressamente o recurso à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer *plano coordenado* para o *plano axonométrico*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater um dos dois planos *coordenados* ortogonais ao *plano axonométrico* (o plano **XY** ou o plano **YZ**) e, dessa forma, representar os três pontos através de quaisquer duas das respetivas três projeções (em Dupla Projeção Ortogonal, independentemente das duas projeções escolhidas).

Tendo em conta que já temos a projeção frontal de cada um dos três pontos, optou-se por rebater o *plano coordenado XY* (o *plano coordenado horizontal*) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projeção Ortogonal já estudada e, assim, representar os três pontos em Dupla Projeção Ortogonal, pelas respetivas projeções horizontais e frontais.

Ao rebater o plano **XY** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é o eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Y** rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo **Z**, facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do plano **XY**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XY** com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY* com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Em seguida, prolongaram-se as linhas de chamada dos pontos **A** e **C** (para baixo do eixo **X**) e determinaram-se as respetivas projeções horizontais, em rebatimento –  $A_{1r}$  e  $C_{1r}$  são as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente, em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**). Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Y_r'$ , o afastamento do ponto **C**, a partir de  $C_{1r}$ , com uma paralela ao eixo **X** – note que **C** é o ponto de maior afastamento o que nos permite um maior rigor dos traçados.

Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $Y_r'$  – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do ponto **C** ( $\overline{OP_r'}$  é o afastamento do ponto **C**, no eixo  $Y_r'$ , pelo rebatimento do plano **XY**).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XY* (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Y**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **Y**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto **P** (que é 4 cm) para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Y**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). Assim,  $\overline{OP_r'}$  é o afastamento do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $50^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY*.

A inclinação das projetantes é de  $50^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $50^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Y** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Y**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo **Y** (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo **Y** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo **Y**).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto **C** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento do ponto **C**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto **P** (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação das perspectivas do ponto C:

As projeções do ponto **C** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **C** – a linha de chamada do ponto **C** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **C**<sub>1</sub>, outro extremo em **C**<sub>2</sub> e um vértice no eixo **X** (em **C**<sub>0</sub>). A parte da linha de chamada do ponto **C** que está contida no plano **XY** é o segmento [**C**<sub>0**C**<sub>1</sub>] – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento [**C**<sub>0</sub>**C**<sub>1r</sub>]. A perspectiva desse segmento tem um extremo em **C**<sub>0</sub> e é paralela à perspectiva do eixo **Y**.</sub>

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta [**C**<sub>0</sub>**C**<sub>1</sub>]. Em seguida, por **C**<sub>1r</sub> conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a direção de afinidade) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto **C** (a reta suporte do segmento [**C**<sub>0</sub>**C**<sub>1</sub>]) é **C**<sub>1</sub> (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XY**.

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto **C** determinou-se a perspectiva de **C**<sub>3</sub>, a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **C**<sub>3</sub> e **O** são dois vértices opostos) – **C**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **C**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **C**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **C**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **C**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseca-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **C** são dois vértices espacialmente opostos.

## Determinação das perspectivas do ponto A, a partir da direção de afinidade:

As perspectivas do ponto **A** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **C**. No entanto, atendendo a que o ponto **A** tem cota nula, o ponto **A** situa-se no plano coordenado **XY**, pelo que se tem imediatamente **A**<sub>1</sub> ≡ **A** (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo **Y**<sub>r</sub>, da reta **r**<sub>r</sub>, da direção de afinidade **d**, do arco de transporte do afastamento do ponto **P** para o rebatimento do plano projetante do eixo **Y** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XY**, à inversão do seu rebatimento e à representação dos pontos em Dupla Projeção Ortogonal.

## 1182.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **Y** e ao eixo **Z**, conclui-se que o plano axonométrico é o plano **YZ** – nesse sentido, o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com as partes positivas do eixo **Y** e do eixo **Z** ângulos de 135° (dois ângulos obtusos).

### Resolução:

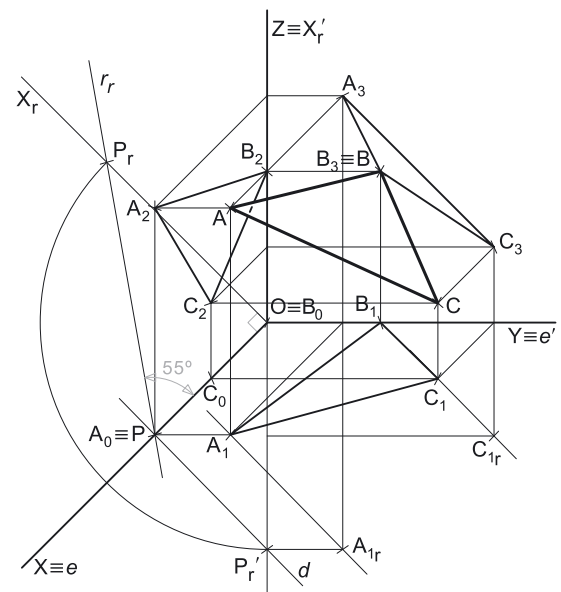
As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **YZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **Y** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos (2 cm, 3 cm e 6 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos (2 cm, 4 cm e 6 cm) em verdadeira grandeza. A partir dos afastamentos e das cotas dos três pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos – **A**<sub>3</sub>, **B**<sub>3</sub> e **C**<sub>3</sub>.

Salienta-se que o ponto **B** tem abscissa nula (é um ponto do plano **YZ**), pelo que a sua projeção horizontal (**B**<sub>1</sub>) se situa no eixo **Y**, tal como a sua projeção frontal (**B**<sub>2</sub>) se situa no eixo **Z**.

Por outro lado, e ainda atendendo a que o ponto **B** é um ponto do plano **YZ** (que é o próprio plano axonométrico), a perspectiva propriamente dita do ponto **B** determina-se de forma direta, pois está coincidente com a sua projeção lateral – tem-se, imediatamente, **B** ≡ **B**<sub>3</sub> (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

Já no que respeita ao eixo **X** (onde se medem as abscissas dos três pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que as **abscissas** não se projetam em verdadeira grandeza no plano axonométrico (a **abscissa** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **abscissas** dos três pontos sobre a perspectiva do eixo **X**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação da direção de afinidade:

O enunciado refere expressamente o recurso à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer *plano coordenado* para o *plano axonométrico*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater um dos dois *planos coordenados* ortogonais ao *plano axonométrico* (o plano **XY** ou o plano **XZ**) e, dessa forma, representar os três pontos através de quaisquer duas das respetivas três projeções (em Dupla Projeção Ortogonal, independentemente das duas projeções escolhidas).

Tendo em conta que já temos a projeção lateral de cada um dos três pontos, optou-se por rebater o *plano coordenado XY* (o *plano coordenado horizontal*) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projeção Ortogonal já estudada e, assim, representar os três pontos em Dupla Projeção Ortogonal, pelas respetivas projeções horizontais e laterais.

Ao rebater o plano **XY** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é o eixo **Y**, que se identificou imediatamente. O eixo **X** rebatido (o eixo **X<sub>r</sub>'**) fica coincidente com o eixo **Z**, facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv X_r'$ . O eixo **X<sub>r</sub>'** é o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do plano **XY**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XY** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **X**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY* com a notação **X<sub>r</sub>'**, optando-se por manter a notação **X<sub>r</sub>** para o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Em seguida, prolongaram-se as linhas de chamada dos pontos **A** e **C** (para baixo do eixo **Y**) e determinaram-se as respetivas projeções horizontais, em rebatimento (em função das respetivas abcissas, em verdadeira grandeza) – **A<sub>1r</sub>** e **C<sub>1r</sub>** são as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente, em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**). Em seguida, transportou-se, para o eixo **X<sub>r</sub>'**, a abscissa do ponto **A**, a partir de **A<sub>1r</sub>**, com uma paralela ao eixo **Y** – note que **A** é o ponto de maior abscissa, o que nos permite um maior rigor dos traçados.

Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto **P<sub>r</sub>'**, no eixo **X<sub>r</sub>'** – o ponto **P** é um ponto do eixo **X** com a abscissa do ponto **A** ( $\overline{OP_r'}$  é a abscissa do ponto **A**, no eixo **X<sub>r</sub>'**, pelo rebatimento do plano **XY**).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XY* (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **X**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano **YZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **X**. O eixo **X** rebatido (o eixo **X<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **X**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **X<sub>r</sub>** está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **X**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **abscissa** do ponto **P** (que é 6 cm) para o eixo **X<sub>r</sub>**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note que **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **X**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **X**). Assim,  $\overline{OP_r'}$  é a abscissa do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **X**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 55°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto **P<sub>r</sub>** é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **X**, enquanto o ponto **P<sub>r</sub>'** era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY*.

A inclinação das projetantes é de 55°, pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 55° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **X** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **X**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **X** (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **X** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **X**).

O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto **A** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da abscissa do ponto **A**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>'** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

#### Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação das perspectivas do ponto A:

As projeções do ponto **A** (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **A** – a linha de chamada do ponto **A** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **A<sub>1</sub>**, outro extremo em **A<sub>3</sub>** e um vértice no eixo **Y**. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **A** que está contida no plano **XY** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **Y** e que tem um extremo em **A<sub>1</sub>** e o outro extremo no eixo **Y**. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **A** é o segmento que é perpendicular ao eixo **Y** e que tem um extremo em **A<sub>1r</sub>**, e o outro extremo no eixo **Y**. **Em perspectiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **A** (a parte que se situa no plano **XY**) é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X** e tem um extremo no eixo **Y**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspectiva** da parte da linha de chamada do ponto **A** que se situa no plano **XY**. Em seguida, por **A<sub>1r</sub>**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto **A** (anteriormente desenhada) é **A<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XY**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das perspectivas da abscissa e da cota do ponto **A** determinou-se a perspectiva de **A<sub>2</sub>**, a sua projeção frontal (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **A<sub>2</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **A<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de **A<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

**Determinação das perspectivas do ponto C, a partir da direção de afinidade:**

As perspectivas do ponto **C** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **A**.

**Determinação das perspectivas do triângulo:**

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo **[ABC]** é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]** é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]** é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo **[A<sub>3</sub>B<sub>3</sub>C<sub>3</sub>]** é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo – uma pequena parte da projeção frontal do triângulo está oculta pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do triângulo **[ABC]** representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades assinaladas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo **X<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d**, do arco de transporte da abscissa do ponto **P** para o rebatimento do plano projetante do eixo **X** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XY**, à inversão do seu rebatimento e à representação dos pontos em Dupla Projeção Ortogonal.

## 1183.

a) O quadrado **[ABCD]** está contido num plano de perfil, pelo que os pontos **C** e **D** têm necessariamente **3 cm de abscissa**, que é a abscissa dos pontos **A** e **B** (todos os pontos de um plano de perfil têm a mesma abscissa). Por outro lado, os pontos **A** e **B** têm a mesma abscissa e a mesma cota, pelo que é possível concluir que o lado **[AB]** do quadrado é de topo (paralelo ao eixo **Y**). Assim, o lado **[CD]** do polígono será igualmente paralelo ao eixo **Y** (o quadrado tem os seus lados paralelos entre si, dois a dois). Por sua vez, os lados **[AD]** e **[BC]** serão necessariamente verticais (paralelos ao eixo **Z**), por serem perpendiculares aos lados **[AB]** e **[CD]** e estarem contidos num plano de perfil. Por fim, o lado **[AB]** mede 5 cm, que é a diferença entre os afastamentos dos pontos **A** e **B**.

Assim, atendendo a que o lado **[BC]** é vertical, o ponto **C**, sendo consecutivo a **B**, tem o mesmo afastamento do ponto **B** (que é 7 cm) e a sua cota é 5 cm superior à cota daquele ponto – o ponto **C** tem, assim, **7 cm de afastamento** e **7 cm de cota** (e 3 cm de abscissa, como atrás se referiu). As coordenadas do ponto **C** são (3; 7; 7).

De forma semelhante, atendendo a que o lado **[AD]** é vertical, o ponto **D** tem o mesmo afastamento do ponto **A** e a mesma cota do ponto **C** – o ponto **D** tem, assim, **2 cm de afastamento** e **7 cm de cota** (e 3 cm de abscissa, como atrás se referiu). Dessa forma, as coordenadas do ponto **D** são (3; 2; 7).

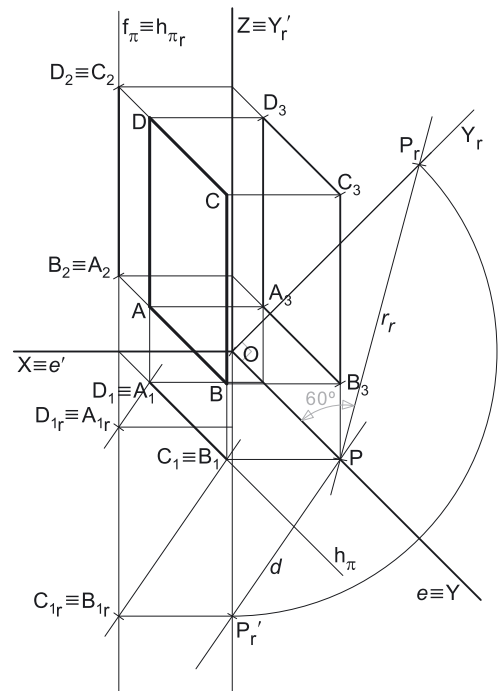
Salienta-se que o quadrado se situa no espaço do 1.<sup>o</sup> Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

b) **Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere, expressamente, que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – nesse sentido, o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) ângulos de 135° (que são dois ângulos obtusos).

**Resolução:**

As coordenadas dos quatro vértices do quadrado medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do plano de perfil que contém o quadrado (3 cm), em verdadeira grandeza. Por outro lado, sobre o eixo  $Z$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos quatro vértices do quadrado (2 cm e 7 cm), em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e das cotas dos quatro pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções frontais –  $A_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ,  $B_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$ ,  $C_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $C$  e  $D_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $D$ .

Salienta-se que os pontos  $A$  e  $B$  se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), pelo que as suas projeções frontais estão coincidentes – tem-se imediatamente  $A_2 \equiv B_2$ . O mesmo acontece com os pontos  $C$  e  $D$  (o lado  $[CD]$  do quadrado também é de topo), pelo que se tem, igualmente,  $C_2 \equiv D_2$ .

Já no que respeita ao eixo  $Y$  (onde se medem os **afastamentos** dos quatro pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que os **afastamentos** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o **afastamento** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir os **afastamentos** dos quatro pontos sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

#### Representação do plano de perfil que contém o quadrado:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , a perspectiva de um ponto, que é o ponto do eixo  $X$  que tem 3 cm de abscissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém o quadrado, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de abscissa, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por pela perspectiva desse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) e  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ).

Note que  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$  com afastamento nulo – é necessariamente paralelo ao eixo  $Z$ . Pelo seu lado,  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$ , com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ). Por isso mesmo, o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ) contém as projeções frontais dos quatro vértices do quadrado ( $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ ).

#### Determinação da direção de afinidade:

O enunciado refere expressamente o recurso à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer *plano coordenado* para o *plano axonométrico*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater um dos dois *planos coordenados* ortogonais ao *plano axonométrico* (o plano  $XY$  ou o plano  $XZ$ ) e, dessa forma, representar os quatro pontos através de quaisquer duas das respetivas três projeções (em Dupla Projeção Ortogonal, independentemente das duas projeções escolhidas).

Tendo em conta que já temos a projeção frontal de cada um dos quatro pontos, optou-se por rebater o *plano coordenado XY* (o *plano coordenado horizontal*) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projeção Ortogonal já estudada e, assim, representar os quatro pontos em Dupla Projeção Ortogonal, pelas respetivas projeções horizontais e frontais.

Ao rebater o plano  $XY$  sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é o eixo  $X$ , que se identificou imediatamente. O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Z$ , facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XY$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY* com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Em seguida, prolongaram-se as linhas de chamada dos quatro pontos (para baixo do eixo  $X$ ) e determinaram-se as respetivas projeções horizontais, em rebatimento (em função dos respetivos afastamentos, em verdadeira grandeza) –  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$ ,  $C_{1r}$  e  $D_{1r}$  são as projeções horizontais dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , respetivamente, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). Em seguida, representou-se o traço horizontal do plano  $\pi$  em rebatimento –  $h_{\pi r}$ . O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal, pelo que projeta todas as suas retas e pontos no plano  $XY$ , sobre o seu traço horizontal. Assim, o traço horizontal do plano  $\pi$ , em rebatimento ( $h_{\pi r}$ ), passa necessariamente pelas projeções horizontais dos quatro pontos, em rebatimento. Salienta-se que o traço horizontal do plano  $\pi$  em rebatimento ( $h_{\pi r}$ ) fica coincidente com o traço frontal do plano ( $f_\pi$ ), o que se identificou imediatamente –  $h_{\pi r} \equiv f_\pi$ .

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Y_r'$ , o afastamento dos pontos  $B$  e  $C$ , a partir de  $B_{1r} \equiv C_{1r}$ , com uma paralela ao eixo  $X$  – note que  $B$  e  $C$  são os pontos de maior afastamento, o que nos permite um maior rigor dos traçados. Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $Y_r'$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Y$  com o afastamento dos pontos  $B$  e  $C$  ( $\overline{OP_r'}$  é o afastamento dos pontos  $B$  e  $C$ , no eixo  $Y_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XY$ ).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XY* (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto **P** (que é 7 cm) para o eixo **Y<sub>r</sub>**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Y**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto **P<sub>r</sub>** é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, enquanto o ponto **P<sub>r</sub>'** era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XY**.

A inclinação das projetantes é de 60°, pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o plano *axonométrico*, é um ângulo de 60° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Y** e é ortogonal ao plano *axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Y**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **Y** (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **Y** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **Y**).

O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento dos pontos **B** e **C** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento dos pontos **B** e **C**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>'** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação das perspectivas dos pontos B e C:*

As projeções do ponto **C** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **C** – a linha de chamada do ponto **C** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **C<sub>1</sub>**, outro extremo em **C<sub>2</sub>** e um vértice no eixo **X**. Tendo em conta que o ponto **C** é um ponto do plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém o quadrado), a linha de chamada do ponto **C** está sobre os traços do plano  $\pi$ , pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante.

**No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **C** que está contida no plano **XY** está contida em **h<sub>π</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **C** está contida em **h<sub>πr</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi$  rebatido). **Em perspectiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **C** (a parte que se situa no plano **XY**) está sobre a perspectiva de **h<sub>π</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) e é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$  (**h<sub>π</sub>**), que é concorrente com **f<sub>π</sub>** (o traço frontal do plano  $\pi$ ) no eixo **X** e é paralela à perspectiva do eixo **Y**. Em seguida, por **C<sub>1r</sub>**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$  (**h<sub>π</sub>**) é **C<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XY**.

Tendo em conta que os pontos **B** e **C** se situam na mesma reta projetante horizontal (o lado **[BC]** do quadrado é vertical), os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes – assim, tem-se, imediatamente, **B<sub>1</sub> ≡ C<sub>1</sub>**. Salienta-se que as perspectivas das projeções horizontais dos dois pontos (**B** e **C**) se situam sobre a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$  (**h<sub>π</sub>**), pois o plano  $\pi$  é um plano duplamente projetante.

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto **C** determinou-se a perspectiva de **C<sub>3</sub>**, a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **C<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **C<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**. Efetuou-se um procedimento idêntico para o ponto **B**, o que nos permitiu determinar **B<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **B**).

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **C**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **C<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **C<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **C<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersejam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **C** são dois vértices espacialmente opostos.

Recorrendo a um procedimento idêntico ao atrás exposto, para o ponto **C**, determinou-se a perspectiva propriamente dita ponto **B**.

*Determinação das perspectivas dos pontos A e D, a partir da direção de afinidade:*

As perspectivas dos pontos **A** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas dos pontos **B** e **C**.

*Determinação das perspectivas do quadrado:*

Por fim, desenharam-se as perspectivas do quadrado. O paralelogramo **[ABCD]** é a perspectiva propriamente dita do quadrado. O paralelogramo **[A<sub>3</sub>B<sub>3</sub>C<sub>3</sub>D<sub>3</sub>]** é a perspectiva da projeção lateral do quadrado. O segmento de reta **[B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]** é a perspectiva da projeção frontal do quadrado. O segmento de reta **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** é a perspectiva da projeção horizontal do quadrado. Tenha em conta que, nesta situação, não existe qualquer invisibilidade a assinalar, pois nenhuma das projeções do quadrado está oculta pela figura.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do quadrado **[ABCD]** representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. O plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém o quadrado), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e frontal) do plano se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo **Y<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d**, do arco de transporte do afastamento do ponto **P** para o rebatimento do plano projetante do eixo **Y** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XY**, à inversão do seu rebatimento e à representação dos pontos em Dupla Projeção Ortogonal.



## 1184.

a) Tendo em conta que a diagonal **[AC]** é de topo, o ponto **C** tem a mesma abcissa e a mesma cota que o ponto **A** – o ponto **C** tem, assim, **3 cm de abcissa e 2 cm de cota**. Por outro lado, a diagonal **[AC]** mede 6 cm (o comprimento das diagonais), pelo que o afastamento do ponto **C** é 6 cm superior ao afastamento do ponto **A** – o ponto **C** tem, assim, **8 cm de afastamento** ( $2 + 6 = 8$ ). Nesse sentido, as coordenadas do ponto **C** são (3; 8; 2).

O quadrado **[ABCD]** (a base da pirâmide) está contido num plano horizontal (de nível) com 2 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **C**), pelo que os pontos **B** e **D** têm necessariamente **2 cm de cota** (todos os pontos de um plano horizontal têm a mesma cota). Uma vez que a diagonal **[AC]** do quadrado é de topo (paralela ao eixo **Y**), a outra diagonal (a diagonal **[BD]**), porque é perpendicular à diagonal **[AC]** e está contida num plano horizontal (de nível), é necessariamente fronto-horizontal (paralela ao eixo **X**). Por outro lado, as duas diagonais do quadrado bissectam-se reciprocamente (são concorrentes num ponto que é o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio da diagonal **[AC]** tem necessariamente 5 cm de afastamento (a média aritmética dos afastamentos dos pontos **A** e **C**). Nesse sentido, os pontos **B** e **D** têm necessariamente **5 cm de afastamento**. Por outro lado, a diagonal **[BD]** mede 6 cm (é dado, no enunciado, o comprimento das diagonais).

Tendo em conta que o ponto **B** é o vértice de menor abcissa do quadrado (como o enunciado refere expressamente), a sua abcissa é 3 cm inferior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 3 cm) – nesse sentido, o ponto **B** tem **abcissa nula**. As coordenadas do ponto **B** são (0; 5; 2).

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto **D** é o vértice de maior abcissa do quadrado (por oposição ao vértice **B**), a sua abcissa é 3 cm superior à abcissa dos pontos **A** e **C** (que é 3 cm) – nesse sentido, o ponto **D** tem **6 cm de abcissa**. As coordenadas do ponto **D** são (6; 5; 2).

Por fim, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o vértice da pirâmide e o plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 8 cm de altura e a sua base tem 2 cm de cota, o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem **10 cm de cota** ( $2 + 8 = 10$ ). Por outro lado, tratando-se de uma **pirâmide regular**, que é uma pirâmide reta, o seu vértice situa-se na mesma projetante horizontal do centro da base (o ponto médio das duas diagonais).

O ponto médio das duas diagonais tem a abcissa dos pontos **A** e **C**, que é 3 cm – o ponto **V** tem, assim, **3 cm de abcissa**. O ponto médio das diagonais tem o afastamento dos pontos **B** e **D**, que é 5 cm – o ponto **V** tem, assim, **5 cm de afastamento**. Dessa forma, as coordenadas do ponto **V** são (3; 5; 10).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

## b) Dados:

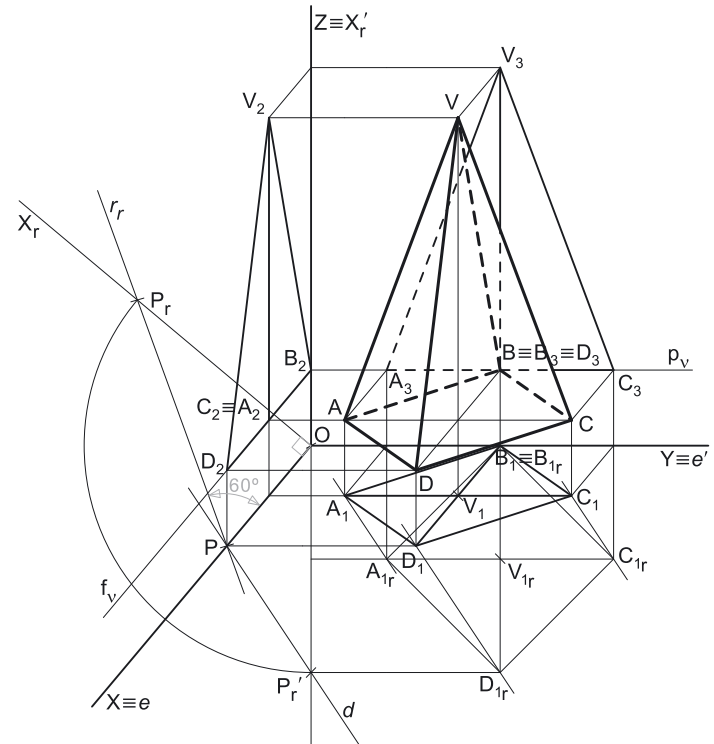
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **Y** e ao eixo **Z**, conclui-se que o plano axonométrico é o plano **YZ** – nesse sentido, o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $130^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de  $140^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

## Resolução:

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **YZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **Y** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza. Por outro lado, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** do plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide e do vértice da pirâmide (2 cm e 10 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. A partir dos afastamentos e das cotas dos cinco pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções laterais – **A<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**, **B<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **B**, **C<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**, **D<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **D** e **V<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **V**.

Salienta-se que o ponto **B** tem abcissa nula (é um ponto do plano coordenado **YZ**), pelo que **B<sub>1</sub>** (a sua projeção horizontal) se situa necessariamente no eixo **Y** e **B<sub>2</sub>** (a sua projeção frontal) se situa necessariamente no eixo **Z**. Nesse sentido, e porque o ponto **B** é um ponto do plano coordenado **YZ**, o ponto está coincidente com a sua projeção lateral, pelo que se tem, imediatamente, **B = B<sub>3</sub>** (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por outro lado, no que respeita ao eixo  $X$  (onde se medem as **abcissas** dos cinco pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as **abcissas** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **abscissa** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **abcissas** dos cinco pontos sobre a perspetiva do eixo  $X$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre o eixo  $Z$ , um ponto com 2 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ), sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de cota, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $v - f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a perspetiva de  $f_v$  é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abscissa nula –  $p_v$  é necessariamente paralelo ao eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ou de perfil ( $p_v$ ). Por isso mesmo, o traço lateral do plano  $v$  ( $p_v$ ) contém as projeções laterais dos quatro vértices do quadrado ( $A_3, B_3, C_3$  e  $D_3$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ).

*Determinação da direção de afinidade:*

O enunciado refere expressamente o recurso à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer *plano coordenado* para o *plano axonométrico*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater um dos dois *planos coordenados* ortogonais ao *plano axonométrico* (o plano  $XY$  ou o plano  $XZ$ ) e, dessa forma, representar os cinco pontos através de quaisquer duas das respetivas três projeções (em Dupla Projeção Ortogonal, independentemente das duas projeções escolhidas).

Tendo em conta que já temos a projeção lateral de cada um dos cinco pontos, optou-se por rebater o *plano coordenado XY* (o *plano coordenado horizontal*) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projeção Ortogonal já estudada e, assim, representar os cinco pontos em Dupla Projeção Ortogonal, pelas respetivas projeções horizontais e laterais.

Ao rebater o plano  $XY$  sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é o eixo  $Y$ , que se identificou imediatamente. O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Z$ , facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv X_r'$ . O eixo  $X_r'$  é o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XY$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY* com a notação  $X_r'$ , optando-se por manter a notação  $X_r$  para o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Em seguida, prolongaram-se as linhas de chamada dos cinco pontos (para baixo do eixo  $X$ ) e determinaram-se as respetivas projeções horizontais, em rebatimento (em função dos respetivos afastamentos, em verdadeira grandeza) –  $A_{1r}, C_{1r}, D_{1r}$  e  $V_{1r}$  são as projeções horizontais dos pontos  $A, C, D$  e  $V$ , respetivamente, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). Este procedimento permitiu-nos construir a projeção horizontal da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). Note que  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ ) é um ponto da charneira do rebatimento (que é o eixo  $Y$ ), pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $B_{1r} \equiv B_1$ .

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $X_r'$ , a abscissa do ponto  $D$ , a partir de  $D_{1r}$ , com uma paralela ao eixo  $Y$  – note que  $D$  é o ponto de maior abscissa, o que nos permite um maior rigor dos traçados. Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $X_r'$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $X$  com a abscissa do ponto  $D$  ( $\overline{OP_r'}$  é a abscissa do ponto  $D$ , no eixo  $X_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XY$ ).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XY* (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $X$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  para o *plano axonométrico* (o plano  $YZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $X$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $X$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo  $X$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **abscissa** do ponto  $P$  (que é 6 cm) para o eixo  $X_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $X$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a abscissa do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ , enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto  $P$  (o mesmo ponto  $P$ ) rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY*.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inclinação das projetantes é de  $60^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $60^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo  $X$  e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $X$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $X$  (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $X$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $X$ ).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto  $D - \overline{OP}$  é a perspectiva da abscissa do ponto  $D$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XY$  e determinação das perspectivas do ponto  $D$ :*

As projeções do ponto  $D$  (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $D$  – a linha de chamada do ponto  $D$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $D_1$ , outro extremo em  $D_3$  e um vértice no eixo  $Y$ . **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto  $D$  que está contida no plano  $XY$  é o segmento de reta perpendicular ao eixo  $Y$  e que tem um extremo em  $D_1$  e o outro extremo no eixo  $Y$ . **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto  $D$  é o segmento que é perpendicular ao eixo  $Y$  e que tem um extremo em  $D_{1r}$  e o outro extremo no eixo  $Y$ . **Em perspectiva**, essa parte da linha de chamada do ponto  $D$  (a parte que se situa no plano  $XY$ ) é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$  e tem um extremo no eixo  $Y$ .

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspectiva** da parte da linha de chamada do ponto  $D$  que se situa no plano  $XY$  (e que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ). Em seguida, por  $D_{1r}$  conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto  $D$  (anteriormente desenhada) é  $D_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $D$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XY$ .

A partir das perspectivas da abscissa e da cota do ponto  $D$  determinou-se a perspectiva de  $D_2$ , a sua projeção frontal (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que  $D_2$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $D_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $D$  e situa-se sobre  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $D$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $D_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $D$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $D_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $D$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $D_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $D$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseçam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $D$  são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas dos pontos  $A$ ,  $C$  e  $V$ , a partir da direção de afinidade:*

As perspectivas dos pontos  $A$ ,  $C$  e  $V$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $D$ .

Os pontos  $A$  e  $C$  situam-se na mesma reta de topo (que é uma reta projetante frontal), pelo que os dois pontos têm as suas projeções frontais coincidentes – assim, tem-se, imediatamente,  $A_2 \equiv B_2$ . Por outro lado, os pontos  $B$  e  $D$  situam-se na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), pelo que os dois pontos têm as suas projeções laterais coincidentes – assim, tem-se, imediatamente,  $B_3 \equiv D_3$ .

*Determinação das perspectivas da pirâmide:*

Por fim, desenhou-se a **perspectiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada  $[AVCD]$ . Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice  $B$ . Este, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base, e a aresta lateral  $[BV]$ ). Por outro lado, a aresta lateral  $[DV]$  é **visível**, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais  $[ADV]$  e  $[CDV]$ .

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspectiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero  $[A_1B_1C_1D_1]$ . Todas as arestas da pirâmide são visíveis, em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção horizontal da pirâmide que esteja oculta pela pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção horizontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** a assinalar.

A **perspectiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[B_2V_2D_2]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção frontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção frontal. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção frontal da pirâmide que esteja oculta pela pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** a assinalar.

A **perspectiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo  $[A_3V_3C_3]$ . Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção lateral. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção lateral. No entanto, existe uma parte da projeção lateral da pirâmide que é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Traçado:

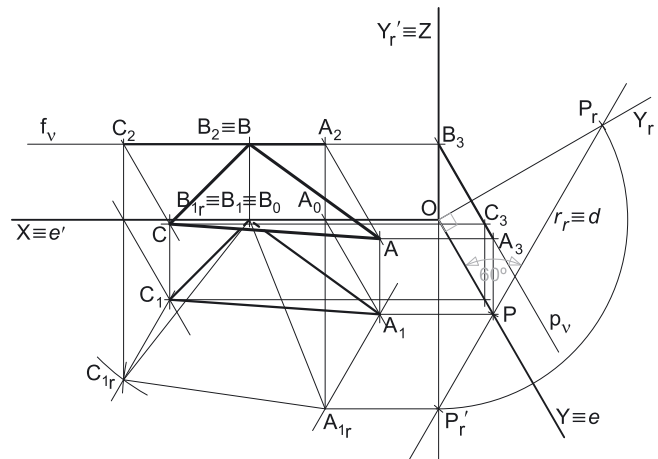
As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano  $v$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (frontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo  $X_r$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$ , do arco de transporte da abscissa do ponto **P** para o rebatimento do plano projetante do eixo **X** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XY**, à inversão do seu rebatimento e à representação dos pontos e da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal.

## 1185.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de  $120^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $150^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar as abscissas do ponto **A** (5 cm) e do ponto **B** (3 cm) sobre o eixo **X** (em verdadeira grandeza), bem como a cota daqueles pontos (2 cm) sobre o eixo **Z** (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato,  $A_2$  e  $B_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), bem como  $A_0$  e  $B_0$  (as referências das abscissas dos dois pontos, no eixo **X**). Note que o eixo **X** e o eixo **Z** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.



Salienta-se que o ponto **B** tem afastamento nulo (é um ponto do *plano coordenado XZ*), pelo que  $B_1$  (a sua projeção horizontal) se situa necessariamente no eixo **X** e  $B_3$  (a sua projeção lateral) se situa no eixo **Z**. Por outro lado, e ainda porque o ponto **B** é um ponto do *plano coordenado XZ*, o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, pelo que se tem, imediatamente,  $B \equiv B_2$  (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém o triângulo), pelos seus traços. O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Nesse sentido, desenhou-se  $f_v$ , o traço frontal do plano  $v$  –  $f_v$  passa por  $A_2$  e por  $B_2$ , pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Note que  $f_v$  é uma reta fronto-horizontal do plano, com afastamento nulo.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço lateral do plano  $v$  ( $p_v$ ), que é paralela à perspectiva do eixo **Y** e é concorrente com  $f_v$ , no eixo **Z** –  $f_v$  é uma reta de topo do plano  $v$  com abscissa nula. Salienta-se que o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

### Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (um plano horizontal) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o triângulo **[ABC]** **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao *plano coordenado horizontal* (o plano **XY**), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY* – o triângulo **[ABC]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no *plano coordenado XY*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

#### Rebatimento do plano XY e construção da projeção horizontal do triângulo **[ABC]**, em verdadeira grandeza:

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano **XY** para o *plano axonométrico*, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo **X**. O eixo **Y** rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo **Z**, facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do plano **XY**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XY** com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY* com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano **XY** rebatido, representaram-se as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, em rebatimento, em função dos seus afastamentos. Assim,  $A_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto **A** (em rebatimento), situa-se 5 cm (o afastamento do ponto **A**) abaixo do eixo **X**, na sua linha de chamada (que passa por  $A_2$  e é perpendicular ao eixo **X**). Por outro lado, uma vez que a projeção horizontal do ponto **B** ( $B_1$ ) se situa na charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), trata-se de um ponto fixo (roda sobre si própria), pelo que se tem, imediatamente,  $B_{1r} \equiv B_1 \equiv B_0$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir de  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do triângulo**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $C_{1r}$  (a projeção horizontal do terceiro vértice do polígono) – o triângulo  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}]$  é a projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ . Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro, como o enunciado pede expressamente

Para determinar a perspectiva do triângulo  $[ABC]$  é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ ).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Y_r$ , o afastamento do ponto  $A$ , a partir de  $A_{1r}$ , com uma paralela ao eixo  $X$ . Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $Y_r$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Y$  com o afastamento do ponto  $A$  ( $\overline{OP_r'}$  é o afastamento do ponto  $A$ , no eixo  $Y_r$ , pelo rebatimento do plano  $XY$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto  $P$  (que é 5 cm) para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Y$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ , enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto  $P$  (o mesmo ponto  $P$ ) rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY*.

A inclinação das projetantes é de  $60^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $60^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo  $Y$  e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Y$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Y$  (que é a charneira  $e$ , por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Y$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Y$ ).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto  $A$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento do ponto  $A$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ ). Salienta-se que, **nesta situação particular**, a reta  $d$  fica coincidente com a reta  $r_r$ , mas trata-se de uma **casualidade deste exercício**, em função da direção e da inclinação das projetantes.

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação das perspectivas do ponto A:*

As projeções do ponto  $A$  (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $A$  – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $A_1$ , outro extremo em  $A_2$  e um vértice no eixo  $X$  (em  $A_0$ ). A parte da linha de chamada do ponto  $A$  que está contida no plano  $XY$  é o segmento  $[A_0A_1]$  – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento  $[A_0A_{1r}]$ . A perspectiva desse segmento tem um extremo em  $A_0$  e é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta  $[A_0A_1]$ . Em seguida, por  $A_{1r}$  conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto  $A$  (a reta suporte do segmento  $[A_0A_1]$ ) é  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ).

Em seguida, por  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto  $A$ , que é vertical (paralela ao eixo  $Z$ ). Depois, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ .

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto  $A$  determinou-se a perspectiva de  $A_3$ , a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que  $A_3$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

*Determinação das perspectivas do ponto C:*

As perspectivas do ponto  $C$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto  $A$ .

*Determinação das perspectivas do triângulo:*

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo  $[ABC]$  é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo  $[A_1B_1C_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O segmento de reta  $[A_2C_2]$  é a perspectiva da projeção frontal do triângulo (que se situa sobre  $f_v$ , pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal). O segmento de reta  $[A_3B_3]$  é a perspectiva da projeção lateral do triângulo (que se situa sobre  $p_v$ , pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se que existe uma ínfima parte da projeção horizontal do triângulo é invisível (por estar oculta pelo próprio triângulo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

## Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (com as invisibilidades referidas). As perspetivas dos traços (frontal e lateral) do plano  $v$  (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção horizontal do triângulo, em rebatimento, do eixo  $Y_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$  e, ainda dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XY**.

## 1186.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com as partes positivas do eixo **X** e do eixo **Y**, ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

- a) De acordo com o enunciado, é pedida a direção  $d$ , que é **direção de afinidade** que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XZ**. Assim, em primeiro lugar, há que rebater o plano coordenado **XZ** para o plano axonométrico (o plano **XY**). Ao rebater o plano **XZ** sobre o plano axonométrico, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é o eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Z** rebatido (o eixo  $Z_r'$ ) fica coincidente com o eixo **Y**, facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv Z_r'$ . O eixo  $Z_r'$  é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **XZ**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XZ** com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ** com a notação  $Z_r'$ , optando-se por manter a notação  $Z_r$  para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Sobre o eixo  $Z_r'$  marcou-se um ponto  $P_r'$ , qualquer – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com uma determinada cota ( $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano **XZ**). Tendo em conta que a **direção de afinidade**  $d$  é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano coordenado **XZ**, a **direção de afinidade**  $d$  é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**  $d$ .

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o plano axonométrico (o plano **XY**). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo **Z**).

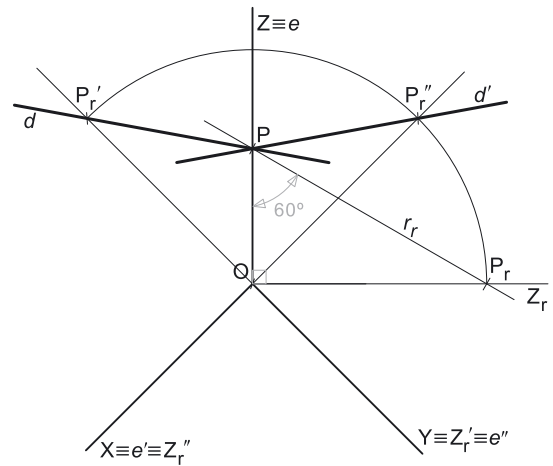
Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a cota do ponto **P** para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note que  $P_r$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Z**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ**.

A inclinação das projetantes é de  $60^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, no espaço, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $60^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Z** e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspetiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspetiva do eixo **Z** (que é a charneira  $e$ , e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspetiva do eixo **Z** é a perspetiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspetiva do eixo **Z**).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva da cota do ponto **P** –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da cota do ponto **P**.

A **direção de afinidade**  $d$  relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto **P** (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** pedida – a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**.



(continua na página seguinte)







(continuação da página anterior)

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **cota** do ponto **P** para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Z**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $40^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ**.

A inclinação das projetantes é de  $40^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $40^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Z** e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo **Z** (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo **Z** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo **Z**).

O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspectiva da cota do ponto **P** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota do ponto **P**.

A **direção de afinidade d** relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** pedida – a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**.

- b) De acordo com o enunciado, é pedida a direção **d'**, que é **direção de afinidade** que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **YZ**. Assim, em primeiro lugar, há que rebater o plano coordenado **YZ** para o plano axonométrico (o plano **XY**). Ao rebater o plano **YZ** sobre o plano axonométrico, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é o eixo **Y**, que se identificou imediatamente. O eixo **Z** rebatido (o eixo  $Z_r''$ ) fica coincidente com o eixo **X**, facto que se assinalou devidamente –  $X \equiv Z_r''$ . O eixo  $Z_r''$  é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **YZ**.

Sobre o eixo  $Z_r''$  há que representar um ponto qualquer, com uma determinada cota. Tendo em conta os procedimentos da alínea anterior, optou-se por recorrer ao mesmo ponto **P** da alínea anterior. Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r''} = \overline{OP}$ , transportou-se a **cota** do ponto **P** para o eixo  $Z_r''$ , determinando-se o ponto  $P_r''$  – note  $P_r''$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Z**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano coordenado **YZ**). Assim,  $\overline{OP_r''}$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano coordenado **YZ**. Note que, nesta situação, o arco de transporte do afastamento do ponto **P** já tinha sido desenhado (na alínea anterior), pelo que  $P_r''$  é, na realidade, o ponto em que o eixo  $Z_r''$  interseca o arco de circunferência desenhado na alínea anterior.

Sublinha-se que o ponto  $P_r''$  é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **YZ**, enquanto o ponto  $P_r$  era o ponto **P** rebatido pelo plano projetante do eixo **Z** e  $P_r'$  era o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ**.

Tendo em conta que a **direção de afinidade d'** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **YZ**, a **direção de afinidade d'** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade d'**. No entanto, de acordo com os procedimentos expostos na alínea anterior, o coeficiente de deformação do eixo **Z** já foi determinado.

De facto, o segmento **[OP]** (determinado na alínea anterior) é o segmento representativo da perspectiva da cota do ponto **P** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota do ponto **P**.

A **direção de afinidade d'** relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r''$  e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d'**) é a **direção de afinidade** pedida – a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **YZ**.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é duas direções de afinidade (a direção **d** e a direção **d'**), pelo que aquelas duas linhas se representaram a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo  $Z_r$ , da reta  $r_r$  e, ainda do arco que nos permitiu transportar o afastamento do ponto **P** para todos os rebatimentos efetuados.

## 1188.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $120^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Y$ , um ângulo de  $150^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

**Resolução:**

As coordenadas do ponto  $A$  medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** do ponto  $A$  mede-se no eixo  $X$ , o **afastamento** do ponto  $A$  mede-se no eixo  $Y$  e a **cota** do ponto  $A$  no eixo  $Z$ . Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$ , dois dos eixos coordenados estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $A$  (4 cm) em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $A_0$ . De forma semelhante, sobre o eixo  $Y$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto  $A$  (4 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e do afastamento do ponto  $A$  foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$  –  $A_1$ .

Já no que respeita ao eixo  $Z$  (onde se mede a cota do ponto  $A$ ), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que a **cota** do ponto  $A$  não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **cota** é a coordenada do ponto  $A$  que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir a **cota** do ponto  $A$  sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

**Determinação da direção de afinidade:**

O enunciado refere expressamente o recurso à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer *plano coordenado* para o *plano axonométrico*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater um dos dois *planos coordenados* ortogonais ao *plano axonométrico* (o plano  $XZ$  ou o plano  $YZ$ ) e, dessa forma, representar o ponto  $A$  através de quaisquer duas das suas três projeções (em Dupla Projeção Ortogonal, independentemente das duas projeções escolhidas).

Tendo em conta que já temos a projeção horizontal do ponto  $A$ , optou-se por rebater o *plano coordenado*  $XZ$  (o *plano coordenado* frontal) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projeção Ortogonal já estudada e, assim, representar o ponto  $A$  pelas suas duas projeções – a sua projeção horizontal e a sua projeção frontal.

Ao rebater o plano  $XZ$  sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é o eixo  $X$ , que se identificou imediatamente. O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Y$ , facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv Z_r'$ . O eixo  $Z_r'$  é o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XZ$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XZ$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado*  $XZ$  com a notação  $Z_r'$ , optando-se por manter a notação  $Z_r$  para o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

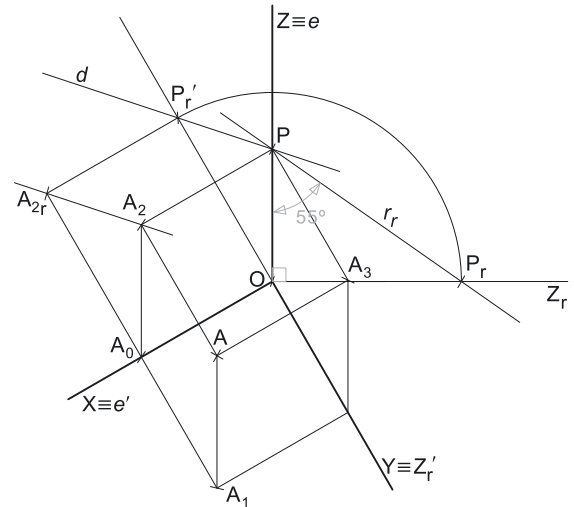
Sobre o eixo  $Z_r'$  mediu-se a **cota** do ponto  $A$ , em verdadeira grandeza (5 cm), o que nos permitiu determinar um ponto  $P_r'$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota afastamento do ponto  $A$  ( $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto  $A$ , em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano  $XZ$ ). Em seguida, transportou-se a cota do ponto  $A$  para a linha de chamada do ponto  $A$  (que se prolongou para cima do eixo  $X$  e perpendicular ao eixo  $X$ ), o que nos permitiu determinar  $A_{2r}$  –  $A_{2r}$  é a projeção frontal do ponto  $A$ , em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado*  $XZ$ ).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado*  $XZ$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Z$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **cota** do ponto  $P$  (que é 5 cm) para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Z$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ , enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto  $P$  (o mesmo ponto  $P$ ) rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado*  $XZ$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inclinação das projetantes é de  $55^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $55^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo  $Z$  e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Z$  (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Z$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Z$ ).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva dacota do ponto  $A - \overline{OP}$  é a perspectiva da cota do ponto  $A$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XZ$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XZ$  e determinação das perspectivas do ponto  $A$ :*

As projeções do ponto  $A$  (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $A$  – a linha de chamada do ponto  $A$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $A_1$ , outro extremo em  $A_2$  e um vértice no eixo  $X$  (em  $A_0$ ). A parte da linha de chamada do ponto  $A$  que está contida no plano  $XZ$  é o segmento  $[A_0A_2]$  – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento  $[A_0A_{2r}]$ . A perspectiva desse segmento tem um extremo em  $A_0$  e é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta  $[A_0A_2]$ . Em seguida, por  $A_{2r}$  conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta intersesta a perspectiva da linha de chamada do ponto  $A$  (a reta suporte do segmento  $[A_0A_{2r}]$ ) é  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XZ$ .

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto  $A$  determinou-se a perspectiva de  $A_3$ , a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que  $A_3$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $A_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $A_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $A_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas intersestam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $A$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo  $Z_r$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$ , do arco de transporte da cota do ponto  $A$  para o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $XZ$ , à inversão do seu rebatimento e à representação do ponto  $R$  em Dupla Projeção Ortogonal.

## 1189.

### Dados:

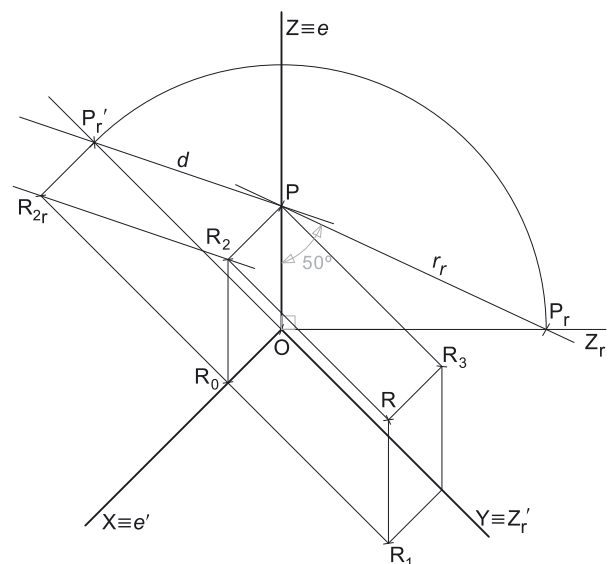
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo  $Z$  se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo  $X$  e do eixo  $Y$ , ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

### Resolução:

As coordenadas do ponto  $R$  medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** do ponto  $R$  mede-se no eixo  $X$ , o **afastamento** do ponto  $R$  mede-se no eixo  $Y$  e a **cota** do ponto  $R$  no eixo  $Z$ . Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$ , dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $R$  (2 cm) em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $R_0$ . De forma semelhante, sobre o eixo  $Y$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto  $R$  (6 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e do afastamento do ponto  $R$  foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $R - R_1$ .

Já no que respeita ao eixo  $Z$  (onde se mede a cota do ponto  $R$ ), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que a **cota** do ponto  $R$  não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **cota** é a coordenada do ponto  $R$  que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir a **cota** do ponto  $A$  sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Determinação da direção de afinidade:**

O enunciado refere expressamente o recurso à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer *plano coordenado* para o *plano axonométrico*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater um dos dois *planos coordenados* ortogonais ao *plano axonométrico* (o plano **XZ** ou o plano **YZ**) e, dessa forma, representar o ponto **R** através de quaisquer duas das suas três projeções (em Dupla Projeção Ortogonal, independentemente das duas projeções escolhidas).

Tendo em conta que já temos a projeção horizontal do ponto **R**, optou-se por rebater o *plano coordenado XZ* (o *plano coordenado frontal*) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projeção Ortogonal já estudada e, assim, representar o ponto **R** pelas suas duas projeções – a sua projeção horizontal e a sua projeção frontal.

Ao rebater o plano **XZ** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é o eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>'**) fica coincidente com o eixo **Y**, facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv Z_r'$ . O eixo **Z<sub>r</sub>'** é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **XZ**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XZ** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XZ* com a notação **Z<sub>r</sub>'**, optando-se por manter a notação **Z<sub>r</sub>** para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Sobre o eixo **Z<sub>r</sub>'** mediu-se a **cota** do ponto **R**, em verdadeira grandeza (7 cm), o que nos permitiu determinar um ponto **P<sub>r</sub>'** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota afastamento do ponto **R** ( $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto **R**, em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano **XZ**). Em seguida, transportou-se a cota do ponto **R** para a linha de chamada do ponto **R** (que se prolongou para cima do eixo **X** e perpendicular ao eixo **X**), o que nos permitiu determinar **R<sub>2r</sub> – R<sub>2r</sub>'** é a projeção frontal do ponto **R**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XZ*).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XZ* (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z<sub>r</sub>** está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **Z**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **cota** do ponto **P** (que é 7 cm) para o eixo **Z<sub>r</sub>**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Z**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). Assim,  $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 65°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto **P<sub>r</sub>** é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, enquanto o ponto **P<sub>r</sub>'** era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XZ*.

A inclinação das projetantes é de 65°, pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 65° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Z** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **Z** (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **Z** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **Z**).

O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspectiva da cota do ponto **R** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota do ponto **A**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>'** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**).

**Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação das perspectivas do ponto R:**

As projeções do ponto **R** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **R** – a linha de chamada do ponto **R** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **R<sub>1</sub>**, outro extremo em **R<sub>2</sub>** e um vértice no eixo **X** (em **R<sub>0</sub>**). A parte da linha de chamada do ponto **R** que está contida no plano **XZ** é o segmento **[R<sub>0</sub>R<sub>2</sub>]** – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento **[R<sub>0</sub>R<sub>2</sub>']**. A perspectiva desse segmento tem um extremo em **R<sub>0</sub>** e é paralela à perspectiva do eixo **Z**.

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta **[R<sub>0</sub>R<sub>2</sub>]**. Em seguida, por **R<sub>2r</sub>**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto **R** (a reta suporte do segmento **[R<sub>0</sub>R<sub>2</sub>]**) é **R<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **R**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XZ**.

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto **R** determinou-se a perspectiva de **R<sub>3</sub>**, a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **R<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **R<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **R**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **R**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **R**<sub>1</sub>, a perspectiva da reta projetante horizontal de **R** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **R**<sub>2</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **R** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **R**<sub>3</sub> conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **R** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **R**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **R** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo **Z**, da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$ , do arco de transporte da cota do ponto **A** para o rebatimento do plano projetante do eixo **Z** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XZ**, à inversão do seu rebatimento e à representação do ponto **R** em Dupla Projeção Ortogonal.

## 1190.

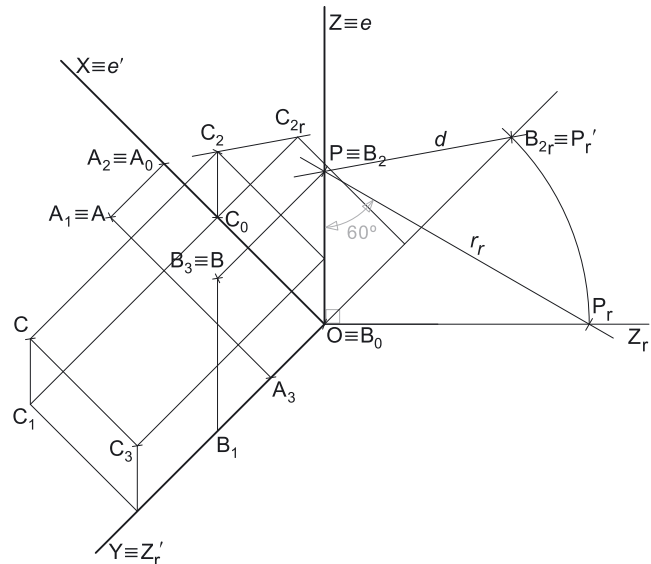
#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano *axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no plano *axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 45° (que é um ângulo agudo) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 135° (que é um ângulo obtuso).

#### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abcissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o plano *axonométrico* é o plano **XY**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano *axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos três pontos (4 cm e 6 cm) em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar **A**<sub>0</sub>, **B**<sub>0</sub> e **C**<sub>0</sub> (salienta-se que o ponto **B** tem abcissa nula, pelo que se tem, imediatamente, **O** ≡ **B**<sub>0</sub>). De forma semelhante, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos (2 cm, 4 cm e 7 cm) em verdadeira grandeza. A partir das abcissas e dos afastamentos dos três pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos – **A**<sub>1</sub>, **B**<sub>1</sub> e **C**<sub>1</sub>.



Salienta-se que o ponto **A** tem cota nula, pelo que a sua projeção frontal (**A**<sub>2</sub>) se situa necessariamente sobre o eixo **X**, tal como a sua projeção lateral (**A**<sub>3</sub>) se situa no eixo **Y**. De forma semelhante, o ponto **B** tem abcissa nula, pelo que a sua projeção lateral (**B**<sub>3</sub>) se situa necessariamente sobre o eixo **Y**.

Por outro lado, e ainda atendendo ao facto de que o ponto **A** é um ponto do plano **XY** (que é o próprio plano *axonométrico*), a perspectiva propriamente dita do ponto **A** determina-se de forma direta, pois está coincidente com a sua projeção horizontal – tem-se, imediatamente, **A** ≡ **A**<sub>1</sub> (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

Já no que respeita ao eixo **Z** (onde se medem as cotas dos dois pontos restantes – o ponto **B** e o ponto **C**), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano *axonométrico*), pelo que as **cotas** não se projetam em verdadeira grandeza no plano *axonométrico* (a **cota** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **cotas** dos pontos **B** e **C** sobre a perspectiva do eixo **Z**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

#### Determinação da direção de afinidade:

O enunciado refere expressamente o recurso à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer plano coordenado para o plano *axonométrico*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater um dos dois planos coordenados ortogonais ao plano *axonométrico* (o plano **XZ** ou o plano **YZ**) e, dessa forma, representar os três pontos através de quaisquer duas das respetivas três projeções (em Dupla Projeção Ortogonal, independentemente das duas projeções escolhidas).

Tendo em conta que já temos a projeção horizontal de cada um dos três pontos, optou-se por rebater o plano coordenado **XZ** (o plano coordenado frontal) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projeção Ortogonal já estudada e, assim, representar os três pontos em Dupla Projeção Ortogonal, pelas respetivas projeções horizontais e frontais.

Ao rebater o plano **XZ** sobre o plano *axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é o eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z**'<sub>r</sub>) fica coincidente com o eixo **Y**, facto que se assinalou devidamente – **Y** ≡ **Z**'<sub>r</sub>. O eixo **Z**'<sub>r</sub> é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **XZ**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XZ** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ** com a notação **Z<sub>r</sub>'**, optando-se por manter a notação **Z<sub>r</sub>** para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Em seguida, prolongaram-se as linhas de chamada dos pontos **B** e **C** (para cima do eixo **X** e perpendicularmente ao eixo **X**) e determinaram-se as respetivas projeções frontais, em rebatimento – **B<sub>2r</sub>** e **C<sub>2r</sub>** são as projeções frontais dos pontos **B** e **C**, respetivamente, em rebatimento (no rebatimento do plano **XZ**). Note que a linha de chamada do ponto **B** (em rebatimento) é o eixo **Z<sub>r</sub>'**, pois o ponto **B** situa-se no plano **YZ**. Em seguida, mediu-se, no eixo **Z<sub>r</sub>'**, a cota do ponto **B** – note que **B** é o ponto de maior cota, o que nos permite um maior rigor dos traçados.

Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto **P<sub>r</sub>'**, no eixo **Z<sub>r</sub>'** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do ponto **B** ( $\overline{OP_r'}$  é o afastamento do ponto **B**, no eixo **Z<sub>r</sub>'**, pelo rebatimento do plano **XZ**). Note que o ponto **P** é, na realidade, a projeção frontal do ponto **B** (**B<sub>2</sub>**), pelo que se tem **P<sub>r</sub>'**  $\equiv$  **B<sub>2r</sub>**.

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o plano axonométrico (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z<sub>r</sub>** está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **Z**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a cota do ponto **P** (que é 7 cm) para o eixo **Z<sub>r</sub>**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Z**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto **P<sub>r</sub>** é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, enquanto o ponto **P<sub>r</sub>'** era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ**.

A inclinação das projetantes é de 60°, pelo que o ângulo que a reta **r** faz, no espaço, com o plano axonométrico, é um ângulo de 60° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Z** e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do ângulo entre uma reta e um plano) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **Z** (que é a charneira **e**, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **Z** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **Z**).

O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspectiva da cota do ponto **B** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota do ponto **B**. Note que se assinalou convenientemente que o ponto **P** e a projeção frontal do ponto **B** estão coincidentes – **P**  $\equiv$  **B<sub>2</sub>**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>'** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**).

#### Inversão do rebatimento do plano coordenado **XZ** e determinação das perspectivas do ponto **C**:

As projeções do ponto **C** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **C** – a linha de chamada do ponto **C** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **C<sub>1</sub>**, outro extremo em **C<sub>2</sub>** e um vértice no eixo **X** (em **C<sub>0</sub>**). A parte da linha de chamada do ponto **C** que está contida no plano **XZ** é o segmento **[C<sub>0</sub>C<sub>2</sub>]** – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento **[C<sub>0</sub>C<sub>2r</sub>]**. A perspectiva desse segmento tem um extremo em **C<sub>0</sub>** e é paralela à perspectiva do eixo **Z**.

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta **[C<sub>0</sub>C<sub>2</sub>]**. Em seguida, por **C<sub>2r</sub>**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto **C** (a reta suporte do segmento **[C<sub>0</sub>C<sub>2</sub>]**) é **C<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XZ**.

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto **C** determinou-se a perspectiva de **C<sub>3</sub>**, a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **C<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **C<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **C**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **C<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **C<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **C<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersejam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **C** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas do ponto **B**:

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto **B** determinou-se a perspectiva de **B<sub>3</sub>**, a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **B<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **B<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **B**.

Por fim, atendendo ao facto de que o ponto **B** é um ponto do plano **YZ** (porque tem abcissa nula), a perspectiva propriamente dita do ponto **B** determina-se de forma direta, pois está coincidente com a sua projeção lateral – tem-se, imediatamente, **B**  $\equiv$  **A<sub>3</sub>** (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo **Z<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d**, do arco de transporte da cota do ponto **P** para o rebatimento do plano projetante do eixo **Z** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XZ**, à inversão do seu rebatimento e à representação dos pontos em Dupla Projeção Ortogonal (em rebatimento).

## 1191.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 130° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 140° (que é outro ângulo obtuso).

### Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **XY**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos três pontos (2 cm, 3 cm e 6 cm) em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar **R<sub>0</sub>**, **S<sub>0</sub>** e **T<sub>0</sub>**. De forma semelhante, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos (2 cm, 3 cm e 7 cm) em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e dos afastamentos dos três pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos – **R<sub>1</sub>**, **S<sub>1</sub>** e **T<sub>1</sub>**.

Salienta-se que o ponto **S** tem cota nula (é um ponto do plano **XY**), pelo que a sua projeção frontal (**S<sub>2</sub>**) se situa no eixo **X**, tal como a sua projeção lateral (**S<sub>3</sub>**) se situa no eixo **Y**. Nesse sentido, tem-se, imediatamente, **S<sub>0</sub> ≡ S<sub>2</sub>**.

Por outro lado, e ainda atendendo a que o ponto **S** é um ponto do plano **XY** (que é o próprio plano axonométrico), a perspectiva propriamente dita do ponto **S** determina-se de forma direta, pois está coincidente com a sua projeção horizontal – tem-se, imediatamente, **S ≡ S<sub>1</sub>** (sendo **S** a perspectiva propriamente dita do ponto **S**).

Já no que respeita ao eixo **Z** (onde se medem as cotas dos dois pontos restantes – os pontos **R** e **T**), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que as **cotas** não se projetam em verdadeira grandeza no plano axonométrico (a **cota** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **cotas** dos pontos **R** e **T** sobre a perspectiva do eixo **Z**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

### Determinação da direção de afinidade:

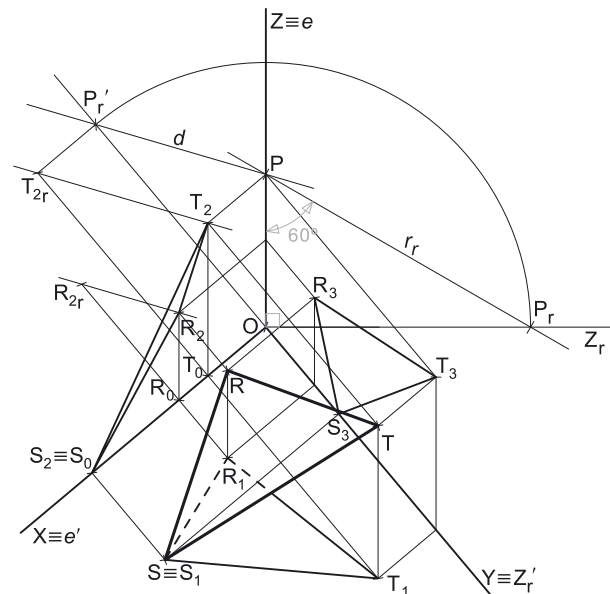
O enunciado refere expressamente o recurso à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer plano coordenado para o plano axonométrico. Assim, em primeiro lugar, há que rebater um dos dois planos coordenados ortogonais ao plano axonométrico (o plano **XZ** ou o plano **YZ**) e, dessa forma, representar os três pontos através de quaisquer duas das respetivas três projeções (em Dupla Projeção Ortogonal, independentemente das duas projeções escolhidas).

Tendo em conta que já temos a projeção horizontal de cada um dos três pontos, optou-se por rebater o plano coordenado **XZ** (o plano coordenado frontal) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projeção Ortogonal já estudada e, assim, representar os três pontos em Dupla Projeção Ortogonal, pelas respetivas projeções horizontais e laterais.

Ao rebater o plano **XZ** sobre o plano axonométrico, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é o eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>'**) fica coincidente com o eixo **Y**, facto que se assinalou devidamente – **Y ≡ Z<sub>r</sub>'**. O eixo **Z<sub>r</sub>'** é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **XZ**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XZ** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ** com a notação **Z<sub>r</sub>'**, optando-se por manter a notação **Z<sub>r</sub>** para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Em seguida, prolongaram-se as linhas de chamada dos três pontos (para cima do eixo **X**) e determinaram-se as respetivas projeções frontais, em rebatimento (em função das respetivas cotas, em verdadeira grandeza) – **R<sub>2r</sub>**, **S<sub>2r</sub>** e **T<sub>2r</sub>**, são as projeções frontais dos pontos **R**, **S** e **T**, respetivamente, em rebatimento (no rebatimento do plano **XZ**). Em seguida, transportou-se, para o eixo **Z<sub>r</sub>'**, a cota do ponto **T**, a partir de **T<sub>2r</sub>**, com uma paralela ao eixo **X** – note que **T** é o ponto de maior cota, o que nos permite um maior rigor dos traçados.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $Z_r'$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota do ponto  $A$  ( $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto  $T$ , no eixo  $Z_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XZ$ ).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XZ$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Z$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o plano axonométrico (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a cota do ponto  $P$  (que é 7 cm) para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Z$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ , enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto  $P$  (o mesmo ponto  $P$ ) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XZ$ .

A inclinação das projetantes é de  $60^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, no espaço, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $60^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo  $Z$  e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do ângulo entre uma reta e um plano) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Z$  (que é a charneira  $e$ , por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Z$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Z$ ).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva da cota do ponto  $T$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota do ponto  $T$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XZ$ ).

#### Inversão do rebatimento do plano coordenado $XZ$ e determinação das perspectivas do ponto $T$ :

As projeções do ponto  $T$  (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $T$  – a linha de chamada do ponto  $T$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $T_1$ , outro extremo em  $T_2$  e um vértice no eixo  $X$  (em  $T_0$ ). A parte da linha de chamada do ponto  $T$  que está contida no plano  $XZ$  é o segmento  $[T_0T_2]$  – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento  $[T_0T_2]$ . A perspectiva desse segmento tem um extremo em  $T_0$  e é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta  $[T_0T_2]$ . Em seguida, por  $T_2$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto  $T$  (a reta suporte do segmento  $[T_0T_2]$ ) é  $T_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $T$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XZ$ .

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto  $T$  determinou-se a perspectiva de  $T_3$ , a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que  $T_3$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $T_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $T$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $T$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $T_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $T$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $T_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $T$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $T_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $T$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseçam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $T$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $T$  são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas do ponto $R$ , a partir da direção de afinidade:

As perspectivas do ponto  $R$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $T$ .

#### Determinação das perspectivas do triângulo:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo  $[RST]$  é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo  $[R_1S_1T_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo  $[R_2S_2T_2]$  é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo  $[R_3S_3T_3]$  é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo – parte da projeção horizontal do triângulo e uma ínfima parte da projeção lateral do triângulo estão ocultas pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do triângulo  $[RST]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades assinaladas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo  $Z_r$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$ , do arco de transporte da cota do ponto  $P$  para o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $XZ$ , à inversão do seu rebatimento e à representação dos pontos em Dupla Projeção Ortogonal.



(continuação da página anterior)

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por isso mesmo, o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ) contém as projeções horizontais dos quatro vértices do retângulo ( $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

#### Determinação da direção de afinidade:

O enunciado refere expressamente o recurso à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer *plano coordenado* para o *plano axonométrico*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater um dos dois *planos coordenados* ortogonais ao *plano axonométrico* (o plano **XZ** ou o plano **YZ**) e, dessa forma, representar os cinco pontos através de quaisquer duas das respetivas três projeções (em Dupla Projeção Ortogonal, independentemente das duas projeções escolhidas).

Tendo em conta que já temos a projeção horizontal de cada um dos quatro pontos, optou-se por rebater o *plano coordenado XZ* (o *plano coordenado frontal*) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projeção Ortogonal já estudada e, assim, representar os quatro pontos em Dupla Projeção Ortogonal, pelas respetivas projeções horizontais e frontais.

Ao rebater o plano **XZ** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é o eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Z** rebatido (o eixo  $Z_r'$ ) fica coincidente com o eixo **Y**, facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv Z_r'$ . O eixo  $Z_r'$  é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **XZ**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XZ** com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XZ* com a notação  $Z_r'$ , optando-se por manter a notação  $Z_r$  para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Em seguida, prolongaram-se as linhas de chamada dos quatro pontos (para cima do eixo **X**) e determinaram-se as respetivas projeções frontais, em rebatimento (em função das respetivas cotas, em verdadeira grandeza) –  $A_{2r}$ ,  $B_{2r}$ ,  $C_{2r}$  e  $D_{2r}$  são as projeções frontais dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**, respetivamente, em rebatimento (no rebatimento do plano **XZ**).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Z_r'$ , a cota dos pontos **B** e **C**, a partir de  $B_{2r} \equiv C_{2r}$ , com uma paralela ao eixo **X** – note que **B** e **C** são os pontos de maior cota do retângulo, o que nos permite um maior rigor dos traçados. Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $Z_r'$  – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota dos pontos **B** e **C** ( $\overline{OP_r'}$  é a cota dos pontos **B** e **C**, no eixo  $Z_r'$ , pelo rebatimento do plano **XZ**).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do *plano coordenado XZ* (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo **Z**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **cota** do ponto **P** (que é 6 cm) para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Z**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de 50°) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XZ*.

A inclinação das projetantes é de 50°, pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 50° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Z** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspetiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspetiva do eixo **Z** (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspetiva do eixo **Z** é a perspetiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspetiva do eixo **Z**).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva da cota dos pontos **B** e **C** –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da cota dos pontos **B** e **C**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto **P** (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**).

#### Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação das perspetivas do ponto B:

As projeções do ponto **B** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **B** – a linha de chamada do ponto **B** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $A_1$ , outro extremo em  $B_2$  e um vértice no eixo **X** (em  $B_0$ ). A parte da linha de chamada do ponto **B** que está contida no plano **XZ** é o segmento  $[B_0B_2]$  – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento  $[B_0B_{2r}]$ . A perspetiva desse segmento tem um extremo em  $B_0$  e é paralela à perspetiva do eixo **Z**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta  $[B_0B_2]$ . Em seguida, por  $B_{2r}$  conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a direção de afinidade) – o ponto em que esta intersesta a perspectiva da linha de chamada do ponto  $B$  (a reta suporte do segmento  $[B_0B_2]$ ) é  $B_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XZ$ .

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto  $B$  determinou-se a perspectiva de  $B_3$ , a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que  $B_3$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $B_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $B$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $B_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $B_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $B_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $B$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas intersestam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $B$  são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas dos pontos A, C e D, a partir da direção de afinidade:*

As perspectivas dos pontos  $A$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $B$ .

*Determinação das perspectivas do retângulo:*

Por fim, desenharam-se as perspectivas do retângulo. O paralelogramo  $[ABCD]$  é a perspectiva propriamente dita do retângulo. O paralelogramo  $[A_2B_2C_2D_2]$  é a perspectiva da projeção frontal do retângulo. O segmento de reta  $[B_1C_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do retângulo. O segmento de reta  $[C_3D_3]$  é a perspectiva da projeção lateral do retângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio retângulo – parte da projeção frontal do retângulo está oculta pelo próprio retângulo (que é uma figura opaca).

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do retângulo  $[ABCD]$  representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do retângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades assinaladas). O plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém o retângulo), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo  $Z_r$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$ , do arco de transporte da cota do ponto  $P$  para o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $XZ$ , à inversão do seu rebatimento e à representação dos pontos em Dupla Projeção Ortogonal.

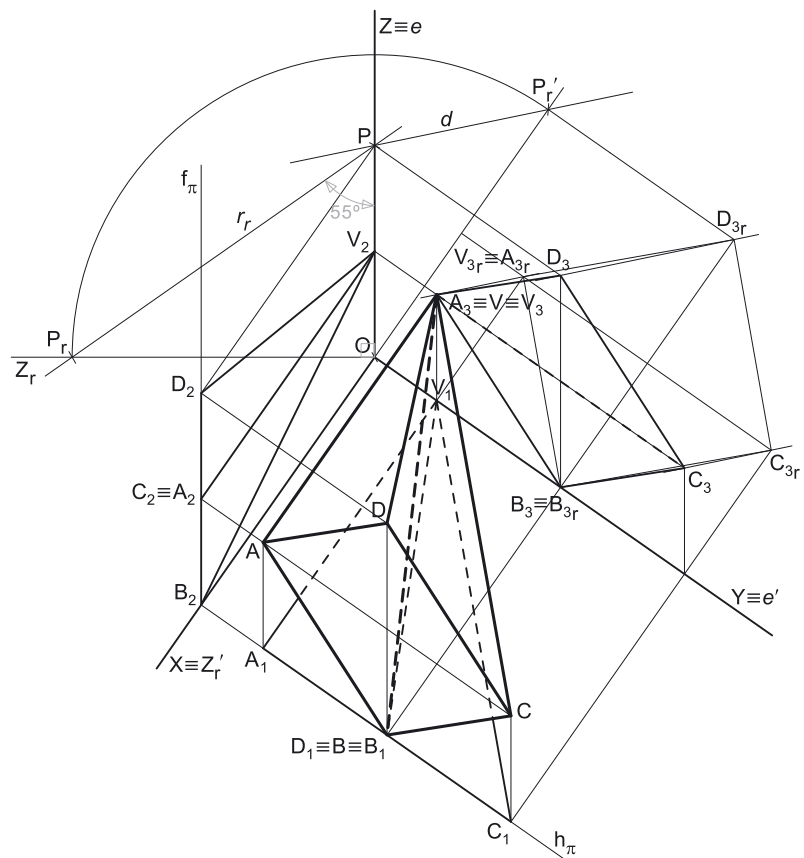
## 1193.

a) O quadrado  $[ABCD]$  (a base da pirâmide) está contido num plano de perfil com 8 cm de abcissa (a abcissa do ponto  $A$ ), pelo que os pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  têm necessariamente 8 cm de abcissa (todos os pontos de um plano de perfil têm a mesma abcissa). Tendo em conta que o enunciado refere, expressamente, que o ponto  $B$  tem cota nula e 6 cm de afastamento, as coordenadas do ponto  $B$  são (8; 6; 0).

A diferença das cotas dos pontos  $A$  e  $B$  (dois vértices consecutivos do quadrado) é 4 cm, que é igual à diferença dos afastamentos dos dois pontos – é possível inferir, então, que o lado  $[AB]$  do quadrado faz ângulos de  $45^\circ$  com os planos coordenados  $XY$  e  $XZ$  (e com os traços do plano de perfil que contém a figura). Assim, é igualmente possível inferir que a diagonal  $[AC]$  é necessariamente de topo (sendo  $A$  o seu extremo de menor afastamento) e que a diagonal  $[BD]$  é necessariamente vertical (sendo  $B$  o seu extremo inferior). Por fim, é igualmente possível concluir que as diagonais do quadrado medem 8 cm. (o dobro da diferença das cotas e dos afastamentos dos pontos  $A$  e  $B$ , pois essa diferença é metade do comprimento da diagonal).

Assim, o ponto  $C$  (o extremo de maior afastamento da diagonal  $[AC]$ ) tem a mesma cota do ponto  $A$  e o seu afastamento é 8 cm (o comprimento da diagonal) superior ao afastamento do ponto  $A$  – o ponto  $C$  tem, assim, 10 cm de afastamento. Nesse sentido, as coordenadas do ponto  $C$  são (8; 10; 4).

Já o ponto  $D$  é o extremo de maior cota da diagonal  $[BD]$ , pelo que tem o mesmo afastamento do ponto  $B$  e a sua cota é 8 cm (o comprimento da diagonal) superior à cota do ponto  $B$  – o ponto  $D$  tem 8 cm de cota. Nesse sentido, as coordenadas do ponto  $D$  são (8; 6; 8).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por fim, o ponto **V** tem **abscissa nula** (é dado no enunciado) e situa-se na mesma reta projetante lateral do ponto **A** (que é uma reta fronto-horizontal) – nesse sentido, o ponto **V** tem a mesma cota e o mesmo afastamento do ponto **A**, pelo que as coordenadas do ponto **V** são (0; 2; 4).

Salienta-se que a pirâmide se situa no espaço do 1ª *Triedro* (em que todas as coordenadas são positivas), pelo que nenhuma das coordenadas de qualquer dos seus vértices pode ser negativa.

#### b) Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 145° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 125° (que é outro ângulo obtuso).

#### Resolução:

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XY**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do plano de perfil que contém a base da pirâmide (que é 8 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o vértice da pirâmide tem abscissa nula. Por outro lado, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco vértices da pirâmide (2 cm, 6 cm e 10 cm), em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e dos afastamentos dos cinco pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções horizontais – **A<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**, **B<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**, **C<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**, **D<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **D** e **V<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V**.

Salienta-se que o ponto **B** tem cota nula (é um ponto do *plano coordenado XY*), pelo que **B<sub>2</sub>** (a sua projeção frontal) se situa necessariamente no eixo **X** e **B<sub>3</sub>** (a sua projeção lateral) se situa necessariamente no eixo **Y**. Nesse sentido, e porque o ponto **B** é um ponto do *plano coordenado XY*, o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, pelo que se tem, imediatamente, **B = B<sub>1</sub>** (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

Por outro lado, no que respeita ao eixo **Z** (onde se medem as **cotas** dos cinco pontos), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as **cotas** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **cota** é a coordenada que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **cotas** dos cinco pontos sobre a perspectiva do eixo **X**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

#### Representação do plano de perfil que contém a base da pirâmide:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre o eixo **X**, um ponto com 8 cm de abscissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém a base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**), sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 8 cm de abscissa, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  – **f <sub>$\pi$</sub>**  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ) e **h <sub>$\pi$</sub>**  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ).

Note que **f <sub>$\pi$</sub>**  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$  com afastamento nulo – a perspectiva de **f <sub>$\pi$</sub>**  é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**. Pelo seu lado, **h <sub>$\pi$</sub>**  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$ , com cota nula – **h <sub>$\pi$</sub>**  é necessariamente paralelo ao eixo **Y**.

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h <sub>$\pi$</sub>** ). Por isso mesmo, o traço horizontal do plano  $\pi$  (**h <sub>$\pi$</sub>** ) contém as projeções horizontais dos quatro vértices do quadrado (**A<sub>1</sub>**, **B<sub>1</sub>**, **C<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>**). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado xz*, sobre o seu traço frontal (**f <sub>$\pi$</sub>** ).

#### Determinação da direção de afinidade:

O enunciado refere expressamente o recurso à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer *plano coordenado* para o *plano axonométrico*. Assim, em primeiro lugar, há que rebater um dos dois *planos coordenados* ortogonais ao *plano axonométrico* (o plano **XY** ou o plano **XZ**) e, dessa forma, representar os cinco pontos através de quaisquer duas das respetivas três projeções (em Dupla Projeção Ortogonal, independentemente das duas projeções escolhidas).

Tendo em conta que já temos a projeção horizontal de cada um dos cinco pontos, optou-se por rebater o *plano coordenado YZ* (o *plano coordenado de perfil*) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projeção Ortogonal já estudada e, assim, representar os cinco pontos em Dupla Projeção Ortogonal, pelas respetivas projeções horizontais e laterais.

Ao rebater o plano **YZ** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é o eixo **Y**, que se identificou imediatamente. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>'**) fica coincidente com o eixo **X**, facto que se assinalou devidamente – **X = Z<sub>r</sub>'**. O eixo **Z<sub>r</sub>'** é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **YZ**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **YZ** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado YZ* com a notação **Z<sub>r</sub>'**, optando-se por manter a notação **Z<sub>r</sub>'** para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, prolongaram-se as linhas de chamada dos cinco pontos (para cima do eixo **Y**) e determinaram-se as respetivas projeções laterais, em rebatimento (em função das respetivas cotas, em verdadeira grandeza) –  $A_{3r}$ ,  $C_{3r}$ ,  $D_{3r}$  e  $V_{3r}$  são as projeções laterais dos pontos **A**, **C**, **D** e **V**, respetivamente, em rebatimento (no rebatimento do plano **YZ**). Este procedimento permitiu-nos construir a projeção lateral da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano **YZ**). Note que  $B_3$  (a projeção lateral do ponto **B**) é um ponto da charneira do rebatimento (que é o eixo **Y**), pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $B_{3r} = B_3$ .

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Z_r'$ , a cota do ponto **D**, a partir de  $D_{3r}$ , com uma paralela ao eixo **Y** – note que **D** é o ponto de maior cota, o que nos permite um maior rigor dos traçados. Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $Z_r'$  – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do ponto **D** ( $OP_r'$  é a cota do ponto **D**, no eixo  $Z_r'$ , pelo rebatimento do plano **YZ**).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **YZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o plano axonométrico (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo **Z**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a cota do ponto **P** (que é 8 cm) para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Z**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). Assim,  $OP_r$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **YZ**.

A inclinação das projetantes é de  $55^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, no espaço, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $55^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Z** e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do ângulo entre uma reta e um plano) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspetiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspetiva do eixo **Z** (que é a charneira **e**, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspetiva do eixo **Z** é a perspetiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspetiva do eixo **Z**).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva da cota do ponto **D** –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da cota do ponto **D**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **YZ**).

#### Inversão do rebatimento do plano coordenado **XY** e determinação das perspetivas do ponto **D**:

As projeções do ponto **D** (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **D** – a linha de chamada do ponto **D** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $D_1$ , outro extremo em  $D_3$  e um vértice no eixo **Y**. No espaço, a parte da linha de chamada do ponto **D** que está contida no plano **YZ** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **Y** e que tem um extremo em  $D_3$  e o outro extremo no eixo **Y**. Em rebatimento, essa parte da linha de chamada do ponto **D** é o segmento que é perpendicular ao eixo **Y** e que tem um extremo em  $D_{3r}$  e o outro extremo no eixo **Y**. Em perspetiva, essa parte da linha de chamada do ponto **D** (a parte que se situa no plano **YZ**) é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Z** e tem um extremo no eixo **Y**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte da perspetiva da parte da linha de chamada do ponto **D** que se situa no plano **YZ** (e que é paralela à perspetiva do eixo **Z**). Em seguida, por  $D_{3r}$ , conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a direção de afinidade) – o ponto em que esta interseja a perspetiva da linha de chamada do ponto **D** (anteriormente desenhada) é  $D_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **D**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **YZ**.

A partir das perspetivas da abscissa e da cota do ponto **D** determinou-se a perspetiva de  $D_2$ , a sua projeção frontal (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que  $D_2$  e **O** são dois vértices opostos) –  $D_2$  é a perspetiva da projeção frontal do ponto **D** e situa-se sobre  $f_\pi$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **D**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de  $D_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de **D** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de  $D_2$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **D** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de  $D_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **D** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas intersejam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **D**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **D** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspetivas dos pontos **A**, **C** e **V**, a partir da direção de afinidade:

As perspetivas dos pontos **A**, **C** e **V** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **D**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os pontos **A** e **C** situam-se na mesma reta de topo (que é uma reta projetante frontal), pelo que os dois pontos têm as suas projeções frontais coincidentes – assim, tem-se, mediatamente,  $A_2 \equiv B_2$ . Por outro lado, os pontos **B** e **D** situam-se na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), pelo que os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes – assim, tem-se, mediatamente,  $B_1 \equiv D_1$ .

#### Determinação das perspetivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ABCV]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **D**. Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AD]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[DV]**). Por outro lado, a aresta lateral **[BV]** é **invisível**, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[A<sub>1</sub>V<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção horizontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção horizontal. No entanto, existe uma parte da projeção horizontal da pirâmide que é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção frontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção frontal. Por outro lado, não existe qualquer parte da projeção frontal da pirâmide que esteja oculta pela pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** a assinalar.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero **[A<sub>3</sub>B<sub>3</sub>C<sub>3</sub>D<sub>3</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção lateral. pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção lateral da pirâmide que esteja oculta pela pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção lateral, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** a assinalar.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano  $\pi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos traços (horizontal e frontal) do plano se representaram a **leve**. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo **Z<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d**, do arco de transporte da cota do ponto **P** para o rebatimento do plano projetante do eixo **Z** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **YZ**, à inversão do seu rebatimento e à representação dos pontos e da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal.

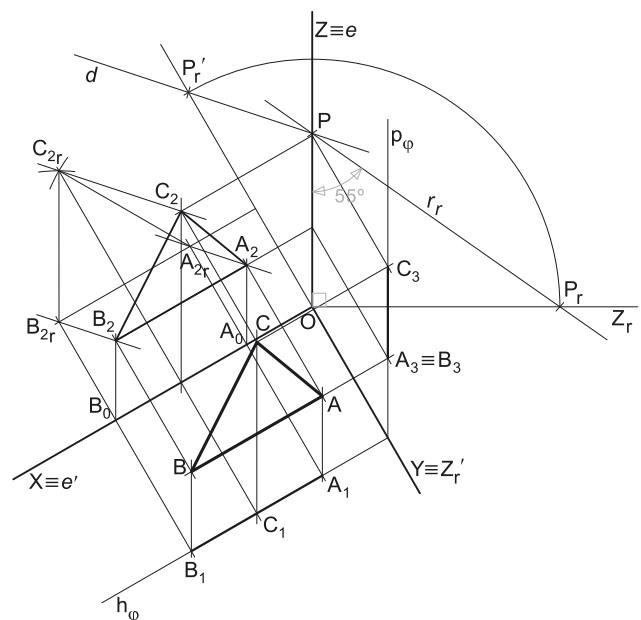
## 1194.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados*. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspetiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 120° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 150° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar as abcissas do ponto **A** (2 cm) e do ponto **B** (6 cm) sobre o eixo **X** (em verdadeira grandeza), bem como o afastamento daqueles pontos (4 cm) sobre o eixo **Y** (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, **A<sub>1</sub>** e **B<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), bem como **A<sub>0</sub>** e **B<sub>0</sub>** (as referências das abcissas dos dois pontos, no eixo **X**). Note que o eixo **X** e o eixo **Y** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém o triângulo), pelos seus traços. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**). Nesse sentido, desenhou-se **h<sub>φ</sub>**, o traço horizontal do plano  $\phi$ , paralelo ao eixo **X** – **h<sub>φ</sub>** passa por **A<sub>1</sub>** e por **B<sub>1</sub>**, pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. Salienta-se que **h<sub>φ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano, com cota nula.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$  ( $p_\varphi$ ), que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$  e é concorrente com  $h_\varphi$  no eixo  $Y$  –  $p_\varphi$  é uma reta vertical do plano  $\varphi$  com abcissa nula. Salienta-se o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

## Resolução:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (um plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao plano coordenado frontal (o plano  $XZ$ ), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XZ$  – o triângulo  $[ABC]$  e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado  $XZ$ ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do rebatimento do plano coordenado  $XZ$  (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

### Rebatimento do plano $XZ$ e construção da projeção frontal do triângulo $[ABC]$ , em verdadeira grandeza:

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XZ$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $X$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Y$ , facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv Z_r'$ . O eixo  $Z_r'$  é o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XZ$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XZ$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XZ$  com a notação  $Z_r'$ , optando-se por manter a notação  $Z_r$  para o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $XZ$  rebatido, representaram-se as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $B$ , em rebatimento, em função das suas cotas. Assim,  $A_{2r}$  é a projeção frontal do ponto  $A$  (em rebatimento), situa-se 3 cm (a cota do ponto  $A$ ) acima do eixo  $X$ , na sua linha de chamada (que passa por  $A_1$  e é perpendicular ao eixo  $X$ ). Por outro lado,  $B_{2r}$  é a projeção frontal do ponto  $B$  (em rebatimento), situa-se 3 cm (a cota do ponto  $B$ ) acima do eixo  $X$ , na sua linha de chamada (que passa por  $B_1$  e é perpendicular ao eixo  $X$ ).

A partir de  $A_{2r}$  e  $B_{2r}$ , foi possível efetuar a construção da projeção frontal do triângulo, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $C_{2r}$  (a projeção frontal do terceiro vértice do polígono) – o triângulo  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}]$  é a projeção frontal do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XZ$ . Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do 1.º Triedro, como o enunciado pede expressamente.

Para determinar a perspectiva do triângulo  $[ABC]$  é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à direção de afinidade.

### Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a direção de afinidade é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XZ$  (nesta situação), a direção de afinidade é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Z$ , pois só assim, será possível determinar a direção de afinidade.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o plano axonométrico (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ ).

Em seguida, marcou-se, no eixo  $Z_r'$ , um ponto  $P_r'$  qualquer – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com uma cota qualquer ( $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto  $P$ , no eixo  $Z_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XZ$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a cota do ponto  $P$  para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Z$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ , enquanto o ponto  $P_r'$  era o ponto  $P$  (o mesmo ponto  $P$ ) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XZ$ .

A inclinação das projetantes é de  $55^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, no espaço, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $55^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo  $Z$  e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do ângulo entre uma reta e um plano) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Z$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Z$  (que é a charneira  $e$ , por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Z$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Z$ ).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva da cota do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota do ponto  $P$ .

A direção de afinidade (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a direção de afinidade (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XZ$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

**Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação das perspectivas do ponto A:**

As projeções do ponto **A** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **A** – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **A**<sub>1</sub>, outro extremo em **A**<sub>2</sub> e um vértice no eixo **X** (em **A**<sub>0</sub>). A parte da linha de chamada do ponto **A** que está contida no plano **XZ** é o segmento [**A**<sub>0**A**<sub>2</sub>] – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento [**A**<sub>0</sub>**A**<sub>2</sub>']. A perspectiva desse segmento tem um extremo em **A**<sub>0</sub> e é paralela à perspectiva do eixo **Z**.</sub>

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta [**A**<sub>0</sub>**A**<sub>2</sub>]. Em seguida, por **A**<sub>2</sub>', conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a direção de afinidade) – o ponto em que esta intersesta a perspectiva da linha de chamada do ponto **A** (a reta suporte do segmento [**A**<sub>0</sub>**A**<sub>2</sub>']) é **A**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**).

Em seguida, por **A**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto **A**, que é de topo (paralela ao eixo **Y**). Depois, por **A**<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto **A**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**.

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto **A** determinou-se a perspectiva de **A**<sub>3</sub>, a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **A**<sub>3</sub> e **O** são dois vértices opostos) – **A**<sub>3</sub> é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A** e situa-se sobre a perspectiva de **p**<sub>φ</sub> (o traço lateral do plano φ), pois o plano φ é um plano projetante lateral.

**Determinação das perspectivas dos pontos B e C:**

As perspectivas dos pontos **B** e **C** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto **A**.

**Determinação das perspectivas do triângulo:**

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo [**ABC**] é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo [**A**<sub>2</sub>**B**<sub>2</sub>**C**<sub>2</sub>] é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O segmento de reta [**A**<sub>1</sub>**B**<sub>1</sub>] é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo (que se situa sobre **h**<sub>φ</sub>, pois o plano φ é um plano projetante horizontal). O segmento de reta [**B**<sub>3</sub>**C**<sub>3</sub>] é a perspectiva da projeção lateral do triângulo (que se situa sobre **p**<sub>φ</sub>, pois o plano φ é um plano projetante lateral).

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As perspectivas dos traços (frontal e horizontal) do plano φ (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção frontal do triângulo, em rebatimento, do eixo **Z**<sub>r</sub>', da reta **r**<sub>r</sub>, da direção de afinidade **d** e, ainda dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XZ**.

## 1195.

Por **axonometrias clinogonais normalizadas** entendem-se as perspectivas axonométricas oblíquas em que são predefinidos tanto **os ângulos entre as perspectivas dos eixos** (a direção das projetantes) bem como **o coeficiente de deformação** que afeta o eixo que não está contido no plano axonométrico (por serem predefinidas as inclinações das retas projetantes).

## 1196.

Por **coeficientes de deformação normalizados** entendem-se **os coeficientes de deformação perspéctica** predefinidos, que provêm de determinadas inclinações específicas das retas projetantes – as inclinações que permitem uma representação do objeto mais próxima da percepção visual humana dos objetos.

## 1197.

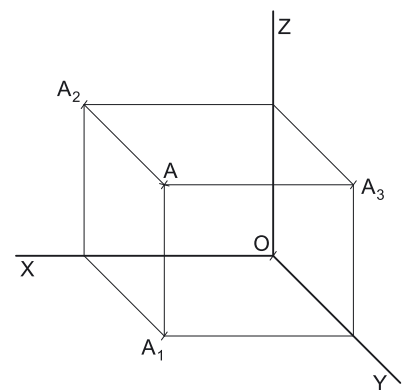
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **XZ**, a perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de 135° (os ângulos normalizados).

**Resolução:**

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** do ponto **A** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** do ponto **A** mede-se no eixo **Y** e a **cota** do ponto **A** no eixo **Z**. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **XZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **A** (5 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **A** (4 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e da cota do ponto **A** foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção frontal do ponto **A** – **A**<sub>2</sub>.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Numa **perspetiva cavaleira normalizada**, o eixo **Y** apresenta um coeficiente de deformação de 0,5 – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspetiva do eixo **Y** têm de ser multiplicadas por aquele valor.

Assim, sobre a perspetiva do eixo **Y**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **A** multiplicado pelo coeficiente de redução normalizado ( $6 \text{ cm} \times 0,5 = 3 \text{ cm}$ ).

### Determinação das perspetivas do ponto **A**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspetivas da sua projeção horizontal (**A<sub>1</sub>**) e da sua projeção lateral (**A<sub>3</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **A<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **A<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **A<sub>1</sub>** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A** e **A<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **A<sub>1</sub>**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **A<sub>3</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

## 1198.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de  $135^\circ$  (os ângulos normalizados).

### Resolução:

As coordenadas do ponto **M** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** do ponto **M** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** do ponto **M** mede-se no eixo **Y** e a **cota** do ponto **M** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XY**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **M** (5 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **M** (4 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e do afastamento do ponto **M** foi possível determinar, de forma direta, a perspetiva da projeção horizontal do ponto **M** – **M<sub>1</sub>**.

Numa **perspetiva planométrica (militar) normalizada**, o eixo **Z** apresenta um coeficiente de deformação de  $2/3$  – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspetiva do eixo **Z** têm de ser multiplicadas por aquele valor.

Assim, sobre a perspetiva do eixo **Z**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **M** multiplicado pelo coeficiente de redução normalizado ( $6 \text{ cm} \times 2/3 = 2 \text{ cm}$ ).

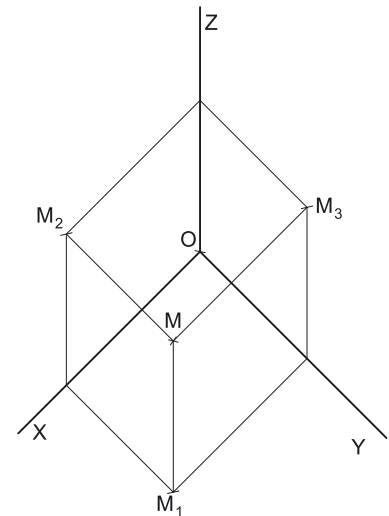
### Determinação das perspetivas do ponto **M**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspetivas da sua projeção frontal (**M<sub>2</sub>**) e da sua projeção lateral (**M<sub>3</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **M<sub>2</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **M<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **M<sub>2</sub>** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **M** e **M<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **M**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **M**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **M<sub>1</sub>**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **M** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **M<sub>2</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **M** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **M<sub>3</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **M** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **M**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **M** são dois vértices espacialmente opostos.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.



**1199.****Dados:**

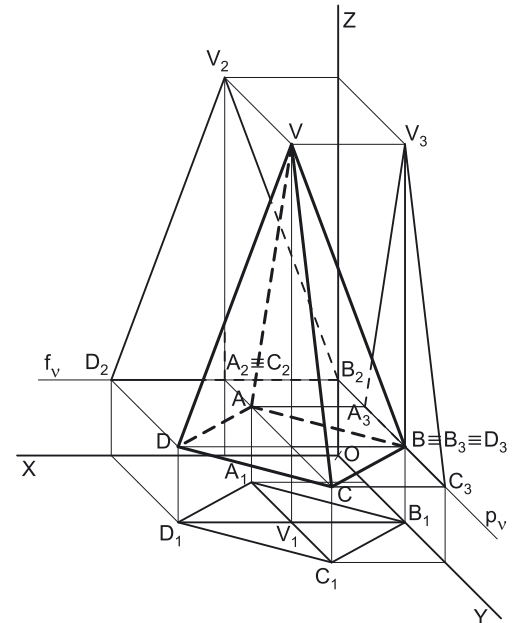
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, a perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de  $135^\circ$  (os ângulos normalizados).

São dadas as coordenadas do ponto **A** e, partir da resolução do exercício **1184.**, sabem-se as coordenadas dos restantes vértices da pirâmide, que são: **B** ( 0; 5; 2), **C** ( 3; 8; 2), **D** ( 6; 5; 2) e **V** ( 3; 5; 10).

**Resolução:**

As coordenadas dos cinco pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos cinco pontos (3 cm e 6 cm) em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto **B** tem abscissa nula. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** do plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide e do vértice da pirâmide (2 cm e 10 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e das cotas dos cinco pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções frontais – **A<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**, **B<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **B**, **C<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**, **D<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **D** e **V<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **V**.



Salienta-se que o ponto **B** tem abscissa nula (é um ponto do *plano coordenado YZ*), pelo que **B<sub>2</sub>** (a sua projeção frontal) se situa necessariamente no eixo **Z**.

Numa **perspetiva cavaleira normalizada**, o eixo **Y** apresenta um coeficiente de deformação de 0,5 – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspectiva do eixo **Y** têm de ser multiplicadas por aquele valor.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos cinco pontos, multiplicados pelo coeficiente de redução normalizado. Nesse sentido, sobre a perspectiva do eixo **Y** mediram-se 1 cm (que é o valor do afastamento do ponto **A**, reduzido pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $2\text{ cm} \times 0,5 = 1\text{ cm}$ ), 2,5 cm (que é o valor do afastamento dos pontos **B**, **D** e **V**, reduzido pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $5\text{ cm} \times 0,5 = 2,5\text{ cm}$ ) e 4 cm (que é o valor do afastamento do ponto **C**, reduzido pelo **coeficiente de deformação** normalizado –  $8\text{ cm} \times 0,5 = 4\text{ cm}$ ).

**Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide:**

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre o eixo **Z**, um ponto com 2 cm de cota. O plano horizontal (de nível) **v** que contém a base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**), sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de cota, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano **v** – **f<sub>v</sub>** (a perspectiva do traço frontal do plano **v**) e **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano **v**).

Note que **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano **v**) é uma reta fronto-horizontal do plano **v** com afastamento nulo – **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano **v**) é necessariamente paralelo ao eixo **X**. Pelo seu lado, a perspectiva de **p<sub>v</sub>** (o traço lateral ou de perfil do plano **v**) é uma reta de topo do plano **v**, com abscissa nula – nesse sentido, a perspectiva de **p<sub>v</sub>** é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

O plano **v** é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal (**f<sub>v</sub>**). Por isso mesmo, o traço frontal do plano **v** (**f<sub>v</sub>**) contém as projeções frontais dos quatro vértices do quadrado (**A<sub>2</sub>**, **B<sub>2</sub>**, **C<sub>2</sub>** e **D<sub>2</sub>**). Por outro lado, o plano **v** é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral (**p<sub>v</sub>**).

**Determinação das perspectivas do ponto A:**

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal (**A<sub>1</sub>**) e da sua projeção lateral (**A<sub>3</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **A<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **A<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos). **A<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**. **A<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A** e situa-se sobre a perspectiva de **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano **v**), pois o plano **v** é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação das perspectivas dos pontos B, C, D e V:

As perspectivas dos pontos **B**, **C**, **D** e **V** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **A**.

Salienta-se que o ponto **B** tem abcissa nula (é um ponto do plano coordenado **YZ**), pelo que **B**<sub>1</sub> (a sua projeção horizontal) se situa necessariamente no eixo **Y**. Por outro lado, e ainda porque o ponto **B** é um ponto do plano coordenado **YZ**, o ponto está coincidente com a sua projeção lateral, pelo que se tem, imediatamente, **B** ≡ **B**<sub>3</sub> (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

## Determinação das perspectivas da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspectiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada [**BCDV**]. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **A**. Este, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas [**AB**] e [**AD**], da base, e a aresta lateral [**AV**]). Por outro lado, a aresta lateral [**CV**] é **visível**, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais [**BCV**] e [**CDV**].

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspectiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero [**A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>**]. Todas as arestas da pirâmide são visíveis, em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, não existe qualquer parte da projeção horizontal da pirâmide que esteja oculta pela pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção horizontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** a assinalar.

A **perspectiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo [**B<sub>2</sub>V<sub>2</sub>D<sub>2</sub>**]. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção frontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção frontal. No entanto, parte da projeção frontal da pirâmide é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspectiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo [**A<sub>3</sub>V<sub>3</sub>C<sub>3</sub>**]. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção lateral. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção lateral. No entanto, existe uma parte da projeção lateral da pirâmide que é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano  $v$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (frontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

## 1200.

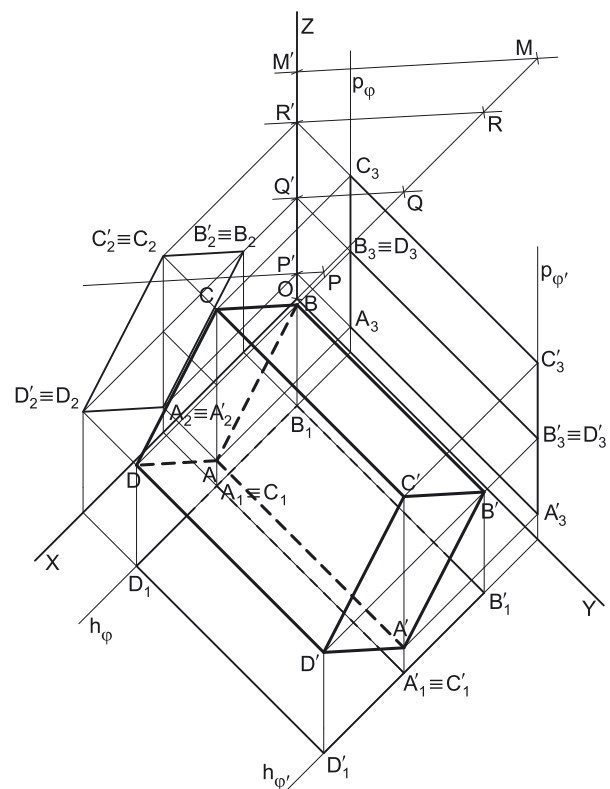
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano *axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no plano *axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de 135° (os ângulos normalizados).

São dadas das coordenadas do ponto **A** e, partir da resolução do exercício **1162.**, sabem-se as coordenadas dos restantes vértices do prisma, que são: **B** ( 2; 2; 4), **C** ( 5; 2; 7), **D** ( 8; 2; 4), **A'** ( 5; 9; 1), **B'** ( 2; 9; 4), **C'** ( 5; 9; 7) e **D'** ( 8; 9; 4).

### Resolução:

As coordenadas dos oito pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo **X**, os **afastamentos** medem-se no eixo **Y** e as **cotas** no eixo **Z**. Uma vez que o plano *axonométrico* é o plano **XY**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano *axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos oito pontos (2 cm, 5 cm e 8 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo  $Y$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos planos frontais (de frente) que contêm as duas bases do prisma (2 cm e 9 cm), em verdadeira grandeza. A partir das abcissas e dos afastamentos dos oito pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das respetivas projeções horizontais –  $A_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ,  $B_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ,  $C_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ,  $D_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $D$ ,  $A'_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A'$ ,  $B'_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B'$ ,  $C'_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C'$ ,  $D'_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $D'$ ,

*Representação do plano frontal (de frente) que contém a base [ABCD] do prisma:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre o eixo  $Y$ , um ponto com 2 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém a base [ABCD] do prisma, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula –  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é necessariamente paralelo ao eixo  $X$ . Pelo seu lado, a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – nesse sentido, a perspectiva de  $p_\varphi$  é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por isso mesmo, o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ) contém as projeções horizontais dos quatro vértices do quadrado [ABCD] ( $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

*Representação do plano frontal (de frente) que contém a base [A'B'C'D'] do prisma:*

Na sequência da determinação dos afastamentos sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , determinou-se, sobre o eixo  $Y$ , um ponto com 9 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi'$  que contém a base [A'B'C'D'] do prisma, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 9 cm de afastamento, contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi'$  –  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) e  $p_{\varphi'}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi'$ ).

À semelhança da situação anterior,  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi'$  com cota nula, pelo que  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) é necessariamente paralelo ao eixo  $X$ . Também de forma semelhante à situação anterior, a perspectiva de  $p_{\varphi'}$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\varphi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi'$ , com abcissa nula, pelo que a perspectiva de  $p_{\varphi'}$  é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi'$  é outro plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta igualmente todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ). Por isso mesmo, o traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ) contém as projeções horizontais dos quatro vértices do quadrado [A'B'C'D'] ( $A'_1$ ,  $B'_1$ ,  $C'_1$  e  $D'_1$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{\varphi'}$ ).

*Determinação das perspectivas das cotas dos vértices do prisma, sobre a perspectiva do eixo Z:*

Numa **perspetiva planométrica (militar) normalizada**, o eixo  $Z$  apresenta um coeficiente de deformação de  $2/3$  – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspectiva do eixo  $Z$  têm de ser multiplicadas por aquele valor.

Assim, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , a partir da perspectiva do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, há que representar as medidas das **cotas** dos oito vértices do prisma (1 cm, 4 cm e 7 cm) multiplicadas pelo **coeficiente de deformação normalizado** que, no entanto, não são valores exactos – (1 cm  $\times$   $2/3 = 0,6666\dots$  cm, 4 cm  $\times$   $2/3 = 2,6666\dots$  cm e 7 cm  $\times$   $2/3 = 4,6666\dots$  cm)

Assim, para obter a medida das cotas dos oito vértices do prisma, já deformadas (em perspectiva), optou-se por recorrer ao processo geométrico para a divisão de um segmento num qualquer número de partes iguais, processo esse que foi objeto de estudo na disciplina de Educação Visual dos 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade. Pretende-se representar, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , a partir do ponto  $O$ , a medida correspondente a  $2/3$  de 1 cm, de 4 cm e de 7 cm. Em primeiro lugar, desenhou-se um segmento de reta, com extremidade no ponto  $O$  e uma direção diferente da direção da perspectiva do eixo  $Z$ , com um comprimento cujos  $2/3$  tenham determinação direta.

Nesse sentido, o segmento [OM] é o segmento pretendido – tem uma extremidade no ponto  $O$ , não é paralelo à perspectiva do eixo  $Z$  e  $\overline{OM} = 9$  cm (repare que 9 cm  $\times$   $2/3 = 6$  cm, que é um valor exacto). O segmento [OM] é oblíquo à perspectiva do eixo  $Z$ , mas poderia ser perpendicular. O ponto  $M'$  é o ponto da perspectiva do eixo  $Z$  tal que  $\overline{OM'} = 6$  cm (que é o resultado do produto 9 cm  $\times$   $2/3$ ). A reta que passa por  $M$  e por  $M'$  (a reta  $r$ ) é a reta que relaciona os comprimentos em verdadeira grandeza com os seus transformados a  $2/3$ , o que quer dizer que qualquer comprimento sobre a semi-reta  $\overline{OM}$  é transformado, através de retas paralelas à reta  $r$ , em  $2/3$  da sua dimensão sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .

Assim, determinou-se um ponto  $P$ , da semi-reta  $\overline{OM}$ , tal que  $\overline{OP} = 1$  cm (a cota dos pontos  $A$  e  $A'$ ). Pelo ponto  $P$  conduziu-se uma reta paralela à reta  $r$  (que não se identificou) e determinou-se o ponto  $P'$ , que é o ponto em que aquela reta interseca a perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $P'$  é, assim, um ponto da perspectiva do eixo  $Z$  tal que  $\overline{OP'} = 2/3 \times \overline{OP}$ , ou seja,  $\overline{OP'} = 2/3 \times 1$  cm, pelo que [OP'] é um segmento representativo da perspectiva da cota dos pontos  $A$  e  $A'$ .

Em seguida, determinou-se um ponto  $Q$ , da semi-reta  $\overline{OM}$ , tal que  $\overline{OQ} = 4$  cm (a cota dos pontos  $B$ ,  $B'$ ,  $D$  e  $D'$ ). Pelo ponto  $Q$  conduziu-se uma reta paralela à reta  $r$  (que também não se identificou) e determinou-se o ponto  $Q'$ , que é o ponto em que aquela reta interseca a perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $Q'$  é, assim, um ponto da perspectiva do eixo  $Z$  tal que  $\overline{OQ'} = 2/3 \times \overline{OQ}$ , ou seja,  $\overline{OQ'} = 2/3 \times 4$  cm, pelo que [OQ'] é um segmento representativo da perspectiva da cota dos pontos  $B$ ,  $B'$ ,  $D$  e  $D'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

De forma semelhante, determinou-se um ponto **R**, da semi-reta  $\overline{OM}$ , tal que  $\overline{OP} = 7$  cm (a cota dos pontos **D** e **D'**). Pelo ponto **R** conduziu-se uma reta paralela à reta **r** (que também não se identificou) e determinou-se o ponto **R'**, que é o ponto em que aquela reta interseca a perspectiva do eixo **Z**. O ponto **R'** é, assim, um ponto da perspectiva do eixo **Z** tal que  $\overline{OR'} = 2/3 \times \overline{OR}$ , ou seja,  $\overline{OR'} = 2/3 \times 7$  cm, pelo que  $[\overline{OR'}]$  é um segmento representativo da perspectiva da cota dos pontos **D** e **D'**.

### Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal (**A<sub>2</sub>**) e da sua projeção lateral (**A<sub>3</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **A<sub>2</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **A<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos). **A<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**. **A<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A** e situa-se sobre a perspectiva de **p<sub>φ</sub>** (o traço lateral do plano φ), pois o plano φ é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D:

As perspectivas dos pontos **B**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **A**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano φ, que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos (**B<sub>3</sub>**, **C<sub>3</sub>** e **D<sub>3</sub>**) situam-se sobre a perspectiva de **p<sub>φ</sub>** (o traço lateral do plano φ).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **A<sub>1</sub> ≡ C<sub>1</sub>**. Por outro lado, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem **B<sub>3</sub> ≡ D<sub>3</sub>**.

### Determinação das perspectivas dos pontos A', B', C' e D':

As perspectivas dos pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **A**. Atendendo a que os quatro pontos pertencem ao plano φ', que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos quatro pontos (**A'<sub>3</sub>**, **B'<sub>3</sub>**, **C'<sub>3</sub>** e **D'<sub>3</sub>**) situam-se sobre a perspectiva de **p<sub>φ'</sub>** (o traço lateral do plano φ').

Salienta-se, ainda, que os pontos **A'** e **C'**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **A'<sub>1</sub> ≡ C'<sub>1</sub>**. Por outro lado, os pontos **B'** e **D'**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem **B'<sub>3</sub> ≡ D'<sub>3</sub>**.

Por fim, os vértices da base de maior afastamento (os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**) e os vértices correspondentes da base de menor afastamento (os pontos **A**, **B**, **C** e **D**, respetivamente) situam-se nas mesmas retas projetantes frontais, pelo que têm as respetivas projeções frontais coincidentes – tem-se **A'<sub>2</sub> ≡ A<sub>2</sub>**, **B'<sub>2</sub> ≡ B<sub>2</sub>**, **C'<sub>2</sub> ≡ C<sub>2</sub>** e **D'<sub>2</sub> ≡ D<sub>2</sub>**.

### Determinação das perspectivas do prisma:

Em seguida, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada **[BCDD'A'B']**. Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspectiva do sólido – os vértices **A** e **C'**. O vértice **C'**, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[B'C']** e **[C'D']** (da base **[A'B'C'D']**) e a aresta lateral **[CC']**. O vértice **A**, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]** (da base **[ABCD]**) e a aresta lateral **[AA']**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas da projeção horizontal, da projeção frontal e da projeção lateral do prisma.

A **perspetiva da projeção horizontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo **[B<sub>1</sub>D<sub>1</sub>D'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>]**. Todas as arestas invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, parte da projeção horizontal do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo **[A'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>C'<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>]**. Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, não existe qualquer parte da projeção frontal do prisma que esteja oculta pelo próprio prisma (que é opaco), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do prisma** é limitada pelo paralelogramo **[A<sub>3</sub>C<sub>3</sub>C'<sub>3</sub>A'<sub>3</sub>]**. Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, não existe qualquer parte da projeção lateral do prisma que esteja oculta pelo próprio prisma (que é opaco), pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação**.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício Os planos φ e φ' (os planos frontais que contêm as bases do prisma), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspectiva do prisma, com as respetivas invisibilidades devidamente assinaladas, representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do prisma (com as respetivas invisibilidades), integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – todas as linhas que nos permitiram determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, 2/3 de 1 cm, 2/3 de 4 cm e 2/3 de 7 cm.

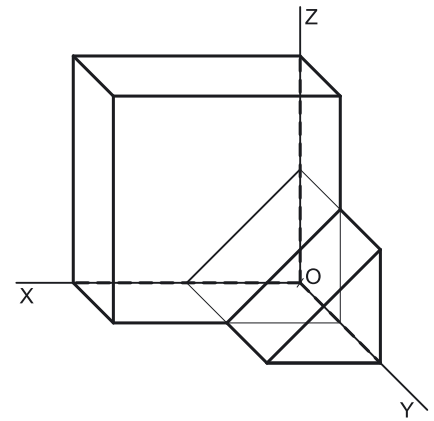
**1201.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, a perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de  $135^\circ$  (os ângulos normalizados).

**Resolução:**

Como o sólido se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do objeto estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir as diferentes arestas do sólido sobre as perspectivas dos eixos a que respeitam. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **X** (6 cm). De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **Z** (6 cm).



Na *perspetiva cavaleira normalizada* desta situação, o eixo **Y** apresenta um coeficiente de deformação de 0,5 – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspectiva do eixo **Y** têm de ser multiplicadas por aquele valor. Assim, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **Y** (6 cm), multiplicada pelo coeficiente de redução normalizado ( $6 \text{ cm} \times 0,5 = 3 \text{ cm}$ ). Note que esta aresta do sólido corresponde a duas formas diferentes que se justapõem – um paralelepípedo e uma «cunha», sendo que a aresta de cada um dos sólidos que se situa no eixo **Y** mede 3 cm. Assim, e atendendo a que  $3 \text{ cm} \times 0,5 = 1,5 \text{ cm}$ , assinalou-se, na perspectiva do eixo **Y**, o ponto que corresponde ao final da aresta do paralelepípedo e ao início da aresta da «cunha».

A partir das medições efetuadas (sobre as perspectivas dos eixos), construíram-se as perspectivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) do objeto, sobre os respetivos *planos coordenados*, baseadas em paralelas às perspectivas dos eixos.

*Determinação da perspectiva do objeto:*

Pelas perspectivas das projeções de cada um dos vértices do objeto (que não se identificaram) conduziram-se as perspectivas das respetivas retas projetantes, obtendo as respetivas perspectivas (a semelhança do que se processa na determinação das perspectivas de um ponto).

Esse procedimento permitiu-nos determinar, sucessiva e simultaneamente, as perspectivas de cada uma das arestas do sólido. Estas permitiram-nos desenhar a perspectiva do objeto, na qual se assinalaram convenientemente as invisibilidades existentes.

Salienta-se que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um paralelepípedo e uma «cunha»), as faces do objeto que resultam de duas faces planares daqueles objetos (a face que está contida no plano **XY** e a face que está contida no plano **YZ**) **não apresentam** qualquer linha divisória. De facto, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente «o objeto»), aquelas faces apresentariam uma linha divisória que identificaria, precisamente, o plano que separaria fisicamente os dois sólidos.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do objeto representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas construtivas (auxiliares), representaram-se a **leve**.

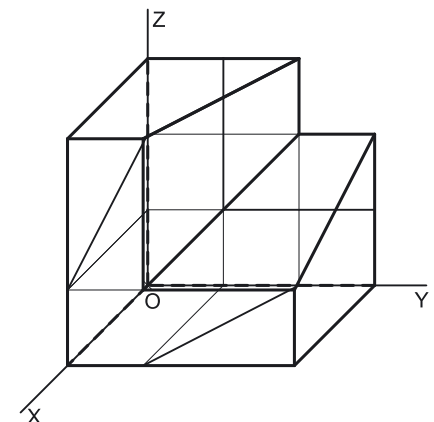
**1202.****Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**, a perspectiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de  $135^\circ$  (os ângulos normalizados).

**Resolução:**

Como o sólido se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do objeto estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir as diferentes arestas do sólido sobre as perspectivas dos eixos a que respeitam. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **Y** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **Y** (6 cm). De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **Z** (6 cm).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No entanto, o sólido tem uma estrutura que implica que, no eixo **Y**, se representem outras medidas que nos permitem construir as projeções horizontal e lateral do sólido. Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se (em verdadeira grandeza) as medidas em falta (2 cm e 4 cm). De forma semelhante, a estrutura do sólido implica que, no eixo **Z**, se representem outras medidas que nos permitam construir as projeções frontal e lateral do sólido. Assim, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se (em verdadeira grandeza) as medidas em falta (2 cm e 4 cm).

Na **perspetiva cavaleira normalizada** desta situação, o eixo **X** apresenta um coeficiente de deformação de 0,5 – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspetiva do eixo **X** têm de ser multiplicadas por aquele valor. Assim, sobre a perspetiva do eixo **X**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **X** (6 cm), multiplicada pelo coeficiente de redução normalizado ( $6 \text{ cm} \times 0,5 = 3 \text{ cm}$ ).

A partir das medições efetuadas (sobre as perspetivas dos eixos), construíram-se as perspetivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) do objeto, sobre os respetivos *planos coordenados*, baseadas em paralelas às perspetivas dos eixos.

### Determinação da perspetiva do objeto:

Pelas perspetivas das projeções de cada um dos vértices do objeto (que não se identificaram) conduziram-se as perspetivas das respetivas retas projetantes, obtendo as respetivas perspetivas (a semelhança do que se processa na determinação das perspetivas de um ponto).

Esse procedimento permitiu-nos determinar, sucessiva e simultaneamente, as perspetivas de cada uma das arestas do sólido. Estas permitiram-nos desenhar a perspetiva do objeto, na qual se assinalaram convenientemente as invisibilidades existentes.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do objeto representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas construtivas (auxiliares), representaram-se a **leve**.

## 1203.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de  $135^\circ$  (os ângulos normalizados).

### Resolução:

Como o sólido se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do objeto estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir as diferentes arestas do sólido sobre as perspetivas dos eixos a que respeitam. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XY**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

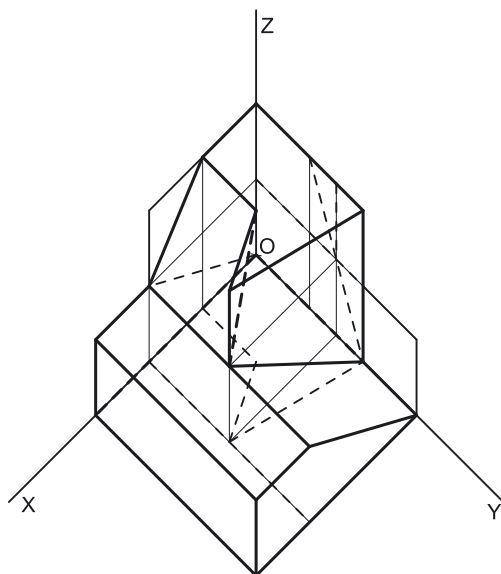
Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **X** (6 cm). De forma semelhante, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **Y** (6 cm).

No entanto, o sólido tem uma estrutura que implica que, no eixo **X**, se representem outras medidas que nos permitem construir as projeções horizontal e frontal do sólido. Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se (em verdadeira grandeza) as medidas em falta (2 cm e 4 cm). De forma semelhante, a estrutura do sólido implica que, no eixo **Y**, se representem outras medidas que nos permitam construir as projeções horizontal e lateral do sólido. Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se (em verdadeira grandeza) as medidas em falta (2 cm, 3 cm e 4 cm).

Numa **perspetiva planométrica (militar) normalizada**, o eixo **Z** apresenta um coeficiente de deformação de  $2/3$  – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspetiva do eixo **Z** têm de ser multiplicadas por aquele valor.

Assim, sobre a perspetiva do eixo **Z**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, há que representar as medidas das **cotas** dos das faces horizontais do sólido (3 cm e 6 cm) multiplicadas pelo **coeficiente de deformação normalizado** que, neste caso, são valores exactos – ( $3 \text{ cm} \times 2/3 = 2 \text{ cm}$  e  $6 \text{ cm} \times 2/3 = 4 \text{ cm}$ ).

A partir das medições efetuadas (sobre as perspetivas dos eixos), construíram-se as perspetivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) do objeto, sobre os respetivos *planos coordenados*, baseadas em paralelas às perspetivas dos eixos.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação da perspectiva do objeto:

Pelas perspectivas das projeções de cada um dos vértices do objeto (que não se identificaram) conduziram-se as perspectivas das respectivas retas projetantes, obtendo as respectivas perspectivas (a semelhança do que se processa na determinação das perspectivas de um ponto).

Esse procedimento permitiu-nos determinar, sucessiva e simultaneamente, as perspectivas de cada uma das arestas do sólido. Estas permitiram-nos desenhar a perspectiva do objeto, na qual se assinalaram convenientemente as invisibilidades existentes.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do objeto representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas construtivas (auxiliares), representaram-se a **leve**.

## 1204.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de  $120^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de  $150^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto **A** (5 cm) sobre o eixo **X** (em verdadeira grandeza), bem como o afastamento do ponto **B** (3 cm) sobre o eixo **Y** (também em verdadeira grandeza) – salienta-se que o ponto **B** tem abscissa nula e que o ponto **A** tem afastamento nulo. Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato, **A<sub>1</sub>** e **B<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), bem como **A<sub>0</sub>** e **B<sub>0</sub>** (as referências das abscissas dos dois pontos, no eixo **X**). Note que o eixo **X** e o eixo **Y** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

Uma vez que o ponto **A** tem afastamento nulo, a sua projeção horizontal (**A<sub>1</sub>**) situa-se necessariamente sobre o eixo **X**, pelo que se tem, imediatamente, **A<sub>0</sub> ≡ A<sub>1</sub>**. Por outro lado, atendendo a que o ponto **B** tem abscissa nula, a sua projeção horizontal (**B<sub>1</sub>**) situa-se necessariamente sobre o eixo **Y**.

#### Resolução:

O plano que contém o quadrado (um plano horizontal) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XY**), pelo que o quadrado **se projeta em verdadeira grandeza** no *plano axonométrico* (a perspectiva do quadrado não apresenta qualquer deformação) – o quadrado, a sua perspectiva e a sua projeção horizontal são figuras geometricamente iguais.

Assim, a partir de **A<sub>1</sub>** e **B<sub>1</sub>**, foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar **C<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos outros dois vértices do polígono) – o quadrado [**A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>**] é a projeção horizontal do quadrado [**ABCD**] e está em verdadeira grandeza, pois está contida no *plano axonométrico* (o plano de projeção). Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do *1.ª Triedro*, como o enunciado pede expressamente

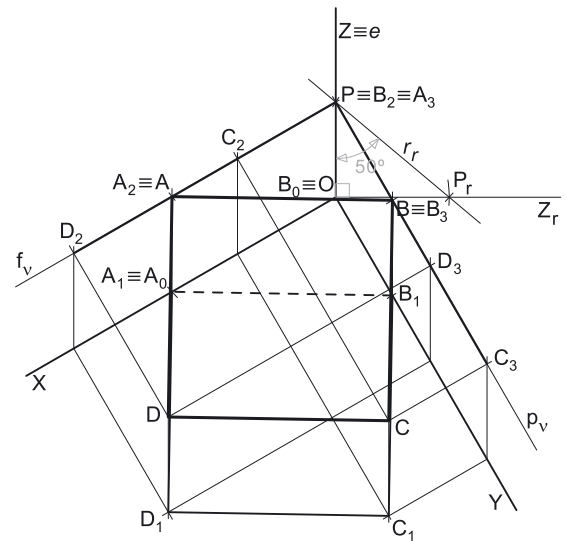
Para determinar a perspectiva do quadrado [**ABCD**] é necessário determinar a perspectiva da cota do plano horizontal (de nível) que contém o quadrado.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A **cota** do plano que contém o quadrado, porque se mede no eixo **Z**, está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **Z**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se a **cota** do plano horizontal (de nível) que contém o quadrado, em verdadeira grandeza (3 cm), determinando-se um ponto **P<sub>r</sub>** – o ponto **P<sub>r</sub>** é, em rebatimento, o ponto do eixo **Z** que tem 3 cm de cota. Para determinar a perspectiva do ponto **P** conduziu-se, pelo ponto **P<sub>r</sub>**, uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $50^\circ$ ). A reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de  $50^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de  $50^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Z** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **Z** (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **Z** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **Z**).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspectiva da cota do plano horizontal (de nível) que contém o quadrado –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota desse plano.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém o quadrado:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva do ponto **P**, que é o ponto do eixo **Z** que tem 3 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o quadrado **[ABCD]**, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de cota, contém necessariamente o ponto **P**.

Assim, pela perspectiva do ponto **P** conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a perspectiva de  $f_v$  é necessariamente paralela ao eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a perspectiva de  $p_v$  é necessariamente paralela ao eixo **Y**.

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral ou de perfil ( $p_v$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto C:*

As projeções do ponto **C** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **C**, que é uma linha quebrada aberta, com um extremo em **C<sub>1</sub>**, outro extremo em **C<sub>2</sub>** e um vértice no eixo **X**. A parte da linha de chamada do ponto **C** que está contida no plano **XZ** é paralela ao eixo **Z** pelo que, em perspectiva, essa parte da linha de chamada é também paralela à perspectiva do eixo **Z**. Assim, a partir do ponto do eixo **X** que pertence à linha de chamada do ponto **C** desenhou-se a perspectiva da parte que se situa no plano **XZ** (e que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), o que nos permitiu determinar **C<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**), sobre a perspectiva de  $f_v$  (pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal).

Em seguida, por **C<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto **C**, que é vertical (paralela à perspectiva do eixo **Z**). Depois, por **C<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **C**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto **C** (que é paralela ao eixo **Y**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**.

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto **C** determinou-se a perspectiva de **C<sub>3</sub>**, a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **C<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **C<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **C** e situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

*Determinação das perspectivas dos pontos A, B e D:*

As perspectivas dos pontos **A**, **B** e **D** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto **C**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos (**A<sub>2</sub>**, **B<sub>2</sub>** e **D<sub>2</sub>**) situam-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). De forma semelhante, e atendendo a que o plano  $v$  é também um plano projetante lateral e que os três pontos pertencem ao plano  $v$ , as perspectivas das projeções laterais dos três pontos (**A<sub>3</sub>**, **B<sub>3</sub>** e **D<sub>3</sub>**) situam-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Salienta-se que o ponto **A** tem afastamento nulo (é um ponto do plano coordenado **XZ**), pelo que **A<sub>3</sub>** (a sua projeção lateral) se situa no eixo **Z**. Por outro lado, e ainda porque o ponto **A** é um ponto do plano coordenado **XZ**, o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, pelo que se tem, imediatamente, **A**  $\equiv$  **A<sub>2</sub>** (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto **B** tem abcissa nula (é um ponto do plano coordenado **YZ**), a projeção frontal do ponto **B** (**B<sub>2</sub>**) situa-se no eixo **Y**. Mais uma vez porque o ponto **B** é um ponto do plano coordenado **YZ**, o ponto está coincidente com a sua projeção lateral, pelo que se tem, imediatamente, **B**  $\equiv$  **B<sub>3</sub>** (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

*Determinação das perspectivas do quadrado:*

Atendendo a que o plano  $v$  (o plano que contém o quadrado) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o quadrado projeta-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano **XY**). Assim, a partir das perspectivas de todos os seus vértices, desenhou-se o quadrado **[ABCD]**, que é a perspectiva propriamente dita do quadrado **[ABCD]**.

O quadrado **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** é a perspectiva da projeção horizontal do quadrado. Salienta-se que parte da projeção horizontal do quadrado está oculta pelo próprio quadrado (que é uma figura opaca), o que se assinalou convenientemente, com a convenção usada para o efeito (a traço interrompido). O segmento de reta **[B<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]** é a perspectiva da projeção frontal do quadrado, que se reduz a um segmento de reta sobre  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. O segmento de reta **[A<sub>3</sub>C<sub>3</sub>]** é a perspectiva da projeção lateral do quadrado, que se reduz a um segmento de reta sobre  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do quadrado representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). O plano  $v$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Z**, e da reta  $r_f$ ), representaram-se a **leve**.

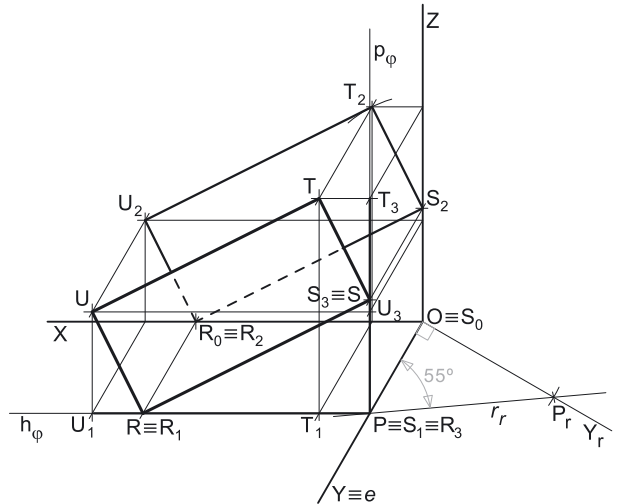
## 1205.

## Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $X$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $XZ$  – nesse sentido, o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $60^\circ$  (que é um ângulo agudo) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $150^\circ$  (que é um ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto  $R$  (6 cm) sobre o eixo  $X$  (em verdadeira grandeza), bem como a cota do ponto  $S$  (3 cm) sobre o eixo  $Z$  (também em verdadeira grandeza) – salienta-se que o ponto  $S$  tem abscissa nula e que o ponto  $R$  tem cota nula. Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato,  $R_2$  e  $S_2$  (as projeções frontais dos pontos  $R$  e  $S$ , respetivamente), bem como  $R_0$  e  $S_0$  (as referências das abscissas dos dois pontos, no eixo  $X$ ). Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

Uma vez que o ponto  $R$  tem cota nula, a sua projeção frontal ( $R_2$ ) situa-se necessariamente sobre o eixo  $X$ , pelo que se tem  $R_2 \equiv R_0$ . Por outro lado, atendendo a que o ponto  $S$  tem abscissa nula, a sua projeção frontal ( $S_2$ ) situa-se necessariamente sobre o eixo  $Z$ .



## Resolução:

O plano que contém o retângulo (um plano frontal) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), pelo que o retângulo se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico (a perspectiva do retângulo não apresenta qualquer deformação) – o retângulo, a sua perspectiva e a sua projeção frontal são figuras geometricamente iguais.

Assim, a partir de  $R_2$  e  $S_2$ , foi possível efetuar a construção da projeção frontal do retângulo, em verdadeira grandeza e atendendo aos dados do enunciado – os lados menores medem 3 cm, pelo que o lado  $[RS]$  é necessariamente um dos lados maiores do retângulo. A construção efetuada permitiu-nos determinar  $T_2$  e  $U_2$  (as projeções frontais dos outros dois vértices do polígono) – o retângulo  $[R_2S_2T_2U_2]$  é a projeção frontal do retângulo  $[RSTU]$  e está em verdadeira grandeza, pois está contida no plano axonométrico (o plano de projeção). Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do  $1^\circ$  Triedro, como o enunciado pede expressamente.

Para determinar a perspectiva do retângulo  $[RSTU]$  é necessário determinar a perspectiva do afastamento do plano frontal (de frente) que contém o retângulo.

## Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

O afastamento do plano que contém o retângulo, porque se mede no eixo  $Y$ , está afetado pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o plano axonométrico (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ ).

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $Y_r$  (e no sentido positivo do eixo), mediou-se o afastamento do plano frontal (de frente) que contém o retângulo, em verdadeira grandeza (4 cm), determinando-se um ponto  $P_r$  – o ponto  $P_r$  é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Y$  que tem 4 cm de afastamento. Para determinar a perspectiva do ponto  $P$  conduziu-se, pelo ponto  $P_r$ , uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ). A reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de  $55^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, no espaço, com o plano axonométrico, é um ângulo de  $55^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo  $Y$  e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do ângulo entre uma reta e um plano) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo  $Y$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspectiva do eixo  $Y$  (que é a charneira  $e$ , por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspectiva do eixo  $Y$  é a perspectiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspectiva do eixo  $Y$ ).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento do plano frontal (de frente) que contém o retângulo –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento desse plano.

## Representação do plano frontal (de frente) que contém o retângulo:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , a perspectiva do ponto  $P$ , que é o ponto do eixo  $Y$  que tem 4 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\phi$  que contém o retângulo  $[RSTU]$ , sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 4 cm de afastamento, contém necessariamente o ponto  $P$ .

Assim, pela perspectiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\phi$  –  $h_\phi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ) e  $p_\phi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\phi$ ).

Note que  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\phi$  com cota nula – a perspectiva de  $h_\phi$  é necessariamente paralela ao eixo  $X$ . Pelo

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

seu lado,  $p_\phi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\phi$ ) é uma reta vertical do plano  $\phi$ , com abcissa nula – a perspectiva de  $p_\phi$  é necessariamente paralela ao eixo  $Z$ .

O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal (é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ). Por outro lado, o plano  $\phi$  é, também, um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ou de perfil ( $p_\phi$ ).

### Determinação das perspectivas do ponto T:

As projeções do ponto  $T$  (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $T$ , que é uma linha quebrada aberta, com um extremo em  $T_1$ , outro extremo em  $T_2$  e um vértice no eixo  $X$ . A parte da linha de chamada do ponto  $T$  que está contida no plano  $XY$  é paralela ao eixo  $Y$  pelo que, em perspectiva, essa parte da linha de chamada é também paralela à perspectiva do eixo  $Y$ . Assim, a partir do ponto do eixo  $X$  que pertence à linha de chamada do ponto  $T$  desenhou-se a perspectiva da parte que se situa no plano  $XY$  (e que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ), o que nos permitiu determinar  $T_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $T$ ), sobre a perspectiva de  $h_\phi$  (pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal).

Em seguida, por  $T_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $T$ ) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto  $T$ , que é vertical (paralela ao eixo  $Z$ ). Depois, por  $T_2$  (a projeção frontal do ponto  $T$ ), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto  $T$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto  $T$ .

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto  $T$  determinou-se a perspectiva de  $T_3$ , a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que  $T_3$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $T_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $T$  e situa-se sobre a perspectiva de  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral.

### Determinação das perspectivas dos pontos R, S e U:

As perspectivas dos pontos  $R$ ,  $S$  e  $U$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto  $T$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\phi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos ( $R_1$ ,  $S_1$  e  $U_1$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ). De forma semelhante, e atendendo a que o plano  $\phi$  é também um plano projetante lateral e que os três pontos pertencem ao plano  $\phi$ , as perspectivas das projeções laterais dos três pontos ( $R_3$ ,  $S_3$  e  $U_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ).

Salienta-se que o ponto  $R$  tem cota nula (é um ponto do *plano coordenado XY*), pelo que  $R_3$  (a sua projeção lateral) se situa na perspectiva do eixo  $Y$ . Por outro lado, e ainda porque o ponto  $R$  é um ponto do *plano coordenado XY*, o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, pelo que se tem, imediatamente,  $R \equiv R_1$  (sendo  $R$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $R$ ).

Pelo seu lado, e atendendo a que o ponto  $S$  tem abcissa nula (é um ponto do *plano coordenado YZ*), a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $S$  ( $S_1$ ) situa-se na perspectiva do eixo  $Y$ . Mais uma vez porque o ponto  $S$  é um ponto do *plano coordenado YZ*, o ponto está coincidente com a sua projeção lateral, pelo que se tem, imediatamente,  $S \equiv S_3$  (sendo  $S$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $S$ ).

### Determinação das perspectivas do retângulo:

Atendendo a que o plano  $\phi$  (o plano que contém o retângulo) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), e como atrás se referiu, o retângulo projeta-se em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o plano  $XZ$ ). Assim, a partir das perspectivas de todos os seus vértices, desenhou-se o retângulo  $[RSTU]$ , que é a perspectiva propriamente dita do retângulo  $[RSTU]$ .

O retângulo  $[R_2S_2T_2U_2]$  é a perspectiva da projeção frontal do retângulo. Salienta-se que parte da projeção frontal do retângulo está oculta pelo próprio retângulo (que é uma figura opaca), o que se assinalou convenientemente, com a convenção usada para o efeito (a traço interrompido). O segmento de reta  $[U_1S_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do retângulo, que se reduz a um segmento de reta sobre  $h_\phi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. O segmento de reta  $[R_3T_3]$  é a perspectiva da projeção lateral do retângulo, que se reduz a um segmento de reta sobre  $p_\phi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do retângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal, frontal e lateral) do retângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). O plano  $\phi$  (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo  $Z_r$  e da reta  $r_r$ ), representaram-se a **leve**.

## 1206.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo *Z* se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo *Y* e ao eixo *Z*, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano *YZ* – nesse sentido, o eixo *Y* e o eixo *Z* fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo *X* (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos (o eixo *X* e o eixo *Z*) ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar o afastamento dos pontos *A* e *B* (8 cm) sobre o eixo *Y* (em verdadeira grandeza), bem como a cota daqueles dois pontos (2 cm) sobre o eixo *Z* (também em verdadeira grandeza). Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato, *A*<sub>3</sub> e *B*<sub>3</sub> (as projeções laterais dos pontos *A* e *B*, respetivamente). Note que o eixo *Y* e o eixo *Z* estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação. Note ainda que se tem *A*<sub>3</sub> ≡ *B*<sub>3</sub>, pois o lado [*AB*] é fronto-horizontal (é projetante lateral).

Na sequência do procedimento anterior foi possível representar o plano  $\phi$ , que é o plano de frontal (de frente) que contém a base da pirâmide. O plano  $\phi$  foi representado pelo seu traço lateral (*p* <sub>$\phi$</sub> ) e pela perspectiva do seu traço horizontal (*h* <sub>$\phi$</sub> ). O plano  $\phi$  é um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*), pelo que projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral (*p* <sub>$\phi$</sub> ). Em função disso mesmo, o traço lateral do plano  $\phi$  (*p* <sub>$\phi$</sub> ) contém as projeções laterais dos pontos *A* e *B* (*A*<sub>3</sub> e *B*<sub>3</sub>). Note que *p* <sub>$\phi$</sub>  (o traço lateral do plano  $\phi$ ) é uma reta vertical do plano  $\phi$  com abscissa nula – é necessariamente paralelo ao eixo *Z*.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva de *h* <sub>$\phi$</sub> , que é paralela à perspectiva do eixo *X* e é concorrente com *p* <sub>$\phi$</sub>  (o traço lateral do plano  $\phi$ ) num ponto do eixo *Y*. Note que *h* <sub>$\phi$</sub>  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\phi$ , com cota nula.

O plano  $\phi$  é também um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (*h* <sub>$\phi$</sub> ).

**Resolução:**

O plano que contém o quadrado [*ABCD*] (a base da pirâmide), que é um plano frontal (de frente), não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o quadrado [*ABCD*] **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao *plano coordenado frontal* (o plano *XZ*), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* – o quadrado [*ABCD*] e a sua projeção frontal (a sua projeção no *plano coordenado XZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer pode passar pelo **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

No entanto, uma vez que o quadrado tem lados fronto-horizontais, a sua construção é simples, mesmo que não seja em verdadeira grandeza. Assim, optou-se pelo rebatimento do plano coordenado *XY* para o plano axonométrico, de forma a representar a pirâmide por duas das suas projeções (a sua projeção horizontal e a sua projeção lateral), a partir da sua projeção lateral, estabelecendo um paralelismo com a representação do sólido em Dupla Projeção Ortogonal.

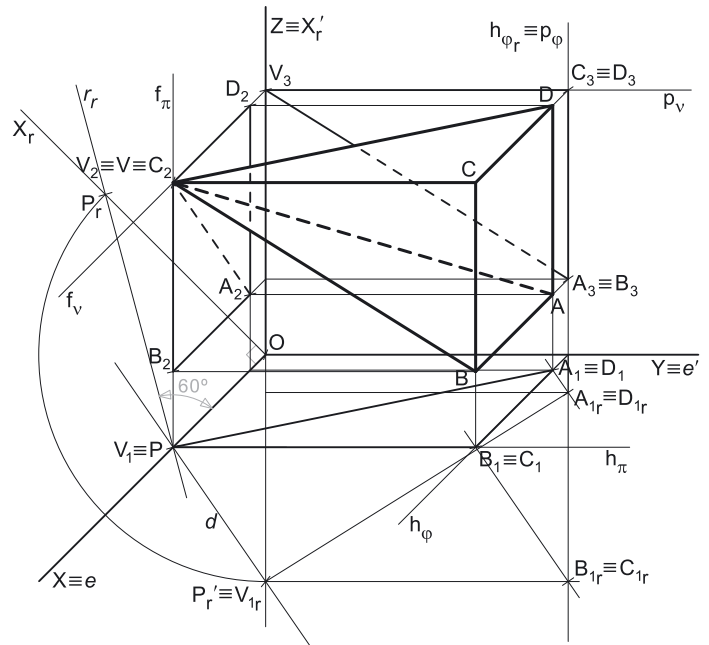
**Rebatimento do plano XY e representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal:**

Assim, efetuou-se o rebatimento do *plano coordenado XY* e, dessa forma, representou-se a pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal e lateral.

Ao rebater o plano *XY* sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta *e'*) é o eixo *Y*, que se identificou imediatamente. O eixo *X* rebatido (o eixo *X*<sub>r</sub>') fica coincidente com o eixo *Z*, facto que se assinalou devidamente – *Z* ≡ *X*<sub>r</sub>'. O eixo *X*<sub>r</sub>' é o eixo *X* rebatido pelo rebatimento do plano *XY*.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano *XY* com a notação *e'*, optando-se por manter a notação *e* para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo *X*. De forma semelhante, identificou-se o eixo *X* rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XY* com a notação *X*<sub>r</sub>', optando-se por manter a notação *X*<sub>r</sub> para o eixo *X* rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Em seguida, representou-se o traço horizontal do plano  $\phi$  em rebatimento – *h* <sub>$\phi$ r</sub>. Salienta-se que o traço horizontal do plano  $\phi$ , em rebatimento (*h* <sub>$\phi$ r</sub>), fica coincidente com o traço lateral do plano (*p* <sub>$\phi$</sub> ), o que se identificou imediatamente – *h* <sub>$\phi$ r</sub> ≡ *p* <sub>$\phi$</sub> . Em seguida, representaram-se os pontos *A* e *B* pelas respetivas projeções horizontais, em rebatimento (em função dos respetivos afastamentos, em verdadeira grandeza) – *A*<sub>1r</sub> e *B*<sub>1r</sub> são as projeções horizontais dos pontos *A* e *B*, respetivamente, em rebatimento (no rebatimento do plano *XY*). O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal, pelo que projeta todas as suas retas e pontos no plano *XY*, sobre o seu traço horizontal. Assim, as projeções horizontais dos pontos *A* e *B*, em rebatimento (*A*<sub>1r</sub> e *B*<sub>1r</sub>, respetivamente) estão necessariamente sobre *h* <sub>$\phi$ r</sub> (o traço horizontal do plano  $\phi$ , em rebatimento).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em função das coordenadas dos pontos **A** e **B** e das respectivas projeções horizontais (em rebatimento), é possível deduzir que o quadrado **[ABCD]** (a base da pirâmide) tem 5 cm de lado (a diferença das abcissas dos pontos **A** e **B**). Assim, determinaram-se as projeções frontais dos pontos **C** e **D** (os vértices superiores do quadrado), em função da respectiva cota, que é 5 cm (o comprimento do lado do quadrado) superior à cota dos pontos **A** e **B**. Note que se tem  $C_3 \equiv D_3$ , pois o lado **[CD]** do quadrado é fronto-horizontal (é projetante lateral).

Por outro lado, e atendendo a que o lado **[AD]** é vertical (projetante horizontal), os pontos **A** e **D** têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A_{1r} \equiv D_{1r}$ . O mesmo se verifica para os pontos **B** e **C** (o lado **[BC]** também é vertical), pelo que se tem igualmente  $B_{1r} \equiv C_{1r}$ .

Por fim, representou-se o ponto **V** (o vértice da pirâmide) em Dupla Projeção Ortogonal, em função dos dados. O ponto **V** tem afastamento nulo, pelo que a sua projeção lateral **V<sub>3</sub>** se situa necessariamente no eixo **Z**, tal como a sua projeção horizontal (**V<sub>1</sub>**) se situa no eixo **X**.

Por outro lado, a face lateral superior está contida num plano horizontal de nível, pelo que o ponto **V** tem a cota dos pontos **C** e **D** (os vértices de maior cota da base), o que nos permitiu determinar **V<sub>3</sub>** (a projeção lateral do ponto **V**), sobre o eixo **Z**. Atendendo, também, ao facto de que a face de maior abcissa da pirâmide está contida num plano de perfil, o ponto **V** tem a abcissa dos pontos **B** e **C** (os vértices de maior abcissa da base), o que nos permitiu determinar **V<sub>1r</sub>** (a projeção horizontal do ponto **V**, em rebatimento), sobre o eixo **X<sub>r</sub>'** (o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do plano **XY**).

Este procedimento permitiu-nos desenhar a projeção horizontal da pirâmide, em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**) e, assim, com a projeção lateral da pirâmide (que está no plano **YZ**), concluir a representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal – a pirâmide está representada pela sua projeção lateral e pela sua projeção horizontal (em rebatimento).

### Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XY** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **X**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **X** para o plano axonométrico (o plano **YZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **X**. O eixo **X** rebatido (o eixo **X<sub>r</sub>'**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **X**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **X<sub>r</sub>'** está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **X**).

Em seguida, determinou-se um ponto **P<sub>r</sub>'**, no eixo **X<sub>r</sub>'** – o ponto **P** é um ponto do eixo **X** com a abcissa dos pontos **B**, **C** e **V** ( $\overline{OP_r'}$  é a abcissa dos pontos **B**, **C** e **V**, no eixo **X<sub>r</sub>'**, pelo rebatimento do plano **XY**). Neste situação, o ponto **P<sub>r</sub>'** é o próprio **V<sub>1r</sub>**, facto que se assinalou convenientemente –  $P_r' \equiv V_{1r}$ . Para relacionar o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva é necessário transportar o ponto **P** para o rebatimento do eixo **X**.

Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a abcissa do ponto **P** (que é 6 cm) para o eixo **X<sub>r</sub>'**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **X**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **X**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a abcissa do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **X**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto **P<sub>r</sub>** é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **X**, enquanto o ponto **P<sub>r</sub>'** era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XY**.

A inclinação das projetantes é de 60°, pelo que o ângulo que a reta **r** faz, no espaço, com o plano axonométrico, é um ângulo de 60° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **X** e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do ângulo entre uma reta e um plano) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **X**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **X** (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **X** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **X**).

O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspectiva da abcissa dos pontos **B**, **C** e **V** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da abcissa do plano de perfil que contém a face lateral **[BCV]** da pirâmide (a face de maior abcissa do sólido).

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>'** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

### Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação das perspectivas dos pontos B e C:

As projeções do ponto **B** (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **B** – a linha de chamada do ponto **B** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **B<sub>1</sub>**, outro extremo em **B<sub>3</sub>** e um vértice no eixo **Y**. Tendo em conta que o ponto **B** é um ponto do plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a base da pirâmide), a linha de chamada do ponto **B** está sobre os traços do plano  $\phi$ , pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal e também um plano projetante lateral.

No espaço, a parte da linha de chamada do ponto **B** que está contida no plano **XY** está contida em **h<sub>φ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\phi$ ). Em rebatimento, essa parte da linha de chamada do ponto **B** está contida em **h<sub>φr</sub>** (o traço horizontal do plano  $\phi$  rebatido). Em perspectiva, essa parte da linha de chamada do ponto **B** (a parte que se situa no plano **XY**) está sobre a perspectiva de **h<sub>φ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\phi$ ), que é paralela à perspectiva do eixo **X** e já foi desenhada.

Assim, por **B<sub>1r</sub>**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a direção de afinidade) – o ponto em que esta interseja a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$  (**h<sub>φ</sub>**) é **B<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XY**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que os pontos **B** e **C** se situam na mesma reta projetante horizontal (o lado **[BC]** do quadrado é vertical), os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes – assim, tem-se, mediatamente,  $B_1 \equiv C_1$ . Salienta-se que as perspectivas das projeções horizontais dos dois pontos (**B** e **C**) se situam sobre a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

A partir das perspectivas da abcissa e da cota do ponto **B** determinou-se a perspectiva de  $B_2$ , a sua projeção frontal (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que  $B_2$  e **O** são dois vértices opostos) –  $B_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto **B**. Efetuou-se um procedimento idêntico para o ponto **C**, o que nos permitiu determinar  $C_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**).

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **B**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $B_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de  $B_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de  $B_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **B** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **B**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **B** são dois vértices espacialmente opostos.

Recorrendo a um procedimento idêntico ao atrás exposto, para o ponto **B**, determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto **C**.

*Determinação das perspectivas dos pontos A e D, a partir da direção de afinidade:*

As perspectivas dos pontos **A** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas dos pontos **B** e **C**.

*Determinação das perspectivas do ponto V:*

Atendendo a que o ponto **P** (do eixo **X**) é a própria projeção horizontal do ponto **V** (como atrás se referiu), a perspectiva de  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto **V**) está coincidente com a perspectiva do ponto **P**, o que se assinalou convenientemente no desenho – tem-se, imediatamente,  $V_1 \equiv P$ .

A partir das perspectivas das projeções horizontal e lateral do ponto **V** ( $V_1$  e  $V_3$ , respetivamente), determinou-se a perspectiva de  $V_2$ , a sua projeção frontal (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo  $[V_1OV_3V_2]$ ) –  $V_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto **V**. Por fim, atendendo a que o ponto **V** tem afastamento nulo, o ponto **V** situa-se no plano coordenado **XZ**, pelo que se tem imediatamente  $V_2 \equiv V$  (sendo **V** a perspectiva propriamente dita do ponto **V**).

*Determinação das perspectivas da pirâmide:*

Em seguida, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ABVD]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **C**. Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**). Por outro lado, a aresta lateral **[AV]** é **invisível**, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais **[ABV]** e **[ADV]**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral da pirâmide.

A **perspetiva da projeção horizontal da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[C<sub>1</sub>V<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção horizontal) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção horizontal. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção horizontal. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção horizontal da pirâmide que esteja oculta pela pirâmide (que é opaca), pelo que, em projeção horizontal, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** a assinalar.

A **perspetiva da projeção frontal da pirâmide** é limitada pelo quadrilátero **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]**. Em projeção frontal, todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção frontal) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção frontal, à exceção da aresta lateral **[AV]**. Assim, a aresta lateral **[AV]** é a única **invisibilidade por projeção** a assinalar, em projeção frontal. Por outro lado, também existe uma parte da projeção frontal da pirâmide que é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral da pirâmide** é limitada pelo triângulo **[B<sub>3</sub>V<sub>3</sub>C<sub>3</sub>]**. Todas as arestas da pirâmide que são invisíveis (em projeção lateral) estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis, em projeção lateral. Assim, não existe qualquer **invisibilidade por projeção**, em projeção lateral. No entanto, existe uma parte da projeção lateral da pirâmide que é invisível (por estar oculta pela própria pirâmide, que é opaca), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano  $\varphi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a **leve**. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções da pirâmide, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo  $X_r$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade **d**, do arco de transporte da abcissa do ponto **P** para o rebatimento do plano projetante do eixo **X** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XY**, à inversão do seu rebatimento e à representação dos pontos e da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal.



## 1207.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar a abcissa dos pontos **A** e **C'** (4 cm) sobre o eixo **X** (em verdadeira grandeza), bem como o afastamento do ponto **C'** (7 cm) sobre o eixo **Y** (também em verdadeira grandeza) – salienta-se que o ponto **A** tem afastamento nulo. Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato, **A<sub>1</sub>** e **C'<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **C'**, respetivamente). Note que o eixo **X** e o eixo **Y** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que a sua projeção horizontal (**A<sub>1</sub>**) se situa necessariamente no eixo **X**. Por outro lado, tendo em conta que o ponto **A** tem afastamento e cota nulos, infere-se que o ponto **A** é um ponto do eixo **X**. Assim, foi possível determinar, de forma imediata, todas as suas perspectivas – tem-se, imediatamente, **A ≡ A<sub>2</sub> ≡ A<sub>1</sub>**, sendo **A<sub>2</sub>** a perspectiva da projeção frontal do ponto **A** e **A** a sua perspectiva propriamente dita. **A<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**) está coincidente com o ponto **O** (**A<sub>3</sub> ≡ O**).

Na sequência do procedimento anterior foi possível representar o plano  $\varphi$ , que é o plano de frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do prisma. O plano  $\varphi$  foi representado pelo seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**) e pela perspectiva do seu traço lateral (**p<sub>φ</sub>**). O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (é ortogonal ao *plano coordenado XY*), pelo que projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**). Em função disso mesmo, o traço horizontal do plano  $\varphi$  (**h<sub>φ</sub>**) passa pela projeção horizontal do ponto **C'** (**C'<sub>1</sub>**). Note que **h<sub>φ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – é necessariamente paralelo ao eixo **X**.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva de **p<sub>φ</sub>** (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), que é paralela à perspectiva do eixo **Z** e é concorrente com **h<sub>φ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) num ponto do eixo **Y**. Note que **p<sub>φ</sub>** (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula.

O plano  $\varphi$  é também um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral (**p<sub>φ</sub>**).

### Resolução:

Os planos que contêm as bases do prisma (que são planos frontais), não são paralelos ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as bases **não se projetam em verdadeira grandeza** (as perspectivas dos dois quadrados não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que as bases estão contidas em planos frontais (de frente), que são paralelo ao *plano coordenado frontal* (o plano **XZ**, que contém a base de menor afastamento do sólido), sabe-se que as bases se projetam em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* – os quadrados e as suas projeções frontais (as suas projeções no *plano coordenado XZ*) são figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual as bases se projetam em verdadeira grandeza).

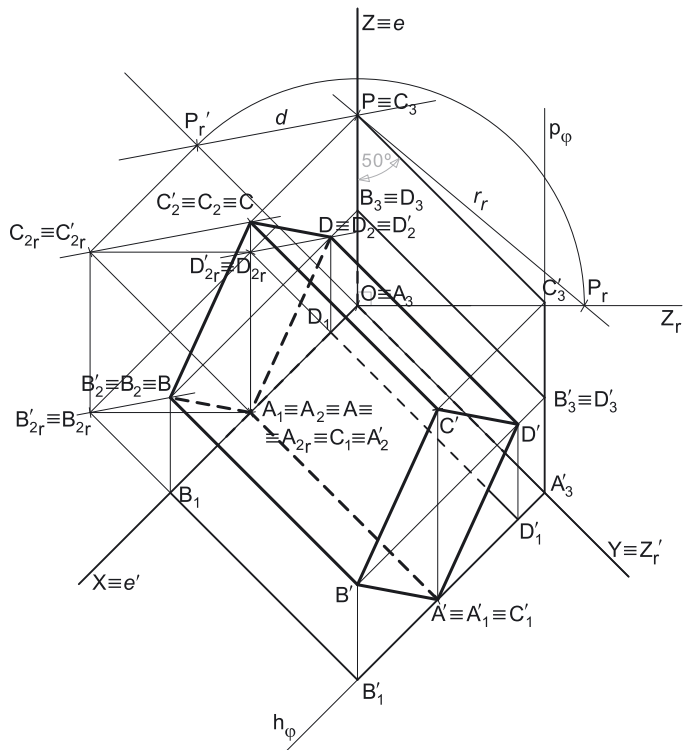
#### Rebatimento do plano XZ e representação do prisma em Dupla Projeção Ortogonal:

Assim, efetuou-se o rebatimento do *plano coordenado XZ* e, dessa forma, representou-se o prisma em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal e frontal.

Ao rebater o plano **XZ** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é o eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>'**) fica coincidente com o eixo **Y**, facto que se assinalou devidamente – **Y ≡ Z<sub>r</sub>'**. O eixo **Z<sub>r</sub>'** é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **XZ**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XZ** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado XZ* com a notação **Z<sub>r</sub>'**, optando-se por manter a notação **Z<sub>r</sub>** para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Em seguida, representou-se o ponto **C'** pela sua projeção frontal, em rebatimento (em função da sua cota, em verdadeira grandeza), para o que foi necessário desenhar a sua linha de chamada (em rebatimento), para cima do eixo **X**. **C'<sub>2r</sub>** é a projeção frontal do ponto **C'** em rebatimento (no rebatimento do plano **XZ**). A projeção frontal do ponto **A** (**A<sub>2</sub>**) situa-se no eixo **X**, que é a charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente, **A<sub>2r</sub> ≡ A<sub>2</sub>**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que se trata de um **prisma regular**, as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases, que são retas de topo (projetantes frontais). Assim, a projeção frontal do ponto **C** (o vértice da base **[ABCD]** que é oposto ao vértice **A**) está coincidente com a projeção frontal do ponto **C'** (o vértice correspondente da base **[A'B'C'D']**). Nesse sentido, foi possível identificar, de forma imediata,  $C_{2r}$  (a projeção frontal do ponto **C**, em rebatimento) – tem-se, imediatamente,  $C_{2r} \equiv C'_{2r}$ . A projeção horizontal do ponto **C** ( $C_1$ ) fica coincidente com a projeção horizontal do ponto **A**, pois a diagonal **[AC]** é vertical (projetante horizontal) – tem-se, imediatamente,  $C_1 \equiv A_1$ .

A partir de  $A_{2r}$  e  $C_{2r}$ , foi possível efetuar a construção da projeção frontal do quadrado **[ABCD]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento), o que nos permitiu determinar  $B_{2r}$  e  $D_{2r}$  (as projeções frontais dos outros dois vértices do polígono, em rebatimento) – o quadrado  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}]$  é a projeção frontal do quadrado **[ABCD]**, em rebatimento. Tendo em conta que o enunciado é omissivo no que respeita à posição dos vértices **B** e **D**, a posição escolhida foi arbitrária.

A partir da construção da projeção frontal do quadrado (em rebatimento), foi possível concluir a representação do prisma em Dupla Projeção Ortogonal. As projeções frontais dos vértices da base **[A'B'C'D']** estão coincidentes com as projeções frontais dos vértices da base **[ABCD]**, pois as arestas laterais do sólido são projetantes frontais – tem-se, imediatamente,  $A'_{2r} \equiv A_{2r}$ ,  $B'_{2r} \equiv B_{2r}$  e  $D'_{2r} \equiv D_{2r}$ . As projeções horizontais dos pontos **B** e **D** ( $B_1$  e  $D_1$ , respetivamente) situam-se no eixo **X**, pois os pontos **B** e **D** têm afastamento nulo (a base **[ABCD]** está contida no plano **XZ**). As projeções horizontais dos pontos **A'**, **B'** e **D'** ( $A'_1$ ,  $B'_1$  e  $D'_1$ , respetivamente) situam-se sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

#### Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o plano axonométrico (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo **Z**).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Z_r$ , a cota do ponto **C**, a partir de  $C_{2r}$ , com uma paralela ao eixo **X** – note que **C** é um dos vértices de maior cota do prisma, o que nos permite um maior rigor dos traçados. Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r$ , no eixo  $Z_r$  – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do ponto **C** ( $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto **C**, no eixo  $Z_r$ , pelo rebatimento do plano **XZ**).

Para relacionar o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva é necessário transportar o ponto **P** para o rebatimento do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r}$ , transportou-se a cota do ponto **P** para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Z**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de 50°) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, enquanto o ponto  $P'_r$  era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ**.

A inclinação das projetantes é de 50°, pelo que o ângulo que a reta  $r_r$  faz, no espaço, com o plano axonométrico, é um ângulo de 50° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Z** e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do ângulo entre uma reta e um plano) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r_r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspetiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspetiva do eixo **Z** (que é a charneira **e**, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspetiva do eixo **Z** é a perspetiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspetiva do eixo **Z**).

O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspetiva da cota dos pontos **C** e **C'** –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da cota dos vértices de maior cota do sólido.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P'_r$  e pela perspetiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**).

#### Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação da perspetiva do ponto C':

As projeções do ponto **C'** (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **C'** – a linha de chamada do ponto **C'** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $C'_1$ , outro extremo em  $C'_3$  e um vértice no eixo **X**. No espaço, a parte da linha de chamada do ponto **C'** que está contida no plano **XZ** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **X** e que tem um extremo em  $C'_2$  e o outro extremo no eixo **X**. Em rebatimento, essa parte da linha de chamada do ponto **C'** é o segmento que é perpendicular ao eixo **X** e que tem um extremo em  $C'_{2r}$  e o outro extremo no eixo **X**. Em perspetiva, essa parte da linha de chamada do ponto **C'** (a parte que se situa no plano **XZ**) é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Z** e tem um extremo no eixo **X**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte da perspetiva da parte da linha de chamada do ponto **C'** que se situa no plano **XZ**. Em seguida, por  $C'_{2r}$  conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a direção de afinidade) – o ponto em que esta intersesta a perspetiva da linha de chamada do ponto **C'** (anteriormente desenhada) é  $C'_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **C'**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XZ**.

A partir das perspetivas do afastamento e da cota do ponto **C'** determinou-se a perspetiva de  $C'_3$ , a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que  $C'_3$  e **O** são dois vértices opostos) –  $C'_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto **C'** e situa-se sobre  $p_\varphi$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $C'$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $C'_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $C'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $C'_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $C'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $C'_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $C'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $C'$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $C'$  são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D, a partir da direção de afinidade:*

As perspectivas dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $C'$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano coordenado  $XZ$ , as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos ( $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ) situam-se no eixo  $X$  e as perspectivas das suas projeções laterais ( $B_3$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ) situam-se sobre a perspectiva do eixo  $Z$ .

Por fim, atendendo a que os três pontos têm afastamento nulo, os três pontos situam-se no plano coordenado  $XZ$ , pelo que se tem imediatamente  $B \equiv B_2$  (sendo  $B$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ ),  $C \equiv C_2$  (sendo  $C$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$ ) e  $D \equiv D_2$  (sendo  $D$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$ ).

*Determinação das perspectivas dos pontos A', B' e D', a partir da direção de afinidade:*

As perspectivas dos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $D'$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $C'$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\varphi$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos ( $A'_3$ ,  $B'_3$  e  $D'_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A'$  e  $C'$ , porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem  $A'_1 \equiv C'_1$ . Por outro lado, os pontos  $B'$  e  $D'$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $B'_3 \equiv D'_3$ .

Por fim, os vértices da base de maior afastamento (os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ ) e os vértices correspondentes da base de menor afastamento (os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , respetivamente) situam-se nas mesmas retas projetantes frontais, pelo que têm as respetivas projeções frontais coincidentes – tem-se  $A'_2 \equiv A_2$ ,  $B'_2 \equiv B_2$ ,  $C'_2 \equiv C_2$  e  $D'_2 \equiv D_2$ .

*Determinação das perspectivas do prisma:*

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do prisma, começando pelo seu contorno aparente – o contorno aparente da perspectiva do prisma é a linha quebrada fechada  $[BCDD'A'B']$ . Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspectiva do sólido – os vértices  $A$  e  $C'$ . O vértice  $C'$ , por ser o vértice mais próximo do observador, é visível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$  e  $[C'D']$  (da base  $[A'B'C'D']$ ) e a aresta lateral  $[CC']$ . O vértice  $A$ , por ser o vértice mais distante do observador, é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$  (da base  $[ABCD]$ ) e a aresta lateral  $[AA']$ .

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas da projeção horizontal e da projeção lateral do prisma. Note que a projeção frontal do prisma se reduz a um quadrado (o quadrado  $[A'_2B'_2C'_2D'_2]$ ) que, estando coincidente com a base  $[ABCD]$ , está oculto por essa base e, por isso mesmo, não se distingue.

A perspectiva da projeção horizontal do prisma é limitada pelo paralelogramo  $[B_1D_1D'_1B'_1]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer invisibilidade por projeção a assinalar. Por outro lado, parte da projeção horizontal do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma invisibilidade por ocultação.

A perspectiva da projeção lateral do prisma é limitada pelo paralelogramo  $[A_3C_3C'_3A'_3]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer invisibilidade por projeção a assinalar. Por outro lado, parte da projeção lateral do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma invisibilidade por ocultação.

**Traçado:**

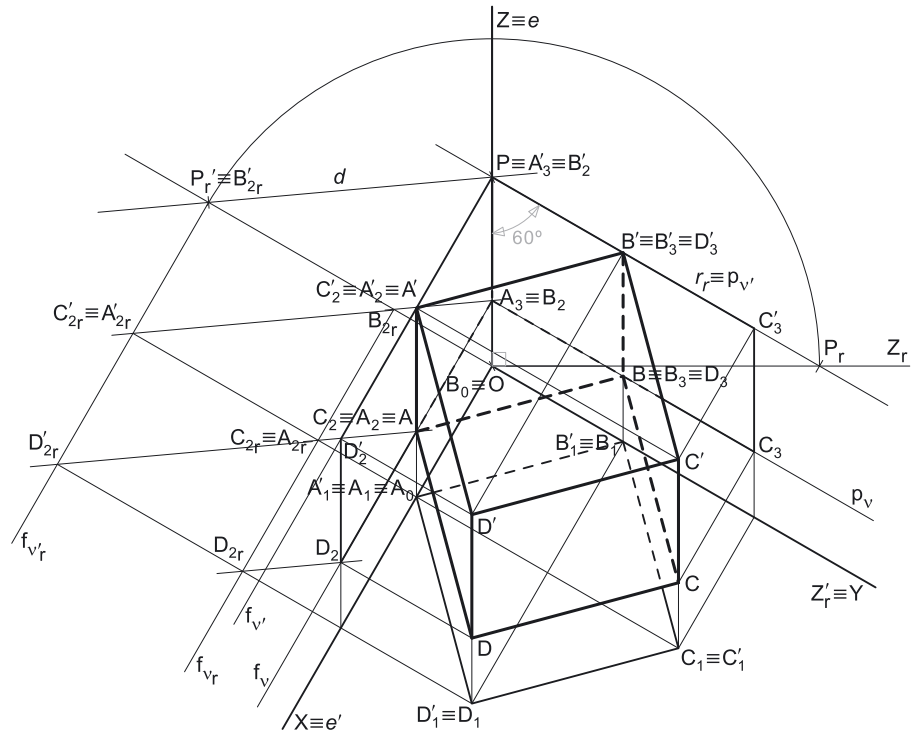
As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a médio, pois são as linhas estruturantes do exercício. O plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do prisma), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano se representaram a leve. A perspectiva do prisma representou-se a forte (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do prisma, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a médio-forte (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a leve – caso do eixo  $Z$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$ , do arco de transporte da cota do ponto  $P$  para o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano  $XZ$ , à inversão do seu rebatimento e à representação dos pontos e do prisma em Dupla Projeção Ortogonal.

## 1208.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $150^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Y$ , um ângulo de  $120^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abcissa do ponto  $A$  (4 cm) sobre o eixo  $X$  (em verdadeira grandeza), bem como o afastamento do ponto  $B$  (4 cm) sobre o eixo  $Y$  (também em verdadeira grandeza) – salienta-se que o ponto  $B$  tem abcissa nula e que o ponto  $A$  tem afastamento nulo. Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato,  $A_1$  e  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente), bem como  $A_0$  e  $B_0$  (as referências das abcissas dos dois pontos, no eixo  $X$ ). Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.



Uma vez que o ponto  $A$  tem afastamento nulo, a sua projeção horizontal ( $A_1$ ) situa-se necessariamente sobre o eixo  $X$ , pelo que se tem, imediatamente,  $A_0 \equiv A_1$ . Por outro lado, atendendo a que o ponto  $B$  tem abcissa nula, a sua projeção horizontal ( $B_1$ ) situa-se necessariamente sobre o eixo  $Y$ .

**Resolução:**

O plano que contém o quadrado (um plano horizontal) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XY$ ), pelo que o quadrado **se projeta em verdadeira grandeza** no plano axonométrico (a perspectiva do quadrado não apresenta qualquer deformação) – o quadrado, a sua perspectiva e a sua projeção horizontal são figuras geometricamente iguais.

Assim, a partir de  $A_1$  e  $B_1$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $C_1$  e  $D_1$  (as projeções horizontais dos outros dois vértices do polígono) – o quadrado  $[A_1B_1C_1D_1]$  é a projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$  e está em verdadeira grandeza, pois está contida no plano axonométrico (o plano de projeção). Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do  $1^\circ$  Triedro, como o enunciado pede expressamente.

Para construir a perspectiva do sólido bastaria determinar as perspectivas das cotas dos planos que contém as faces horizontais (de nível) do cubo, o que se processa rebatendo o eixo  $Z$ , pelo rebatimento do seu plano projetante. No entanto, com vista à vulgarização da representação de sólidos em Dupla Projeção Ortogonal, que é determinante no capítulo seguinte, optou-se por, também nesta situação (e apesar de não ser absolutamente necessário), representar previamente o cubo em Dupla Projeção Ortogonal.

Para tal, e atendendo a que já temos a projeção horizontal dos vértices da face inferior, recorreu-se ao rebatimento do plano  $XZ$  (o plano coordenado frontal) para, dessa forma, ser possível a representação do cubo em Dupla Projeção Ortogonal (pelas suas projeções horizontal e frontal).

**Rebatimento do plano  $XZ$  e representação do cubo em Dupla Projeção Ortogonal:**

Assim, efetuou-se o rebatimento do plano coordenado  $XZ$  e, dessa forma, representou-se o cubo em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal e frontal.

Ao rebater o plano  $XZ$  sobre o plano axonométrico, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é o eixo  $X$ , que se identificou imediatamente. O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Y$ , facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv Z_r'$ . O eixo  $Z_r'$  é o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XZ$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XZ$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XZ$  com a notação  $Z_r'$ , optando-se por manter a notação  $Z_r$  para o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Em seguida, representaram-se os pontos  $A$  e  $B$  pelas respetivas projeções frontais, em rebatimento, para o que foi necessário desenhar as respetivas linhas de chamada (em rebatimento) para cima do eixo  $X$ . Os pontos  $A_{2r}$  e  $B_{2r}$  são, respetivamente, as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $B$  em rebatimento (no rebatimento do plano  $XZ$ ), e determinaram-se em função da sua cota (que é 3 cm), em verdadeira grandeza.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, representou-se o traço frontal do plano  $v$  (o plano que contém a face inferior do cubo) em rebatimento –  $f_{v_r}$ . O plano  $v$  é um plano projetante frontal, pelo que projeta todas as suas retas e pontos no plano  $XZ$ , sobre o seu traço frontal. Assim, o traço frontal do plano  $v$ , em rebatimento ( $f_{v_r}$ ), passa necessariamente pelas projeções frontais dos pontos  $A$  e  $B$ , em rebatimento ( $A_{2_r}$  e  $B_{2_r}$ ) e é paralelo ao eixo  $X$  (pois é uma reta fronto-horizontal do plano, com afastamento nulo). Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções frontais dos pontos  $C$  e  $D$  em rebatimento ( $C_{2_r}$  e  $D_{2_r}$ , respetivamente), a partir das suas projeções horizontais, recorrendo às respetivas linhas de chamada. Os pontos  $C$  e  $D$  pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, pelo que  $C_{2_r}$  e  $D_{2_r}$  se situam, necessariamente, sobre  $f_{v_r}$ .

A altura de um cubo (a distância entre quaisquer duas faces paralelas) é, na realidade, igual ao comprimento de qualquer das suas arestas. Acontece que os lados do quadrado  $[ABCD]$  são quatro arestas do cubo e estão em verdadeira grandeza em projeção horizontal (pois o quadrado está contido num plano paralelo ao plano *axonométrico*). Assim, transportou-se, para o rebatimento do plano  $XZ$ , a medida da aresta do cubo, para cima de  $f_{v_r}$  (o traço frontal do plano  $v$  rebatido), o que nos permitiu desenhar  $f_{v'_r}$  (o traço frontal do plano  $v'$  rebatido), paralelo ao eixo  $X$  (e a  $f_{v_r}$ ). O plano  $v'$  é o plano horizontal (de nível) que contém a face superior do cubo.

Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções frontais dos vértices da face superior do cubo em rebatimento ( $A'_{2_r}$ ,  $B'_{2_r}$ ,  $C'_{2_r}$  e  $D'_{2_r}$ ), a partir das respetivas projeções horizontais, recorrendo às respetivas linhas de chamada. Os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  pertencem ao plano  $v'$ , que é um plano projetante frontal, pelo que  $A'_{2_r}$ ,  $B'_{2_r}$ ,  $C'_{2_r}$  e  $D'_{2_r}$  se situam, necessariamente, sobre  $f_{v'_r}$ .

A partir das projeções horizontais e das projeções frontais (em rebatimento) de todos os vértices do cubo, conclui-se a representação do cubo em Dupla Projeção Ortogonal, desenhando a sua projeção frontal (em rebatimento).

### Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano *coordenado*  $XZ$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Z$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o plano *axonométrico* (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo  $Z$ ).

Em seguida, determinou-se, no eixo  $Z'_r$ , um ponto  $P'_r$ , com a cota da face superior do cubo – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota da face superior do cubo ( $\overline{OP'_r}$  é a cota dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ , no eixo  $Z'_r$ , pelo rebatimento do plano  $XZ$ ). Note que, nesta situação, o ponto  $P$  é, imediatamente, a projeção frontal do ponto  $B'$  ( $B'_{2_r}$ ), pelo que se tem  $P'_r \equiv B'_{2_r}$ .

Para relacionar o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspetiva é necessário transportar o ponto  $P$  para o rebatimento do eixo  $Z$ . Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP'_r}$ , transportou-se a **cota** do ponto  $P$  para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Z$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto  $P_r$  é o ponto  $P$  rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ , enquanto o ponto  $P'_r$  era o ponto  $P$  (o mesmo ponto  $P$ ) rebatido pelo rebatimento do plano *coordenado*  $XZ$ .

A inclinação das projetantes é de  $60^\circ$ , pelo que o ângulo que a reta  $r$  faz, no espaço, com o plano *axonométrico*, é um ângulo de  $60^\circ$  – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo  $Z$  e é ortogonal ao plano *axonométrico* (trata-se do ângulo entre uma reta e um plano) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta  $r$ ) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspetiva do eixo  $Z$ ). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta  $r_r$  faz com a perspetiva do eixo  $Z$  (que é a charneira  $e$ , por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta  $r_r$  com a perspetiva do eixo  $Z$  é a perspetiva do ponto  $P$  (é o vértice do ângulo entre a reta  $r_r$  e a perspetiva do eixo  $Z$ ).

O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva da cota da face superior do cubo –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da cota dos vértices de maior cota do sólido.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P'_r$  e pela perspetiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XZ$ ).

### Representação do plano horizontal (de nível) que contém a face superior do cubo:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspetiva do eixo  $Z$ , a perspetiva do ponto  $P$ , que é o ponto do eixo  $Z$  que tem a cota da face superior do cubo. O plano horizontal (de nível)  $v'$  que contém a face superior do cubo (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ) contém necessariamente esse ponto.

Assim, pela perspetiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $v'$  –  $f_{v'}$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v'$ ) e  $p_{v'}$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v'$ ).

Note que  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v'$  com afastamento nulo – a perspetiva de  $f_{v'}$  é necessariamente paralela ao eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{v'}$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v'$ ) é uma reta de topo do plano  $v'$ , com abcissa nula –  $p_{v'}$  é necessariamente paralelo ao eixo  $Y$ . Note que, **nesta situação particular**, em função da inclinação e da direção das projetantes  $e$ , ainda, do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  (que se efetuou para a direita), a perspetiva do traço lateral do plano  $v'$  ( $p_{v'}$ ) fica coincidente com a reta  $r_r$  (a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O plano  $v'$  é um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). Por outro lado, o plano  $v'$  é, também, um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_{v'}$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação da perspectiva do ponto C':*

O ponto  $C'$  é um ponto do plano  $v'$ , pelo que a sua projeção frontal se situa necessariamente sobre o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal. Assim, por  $C'_2$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a *direção de afinidade*) – o ponto em que esta interseca a perspectiva de  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ) é  $C'_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $C'$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XZ$ .

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto  $C'$  determinou-se a perspectiva de  $C'_3$ , a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que  $C'_3$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $C'_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C'$  e situa-se sobre  $p_{v'}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v'$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $C'$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $C'_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $C'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $C'_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $C'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $C'_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $C'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseçam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $C'$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $C'$  são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas dos pontos A', B' e D', a partir da direção de afinidade:*

As perspectivas dos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $D'$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $C'$ . Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $v'$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos três pontos ( $A'_3$ ,  $B'_3$  e  $D'_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ).

Por fim, atendendo a que o ponto  $A'$  tem afastamento nulo, o ponto  $A'$  situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que se tem imediatamente  $A'_2 \equiv A'$  (sendo  $A'$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $A'$ ). De forma semelhante, e atendendo a que o ponto  $B'$  tem abcissa nula, o ponto  $B'$  situa-se no *plano coordenado YZ*, pelo que se tem imediatamente  $B'_3 \equiv B'$  (sendo  $B'$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $B'$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A'$  e  $C'$ , porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $A'_2 \equiv C'_2$ . Por outro lado, os pontos  $B'$  e  $D'$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $B'_3 \equiv D'_3$ .

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a face inferior do cubo:*

Para determinarmos a perspectiva da cota do plano horizontal (de nível) da face inferior do cubo conduziu-se, pelo ponto do eixo  $Z_1'$  que tem a cota do plano  $v$  (em rebatimento), uma paralela à direção de afinidade  $d$ , o que nos permitiu determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , a perspectiva de um ponto (que não se identificou) com 3 cm de cota (a cota dos pontos  $A$  e  $B$  e da face inferior do sólido). O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a face inferior do cubo (o quadrado  $[ABCD]$ ) contém necessariamente esse ponto.

Assim, pela perspectiva desse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a perspectiva de  $f_v$  é necessariamente paralela ao eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula –  $p_v$  é necessariamente paralelo ao eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação das perspectivas dos pontos A, B, C e D, a partir da direção de afinidade:*

As perspectivas dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $C'$ . Atendendo a que os quatro pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante lateral, as perspectivas das projeções laterais dos quatro pontos ( $A'_3$ ,  $B'_3$ ,  $C'_3$  e  $D'_3$ ) situam-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Por fim, atendendo a que o ponto  $A$  tem afastamento nulo, o ponto  $A$  situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que se tem imediatamente  $A_2 \equiv A$  (sendo  $A$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ ). De forma semelhante, e atendendo a que o ponto  $B$  tem abcissa nula, o ponto  $B$  situa-se no *plano coordenado YZ*, pelo que se tem imediatamente  $B_3 \equiv B$  (sendo  $B$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos  $A$  e  $C$ , porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem  $A_2 \equiv C_2$ . Por outro lado, os pontos  $B$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem  $B_3 \equiv D_3$ .

*Determinação das perspectivas do cubo:*

Em seguida, desenhou-se a *perspectiva do prisma*, começando pelo seu contorno aparente – o *contorno aparente da perspectiva* do prisma é a linha quebrada fechada  $[AA'B'CCD]$ . Existem dois vértices do cubo que não integram o contorno aparente da perspectiva do sólido – os vértices  $B$  e  $D'$ . O vértice  $D'$ , por ser o vértice mais próximo do observador, é *visível*, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'D']$ ,  $[C'D']$  e  $[DD']$ . O vértice  $B$ , por ser o vértice mais distante do observador, é *invisível*, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$ , e  $[BC]$  e  $[BB']$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por fim, representaram-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontal, frontal e lateral do cubo.

A **perspetiva da projeção horizontal do cubo** é limitada pelo quadrado  $[A'_1B'_1C'_1D'_1]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, parte da projeção horizontal do cubo é invisível (por estar oculta pelo próprio cubo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal do cubo** é limitada pelo paralelogramo  $[B_2D_2D'_2B'_2]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, parte da projeção frontal do cubo é invisível (por estar oculta pelo próprio cubo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do prisma** é limitada pelo paralelogramo  $[A_3C_3C'_3A'_3]$ . Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, parte da projeção lateral do cubo é invisível (por estar oculta pelo próprio cubo, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. Os planos  $v$  e  $v'$  (os planos que contêm as faces horizontais do cubo), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do cubo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo **Z**, da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$ , do arco de transporte da cota do ponto **P** para o rebatimento do plano projetante do eixo **Z** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XZ**, à inversão do seu rebatimento e à representação dos pontos e do cubo em Dupla Projeção Ortogonal.

## 1209.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de  $40^\circ$  (que é um ângulo agudo) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $135^\circ$  (que é um ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa dos pontos **A** e **B'** (2 cm e 7 cm, respetivamente) sobre o eixo **X** (em verdadeira grandeza), bem como a cota do ponto **A** (3 cm) sobre o eixo **Z** (também em verdadeira grandeza). Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato,  $A_2$  (a projeção horizontal do ponto **A**), bem como  $A_0$  e  $B'_0$  (as referências das abscissas dos pontos **A** e **B'**, no eixo **X**). Note que o eixo **X** e o eixo **Z** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

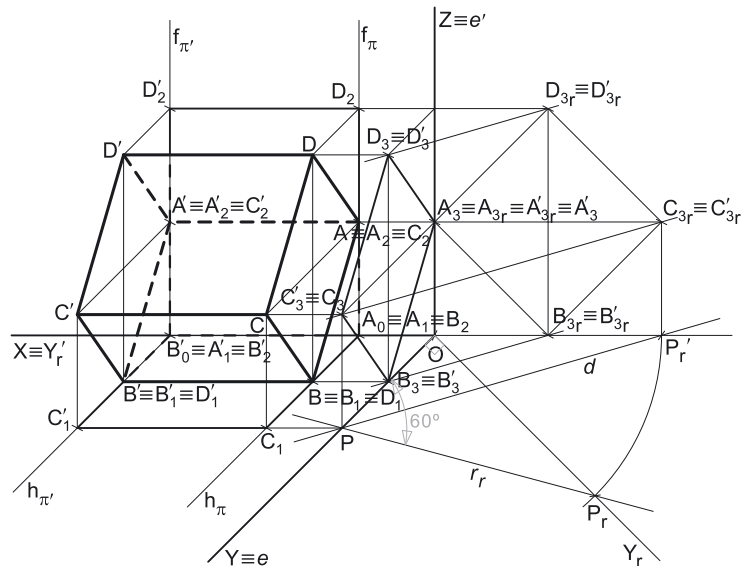
Tendo em conta que a aresta  $[AA']$  do sólido está contida no *plano coordenado XZ*, sabe-se que o ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que a sua projeção horizontal ( $A_1$ ) se situa necessariamente no eixo **X** e a sua projeção lateral ( $A_3$ ) situa-se no eixo **Z**. Por fim, atendendo a que o ponto **A** se situa no *plano coordenado XZ*, tem-se imediatamente  $A_2 \equiv A$  (sendo **A** a perspetiva propriamente dita do ponto **A**).

Tendo em conta que a aresta  $[BB']$  do sólido está contida no *plano coordenado XY*, sabe-se que o ponto **B'** tem cota nula, pelo que a sua projeção frontal ( $B'_2$ ) se situa necessariamente no eixo **X**.

Na sequência do procedimento anterior foi possível representar os planos de perfil que contêm as duas bases do sólido.

### Representação do plano de perfil que contém a base mais à direita do prisma:

O plano  $\pi$  é o plano de perfil que contém a base mais à direita do prisma (a base  $[ABCD]$ ). O plano  $\pi$  foi representado pelo seu traço frontal ( $f_\pi$ ) e pela perspetiva do seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). O plano  $\pi$  é um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*), pelo que projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ). Em função disso mesmo, o traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ) passa pela projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ). Note que  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$  com afastamento nulo – é necessariamente paralelo ao eixo **Z**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenhou-se a perspectiva de  $h_{\pi}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$  e é concorrente com  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) num ponto do eixo  $X$ . Note que  $h_{\pi}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$ , com cota nula.

O plano  $\pi$  é também um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\pi}$ ).

*Representação do plano de perfil que contém a base mais à esquerda do prisma:*

O plano  $\pi'$  é o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do prisma (a base  $[A'B'C'D']$ ). O plano  $\pi'$  foi representado pelo seu traço frontal ( $f_{\pi'}$ ) e pela perspectiva do seu traço horizontal ( $h_{\pi'}$ ). O plano  $\pi'$  é um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ), pelo que projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_{\pi'}$ ). Em função disso mesmo, o traço frontal do plano  $\pi'$  ( $f_{\pi'}$ ) passa pela projeção frontal do ponto  $B'$  ( $B'_2$ ). Salienta-se que  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi'$  com afastamento nulo – é necessariamente paralelo ao eixo  $Z$ .

Em seguida, desenhou-se a perspectiva de  $h_{\pi'}$  (o traço horizontal do plano  $\pi'$ ), que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$  e é concorrente com  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ) num ponto do eixo  $X$ . Note que  $h_{\pi'}$  (o traço horizontal do plano  $\pi'$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi'$ , com cota nula.

O plano  $\pi'$  é também um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\pi'}$ ).

### Resolução:

Os planos que contêm as bases do prisma (que são planos de perfil), não são paralelos ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que as bases **não se projetam em verdadeira grandeza** (as perspectivas dos dois quadrados não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que as bases estão contidas em planos de perfil, que são paralelo ao plano coordenado de perfil (o plano  $YZ$ ), sabe-se que as bases se projetam em verdadeira grandeza no plano coordenado  $YZ$  – os quadrados e as suas projeções laterais (as suas projeções no plano coordenado  $YZ$ ) são figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado  $YZ$**  (o plano no qual as bases se projetam em verdadeira grandeza).

*Rebatimento do plano  $YZ$  e representação do prisma em Dupla Projeção Ortogonal:*

Assim, efetuou-se o rebatimento do plano coordenado  $YZ$  e, dessa forma, representou-se o prisma em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal e lateral.

Ao rebater o plano  $YZ$  sobre o plano axonométrico, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é o eixo  $Z$ , que se identificou imediatamente. O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $X$ , facto que se assinalou devidamente –  $X \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano  $YZ$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $YZ$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $YZ$  com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Em seguida, representou-se o ponto  $B'$  pela sua projeção lateral, em rebatimento (em função do seu afastamento, em verdadeira grandeza), para o que foi necessário desenhar a sua linha de chamada (em rebatimento), para a direita do eixo  $Z$ .  $B'_{3r}$  é a projeção lateral do ponto  $B'$  em rebatimento (no rebatimento do plano  $YZ$ ). A projeção lateral do ponto  $A$  ( $A_3$ ) situa-se no eixo  $Z$ , que é a charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $A_{3r} \equiv A_3$ .

Tendo em conta que se trata de um **prisma regular**, as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases, que são retas fronto-horizontais (projetantes laterais). Assim, a projeção lateral do ponto  $B$  (o vértice da base  $[ABCD]$  que é consecutivo ao vértice  $A$ ) está coincidente com a projeção lateral do ponto  $B'$  (o vértice correspondente da base  $[A'B'C'D']$ ). Nesse sentido, foi possível identificar, de forma imediata,  $B_{3r}$  (a projeção lateral do ponto  $B$ , em rebatimento) – tem-se, imediatamente,  $B_{3r} \equiv B'_{3r}$ .

A partir de  $A_{3r}$  e  $B_{3r}$ , foi possível efetuar a construção da projeção lateral do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), o que nos permitiu determinar  $C_{3r}$  e  $D_{3r}$  (as projeções laterais dos outros dois vértices do polígono, em rebatimento) – o quadrado  $[A_{3r}B_{3r}C_{3r}D_{3r}]$  é a projeção lateral do quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento.

A partir da construção da projeção lateral do quadrado (em rebatimento), foi possível concluir a representação do prisma em Dupla Projeção Ortogonal. As projeções laterais dos vértices da base  $[A'B'C'D']$  estão coincidentes com as projeções laterais dos vértices da base  $[ABCD]$ , pois as arestas laterais do sólido são projetantes laterais – tem-se, imediatamente,  $A'_{3r} \equiv A_{3r}$ ,  $B'_{3r} \equiv B_{3r}$  e  $D'_{3r} \equiv D_{3r}$ .

Conduzindo, pela projeção lateral de cada ponto (em rebatimento) a respetiva linha de chamada (eu é perpendicular ao eixo  $Z$ ), determinaram-se as projeções frontais de todos os vértices do prisma. Os pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  pertencem ao plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base mais à direita do prisma), pelo que as suas projeções frontais ( $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ , respetivamente) se situam sobre  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal. Os pontos  $A'$ ,  $C'$  e  $D'$  pertencem ao plano  $\pi'$  (o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do prisma), pelo que as suas projeções frontais ( $A'_2$ ,  $C'_2$  e  $D'_2$ , respetivamente) se situam sobre  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ), pois o plano  $\pi'$  é igualmente um plano projetante frontal.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $YZ$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $YZ$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Y<sub>r</sub>** está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **Y**).

Em seguida, transportou-se, para o eixo **Y<sub>r</sub>**, o afastamento do ponto **C**, a partir de **C<sub>3r</sub>**, com uma paralela ao eixo **Z** – note que **C** é um dos vértices de maior afastamento do prisma, o que nos permite um maior rigor dos traçados. Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto **P<sub>r</sub>**, no eixo **Y<sub>r</sub>** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do ponto **C** ( $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto **C**, no eixo **Y<sub>r</sub>**, pelo rebatimento do plano **YZ**).

Para relacionar o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspectiva é necessário transportar o ponto **P** para o rebatimento do eixo **Y**. Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto **P** para o eixo **Y<sub>r</sub>**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Y**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Sublinha-se que o ponto **P<sub>r</sub>** é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, enquanto o ponto **P<sub>r</sub>** era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do *plano coordenado YZ*.

A inclinação das projetantes é de 60°, pelo que o ângulo que a reta **r** faz, no espaço, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 60° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Y** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do ângulo entre uma reta e um plano) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (a reta **r**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Y**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r<sub>r</sub>** faz com a perspectiva do eixo **Y** (que é a charneira **e**, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r<sub>r</sub>** com a perspectiva do eixo **Y** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r<sub>r</sub>** e a perspectiva do eixo **Y**).

O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento dos pontos **C** e **C'** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento dos vértices de maior afastamento do sólido.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **YZ**).

#### *Inversão do rebatimento do plano coordenado YZ e determinação da perspectiva do ponto C:*

As projeções do ponto **C** (a projeção lateral e a projeção frontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **C** – a linha de chamada do ponto **C** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **C<sub>2</sub>**, outro extremo em **C<sub>3</sub>** e um vértice no eixo **Z**. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **C** que está contida no plano **YZ** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **Z** e que tem um extremo em **C<sub>3</sub>** e o outro extremo no eixo **Z**. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **C** é o segmento que é perpendicular ao eixo **Z** e que tem um extremo em **C<sub>2r</sub>** e o outro extremo no eixo **Z**. **Em perspectiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **C** (a parte que se situa no plano **YZ**) é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y** e tem um extremo no eixo **Z**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspectiva** da parte da linha de chamada do ponto **C** que se situa no plano **YZ**. Em seguida, por **C<sub>3r</sub>**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto **C** (anteriormente desenhada) é **C<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **YZ**.

A partir das perspectivas do afastamento e da abscissa do ponto **C** determinou-se a perspectiva de **C<sub>1</sub>**, a sua projeção horizontal (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **C<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **C<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C** e situa-se sobre **h<sub>π</sub>** (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **C**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **C<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **C<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **C<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersejam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **C** são dois vértices espacialmente opostos.

#### *Determinação das perspectivas dos pontos B e D, a partir da direção de afinidade:*

As perspectivas dos pontos **B** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **C**. Atendendo a que os dois pontos pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos dois pontos (**B<sub>1</sub>** e **D<sub>1</sub>**) situam-se sobre a perspectiva de **h<sub>π</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A** e **C**, porque se situam na mesma reta de topo (que é projetante frontal), têm as suas projeções frontais coincidentes, pelo que se tem **A<sub>2</sub> ≡ C<sub>2</sub>**. Por outro lado, os pontos **B** e **D**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **B<sub>1</sub> ≡ D<sub>1</sub>**.

#### *Determinação das perspectivas dos pontos A', C' e D', a partir da direção de afinidade:*

As perspectivas dos pontos **A'**, **C'** e **D'** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **C**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $\pi'$ , que é um plano projetante horizontal, as perspectivas das projeções horizontais dos três pontos (**A'<sub>1</sub>**, **C'<sub>1</sub>** e **D'<sub>1</sub>**) situam-se sobre a perspectiva de **h<sub>π'</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi'$ ).

Salienta-se, ainda, que os pontos **A'** e **C'**, porque se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), têm as suas projeções horizontais coincidentes, pelo que se tem **A'<sub>1</sub> ≡ C'<sub>1</sub>**. Por outro lado, os pontos **B'** e **D'**, porque se situam na mesma reta fronto-horizontal (que é projetante lateral), têm as suas projeções laterais coincidentes, pelo que se tem **B'<sub>3</sub> ≡ D'<sub>3</sub>**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, os vértices da base mais à esquerda (os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**) e os vértices correspondentes da base mais à direita (os pontos **A**, **B**, **C** e **D**, respetivamente) situam-se nas mesmas retas projetantes laterais, pelo que têm as respetivas projeções laterais coincidentes – tem-se  $A'_3 \equiv A_3$ ,  $B'_3 \equiv B_3$ ,  $C'_3 \equiv C_3$  e  $D'_3 \equiv D_3$ .

#### Determinação das perspetivas do prisma:

Em seguida, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada **[ABB'C'D]**. Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – os vértices **A'** e **C**. O vértice **C**, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]** (da base **[ABCD]**) e a aresta lateral **[CC']**. O vértice **A'**, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']** e **[A'D']** (da base **[A'B'C'D']**) e a aresta lateral **[AA']**.

Por fim, representaram-se, ainda, as perspetivas das projeções horizontal, frontal e lateral do prisma.

A **perspetiva da projeção horizontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo **[A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C'<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>]**. Todas as arestas invisíveis, em projeção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, parte da projeção horizontal do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção frontal do prisma** é limitada pelo paralelogramo **[B<sub>2</sub>D<sub>2</sub>D'<sub>2</sub>B'<sub>2</sub>]**. Todas as arestas invisíveis, em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção frontal), pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, parte da projeção frontal do prisma é invisível (por estar oculta pelo próprio prisma, que é opaco), facto que se assinalou convenientemente, com a convenção adequada (traço interrompido) – trata-se de uma **invisibilidade por ocultação**.

A **perspetiva da projeção lateral do prisma** é limitada pelo paralelogramo **[A'<sub>3</sub>B'<sub>3</sub>C'<sub>3</sub>D'<sub>3</sub>]**. Todas as arestas invisíveis, em projeção lateral, estão ocultas por arestas visíveis (em projeção lateral), pelo que, em projeção lateral, não existe qualquer **invisibilidade por projeção** a assinalar. Por outro lado, também não existe qualquer parte da projeção lateral do prisma que esteja oculta pelo prisma (que é opaco), pelo que, em projeção lateral, também não existe qualquer **invisibilidade por ocultação** a assinalar.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. Os planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos que contêm as bases do prisma), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos respetivos traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. A perspetiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades que se verificam), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do prisma, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte** (incluindo as invisibilidades referidas). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do eixo **Y<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d**, do arco de transporte do afastamento do ponto **P** para o rebatimento do plano projetante do eixo **Y** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **YZ**, à inversão do seu rebatimento e à representação dos pontos e do prisma em Dupla Projeção Ortogonal.



(continuação da página anterior)

#### Rebatimento do plano coordenado $XZ$ :

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XZ$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado  $[RT]$  do triângulo fundamental (o lado que se opõe à perspectiva do eixo  $Y$ ). Os pontos  $R$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O rebatimento do plano coordenado  $XZ$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano  $XZ$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $O$ , o ponto médio do lado  $[RT]$  do triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ ) e determinou-se  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

#### Construção da projeção frontal do quadrado, em verdadeira grandeza:

No plano  $XZ$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $A$  (4 cm, em verdadeira grandeza). Tendo em conta que o ponto  $A$  tem afastamento e cota nulos, o ponto  $A$  é um ponto do eixo  $X$ . Assim, a representação da abscissa do ponto  $A$  em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $X_r'$ , permitiu-nos determinar, de forma imediata, a projeção frontal do ponto  $A$  em rebatimento ( $A_{2r}$ ).

Uma vez que o quadrado está em verdadeira grandeza (porque está no plano  $XZ$  rebatido), foi possível, em verdadeira grandeza, medir o ângulo de  $30^\circ$  que o lado  $[AB]$  faz com o eixo  $X$  (com abertura à esquerda, como o enunciado refere expressamente) e desenhar a reta suporte (em rebatimento) do lado  $[AB]$ . Em seguida, sobre essa reta suporte mediram-se 5 cm (o comprimento do lado do quadrado) e determinou-se  $B_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $B$ , em rebatimento).

A partir de  $A_{2r}$  e  $B_{2r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XZ$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{2r}$  e  $D_{2r}$  (as projeções frontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}]$  é a projeção frontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento). Note que se garantiu que o quadrado se situa no espaço do  $1^\circ$  Triedro, como o enunciado pede expressamente.

Tenha em conta que, nesta situação particular, em que o quadrado está contido no plano coordenado  $XZ$  (todos os seus vértices têm afastamento nulo), os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  estão coincidentes com as suas projeções frontais. No entanto, porque essa é uma situação particular e não uma situação universal, optou-se por apresentar a situação universal – ao rebater o plano coordenado  $XZ$ , estamos a rebater a **projeção frontal da figura**, razão pela qual se optou por representar as projeções frontais dos pontos (em rebatimento) e não os próprios pontos.

#### Determinação da perspectiva do quadrado $[ABCD]$ :

Para determinar a perspectiva do quadrado  $[ABCD]$  é necessário inverter o rebatimento o que se processa com o recurso a perpendiculares à charneira.

O ponto  $A$  é um ponto do eixo  $X$ . Assim, por  $A_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $A$  em rebatimento) conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ .

Para inverter o rebatimento dos restantes vértices do quadrado optou-se por recorrer a retas do plano  $XZ$ , às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento do ponto  $D$  recorreu-se à reta  $r$ , que é a reta suporte do lado  $[AD]$  do quadrado. A reta  $r_{2r}$  (que está definida por  $A_{2r}$  e por  $D_{2r}$ ) é a projeção frontal da reta  $r$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção frontal da reta  $r$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto, que é  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta  $r_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $M_{2r}$  (que é a projeção frontal do ponto da reta  $r$  que tem abscissa nula).

Por  $M_{2r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $M_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $M$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . A projeção frontal da reta  $r$  ( $r_2$ ), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ) e o ponto  $M_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $M$ ). Tendo em conta que os pontos  $A$  e  $M$  estão contidos no plano  $XZ$ , bem como a reta  $r$ , tem-se imediatamente  $A \equiv A_2$  ( $A$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ ),  $M \equiv M_2$  ( $M$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $M$ ) e  $r \equiv r_2$  ( $r$  é a perspectiva propriamente dita da reta  $r$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $D_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $D_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $D$ ), sobre  $r_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $r$ ). Uma vez que o ponto  $D$  pertence à reta  $r$  e ao plano  $XZ$ , tem-se imediatamente  $D \equiv D_2$  ( $D$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos  $B$  e  $C$  recorreu-se à reta  $s$ , que contém aqueles pontos (a reta  $s$  é a reta suporte do lado  $[BC]$  do quadrado) – a reta  $s_{2r}$  é a projeção frontal da reta  $s$ , em rebatimento, e passa por  $B_{2r}$  e por  $C_{2r}$  (a reta  $s$  está definida por dois pontos). Salienta-se que a reta  $s$  é paralela à reta  $r$ , porque se trata de retas suporte de lados paralelos do quadrado. A reta  $s_{2r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $N_{2r}$  (que é a projeção frontal, em rebatimento, do ponto de concorrência da reta  $s$  com o eixo  $X$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Por  $N_2$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $N_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $N$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ . A projeção frontal da reta  $s$  ( $s_2$ ), em perspectiva, está definida por um ponto (o ponto  $N_2$ , que é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $N$ ) e por uma direção (é paralela a  $r_2$ ). Tendo em conta que tanto o ponto  $N$  como a reta  $s$  estão contidos no plano  $XZ$ , tem-se imediatamente  $N \equiv N_2$  ( $N$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $N$ ) e  $s \equiv s_2$  ( $s$  é a perspectiva propriamente dita da reta  $s$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_2$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $C$ ), sobre  $s_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $s$ ). Uma vez que o ponto  $C$  pertence à reta  $s$  e ao plano  $XZ$ , tem-se imediatamente  $C \equiv C_2$  ( $C$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$ ). Repetiu-se o processo para o ponto  $B$ , o que nos permitiu determinar  $B_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$ ) e  $B$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ ).

A partir das perspectivas dos quatro vértices do quadrado  $[ABCD]$ , desenhou-se a perspectiva da figura. Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções horizontais nem das projeções laterais dos vértices do quadrado, por não serem necessárias.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o quadrado, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do quadrado representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado  $XZ$* , da translação do plano  $XZ$  rebatido, da construção da projeção frontal do quadrado em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira.

## 1213.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

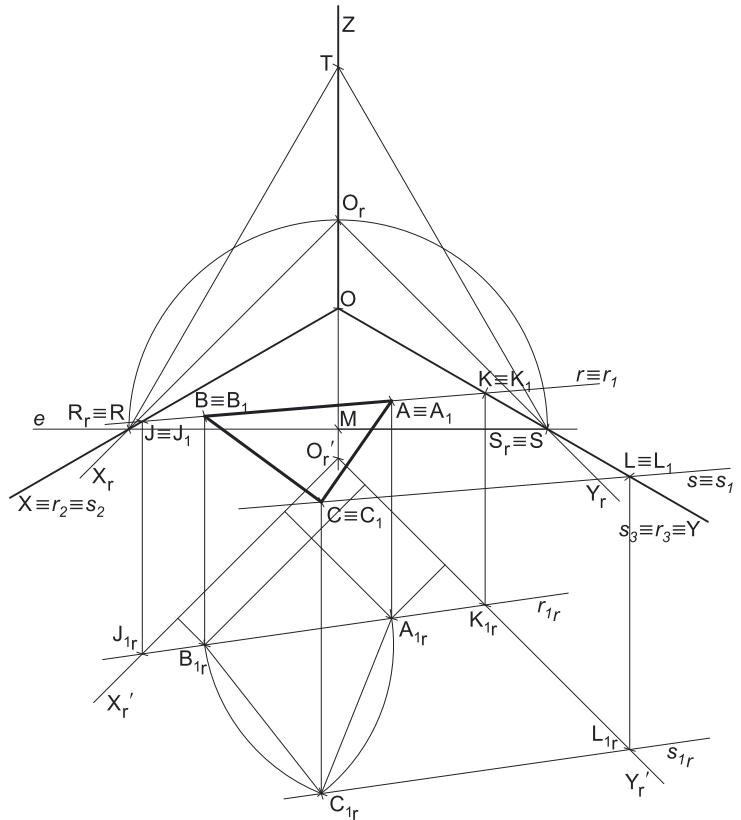
### Resolução:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o *plano coordenado  $XY$* ) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o triângulo  $[ABC]$  **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado  $XY$**  (o plano que contém o triângulo).

O rebatimento do *plano coordenado  $XY$*  pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

#### Rebatimento do plano coordenado $XY$ :

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado  $XY$* ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado  $[RS]$  do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo  $Y$ ). Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano *XY*. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **1091**, e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo **Z**) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Y<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano *XY* rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>**. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**.

*Construção da projeção horizontal do triângulo, em verdadeira grandeza:*

No plano *XY* rebatido e transladado, sobre o eixo **X<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos **A** e **B** em verdadeira grandeza (2 cm e 6 cm, respetivamente). Em seguida, no plano *XY* rebatido e transladado, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **A** e **B** em verdadeira grandeza (4 cm e 1 cm, respetivamente). A partir das abscissas e dos afastamentos dos dois pontos, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, em rebatimento (**A<sub>1r</sub>** e **B<sub>1r</sub>**, respetivamente).

A partir de **A<sub>1r</sub>** e **B<sub>1r</sub>** efetuou-se a construção do **projeção horizontal do triângulo**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano *XY*), o que nos permitiu determinar **C<sub>1r</sub>**, (a projeção horizontal do terceiro vértice do triângulo, em rebatimento) – o triângulo [**A<sub>1r</sub>B<sub>1r</sub>C<sub>1r</sub>**] é a projeção horizontal do triângulo [**ABC**], em verdadeira grandeza (em rebatimento). Note que se atendeu, na construção efetuada, ao facto de o triângulo se situar no espaço do 1.<sup>o</sup> *Triedro* (como o enunciado refere expressamente).

Tenha em conta que, nesta situação particular, em que o triângulo está contido no *plano coordenado XY* (todos os seus vértices têm cota nula), os pontos **A**, **B** e **C** estão coincidentes com as suas projeções horizontais. No entanto, porque essa é uma situação particular e não uma situação universal, optou-se por apresentar a situação universal – ao rebater o *plano coordenado XY*, estamos a rebater **a projeção horizontal da figura**, razão pela qual se optou por representar as projeções horizontais dos pontos (em rebatimento) e não os próprios pontos.

*Determinação da perspectiva do triângulo [ABC]:*

Para determinar a perspectiva do triângulo [**ABC**] é necessário inverter o rebatimento o que se processa com o recurso a perpendiculares à charneira.

Para inverter o rebatimento dos vértices do triângulo, a situação mais rápida e eficaz passa pelo recurso a retas do plano *XY*, às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos **A** e **B** recorreu-se à reta **r**, que é a reta suporte do lado [**AB**] do triângulo. A reta **r<sub>1r</sub>**, (que está definida por **A<sub>1r</sub>** e por **B<sub>1r</sub>**) é a projeção horizontal da reta **r**, em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta **r**, que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta **r<sub>1r</sub>** interseca o eixo **X<sub>r</sub>'** no ponto **J<sub>1r</sub>**, (que é a projeção horizontal do ponto da reta **r** que tem afastamento nulo). Por **J<sub>1r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se **J<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **J**) sobre a perspectiva do eixo **X**. Já temos um ponto para definir a reta, que é **J<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **J**). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta **r<sub>1r</sub>** interseca o eixo **Y<sub>r</sub>'** no ponto **K<sub>1r</sub>**, (que é a projeção horizontal do ponto da reta **r** que tem abscissa nula). Por **K<sub>1r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se **K<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **K**) sobre a perspectiva do eixo **Y**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta. A projeção horizontal da reta **r** (**r<sub>1r</sub>**), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto **J<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **J**) e o ponto **K<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **K**).

Tendo em conta que os pontos **J** e **K** estão contidos no plano *XY*, bem como a reta **r**, tem-se imediatamente **J**  $\equiv$  **J<sub>1</sub>** (**J** é a perspectiva propriamente dita do ponto **J**), **K**  $\equiv$  **K<sub>1</sub>** (**K** é a perspectiva propriamente dita do ponto **K**) e **r**  $\equiv$  **r<sub>1r</sub>** (**r** é a perspectiva propriamente dita da reta **r**).

Por fim, conduziu-se, por **A<sub>1r</sub>**, uma perpendicular à charneira e determinou-se **A<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**), sobre **r<sub>1r</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal da reta **r**). Uma vez que o ponto **A** pertence à reta **r** e ao plano *XY*, tem-se imediatamente **A**  $\equiv$  **A<sub>1</sub>** (**A** é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**). Repetiu-se este procedimento para o ponto **B** (conduzindo, por **B<sub>1r</sub>**, uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **B**, sobre a perspectiva propriamente dita da reta **r** (tem-se **B**  $\equiv$  **B<sub>1</sub>**, à semelhança do exposto para o ponto **A**).

Para inverter o rebatimento do ponto **C** recorreu-se à reta **s**, que contém o ponto **C** (a reta **s** é a reta paralela à reta **r** que passa pelo ponto **C**). A reta **s<sub>1r</sub>** é a projeção horizontal da reta **s**, em rebatimento – a reta **s** está definida por um ponto (o ponto **C<sub>1r</sub>**) e por uma direção (a direção da reta **r<sub>1r</sub>**). A reta **s<sub>1r</sub>** interseca o eixo **Y<sub>r</sub>'** no ponto **L<sub>1r</sub>**, (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto de concorrência da reta **s** com o eixo **Y**).

Por **L<sub>1r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se **L<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **L**) sobre a perspectiva do eixo **Y**. A projeção horizontal da reta **s** (**s<sub>1r</sub>**), em perspectiva, está definida por um ponto (o ponto **L<sub>1</sub>**, que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **L**) e por uma direção (é paralela a **r<sub>1r</sub>**). Tendo em conta que tanto o ponto **L** como a reta **s** estão contidos no plano *XY*, tem-se imediatamente **L**  $\equiv$  **L<sub>1</sub>** (**L** é a perspectiva propriamente dita do ponto **L**) e **s**  $\equiv$  **s<sub>1r</sub>** (**s** é a perspectiva propriamente dita da reta **s**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, conduziu-se, por  $C_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ), sobre  $s_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $s$ ). Uma vez que o ponto  $C$  pertence à reta  $s$  e ao plano  $XY$ , tem-se imediatamente  $C \equiv C_1$  ( $C$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$ ).

A partir das perspectivas dos três vértices do triângulo  $[ABC]$ , desenhou-se a perspectiva da figura. Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais dos vértices do triângulo, por não serem necessárias.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o triângulo, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado  $XY$* , da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção da projeção horizontal do triângulo em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira.

## 1214.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[ABC]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[ABC]$  são arbitrárias.

### Resolução:

O plano que contém o quadrado  $[RSTU]$  (um plano de perfil) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o quadrado  $[RSTU]$  **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano de perfil, que é paralelo ao *plano coordenado de perfil* (o plano  $YZ$ ), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado  $YZ$*  – o quadrado  $[RSTU]$  e a sua projeção lateral (a sua projeção no *plano coordenado  $YZ$* ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado  $YZ$**  (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

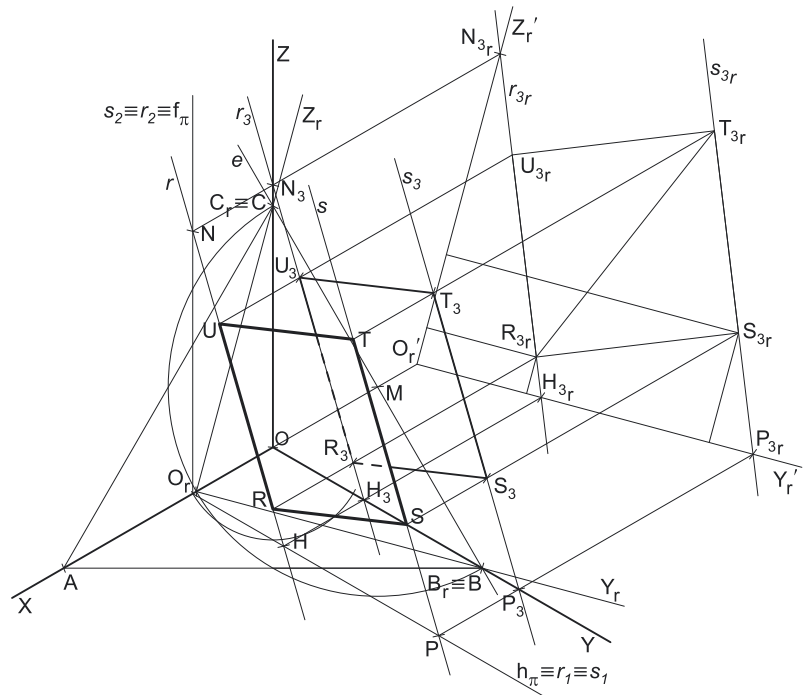
O rebatimento do *plano coordenado  $YZ$*  pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

#### Rebatimento do plano coordenado $YZ$ :

Assim, Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado  $YZ$* ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado  $[BC]$  do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo  $X$ ). Os pontos  $B$  e  $C$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $B_r \equiv B$  e  $C_r \equiv C$ .

O rebatimento do *plano coordenado  $YZ$*  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano  $YZ$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do lado  $[BC]$  do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $X$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $B_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $C_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $Y_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **X**. O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

*Construção da projeção lateral do quadrado, em verdadeira grandeza:*

No plano **YZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os afastamentos dos pontos **R** e **S** em verdadeira grandeza (3 cm e 8 cm, respetivamente). Em seguida, no plano **YZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as cotas dos pontos **R** e **S** em verdadeira grandeza (1 cm e 3 cm, respetivamente). A partir dos afastamentos e das cotas dos dois pontos, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções laterais dos pontos **R** e **S**, em rebatimento ( $R_{3_r}$  e  $S_{3_r}$ , respetivamente).

A partir de  $R_{3_r}$  e  $S_{3_r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano **YZ**), o que nos permitiu determinar  $T_{3_r}$  e  $U_{3_r}$  (as projeções laterais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[R_{3_r}S_{3_r}T_{3_r}U_{3_r}]$  é a projeção lateral do quadrado  $[RSTU]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento). Note que se garantiu que o quadrado se situa no espaço do 1.<sup>o</sup> *Triedro*, como o enunciado pede expressamente.

Para determinar a perspectiva do quadrado  $[RSTU]$  é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $\pi$ , o plano de perfil que contém a figura.

*Representação do plano de perfil que contém o quadrado  $[RSTU]$ :*

O plano de perfil  $\pi$  que contém o quadrado é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de abcissa (a abcissa dos pontos **R** e **S**). Assim, há que determinar, sobre a perspectiva do eixo **X**, um ponto com 3 cm de abcissa. Tendo em conta que, numa perspectiva isométrica, os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível determinar a perspectiva da abcissa em qualquer eixo e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo **X**).

Nesse sentido, e tendo em conta que o afastamento do ponto **R** é igual à abcissa do plano  $\pi$  (que é 3 cm), e porque já se representou, no eixo  $Y_r'$ , essa medida, inverteu-se o rebatimento, com uma perpendicular à charneira, e determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **Y**, um ponto cujo afastamento é igual à abcissa do plano  $\pi$ . Assim, a distância desse ponto ao ponto **O** (medida sobre a perspectiva do eixo **Y**), é a perspectiva da abcissa do plano  $\pi$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo **X**. Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio até esse ponto, transportou-se a perspectiva da abcissa para a perspectiva do eixo **X**, determinando um ponto (na perspectiva do eixo **X**) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo **X** que tem 3 cm de abcissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém o quadrado  $[RSTU]$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ) e  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ). Note que  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$  com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**. Pelo seu lado,  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$ , com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

O plano  $\pi$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante horizontal (é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ).

*Determinação da perspectiva do quadrado  $[RSTU]$ :*

Para inverter o rebatimento dos vértices do quadrado optou-se por recorrer a retas do plano  $\pi$ , às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos **R** e **U** recorreu-se à reta  $r$ , que é a reta suporte do lado  $[RU]$  do quadrado. A reta  $r_{3_r}$  (que está definida por  $R_{3_r}$  e por  $U_{3_r}$ ) é a projeção lateral da reta  $r$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção lateral da reta  $r$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $r_{3_r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $H_{3_r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta  $r$  que tem cota nula). Por  $H_{3_r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $H_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **H**) sobre a perspectiva do eixo **Y**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **H**. A reta  $r$  é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto **H** é um ponto de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspectiva do ponto **H** situa-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $H_{3_r}$ . Já temos um ponto para definir a reta, que é o ponto **H**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $r_{3_r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $N_{3_r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta  $r$  que tem afastamento nulo). Por  $N_{3_r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $N_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **N**) sobre a perspectiva do eixo **Z**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **N**. A reta  $r$  é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto **N** é um ponto de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspectiva do ponto **N** situa-se sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $N_{3_r}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta.

A projeção lateral da reta  $r$  ( $r_3$ ), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto  $H_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **H**) e o ponto  $N_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **N**). Por outro lado, a perspectiva propriamente dita da reta  $r$  também está definida por dois pontos – as perspectivas propriamente ditas dos pontos **H** e **N**. Este raciocínio permitiu-nos desenhar a perspectiva da projeção lateral da reta  $r$  ( $r_3$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $r$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $R_{3_r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $R_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **R**), sobre  $r_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta  $r$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **R** sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $r$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto **U** (conduzindo, por  $U_{3_r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **U** (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $r$ ), bem como a perspectiva da projeção lateral do ponto **U** ( $U_3$ ), sobre a perspectiva da projeção lateral da reta  $r$  ( $r_3$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para inverter o rebatimento dos pontos **S** e **T** recorreu-se à reta **s**, que contém aqueles pontos (a reta **s** é a reta suporte do lado **[ST]** do quadrado) – a reta **s<sub>3r</sub>** é a projeção lateral da reta **s**, em rebatimento, e passa por **S<sub>3r</sub>** e por **T<sub>3r</sub>** (a reta **s** está definida por dois pontos). Salienta-se que a reta **s** é paralela à reta **r**, porque se trata de retas suporte de lados paralelos do quadrado. A reta **s<sub>3r</sub>** intersecta o eixo **Y<sub>r</sub>'** no ponto **P<sub>3r</sub>** (que é a projeção lateral, em rebatimento, do ponto da reta **s** com cota nula). Por **N<sub>3r</sub>** conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se **N<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **N**) sobre a perspectiva do eixo **Y**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **N**. A reta **s** é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto **N** é um ponto de **h <sub>$\pi$</sub>**  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspectiva do ponto **N** situa-se sobre a perspectiva de **h <sub>$\pi$</sub>**  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por **N<sub>3r</sub>**. Já temos um ponto para definir a reta **s**, que é o ponto **N**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta **s** é paralela à reta **r**, também já temos a direção que nos faltava para definir a reta **s**. Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção lateral da reta **s** (**s<sub>3</sub>**), bem como a sua perspectiva propriamente dita (**s**). A perspectiva da projeção lateral da reta **s** (**s<sub>3</sub>**) está definida por um ponto (**N<sub>3</sub>**, que é a perspectiva da projeção lateral do ponto **N**) e por uma direção (é paralela a **r<sub>3</sub>**, a perspectiva da projeção lateral da reta **r**). A perspectiva propriamente dita da reta **s** está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto **N**) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta **r**).

Por fim, conduziu-se, por **S<sub>3r</sub>**, uma perpendicular à charneira e determinou-se **S<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **S**), sobre **s<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral da reta **s**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **S** sobre a perspectiva propriamente dita da reta **s**, na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto **T** (conduzindo, por **T<sub>3r</sub>**, uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **T** (sobre a perspectiva propriamente dita da reta **s**), bem como a perspectiva da projeção lateral do ponto **T** (**T<sub>3</sub>**), sobre a perspectiva da projeção lateral da reta **s** (**s<sub>3</sub>**).

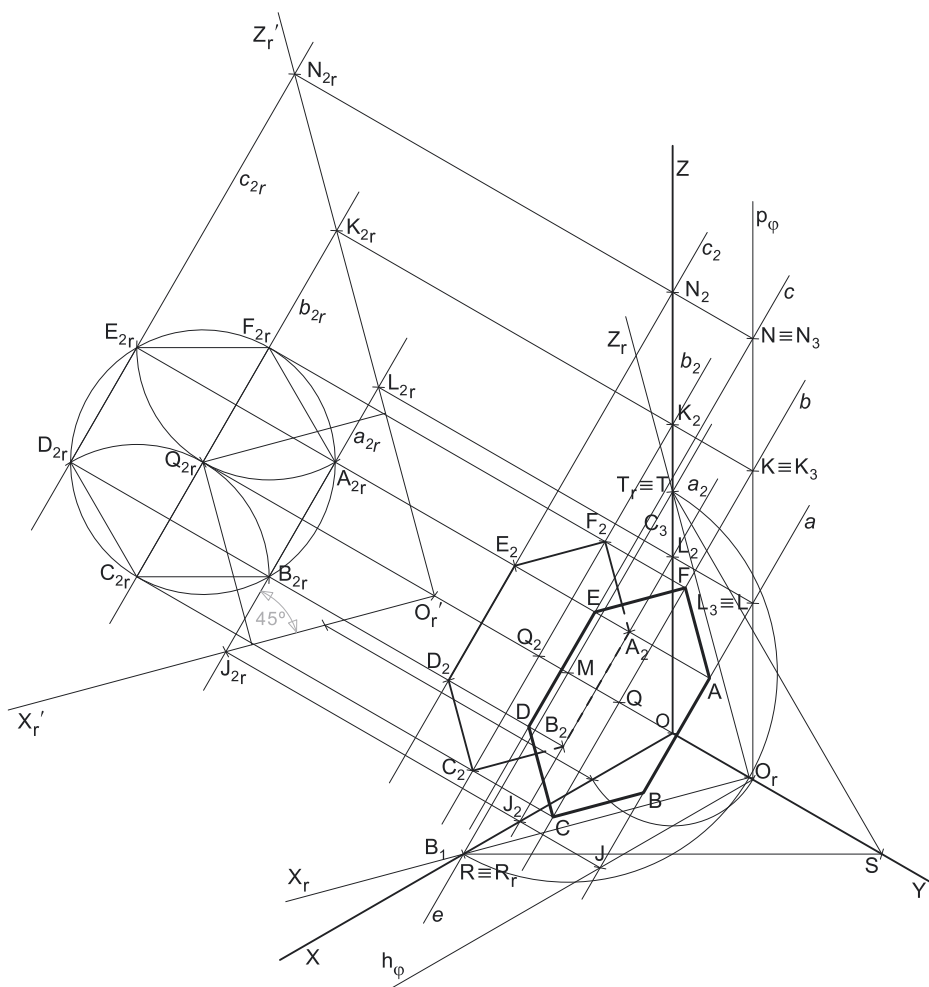
A partir das perspectivas dos quatro vértices do quadrado **[RSTU]**, desenhou-se a perspectiva da figura. Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções horizontais nem das projeções frontais dos vértices do quadrado, por não serem necessárias.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o quadrado, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do quadrado representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano que contém o quadrado), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado YZ*, da translação do plano **YZ** rebatido, da construção da projeção lateral do quadrado em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira.

1215.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

**Resolução:**

O plano que contém o hexágono **[ABCDEF]** (um plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o hexágono **[ABCDEF]** **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do hexágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o hexágono está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao *plano coordenado frontal* (o plano **XZ**), sabe-se que o hexágono se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* – o hexágono **[ABCDEF]** e a sua projeção frontal (a sua projeção no *plano coordenado XZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o hexágono se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

**Rebatimento do plano coordenado XZ:**

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[RT]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O rebatimento do *plano coordenado XZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[RT]** do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **1091**. e respetivo **relatório**).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

*Construção da projeção lateral do hexágono, em verdadeira grandeza:*

No plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $Q$  em verdadeira grandeza (5 cm). Em seguida, no plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto  $Q$  em verdadeira grandeza (5 cm). A partir da abscissa e da cota do ponto  $Q$ , em verdadeira grandeza, foi possível determinar a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento ( $Q_{2r}$ ).

O hexágono é o único polígono regular cujo lado é igual (tem o mesmo comprimento) do raio da circunferência em que se inscreve. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao hexágono (em verdadeira grandeza, em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção do hexágono, inscrito na circunferência. De acordo com os dados, dois dos lados do hexágono fazem, com o plano  $XY$ , ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para a direita). Assim, em projeção frontal (em rebatimento), dois dos lados do hexágono têm de fazer ângulos de  $45^\circ$  (de abertura para a direita) com o eixo  $X_r'$ .

Assim, efetuou-se a construção da **projeção frontal do hexágono**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os seis vértices do polígono (em rebatimento) – o hexágono  $[A_{2r}, B_{2r}, C_{2r}, D_{2r}, E_{2r}, F_{2r}]$  é a projeção frontal do hexágono  $[ABCDEF]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XZ$ . Tendo em conta que o enunciado é omissivo no que respeita aos vértices do hexágono, estes foram identificados de forma arbitrária, mas sequencial. Assim, os lados  $[A_{2r}, B_{2r}]$  e  $[D_{2r}, E_{2r}]$  são os lados do polígono que fazem os ângulos de  $45^\circ$  com o plano  $XY$  (de abertura para a direita).

Para determinar a perspectiva do hexágono  $[ABCDEF]$  é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a figura.

*Representação do plano frontal (de frente) que contém o hexágono  $[ABCDEF]$ :*

O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o hexágono é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $Q$ ). Assim, há que determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , um ponto com 3 cm de afastamento. Tendo em conta que, numa perspectiva isométrica, os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível determinar a perspectiva do afastamento em qualquer eixo e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo  $Y$ ). Tendo em conta que já temos dois dos eixos rebatidos (o eixo  $X$  e o eixo  $Z$ ), é possível, sobre qualquer deles, medir o afastamento do plano  $\varphi$  e, depois de determinar a sua perspectiva (afetada pela deformação inerente à projeção), transportá-la para a perspectiva do eixo correto (o eixo  $Y$ ).

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o afastamento do plano  $\varphi$  (3 cm) e determinou-se um ponto (que não se identificou) – esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo  $X$  que tem 3 cm de abscissa. Em seguida, inverteu-se o rebatimento, recorrendo a uma perpendicular à charneira, e determinou-se, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , um ponto cuja abscissa é igual ao afastamento do plano  $\varphi$ . Assim, a distância desse ponto ao ponto  $O$  (medida sobre a perspectiva do eixo  $X$ ), é a perspectiva do afastamento do plano  $\varphi$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio até esse ponto, transportou-se a perspectiva do afastamento para a perspectiva do eixo  $Y$ , determinando um ponto (na perspectiva do eixo  $Y$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo  $Y$  que tem 3 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o hexágono  $[ABCDEF]$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ). Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

*Determinação da perspectiva do hexágono  $[ABCDEF]$ :*

Para inverter o rebatimento dos vértices do hexágono optou-se por recorrer a retas do plano  $\varphi$ , às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos  $A$  e  $B$  recorreu-se à reta  $a$ , que é a reta suporte do lado  $[AB]$  do hexágono. A reta  $a_{2r}$  (que está definida por  $A_{2r}$  e por  $B_{2r}$ ) é a projeção frontal da reta  $a$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $a_{2r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $J_{2r}$  (que é a projeção frontal do ponto da reta  $a$  que tem cota nula). Por  $J_{2r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $J$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $\varphi$ , pelo que o ponto  $J$  é um ponto de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $J$  situa-se sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{2r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $a$ , que é o ponto  $J$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $a_2$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $L_2$  (que é a projeção frontal do ponto da reta  $a$  que tem abscissa nula). Por  $L_2$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $L$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $L$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $\varphi$ , pelo que o ponto  $L$  é um ponto de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $L$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $L_2$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $a$ .

A projeção frontal da reta  $a$  ( $a_2$ ), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto  $J_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $J$ ) e o ponto  $L_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $L$ ). Por outro lado, a perspectiva propriamente dita da reta  $a$  também está definida por dois pontos – as perspectivas propriamente ditas dos pontos  $J$  e  $L$ . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$  ( $a_2$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $A_2$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ), sobre  $a_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $B$  (conduzindo, por  $B_2$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ ), bem como a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$  ( $B_2$ ), sobre a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$  ( $a_2$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos  $C$  e  $F$  recorreu-se à reta  $b$ , que contém aqueles pontos (a reta  $b$  é a reta suporte da diagonal  $[CF]$  do hexágono) – a reta  $b_2$  é a projeção frontal da reta  $b$ , em rebatimento, e passa por  $C_2$ , e por  $F_2$ , (a reta  $b$  está definida por dois pontos). Salienta-se que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , porque a diagonal  $[CF]$  é paralela ao lado  $[AB]$  do hexágono. A reta  $b_2$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $K_2$  (que é a projeção frontal, em rebatimento, do ponto da reta  $b$  com abscissa nula). Por  $K_2$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $K$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $K$ . A reta  $b$  é uma reta do plano  $\varphi$ , pelo que o ponto  $K$  é um ponto de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $K$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $b$ , que é o ponto  $K$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ . Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção frontal da reta  $b$  ( $b_2$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $b$ ). A perspectiva da projeção frontal da reta  $b$  ( $b_2$ ) está definida por um ponto ( $K_2$ , que é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $K$ ) e por uma direção (é paralela a  $a_2$ , a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$ ). A perspectiva propriamente dita da reta  $b$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto  $K$ ) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_2$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $C$ ), sobre  $b_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $F$  (conduzindo, por  $F_2$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $F$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ ), bem como a perspectiva da projeção frontal do ponto  $F$  ( $F_2$ ), sobre a perspectiva da projeção frontal da reta  $b$  ( $b_2$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos  $D$  e  $E$  recorreu-se à reta  $c$ , que contém aqueles pontos (a reta  $c$  é a reta suporte do lado  $[DE]$  do hexágono) – a reta  $c_2$  é a projeção frontal da reta  $c$ , em rebatimento, e passa por  $D_2$ , e por  $E_2$ , (a reta  $c$  está definida por dois pontos). Salienta-se que a reta  $c$  é paralela às retas  $a$  e  $b$ , porque o lado  $[DE]$  é paralelo à diagonal  $[CF]$  e ao lado  $[AB]$  do hexágono. A reta  $c_2$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $N_2$  (que é a projeção frontal, em rebatimento, do ponto da reta  $c$  com abscissa nula). Por  $N_2$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $N_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $N$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $N$ . A reta  $c$  é uma reta do plano  $\varphi$ , pelo que o ponto  $N$  é um ponto de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $N$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $N_2$ . Já temos um ponto para definir a reta  $c$ , que é o ponto  $N$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $c$  é paralela à reta  $a$  (e à reta  $b$ ), também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $c$ . Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção frontal da reta  $c$  ( $c_2$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $c$ ). A perspectiva da projeção frontal da reta  $c$  ( $c_2$ ) está definida por um ponto ( $N_2$ , que é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $N$ ) e por uma direção (é paralela a  $a_2$ , a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$ ). A perspectiva propriamente dita da reta  $c$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto  $N$ ) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $D_2$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $D_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $D$ ), sobre  $c_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $c$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $E$  (conduzindo, por  $E_2$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $E$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ ), bem como a perspectiva da projeção frontal do ponto  $E$  ( $E_2$ ), sobre a perspectiva da projeção frontal da reta  $c$  ( $c_2$ ).

A partir das perspectivas dos quatro vértices do hexágono  $[ABCDEF]$ , desenhou-se a perspectiva da figura. Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções horizontais nem das projeções frontais dos vértices do hexágono, por não serem necessárias.

Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o hexágono, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do hexágono representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém o hexágono), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado  $XZ$ , da translação do plano  $XZ$  rebatido, da construção da projeção frontal do hexágono em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira.

## 1216.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

### Resolução:

O plano que contém a base da pirâmide (o quadrado  $[ABCD]$ ) é o *plano coordenado XY*, que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido no *plano coordenado XY*, sabe-se que o quadrado está em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY*. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o quadrado está em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XY* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

#### Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a bater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado  $[RS]$  do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo  $X$ ). Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano  $XY$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do lado  $[RS]$  do *triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).*

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

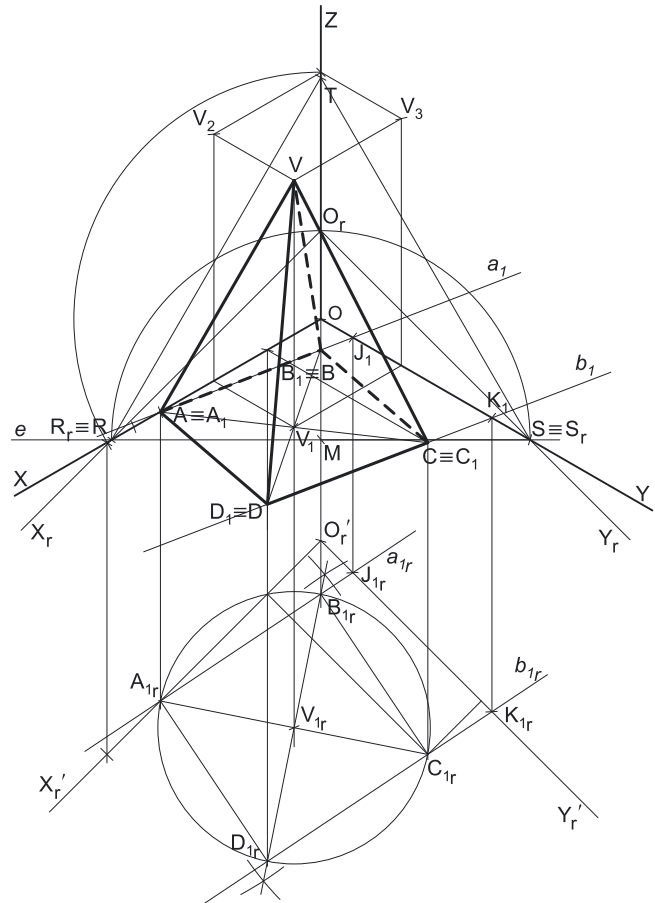
#### Construção da projeção horizontal do quadrado $[ABCD]$ e da pirâmide, em verdadeira grandeza:

No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos  $A$  e  $C$  (6 cm e 2 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto  $C$  (6 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto  $A$  tem afastamento nulo. A partir da abscissa e do afastamento dos pontos  $A$  e  $C$ , em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais daqueles dois pontos ( $A_{1r}$  e  $C_{1r}$ , respetivamente), em rebatimento. Salienta-se que o ponto  $A$  tem afastamento nulo, pelo que o ponto  $A$  é um ponto do plano  $XZ$  – a sua projeção horizontal ( $A_1$ ) está necessariamente sobre o eixo  $X$ , pelo que  $A_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ , em rebatimento) se situa no eixo  $X_r'$ .

A partir de  $A_{1r}$  e  $C_{1r}$ , efetuou-se a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $B_{1r}$  e  $D_{1r}$  (as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento). Tendo em conta que o enunciado é omissivo em relação à posição dos vértices  $B$  e  $D$ , estes foram identificados de forma arbitrária.

Uma vez que se trata de uma **pirâmide regular** (cujo eixo é ortogonal ao plano da base), o eixo da pirâmide está contido numa reta vertical (uma reta projetante horizontal). Assim, o centro da projeção horizontal do quadrado é, na prática, a projeção horizontal do ponto  $V$  (o vértice da pirâmide), facto que se assinalou devidamente no desenho –  $V_{1r}$  é o centro do quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$ .

Para determinar a perspectiva do quadrado  $[ABCD]$  e da pirâmide é necessário inverter o rebatimento, o que se pode processar recorrendo a retas do plano  $XY$  que contêm os vértices do quadrado.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da perspectiva do quadrado [ABCD]:*

Para inverter o rebatimento dos pontos **A** e **B** recorreu-se a uma reta **a**, que contém aqueles dois pontos (a reta suporte do lado [AB] do quadrado) – a reta  $a_{1r}$  é a projeção horizontal da reta **a**, em rebatimento, e passa por  $A_{1r}$  e por  $B_{1r}$  (a reta **a** está definida por dois pontos). A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $A_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto **A**) e interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $J_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta **a** que tem abcissa nula).

O ponto **A** é um ponto do eixo **X** (pois tem afastamento e cota nulos). Assim, por  $A_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_1$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**) sobre a perspectiva do eixo **X**. Já temos um ponto para definir a reta (a perspectiva da projeção horizontal da reta **a**). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por  $J_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **J**) sobre a perspectiva do eixo **Y**. A projeção horizontal da reta **a** ( $a_1$ ), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**) e o ponto  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **J**). Tendo em conta que os pontos **A** e **J** estão contidos no plano **XY**, bem como a reta **a**, tem-se imediatamente  $A \equiv A_1$  (**A** é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**),  $J \equiv J_1$  (**J** é a perspectiva propriamente dita do ponto **J**) e  $a \equiv a_1$  (**a** é a perspectiva propriamente dita da reta **a**).

Por fim, conduziu-se, por  $B_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**), sobre  $a_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta **a**). Uma vez que o ponto **B** pertence à reta **a** e ao plano **XY**, tem-se imediatamente  $B \equiv B_1$  (**B** é a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

Para inverter o rebatimento dos pontos **C** e **D** recorreu-se à reta **b**, que contém aqueles pontos (a reta **b** é a reta suporte do lado [CD] do quadrado) – a reta  $b_{1r}$  é a projeção horizontal da reta **b**, em rebatimento, e passa por  $C_{1r}$  e por  $D_{1r}$  (a reta **b** está definida por dois pontos). Salienta-se que a reta **b** é paralela à reta **a**, porque se trata de retas suporte de lados paralelos do quadrado. A reta  $b_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $K_{1r}$  (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto de concorrência da reta **b** com o eixo **Y**).

Por  $K_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **K**) sobre a perspectiva do eixo **Y**. A projeção horizontal da reta **b** ( $b_1$ ), em perspectiva, está definida por um ponto (o ponto  $K_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **K**) e por uma direção (é paralela a  $a_1$ ). Tendo em conta que tanto o ponto **K** como a reta **b** estão contidos no plano **XY**, tem-se imediatamente  $K \equiv K_1$  (**K** é a perspectiva propriamente dita do ponto **K**) e  $b \equiv b_1$  (**b** é a perspectiva propriamente dita da reta **b**).

Por fim, conduziu-se, por  $C_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**), sobre  $b_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta **b**). Uma vez que o ponto **C** pertence à reta **b** e ao plano **XY**, tem-se imediatamente  $C \equiv C_1$  (**C** é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**). Repetiu-se o processo para o ponto **D**, o que nos permitiu determinar  $D_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **D**) e **D** (a perspectiva propriamente dita do ponto **D**).

Por fim, tendo em conta que  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto **V**) é o ponto de concorrência das duas diagonais do quadrado, desenharam-se as perspectivas das duas diagonais da figura, o que nos permitiu determinar, de forma direta,  $V_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V**). Note que  $V_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V**) e  $V_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto **V**, em rebatimento) se situam na mesma perpendicular à charneira – a perpendicular à charneira que passa por  $V_{1r}$  e que nos permite inverter o rebatimento.

A partir das perspectivas dos quatro vértices do polígono, desenhou-se a perspectiva do quadrado [ABCD]. Note que não se representaram as perspectivas das projeções frontais e das projeções laterais dos vértices do quadrado, por não serem absolutamente necessárias à resolução do exercício.

*Determinação das perspectivas do ponto V:*

A altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o ponto **V** e o plano da base. Atendendo a que a pirâmide tem 8 cm de altura e que o plano da base (o plano **XY**) tem cota nula, o vértice **V**, da pirâmide, tem 8 cm de cota ( $0 + 8 = 8$ ). Assim, falta-nos, ainda, determinar a perspectiva da cota do ponto **V** para determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **V**, e, assim, concluir a construção da perspectiva da pirâmide.

Tendo em conta que, numa perspectiva isométrica, os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível determinar a perspectiva da cota do ponto **V** em qualquer eixo **e**, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo **Z**). Tendo em conta que já temos dois dos eixos rebatidos (o eixo **X** e o eixo **Y**), é possível, sobre qualquer deles, medir a cota do ponto **V** e, depois de determinar a sua perspectiva (afetada pela deformação inerente à projeção), transportá-la para a perspectiva do eixo correto (o eixo **Z**).

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a cota do ponto **V** (8 cm) e determinou-se um ponto (que não se identificou) – esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo **X** que tem 8 cm de cota. Em seguida, inverteu-se o rebatimento, recorrendo a uma perpendicular à charneira, e determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, um ponto cuja abcissa é igual à cota do ponto **V**. Assim, a distância desse ponto ao ponto **O** (medida sobre a perspectiva do eixo **X**), é a perspectiva da cota do ponto **V**, mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo **Z**. Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio até esse ponto, transportou-se a perspectiva da cota para a perspectiva do eixo **Z**, determinando um ponto (na perspectiva do eixo **Z**) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo **Z** que tem 8 cm de cota.

Para determinar a perspectiva do ponto **V** há que determinar, sobre as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Y**, as perspectivas das suas coordenadas (abcissa e afastamento, respetivamente). Assim, por  $V_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V**) conduziu-se uma paralela à perspectiva do eixo **Y** (até à perspectiva do eixo **X**), onde se determinou a perspectiva da abcissa do ponto **V**. Em seguida, por  $V_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V**), conduziu-se uma paralela à perspectiva do eixo **X** (até ao eixo **Y**), onde se determinou a perspectiva do afastamento do ponto **V**.

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **V** determinaram-se as perspectivas das projeções em falta ( $V_2$  e  $V_3$ ), recorrendo aos paralelogramos respetivos – o paralelogramo de que **O** e  $V_2$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $V_3$  e **O** são dois vértices opostos.  $V_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto **V**.  $V_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto **V**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **V**. Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de **V<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **V<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **V<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **V**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **V** são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação da perspectiva da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspectiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ABCV]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **D**. Este, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AD]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[DV]**). Por outro lado, a aresta lateral **[BV]** é **visível**, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]**.

As faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** são visíveis. Já as faces laterais **[CDV]** e **[ADV]** são invisíveis, bem como a base **[ABCD]**.

Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais dos vértices da pirâmide (à exceção do vértice **V**), por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (a pirâmide, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, da translação do plano **XY** rebatido, da construção da projeção horizontal da pirâmide em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento, e das linhas de chamada ou do arco de transporte da cota do ponto **V**.

## 1217.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de 120°. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

### Resolução:

O plano que contém a base inferior do prisma (o triângulo **[ABC]**) é o *plano coordenado XY*, que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o triângulo **[ABC]** **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

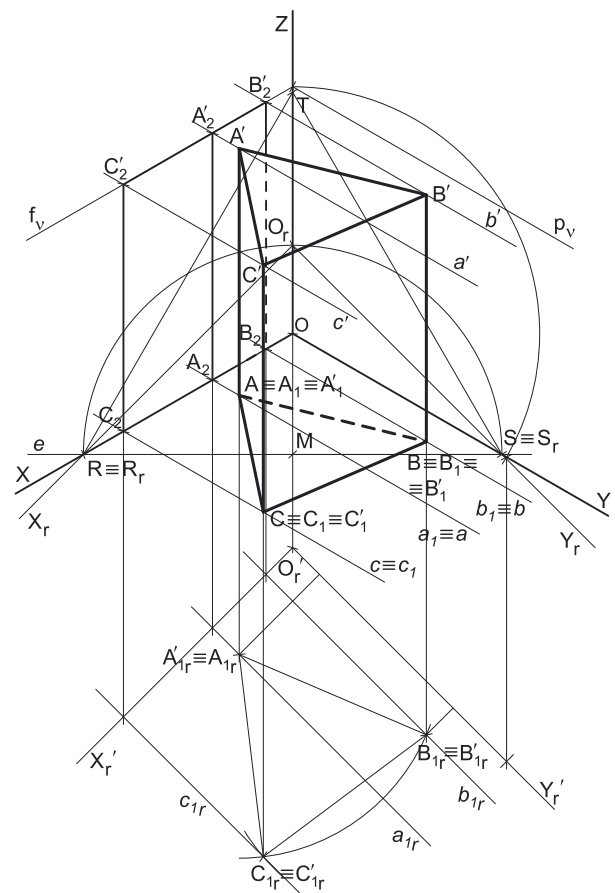
Tendo em conta que o triângulo está contido no *plano coordenado XY*, sabe-se que o triângulo está em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY*. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o triângulo está em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XY* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

### Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente, **R<sub>r</sub> ≡ R** e **S<sub>r</sub> ≡ S**.

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[RS]** do *triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **1091**. e respetivo **relatório**).*



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo **Z**) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Y<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>**. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**.

*Construção da projeção horizontal do triângulo [ABC] e do prisma, em verdadeira grandeza:*

No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo **X<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos **A** e **B** (3 cm e 1 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **A** e **B** (1 cm e 6 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e do afastamento dos pontos **A** e **B**, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais daqueles dois pontos (**A<sub>1r</sub>** e **B<sub>1r</sub>**, respetivamente), em rebatimento.

A partir de **A<sub>1r</sub>** e **B<sub>1r</sub>**, efetuou-se a construção da **projeção horizontal do triângulo**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano **XY**), o que nos permitiu determinar **C<sub>1r</sub>**, (a projeção horizontal do terceiro vértice do triângulo, em rebatimento) – o triângulo [**A<sub>1r</sub>B<sub>1r</sub>C<sub>1r</sub>**] é a projeção horizontal do triângulo [**ABC**], em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Uma vez que se trata de um **prisma regular** (cujas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases), as arestas laterais do prisma estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais). Assim, os vértices da base superior (a base [**A'B'C'**]) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da base inferior (a base [**ABC**]), o que se assinalou imediatamente – **A'<sub>1r</sub> ≡ A<sub>1r</sub>**, **B'<sub>1r</sub> ≡ B<sub>1r</sub>** e **C'<sub>1r</sub> ≡ C<sub>1r</sub>**. Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do prisma, em rebatimento (no plano **XY** rebatido e transladado).

Para determinar a perspectiva do triângulo [**ABC**] e do prisma é necessário inverter o rebatimento, o que se pode processar recorrendo a retas do plano **XY** que contêm os vértices do triângulo.

*Determinação da perspectiva do triângulo [ABC] (a base inferior do prisma):*

Para inverter o rebatimento do ponto **A** recorreu-se a uma reta **a**, que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo **Y** – a reta **a<sub>1r</sub>** é a projeção horizontal da reta **a**, em rebatimento, passa por **A<sub>1r</sub>** e é paralela ao eixo **Y<sub>r</sub>'** (a reta **a** está definida por um ponto e por uma direção.). A reta **a<sub>1r</sub>** interseca o eixo **X<sub>r</sub>'** num ponto que não se identificou (e que é o traço frontal da reta). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo **X**. Já temos um ponto para definir a reta **a** em perspectiva. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta **a** é paralela ao eixo **Y**, pelo que, em perspectiva, a reta **a** é paralela à perspectiva do eixo **Y**. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta **a**. A reta **a** está definida por um ponto (o seu traço frontal, que não se identificou e se situa no eixo **X**) e por uma direção (a direção do eixo **Y**), o que nos permitiu desenhar a perspectiva da reta **a**. Tendo em conta que a reta **a** está contida no plano **XY**, tem-se imediatamente **a ≡ a<sub>1</sub>** (**a** é a perspectiva propriamente dita da reta **a**).

Por fim, conduziu-se, por **A<sub>1r</sub>**, uma perpendicular à charneira e determinou-se **A<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**), sobre **a<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal da reta **a**). Uma vez que o ponto **A** pertence à reta **a** e ao plano **XY**, tem-se imediatamente **A ≡ A<sub>1</sub>** (**A** é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

Para inverter o rebatimento do ponto **B** recorreu-se a uma reta **b**, que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo **Y** – a reta **b<sub>1r</sub>** é a projeção horizontal da reta **a**, em rebatimento, passa por **B<sub>1r</sub>** e é paralela ao eixo **Y<sub>r</sub>'** (a reta **a** está definida por um ponto e por uma direção.). A reta **b<sub>1r</sub>** interseca o eixo **X<sub>r</sub>'** num ponto que não se identificou (e que é o traço frontal da reta). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo **X**. Já temos um ponto para definir a reta **b** em perspectiva. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta **b** é paralela ao eixo **Y**, pelo que, em perspectiva, a reta **b** é paralela à perspectiva do eixo **Y**. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta **b**. A reta **b** está definida por um ponto (o seu traço frontal, que não se identificou e se situa no eixo **X**) e por uma direção (a direção do eixo **Y**), o que nos permitiu desenhar a perspectiva da reta **b**. Tendo em conta que a reta **b** está contida no plano **XY**, tem-se imediatamente **b ≡ b<sub>1</sub>** (**b** é a perspectiva propriamente dita da reta **b**).

Por fim, conduziu-se, por **B<sub>1r</sub>**, uma perpendicular à charneira e determinou-se **B<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**), sobre **b<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal da reta **b**). Uma vez que o ponto **B** pertence à reta **b** e ao plano **XY**, tem-se imediatamente **B ≡ B<sub>1</sub>** (**B** é a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

Para inverter o rebatimento do ponto **C** recorreu-se a uma reta **c**, que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo **Y** – a reta **c<sub>1r</sub>** é a projeção horizontal da reta **c**, em rebatimento, passa por **C<sub>1r</sub>** e é paralela ao eixo **Y<sub>r</sub>'** (a reta **c** está definida por um ponto e por uma direção.). A reta **c<sub>1r</sub>** interseca o eixo **X<sub>r</sub>'** num ponto que não se identificou (e que é o traço frontal da reta). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo **X**. Já temos um ponto para definir a reta **c** em perspectiva. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta **c** é paralela ao eixo **Y**, pelo que, em perspectiva, a reta **c** é paralela à perspectiva do eixo **Y**. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta **c**. A reta **c** está definida por um ponto (o seu traço frontal, que não se identificou e se situa no eixo **X**) e por uma direção (a direção do eixo **Y**), o que nos permitiu desenhar a perspectiva da reta **c**. Tendo em conta que a reta **c** está contida no plano **XY**, tem-se imediatamente **c ≡ c<sub>1</sub>** (**c** é a perspectiva propriamente dita da reta **c**).

Por fim, conduziu-se, por **C<sub>1r</sub>**, uma perpendicular à charneira e determinou-se **C<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**), sobre **c<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal da reta **c**). Uma vez que o ponto **C** pertence à reta **c** e ao plano **XY**, tem-se imediatamente **C ≡ C<sub>1</sub>** (**C** é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A partir das perspetivas dos três vértices do polígono, desenhou-se a perspetiva do triângulo  $[ABC]$ , identificando-se, ainda, as perspetivas das projeções frontais dos três vértices do polígono (que, na realidade, são os traços frontais das retas que nos permitiram determinar as suas perspetivas). Note que não se representaram as perspetivas das projeções laterais dos vértices do triângulo, por não serem absolutamente necessárias à resolução do exercício.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base superior do prisma:*

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre os planos das bases. Atendendo a que o prisma tem 8 cm de altura e que o plano da base inferior (o plano  $XY$ ) tem cota nula, o plano horizontal (de nível) que contém a base superior tem 8 cm de cota ( $0 + 8 = 8$ ). Assim, falta-nos, ainda, determinar a perspetiva da cota do plano  $v$  para determinar as perspetivas dos vértices da base superior e, assim, concluir a construção da perspetiva do prisma.

Tendo em conta que, numa perspetiva isométrica, os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível determinar a perspetiva da cota do plano  $v$  em qualquer eixo e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo  $Z$ ). Tendo em conta que já temos dois dos eixos rebatidos (o eixo  $X$  e o eixo  $Y$ ), é possível, sobre qualquer deles, medir a cota do plano  $v$  e, depois de determinar a sua perspetiva (afetada pela deformação inerente à projeção), transportá-la para a perspetiva do eixo correto (o eixo  $Z$ ).

Nesse sentido, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a cota do plano  $v$  (8 cm) e determinou-se um ponto (que não se identificou) – esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Y$  que tem 8 cm de cota. Em seguida, inverteu-se o rebatimento, recorrendo a uma perpendicular à charneira, e determinou-se, sobre a perspetiva do eixo  $Y$ , um ponto cujo afastamento é igual à cota do plano  $v$ . Assim, a distância desse ponto ao ponto  $O$  (medida sobre a perspetiva do eixo  $Y$ ), é a perspetiva da cota do plano  $v$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio até esse ponto, transportou-se a perspetiva da cota para a perspetiva do eixo  $Z$ , determinando um ponto (na perspetiva do eixo  $Z$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspetiva do ponto do eixo  $Z$  que tem 8 cm de cota.

O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a base superior do prisma, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 8 cm de cota, contém necessariamente esse ponto. Assim, pela perspetiva desse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação das perspetivas dos vértices do triângulo  $[A'B'C']$  (a base superior do prisma):*

Uma vez que as arestas laterais do prisma estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais), é possível identificar, de forma imediata, as perspetivas das projeções horizontais dos vértices da base superior (que estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da base inferior – tem-se, imediatamente,  $A'_1 \equiv A_1 \equiv A$ ,  $B'_1 \equiv B_1 \equiv B$  e  $C'_1 \equiv C_1 \equiv C$ ).

Por outro lado, as retas  $a$ ,  $b$  e  $c$  podem ser consideradas como as projeções horizontais das retas  $a'$ ,  $b'$  e  $c'$ , contidas no plano  $v$ . Assim, por  $A_2$ ,  $B_2$  e  $C_2$  (as perspetivas das projeções frontais dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ ) conduziram-se as respetivas linhas de chamada (paralelas à perspetiva do eixo  $Z$  e perpendiculares à charneira do rebatimento) e determinaram-se as perspetivas das projeções frontais dos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  ( $A'_2$ ,  $B'_2$  e  $C'_2$ , respetivamente), sobre a perspetiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Por  $A'_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $A'$ ), conduziu-se a perspetiva da reta  $a'$ , paralela à perspetiva da reta  $a$  – note que a reta  $a'$  está definida por um ponto (o ponto  $A'_2$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $Y$  e às retas  $a$ ,  $b$  e  $c$ ). Em seguida, por  $A'_{1r}$ , conduziu-se a perspetiva da reta vertical que contém a aresta  $[AA']$  e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto  $A'$ , sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $a'$ . Note que, na realidade, a reta  $a'$  é a reta projetante frontal do ponto  $A'$ .

Por  $B'_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $B'$ ), conduziu-se a perspetiva da reta  $b'$ , paralela à perspetiva da reta  $b$  – note que a reta  $b'$  está definida por um ponto (o ponto  $B'_2$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $Y$  e às retas  $a$ ,  $b$  e  $c$ ). Em seguida, por  $B'_{1r}$ , conduziu-se a perspetiva da reta vertical que contém a aresta  $[BB']$  e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto  $B'$ , sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $b'$ . Note que, na realidade, a reta  $b'$  é a reta projetante frontal do ponto  $B'$ .

Por  $C'_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $C'$ ), conduziu-se a perspetiva da reta  $c'$ , paralela à perspetiva da reta  $c$  – note que a reta  $c'$  está definida por um ponto (o ponto  $C'_2$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $Y$  e às retas  $a$ ,  $b$  e  $c$ ). Em seguida, por  $C'_{1r}$ , conduziu-se a perspetiva da reta vertical que contém a aresta  $[CC']$  e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto  $C'$ , sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $c'$ . Note que, na realidade, a reta  $c'$  é a reta projetante frontal do ponto  $C'$ .

*Determinação da perspetiva do prisma:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[AA'B'BC]$ . Existe um único vértice do prisma que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice  $C'$ . Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[A'C']$  e  $[B'C']$ , da base  $[A'B'C']$ , e a aresta lateral  $[CC']$ ). Por outro lado, a aresta  $[AB]$  (da base  $[ABC]$ ) é **invisível**, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – a face lateral  $[ABB'A']$  e a base  $[ABC]$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

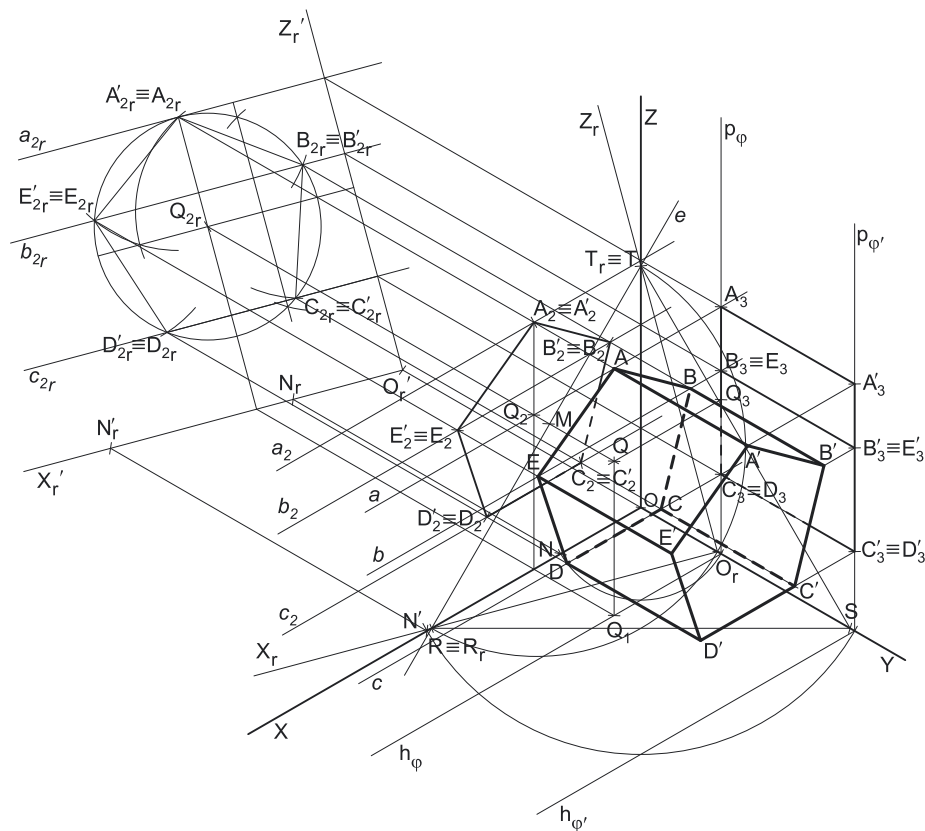
As faces laterais  $[AA'C'C]$  e  $[BB'C'C]$  são visíveis, bem como a base  $[A'B'C']$ . Já a face lateral  $[AA'B'B]$  e a base  $[ABC]$  são invisíveis.

Note que não se representaram as perspectivas das projeções laterais dos vértices do prisma, por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o prisma, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a base superior do prisma), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspectiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção da projeção horizontal do prisma em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, das linhas de chamada ou do arco de transporte da cota do plano  $v$ .

## 1218.



#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

#### Resolução:

O plano que contém a base de menor afastamento do prisma (o pentágono  $[ABCDE]$ ) é um plano de perfil, que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o pentágono  $[ABCDE]$  **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do pentágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o pentágono está contido num plano de perfil (que é paralelo ao *plano coordenado XZ*), sabe-se que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* (o pentágono  $[ABCDE]$  e a sua projeção frontal são duas figuras geometricamente iguais). Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o pentágono se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Rebatimento do plano coordenado $XZ$ :

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XZ$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado  $[RT]$  do triângulo fundamental (o lado que se opõe à perspectiva do eixo  $X$ ). Os pontos  $R$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O rebatimento do plano coordenado  $XZ$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano  $XZ$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do lado  $[RT]$  do triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

## Construção da projeção frontal do pentágono $[ABCDE]$ e do prisma, em verdadeira grandeza:

No plano  $XZ$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $Q$  (4 cm), em verdadeira grandeza. No plano  $XZ$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto  $Q$  (5 cm), em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e da cota do ponto  $Q$ , em verdadeira grandeza, foi possível determinar a projeção frontal daquele ponto, em rebatimento –  $Q_{2r}$ .

Com o compasso, fazendo centro em  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono (em verdadeira grandeza, em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção do pentágono, inscrito na circunferência. De acordo com os dados, a face lateral inferior (de menor cota) do prisma é horizontal (de nível), pelo que o lado inferior do pentágono tem de ser horizontal (ou, mais precisamente, fronto-horizontal). Assim, em projeção frontal (em rebatimento), o lado inferior do pentágono tem de ser paralelo ao eixo  $X_r'$ .

Assim, efetuou-se a construção da **projeção frontal do pentágono**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os cinco vértices do polígono (em rebatimento) – o pentágono  $[A_{2r}, B_{2r}, C_{2r}, D_{2r}, E_{2r}]$  é a projeção frontal do pentágono  $[ABCDE]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XZ$ . Tendo em conta que o enunciado é omissivo no que respeita aos vértices do hexágono, estes foram identificados de forma arbitrária, mas sequencial.

Uma vez que se trata de um **prisma regular** (cujas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases), as arestas laterais do prisma estão contidas em retas de topo (retas projetantes frontais). Assim, os vértices da base de maior afastamento (a base  $[A'B'C'D'E']$ ) têm as suas projeções frontais coincidentes com as projeções frontais dos vértices correspondentes da base de menor afastamento (a base  $[ABCDE]$ ), o que se assinalou imediatamente –  $A'_{2r} \equiv A_{2r}$ ,  $B'_{2r} \equiv B_{2r}$ ,  $C'_{2r} \equiv C_{2r}$ ,  $D'_{2r} \equiv D_{2r}$  e  $E'_{2r} \equiv E_{2r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção frontal do prisma, em rebatimento (no plano  $XZ$  rebatido e trasladado).

Para determinar a perspectiva do pentágono  $[ABCDE]$  e do prisma é necessário inverter o rebatimento, o que se pode processar recorrendo a retas dos planos de perfil que contêm as bases, retas essas que contenham os vértices das bases, como em seguida se expõe.

Por outro lado, a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre os planos das bases. Atendendo a que o prisma tem 5 cm de altura e que o plano frontal (de frente) que contém a base de menor afastamento tem 3 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $Q$ ), o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do prisma tem 8 cm de cota ( $3 + 5 = 8$ ). Assim, falta-nos, ainda, determinar as perspectivas dos afastamentos dos planos das bases, para ser possível construir a perspectiva do prisma.

## Representação dos planos frontais (de frente) que contêm as bases do prisma:

Tendo em conta que, numa perspectiva isométrica, os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível determinar as perspectivas dos afastamentos dos planos das bases em qualquer eixo e, depois, transportá-los para o eixo correto (o eixo  $Y$ ). Tendo em conta que já temos dois dos eixos rebatidos (o eixo  $X$  e o eixo  $Z$ ), é possível, sobre qualquer deles, medir os afastamentos dos planos das bases e, após determinar as suas perspectivas (afetadas pela deformação inerente à projeção), transportá-las para a perspectiva do eixo correto (o eixo  $Y$ )

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os afastamentos dos planos das bases (3 cm e 8 cm) e determinaram-se, em rebatimento, os pontos do eixo  $X_r'$  que têm aquelas abscissas – o ponto  $N_r$  e o ponto  $N_r'$ . O ponto  $N$  é o ponto do eixo  $X$  que tem 3 cm de abscissa (3 cm é o afastamento do plano da base de menor afastamento). O ponto  $N'$  é o ponto do eixo  $X$  que tem 8 cm de abscissa (8 cm é o afastamento do plano da base de maior afastamento do prisma).

Em seguida, inverteu-se o rebatimento, recorrendo às perpendiculares à charneira que passam por aqueles pontos e determinaram-se as suas perspectivas ( $N$  e  $N'$ ), sobre a perspectiva do eixo  $X$ .

Assim,  $\overline{ON}$  é a perspectiva do afastamento do plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de menor afastamento do prisma), mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{ON}$ , transportou-se a perspectiva do afastamento para a perspectiva do eixo  $Y$ , determinando um ponto (na perspectiva do eixo  $Y$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo  $Y$  que tem 3 cm de afastamento.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Pela perspectiva desse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi - h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ). Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

Por outro lado,  $\overline{ON'}$  é a perspectiva do afastamento do plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do prisma), mas está igualmente no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{ON'}$ , transportou-se a perspectiva do afastamento para a perspectiva do eixo  $Y$ , determinando um ponto (na perspectiva do eixo  $Y$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo  $Y$  que tem 8 cm de afastamento.

Pela perspectiva desse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi' - h_{\varphi'}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) e  $p_{\varphi'}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi'$ ). Note que  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi'$ , com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{\varphi'}$  (o traço lateral do plano  $\varphi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi'$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi'$  é, também, um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi'$  é, igualmente, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{\varphi'}$ ).

#### Determinação da perspectiva do pentágono $[ABCDE]$ (a base de menor afastamento do prisma):

Para inverter o rebatimento do ponto  $A$  recorreu-se a uma reta  $a$ , pertencente ao plano  $\varphi$  e que contém o ponto  $A$  – a reta  $a$  é paralela ao eixo  $X$  (a reta  $a$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, a reta  $a_{2r}$  é a projeção frontal da reta  $a$ , em rebatimento, passa por  $A_{2r}$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta  $a$  está definida por um ponto e por uma direção.). A reta  $a_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção frontal do traço lateral da reta). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Já temos um ponto para definir a perspectiva da reta  $a$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta  $a$  é paralela ao eixo  $X$  (e ao traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pelo que, em perspectiva, a reta  $a$  é paralela à perspectiva de  $h_\varphi$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a perspectiva da reta  $a$ , que está definida por um ponto (o seu traço lateral, que não se identificou e se situa sobre  $p_\varphi$ ) e por uma direção (a direção de  $h_\varphi$ ), o que nos permitiu desenhar a perspectiva da reta  $a$ .

Pelo ponto em que a perpendicular à charneira (que nos permitiu inverter o rebatimento) interseca a perspectiva do eixo  $Z$ , conduziu-se uma reta paralela à perspectiva do eixo  $X$  – essa reta é  $a_2$ , a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$ .

Por fim, conduziu-se, por  $A_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ), sobre  $a_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$ ) e, ainda, a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ . Note que o traço lateral da reta  $a$  é, na prática, a projeção lateral do ponto  $A$ , o que se identificou de imediato –  $A_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ .

Para inverter o rebatimento dos pontos  $B$  e  $E$  recorreu-se a uma reta  $b$ , pertencente ao plano  $\varphi$  e que contém aqueles dois pontos – a reta  $b$  é paralela ao eixo  $X$  (a reta  $b$  é outra reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, a reta  $b_{2r}$  é a projeção frontal da reta  $b$ , em rebatimento, passa por  $B_{2r}$  e por  $E_{2r}$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta  $b$  está definida por dois pontos e por uma direção.). A reta  $b_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção frontal do traço lateral da reta). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Já temos um ponto para definir a perspectiva da reta  $b$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta  $b$  é paralela ao eixo  $X$  (e ao traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pelo que, em perspectiva, a reta  $b$  é paralela à perspectiva de  $h_\varphi$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a perspectiva da reta  $b$ , que está definida por um ponto (o seu traço lateral, que não se identificou e se situa sobre  $p_\varphi$ ) e por uma direção (a direção de  $h_\varphi$ ), o que nos permitiu desenhar a perspectiva da reta  $b$ .

Pelo ponto em que a perpendicular à charneira (que nos permitiu inverter o rebatimento) interseca a perspectiva do eixo  $Z$ , conduziu-se uma reta paralela à perspectiva do eixo  $X$  – essa reta é  $b_2$ , a perspectiva da projeção frontal da reta  $b$ .

Por fim, conduziram-se, por  $B_{2r}$  e  $E_{2r}$ , as perpendiculares à charneira que por eles passam e determinaram-se  $B_2$  e  $E_2$  (as perspectivas das projeções frontais dos pontos  $B$  e  $E$ , respetivamente), sobre  $b_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $b$ ) e, ainda, as perspectivas propriamente ditas daqueles dois pontos ( $B$  e  $E$ ) sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ . A reta  $b$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ , pelo que é uma reta projetante lateral. Nesse sentido, os pontos  $B$  e  $E$ , porque se situam na mesma reta projetante lateral (a reta  $b$ ), têm as suas projeções laterais coincidentes, o que se assinalou devidamente no desenho –  $B_3 \equiv E_3$ . Note ainda que o ponto em que se situam as projeções laterais dos dois pontos é, na realidade, o traço lateral da reta  $b$ .

Para inverter o rebatimento dos pontos  $C$  e  $D$  recorreu-se a uma reta  $c$ , pertencente ao plano  $\varphi$  e que contém aqueles dois pontos – a reta  $c$  é paralela ao eixo  $X$  (a reta  $c$  é outra reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, a reta  $c_{2r}$  é a projeção frontal da reta  $c$ , em rebatimento, passa por  $C_{2r}$  e por  $D_{2r}$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta  $c$  está definida por dois pontos e por uma direção.). A reta  $c_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção frontal do traço lateral da reta). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Já temos um ponto para definir a perspectiva da reta  $c$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $c$  é paralela ao eixo  $X$  (e ao traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pelo que, em perspectiva, a reta  $c$  é paralela à perspectiva de  $h_\varphi$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a perspectiva da reta  $c$ , que está definida por um ponto (o seu traço lateral, que não se identificou e se situa sobre  $p_\varphi$ ) e por uma direção (a direção de  $h_\varphi$ ), o que nos permitiu desenhar a perspectiva da reta  $c$ .

Pelo ponto em que a perpendicular à charneira (que nos permitiu inverter o rebatimento) intersesta a perspectiva do eixo  $Z$ , conduziu-se uma reta paralela à perspectiva do eixo  $X$  – essa reta é  $c_2$ , a perspectiva da projeção frontal da reta  $c$ .

Por fim, conduziram-se, por  $C_2$  e  $D_2$ , as perpendiculares à charneira que por eles passam e determinaram-se  $C_2$  e  $D_2$  (as perspectivas das projeções frontais dos pontos  $C$  e  $D$ , respetivamente), sobre  $c_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $c$ ) e, ainda, as perspectivas propriamente ditas daqueles dois pontos ( $C$  e  $D$ ) sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ . A reta  $c$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ , pelo que é uma reta projetante lateral. Nesse sentido, os pontos  $C$  e  $D$ , porque se situam na mesma reta projetante lateral (a reta  $c$ ), têm as suas projeções laterais coincidentes, o que se assinalou devidamente no desenho –  $C_3 \equiv D_3$ . Note ainda que o ponto em que se situam as projeções laterais dos dois pontos é, na realidade, o traço lateral da reta  $c$ .

*Determinação das perspectivas dos vértices do pentágono [A'B'C'D'E'] (a base de maior afastamento do prisma):*

Uma vez que as arestas laterais do prisma estão contidas em retas de topo (retas projetantes frontais), é possível identificar, de forma imediata, as perspectivas das projeções frontais dos vértices da base de maior afastamento (que estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da base de menor afastamento – tem-se, imediatamente,  $A'_2 \equiv A_2$ ,  $B'_2 \equiv B_2$ ,  $C'_2 \equiv C_2$ ,  $D'_2 \equiv D_2$  e  $E'_2 \equiv E_2$ ).

Por outro lado, as retas  $a_2$ ,  $b_2$  e  $c_2$  podem ser consideradas, também, como as projeções frontais das retas  $a'$ ,  $b'$  e  $c'$ , contidas no plano  $\varphi'$ . Assim, prolongaram-se as perpendiculares à charneira que nos permitiram determinar as perspectivas das retas  $a$ ,  $b$  e  $c$  até  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), e determinaram-se as projeções laterais dos cinco vértices do pentágono [A'B'C'D'E'], sobre  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).  $A'_3$ ,  $B'_3 \equiv E'_3$  e  $C'_3 \equiv D'_3$  são as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  e  $E'$  (respetivamente), e situam-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

Por  $A'_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta  $a'$ , paralela à perspectiva da reta  $a$  – note que a reta  $a'$  está definida por um ponto (o ponto  $A'_2$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $X$  e às retas  $a$ ,  $b$  e  $c$ ). Em seguida, por  $A'_2$ , conduziu-se a perspectiva da reta de topo que contém a aresta [AA'] e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $A'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a'$ . Note que, na realidade, a reta  $a'$  é a reta projetante lateral do ponto  $A'$ .

Por  $B'_3 \equiv E'_3$  (as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $B'$  e  $E'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta  $b'$ , paralela à perspectiva da reta  $b$  – note que a reta  $b'$  está definida por um ponto (o ponto  $B'_3 \equiv E'_3$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $X$  e às retas  $a$ ,  $b$  e  $c$ ). Em seguida, por  $B'_3$ , conduziu-se a perspectiva da reta de topo que contém a aresta [BB'] e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $B'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b'$ . De forma semelhante, por  $E'_3$ , conduziu-se a perspectiva da reta de topo que contém a aresta [EE'] e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $E'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b'$ . Note que, na realidade, a reta  $b'$  é a reta projetante lateral dos pontos  $B'$  e  $E'$ .

Por  $C'_3 \equiv D'_3$  (as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $C'$  e  $D'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta  $c'$ , paralela à perspectiva da reta  $c$  – note que a reta  $c'$  está definida por um ponto (o ponto  $C'_3 \equiv D'_3$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $X$  e às retas  $a$ ,  $b$  e  $c$ ). Em seguida, por  $C'_3$ , conduziu-se a perspectiva da reta de topo que contém a aresta [CC'] e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $C'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c'$ . De forma semelhante, por  $D'_3$ , conduziu-se a perspectiva da reta de topo que contém a aresta [DD'] e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $D'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c'$ . Note que, na realidade, a reta  $c'$  é a reta projetante lateral dos pontos  $C'$  e  $D'$ .

*Determinação da perspectiva do prisma:*

Por fim, desenhou-se a **perspectiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** do prisma é a linha quebrada fechada [ABB'C'D'DE]. Existem três vértices do prisma que não integram o contorno aparente do sólido – os vértices  $C$ ,  $A'$  e  $E'$ . O vértice  $C$ , por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas [BC] e [CD], da base [ABCDE], e a aresta lateral [CC']). Os vértices  $A'$  e  $E'$ , por serem os vértices mais próximos do observador, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem (as arestas [A'B'], [A'E'] e [D'E']), da base [A'B'C'D'E'], e as arestas laterais [AA'] e [EE']).

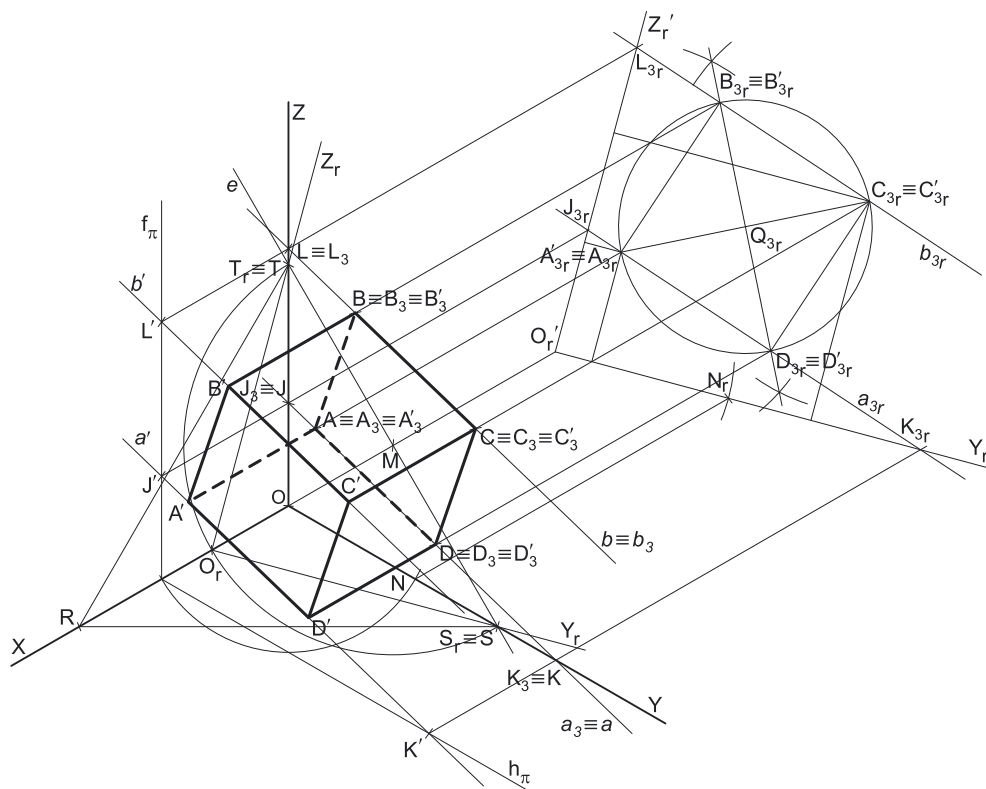
As faces laterais [AA'B'B], [AA'E'E] e [DD'E'E] são visíveis, bem como a base [A'B'C'D'E']. Já as faces laterais [BB'C'C] e [CC'D'D] e a base [ABCDE] são invisíveis.

Note que não se representaram as perspectivas das projeções horizontais dos vértices do prisma, por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o prisma, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. Os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  (os planos que contêm as bases do prisma), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspectiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado  $XZ$ , da translação do plano  $XZ$  rebatido, da construção da projeção frontal do prisma em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, das linhas de chamada ou dos arcos de transporte dos afastamentos dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ .

1219.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

**Resolução:**

O plano que contém a face de menor abscissa do cubo (o quadrado **[ABCD]**) é o *plano coordenado YZ*, que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o quadrado **[ABCD]** **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido no *plano coordenado YZ*, sabe-se que o quadrado está em verdadeira grandeza no *plano coordenado YZ*. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o quadrado está em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado YZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

*Rebatimento do plano coordenado YZ:*

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a bater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[ST]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

O rebatimento do *plano coordenado YZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **YZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[ST]** do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **1091**) e respetivo **relatório**.

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo **X**) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **T<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** e o eixo **Z<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **X**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**. O eixo **Z<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Z<sub>r</sub>**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Construção da projeção lateral do quadrado $[ABCD]$ e do cubo, em verdadeira grandeza:

No plano  $YZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **A** e **C** (1 cm e 7 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. No plano  $YZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos pontos **A** e **C** (3 cm e 6 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. A partir dos afastamentos e das cotas dos pontos **A** e **C**, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções laterais daqueles dois pontos ( $A_{3_r}$  e  $C_{3_r}$ , respetivamente), em rebatimento.

A partir de  $A_{3_r}$  e  $C_{3_r}$  efetuou-se a construção da **projeção lateral do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $YZ$ ), o que nos permitiu determinar  $B_{3_r}$  e  $D_{3_r}$  (as projeções laterais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[A_{3_r}B_{3_r}C_{3_r}D_{3_r}]$  é a projeção lateral do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento). Tendo em conta que o enunciado é omissivo em relação à posição dos vértices **B** e **D**, estes foram identificados de forma arbitrária.

Uma vez que se trata de um **poliedro regular**, as arestas do cubo que não estão contidas nas faces de perfil estão contidas em retas fronto-horizontais (retas projetantes laterais). Assim, os vértices da face de maior abscissa (a face  $[A'B'C'D']$ ) têm as suas projeções laterais coincidentes com as projeções laterais dos vértices correspondentes da face  $[ABCD]$ , o que se assinalou imediatamente –  $A'_{3_r} \equiv A_{3_r}$ ,  $B'_{3_r} \equiv B_{3_r}$ ,  $C'_{3_r} \equiv C_{3_r}$  e  $D'_{3_r} \equiv D_{3_r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção lateral do cubo, em rebatimento (no plano  $YZ$  rebatido e transladado).

Para determinar a perspetiva do quadrado  $[ABCD]$  e do cubo é necessário inverter o rebatimento, o que se pode processar recorrendo a retas do plano  $XY$  que contêm os vértices do quadrado.

## Determinação da perspetiva do quadrado $[ABCD]$ (a face de menor abscissa do cubo):

Para inverter o rebatimento dos pontos **A** e **D** recorreu-se a uma reta  $a$ , que contém aqueles dois pontos (a reta suporte do lado  $[AD]$  do quadrado) – a reta  $a_{3_r}$  é a projeção lateral da reta  $a$ , em rebatimento, e passa por  $A_{3_r}$  e por  $D_{3_r}$  (a reta  $a$  está definida por dois pontos). A reta  $a_{3_r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $J_{3_r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta  $a$  que tem afastamento nulo) e interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $K_{3_r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta  $a$  que tem cota nula).

O ponto **J** é um ponto do eixo **Z** (pois tem afastamento nulo). Assim, por  $J_{3_r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **J**) sobre a perspetiva do eixo **Z**. Já temos um ponto para definir a reta (a perspetiva da projeção lateral da reta  $a$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por  $K_{3_r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **K**) sobre a perspetiva do eixo **Y**. A projeção lateral da reta  $a$  ( $a_3$ ), em perspetiva, está definida por dois pontos – o ponto  $J_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **J**) e o ponto  $K_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **K**). Tendo em conta que os pontos **J** e **K** estão contidos no plano  $YZ$ , bem como a reta  $a$ , tem-se imediatamente  $J \equiv J_3$  (**J** é a perspetiva propriamente dita do ponto **J**),  $K \equiv K_3$  (**K** é a perspetiva propriamente dita do ponto **K**) e  $a \equiv a_3$  ( $a$  é a perspetiva propriamente dita da reta  $a$ ).

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{3_r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**), sobre  $a_3$  (a perspetiva da projeção lateral da reta  $a$ ). Uma vez que o ponto **A** pertence à reta  $a$  e ao plano  $YZ$ , tem-se imediatamente  $A \equiv A_3$  (**A** é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**). De forma semelhante, conduziu-se, por  $D_{3_r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $D_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **D**), sobre  $a_3$  (a perspetiva da projeção lateral da reta  $a$ ). Uma vez que o ponto **D** pertence à reta  $a$  e ao plano  $YZ$ , tem-se imediatamente  $D \equiv D_3$  (**D** é a perspetiva propriamente dita do ponto **D**).

Para inverter o rebatimento dos pontos **B** e **C** recorreu-se à reta  $b$ , que contém aqueles pontos (a reta  $b$  é a reta suporte do lado  $[BC]$  do quadrado) – a reta  $b_{3_r}$  é a projeção lateral da reta  $b$ , em rebatimento, passa por  $B_{3_r}$  e por  $C_{3_r}$  e é paralela à reta  $a_{3_r}$  (a reta  $b$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que as retas  $a$  e  $b$  são paralelas, porque se trata de retas suporte de lados paralelos do quadrado. A reta  $b_{3_r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $L_{3_r}$  (que é a projeção lateral, em rebatimento, do ponto da reta  $b$  com afastamento nulo).

Por  $L_{3_r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **L**) sobre a perspetiva do eixo **Z**. A projeção lateral da reta  $b$  ( $b_3$ ), em perspetiva, está definida por um ponto (o ponto  $L_3$ , que é a perspetiva da projeção lateral do ponto **L**) e por uma direção (é paralela a  $a_3$ ). Tendo em conta que tanto o ponto **L** como a reta  $b$  estão contidos no plano  $YZ$ , tem-se imediatamente  $L \equiv L_3$  (**L** é a perspetiva propriamente dita do ponto **L**) e  $b \equiv b_3$  ( $b$  é a perspetiva propriamente dita da reta  $b$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $B_{3_r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **B**), sobre  $b_3$  (a perspetiva da projeção lateral da reta  $b$ ). Uma vez que o ponto **B** pertence à reta  $b$  e ao plano  $YZ$ , tem-se imediatamente  $B \equiv B_3$  (**B** é a perspetiva propriamente dita do ponto **B**). De forma semelhante, conduziu-se, por  $C_{3_r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **C**), sobre  $b_3$  (a perspetiva da projeção lateral da reta  $b$ ). Uma vez que o ponto **C** pertence à reta  $b$  e ao plano  $YZ$ , tem-se imediatamente  $C \equiv C_3$  (**C** é a perspetiva propriamente dita do ponto **C**).

## Representação do plano de perfil que contém a face de maior abscissa do cubo:

Todas as arestas de um cubo têm o mesmo comprimento. Nesse sentido, a distância entre os planos das duas faces de perfil corresponde ao comprimento de qualquer dos lados do quadrado  $[ABCD]$  (uma das faces do cubo), que está em verdadeira grandeza no rebatimento do plano  $YZ$ . Assim, falta-nos, ainda, determinar a perspetiva da abscissa do plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a face  $[A'B'C'D']$  do cubo), para determinar as perspetivas dos vértices da face  $[A'B'C'D']$  e, assim, concluir a construção da perspetiva do cubo.

Tendo em conta que, numa perspetiva isométrica, os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível determinar a perspetiva da abscissa do plano  $\pi$  em qualquer eixo e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo **X**). Tendo em conta que já temos dois dos eixos rebatidos (o eixo **Y** e o eixo **Z**), é possível, sobre qualquer deles, medir a abscissa do plano  $\pi$  e, depois de determinar a sua perspetiva (afetada pela deformação inerente à projeção), transportá-la para a perspetiva do eixo correto (o eixo **X**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a abscissa do plano  $\pi$  (que é igual ao comprimento de qualquer dos lados do quadrado  $[A_3, B_3, C_3, D_3]$ ) e determinou-se um ponto  $N_r$ , que é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Y$  que tem a abscissa do plano  $\pi$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento, recorrendo a uma perpendicular à charneira, e determinou-se, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , a perspectiva do ponto  $N$  (cujo afastamento é igual à abscissa do plano  $\pi$ ). Assim,  $\overline{ON}$  é a perspectiva da abscissa do plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a face  $[A'B'C'D']$  do cubo), mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $X$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{ON}$ , transportou-se a perspectiva da abscissa para a perspectiva do eixo  $X$ , determinando um ponto (na perspectiva do eixo  $X$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo  $X$  que tem a abscissa do plano  $\pi$ .

Pela perspectiva desse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ). Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

*Determinação das perspectivas dos vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$  (a face mais à esquerda do cubo):*

Uma vez que as arestas do cubo (que não são de perfil) estão contidas em retas fronto-horizontais (retas projetantes laterais), é possível identificar, de forma imediata, as perspectivas das projeções laterais dos vértices da face mais à esquerda (que estão coincidentes com as projeções laterais dos vértices correspondentes da face mais à direita) – tem-se, imediatamente,  $A'_3 \equiv A_3 \equiv A$ ,  $B'_3 \equiv B_3 \equiv B$ ,  $C'_3 \equiv C_3 \equiv C$  e  $D'_3 \equiv D_3 \equiv D$ .

Por outro lado, as retas  $a$  e  $b$  podem ser consideradas como as projeções laterais das retas  $a'$  e  $b'$ , contidas no plano  $\pi$ . Da mesma forma, enquanto os pontos  $J$  e  $L$  são os pontos com afastamento nulo das retas  $a$  e  $b$  (respetivamente), os pontos  $J'$  e  $L'$  serão os pontos com afastamento nulo das retas  $a'$  e  $b'$  (respetivamente). Assim, prolongaram-se as perpendiculares à charneira que passam por  $J$  e  $L$  e determinaram-se as perspectivas dos pontos  $J'$  e  $L'$ , sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ).

Por  $J'$  (a perspectiva do ponto  $J'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta  $a'$ , paralela à perspectiva da reta  $a$  – note que a reta  $a'$  está definida por um ponto (o ponto  $J'$ ) e por uma direção (é paralela às retas  $a$  e  $b$ ). Em seguida, por  $A'_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta fronto-horizontal que contém a aresta  $[AA']$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $A'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a'$ . De forma semelhante, por  $D'_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $D'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta fronto-horizontal que contém a aresta  $[DD']$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $D'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a'$ .

Por outro lado, pelo ponto  $L'$  (a perspectiva do ponto  $L'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta  $b'$ , paralela à perspectiva da reta  $b$  – note que a reta  $b'$  está definida por um ponto (o ponto  $L'$ ) e por uma direção (é paralela às retas  $a$  e  $b$ ). Em seguida, por  $B'_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $B'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta fronto-horizontal que contém a aresta  $[BB']$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $B'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b'$ . De forma semelhante, por  $C'_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta fronto-horizontal que contém a aresta  $[CC']$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $C'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b'$ .

*Determinação das perspectivas do cubo:*

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, começando pelo seu contorno aparente – o contorno aparente da perspectiva do cubo é a linha quebrada fechada  $[BCDD'A'B']$ . Existem dois vértices do cubo que não integram o contorno aparente da perspectiva do sólido – os vértices  $C'$  e  $A$ . O vértice  $C'$ , por ser o vértice mais próximo do observador, é visível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$ ,  $[C'D']$  e  $[CC']$ . O vértice  $A$ , por ser o vértice mais distante do observador, é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$  e  $[AA']$ .

As faces  $[A'B'C'D']$ ,  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  são visíveis, enquanto as faces  $[ABCD]$ ,  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$  são invisíveis.

Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções horizontais nem das projeções frontais dos vértices do cubo, por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da representação axonométrica, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o cubo, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a médio, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a leve pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\pi$  (o plano que contém a face mais à esquerda do cubo), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e horizontal) se representaram a leve. A perspectiva do cubo representou-se a forte (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a leve – caso do rebatimento do plano coordenado  $YZ$ , da translação do plano  $YZ$  rebatido, da construção da projeção lateral do cubo em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, das linhas de chamada ou do arco de transporte da abscissa do plano  $\pi$ .

## 1220.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o triângulo fundamental – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

### Resolução:

O plano que contém a base da pirâmide (o quadrado [ABCD]) e a face inferior do cubo (o quadrado [CDEF]) é o plano coordenado  $XY$ , que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que **nenhum dos dois quadrados se projeta em verdadeira grandeza** (as perspectivas dos dois quadrados não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que os quadrados estão contidos no plano coordenado  $XY$ , sabe-se que os quadrados estão em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XY$ . Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado  $XY$**  (o plano no qual os quadrados estão em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado  $XY$  pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

#### Rebatimento do plano coordenado $XY$ :

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XY$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado [RS] do triângulo fundamental (o lado que se opõe à perspectiva do eixo  $Z$ ). Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano  $XY$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do lado [RS] do triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

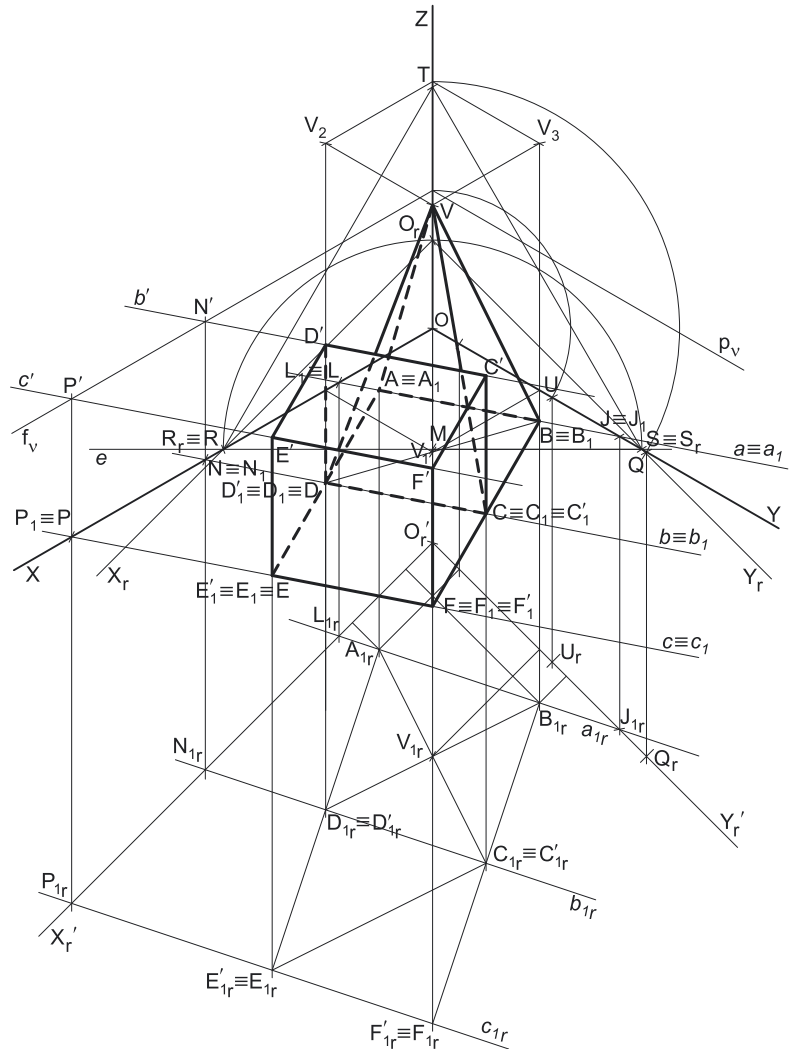
Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

#### Construção dos quadrados [ABCD] e [CDEF], em projeção horizontal, em verdadeira grandeza:

No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos  $A$  e  $B$  (3 cm e 1 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos  $A$  e  $B$  (1 cm e 5 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e dos afastamentos dos pontos  $A$  e  $B$ , em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais daqueles dois pontos ( $A_{1r}$  e  $B_{2r}$ , respetivamente), em rebatimento.

A partir de  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$  efetuou-se a construção da **projeção horizontal do quadrado [ABCD]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{1r}$  e  $D_{1r}$ , (as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado [ABCD], em verdadeira grandeza (em rebatimento). Salienta-se que se garantiu que o quadrado se situa no espaço do  $1^\circ$  Triedro, como o enunciado refere expressamente.

Em seguida, a partir de  $C_{1r}$  e  $C_{1r}$ , efetuou-se a construção da **projeção horizontal do quadrado [CDEF]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $E_{1r}$  e  $F_{1r}$  (as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[C_{1r}D_{1r}E_{1r}F_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado  $[CDEF]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento).

*Construção das projeções horizontais do cubo e da pirâmide, em verdadeira grandeza:*

A partir das projeções horizontais dos dois quadrados (em rebatimento), construíram-se as projeções horizontais (em rebatimento) dos dois sólidos.

A pirâmide é uma pirâmide regular, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (o plano  $XY$ ), pelo que o eixo da pirâmide está contido numa reta vertical (uma reta projetante horizontal). Assim, a projeção horizontal do vértice da pirâmide está coincidente com a projeção horizontal do centro do quadrado. Nesse sentido, determinou-se o centro do quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$ , com o recurso às suas diagonais – esse ponto é  $V_{1r}$  (a projeção horizontal, em rebatimento, do vértice da pirâmide).

No que respeita ao cubo, uma vez que se trata de um **poliedro regular**, as suas arestas que não estão contidas nas faces horizontais (de nível) estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais). Assim, os vértices da face superior (a face  $[C'D'E'F']$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da face  $[CDEF]$ , o que se assinalou imediatamente –  $C'_{1r} \equiv C_{1r}$ ,  $D'_{1r} \equiv D_{1r}$ ,  $E'_{1r} \equiv E_{1r}$  e  $F'_{1r} \equiv F_{1r}$ .

Estes procedimentos permitiram-nos concluir a construção das projeções horizontais do cubo e da pirâmide, em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido e trasladado). Para determinar as perspetivas dos dois quadrados e dois sólidos é necessário inverter o rebatimento, o que se pode processar recorrendo a retas do plano  $XY$  que contêm os vértices dos dois polígonos, como Em seguida, se expõe.

*Determinação das perspetivas dos quadrados  $[ABCD]$  e  $[CDEF]$ :*

Para inverter o rebatimento dos pontos **A** e **B** recorreu-se a uma reta  $a$ , que contém aqueles dois pontos (a reta suporte do lado  $[AB]$  do quadrado) – a reta  $a_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $a$ , em rebatimento, e passa por  $A_{1r}$  e por  $B_{1r}$  (a reta  $a$  está definida por dois pontos). A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $L_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $a$  que tem afastamento nulo) e interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $J_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $a$  que tem abscissa nula).

O ponto **L** é um ponto do eixo  $X$  (pois tem afastamento nulo). Assim, por  $L_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **L**) sobre a perspetiva do eixo  $X$ . Já temos um ponto para definir a reta (a perspetiva da projeção horizontal da reta  $a$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por  $J_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **J**) sobre a perspetiva do eixo  $Y$ . A projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_{1r}$ ), em perspetiva, está definida por dois pontos – o ponto  $L_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **L**) e o ponto  $J_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **J**). Tendo em conta que os pontos **L** e **J** estão contidos no plano  $XY$ , bem como a reta  $a$ , tem-se imediatamente  $L \equiv L_1$  (**L** é a perspetiva propriamente dita do ponto **L**),  $J \equiv J_1$  (**J** é a perspetiva propriamente dita do ponto **J**) e  $a \equiv a_1$  ( $a$  é a perspetiva propriamente dita da reta  $a$ ).

Em seguida, conduziu-se, por  $A_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**), sobre  $a_1$  (a perspetiva da projeção horizontal da reta  $a$ ). Uma vez que o ponto **A** pertence à reta  $a$  e ao plano  $XY$ , tem-se imediatamente  $A \equiv A_1$  (**A** é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**). De forma semelhante, conduziu-se, por  $B_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **B**), sobre  $a_1$  (a perspetiva da projeção horizontal da reta  $a$ ). Uma vez que o ponto **B** pertence à reta  $a$  e ao plano  $XY$ , tem-se imediatamente  $B \equiv B_1$  (**B** é a perspetiva propriamente dita do ponto **B**).

Para inverter o rebatimento dos pontos **C** e **D** recorreu-se à reta  $b$ , que contém aqueles pontos (a reta  $b$  é a reta suporte do lado  $[CD]$  do quadrado) – a reta  $b_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $b$ , em rebatimento, passa por  $C_{1r}$  e por  $D_{1r}$ , e é paralela à reta  $a_{1r}$  (a reta  $b$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que as retas  $a$  e  $b$  são paralelas, porque se trata de retas suporte de lados paralelos do quadrado. A reta  $b_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $N_{1r}$  (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto da reta  $b$  com afastamento nulo).

Por  $N_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $N_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **N**) sobre a perspetiva do eixo  $X$ . A projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_{1r}$ ), em perspetiva, está definida por um ponto (o ponto  $N_1$ , que é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **N**) e por uma direção (é paralela a  $a_1$ ). Tendo em conta que tanto o ponto **N** como a reta  $b$  estão contidos no plano  $XY$ , tem-se imediatamente  $N \equiv N_1$  (**N** é a perspetiva propriamente dita do ponto **N**) e  $b \equiv b_1$  ( $b$  é a perspetiva propriamente dita da reta  $b$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **C**), sobre  $b_1$  (a perspetiva da projeção horizontal da reta  $b$ ). Uma vez que o ponto **C** pertence à reta  $b$  e ao plano  $XY$ , tem-se imediatamente  $C \equiv C_1$  (**C** é a perspetiva propriamente dita do ponto **C**). De forma semelhante, conduziu-se, por  $D_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $D_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **D**), sobre  $b_1$  (a perspetiva da projeção horizontal da reta  $b$ ). Uma vez que o ponto **D** pertence à reta  $b$  e ao plano  $XY$ , tem-se imediatamente  $D \equiv D_1$  (**D** é a perspetiva propriamente dita do ponto **D**).

Para inverter o rebatimento dos pontos **E** e **F** recorreu-se à reta  $c$ , que contém aqueles pontos (a reta  $c$  é a reta suporte do lado  $[EF]$  do quadrado) – a reta  $c_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $c$ , em rebatimento, passa por  $E_{1r}$  e por  $F_{1r}$ , e é paralela às retas  $a_{1r}$  e  $b_{1r}$  (a reta  $c$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que as retas  $a$ ,  $b$  e  $c$  são paralelas, porque se trata de retas suporte de segmentos de reta paralelos. A reta  $c_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $P_{1r}$  (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto da reta  $c$  com afastamento nulo).

Por  $P_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $P_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **P**) sobre a perspetiva do eixo  $X$ . A projeção

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

horizontal da reta  $c$  ( $c_1$ ), em perspectiva, está definida por um ponto (o ponto  $P_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $P$ ) e por uma direção (é paralela às retas  $a_1$  e  $b_1$ ). Tendo em conta que tanto o ponto  $P$  como a reta  $c$  estão contidos no plano  $XY$ , tem-se imediatamente  $P \equiv P_1$  ( $P$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $P$ ) e  $c \equiv c_1$  ( $c$  é a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $E_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $E_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $E$ ), sobre  $c_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $c$ ). Uma vez que o ponto  $E$  pertence à reta  $c$  e ao plano  $XY$ , tem-se imediatamente  $E \equiv E_1$  ( $E$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $E$ ). De forma semelhante, conduziu-se, por  $F_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $F_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $F$ ), sobre  $c_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $c$ ). Uma vez que o ponto  $F$  pertence à reta  $c$  e ao plano  $XY$ , tem-se imediatamente  $F \equiv F_1$  ( $F$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $F$ ).

### Determinação da cota da face superior do cubo e do vértice da pirâmide:

Falta-nos determinar a perspectiva da cota do plano  $v$  (o plano horizontal que contém a face  $[C'D'E'F']$  do cubo), bem como a cota do vértice da pirâmide (o ponto  $V$ ), para determinar as perspectivas dos vértices da face  $[C'D'E'F']$  e do vértice  $V$  e, dessa forma, concluir a construção das perspectivas dos dois sólidos. As cotas medem-se no eixo  $Z$ , que não se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que, numa perspectiva isométrica, os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível determinar as perspectivas das cotas em qualquer eixo e, depois, transportá-las para o eixo correto (o eixo  $Z$ ). Tendo em conta que já temos dois dos eixos rebatidos (o eixo  $X$  e o eixo  $Y$ ), é possível, sobre qualquer deles, medir as cotas do plano da face superior do cubo e do vértice da pirâmide e, depois de determinar as suas perspectivas (afetadas pela deformação inerente à projeção), transportá-las para a perspectiva do eixo correto (o eixo  $Z$ ).

Todas as arestas de um cubo têm o mesmo comprimento. Nesse sentido, a distância entre os planos das duas faces horizontais (de nível) corresponde ao comprimento de qualquer dos lados do quadrado  $[CDEF]$  (uma das faces do cubo), que está em verdadeira grandeza no rebatimento do plano  $XY$ .

A altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o ponto  $V$  e o plano da base. Atendendo a que a pirâmide tem 8 cm de altura e que o plano da base (o plano  $XY$ ) tem cota nula, o vértice  $V$ , da pirâmide, tem 8 cm de cota ( $0 + 8 = 8$ ).

Nesse sentido, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a cota do plano  $v$  (que é igual ao comprimento de qualquer dos lados do quadrado  $[C_1D_1E_1F_1]$ ) e determinou-se um ponto  $U_r$ , que é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Y$  que tem a cota do plano  $v$ . Ainda sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a cota do vértice  $V$  (8 cm) e determinou-se um ponto  $Q_r$ , que é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Y$  que tem a cota do vértice  $V$ . Em seguida, inverteu-se o rebatimento, recorrendo às perpendiculares à charneira que passam por aqueles pontos, e determinaram-se, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , as perspectivas dos pontos  $U$  e  $Q$ .

Assim,  $\overline{OQ}$  é a perspectiva da cota do vértice  $V$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OQ}$ , transportou-se a perspectiva da cota para a perspectiva do eixo  $Z$ , determinando um ponto (na perspectiva do eixo  $Z$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo  $Z$  que tem a cota do vértice  $V$ , da pirâmide.

Pelo seu lado,  $\overline{OU}$  é a perspectiva da cota do plano  $v$  (o plano horizontal que contém a face  $[C'D'E'F']$  do cubo), mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OU}$ , transportou-se a perspectiva da cota para a perspectiva do eixo  $Z$ , determinando um ponto (na perspectiva do eixo  $Z$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo  $Z$  que tem a cota do plano  $v$ .

### Representação do plano horizontal (de nível) que contém a face superior do cubo:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , um ponto com a cota do plano  $v$  (o plano horizontal que contém a face superior do cubo). Pela perspectiva desse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

### Determinação das perspectivas dos vértices do quadrado $[C'D'E'F']$ (a face superior do cubo):

Uma vez que as arestas do cubo (que não são horizontais) estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais), é possível identificar, de forma imediata, as perspectivas das projeções horizontais dos vértices da face superior (que estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da face inferior) – tem-se, imediatamente,  $C'_1 \equiv C_1 \equiv C$ ,  $D'_1 \equiv D_1 \equiv D$ ,  $E'_1 \equiv E_1 \equiv E$  e  $F'_1 \equiv F_1 \equiv F$ .

Por outro lado, as retas  $b$  e  $c$  podem ser consideradas como as projeções laterais das retas  $b'$  e  $c'$ , contidas no plano  $v$ . Da mesma forma, enquanto os pontos  $N$  e  $P$  são os pontos com afastamento nulo das retas  $b$  e  $c$  (respetivamente), os pontos  $N'$  e  $P'$  serão os pontos com afastamento nulo das retas  $b'$  e  $c'$  (respetivamente). Assim, prolongaram-se as perpendiculares à charneira que passam por  $N$  e  $P$  e determinaram-se as perspectivas dos pontos  $N'$  e  $P'$ , sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ).

Por  $N'$  (a perspectiva do ponto  $N'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta  $b'$ , paralela à perspectiva da reta  $b$  – note que a reta  $b'$  está definida por um ponto (o ponto  $N'$ )

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

e por uma direção (é paralela às retas  $b$  e  $c$ ). Em seguida,, por  $C'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta vertical que contém a aresta  $[CC']$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $C'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b'$ . De forma semelhante, por  $D'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $D'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta vertical que contém a aresta  $[DD']$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $D'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b'$ .

Por outro lado, pelo ponto  $P'$  (a perspectiva do ponto  $P'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta  $c'$ , paralela à perspectiva da reta  $c$  – note que a reta  $c'$  está definida por um ponto (o ponto  $P'$ ) e por uma direção (é paralela às retas  $b$  e  $c$ ). Em seguida,, por  $E'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $E'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta vertical que contém a aresta  $[EE']$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $E'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c'$ . De forma semelhante, por  $F'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $F'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta vertical que contém a aresta  $[FF']$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $F'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c'$ .

#### Determinação das perspectivas do ponto $V$ :

Para se determinarem as perspectivas do ponto  $V$  há que, em primeiro lugar, inverter o rebatimento e determinar a perspectiva da sua projeção horizontal. Tendo em conta que a projeção horizontal do ponto  $V$  é um ponto das diagonais do quadrado  $[ABCD]$ , desenhou-se a perspectiva da diagonal  $[B_1D_1] - V_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V$ ) é um ponto desse segmento de reta. Assim, por  $V_1$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira do rebatimento e determinou-se  $V_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V$ ), sobre a perspectiva da diagonal  $[B_1D_1]$ .

Em seguida, a partir de  $V_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V$ ), conduziu-se uma paralela à perspectiva do eixo  $X$  e determinou-se, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , a perspectiva do **afastamento** do ponto  $V$ . De forma semelhante conduziu-se, por  $V_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V$ ), uma paralela à perspectiva do eixo  $Y$  e determinou-se, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , a perspectiva da **abscissa** do ponto  $V$ . Uma vez que já temos a perspectiva da **cota** do ponto  $V$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , já temos as perspectivas das três coordenadas do ponto  $V$ .

Assim, a partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $V$  determinaram-se as perspectivas das duas projeções em falta ( $V_2$  e  $V_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em  $O$  e o outro na respetiva projeção do ponto  $V$ .  $V_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $V$ .  $V_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $V$ .

Por fim, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $V$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $V_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $V$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $V_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $V$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $V_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $V$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $V$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $V$  são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas dos dois sólidos:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do cubo**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do cubo é a linha quebrada fechada  $[CC'D'E'EF]$ . Existem dois vértices do cubo que não integram o contorno aparente da perspectiva do sólido – os vértices  $D$  e  $F'$ . O vértice  $F'$ , por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[C'F']$ ,  $[E'F']$  e  $[FF']$ . O vértice  $D$ , por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[CD]$ ,  $[DE]$  e  $[DD']$ .

Em seguida, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando igualmente pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada  $[BCDV]$ . Existe um vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente da perspectiva do sólido – o vértice  $A$ . Este, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AD]$ , da base, e a aresta lateral  $[AV]$ . Por outro lado, a aresta lateral  $[CV]$  é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – as faces laterais  $[BCV]$  e  $[CDV]$ .

Salienta-se ainda, que o cubo oculta parcialmente a pirâmide. Nesse sentido, foram respeitadas todas as invisibilidades resultantes da ocultação provocada pelo cubo (as arestas laterais  $[CV]$  e  $[DV]$  estão parcialmente invisíveis).

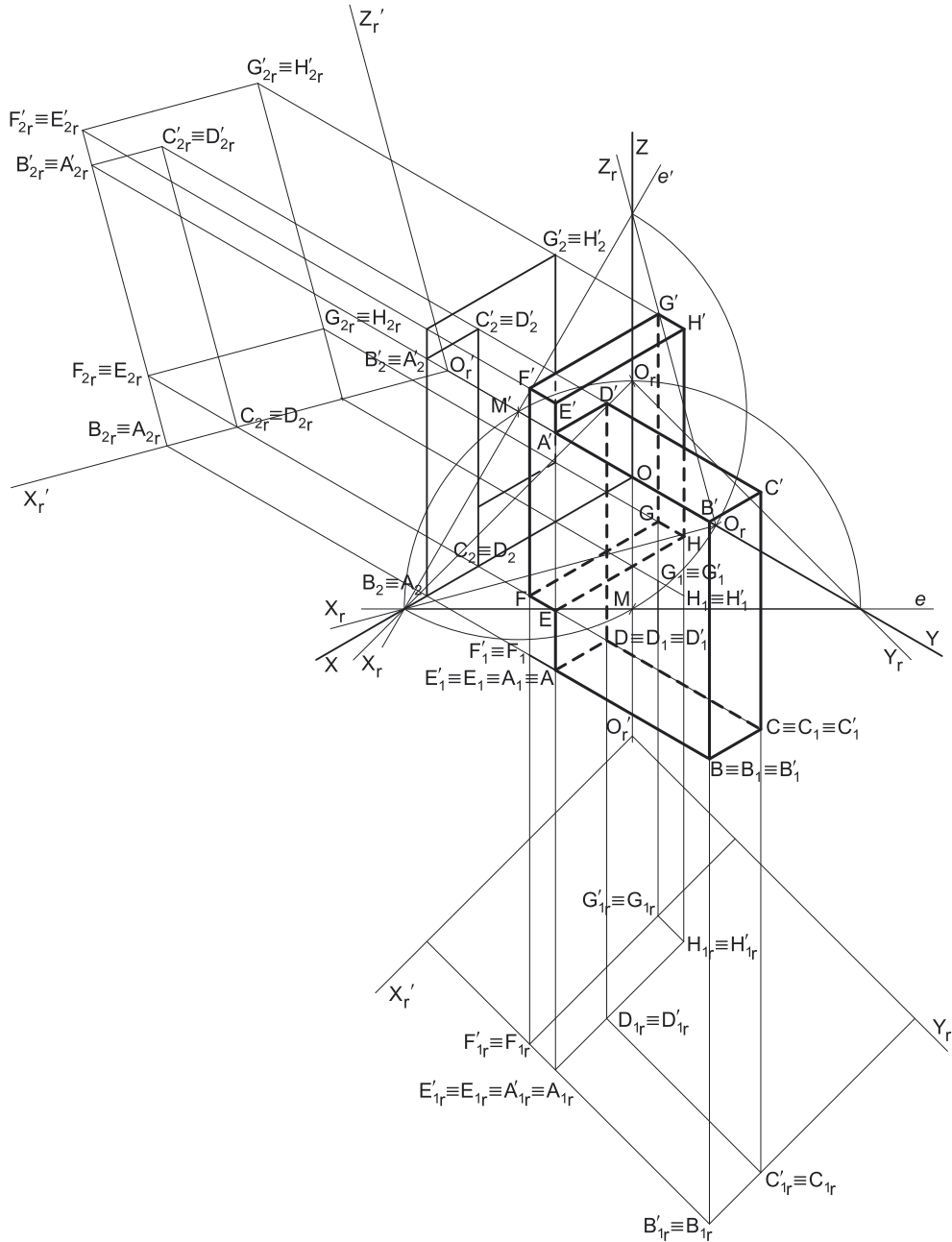
Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções horizontais nem das projeções frontais dos vértices de qualquer dos sólidos (à exceção do vértice  $V$ ), por não serem necessárias. Nesse sentido, também não se representaram as perspectivas de qualquer das projeções dos dois sólidos. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o cubo e a pirâmide, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a face superior do cubo), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e horizontal) se representaram a **leve**. As perspectivas do cubo e da pirâmide representaram-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado  $XY$* , da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção das projeções horizontais dos dois sólido em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento (as retas  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $b'$  e  $c'$ ) e, ainda, das linhas de chamada ou dos arcos de transporte das cotas do plano  $v$  e do vértice  $V$  para o eixo  $Z$ .



1221.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120°. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, **cujos vértices não se identificaram** para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações (recorde que as dimensões do *triângulo fundamental* são arbitrárias).

**Resolução:**

O plano que contém o retângulo **[ABCD]** (o *plano coordenado XY*) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o retângulo **[ABCD]** (a face inferior de um dos sólidos) **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do retângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o retângulo está contido no *plano coordenado horizontal* (o plano **XY**), sabe-se que o retângulo está em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY* – o retângulo **[ABCD]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no *plano coordenado XY*) são a mesma figura. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o retângulo está em verdadeira grandeza).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O rebatimento do *plano coordenado XY* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

Por outro lado, dada a complexidade do sólido (formado pela justaposição de dois paralelepípedos), considera-se conveniente o recurso a rebatimento de dois *planos coordenados* distintos, de forma a ser possível representar previamente o sólido em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento. Nesse sentido, é aconselhável o recurso ao **método dos cortes**, em que, rebatendo dois *planos coordenados*, será possível representar o sólido pelas suas duas projeções.

#### Rebatimento do plano coordenado XY:

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta suporte do lado do *triângulo fundamental* que se opõe à perspetiva do eixo  $Z$ .

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano  $XY$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**). Em seguida, determinou-se  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por  $O$  (que é a própria perspetiva do eixo  $Z$ ). O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

#### Rebatimento do plano coordenado XZ:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta suporte do lado do *triângulo fundamental* que se opõe à perspetiva do eixo  $Y$ .

O rebatimento do *plano coordenado XZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano  $XZ$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M'$ , o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**). Em seguida, determinou-se  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por  $O$  (que é a própria perspetiva do eixo  $Y$ ). O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo  $X_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

#### Construção da projeção horizontal do sólido, em verdadeira grandeza:

No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representou-se a **abscissa** dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $E$  e  $F$  (8 cm). No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representaram-se os **afastamentos** dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $E$  e  $F$  (2 cm, 5 cm e 11 cm). A partir das abscissas e dos afastamentos dos quatro pontos, foi possível determinar as suas projeções horizontais em rebatimento –  $A_{1_r}$ ,  $B_{1_r}$ ,  $E_{1_r}$  e  $F_{1_r}$ .

A partir de  $A_{1_r}$  e de  $B_{1_r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do retângulo [ABCD]**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do polígono, em rebatimento ( $C_{1_r}$  e  $D_{1_r}$ ), de acordo com os dados – os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à face de maior abscissa do paralelepípedo, pelo que  $A$  e  $B$  são os vértices de maior abscissa do retângulo.

A partir de  $E_{1_r}$  e de  $F_{1_r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do retângulo [EFGH]**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do polígono, em rebatimento ( $G_{1_r}$  e  $H_{1_r}$ ), de acordo com os dados – os pontos  $E$  e  $F$  pertencem à face de maior abscissa do paralelepípedo, pelo que  $E$  e  $F$  são os vértices de maior abscissa do retângulo.

Tendo em conta que o retângulo [ABCD] é a face inferior de um paralelepípedo, sabe-se que as arestas do sólido que não são horizontais são necessariamente verticais (projetantes horizontais), pelo que as projeções horizontais dos vértices do retângulo [A'B'C'D'] (a face superior do sólido) estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices da sua face inferior – tem-se, imediatamente,  $A'_{1_r} \equiv A_{1_r}$ ,  $B'_{1_r} \equiv B_{1_r}$ ,  $C'_{1_r} \equiv C_{1_r}$  e  $D'_{1_r} \equiv D_{1_r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do primeiro paralelepípedo, em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido e transladado).

Tendo em conta que o retângulo [EFGH] é a face inferior de um outro paralelepípedo, sabe-se que as arestas do sólido que não são horizontais são necessariamente verticais (projetantes horizontais), pelo que as projeções horizontais dos vértices do retângulo [E'F'G'H'] (a face superior do sólido) estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices da sua face inferior – tem-se, imediatamente,  $E'_{1_r} \equiv E_{1_r}$ ,  $F'_{1_r} \equiv F_{1_r}$ ,  $G'_{1_r} \equiv G_{1_r}$  e  $H'_{1_r} \equiv H_{1_r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do segundo paralelepípedo, em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido e transladado).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Construção da projeção frontal do sólido, em verdadeira grandeza:*

O primeiro paralelepípedo tem 8 cm de altura e a sua face inferior (o retângulo **[ABCD]**) tem cota nula (porque está contido no plano **XY**), pelo que o retângulo **[A'B'C'D']** (a face superior do sólido) tem 8 cm de cota ( $0 + 8 = 8$ ). Assim, todos os vértices da face superior têm 8 cm de cota.

O segundo paralelepípedo tem 7 cm de altura e a sua face inferior (o retângulo **[EFGH]**) tem 2 cm de cota (a cota dos pontos **E** e **F**), pelo que o retângulo **[E'F'G'H']** (a face superior do sólido) tem 9 cm de cota ( $2 + 7 = 9$ ). Assim, todos os vértices da face superior têm 9 cm de cota.

Assim, no plano **XZ** rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representaram-se as **abscissas** de todos os vértices do sólido (as abscissas dadas e as restantes, determinadas na construção prévia da projeção horizontal do sólido, em rebatimento) (8 cm). No plano **XZ** rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representaram-se as **cotas** de todos os vértices do sólido. A partir das abscissas e das cotas de todos os vértices do sólido, foi possível determinar as respetivas projeções frontais em rebatimento e, assim, concluir a construção da projeção frontal do sólido (em rebatimento, no plano **XZ** rebatido e trasladado).

*Determinação da perspetiva do sólido:*

Para inverter o rebatimento do ponto **A'** (por exemplo), a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção frontal), conduziu-se, por  $A'_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto **A'**, em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e**) e, por  $A'_{2r}$  (a projeção frontal do ponto **A'**, em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e'**) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspetiva propriamente dita do ponto **A'**.

A inversão do rebatimento dos outros vértices do sólido, bem como a determinação das respetivas perspetivas, processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **A'**. Note que não se representaram as perspetivas das projeções laterais de qualquer dos vértices do sólido, pois, na realidade, são absolutamente desnecessárias para a concretização do pedido (a perspetiva do sólido). Por outro lado, apesar de se terem representado as perspetivas das projeções horizontais e frontais dos vértices do sólido, salienta-se que estas também não são fundamentais à resolução do exercício e, por isso, poderiam ter sido omitidas.

Por fim, a partir das perspetivas dos dezasseis vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspetiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as arestas visíveis e as arestas invisíveis.

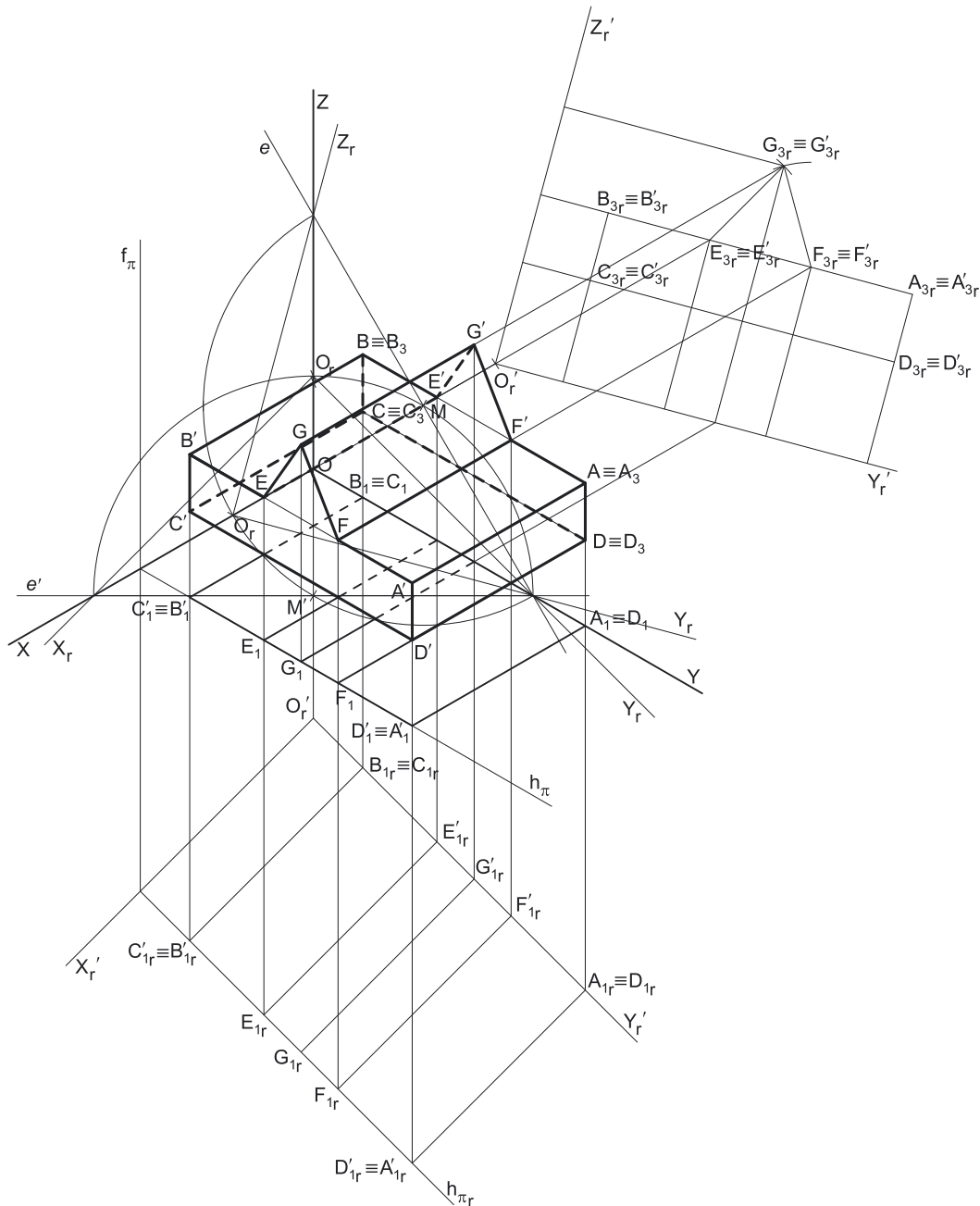
Salienta-se que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – dois paralelepípedos), as faces do objeto que resultam de duas faces coplanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso do segmento de reta **[A'E]**. De facto, o segmento de reta **[A'E]** **não é** uma aresta do sólido, porque não resulta da interseção entre duas faces distintas (o segmento de reta **[A'E]** é uma linha auxiliar que está contida numa determinada face do objeto e, por isso, não é uma aresta do sólido).

Sublinha-se que, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente «**um sólido composto**»), o segmento **[A'E]** seria a parte comum a duas arestas colineares dos dois sólidos.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva do sólido representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso dos rebatimentos do plano coordenado **XY** e do plano coordenado **XZ**, das translações dos planos coordenados rebatidos, da construção das projeções horizontal e frontal do sólido em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos e construir a perspetiva do sólido.

1222.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, **cujos vértices não se identificaram** para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações (recorde que as dimensões do *triângulo fundamental* são arbitrárias).

**Resolução:**

O plano que contém o retângulo **[ABCD]** (o *plano coordenado YZ*) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o retângulo **[ABCD]** (a face de menor abscissa do paralelepípedo) **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do retângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o retângulo está contido no *plano coordenado horizontal* (o plano **YZ**), sabe-se que o retângulo está em verdadeira grandeza no *plano coordenado YZ* – o retângulo **[ABCD]** e a sua projeção lateral (a sua projeção no *plano coordenado YZ*) são a mesma figura. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o retângulo está em verdadeira grandeza).

Por outro lado, o plano que contém o triângulo **[EFG]** (um plano de perfil) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o triângulo **[EFG]** (a face de maior abscissa do prisma triangular) **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano de perfil, sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado YZ* – o triângulo [EFG] e a sua projeção lateral (a sua projeção no *plano coordenado YZ*) são figuras geometricamente iguais. Assim, mais uma vez, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado YZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

Por outro lado, dada a complexidade do sólido (formado pela justaposição de um paralelepípedo e de um prisma triangular regular), considera-se conveniente o recurso a rebatimento de dois *planos coordenados* distintos, de forma a ser possível representar previamente o sólido em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento. Nesse sentido, é aconselhável o recurso ao **método dos cortes**, em que, rebatendo dois *planos coordenados*, será possível representar o sólido pelas suas duas projeções.

### Rebatimento do plano coordenado YZ:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta suporte do lado do *triângulo fundamental* que se opõe à perspetiva do eixo X.

O rebatimento do *plano coordenado YZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano YZ. Nesse sentido, determinou-se o ponto M, o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório). Em seguida, determinou-se  $O_r$  (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspetiva do eixo X). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo  $X_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XZ rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo Y. O ponto  $O_r'$  é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

### Rebatimento do plano coordenado XY:

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta suporte do lado do *triângulo fundamental* que se opõe à perspetiva do eixo Z.

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano XY. Nesse sentido, determinou-se o ponto M', o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório). Em seguida, determinou-se  $O_r$  (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspetiva do eixo Z). O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XY rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo Z. O ponto  $O_r'$  é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

### Construção da projeção lateral do sólido, em verdadeira grandeza:

No plano YZ rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representaram-se os **afastamentos** dos pontos A, B, E e F (11 cm, 2 cm, 5 cm e 8 cm, respetivamente). No plano YZ rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representou-se a **cota** dos pontos A, B, E e F (5 cm). A partir dos afastamentos e das cotas dos quatro pontos, foi possível determinar as suas projeções laterais em rebatimento –  $A_{3_r}$ ,  $B_{3_r}$ ,  $E_{3_r}$  e  $F_{3_r}$ .

A partir de  $A_{3_r}$  e de  $B_{3_r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do retângulo [ABCD]**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar as projeções laterais (em rebatimento) dos outros dois vértices do polígono ( $C_{3_r}$  e  $D_{3_r}$ ), de acordo com os dados – os pontos A e B pertencem à face de maior cota do paralelepípedo, pelo que A e B são os vértices de maior cota do retângulo.

A partir de  $E_{3_r}$  e de  $F_{3_r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do triângulo [EFG]**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar a projeção lateral, em rebatimento, do terceiro vértice do polígono ( $G_{3_r}$ ), de acordo com os dados – tendo em conta que os dois sólidos não se interpenetram, os pontos E e F pertencem necessariamente à face de menor cota do prisma, pelo que E e F são os vértices de maior cota do triângulo.

Tendo em conta que o retângulo [ABCD] é a face de menor abscissa de um paralelepípedo, sabe-se que as arestas do sólido que não estão contidas em planos de perfil são necessariamente fronto-horizontais (projetantes laterais), pelo que as projeções laterais dos vértices do retângulo [ $A'B'C'D'$ ] (a face de maior abscissa do sólido) estão coincidentes com as projeções laterais dos vértices da sua face de menor abscissa – tem-se, imediatamente,  $A'_{3_r} \equiv A_{3_r}$ ,  $B'_{3_r} \equiv B_{3_r}$ ,  $C'_{3_r} \equiv C_{3_r}$  e  $D'_{3_r} \equiv D_{3_r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção lateral do paralelepípedo, em rebatimento (no plano YZ rebatido e trasladado).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que o triângulo **[EFG]** é a base de maior abcissa de um prisma triangular regular, sabe-se que as arestas do sólido que não estão contidas nas bases são necessariamente fronto-horizontais (projetantes laterais), pelo que as projeções laterais dos vértices do triângulo **[E'F'G']** (a base de menor abcissa do sólido) estão coincidentes com as projeções laterais dos vértices da sua base de maior abcissa – tem-se, imediatamente,  $E'_{3r} \equiv E_{3r}$ ,  $F'_{3r} \equiv F_{3r}$  e  $G'_{3r} \equiv G_{3r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção lateral do prisma, em rebatimento (no plano **YZ** rebatido e transladado).

*Construção da projeção frontal do sólido, em verdadeira grandeza:*

A face de maior abcissa do paralelepípedo é complanar com a base **[EFG]** do prisma, pelo que todos os vértices do retângulo **[A'B'C'D']** têm 7 cm de abcissa (a abcissa dos pontos **E** e **F**). A base de menor abcissa do prisma triangular está contida no plano coordenado **YZ**, pelo que todos os vértices da base **[E'F'G']** têm abcissa nula.

Assim, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representaram-se as **abcissas** de todos os vértices do sólido. No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representaram-se os **afastamentos** de todos os vértices do sólido, nomeadamente o afastamento dos vértices **G** e **G'** (os vértices do triângulo que foram determinados em projeção lateral (em rebatimento)). A partir das abcissas e dos afastamentos de todos os vértices do sólido, foi possível determinar as respetivas projeções horizontais em rebatimento e, assim, concluir a construção da projeção horizontal do sólido (em rebatimento, no plano **XY** rebatido e transladado).

*Determinação da perspectiva do sólido:*

Para inverter o rebatimento do ponto **A'** (por exemplo), a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção lateral), conduziu-se, por  $A'_{3r}$  (a projeção lateral do ponto **A'**, em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e**) e, por  $A'_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto **A'**, em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e'**) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspectiva propriamente dita do ponto **A'**.

A inversão do rebatimento dos outros vértices do sólido, bem como a determinação das respetivas perspectivas, processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **A'**. Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais de qualquer dos vértices do sólido, pois, na realidade, são absolutamente desnecessárias para a concretização do pedido (a perspectiva do sólido). Por outro lado, apesar de se terem representado as perspectivas das projeções horizontais dos vértices de maior abcissa do sólido, salienta-se que estas também não são fundamentais à resolução do exercício e, por isso, poderiam ter sido omitidas.

Por fim, a partir das perspectivas dos catorze vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspectiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as arestas visíveis e as arestas invisíveis.

Salienta-se que se optou por representar o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a face de maior abcissa do sólido), pelas perspectivas dos seus traços. Para tal, a partir do eixo  $X_r'$ , transportou-se, para a perspectiva do eixo **X** (com uma perpendicular à charneira), a abcissa daquela face do sólido, o que nos permitiu determinar a perspectiva de um ponto do eixo **X**. Pela perspectiva desse pontos conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**. Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**.

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

Por fim, e por uma questão de melhor visualização da situação, determinaram-se as perspectivas das projeções horizontais de todos os vértices da face de maior abcissa do sólido, que está sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.

Salienta-se que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um paralelepípedo e um prisma triangular regular), as faces do objeto que resultam de duas faces complanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso dos segmentos de reta **[EF]** e **[E'F']**. De facto, os segmentos de reta **[EF]** e **[E'F']** **não são** arestas do sólido, porque não resultam da interseção entre duas faces distintas (aqueles segmentos são, apenas, linhas auxiliares que estão contidas em determinadas faces do objeto e, por isso, não são arestas do sólido).

Sublinha-se que, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente «**um sólido composto**»), os segmentos de reta **[EF]** e **[E'F']** seriam partes comuns a duas arestas colineares dos dois sólidos.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do sólido representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a face de maior abcissa do sólido), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso dos rebatimentos do plano coordenado **XY** e do plano coordenado **YZ**, das translações dos planos coordenados rebatidos, da construção das projeções horizontal e lateral do sólido em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos e construir a perspectiva do sólido.



## 1223.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

### Resolução:

São dadas duas vistas do objeto (as suas projeções horizontal e frontal), a partir das quais se depreende que o objeto tem as suas arestas paralelas aos eixos coordenados. Os planos que contêm qualquer destas duas projeções (o *plano coordenado horizontal* e o *plano coordenado frontal*) não são paralelos ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das projeções do objeto se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Nesta situação, é conveniente representar o objeto dado por duas das suas projeções, pelo menos, o que significa ter de rebater dois dos três *planos coordenados*. Tendo em conta que são dadas, apenas, as projeções horizontais e frontal do objeto, é conveniente representar previamente o objeto pelas suas projeções horizontal e frontal (em Dupla Projeção Ortogonal), pelo que é necessário recorrer ao **rebatimento dos planos coordenados** – o rebatimento do *plano coordenado horizontal* (o plano  $XY$ ) e o rebatimento do *plano coordenado frontal* (o plano  $XZ$ ).

O **rebatimento dos planos coordenados** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Destes dois processos, o mais eficaz (com vista à representação prévia do objeto por duas das suas projeções) é, inquestionavelmente, o **método dos cortes**.

#### Rebatimento do plano coordenado $XY$ :

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado  $XY$* ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado  $[RS]$  do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo  $Y$ ). Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

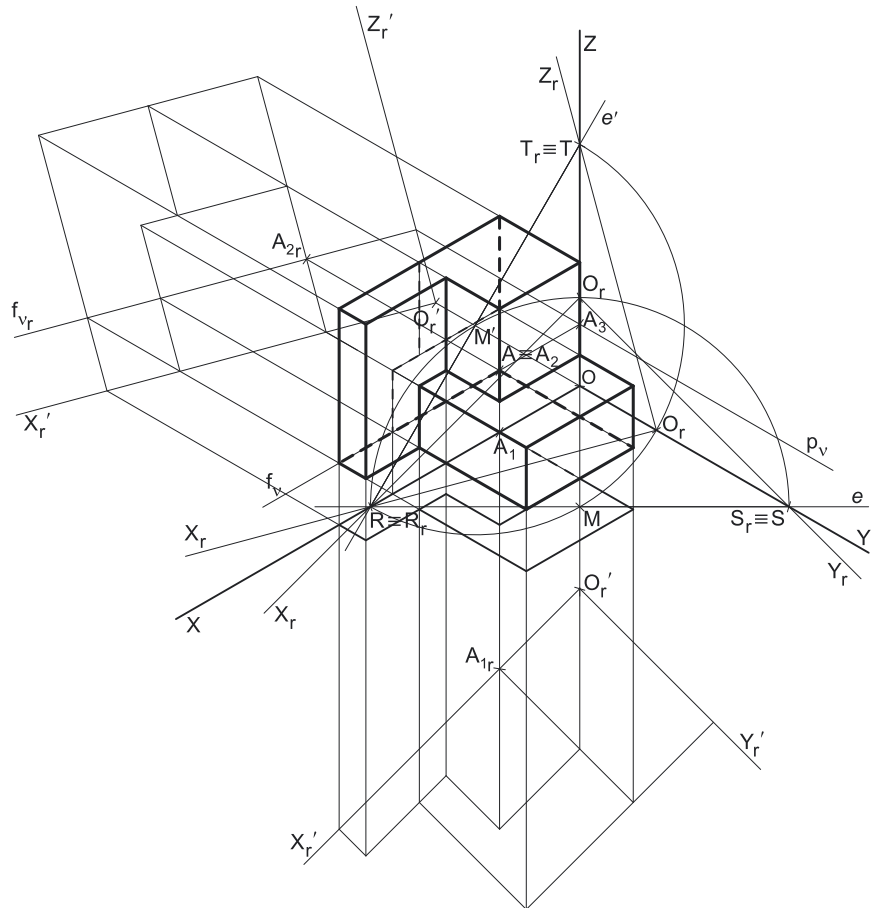
O rebatimento do *plano coordenado  $XY$*  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano  $XY$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do lado  $[RS]$  do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

#### Rebatimento do plano coordenado $XZ$ :

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado  $XZ$* ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o lado  $[RT]$  do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo  $Y$ ). Os pontos  $R$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O rebatimento do plano coordenado  $XZ$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano  $XZ$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M'$ , o ponto médio do lado  $[RT]$  do triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

*Representação do objeto pelas suas projeções horizontal e frontal, em rebatimento:*

No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , representou-se a **abscissa** do ponto  $A$  (3 cm, em verdadeira grandeza e a partir de  $O_r'$ ), o que nos permitiu representar, de imediato,  $A_{1r}$ , que é a projeção horizontal do ponto  $A$ , em rebatimento –  $A_{1r}$  situa-se no eixo  $X_r'$ , pois o ponto  $A$  tem afastamento nulo.

Tendo em conta que, a partir das projeções fornecidas, é possível contatar que o objeto tem as suas arestas paralelas aos eixos coordenados, a partir de  $A_{1r}$ , reproduziu-se a projeção horizontal fornecida do objeto, com as suas arestas paralelas ao eixo  $X_r'$  e ao eixo  $Y_r'$ .

No plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $A$  (3 cm, em verdadeira grandeza). No plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto  $A$  (2 cm, em verdadeira grandeza). A partir da abscissa e da cota do ponto  $A$  foi possível determinar  $A_{2r}$  –  $A_{2r}$  é a projeção frontal do ponto  $A$ , em rebatimento.

Tendo em conta que o objeto tem as suas arestas paralelas aos eixos coordenados, a partir de  $A_{2r}$ , reproduziu-se a projeção frontal fornecida do objeto, com as suas arestas paralelas ao eixo  $X_r'$  e ao eixo  $Z_r'$ .

Note que, no plano  $XZ$  rebatido e transladado, se representou, também, o plano horizontal (de nível) que contém a face inferior do sólido. Nesse sentido,  $f_{vr}$  é, em rebatimento, o traço frontal do plano  $v$  (o plano horizontal que contém a face inferior do objeto) –  $f_{vr}$  passa por  $A_{2r}$  (pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal) e é paralelo ao eixo  $X_r'$  (pois é uma reta fronto-horizontal do plano, com afastamento nulo)

*Determinação da perspectiva do objeto:*

Para inverter o rebatimento do ponto  $A$  (por exemplo), a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção frontal), conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ , em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $A$ , em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e'$ ) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ .

Por fim, determinaram-se as restantes perspectivas do ponto  $A$  – o ponto  $A$  é um ponto do plano  $XZ$  (pois tem afastamento nulo), pelo que se tem imediatamente  $A_2 \equiv A$  (sendo  $A_2$  a perspectiva da sua projeção frontal).  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ) situa-se da perspectiva do eixo  $X$  e  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ) situa-se na perspectiva do eixo  $Z$ .

A inversão do rebatimento dos restantes vértices do sólido, bem como a determinação das respetivas perspectivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto  $A$ . Note que não se representaram as perspectivas de nenhuma das projeções de qualquer dos pontos (projeção horizontal, projeção frontal e projeção lateral) pois, na realidade, não são necessárias. No entanto, ainda, assim, optou-se por se desenhar a perspectiva da projeção horizontal do objeto, apesar de não ser determinante para a concretização do exercício mas por permitir uma melhor visualização da situação.

Por outro lado, também se optou por representar o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a face inferior do sólido), pelas perspectivas dos seus traços. Nesse sentido, e tendo em conta que o plano  $v$  é um plano projetante frontal,  $f_v$  (a perspectiva do seu traço frontal) passa necessariamente por  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ) e é paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ) é concorrente com  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Z$  e é paralela à perspectiva do eixo  $Y$  (pois é uma reta de topo do plano, com abscissa nula).

Por fim, a partir das perspectivas da totalidade dos vértices do sólido, desenhou-se a sua perspectiva, atendendo às invisibilidades. Note que apenas existem arestas a separar faces distintas – tendo em conta que uma aresta é o segmento de reta segundo o qual se intersejam duas faces distintas (que estão contidas em planos distintos), na superfície de uma única face, porque está contida num único plano, não existe qualquer aresta «no meio» da face.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do sólido representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas dos traços (frontal e lateral) do plano  $v$  (o plano que contém a face inferior do sólido) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso dos rebatimentos do plano coordenado  $XY$  e do plano coordenado  $XZ$ , das translações dos planos coordenados rebatidos, da construção das projeções horizontal e frontal do objeto em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter o rebatimento e determinar a perspectiva do objeto.

## 1224.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Y** faz ângulos iguais (de  $130^\circ$ ) com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma **redução isolada**. A soma dos ângulos que a perspectiva do eixo **Y** faz com as perspectivas dos outros dois eixos é  $260^\circ$ , pelo que as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) fazem, entre si, o ângulo restante, que é um ângulo de  $100^\circ$  ( $360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

### Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (um plano horizontal) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o quadrado **[ABCD]** **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao *plano coordenado horizontal* (o plano **XY**), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY* – o quadrado **[ABCD]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no *plano coordenado XY*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XY* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

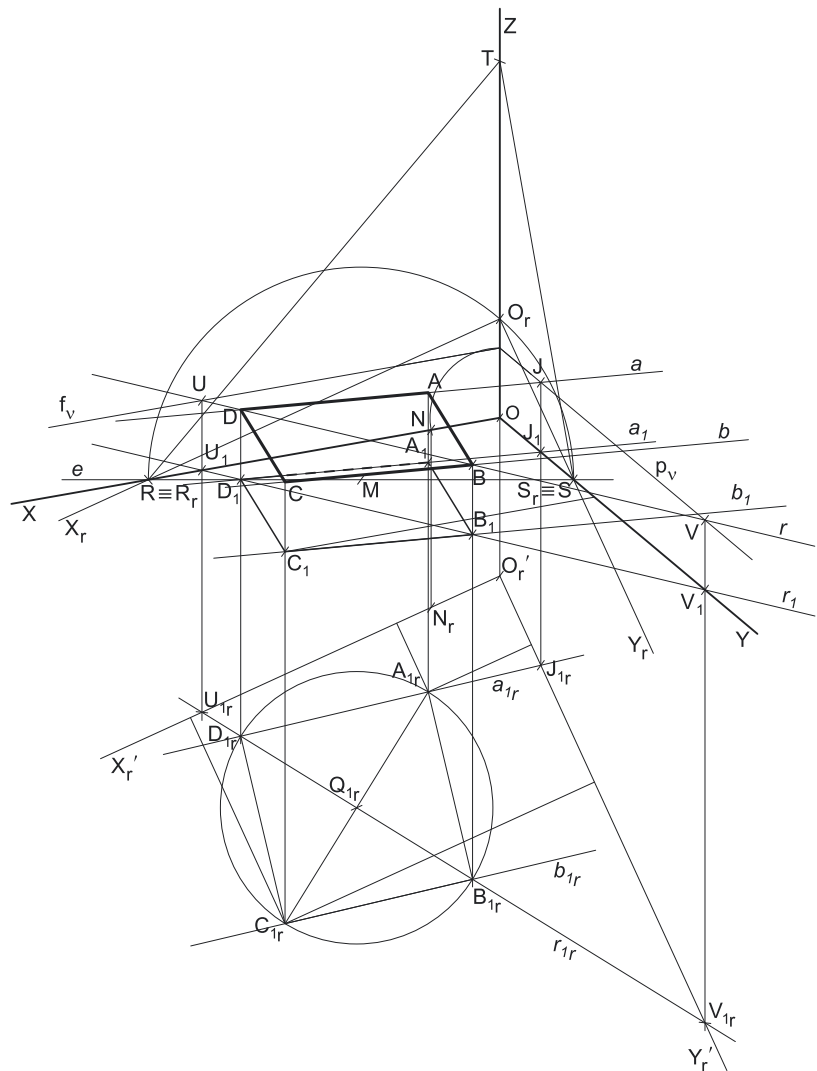
#### Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[RS]** do *triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **1091** e respetivo **relatório**).*

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo **Z**) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Y<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da *i* do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>**. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Construção da projeção horizontal do quadrado, em verdadeira grandeza:*

No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos **A** e **C** em verdadeira grandeza (3 cm e 9 cm, respetivamente). Em seguida, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **A** e **C** em verdadeira grandeza (2 cm e 6 cm, respetivamente). A partir das abscissas e dos afastamentos dos dois pontos, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, em rebatimento ( $A_{1r}$  e  $C_{1r}$ , respetivamente).

A partir de  $A_{1r}$  e  $C_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $B_{1r}$  e  $D_{1r}$  (as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento). Salienta-se que a construção do quadrado, em verdadeira grandeza, careceu da determinação do seu centro (o ponto  $Q_{1r}$ ), em rebatimento, bem como do desenho da circunferência circunscrita ao quadrado (em rebatimento). Tendo em conta que o enunciado é omissivo em relação à posição dos vértices **B** e **D**, estes foram identificados de forma arbitrária.

Para determinar a perspetiva do quadrado  $[ABCD]$  é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a figura.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém o quadrado  $[ABCD]$ :*

O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o quadrado é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **C**). Assim, há que determinar, sobre a perspetiva do eixo  $Z$ , um ponto com 2 cm de cota. Há a ter em conta que, numa perspetiva dimétrica, dois dos eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução. Nesta situação específica, os eixos que apresentam o mesmo coeficiente de redução são o eixo  $X$  e o eixo  $Z$ , pois, como atrás se referiu, o eixo  $Y$  é o eixo que apresenta um **coeficiente de redução isolado**. Assim, e tendo em conta que já temos o eixo  $X$  rebatido, é possível determinar a perspetiva da cota sobre a perspetiva do eixo  $X$  e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo  $Z$ ).

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 2 cm (a cota do plano  $v$ ) e determinou-se um ponto – o ponto  $N_r$ . O ponto  $N$  é o ponto do eixo  $X$  que tem 2 cm de abscissa. Para se determinar a perspetiva do ponto  $N$  conduziu-se, por  $N_r$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto  $N$ , sobre a perspetiva do eixo  $X$ . A distância do ponto  $N$  ao ponto  $O$  (medida sobre a perspetiva do eixo  $X$ ), é a perspetiva da cota do plano  $v$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio até à perspetiva do ponto  $N$ , transportou-se a perspetiva da cota para a perspetiva do eixo  $Z$ , determinando um ponto (na perspetiva do eixo  $Z$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspetiva do ponto do eixo  $Z$  que tem 2 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o quadrado  $[ABCD]$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abscissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação da perspetiva do quadrado  $[ABCD]$ :*

Para inverter o rebatimento dos vértices do quadrado optou-se por recorrer a retas do plano  $v$ , às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos **B** e **D** recorreu-se à reta  $r$ , que é a reta suporte da diagonal  $[BD]$  do quadrado. A reta  $r_{1r}$  (que está definida por  $B_{1r}$  e por  $D_{1r}$ ) é a projeção horizontal da reta  $r$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspetiva da projeção horizontal da reta  $r$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $r_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $U_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $r$  que tem afastamento nulo). Por  $U_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $U_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $U$ ) sobre a perspetiva do eixo  $X$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspetiva propriamente dita do ponto  $U$ . A reta  $r$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $U$  é um ponto de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Assim, a perspetiva do ponto  $U$  situa-se sobre a perspetiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $U_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta, que é o ponto  $U$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $r_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $V_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $r$  que tem abscissa nula). Por  $V_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $V_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $V$ ) sobre a perspetiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspetiva propriamente dita do ponto  $V$ . A reta  $r$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $V$  é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspetiva do ponto  $V$  situa-se sobre a perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $V_{1r}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta.

A projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_{1r}$ ), em perspetiva, está definida por dois pontos – o ponto  $U_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $U$ ) e o ponto  $V_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $V$ ). Por outro lado, a perspetiva propriamente dita da reta  $r$  também está definida por dois pontos – as perspetivas propriamente ditas dos pontos  $U$  e  $V$ . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a perspetiva da projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_{1r}$ ), bem como a sua perspetiva propriamente dita ( $r$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, conduziu-se, por  $B_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ), sobre  $r_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $r$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $r$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $D$  (conduzindo, por  $D_{1r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $r$ ), bem como a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $D$  ( $D_1$ ), sobre a perspectiva da projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos  $A$  e  $C$  poder-se-ia ter recorrido à reta suporte da diagonal  $[AC]$ , mas essa reta ficaria numa posição pouco favorável ao rigor necessário à resolução. Assim, optou-se por outra situação.

Para inverter o rebatimento do ponto  $A$  recorreu-se à reta  $a$ , que contém o ponto  $A$  – a reta  $a$  é a reta suporte do lado  $[AD]$  do quadrado) – a reta  $a_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $a$ , em rebatimento, e passa por  $A_{1r}$  e por  $D_{1r}$  (a reta  $a$  está definida por dois pontos). É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $a$  contém o ponto  $D$ , cujas perspectivas já foram determinadas, pelo que já temos um ponto para definir a reta – falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $J_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $r$  que tem abcissa nula). Por  $J_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $J$  é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $J$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{1r}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta.

A projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_1$ ), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto  $D_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $D$ ) e o ponto  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ). Por outro lado, a perspectiva propriamente dita da reta  $a$  também está definida por dois pontos – as perspectivas propriamente ditas dos pontos  $D$  e  $J$ . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_1$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $A_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ), sobre  $a_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , na mesma perpendicular à charneira.

Para inverter o rebatimento do ponto  $C$  recorreu-se à reta  $b$ , que contém o ponto  $C$  – a reta  $b$  é a reta suporte do lado  $[BC]$  do quadrado) – a reta  $b_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $b$ , em rebatimento, e passa por  $B_{1r}$  e por  $C_{1r}$ , e é paralela à reta  $a_{1r}$  (a reta  $b$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , porque se trata de retas suporte de lados paralelos do quadrado – os lados  $[AD]$  e  $[BC]$ . É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $b$  contém o ponto  $B$ , cujas perspectivas já foram determinadas, pelo que já temos um ponto para definir a reta – falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ .

Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_1$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $b$ ). A perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_1$ ) está definida por um ponto ( $B_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ) e por uma direção (é paralela a  $a_1$ , a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ). A perspectiva propriamente dita da reta  $b$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto  $B$ ) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ), sobre  $b_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira.

A partir das perspectivas dos quatro vértices do quadrado  $[ABCD]$ , desenhou-se a perspectiva da figura. Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais dos vértices do quadrado, por não serem necessárias. Na realidade, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido regularmente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o quadrado, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do quadrado representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano que contém o quadrado), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção da projeção horizontal do quadrado em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira.



## 1225.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz ângulos iguais (de  $125^\circ$ ) com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo **Z** é o eixo que sofre uma **redução isolada**. A soma dos ângulos que a perspectiva do eixo **Z** faz com as perspectivas dos outros dois eixos é  $250^\circ$ , pelo que as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **X**) fazem, entre si, o ângulo restante, que é um ângulo de  $110^\circ$  ( $360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

**Resolução:**

O plano que contém o hexágono [ABCDEF] (um plano de perfil) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o hexágono [ABCDEF] **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do hexágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o hexágono está contido num plano de perfil, que é paralelo ao *plano coordenado de perfil* (o plano **YZ**), sabe-se que o hexágono se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado YZ* – o hexágono [ABCDEF] e a sua projeção lateral (a sua projeção no *plano coordenado YZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o hexágono se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado YZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

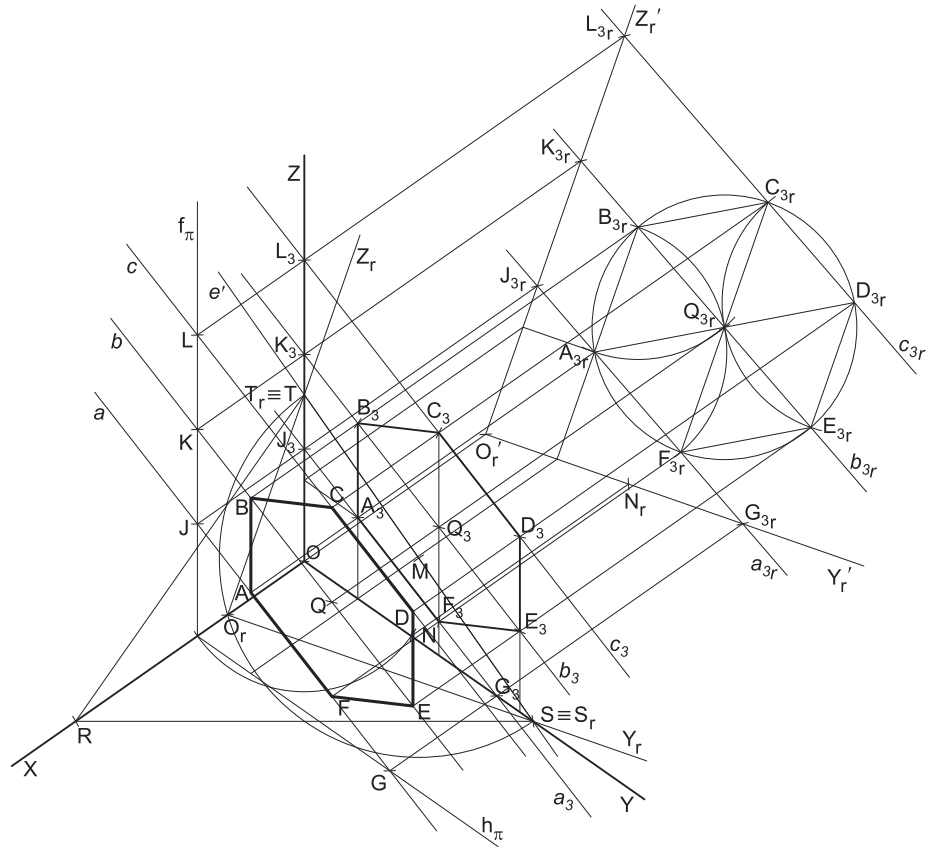
**Rebatimento do plano coordenado YZ:**

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado [ST] do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

O rebatimento do *plano coordenado YZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **YZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado [ST] do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo **X**) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $Y_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **X**. O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Construção da projeção lateral do hexágono, em verdadeira grandeza:*

No plano  $YZ$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **A** em verdadeira grandeza (2 cm). Em seguida, no plano  $YZ$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **A** em verdadeira grandeza (3 cm). A partir do afastamento e da cota do ponto **A**, em verdadeira grandeza, foi possível determinar a projeção lateral do ponto **A**, em rebatimento ( $A_{3_r}$ ).

Tendo em conta que o lado  $[AB]$  do hexágono é vertical, sabe-se que o lado  $[AB]$  é paralelo ao eixo  $Z$ . Assim, em rebatimento, o segmento  $[A_3_r B_3_r]$  (a projeção lateral do lado  $[AB]$ , em rebatimento) é necessariamente paralelo ao eixo  $Z_r'$ . De acordo com esta premissa, e atendendo ao comprimento do lado do hexágono (3,5 cm), determinou-se  $B_{3_r}$  (a projeção lateral do ponto **B**, em rebatimento).

Em seguida, a partir de  $A_{3_r}$  e de  $B_{3_r}$  (as projeções laterais dos pontos **A** e **B**, em rebatimento), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção lateral do hexágono, em rebatimento, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar  $Q_{3_r}$  (a projeção lateral do centro do hexágono, em rebatimento). Salienta-se que a determinação de  $Q_{3_r}$  se processou através da construção de um triângulo equilátero, de que  $A_{3_r}$ ,  $B_{3_r}$  e  $Q_{3_r}$  são os vértices.

Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_{3_r}$  (a projeção lateral do ponto **Q**, em rebatimento) e com raio até  $A_{3_r}$  e  $B_{3_r}$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao hexágono (em verdadeira grandeza, em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu concluir a construção da **projeção lateral do hexágono**, em verdadeira grandeza e, dessa forma, determinar os restantes quatro vértices do polígono (em rebatimento) – o hexágono  $[A_{3_r} B_{3_r} C_{3_r} D_{3_r} E_{3_r} F_{3_r}]$  é a projeção lateral do hexágono  $[ABCDEF]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $YZ$ .

Para determinar a perspetiva do hexágono  $[ABCDEF]$  é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $\pi$ , o plano de perfil que contém a figura.

*Representação do plano de perfil que contém o hexágono  $[ABCDEF]$ :*

O plano de perfil  $\pi$  que contém o hexágono é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 4 cm de abcissa (a abcissa do ponto **A**, dada no enunciado). Assim, há que determinar, sobre a perspetiva do eixo  $X$ , um ponto com 4 cm de abcissa. Há a ter em conta que, numa perspetiva dimétrica, dois dos eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução. Nesta situação específica, os eixos que apresentam o mesmo coeficiente de redução são o eixo  $X$  e o eixo  $Y$ , pois, como atrás se referiu, o eixo  $Z$  é o eixo que apresenta um **coeficiente de redução isolado**. Assim, e tendo em conta que já temos o eixo  $Y$  rebatido, é possível determinar a perspetiva da abcissa sobre a perspetiva do eixo  $Y$  e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo  $X$ ).

Nesse sentido, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 4 cm (a abcissa do plano  $\pi$ ) e determinou-se um ponto – o ponto  $N_r$ . O ponto **N** é o ponto do eixo  $Y$  que tem 4 cm de afastamento. Para se determinar a perspetiva do ponto **N** conduziu-se, por  $N_r$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto **N**, sobre a perspetiva do eixo  $Y$ . A distância do ponto **N** ao ponto **O** (medida sobre a perspetiva do eixo  $Y$ ), é a perspetiva da abcissa do plano  $\pi$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspetiva do eixo  $X$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio até à perspetiva do ponto **N**, transportou-se a perspetiva da abcissa para a perspetiva do eixo  $X$ , determinando um ponto (na perspetiva do eixo  $X$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspetiva do ponto do eixo  $X$  que tem 4 cm de abcissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém o hexágono  $[ABCDEF]$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_\pi$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi$ ). Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

*Determinação da perspetiva do hexágono  $[ABCDEF]$ :*

Para inverter o rebatimento dos vértices do hexágono optou-se por recorrer a retas do plano  $\pi$ , às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos **A** e **F** recorreu-se à reta  $a$ , que é a reta suporte do lado  $[AF]$  do hexágono. A reta  $a_{3_r}$  (que está definida por  $A_{3_r}$  e por  $F_{3_r}$ ) é a projeção lateral da reta  $a$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspetiva da projeção lateral da reta  $a$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $a_{3_r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $G_{3_r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta  $a$  que tem cota nula). Por  $G_{3_r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $G_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **G**) sobre a perspetiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspetiva propriamente dita do ponto **G**. A reta  $a$  é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto **G** é um ponto de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspetiva do ponto **G** situa-se sobre a perspetiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $G_{3_r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $a$ , que é o ponto **G**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $a_{3_r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $J_{3_r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta  $a$  que tem afastamento nulo). Por  $J_{3_r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **J**) sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspetiva propriamente dita do ponto **J**. A reta  $a$  é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto **J** é um ponto de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspetiva do ponto **J** situa-se sobre a perspetiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{3_r}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $a$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A projeção lateral da reta  $a$  ( $a_3$ ), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto  $J_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $J$ ) e o ponto  $G_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $G$ ). Por outro lado, a perspectiva propriamente dita da reta  $a$  também está definida por dois pontos – as perspectivas propriamente ditas dos pontos  $J$  e  $G$ . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a perspectiva da projeção lateral da reta  $a$  ( $a_3$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $A_{3p}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ), sobre  $a_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $F$  (conduzindo, por  $F_{3p}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $F$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ ), bem como a perspectiva da projeção lateral do ponto  $F$  ( $F_3$ ), sobre a perspectiva da projeção lateral da reta  $a$  ( $a_3$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos  $B$  e  $E$  recorreu-se à reta  $b$ , que contém aqueles pontos (a reta  $b$  é a reta suporte da diagonal  $[BE]$  do hexágono) – a reta  $b_{3p}$  é a projeção lateral da reta  $b$ , em rebatimento, e passa por  $B_{3p}$  e por  $E_{3p}$  (a reta  $b$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , porque a diagonal  $[BE]$  é paralela ao lado  $[AF]$  do hexágono. A reta  $b_{3p}$  interseca o eixo  $Z_3'$  no ponto  $K_{3p}$  (que é a projeção lateral, em rebatimento, do ponto da reta  $b$  com afastamento nulo). Por  $K_{3p}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $K$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $K$ . A reta  $b$  é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto  $K$  é um ponto de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $K$  situa-se sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_{3p}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $b$ , que é o ponto  $K$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ . Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção lateral da reta  $b$  ( $b_3$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $b$ ). A perspectiva da projeção lateral da reta  $b$  ( $b_3$ ) está definida por um ponto ( $K_3$ , que é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $K$ ) e por uma direção (é paralela a  $a_3$ , a perspectiva da projeção lateral da reta  $a$ ). A perspectiva propriamente dita da reta  $b$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto  $K$ ) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $B_{3p}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $B$ ), sobre  $b_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $E$  (conduzindo, por  $E_{3p}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $E$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ ), bem como a perspectiva da projeção lateral do ponto  $E$  ( $E_3$ ), sobre a perspectiva da projeção lateral da reta  $b$  ( $b_3$ ). Note que, de forma idêntica, e determinaram as perspectivas propriamente dita do ponto  $Q$  (o centro da figura) e da sua projeção lateral ( $Q_3$ ), pois o ponto  $Q$  é outro ponto da reta  $b$ .

Para inverter o rebatimento dos pontos  $C$  e  $D$  recorreu-se à reta  $c$ , que contém aqueles pontos (a reta  $c$  é a reta suporte do lado  $[CD]$  do hexágono) – a reta  $c_{3p}$  é a projeção lateral da reta  $c$ , em rebatimento, e passa por  $C_{3p}$  e por  $D_{3p}$  (a reta  $c$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que a reta  $c$  é paralela às retas  $a$  e  $b$ , porque o lado  $[CD]$  é paralelo à diagonal  $[BE]$  e ao lado  $[AD]$  do hexágono. A reta  $c_{3p}$  interseca o eixo  $Z_3'$  no ponto  $L_{3p}$  (que é a projeção lateral, em rebatimento, do ponto da reta  $c$  com afastamento nulo). Por  $L_{3p}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $L$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $L$ . A reta  $c$  é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto  $L$  é um ponto de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $L$  situa-se sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $L_{3p}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $c$ , que é o ponto  $L$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $c$  é paralela à reta  $a$  (e à reta  $b$ ), também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $c$ . Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção lateral da reta  $c$  ( $c_3$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $c$ ). A perspectiva da projeção lateral da reta  $c$  ( $c_3$ ) está definida por um ponto ( $L_3$ , que é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $L$ ) e por uma direção (é paralela a  $a_3$ , a perspectiva da projeção lateral da reta  $a$ ). A perspectiva propriamente dita da reta  $c$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto  $L$ ) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_{3p}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C$ ), sobre  $c_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta  $c$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $D$  (conduzindo, por  $D_{3p}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ ), bem como a perspectiva da projeção lateral do ponto  $D$  ( $D_3$ ), sobre a perspectiva da projeção lateral da reta  $c$  ( $c_3$ ).

A partir das perspectivas dos seis vértices do hexágono  $[ABCDEF]$ , desenhou-se a perspectiva da figura. Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções horizontais nem das projeções frontais dos vértices do hexágono, por não serem necessárias. Na realidade, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido sistematicamente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o hexágono, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do hexágono representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém o hexágono), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado  $YZ$ , da translação do plano  $YZ$  rebatido, da construção da projeção lateral do hexágono em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira.

## 1226.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que o eixo **X** é o eixo que sofre uma **redução isolada** (como o enunciado refere expressamente), a perspectiva do eixo **X** faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos. Por outro lado, as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $140^\circ$  (o ângulo dado no enunciado), pelo que o ângulo restante é um ângulo de  $220^\circ$  ( $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ ). Este ângulo tem de ser dividido por dois – os dois ângulos iguais que a perspectiva do eixo **X** faz com as perspectivas dos outros dois eixos. Assim, a perspectiva do eixo **X** faz, com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**), ângulos de  $110^\circ$  ( $220^\circ : 2 = 110^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

### Resolução:

O plano que contém o pentágono **[ABCDE]** (um plano horizontal) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o pentágono **[ABCDE]** não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do pentágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o pentágono está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao *plano coordenado horizontal* (o plano **XY**), sabe-se que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY* – o pentágono **[ABCDE]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no *plano coordenado XY*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o pentágono se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XY* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

#### Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

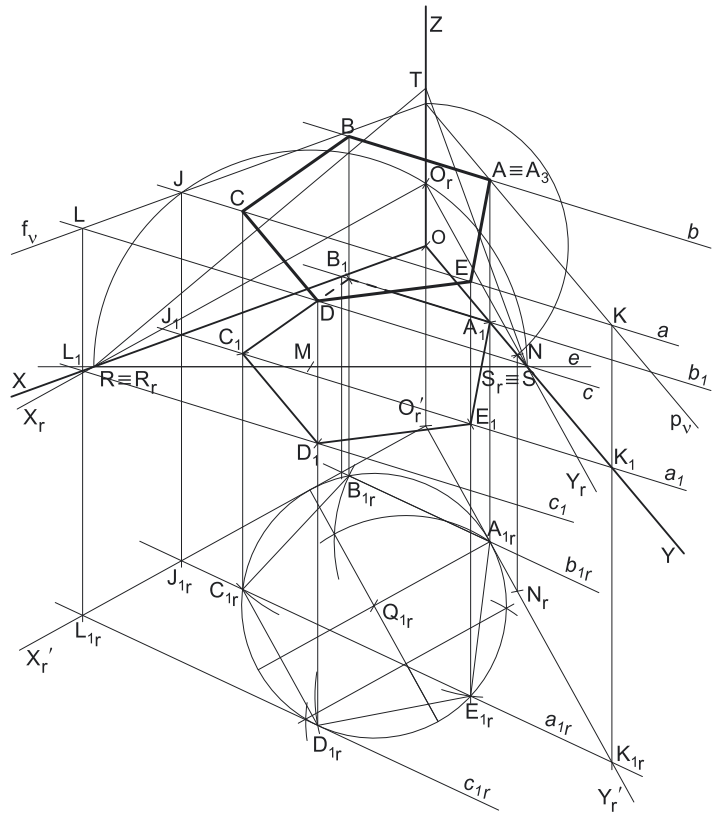
O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[RS]** do *triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).*

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo **Z**) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

#### Construção da projeção horizontal do pentágono, em verdadeira grandeza:

O enunciado refere, expressamente, que a circunferência circunscrita ao pentágono é tangente ao plano **XZ** e ao plano **YZ**. Assim, o ponto **Q** (o centro da circunferência circunscrita ao pentágono) tem necessariamente 3,5 cm de **abscissa** (a distância do ponto **Q** ao plano **YZ** é igual ao raio da circunferência) e 3,5 cm de **afastamento** (a distância do ponto **Q** ao plano **XZ** é igual ao raio da circunferência).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $Q$  em verdadeira grandeza (3,5 cm). Em seguida, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto  $Q$  em verdadeira grandeza (3,5 cm). A partir da abscissa e do afastamento do ponto  $Q$ , em verdadeira grandeza, foi possível determinar a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento ( $Q_{1r}$ ).

Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento), e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal (em rebatimento) da circunferência em que o pentágono se inscreve – essa circunferência é necessariamente tangente ao eixo  $X_r'$  e ao eixo  $Y_r'$ . Tendo em conta que o ponto  $A$  tem abscissa nula (como o enunciado refere expressamente), o ponto  $A$  é necessariamente o ponto em que a circunferência é tangente ao plano  $YZ$  (o ponto da circunferência que pertence ao plano  $YZ$ ). Nesse sentido, determinou-se  $A_{1r}$  (A projeção horizontal do ponto  $A$ , em rebatimento), que é o ponto em que a circunferência é tangente ao eixo  $Y_r'$ .

Por fim, a partir de  $A_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ , em rebatimento), efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu concluir a construção da **projeção horizontal do pentágono**, em verdadeira grandeza e, dessa forma, determinar os restantes quatro vértices do polígono (em rebatimento) – o pentágono  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}E_{1r}]$  é a projeção horizontal do pentágono  $[ABCDE]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ .

Para determinar a perspectiva do pentágono  $[ABCDE]$  é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a figura.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém o pentágono  $[ABCDE]$ :*

O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o pentágono é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 5 cm de cota (a cota do plano  $v$ , dada no enunciado). Assim, há que determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , um ponto com 5 cm de cota. Há a ter em conta que, numa perspectiva dimétrica, dois dos eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução. Nesta situação específica, os eixos que apresentam o mesmo coeficiente de redução são o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ , pois, como atrás se referiu, o eixo  $X$  é o eixo que apresenta um **coeficiente de redução isolado**. Assim, e tendo em conta que já temos o eixo  $Y$  rebatido, é possível determinar a perspectiva da cota sobre a perspectiva do eixo  $Y$  e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo  $Z$ ).

Nesse sentido, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a cota do plano  $v$ ) e determinou-se um ponto – o ponto  $N_r$ . O ponto  $N$  é o ponto do eixo  $Y$  que tem 5 cm de afastamento. Para se determinar a perspectiva do ponto  $N$  conduziu-se, por  $N_r$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $N$ , sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . A distância do ponto  $N$  ao ponto  $O$  (medida sobre a perspectiva do eixo  $Y$ ), é a perspectiva da cota do plano  $v$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio até à perspectiva do ponto  $N$ , transportou-se a perspectiva da cota para a perspectiva do eixo  $Z$ , determinando um ponto (na perspectiva do eixo  $Z$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo  $Z$  que tem 5 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o pentágono  $[ABCDE]$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação da perspectiva do pentágono  $[ABCDE]$ :*

Para inverter o rebatimento dos vértices do pentágono, optou-se por recorrer a retas do plano  $v$ , às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos  $C$  e  $E$  recorreu-se à reta  $a$ , que é a reta suporte da diagonal  $[CE]$  do pentágono. A reta  $a_{1r}$  (que está definida por  $C_{1r}$  e por  $E_{1r}$ ) é a projeção horizontal da reta  $a$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $J_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $a$  que tem afastamento nulo). Por  $J_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $J$  é um ponto de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $J$  situa-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $a$ , que é o ponto  $J$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $K_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $a$  que tem abscissa nula). Por  $K_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $K$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $K$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $K$  é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $K$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_{1r}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $a$ .

A projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_{1r}$ ), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) e o ponto  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $K$ ). Por outro lado, a perspectiva propriamente dita da reta  $a$  também está definida por dois pontos – as perspectivas propriamente ditas dos pontos  $J$  e  $K$ . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_{1r}$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $a$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, conduziu-se, por  $C_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ), sobre  $a_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $E$  (conduzindo, por  $E_{1r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $E$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ ), bem como a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $E$  ( $E_1$ ), sobre a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_1$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos  $A$  e  $B$  recorreu-se à reta  $b$ , que contém aqueles pontos (a reta  $b$  é a reta suporte do lado  $[AB]$  do pentágono) – a reta  $b_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $b$ , em rebatimento, e passa por  $A_{1r}$  e por  $B_{1r}$  (a reta  $b$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , porque o lado  $[AB]$  é paralelo à diagonal  $[CE]$  do pentágono. A reta  $b_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $A_{1r}$  (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto da reta  $b$  com abscissa nula – o ponto  $A$ ). Por  $A_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ . A reta  $b$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $A$  é necessariamente um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $A$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $A_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $b$ , que é o ponto  $A$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ . Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_1$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $b$ ). A perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_1$ ) está definida por um ponto ( $A_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ) e por uma direção (é paralela a  $a_1$ , a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ). A perspectiva propriamente dita da reta  $b$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto  $A$ ) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $a$ ). Uma vez que o ponto  $A$  é um ponto do plano  $YZ$  (um ponto com abscissa nula) o ponto está coincidente com a sua projeção lateral, o que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente,  $A_3 \equiv A$ .

Por fim, conduziu-se, por  $B_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ), sobre  $b_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira.

Para inverter o rebatimento do ponto  $D$  recorreu-se à reta  $c$ , que contém aquele ponto (a reta  $c$  uma reta paralela às retas  $a$  e  $b$ ) – a reta  $c_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $c$ , em rebatimento, e passa por  $D_{1r}$  (a reta  $c$  está definida por um ponto e por uma direção). Sublinha-se que, por uma questão de economia de traçados, se garantiu que a reta  $c$  é paralela às retas  $a$  e  $b$ . A reta  $c_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $L_{1r}$  (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto da reta  $c$  com afastamento nulo). Por  $L_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $L$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $L$ . A reta  $c$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $L$  é um ponto de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $L$  situa-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $L_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $c$ , que é o ponto  $L$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $c$  é paralela à reta  $a$  (e à reta  $b$ ), também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $c$ . Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção horizontal da reta  $c$  ( $c_1$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $c$ ). A perspectiva da projeção horizontal da reta  $c$  ( $c_1$ ) está definida por um ponto ( $L_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $L$ ) e por uma direção (é paralela a  $a_1$  e a  $b_1$ , as perspectivas das projeções horizontais das retas  $a$  e  $b$ , respetivamente). A perspectiva propriamente dita da reta  $c$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto  $L$ ) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $D_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $D_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $D$ ), sobre  $c_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $c$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ , na mesma perpendicular à charneira.

A partir das perspectivas dos cinco vértices do pentágono  $[ABCDE]$ , desenhou-se a perspectiva da figura. Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais dos vértices do pentágono, por não serem necessárias. Na realidade, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido sistematicamente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o pentágono, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do pentágono representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano horizontal que contém o pentágono), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado  $XY$ , da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção da projeção horizontal do pentágono em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira.



## 1227.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que o eixo **X** é o eixo que sofre uma **redução isolada** (como o enunciado refere expressamente), a perspectiva do eixo **X** faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos. Por outro lado, as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $130^\circ$  (o ângulo dado no enunciado), pelo que o ângulo restante é um ângulo de  $230^\circ$  ( $360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$ ). Este ângulo tem de ser dividido por dois – os dois ângulos iguais que a perspectiva do eixo **X** faz com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**), ângulos de  $115^\circ$  ( $230^\circ : 2 = 115^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (um plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao *plano coordenado frontal* (o plano **XZ**), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* – o triângulo **[ABC]** e a sua projeção frontal (a sua projeção no *plano coordenado XZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

*Rebatimento do plano coordenado XZ:*

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[RT]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo **Y**). Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

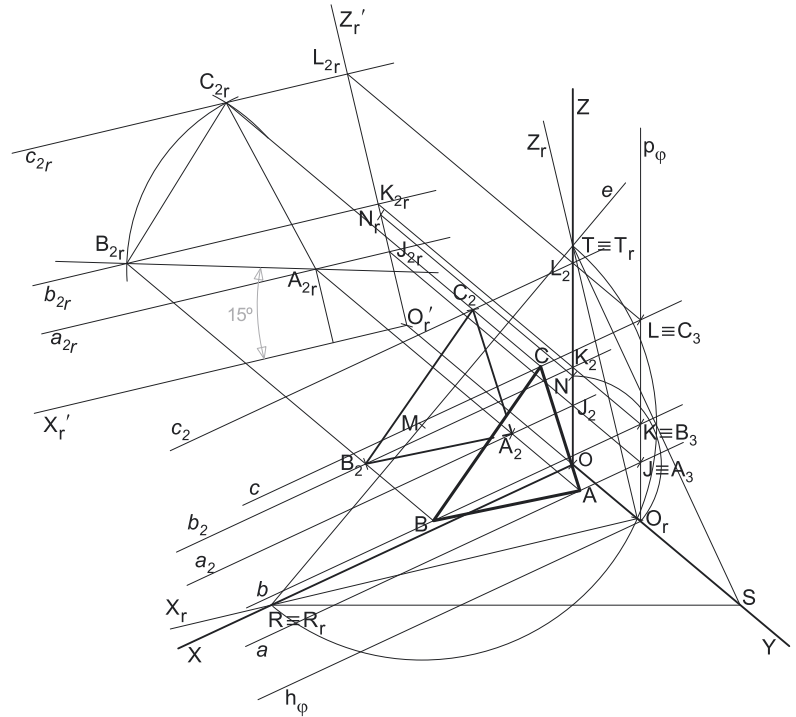
O rebatimento do *plano coordenado XZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[RT]** do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo **Y**) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **T<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Z<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>**. O eixo **Z<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Z<sub>r</sub>**.

*Construção da projeção frontal do triângulo, em verdadeira grandeza:*

No plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **X<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **A** em verdadeira grandeza (2 cm). Em seguida, no plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **A** em verdadeira grandeza (2 cm). A partir da abscissa e da cota do ponto **A**, em verdadeira grandeza, foi possível determinar a projeção frontal do ponto **A**, em rebatimento (**A<sub>2r</sub>**).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A partir de  $A_{2r}$ , foi possível, em verdadeira grandeza, medir o ângulo de  $15^\circ$  que o lado  $[AB]$  faz com o *plano coordenado XY*, que é o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ). Esse ângulo está, em verdadeira grandeza, no ângulo que o segmento  $[A_{2r}B_{2r}]$  (a projeção frontal do lado  $[AB]$ , em rebatimento) faz com o eixo  $X_r'$ . Assim, a partir de  $A_{2r}$ , desenhou-se a reta suporte da projeção frontal (em rebatimento) do lado  $[AB]$ , com o ângulo referido (um ângulo de  $15^\circ$ , de abertura para a esquerda). Em seguida, sobre essa reta suporte mediram-se 5 cm (o comprimento do lado do triângulo) e determinou-se  $B_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $B$ , em rebatimento).

A partir de  $A_{2r}$  e  $B_{2r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do triângulo**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XZ$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{2r}$  (a projeção frontal do terceiro vértice do triângulo, em rebatimento) – o triângulo  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}]$  é a projeção frontal do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do triângulo  $[ABC]$  é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a figura.

*Representação do plano frontal (de frente) que contém o triângulo  $[ABC]$ :*

O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o triângulo é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $A$ ). Assim, há que determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , um ponto com 3 cm de afastamento. Há a ter em conta que, numa perspectiva dimétrica, dois dos eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução. Nesta situação específica, os eixos que apresentam o mesmo coeficiente de redução são o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ , pois, como atrás se referiu, o eixo  $X$  é o eixo que apresenta um **coeficiente de redução isolado**. Assim, e tendo em conta que já temos o eixo  $Z$  rebatido, é possível determinar a perspectiva do afastamento sobre a perspectiva do eixo  $Z$  e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo  $Y$ ).

Nesse sentido, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 3 cm (o afastamento do plano  $\varphi$ ) e determinou-se um ponto – o ponto  $N_r$ . O ponto  $N$  é o ponto do eixo  $Z$  que tem 3 cm de cota. Para se determinar a perspectiva do ponto  $N$  conduziu-se, por  $N_r$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $N$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . A distância do ponto  $N$  ao ponto  $O$  (medida sobre a perspectiva do eixo  $Z$ ), é a perspectiva do afastamento do plano  $\varphi$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio até à perspectiva do ponto  $N$ , transportou-se a perspectiva do afastamento para a perspectiva do eixo  $Y$ , determinando um ponto (na perspectiva do eixo  $Y$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo  $Y$  que tem 3 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o triângulo  $[ABC]$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ). Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

*Determinação da perspectiva do triângulo  $[ABC]$ :*

Para inverter o rebatimento do ponto  $A$  recorreu-se a uma reta  $a$ , que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo  $X$  – a reta  $a_{2r}$  é a projeção frontal da reta  $a$ , em rebatimento, passa por  $A_{2r}$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta  $a$  está definida por um ponto e por uma direção). A reta  $a_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $J_{2r}$  (que é a projeção frontal do ponto da reta  $a$  que tem abcissa nula). Por  $J_{2r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $J$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $\varphi$ , pelo que o ponto  $J$  é um ponto de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $J$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{2r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $a$ , que é o ponto  $J$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $a$  é paralela ao eixo  $X$ , pelo que, em perspectiva, a reta  $a$  é paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $a$ . A reta  $a$  está definida por um ponto (o ponto  $J$ ) e por uma direção (a direção do eixo  $X$ ), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta  $a$  –  $a_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$ ), que passa por  $J_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $J$ ) e é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , que passa por  $J$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ ) e é paralela à perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ).

Por fim conduziu-se, por  $A_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ), sobre  $a_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , na mesma perpendicular à charneira.

Para inverter o rebatimento do ponto  $B$  recorreu-se a uma reta  $b$ , que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo  $X$  – a reta  $b_{2r}$  é a projeção frontal da reta  $b$ , em rebatimento, passa por  $B_{2r}$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta  $b$  está definida por um ponto e por uma direção). A reta  $b_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $K_{2r}$  (que é a projeção frontal do ponto da reta  $b$  que tem abcissa nula). Por  $K_{2r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $K$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $K$ . A reta  $b$  é uma reta do plano  $\varphi$ , pelo que o ponto  $K$  é um ponto de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $K$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_{2r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $b$ , que é o ponto  $K$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $b$  é paralela ao eixo  $X$ , pelo que, em perspetiva, a reta  $b$  é paralela à perspetiva do eixo  $X$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ . A reta  $b$  está definida por um ponto (o ponto  $K$ ) e por uma direção (a direção do eixo  $X$ ), o que nos permitiu desenhar as perspetivas da reta  $b - b_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta  $b$ ), que passa por  $K_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $K$ ) e é paralela à perspetiva do eixo  $X$  e, ainda, a perspetiva propriamente dita da reta  $b$ , que passa por  $K$  (a perspetiva propriamente dita do ponto  $K$ ) e é paralela à perspetiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $B_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $B$ ), sobre  $b_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspetiva propriamente dita do ponto  $B$  sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira.

Para inverter o rebatimento do ponto  $C$  recorreu-se a uma reta  $c$ , que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo  $X$  – a reta  $c_{2r}$  é a projeção frontal da reta  $c$ , em rebatimento, passa por  $C_{2r}$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta  $c$  está definida por um ponto e por uma direção). A reta  $c_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $L_{2r}$  (que é a projeção frontal do ponto da reta  $c$  que tem abcissa nula). Por  $L_{2r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $L$ ) sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspetiva propriamente dita do ponto  $L$ . A reta  $c$  é uma reta do plano  $\phi$ , pelo que o ponto  $L$  é um ponto de  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ). Assim, a perspetiva do ponto  $L$  situa-se sobre a perspetiva de  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $L_{2r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $c$ , que é o ponto  $L$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $c$  é paralela ao eixo  $X$ , pelo que, em perspetiva, a reta  $c$  é paralela à perspetiva do eixo  $X$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $c$ . A reta  $c$  está definida por um ponto (o ponto  $L$ ) e por uma direção (a direção do eixo  $X$ ), o que nos permitiu desenhar as perspetivas da reta  $c - c_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta  $c$ ), que passa por  $L_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $L$ ) e é paralela à perspetiva do eixo  $X$  e, ainda, a perspetiva propriamente dita da reta  $c$ , que passa por  $L$  (a perspetiva propriamente dita do ponto  $L$ ) e é paralela à perspetiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $C$ ), sobre  $c_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta  $c$ ), determinando-se, também, a perspetiva propriamente dita do ponto  $C$  sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $c$ , na mesma perpendicular à charneira.

A partir das perspetivas dos três vértices do polígono, desenhou-se a perspetiva do triângulo  $[ABC]$ , identificando-se, ainda, as perspetivas das projeções laterais dos três vértices do polígono que, na realidade, estão coincidentes com os traços laterais das retas que nos permitiram determinar as suas perspetivas. Assim, tem-se  $A_3 \equiv J$ ,  $B_3 \equiv K$  e  $C_3 \equiv L$ . Note que não se representaram as perspetivas das projeções horizontais dos vértices do triângulo, por não serem absolutamente necessárias à resolução do exercício. Na realidade, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido regularmente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o triângulo, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\phi$  (o plano que contém o triângulo), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado XZ*, da translação do plano *XZ* rebatido, da construção da projeção frontal do triângulo em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira.



(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **X**. O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

*Construção da projeção lateral do triângulo [ABC] e da pirâmide, em verdadeira grandeza:*

No plano **YZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **A** e **B** em verdadeira grandeza (2 cm e 6 cm, respetivamente). Em seguida, no plano **YZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **A** em verdadeira grandeza (5 cm) – salienta-se que o ponto **B** tem cota nula. A partir dos afastamentos e das cotas dos dois pontos, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções laterais dos pontos **A** e **B**, em rebatimento ( $A_{3r}$  e  $B_{3r}$ , respetivamente). Note que  $B_{3r}$  se situa no eixo  $Y_r'$ , pois o ponto **B** tem cota nula.

A partir de  $A_{3r}$  e  $B_{3r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do triângulo**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano **YZ**), o que nos permitiu determinar  $C_{3r}$  (a projeção lateral do terceiro vértice do triângulo, em rebatimento) – o triângulo  $[A_{3r}B_{3r}C_{3r}]$  é a projeção lateral do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento). Salienta-se que se determinou, ainda, a projeção lateral do centro do triângulo, em rebatimento (o ponto  $Q_{3r}$ ).

Salienta-se que se trata de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (que é um plano de perfil). Assim, o eixo da pirâmide está contido numa reta fronto-horizontal, que é uma reta projetante lateral. Dessa forma, o ponto **Q** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice da pirâmide), sendo os dois extremos do eixo do sólido, situam-se na mesma reta projetante lateral, pelo que têm as suas projeções laterais coincidentes, o que se identificou imediatamente no desenho (no plano **YZ** rebatido e transladado) – tem-se, imediatamente,  $V_{3r} \equiv Q_{3r}$  ( $V_{3r}$  é a projeção lateral do vértice da pirâmide, em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do triângulo  $[ABC]$  é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $\pi$ , o plano de perfil que contém a figura.

*Representação do plano de perfil que contém o triângulo [ABC]:*

O plano de perfil  $\pi$  que contém o triângulo é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 10 cm de abscissa (a abscissa dos pontos **A** e **B**). Assim, há que determinar, sobre a perspectiva do eixo **X**, um ponto com 10 cm de abscissa. Há a ter em conta que, numa perspectiva dimétrica, dois dos eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução. Nesta situação específica, os eixos que apresentam o mesmo coeficiente de redução são o eixo **Y** e o eixo **Z**, pois, como atrás se referiu, o eixo **X** é o eixo que apresenta um **coeficiente de redução isolado**.

Assim, e tendo em conta que **nenhum dos eixos rebatidos** apresenta um coeficiente de deformação idêntico ao do eixo **X**, é necessário proceder ao rebatimento do eixo **X**, de forma a ser possível determinar a perspectiva da abscissa do plano de perfil que contém a base da pirâmide. Salienta-se que as abscissas se medem no eixo **X** e o eixo **X** não é paralelo ao plano de projeção (o plano *axonométrico*). O eixo **X** pode ser rebatido por um de três processos distintos – pelo **rebatimento do plano projetante do eixo**, pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou, ainda, pelo **método dos cortes**. Optou-se pelo primeiro processo – pelo rebatimento do plano projetante do eixo **X**.

Nesse sentido, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a perspectiva do eixo **X**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto **O** e cuja hipotenusa está contida na perspectiva do eixo **X** – esse triângulo é, na presente situação, o triângulo  $[ROM]$  (sendo **M** o ponto médio do lado  $[ST]$  do *triângulo fundamental*). Salienta-se que, nesta situação, o plano projetante do eixo **X** corta o lado  $[ST]$  do *triângulo fundamental* no ponto **M**. Nesse sentido, pontos **R** e **M** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $M_r \equiv M$ .

Em seguida, determinou-se o ponto  $M'$  (o ponto médio do segmento  $[RM]$ ), que é a hipotenusa do triângulo retângulo  $[ROM]$  e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033. e respetivo **relatório**).

Depois, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (a reta  $e'$ ) e determinou-se  $O_r$  (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. A reta definida por  $O_r$  e por  $M_r$  é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o plano coordenado **YZ** (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo  $X_r$  é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto  $O_r$ .

Em seguida, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 10 cm (a abscissa do plano  $\pi$ ) e determinou-se um ponto – o ponto  $N_r$ . O ponto **N** é o ponto do eixo **X** que tem 10 cm de abscissa. Para se determinar a perspectiva do ponto **N** conduziu-se, por  $N_r$ , uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto **N**, sobre a perspectiva do eixo **X**. O ponto **N** é a perspectiva do ponto do eixo **X** que tem 10 cm de abscissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém o triângulo  $[ABC]$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ) e  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ). Note que  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**. Pelo seu lado,  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$ , com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

O plano  $\pi$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante horizontal (é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da perspectiva do triângulo [ABC]:*

Para inverter o rebatimento do ponto **B** (que é um ponto com cota nula) conduziu-se, por  $B_{3r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **B**), sobre a perspectiva do eixo **Y**. Por outro lado, uma vez que o ponto **B** é um ponto com cota nula do plano  $\pi$ , sabe-se que o ponto **B** é, necessariamente, um ponto do traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ). Assim, recorrendo à perpendicular à charneira que passa por  $B_{3r}$ , determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto **B** sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (traço horizontal do plano  $\pi$ ). Por outro lado, o ponto **B** é um ponto do plano coordenado **XY** (porque tem cota nula), pelo que o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se identificou imediatamente no desenho –  $B_1 \equiv B$ .

Para inverter o rebatimento do ponto **A** recorreu-se a uma reta **a**, que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo **Y** – a reta  $a_{3r}$  é a projeção lateral da reta **a**, em rebatimento, passa por  $A_{3r}$  e é paralela ao eixo  $Y_r'$  (a reta **a** está definida por um ponto e por uma direção). A reta  $a_{3r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $J_{3r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta **a** que tem afastamento nulo). Por  $J_{3r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **J**) sobre a perspectiva do eixo **Z**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **J**. A reta **a** é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto **J** é um ponto de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspectiva do ponto **J** situa-se sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{3r}$ . Já temos um ponto para definir a reta **a**, que é o ponto **J**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta **a** é paralela ao eixo **Y**, pelo que, em perspectiva, a reta **a** é paralela à perspectiva do eixo **Y**. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta **a**. A reta **a** está definida por um ponto (o ponto **J**) e por uma direção (a direção do eixo **Y**), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta **a** –  $a_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta **a**), que passa por  $J_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **J**) e é paralela à perspectiva do eixo **Y** e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta **a**, que passa por **J** (a perspectiva propriamente dita do ponto **J**) e é paralela à perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $A_{3r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**), sobre  $a_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta **a**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **A** sobre a perspectiva propriamente dita da reta **a**, na mesma perpendicular à charneira.

Para inverter o rebatimento do ponto **C** recorreu-se a uma reta **b**, que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo **Y** – a reta  $b_{3r}$  é a projeção lateral da reta **b**, em rebatimento, passa por  $C_{3r}$  e é paralela ao eixo  $Y_r'$  (a reta **b** está definida por um ponto e por uma direção). A reta  $b_{3r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $K_{3r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta **b** que tem afastamento nulo). Por  $K_{3r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **K**) sobre a perspectiva do eixo **Z**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **K**. A reta **b** é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto **K** é um ponto de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspectiva do ponto **K** situa-se sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_{3r}$ . Já temos um ponto para definir a reta **b**, que é o ponto **K**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta **b** é paralela ao eixo **Y**, pelo que, em perspectiva, a reta **b** é paralela à perspectiva do eixo **Y**. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta **b**. A reta **b** está definida por um ponto (o ponto **K**) e por uma direção (a direção do eixo **Y**), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta **b** –  $b_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta **b**), que passa por  $K_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **K**) e é paralela à perspectiva do eixo **Y** e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta **b**, que passa por **K** (a perspectiva propriamente dita do ponto **K**) e é paralela à perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_{3r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**), sobre  $b_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta **b**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **C** sobre a perspectiva propriamente dita da reta **b**, na mesma perpendicular à charneira.

Por fim, inverteu-se o rebatimento do ponto **Q** (o centro do triângulo), para o que se recorreu a uma reta **c**, que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo **Y** – a reta  $c_{3r}$  é a projeção lateral da reta **c**, em rebatimento, passa por  $Q_{3r}$  e é paralela ao eixo  $Y_r'$  (a reta **c** está definida por um ponto e por uma direção). A reta  $c_{3r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $L_{3r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta **c** que tem afastamento nulo). Por  $L_{3r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **L**) sobre a perspectiva do eixo **Z**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **L**. A reta **c** é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto **L** é um ponto de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspectiva do ponto **L** situa-se sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $L_{3r}$ . Já temos um ponto para definir a reta **c**, que é o ponto **L**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta **c** é paralela ao eixo **Y**, pelo que, em perspectiva, a reta **c** é paralela à perspectiva do eixo **Y**. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta **c**. A reta **c** está definida por um ponto (o ponto **L**) e por uma direção (a direção do eixo **Y**), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta **c** –  $c_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta **c**), que passa por  $L_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **L**) e é paralela à perspectiva do eixo **Y** e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta **c**, que passa por **L** (a perspectiva propriamente dita do ponto **L**) e é paralela à perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $Q_{3r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $Q_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **Q**), sobre  $c_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta **c**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **Q** sobre a perspectiva propriamente dita da reta **c**, na mesma perpendicular à charneira.

A partir das perspectivas dos três vértices do polígono, desenhou-se a perspectiva do triângulo [ABC], identificando-se, ainda, as perspectivas das projeções frontais dos três pontos determinados que, na realidade, estão coincidentes com os traços frontais das retas que nos permitiram determinar as suas perspectivas. Assim, tem-se  $A_2 \equiv J$ ,  $C_2 \equiv K$  e  $Q_2 \equiv L$ . Salienta-se que  $B_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto **B**) se situa no eixo **X** (no ponto de concorrência dos dois traços do plano  $\pi$ ), pois o ponto **B** tem cota nula. Note que não se representaram as perspectivas das projeções horizontais dos vértices do triângulo (à exceção do ponto **B**), por não serem absolutamente necessárias à resolução do exercício. Na realidade, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido regularmente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspectivas do ponto V:

Tendo em conta que o ponto **V** e o ponto **Q** se situam na mesma reta projetante lateral (como atrás se referiu), sabe-se que os dois pontos têm as suas projeções laterais coincidentes, o que se identificou imediatamente no desenho – tem-se  $V_3 \equiv Q_3$  (sendo  $V_3$  a perspectiva da projeção lateral do ponto **V**). Por outro lado, é referido, no enunciado, que o ponto **V** tem abcissa nula, pelo que o vértice da pirâmide (o ponto **V**) é um ponto do plano coordenado **YZ**. Nesse sentido, o ponto **V** está coincidente com a sua projeção lateral, pelo que se te, imediatamente,  $V \equiv V_3$  (sendo **V** a perspectiva propriamente dita do ponto **V**).

Por outro lado, atendendo a que o ponto **V** tem abcissa nula (e se situa no plano **YZ**) sabe-se que a sua projeção horizontal ( $V_1$ ) se situa no eixo **Y** e que a sua projeção frontal ( $V_2$ ) se situa necessariamente no eixo **Z**, o que se assinalou devidamente no desenho.

#### Determinação da perspectiva da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspectiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ABV]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **C**. Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AC]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**).

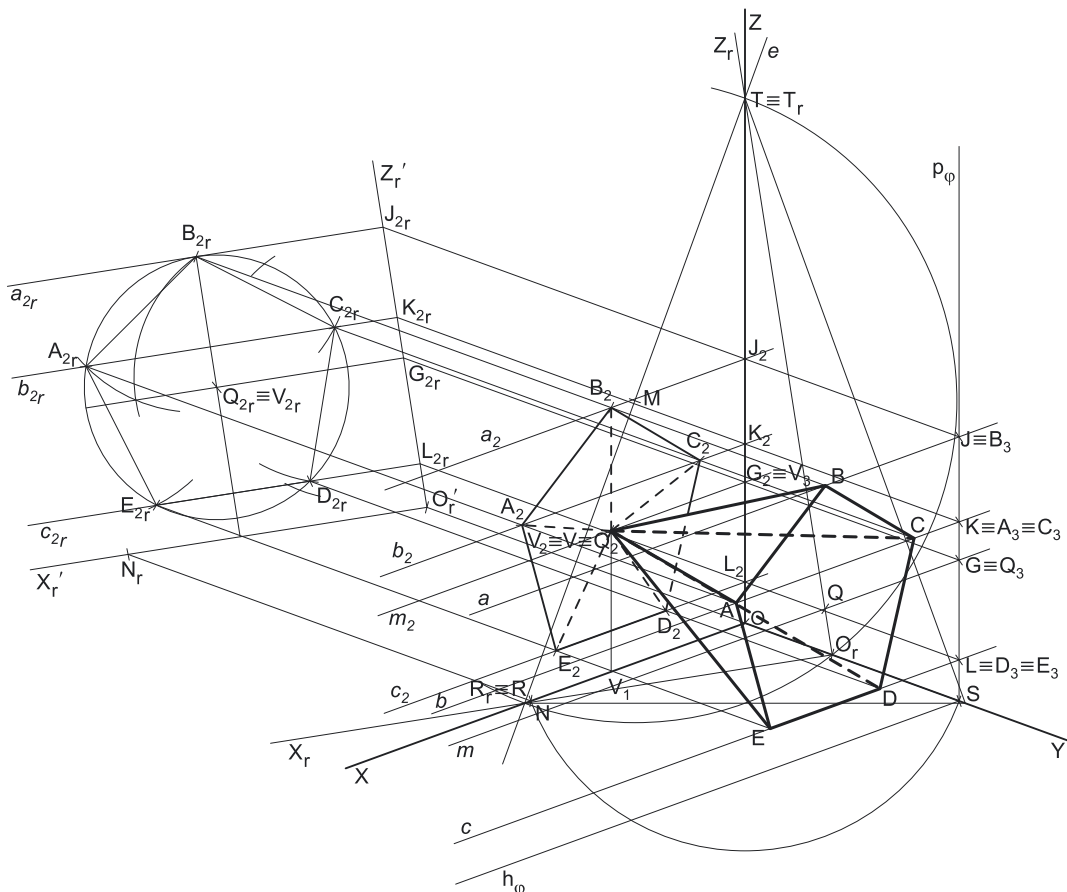
As faces laterais **[ACV]** e **[BCV]** são visíveis, bem como a base **[ABC]**. Já a face lateral **[ABV]** é invisível.

Note que não se representaram as perspectivas das projeções horizontais dos vértices da pirâmide (à exceção dos vértices **B** e **V**), por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (a pirâmide, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O **triângulo fundamental** representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado **YZ**, da translação do plano **YZ** rebatido, da construção da projeção lateral da pirâmide em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, do rebatimento do plano projetante do eixo **X**.

**1229.**



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que o eixo **Z** é o eixo que sofre uma **redução isolada** (como o enunciado refere expressamente), a perspetiva do eixo **Z** faz ângulos iguais com as perspetivas dos outros dois eixos. Por outro lado, as perspetivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de  $140^\circ$  (o ângulo dado no enunciado), pelo que o ângulo restante é um ângulo de  $220^\circ$  ( $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ ). Este ângulo tem de ser dividido por dois – os dois ângulos iguais que a perspetiva do eixo **Z** faz com as perspetivas dos outros dois eixos. Assim, a perspetiva do eixo **Z** faz, com as perspetivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**), ângulos de  $110^\circ$  ( $220^\circ : 2 = 110^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

## Resolução:

A base da pirâmide (o pentágono **[ABCDE]**) está contida num plano frontal (de frente), que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o pentágono **[ABCDE]** **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspetiva do pentágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o pentágono está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao *plano coordenado frontal* (o plano **XZ**), sabe-se que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* – o pentágono **[ABCDE]** e a sua projeção frontal (a sua projeção no *plano coordenado XZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o pentágono se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado YZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

### Rebatimento do plano coordenado XZ:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[RT]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspetiva do eixo **Y**). Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O rebatimento do *plano coordenado XZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[RT]** do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **1091**, e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspetiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspetiva do eixo **Y**) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **T<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Z<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo **Y**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>**. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**.

### Construção da projeção frontal do pentágono **[ABCDE]** e da pirâmide, em verdadeira grandeza:

No plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **X<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **Q** (5 cm), em verdadeira grandeza. No plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **Q** (4 cm), em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e da cota do ponto **Q**, em verdadeira grandeza, foi possível determinar a projeção frontal daquele ponto, em rebatimento – **Q<sub>2r</sub>**.

Com o compasso, fazendo centro em **Q<sub>2r</sub>** (a projeção frontal do ponto **Q**, em rebatimento) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono (em verdadeira grandeza, em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção do pentágono, inscrito na circunferência. De acordo com os dados, o lado inferior do pentágono é fronto-horizontal. Assim, em projeção frontal (em rebatimento), o lado inferior do pentágono tem de ser paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>'**.

Por outro lado, atendeu-se, ainda, às indicações sobre a ordem dos vértices da figura – **A** é o vértice de maior abscissa do pentágono e **B** o seu vértice de maior cota. Assim, **A<sub>2r</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**, em rebatimento) é o vértice mais distante do eixo **Z<sub>r</sub>'** e **B<sub>2r</sub>** (a projeção frontal do ponto **B**, em rebatimento) é o vértice mais distante do eixo **X<sub>r</sub>'**.

Assim, efetuou-se a construção da **projeção frontal do pentágono**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os cinco vértices do polígono (em rebatimento) – o pentágono **[A<sub>2r</sub>B<sub>2r</sub>C<sub>2r</sub>D<sub>2r</sub>E<sub>2r</sub>]** é a projeção frontal do pentágono **[ABCDE]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano **XZ**.

Salienta-se que se trata de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (que é um plano frontal). Assim, o eixo da pirâmide está contido numa reta de topo, que é uma reta projetante frontal. Dessa forma, o ponto **Q** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice da pirâmide), sendo os dois extremos do eixo do sólido, situam-se na mesma reta projetante frontal, pelo que têm as suas projeções frontais coincidentes, o que se identificou imediatamente no desenho (no plano **XZ** rebatido e transladado) – tem-se, imediatamente,  $V_{2r} \equiv Q_{2r}$  (**V<sub>2r</sub>** é a projeção frontal do vértice da pirâmide, em rebatimento).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para determinar a perspectiva do pentágono [ABCDE] e da pirâmide é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém a figura.

*Representação do plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide (o pentágono [ABCDE]):*

O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o pentágono é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 8 cm de afastamento (o afastamento do ponto Q). Assim, há que determinar, sobre a perspectiva do eixo Y, a perspectiva de um ponto com 8 cm de afastamento. Há a ter em conta que, numa perspectiva dimétrica, dois dos eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução. Nesta situação específica, os eixos que apresentam o mesmo coeficiente de redução são o eixo X e o eixo Y, pois, como atrás se referiu, o eixo Z é o eixo que apresenta um **coeficiente de redução isolado**. Assim, e tendo em conta que já temos o eixo X rebatido, é possível determinar a perspectiva do afastamento sobre a perspectiva do eixo X e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo Y).

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 8 cm (o afastamento do plano  $\varphi$ ) e determinou-se um ponto – o ponto  $N_r$ . O ponto N é o ponto do eixo X que tem 8 cm de abcissa. Para se determinar a perspectiva do ponto N conduziu-se, por  $N_r$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto N, sobre a perspectiva do eixo X. A distância do ponto N ao ponto O (medida sobre a perspectiva do eixo X), é a perspectiva do afastamento do plano  $\varphi$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo Y. Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto O e com raio até à perspectiva do ponto N, transportou-se a perspectiva do afastamento para a perspectiva do eixo Y, determinando um ponto (na perspectiva do eixo Y) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo Y que tem 8 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o pentágono [ABCDE] contém necessariamente esse ponto.

Pela perspectiva desse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ). Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo X. Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo Z.

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado XY) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado XY, sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado YZ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado YZ, sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

*Determinação da perspectiva do pentágono [ABCDE] (a base da pirâmide):*

Para inverter o rebatimento do ponto B recorreu-se a uma reta  $a$ , que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo X – a reta  $a_{2r}$  é a projeção frontal da reta  $a$ , em rebatimento, passa por  $B_{2r}$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta  $a$  está definida por um ponto e por uma direção). A reta  $a_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $J_{2r}$  (que é a projeção frontal do ponto da reta  $a$  que tem abcissa nula). Por  $J_{2r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto J) sobre a perspectiva do eixo Z. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto J. A reta  $a$  é uma reta do plano  $\varphi$ , pelo que o ponto J é um ponto de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Assim, a perspectiva do ponto J situa-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{2r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $a$ , que é o ponto J. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $a$  é paralela ao eixo X, pelo que, em perspectiva, a reta  $a$  é paralela à perspectiva do eixo X. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $a$ . A reta  $a$  está definida por um ponto (o ponto J) e por uma direção (a direção do eixo X), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta  $a$  –  $a_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$ ), que passa por  $J_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto J) e é paralela à perspectiva do eixo X e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , que passa por J (a perspectiva propriamente dita do ponto J) e é paralela à perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $B_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto B), sobre  $a_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto B sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , na mesma perpendicular à charneira.

Para inverter o rebatimento dos pontos A e C recorreu-se a uma reta  $b$ , que contém aqueles dois pontos e que é paralela ao eixo X – a reta  $b_{2r}$  é a projeção frontal da reta  $b$ , em rebatimento, passa por  $A_{2r}$  e por  $C_{2r}$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta  $b$  está definida por dois pontos e ainda por uma direção). A reta  $b_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $K_{2r}$  (que é a projeção frontal do ponto da reta  $b$  que tem abcissa nula). Por  $K_{2r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto K) sobre a perspectiva do eixo Z. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto K. A reta  $b$  é uma reta do plano  $\varphi$ , pelo que o ponto K é um ponto de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Assim, a perspectiva do ponto K situa-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_{2r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $b$ , que é o ponto K. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $b$  é paralela ao eixo X, pelo que, em perspectiva, a reta  $b$  é paralela à perspectiva do eixo X. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ . A reta  $b$  está definida por um ponto (o ponto K) e por uma direção (a direção do eixo X), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta  $b$  –  $b_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $b$ ), que passa por  $K_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto K) e é paralela à perspectiva do eixo X e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , que passa por K (a perspectiva propriamente dita do ponto K) e é paralela à perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $A_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto A), sobre  $b_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto A sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira. De forma semelhante conduziu-se, por  $C_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto C), sobre  $b_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto C sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para inverter o rebatimento dos pontos **D** e **E** recorreu-se a uma reta **c**, que contém aqueles dois pontos e que é paralela ao eixo **X** – a reta **c**<sub>2r</sub> é a projeção frontal da reta **c**, em rebatimento, passa por **D**<sub>2r</sub> e por **E**<sub>2r</sub> e é paralela ao eixo **X**' (a reta **c** está definida por dois pontos e ainda por uma direção). A reta **c**<sub>2r</sub> interseca o eixo **Z**' no ponto **L**<sub>2r</sub> (que é a projeção frontal do ponto da reta **b** que tem abcissa nula). Por **L**<sub>2r</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se **L**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **L**) sobre a perspectiva do eixo **Z**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **L**. A reta **c** é uma reta do plano  $\phi$ , pelo que o ponto **L** é um ponto de **p** <sub>$\phi$</sub>  (o traço lateral do plano  $\phi$ ). Assim, a perspectiva do ponto **L** situa-se sobre a perspectiva de **p** <sub>$\phi$</sub>  (o traço lateral do plano  $\phi$ ), na perpendicular à charneira que passa por **L**<sub>2r</sub>. Já temos um ponto para definir a reta **c**, que é o ponto **L**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta **c** é paralela ao eixo **X**, pelo que, em perspectiva, a reta **c** é paralela à perspectiva do eixo **X**. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta **c**. A reta **c** está definida por um ponto (o ponto **L**) e por uma direção (a direção do eixo **X**), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta **c** – **c**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção lateral da reta **c**), que passa por **L**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **L**) e é paralela à perspectiva do eixo **X** e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta **c**, que passa por **L** (a perspectiva propriamente dita do ponto **L**) e é paralela à perspectiva de **h** <sub>$\phi$</sub>  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ).

Por fim, conduziu-se, por **D**<sub>2r</sub>, uma perpendicular à charneira e determinou-se **D**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **D**), sobre **c**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal da reta **c**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **D** sobre a perspectiva propriamente dita da reta **c**, na mesma perpendicular à charneira. De forma semelhante conduziu-se, por **E**<sub>2r</sub>, uma perpendicular à charneira e determinou-se **E**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **E**), sobre **c**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal da reta **c**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **E** sobre a perspectiva propriamente dita da reta **c**, na mesma perpendicular à charneira.

Por fim, inverteu-se o rebatimento do ponto **Q** (o centro do pentágono), para o que se recorreu a uma reta **m**, que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo **X** – a reta **m**<sub>2r</sub> é a projeção frontal da reta **m**, em rebatimento, passa por **Q**<sub>2r</sub> e é paralela ao eixo **X**' (a reta **m** está definida por um ponto e por uma direção). A reta **m**<sub>2r</sub> interseca o eixo **Z**' no ponto **G**<sub>2r</sub> (que é a projeção frontal do ponto da reta **m** que tem abcissa nula). Por **G**<sub>2r</sub> conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se **G**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **G**) sobre a perspectiva do eixo **Z**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **G**. A reta **m** é uma reta do plano  $\phi$ , pelo que o ponto **G** é um ponto de **p** <sub>$\phi$</sub>  (o traço lateral do plano  $\phi$ ). Assim, a perspectiva do ponto **G** situa-se sobre a perspectiva de **p** <sub>$\phi$</sub>  (o traço lateral do plano  $\phi$ ), na perpendicular à charneira que passa por **G**<sub>2r</sub>. Já temos um ponto para definir a reta **m**, que é o ponto **G**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta **m** é paralela ao eixo **X**, pelo que, em perspectiva, a reta **m** é paralela à perspectiva do eixo **X**. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta **m**. A reta **m** está definida por um ponto (o ponto **G**) e por uma direção (a direção do eixo **X**), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta **m** – **m**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal da reta **m**), que passa por **G**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **G**) e é paralela à perspectiva do eixo **X** e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta **m**, que passa por **G** (a perspectiva propriamente dita do ponto **G**) e é paralela à perspectiva de **h** <sub>$\phi$</sub>  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ).

Por fim, conduziu-se, por **Q**<sub>2r</sub>, uma perpendicular à charneira e determinou-se **Q**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal do ponto **Q**), sobre **m**<sub>2</sub> (a perspectiva da projeção frontal da reta **m**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **Q** sobre a perspectiva propriamente dita da reta **m**, na mesma perpendicular à charneira.

A partir das perspectivas dos cinco vértices do polígono, desenhou-se a perspectiva do pentágono [**ABCDE**], identificando-se, ainda, as perspectivas das projeções laterais dos seis pontos determinados que, na realidade, estão coincidentes com os traços laterais das retas que nos permitiram determinar as suas perspectivas. Assim, tem-se **B**<sub>3</sub>  $\equiv$  **J**, **A**<sub>3</sub>  $\equiv$  **C**<sub>3</sub>  $\equiv$  **K**, **D**<sub>3</sub>  $\equiv$  **E**<sub>3</sub>  $\equiv$  **L** e **Q**<sub>3</sub>  $\equiv$  **G**. Salienta-se que os pontos **A** e **D** se situam na mesma projetante lateral, pelo que as projeções laterais dos dois pontos estão coincidentes, o mesmo acontecendo com os pontos **D** e **E**.

Note que não se representaram as perspectivas das projeções horizontais dos vértices do pentágono, por não serem absolutamente necessárias à resolução do exercício. Na realidade, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido regularmente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

#### Determinação das perspectivas do ponto **V**:

Tendo em conta que o ponto **V** e o ponto **Q** se situam na mesma reta projetante frontal (como atrás se referiu), sabe-se que os dois pontos têm as suas projeções frontais coincidentes, o que se identificou imediatamente no desenho – tem-se **V**<sub>2</sub>  $\equiv$  **Q**<sub>2</sub> (sendo **V**<sub>2</sub> a perspectiva da projeção frontal do ponto **V**). Por outro lado, é referido, no enunciado, que o ponto **V** tem afastamento nulo, pelo que o vértice da pirâmide (o ponto **V**) é um ponto do plano coordenado **XZ**. Nesse sentido, o ponto **V** está coincidente com a sua projeção frontal, pelo que se te, imediatamente, **V**  $\equiv$  **V**<sub>2</sub> (sendo **V** a perspectiva propriamente dita do ponto **V**).

Por outro lado, atendendo a que o ponto **V** tem afastamento nulo (e se situa no plano **XZ**) sabe-se que a sua projeção horizontal (**V**<sub>1</sub>) se situa no eixo **X** e que a sua projeção lateral (**V**<sub>3</sub>) se situa necessariamente no eixo **Z**, o que se assinalou devidamente no desenho.

#### Determinação da perspectiva da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspectiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada [**BCDEV**]. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **A**. Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas [**AC**] e [**AE**], da base, e a aresta lateral [**AV**]). Por outro lado, as arestas laterais [**CV**] e [**DV**] são **invisíveis**, pois separam faces do sólido que são invisíveis.

As faces laterais [**ABV**] e [**AEV**] são visíveis, bem como a base [**ABCDE**]. Já as faces laterais [**BCV**], [**CDV**] e [**DEV**] são invisíveis.

Salienta-se, mais uma vez, que não se representaram as perspectivas das projeções horizontais dos vértices da pirâmide (à exceção do vértice **V**), por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (a pirâmide, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado **XZ**, da translação do plano **XZ** rebatido, da construção da projeção lateral do pentágono (e da pirâmide) em rebatimento, das perpendiculares à charneira e, ainda, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento dos diversos pontos.

## 1230.

### Dados:

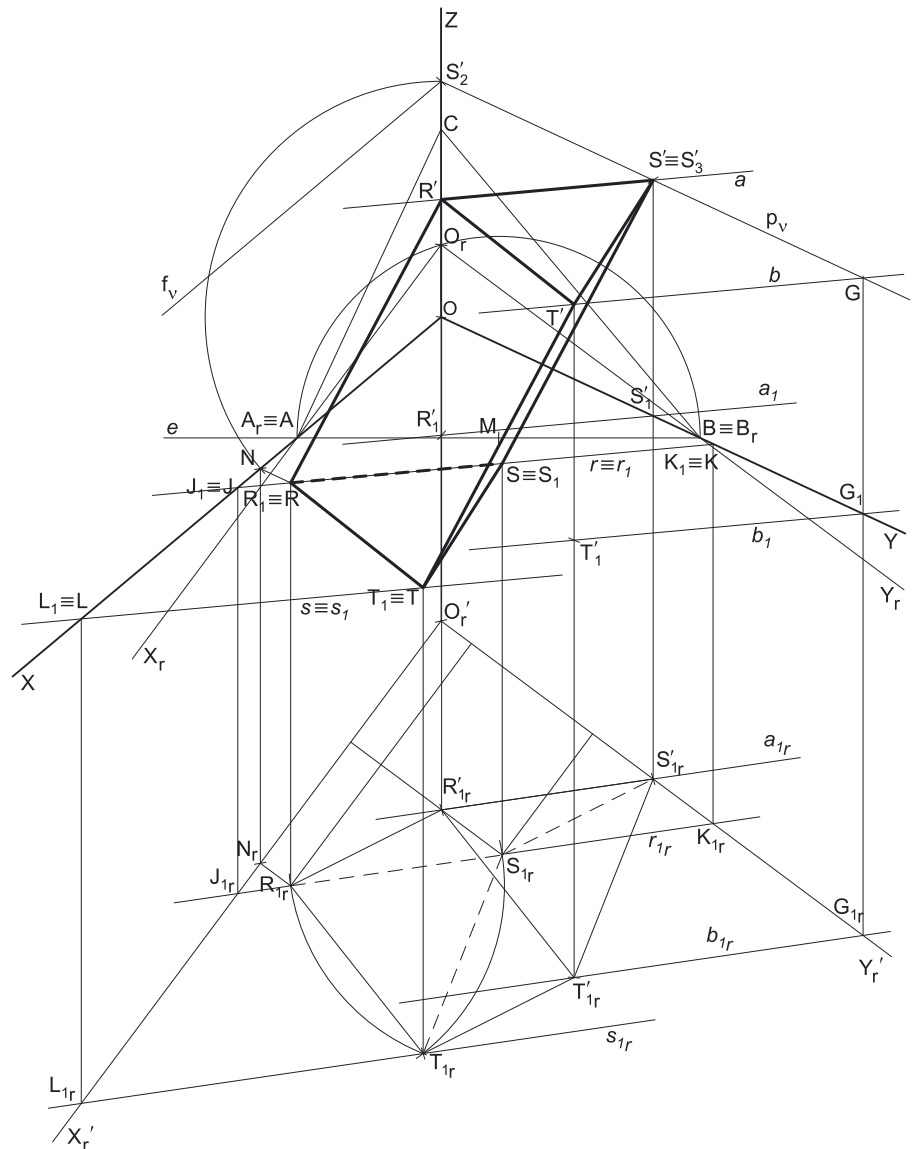
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. A perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $115^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de  $130^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, o que perfaz um total de  $245^\circ$  ( $115^\circ + 130^\circ = 245^\circ$ ). Assim, as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $115^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 245^\circ = 115^\circ$ ). Nesse sentido, a perspectiva do eixo **Y** faz ângulos iguais (de  $115^\circ$ ) com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**), pelo que o eixo **Y** é o eixo que sofre uma **redução isolada**. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

### Resolução:

As bases do prisma estão contidas em planos horizontais (de nível), que não são paralelos ao plano de projeção (o plano *axonométrico*), pelo que aquelas bases (dois triângulos equiláteros – o triângulo **[RST]** e o triângulo **[R'S'T']**) **não se projetam em verdadeira grandeza** (as perspectivas dos triângulos não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que os triângulos estão contidos em planos horizontais (de nível), que são paralelos ao plano coordenado horizontal (o plano **XY**), sabe-se que os triângulos se projetam em verdadeira grandeza no plano coordenado **XY** – os dois triângulos e as respetivas projeções horizontais (as suas projeções no plano coordenado **XY**) são figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual os triângulos se projetam em verdadeira grandeza).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O rebatimento do plano coordenado  $XY$  pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

*Rebatimento do plano coordenado  $XY$ :*

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XY$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado  $[AB]$  do triângulo fundamental (o lado que se opõe à perspetiva do eixo  $Z$ ). Os pontos  $A$  e  $B$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A$  e  $B_r \equiv B$ .

O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano  $XY$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do lado  $[AB]$  do triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, conduziu-se, pela perspetiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspetiva do eixo  $Z$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $A_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $B_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

*Construção das projeções horizontais dos dois triângulos e do prisma, em verdadeira grandeza:*

No plano  $XY$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos  $R$  e  $S$  em verdadeira grandeza (8 cm e 4 cm, respetivamente) – salienta-se que o ponto  $S'$  tem abscissa nula. Em seguida, no plano  $XY$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos  $R$ ,  $S$  e  $S'$  em verdadeira grandeza (1 cm, 5 cm e 7 cm, respetivamente). A partir das abscissas e dos afastamentos dos três pontos dados, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais dos pontos  $R$ ,  $S$  e  $S'$ , em rebatimento ( $R_{1r}$ ,  $S_{1r}$  e  $S'_{1r}$ , respetivamente).

A partir de  $R_{1r}$  e  $S_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$** , em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $T_{1r}$  (a projeção horizontal do terceiro vértices do triângulo, em rebatimento) – o triângulo  $[R_{1r}S_{1r}T_{1r}]$  é a projeção horizontal do triângulo  $[RST]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Em seguida, desenhou-se o segmento de reta  $[S_{1r}S'_{1r}]$ , que é a projeção horizontal da aresta  $[SS']$  do prisma, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). Este procedimento permitiu-nos conduzir, pelos pontos  $R_{1r}$  e  $T_{1r}$ , retas paralelas ao segmento de reta  $[S_{1r}S'_{1r}]$  – essas retas são as retas suporte das projeções horizontais (em rebatimento) das arestas laterais  $[RR']$  e  $[TT']$  do sólido.

Por fim, efetuou-se a construção do triângulo  $[R'_{1r}S'_{1r}T'_{1r}]$  (a projeção horizontal, em rebatimento, da base  $[R'S'T']$ ), a partir de  $S'_{1r}$ , e garantindo que os seus lados são paralelos aos lados correspondentes do triângulo  $[R_{1r}S_{1r}T_{1r}]$ , o que nos permitiu determinar as projeções horizontais (em rebatimento) dos pontos  $R'$  e  $T'$  ( $R'_{1r}$  e  $T'_{1r}$ , respetivamente). Salienta-se que o ponto  $R'_{1r}$  se situa na reta suporte do segmento  $[R_{1r}R'_{1r}]$ , na paralela ao segmento  $[R_{1r}S_{1r}]$  que passa por  $S'_{1r}$ . De forma semelhante, o ponto  $T'_{1r}$  situa-se na reta suporte do segmento  $[T_{1r}T'_{1r}]$ , na paralela ao segmento  $[S_{1r}T_{1r}]$  que passa por  $S'_{1r}$ .

O procedimento anterior permitiu-nos concluir o desenho da projeção horizontal do prisma em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). Para determinar a perspetiva dos triângulos  $[RST]$  e  $[R'S'T']$  e do prisma é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do prisma (o triângulo  $[R'S'T']$ ).

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém o triângulo  $[R'S'T']$  (a base superior do prisma):*

O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a base superior do prisma é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 8 cm de cota (a cota do ponto  $S'$  e que é dada no enunciado). Assim, há que determinar, sobre a perspetiva do eixo  $Z$ , a perspetiva de um ponto com 8 cm de cota. Há a ter em conta que, numa perspetiva dimétrica, dois dos eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução. Nesta situação específica, os eixos que apresentam o mesmo coeficiente de redução são o eixo  $X$  e o eixo  $Z$ , pois, como atrás se referiu, o eixo  $Y$  é o eixo que apresenta um **coeficiente de redução isolado**. Assim, e tendo em conta que já temos o eixo  $X$  rebatido, é possível determinar a perspetiva da cota sobre a perspetiva do eixo  $X$  e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo  $Z$ ).

Tendo em conta que o ponto  $R$  tem 8 cm de abscissa, foi possível identificar, de imediato, o ponto do eixo  $X_r'$  que tem 8 cm de abscissa – o ponto  $N_r$ . O ponto  $N$  é o ponto do eixo  $X$  que tem 8 cm de abscissa (que é a abscissa do ponto  $R$ ). Para se determinar a perspetiva do ponto  $N$  conduziu-se, por  $N_r$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto  $N$ , sobre a perspetiva do eixo  $X$ . A distância do ponto  $N$  ao ponto  $O$  (medida sobre a perspetiva do eixo  $X$ ), é a perspetiva da cota do plano  $v$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio até à perspetiva do ponto  $N$ , transportou-se a perspetiva da cota para a perspetiva do eixo  $Z$ , determinando um ponto (na perspetiva do eixo  $Z$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspetiva do ponto do eixo  $Z$  que tem 8 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o triângulo  $[R'S'T']$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abscissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Y$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado*  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado*  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado*  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado*  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

**Determinação da perspectiva do triângulo [RST] (a base inferior do prisma):**

Para inverter o rebatimento dos vértices do triângulo, a situação mais rápida e eficaz passa pelo recurso a retas do plano  $XY$ , às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos  $R$  e  $S$  recorreu-se à reta  $r$ , que é a reta suporte do lado  $[RS]$  do triângulo. A reta  $r_{1r}$  (que está definida por  $R_{1r}$  e por  $S_{1r}$ ) é a projeção horizontal da reta  $r$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $r$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $r_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $J_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $r$  que tem afastamento nulo). Por  $J_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ . Já temos um ponto para definir a reta, que é  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $r_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $K_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $r$  que tem abcissa nula). Por  $K_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $K$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta. A projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) e o ponto  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $K$ ).

Tendo em conta que os pontos  $J$  e  $K$  estão contidos no plano  $XY$ , bem como a reta  $r$ , tem-se imediatamente  $J \equiv J_1$  ( $J$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ ),  $K \equiv K_1$  ( $K$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $K$ ) e  $r \equiv r_1$  ( $r$  é a perspectiva propriamente dita da reta  $r$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $R_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $R_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $R$ ), sobre  $r_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $r$ ). Uma vez que o ponto  $R$  pertence à reta  $r$  e ao plano  $XY$ , tem-se imediatamente  $R \equiv R_1$  ( $R$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $R$ ). Repetiu-se este procedimento para o ponto  $S$  (conduzindo, por  $S_{1r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $S$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $r$  (tem-se  $S \equiv S_1$ , à semelhança do exposto para o ponto  $R$ ).

Para inverter o rebatimento do ponto  $T$  recorreu-se à reta  $s$ , que contém o ponto  $T$  (a reta  $s$  é a reta paralela à reta  $r$  que passa pelo ponto  $T$ ). A reta  $s_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $s$ , em rebatimento – a reta  $s$  está definida por um ponto (o ponto  $T_{1r}$ ) e por uma direção (a direção da reta  $r_{1r}$ ). A reta  $s_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $L_{1r}$  (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto de concorrência da reta  $s$  com o eixo  $X$ ).

Por  $L_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $L$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ . A projeção horizontal da reta  $s$  ( $s_1$ ), em perspectiva, está definida por um ponto (o ponto  $L_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $L$ ) e por uma direção (é paralela a  $r_1$ ). Tendo em conta que tanto o ponto  $L$  como a reta  $s$  estão contidos no plano  $XY$ , tem-se imediatamente  $L \equiv L_1$  ( $L$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $L$ ) e  $s \equiv s_1$  ( $s$  é a perspectiva propriamente dita da reta  $s$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $T_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $T_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $T$ ), sobre  $s_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $s$ ). Uma vez que o ponto  $T$  pertence à reta  $s$  e ao plano  $XY$ , tem-se imediatamente  $T \equiv T_1$  ( $T$  é a perspectiva propriamente dita do ponto  $T$ ).

**Determinação da perspectiva do triângulo [R'S'T'] (a base superior do prisma):**

Para inverter o rebatimento dos vértices do triângulo  $[R'S'T']$ , e à semelhança do efetuado para o triângulo  $[RST]$ , optou-se por recorrer a retas do plano  $v$ , às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos  $R'$  e  $S'$  recorreu-se à reta  $a$ , que é a reta suporte do lado  $[R'S']$  do triângulo. A reta  $a_{1r}$  (que passa por  $R'_{1r}$  e por  $S'_{1r}$ ) é a projeção horizontal da reta  $a$ , em rebatimento e é necessariamente paralela à reta  $r_{1r}$  (a reta suporte do segmento  $[R_1S_1]$ ). É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $S'_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $a$  que tem abcissa nula). Note que o ponto  $S'$  é, imediatamente, um dos vértices do triângulo  $[R'S'T']$ . Por  $S'_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $S'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $S'$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $S'$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $S'$  é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $S'$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $S'_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta, que é o ponto  $S'_1$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $a$  é paralela à reta  $r$ , como atrás se referiu, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $a$  em perspectiva. Assim, a projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_1$ ), em perspectiva, está definida por um ponto (o ponto  $S'_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $S'$ ) e por uma direção (é paralela a  $r_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal da reta  $r$ ). Este raciocínio permitiu-nos desenhar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_1$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $a$ ), que passa pela perspectiva do ponto  $S'$  e é paralela à perspectiva da reta  $r$ .

Por fim, conduziu-se, por  $R'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $R'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $R'$ ), sobre  $a_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $R'$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , na mesma perpendicular à charneira.

O ponto  $S'$  é um ponto do plano  $YZ$  (porque tem abcissa nula), pelo que a perspectiva da sua projeção frontal ( $S'_2$ ) se situa na perspectiva do eixo  $Z$ . Por outro lado, atendendo ainda a que o ponto  $S'$  é um ponto do plano  $YZ$ , o ponto  $S'$  está coincidente com a sua projeção lateral ( $S'_3$ ), o que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente,  $S'_3 \equiv S'_1$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Para inverter o rebatimento do ponto  $T'$  recorreu-se à reta  $b$ , que é a reta suporte do lado  $[S'T']$  do triângulo. A reta  $b_{1r}$  (que passa por  $T'_{1r}$ ) é a projeção horizontal da reta  $b$ , em rebatimento e é necessariamente paralela às retas  $a_{1r}$ ,  $r_{1r}$  e  $s_{1r}$ . É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $b_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $G_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $b$  que tem abcissa nula). Por  $G_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $G_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $G$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $G$ . A reta  $b$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $G$  é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $G$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $G_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta, que é o ponto  $G$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $b$  é paralela às retas  $a$ ,  $r$  e  $s$ , como atrás se referiu, pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$  em perspectiva. Assim, a projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_1$ ), em perspectiva, está definida por um ponto (o ponto  $G_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $G$ ) e por uma direção (é paralela a  $a_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ). Este raciocínio permitiu-nos desenhar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_1$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $b$ ), que passa pela perspectiva do ponto  $G$  e é paralela à perspectiva da reta  $a$ .

Por fim, conduziu-se, por  $T'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $T'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $T'$ ), sobre  $b_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $T'$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira.

### Determinação da perspectiva do prisma:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[RR'S'ST]$ . Existe um único vértice do prisma que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice  $T'$ . Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[R'T']$  e  $[S'T']$ , da base  $[R'S'T']$ , e a aresta lateral  $[TT']$ ). Por outro lado, a aresta  $[RS]$  (da base  $[RST]$ ) é **invisível**, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – a face lateral  $[RR'S'S]$  e a base  $[RST]$ .

As faces laterais  $[RR'T'T]$  e  $[SS'T'T]$  são visíveis, bem como a base  $[R'S'T']$ . Já a face lateral  $[RR'S'S]$  e a base  $[RST]$  são invisíveis.

Note que não se representaram as perspetivas nem das projeções laterais nem das projeções frontais dos vértices do prisma, por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o prisma, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a base superior do prisma), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspectiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção da projeção horizontal do prisma em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento (as retas  $r$ ,  $s$ ,  $a$  e  $b$ ) e, ainda, das linhas de chamada ou do arco de transporte da cota do plano  $v$ .

## 1231.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo  $Z$  faz ângulos iguais (de  $130^\circ$ ) com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo  $Z$  é o eixo que sofre uma **redução isolada**. A soma dos ângulos que a perspectiva do eixo  $Z$  faz com as perspectivas dos outros dois eixos é  $260^\circ$ , pelo que as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo  $X$  e o eixo  $Y$ ) fazem, entre si, o ângulo restante, que é um ângulo de  $100^\circ$  ( $360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

**Resolução:**

Os retângulos  $[ABCD]$  e  $[A'B'C'D']$  (as faces de perfil do sólido) estão contidas em planos de perfil, que não são paralelos ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que os retângulos  $[ABCD]$  e  $[A'B'C'D']$  **não se projetam em verdadeira grandeza** (as suas perspectivas não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que os retângulos estão contidos em planos de perfil, sabe-se que os retângulos se projetam em verdadeira grandeza no *plano coordenado YZ*. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual os retângulos se projetam em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado YZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

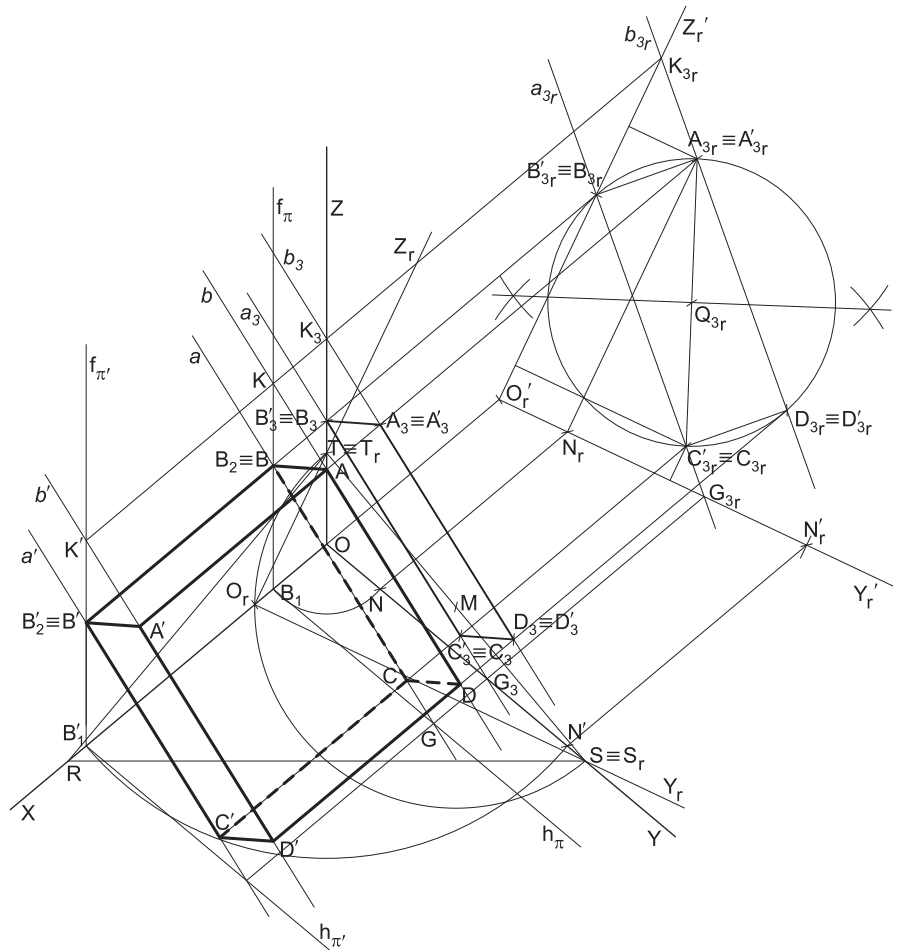
*Rebatimento do plano coordenado YZ:*

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado  $[ST]$  do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo  $X$ ). Os pontos  $S$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

O rebatimento do *plano coordenado YZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano  $YZ$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do lado  $[ST]$  do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $X$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $Y_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $YZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $X$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Construção das projeções laterais dos retângulos [ABCD] e [A'B'C'D'] e do paralelepípedo, em verdadeira grandeza:*

No plano **YZ** rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **A** e **C'** (2 cm e 5 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. No plano **YZ** rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos pontos **A** e **C'** (8 cm e 1 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. A partir dos afastamentos e das cotas dos pontos **A** e **C'**, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções laterais daqueles dois pontos ( $A_{3_r}$  e  $C'_{3_r}$ , respetivamente), em rebatimento.

O paralelepípedo é um **prisma reto**, cujas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases (as faces de perfil). Assim, as arestas laterais do sólido estão contidas em retas fronto-horizontais, que são retas projetantes laterais. Nesse sentido, os pontos **A'** (o vértice da face [A'B'C'D']) correspondente ao vértice **A** e **C** (o vértice da face [ABCD] correspondente ao vértice **C'**) têm as suas projeções laterais coincidentes com as projeções laterais dos pontos **A** e **C'**, o que se assinalou mediatamente em rebatimento no rebatimento do plano **YZ** –  $A'_{3_r} \equiv A_{3_r}$  e  $C_{3_r} \equiv C'_{3_r}$ .

A partir de  $A_{3_r}$  e  $C_{3_r}$  efetuou-se a construção da **projeção lateral do retângulo [ABCD]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano **YZ**), o que nos permitiu determinar  $B_{3_r}$  e  $D_{3_r}$  (as projeções laterais dos outros dois vértices do retângulo, em rebatimento) – o retângulo  $[A_{3_r}B_{3_r}C_{3_r}D_{3_r}]$  é a projeção lateral do retângulo [ABCD], em verdadeira grandeza (em rebatimento). Sublinha-se que para a construção do retângulo  $[A_{3_r}B_{3_r}C_{3_r}D_{3_r}]$  foi necessário inscrever o polígono numa circunferência, cujo centro (o ponto  $Q_{3_r}$ ) é o ponto médio do segmento  $[A_{3_r}C_{3_r}]$ .

Assim, a circunferência com centro em  $Q_{3_r}$  e raio até  $A_{3_r}$  e  $C_{3_r}$  é a circunferência circunscrita ao retângulo. O ponto **B** em afastamento nulo, pelo que  $B_{3_r}$  (a projeção lateral do ponto **B**, em rebatimento) é um dos pontos em que a circunferência corta o eixo  $Z_r'$ . Desses dois pontos, apenas um deles (o ponto  $B_{3_r}$ , assinalado na resolução) nos garante que o lado [AB], do retângulo, é um dos lados menores da figura.

Como atrás se referiu, e atendendo a que se trata de um **prisma reto**, as arestas do sólido que não estão contidas nas faces de perfil estão contidas em retas fronto-horizontais (retas projetantes laterais). Assim, os vértices da face de maior abcissa (a face [A'B'C'D']) têm as suas projeções laterais coincidentes com as projeções laterais dos vértices correspondentes da face [ABCD], o que se assinalou imediatamente –  $B'_{3_r} \equiv B_{3_r}$  e  $D'_{3_r} \equiv D_{3_r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção lateral do paralelepípedo, em rebatimento (no plano **YZ** rebatido e trasladado).

Para determinar a perspetiva dos retângulos [ABCD] e [A'B'C'D'] e do paralelepípedo é necessário, antes de mais, representar os planos de perfil que contêm as faces de perfil do sólido.

*Representação do plano de perfil  $\pi$  que contém o retângulo [ABCD] (a face de menor abcissa do sólido):*

O plano de perfil  $\pi$  que contém a base de menor abcissa do sólido é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de abcissa (a abcissa do ponto **A** e que é dada no enunciado). Assim, há que determinar, sobre a perspetiva do eixo **X**, a perspetiva de um ponto com 2 cm de abcissa. Há a ter em conta que, numa perspetiva dimétrica, dois dos eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução. Nesta situação específica, os eixos que apresentam o mesmo coeficiente de redução são o eixo **X** e o eixo **Y**, pois, como atrás se referiu, o eixo **Z** é o eixo que apresenta um **coeficiente de redução isolado**. Assim, e tendo em conta que já temos o eixo **Y** rebatido, é possível determinar a perspetiva da abcissa sobre a perspetiva do eixo **Y** e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo **X**).

Tendo em conta que o ponto **A** tem 2 cm de afastamento, foi possível identificar, de imediato, o ponto do eixo  $Y_r'$  que tem 2 cm de afastamento – o ponto  $N_r$ . O ponto **N** é o ponto do eixo **Y** que tem 2 cm de afastamento (que é o afastamento do ponto **A**). Para se determinar a perspetiva do ponto **N** conduziu-se, por  $N_r$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto **N**, sobre a perspetiva do eixo **Y**. A distância do ponto **N** ao ponto **O** (medida sobre a perspetiva do eixo **Y**), é a perspetiva da abcissa do plano  $\pi$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspetiva do eixo **X**. Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio até à perspetiva do ponto **N**, transportou-se a perspetiva da abcissa para a perspetiva do eixo **X**, determinando um ponto (na perspetiva do eixo **X**) – esse ponto (que não se identificou) é a perspetiva do ponto do eixo **X** que tem 2 cm de abcissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém o retângulo [ABCD] contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\pi$  –  $f_\pi$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi$ ) e  $h_\pi$  (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ). Note que  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$  com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Z**. Pelo seu lado,  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$ , com cota nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Y**.

O plano  $\pi$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante horizontal (é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ).

*Representação do plano de perfil  $\pi'$  que contém o retângulo [A'B'C'D'] (a face de maior abcissa do sólido):*

O plano de perfil  $\pi'$  que contém a base de maior abcissa do sólido é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 8 cm de abcissa (a abcissa do ponto **C'** e que é dada no enunciado). Assim, há que determinar, sobre a perspetiva do eixo **X**, a perspetiva de um ponto com 8 cm de abcissa. Tendo em conta que, na perspetiva dimétrica deste exercício, o eixo **X** e o eixo **Y** apresentam o mesmo coeficiente de redução, e tendo ainda em consideração que já temos o eixo **Y** rebatido, à semelhança do efetuado para o plano  $\pi$ , é possível determinar a perspetiva da abcissa do plano  $\pi'$  sobre a perspetiva do eixo **Y** e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo **X**).

Assim, no eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 8 cm, o que nos permitiu determinar um ponto – o ponto  $N'_r$ . O ponto **N'** é o ponto do eixo **Y** que tem 8 cm de afastamento. Para se determinar a perspetiva do ponto **N'** conduziu-se, por  $N'_r$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto **N'**, sobre a perspetiva do eixo **Y**. A distância do ponto **N'** ao ponto **O** (medida sobre a perspetiva do eixo **Y**), é a perspetiva da abcissa do plano  $\pi'$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspetiva do eixo **X**. Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio até à perspetiva do ponto **N'**, transportou-se a perspetiva da abcissa para a perspetiva do eixo **X**, determinando um ponto (na perspetiva do eixo **X**) – esse ponto (que não se identificou) é a perspetiva do ponto do eixo **X** que tem 8 cm de abcissa. O plano de perfil  $\pi'$  que contém o retângulo [A'B'C'D'] contém necessariamente esse ponto.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\pi' - f_{\pi'}$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi'$ ) e  $h_{\pi'}$  (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\pi'$ ). Note que  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi'$  com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Z$ . Pelo seu lado,  $h_{\pi'}$  (o traço horizontal do plano  $\pi'$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi'$ , com cota nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Y$ .

O plano  $\pi'$  é também um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_{\pi'}$ ). Por outro lado, o plano  $\pi'$  é, igualmente, um plano projetante horizontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\pi'}$ ).

*Determinação da perspetiva do retângulo [ABCD] (a face de menor abscissa do paralelepípedo):*

Para inverter o rebatimento dos vértices do retângulo optou-se por recorrer a retas do plano  $\pi$ , às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos  $B$  e  $C$  recorreu-se à reta  $a$ , que é a reta suporte do lado  $[BF]$  do retângulo. A reta  $a_{3r}$  (que está definida por  $B_{3r}$  e por  $C_{3r}$ ) é a projeção lateral da reta  $a$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspetiva da projeção lateral da reta  $a$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $a_{3r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $B_{3r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta  $a$  que tem afastamento nulo). Por  $B_{3r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $B$ ) sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspetiva propriamente dita do ponto  $B$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto  $B$  é um ponto de  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspetiva do ponto  $B$  situa-se sobre a perspetiva de  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $B_{3r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $a$ , que é o ponto  $B$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $a_{3r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $G_{3r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta  $a$  que tem cota nula). Por  $G_{3r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $G_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $G$ ) sobre a perspetiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspetiva propriamente dita do ponto  $G$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto  $G$  é um ponto de  $h_{\pi}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspetiva do ponto  $G$  situa-se sobre a perspetiva de  $h_{\pi}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $G_{3r}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $a$ .

A projeção lateral da reta  $a$  ( $a_3$ ), em perspetiva, está definida por dois pontos – o ponto  $B_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $B$ ) e o ponto  $G_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $G$ ). Por outro lado, a perspetiva propriamente dita da reta  $a$  também está definida por dois pontos – as perspetivas propriamente ditas dos pontos  $B$  e  $G$ . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a perspetiva da projeção lateral da reta  $a$  ( $a_3$ ), bem como a sua perspetiva propriamente dita ( $a$ ).

O ponto  $B$  é imediatamente um dos vértices do retângulo e é um ponto com afastamento nulo, pelo que o ponto pertence ao plano  $XZ$ . Assim, o ponto  $B$  está coincidente com a sua projeção frontal, o que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente,  $B_2 \equiv B$ . Por outro lado, o ponto  $B$  tem afastamento nulo, pelo que  $B_1$  (a perspetiva da sua projeção horizontal) se situa sobre a perspetiva do eixo  $X$ .

Por fim, conduziu-se, por  $C_{3r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $C$ ), sobre  $a_3$  (a perspetiva da projeção lateral da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspetiva propriamente dita do ponto  $C$  sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $a$ , na mesma perpendicular à charneira.

Para inverter o rebatimento dos pontos  $A$  e  $D$  recorreu-se à reta  $b$ , que contém aqueles pontos (a reta  $b$  é a reta suporte do lado  $[AD]$  do retângulo) – a reta  $b_{3r}$  é a projeção lateral da reta  $b$ , em rebatimento, e passa por  $A_{3r}$  e por  $D_{3r}$  (a reta  $b$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , porque se trata de retas suporte de dois lados paralelos do retângulo. A reta  $b_{3r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $K_{3r}$  (que é a projeção lateral, em rebatimento, do ponto da reta  $b$  com afastamento nulo). Por  $K_{3r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $K$ ) sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspetiva propriamente dita do ponto  $K$ . A reta  $b$  é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto  $K$  é um ponto de  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspetiva do ponto  $K$  situa-se sobre a perspetiva de  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_{3r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $b$ , que é o ponto  $K$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ . Assim, desenharam-se a perspetiva da projeção lateral da reta  $b$  ( $b_3$ ), bem como a sua perspetiva propriamente dita ( $b$ ). A perspetiva da projeção lateral da reta  $b$  ( $b_3$ ) está definida por um ponto ( $K_3$ , que é a perspetiva da projeção lateral do ponto  $K$ ) e por uma direção (é paralela a  $a_3$ , a perspetiva da projeção lateral da reta  $a$ ). A perspetiva propriamente dita da reta  $b$  está igualmente definida por um ponto (a perspetiva do ponto  $K$ ) e por uma direção (é paralela à perspetiva da reta  $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $A_{3r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $A$ ), sobre  $b_3$  (a perspetiva da projeção lateral da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$  sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $D$  (conduzindo, por  $D_{3r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspetiva propriamente dita do ponto  $D$  (sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $b$ ), bem como a perspetiva da projeção lateral do ponto  $D$  ( $D_3$ ), sobre a perspetiva da projeção lateral da reta  $b$  ( $b_3$ ).

Salienta-se que não se determinaram as perspetivas das projeções horizontais dos vértices  $A$ ,  $C$  e  $D$  do retângulo ( $A_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ , respetivamente), mas, caso se tivessem determinado, aquelas estariam necessariamente sobre a perspetiva de  $h_{\pi}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano é um plano projetante horizontal. De forma idêntica, também não se determinaram as perspetivas das projeções frontais dos vértices  $A$ ,  $C$  e  $D$  do retângulo ( $A_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$ , respetivamente), mas, caso se tivessem determinado, aquelas estariam necessariamente sobre a perspetiva de  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano é um plano projetante frontal.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da perspectiva do retângulo [A'B'C'D'] (a face de maior abscissa do paralelepípedo):*

Uma vez que as arestas do paralelepípedo (que não são de perfil) estão contidas em retas fronto-horizontais (retas projetantes laterais), é possível identificar, de forma imediata, as perspectivas das projeções laterais dos vértices da face mais à esquerda (que estão coincidentes com as projeções laterais dos vértices correspondentes da face mais à direita) – tem-se, imediatamente,  $A'_3 \equiv A_3 \equiv A$ ,  $B'_3 \equiv B_3 \equiv B$ ,  $C'_3 \equiv C_3 \equiv C$  e  $D'_3 \equiv D_3 \equiv D$ .

Por outro lado, as retas  $a_3$  e  $b_3$  podem ser consideradas, também, como as projeções laterais das retas  $a'$  e  $b'$ , contidas no plano  $\pi'$ . Da mesma forma, enquanto os pontos  $B$  e  $K$  são os pontos com afastamento nulo das retas  $a$  e  $b$  (respetivamente), os pontos  $B'$  e  $K'$  serão os pontos com afastamento nulo das retas  $a'$  e  $b'$  (respetivamente). Assim, prolongaram-se as perpendiculares à charneira que passam por  $B$  e  $K$  e determinaram-se as perspectivas dos pontos  $B'$  e  $K'$ , sobre a perspectiva de  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ).

Por  $B'$  (a perspectiva do ponto  $B'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta  $a'$ , paralela à perspectiva da reta  $a$  – note que a reta  $a'$  está definida por um ponto (o ponto  $B'$ ) e por uma direção (é paralela às retas  $a$  e  $b$ ). Em seguida, por  $C'_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta fronto-horizonta que contém a aresta  $[CC']$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $C'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a'$ .

O ponto  $B'$  é imediatamente um dos vértices do retângulo  $[A'B'C'D']$  e é um ponto com afastamento nulo, pelo que o ponto pertence ao plano  $XZ$ . Assim, o ponto  $B'$  está coincidente com a sua projeção frontal, o que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente,  $B'_2 \equiv B'$ . Por outro lado, o ponto  $B'$  tem afastamento nulo, pelo que  $B'_1$  (a perspectiva da sua projeção horizontal) se situa sobre a perspectiva do eixo  $X$ .

Por outro lado, pelo ponto  $K'$  (a perspectiva do ponto  $K'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta  $b'$ , paralela à perspectiva da reta  $b$  – note que a reta  $b'$  está definida por um ponto (o ponto  $K'$ ) e por uma direção (é paralela às retas  $a$  e  $b$ ). Em seguida, por  $A'_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta fronto-horizonta que contém a aresta  $[AA']$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $A'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b'$ . De forma semelhante, por  $D'_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $D'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta fronto-horizonta que contém a aresta  $[DD']$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $D'$ , sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b'$ .

Salienta-se que não se determinaram as perspectivas das projeções horizontais dos vértices  $A'$ ,  $C'$  e  $D'$  do retângulo ( $A'_1$ ,  $C'_1$  e  $D'_1$ , respetivamente), mas, caso se tivessem determinado, aquelas estariam necessariamente sobre a perspectiva de  $h_{\pi'}$  (o traço horizontal do plano  $\pi'$ ), pois o plano é um plano projetante horizontal. De forma idêntica, também não se determinaram as perspectivas das projeções frontais dos vértices  $A'$ ,  $C'$  e  $D'$  do retângulo ( $A'_2$ ,  $C'_2$  e  $D'_2$ , respetivamente), mas, caso se tivessem determinado, aquelas estariam necessariamente sobre a perspectiva de  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ), pois o plano é um plano projetante frontal.

*Determinação das perspectivas do paralelepípedo:*

Por fim, desenhou-se a **perspectiva do paralelepípedo**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** do paralelepípedo é a linha quebrada fechada  $[BB'C'D'DA]$ . Existem dois vértices do cubo que não integram o contorno aparente da perspectiva do sólido – os vértices  $A'$  e  $C$ . O vértice  $A'$ , por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'B']$ ,  $[A'D']$  e  $[AA']$ . O vértice  $C$ , por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[BC]$ ,  $[CD]$  e  $[CC']$ .

As faces  $[A'B'C'D']$ ,  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  são visíveis, enquanto as faces  $[ABCD]$ ,  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$  são invisíveis.

Note que não se representaram as perspectivas nem da projeção frontal nem da projeção horizontal do sólido, por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o paralelepípedo, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. Os planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos que contêm as faces de perfil do paralelepípedo), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (frontal e horizontal) se representaram a **leve**. A perspectiva do paralelepípedo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado  $YZ$ , da translação do plano  $YZ$  rebatido, da construção da projeção lateral do retângulo  $[ABCD]$  e do paralelepípedo em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, das linhas de chamada ou do arco de transporte das abscissas dos planos  $\pi$  e  $\pi'$ .

## 1232.

## Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que o eixo **Y** é o eixo que sofre uma **redução isolada** (como o enunciado refere expressamente), a perspectiva do eixo **Y** faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos. Por outro lado, as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $140^\circ$  (o ângulo dado no enunciado), pelo que o ângulo restante é um ângulo de  $220^\circ$  ( $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ ). Este ângulo tem de ser dividido por dois – os dois ângulos iguais que a perspectiva do eixo **Y** faz com as perspectivas dos outros dois eixos. Assim, a perspectiva do eixo **Y** faz, com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**), ângulos de  $110^\circ$  ( $220^\circ : 2 = 110^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecrear a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

## Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (a base da pirâmide e a face inferior do cubo) é um plano horizontal (de nível), que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano paralelo ao *plano coordenado XY*, sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY* – o quadrado **[ABCD]** e a sua projeção horizontal são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XY* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

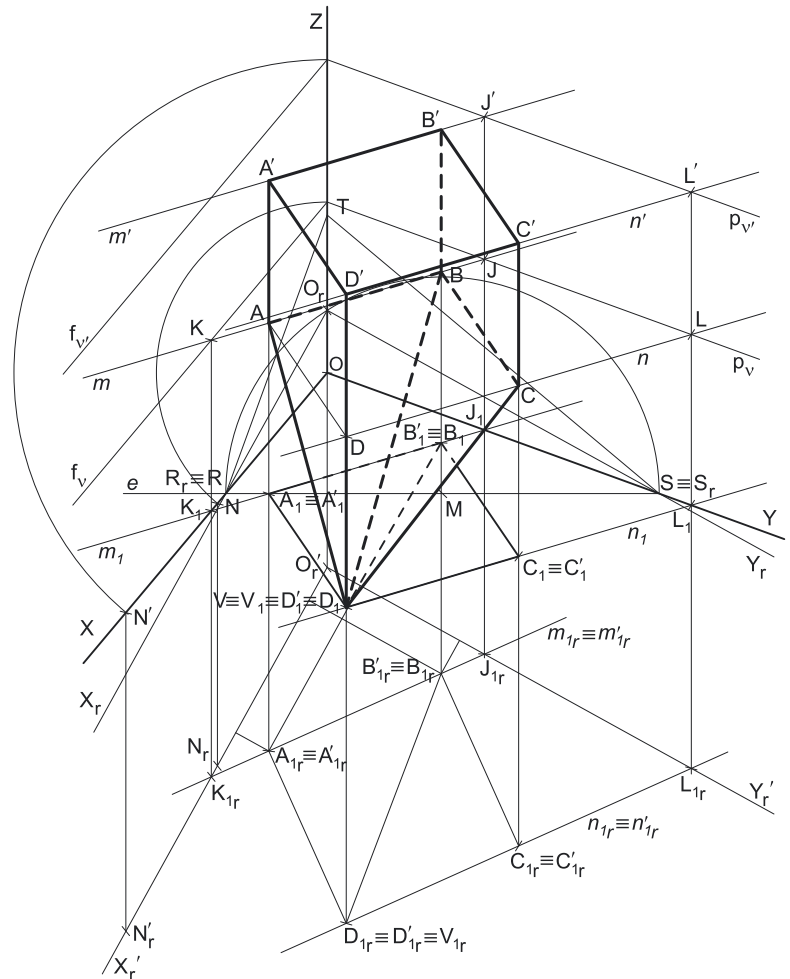
*Rebatimento do plano coordenado XY:*

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[RS]** do *triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).*

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo **Z**) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Y<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>**. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Construção do quadrado [ABCD], em projeção horizontal, em verdadeira grandeza:*

No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos **A** e **B** (5 cm e 1 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **A** e **B** (1 cm e 4 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e dos afastamentos dos pontos **A** e **B**, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais daqueles dois pontos ( $A_{1r}$  e  $B_{2r}$ , respetivamente), em rebatimento.

A partir de  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , efetuou-se a construção da **projeção horizontal do quadrado [ABCD]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{1r}$  e  $D_{1r}$  (as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado [ABCD], em verdadeira grandeza (em rebatimento). Salienta-se que se garantiu que o quadrado se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro, como o enunciado refere expressamente.

*Construção das projeções horizontais do cubo e da pirâmide, em verdadeira grandeza:*

A partir da projeção horizontal do quadrado [ABCD] (em rebatimento), construiram-se as projeções horizontais (em rebatimento) dos dois sólidos.

Tendo em conta que o vértice da pirâmide (o ponto **V**) se situa na mesma projetante horizontal do vértice **D**, do quadrado [ABCD] (como o enunciado refere expressamente), sabe-se que os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente,  $V_{1r} \equiv D_{1r}$ .

No que respeita ao cubo, uma vez que se trata de um **poliedro regular**, as suas arestas que não estão contidas nas faces horizontais (de nível) estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais). Assim, os vértices da face superior (a face  $[A'B'C'D']$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da face [ABCD], o que se assinalou imediatamente –  $A'_{1r} \equiv A_{1r}$ ,  $B'_{1r} \equiv B_{1r}$ ,  $C'_{1r} \equiv C_{1r}$  e  $D'_{1r} \equiv D_{1r}$ .

Estes procedimentos permitiram-nos concluir a construção das projeções horizontais do cubo e da pirâmide, em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido e transladado).

Falta-nos determinar as perspetivas das cotas dos planos  $v$  (o plano horizontal que contém a face inferior do cubo) e  $v'$  (o plano horizontal que contém a face superior do cubo), para determinar as perspetivas dos vértices do cubo e, dessa forma, concluir a construção das perspetivas dos dois sólidos. As cotas medem-se no eixo **Z**, que não se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção (o plano *axonométrico*), pois não é paralelo ao plano de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

*Representação do plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a face inferior do cubo e a base da pirâmide (o quadrado [ABCD]):*

O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém a **face inferior** do cubo (e a base da pirâmide) é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 6 cm de cota (a cota dos pontos **A** e **B** e que é dada no enunciado). Assim, há que determinar, sobre a perspetiva do eixo **Z**, a perspetiva de um ponto com 6 cm de cota. Há a ter em conta que, numa perspetiva dimétrica, dois dos eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução. Nesta situação específica, os eixos que apresentam o mesmo coeficiente de redução são o eixo **X** e o eixo **Z**, pois, como atrás se referiu, o eixo **Y** é o eixo que apresenta um **coeficiente de redução isolado**. Assim, e tendo em conta que já temos o eixo **X** rebatido, é possível determinar a perspetiva da cota sobre a perspetiva do eixo **X** e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo **Z**).

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a cota dos pontos **A** e **B** (6 cm) e determinou-se um ponto  $N_r$ . O ponto  $N$  é o ponto do eixo **X** que tem 6 cm de abscissa (que é igual à cota dos pontos **A** e **B**). Para se determinar a perspetiva do ponto **N** conduziu-se, por  $N_r$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto **N**, sobre a perspetiva do eixo **X**. A distância do ponto **N** ao ponto **O** (medida sobre a perspetiva do eixo **X**), é a perspetiva da cota do plano  $v$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspetiva do eixo **Z**. Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio até à perspetiva do ponto **N**, transportou-se a perspetiva da cota para a perspetiva do eixo **Z**, determinando um ponto (na perspetiva do eixo **Z**) – esse ponto (que não se identificou) é a perspetiva do ponto do eixo **Z** que tem 6 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o quadrado [ABCD] contém necessariamente esse ponto.

Pela perspetiva desse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abscissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Y**.

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Representação do plano  $v'$ , o plano horizontal (de nível) que contém a face superior do cubo (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ):*

A cota do plano horizontal (de nível)  $v'$  que contém a **face superior** do cubo é superior à cota do plano  $v$  (o plano que contém a face inferior do cubo) – a diferença entre as cotas dos dois planos é a medida da aresta do cubo, que é igual à medida do lado do quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  (que está em verdadeira grandeza no rebatimento do plano  $XY$ ).

Mais uma vez tendo em conta que, na perspetiva dimétrica deste exercício, os eixos que apresentam o mesmo coeficiente de redução são o eixo **X** e o eixo **Z**, e tendo ainda em conta que já temos o eixo **X** rebatido, é possível determinar a perspetiva da cota do plano  $v'$  sobre a perspetiva do eixo **X** e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo **Z**), à semelhança do efetuado com a perspetiva da cota do plano  $v$ .

Nesse sentido, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir do ponto  $N_r$  (o ponto que nos permitiu determinar a perspetiva da cota do plano  $v$ ) e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida do lado do quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$ , determinando-se um ponto  $N'_r$ . O ponto  $N'$  é o ponto do eixo **X** cuja distância ao ponto **N** é igual à medida do lado do quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$ . Nesse sentido,  $ON'_r$  é, sobre o eixo  $X_r'$ , a medida da cota do plano  $v'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para se determinar a perspectiva do ponto  $N'$  conduziu-se, por  $N'_r$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $N'$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$ . A distância do ponto  $N'$  ao ponto  $O$  (medida sobre a perspectiva do eixo  $X$ ), é a perspectiva da cota do plano  $v'$ , mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio até à perspectiva do ponto  $N'$ , transportou-se a perspectiva da cota para a perspectiva do eixo  $Z$ , determinando um ponto (na perspectiva do eixo  $Z$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo  $Z$  que tem a cota do plano  $v'$ . O plano horizontal (de nível)  $v'$  que contém o quadrado  $[A'B'C'D']$  contém necessariamente esse ponto.

Pela perspectiva desse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v'$  –  $f_{v'}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v'$ ) e  $p_{v'}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v'$ ). Note que  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v'$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ) é uma reta de topo do plano  $v'$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v'$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). Por outro lado, o plano  $v'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{v'}$ ).

*Determinação das perspectivas dos vértices do quadrado  $[ABCD]$  (a base da pirâmide e a face inferior do cubo):*

Para inverter o rebatimento dos vértices do quadrado optou-se por recorrer a retas do plano  $v$ , às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos  $A$  e  $B$  recorreu-se à reta  $m$ , que é a reta suporte do lado  $[AB]$  do quadrado. A reta  $m_{1r}$  (que está definida por  $A_{1r}$  e por  $B_{1r}$ ) é a projeção horizontal da reta  $m$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $m$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $m_{1r}$  interseca o eixo  $Y'_r$  no ponto  $J_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $m$  que tem abcissa nula). Por  $J_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ . A reta  $m$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $J$  é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $J$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta, que é o ponto  $J$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $m_{1r}$  interseca o eixo  $X'_r$  no ponto  $K_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $m$  que tem afastamento nulo). Por  $K_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $K$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $K$ . A reta  $m$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $K$  é um ponto de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $K$  situa-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_{1r}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta.

A projeção horizontal da reta  $m$  ( $m_1$ ), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) e o ponto  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $K$ ). Por outro lado, a perspectiva propriamente dita da reta  $m$  também está definida por dois pontos – as perspectivas propriamente ditas dos pontos  $J$  e  $K$ . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $m$  ( $m_1$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $m$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $A_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ), sobre  $m_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $m$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $m$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $B$  (conduzindo, por  $B_{1r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $m$ ), bem como a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$  ( $B_1$ ), sobre a perspectiva da projeção horizontal da reta  $m$  ( $m_1$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos  $C$  e  $D$  recorreu-se à reta  $n$ , que contém aqueles pontos (a reta  $n$  é a reta suporte do lado  $[CD]$  do quadrado) – a reta  $n_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $n$ , em rebatimento, e passa por  $C_{1r}$  e por  $D_{1r}$  (a reta  $n$  está definida por dois pontos). Salienta-se que a reta  $n$  é paralela à reta  $m$ , porque se trata de retas suporte de lados paralelos do quadrado. A reta  $n_{1r}$  interseca o eixo  $Y'_r$  no ponto  $L_{1r}$  (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto da reta  $n$  com abcissa nula). Por  $L_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $L$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $L$ . A reta  $n$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $L$  é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $L$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $L_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $n$ , que é o ponto  $L$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $n$  é paralela à reta  $m$ , também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $n$ . Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção horizontal da reta  $n$  ( $n_1$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $n$ ). A perspectiva da projeção horizontal da reta  $n$  ( $n_1$ ) está definida por um ponto ( $L_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $L$ ) e por uma direção (é paralela a  $m_1$ , a perspectiva da projeção horizontal da reta  $m$ ). A perspectiva propriamente dita da reta  $n$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto  $L$ ) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $m$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ), sobre  $n_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $n$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $n$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $D$  (conduzindo, por  $D_{1r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $n$ ), bem como a perspectiva da projeção lateral do ponto  $D$  ( $D_1$ ), sobre a perspectiva da projeção lateral da reta  $n$  ( $n_1$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das perspetivas dos vértices do quadrado $[A'B'C'D']$ (a face superior do cubo):

Uma vez que as arestas do cubo (que não são horizontais) estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais), é possível identificar, de forma imediata, as perspetivas das projeções horizontais dos vértices da face superior (que estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da face inferior) – tem-se, imediatamente,  $A'_1 \equiv A_1$ ,  $B'_1 \equiv B_1$ ,  $C'_1 \equiv C_1$  e  $D'_1 \equiv D_1$ .

Por outro lado, as retas  $m_1$  e  $n_1$  podem ser consideradas, também, como as projeções horizontais das retas  $m'$  e  $n'$ , contidas no plano  $v'$ . Da mesma forma, enquanto os pontos  $J$  e  $L$  são os pontos com abcissa nula das retas  $m$  e  $n$  (respetivamente), os pontos  $J'$  e  $L'$  serão os pontos com abcissa nula das retas  $m'$  e  $n'$  (respetivamente). Assim, prolongaram-se as perpendiculares à charneira que passam por  $J$  e  $L$  e determinaram-se as perspetivas dos pontos  $J'$  e  $L'$ , sobre a perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ).

Por  $J'$  (a perspetiva do ponto  $J'$ ), conduziu-se a perspetiva da reta  $m'$ , paralela à perspetiva da reta  $m$  – note que a reta  $m'$  está definida por um ponto (o ponto  $J'$ ) e por uma direção (é paralela às retas  $m$  e  $n$ ). Em seguida, por  $A'_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $A'$ ) conduziu-se a perspetiva da reta vertical que contém a aresta  $[AA']$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto  $A'$ , sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $m'$ . De forma semelhante, por  $B'_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $B'$ ) conduziu-se a perspetiva da reta vertical que contém a aresta  $[BB']$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto  $B'$ , sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $m'$ .

Por outro lado, pelo ponto  $L'$  (a perspetiva do ponto  $L'$ ), conduziu-se a perspetiva da reta  $n'$ , paralela à perspetiva da reta  $n$  – note que a reta  $n'$  está definida por um ponto (o ponto  $L'$ ) e por uma direção (é paralela às retas  $m$  e  $n$ ). Em seguida, por  $C'_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $C'$ ) conduziu-se a perspetiva da reta vertical que contém a aresta  $[CC']$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto  $C'$ , sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $n'$ . De forma semelhante, por  $D'_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $D'$ ) conduziu-se a perspetiva da reta vertical que contém a aresta  $[DD']$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$  e perpendicular à charneira) e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto  $D'$ , sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $n'$ .

## Determinação das perspetivas do ponto $V$ :

Como anteriormente se referiu (e como o enunciado refere expressamente), o ponto  $V$  é um ponto que se situa na mesma projetante horizontal do ponto  $D$  do quadrado  $[ABCD]$  (que é a reta suporte da aresta  $[DD']$  do cubo) – assim, assinalou-se, em perspetiva, que os três pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes – tem-se, imediatamente,  $V_1 \equiv D'_1 \equiv D_1$ .

Por outro lado, o ponto  $V$  tem cota nula (como o enunciado refere expressamente), pelo que o ponto  $V$  é um ponto do plano  $XY$ . Nesse sentido, o ponto  $V$  está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente,  $V \equiv V_1 \equiv D'_1 \equiv D_1$ .

## Determinação das perspetivas dos dois sólidos:

Por fim, a partir das perspetivas dos oito vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspetiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as arestas visíveis e as arestas invisíveis. Saliencia-se que o ponto  $D$ , sendo um vértice do cubo, não é, na realidade, um vértice do sólido final.

De facto, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um cubo e uma pirâmide quadrangular oblíqua), as faces do objeto que resultam de duas faces complanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso dos segmentos de reta  $[AD]$  e  $[CD]$ . De facto, os segmentos de reta  $[AC]$  e  $[CD]$  **não são** arestas do sólido, porque não resultam da interseção entre duas faces distintas (aqueles dois segmentos de reta são, na prática, linhas auxiliares que estão contidas em determinadas faces do objeto e, por isso, não são arestas do sólido).

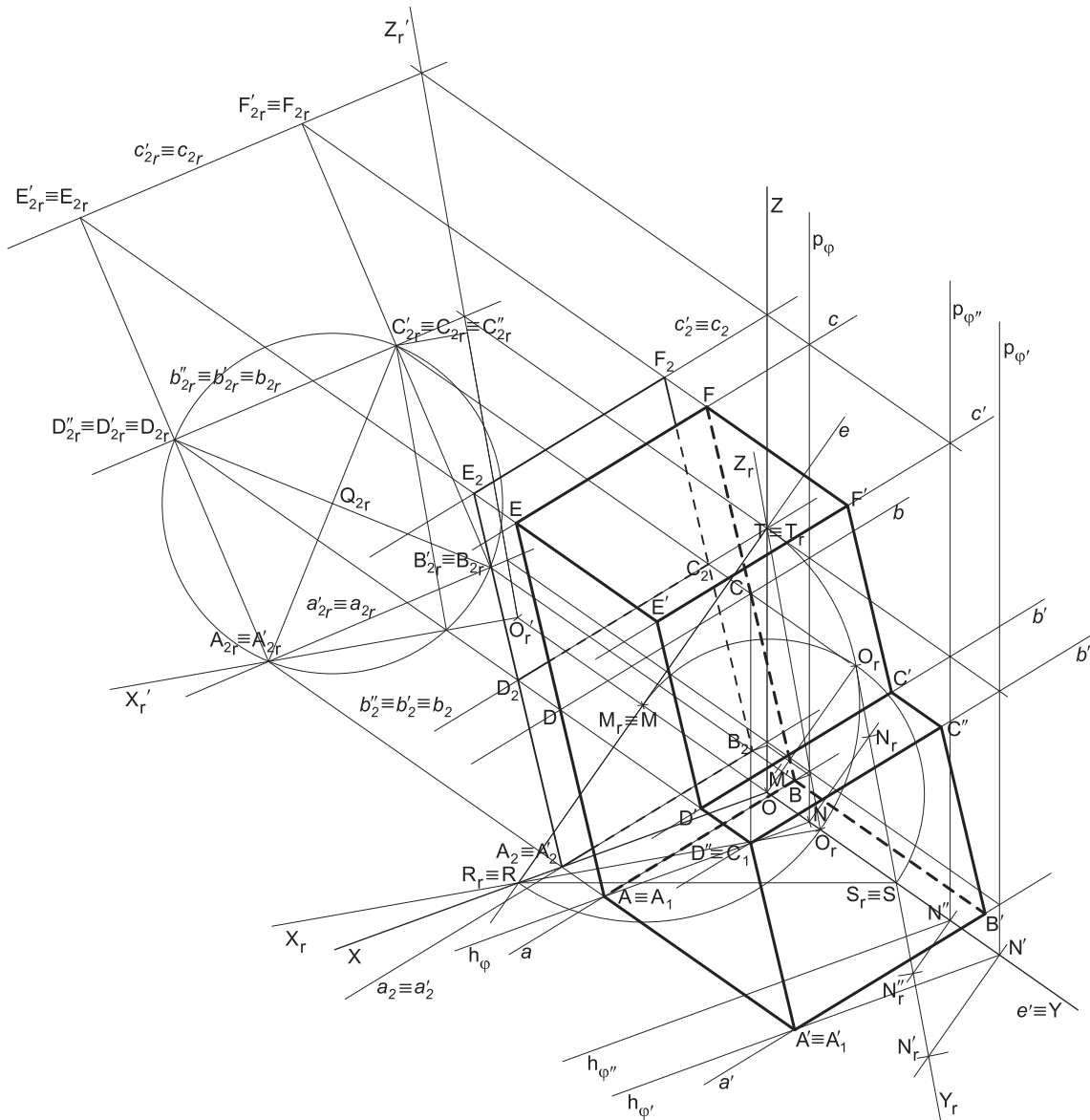
Sublinha-se que, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente «**um sólido composto**»), os segmentos  $[AD]$  e  $[CD]$  seriam duas arestas comuns aos dois sólidos.

Note que não se representaram as perspetivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais dos vértices de qualquer dos sólidos, por não serem necessárias. Nesse sentido, também não se representaram as perspetivas de qualquer das projeções dos dois sólidos. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

## Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a face inferior do cubo e a base da pirâmide) e o plano  $v'$  (o plano que contém a face superior do cubo), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos respetivos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As perspetivas do sólido representaram-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado  $XY$ , da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção das projeções horizontais dos dois sólidos em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento (as retas  $m$ ,  $n$ ,  $m'$  e  $n'$ ) e, ainda, dos arcos de transporte das cotas dos planos  $v$  e  $v'$  para o eixo  $Z$ .

1233.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Y** faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo **Y** é, então, o eixo que sofre uma **redução isolada**. A perspectiva do eixo **Y** faz ângulos de  $125^\circ$  com as perspectivas dos outros dois eixos, o que perfaz um total de  $250^\circ$  ( $125^\circ \times 2 = 250^\circ$ ). Assim, as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $110^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

**Resolução:**

As bases do prisma estão contidas em planos frontais (de frente) e a face **[CDEF]**, do cubo, é complanar com a base **[ABCD]** do prisma, o que significa que os dois quadrados (o quadrado **[ABCD]** e o quadrado **[CDEF]**) estão, ambos, contidos num mesmo plano frontal (de frente). O plano que contém os dois quadrados é um plano frontal (de frente), que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que **os quadrados não se projetam em verdadeira grandeza** (as perspectivas dos quadrados não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que os quadrados estão contidos num plano paralelo ao *plano coordenado XZ*, sabe-se que os quadrados se projetam em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* – o quadrado **[ABCD]** e a sua projeção frontal são duas figuras geometricamente iguais, o mesmo acontecendo com o quadrado **[CDEF]** e a sua projeção frontal. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual os quadrados se projetam em verdadeira grandeza).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O rebatimento do plano coordenado  $XY$  pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

*Rebatimento do plano coordenado  $XZ$ :*

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XZ$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado  $[RT]$  do triângulo fundamental (o lado que se opõe à perspetiva do eixo  $Y$ ). Os pontos  $R$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O rebatimento do plano coordenado  $XZ$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano  $XZ$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do lado  $[RT]$  do triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, conduziu-se, pela perspetiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspetiva do eixo  $Y$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

*Construção dos quadrados  $[ABCD]$  e  $[CDEF]$ , em projeção frontal, em verdadeira grandeza:*

No plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos  $A'$  e  $C$  (7 cm e 2 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. No plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto  $C$  (8 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto  $A'$  tem cota nula. A partir das abscissas e das cotas dos pontos  $A$  e  $C$ , em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções frontais daqueles dois pontos ( $A'_{2r}$  e  $C'_{2r}$ , respetivamente), em rebatimento.

O prisma quadrangular é um **prisma reto**, pelo que as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases (que são planos frontais). Assim, as arestas laterais do sólido estão contidas em retas de topo, que são retas projetantes frontais. Nesse sentido, os pontos  $A$  (o vértice da face  $[ABCD]$  correspondente ao vértice  $A'$ ) e  $C'$  (o vértice da face  $[A'B'C'D']$  correspondente ao vértice  $C$ ) têm as suas projeções frontais coincidentes com as projeções frontais dos pontos  $A'$  e  $C$ , o que se assinalou imediatamente em rebatimento no rebatimento do plano  $XZ$  –  $A_{2r} \equiv A'_{2r}$  e  $C'_{2r} \equiv C_{2r}$ .

A partir de  $A_{2r}$  e  $C_{2r}$ , efetuou-se a construção da **projeção frontal do quadrado  $[ABCD]$** , em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XZ$ ), o que nos permitiu determinar  $B_{2r}$  e  $D_{2r}$  (as projeções frontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}]$  é a projeção frontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento). Sublinha-se que para a construção do quadrado  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}]$  foi necessário inscrever o polígono numa circunferência, cujo centro (o ponto  $Q_{2r}$ ) é o ponto médio do segmento  $[A_{2r}C_{2r}]$ . Assim, a circunferência com centro em  $Q_{2r}$  e raio até  $A_{2r}$  e  $C_{2r}$  é a circunferência circunscrita ao quadrado. Salienta-se que se garantiu que o ponto  $B$  é o vértice de menor abscissa do quadrado.

Em seguida, a partir de  $C_{2r}$  e  $D_{2r}$ , efetuou-se a construção da **projeção frontal do quadrado  $[CDEF]$** , em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XZ$ ), o que nos permitiu determinar  $E_{2r}$  e  $F_{2r}$  (as projeções frontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[C_{2r}D_{2r}E_{2r}F_{2r}]$  é a projeção frontal do quadrado  $[CDEF]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento).

*Construção das projeções frontais do prisma e do cubo, em verdadeira grandeza:*

A partir da projeção frontal dos quadrados  $[ABCD]$  e  $[CDEF]$  (em rebatimento), construíram-se as projeções frontais (em rebatimento) dos dois sólidos.

No que respeita ao prisma quadrangular, e como atrás se referiu, as suas arestas laterais estão contidas em retas de topo (retas projetantes frontais), pelo que os vértices da base de maior afastamento (a base  $[A'B'C'D']$ ) têm as suas projeções frontais coincidentes com as projeções frontais dos vértices correspondentes da base  $[ABCD]$ , o que se assinalou imediatamente, para os dois vértices em falta –  $B'_{2r} \equiv B_{2r}$  e  $D'_{2r} \equiv D_{2r}$ .

No que respeita ao cubo, uma vez que se trata de um **poliedro regular**, as suas arestas que não estão contidas nas faces frontais (de frente) estão igualmente contidas em retas de topo (retas projetantes frontais). Assim, os vértices da face de maior afastamento do cubo (a face  $[C''D''E''F'']$ ) têm as suas projeções frontais coincidentes com as projeções frontais dos vértices correspondentes da face  $[CDEF]$ , o que se assinalou imediatamente –  $C''_{2r} \equiv C_{2r}$ ,  $D''_{2r} \equiv D_{2r}$ ,  $E''_{2r} \equiv E_{2r}$  e  $F''_{2r} \equiv F_{2r}$ .

Estes procedimentos permitiram-nos concluir a construção das projeções frontais do cubo e do prisma, em rebatimento (no plano  $XZ$  rebatido e transladado).

Falta-nos determinar as perspetivas dos afastamentos dos planos que contêm as bases do prisma e a face de maior afastamento do cubo. O plano  $\varphi$  é o plano frontal (de frente) que contém os dois quadrados coplanares (os quadrados  $[ABCD]$  e  $[CDEF]$ ). O plano  $\varphi'$  é o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do prisma. O plano  $\varphi''$  é o plano frontal (de frente) que contém a face de maior afastamento do cubo. Os afastamentos medem-se no eixo  $Y$ , que não se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção (o plano axonométrico), pois não é paralelo ao plano de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Representação do plano frontal (de frente)  $\varphi$ , que contém os quadrados [ABCD] e [CDEF]:*

O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém aqueles dois quadrados é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto C, dado no enunciado). Assim, há que determinar, sobre a perspectiva do eixo Y, um ponto com 2 cm de afastamento. Há a ter em conta que, numa perspectiva dimétrica, dois dos eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução. Nesta situação específica, os eixos que apresentam o mesmo coeficiente de redução são o eixo X e o eixo Z, pois, como atrás se referiu, o eixo Y é o eixo que apresenta um **coeficiente de redução isolado**.

Assim, e tendo em conta que **nenhum dos eixos rebatidos** apresenta um coeficiente de deformação idêntico ao do eixo Y, é necessário proceder ao rebatimento do eixo Y, de forma a ser possível determinar a perspectiva do afastamento do plano frontal (de frente) que contém aqueles dois quadrados. O eixo Y pode ser rebatido por um de três processos distintos – pelo **rebatimento do plano projetante do eixo**, pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou, ainda, pelo **método dos cortes**. Optou-se pelo primeiro processo – pelo rebatimento do plano projetante do eixo Y.

Nesse sentido, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a perspectiva do eixo Y. O rebatimento do plano projetante do eixo Y processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto O e cuja hipotenusa está contida na perspectiva do eixo Y – esse triângulo é, na presente situação, o triângulo [SOM] (sendo M o ponto médio do lado [RT] do *triângulo fundamental*). Salienta-se que, nesta situação, o plano projetante do eixo Y corta o lado [RT] do *triângulo fundamental* no ponto M. Nesse sentido, pontos S e M são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $M_r \equiv M$ .

Em seguida, determinou-se o ponto M' (o ponto médio do segmento [SM], que é a hipotenusa do triângulo retângulo [SOM]) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033. e respetivo relatório).

Depois, conduziu-se, pela perspectiva do ponto O, uma perpendicular à charneira (a reta  $e'$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. A reta definida por  $O_r$  e por  $M_r$  é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo Y com o plano coordenado XZ (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo  $Y_r$  é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto  $O_r$ .

Em seguida, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 2 cm (o afastamento do plano  $\varphi$ ) e determinou-se um ponto – o ponto  $N_r$ . O ponto N é o ponto do eixo Y que tem 2 cm de afastamento. Para se determinar a perspectiva do ponto N conduziu-se, por  $N_r$ , uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto N, sobre a perspectiva do eixo Y. O ponto N é a perspectiva do ponto do eixo Y que tem 2 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém os dois quadrados contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ). Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ , com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo X. Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo Z.

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado XY) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado XY, sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado YZ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado YZ, sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

*Representação do plano frontal (de frente)  $\varphi'$ , que contém a base de maior afastamento do prisma (o quadrado [A'B'C'D']):*

O plano frontal (de frente)  $\varphi'$  que contém o quadrado [A'B'C'D'] é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 11 cm de afastamento (o afastamento do ponto A', dado no enunciado). Assim, há que determinar, sobre a perspectiva do eixo Y, um ponto com 11 cm de afastamento. Tendo em conta que já temos o eixo Y rebatido (o eixo  $Y_r$ ), é possível, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Y_r$ , medir o afastamento do plano  $\varphi'$ .

Assim, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 11 cm (o afastamento do plano  $\varphi'$ ) e determinou-se um ponto – o ponto  $N'_r$ . O ponto N' é o ponto do eixo Y que tem 11 cm de afastamento. Para se determinar a perspectiva do ponto N' conduziu-se, por  $N'_r$ , uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto N', sobre a perspectiva do eixo Y. O ponto N' é a perspectiva do ponto do eixo Y que tem 11 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\varphi'$  que contém o quadrado [A'B'C'D'] contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi'$  –  $h_{\varphi'}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) e  $p_{\varphi'}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi'$ ). Note que  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi'$ , com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo X. Pelo seu lado,  $p_{\varphi'}$  (o traço lateral do plano  $\varphi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi'$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo Z.

O plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado XY) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado XY, sobre o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado YZ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado YZ, sobre o seu traço lateral ( $p_{\varphi'}$ ).

*Representação do plano frontal (de frente)  $\varphi''$ , que contém a face de maior afastamento do cubo (o quadrado [C''D''E''F']):*

O plano frontal (de frente)  $\varphi''$  que contém o quadrado [C''D''E''F'] é o lugar geométrico dos pontos do espaço cujo afastamento resulta da soma de 2 cm (o afastamento do plano  $\varphi$ ) com o comprimento do lado do quadrado [CDEF] (que está, em verdadeira grandeza, em projeção frontal, no rebatimento do plano XZ). Assim, há que determinar, sobre a perspectiva do eixo Y, um ponto com esse afastamento. Tendo em conta que já temos o eixo Y rebatido (o eixo  $Y_r$ ), é possível, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Y_r$ , medir o afastamento do plano  $\varphi''$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $N_r$  (o ponto com o afastamento do plano  $\varphi$ ) e no sentido positivo do eixo, mediu-se o comprimento do lado do quadrado (a medida da aresta do cubo) determinou-se um ponto – o ponto  $N''_r$ . O ponto  $N''_r$  é o ponto do eixo  $Y$  que cujo de afastamento é igual ao afastamento do plano que contém a face de maior afastamento do cubo (o plano  $\varphi''$ ). Salienta-se que  $N_r N''_r$  é, em verdadeira grandeza, a medida da aresta do cubo (e do lado do quadrado  $[C_2, D_2, E_2, F_2]$ ), medida sobre o eixo  $Y_r$ .

Para se determinar a perspectiva do ponto  $N''$  conduziu-se, por  $N''_r$ , uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $N''$ , sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $N''$  é a perspectiva do ponto do eixo  $Y$  que o afastamento da face de maior afastamento do cubo. O plano frontal (de frente)  $\varphi''$  que contém o quadrado  $[C''D''E''F'']$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi''$  –  $h_{\varphi''}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi''$ ) e  $p_{\varphi''}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi''$ ). Note que  $h_{\varphi''}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi''$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi''$ , com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{\varphi''}$  (o traço lateral do plano  $\varphi''$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi''$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi''$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\varphi''}$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi''$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{\varphi''}$ ).

### Determinação das perspectivas dos vértices $A$ , $A'$ , $B$ e $B'$ , do prisma:

O ponto  $A$  pertence ao plano  $\varphi$  e é um ponto com cota nula, pelo que o ponto  $A$  é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{\varphi}$ ). Por outro lado, o ponto  $A'$  pertence ao plano  $\varphi'$  e é, também, um ponto com cota nula, pelo que o ponto  $A'$  é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano  $\varphi'$ . Assim, por  $A_{2r} \equiv A'_{2r}$  (as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $A'$ , em rebatimento) conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e$ ) e determinou-se  $A_2 \equiv A'_2$  (as perspectivas das projeções frontais dos pontos  $A$  e  $A'$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ .

Essa mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar as perspectivas propriamente ditas do ponto  $A$  (sobre  $h_{\varphi}$ , a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e do ponto  $A'$  (sobre  $h_{\varphi'}$ , a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi'$ ). Atendendo a que o ponto  $A$  é um ponto do plano  $XY$  (porque tem cota nula), o ponto  $A$  está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho – tem-se, imediatamente,  $A_1 \equiv A$ . De forma semelhante, e porque o ponto  $A'$  é também um ponto do plano  $XY$  (porque tem também cota nula), o ponto  $A'$  está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho – tem-se, imediatamente,  $A'_1 \equiv A'$ .

Para inverter o rebatimento dos vértices  $B$  e  $B'$  do prisma optou-se por recorrer a retas dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas  $a$  e  $a'$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $\varphi$  e é a reta suporte do lado  $[AB]$  do quadrado  $[ABCD]$ . A reta  $a'$  é uma reta do plano  $\varphi'$  e é a reta suporte do lado  $[A'B']$  do quadrado  $[A'B'C'D']$ . As duas retas têm as suas projeções frontais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano  $XZ$  rebatido) – a reta  $a_{2r} \equiv a'_{2r}$  é a projeção frontal (em rebatimento) das retas  $a$  e  $a'$  e está definida por dois pontos (passa por  $A_{2r} \equiv A'_{2r}$  e por  $B_{2r} \equiv B'_{2r}$ . Cada uma das retas ( $a$  e  $a'$ ) está definida por dois pontos.

A reta  $a_{2r} \equiv a'_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção frontal dos traços laterais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspectivas desses pontos, sobre a perspectiva de  $p_{\varphi}$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) e sobre a perspectiva de  $p_{\varphi'}$  (o traço lateral do plano  $\varphi'$ ). Já temos um ponto para definir a perspectiva de cada uma das duas retas (as retas  $a$  e  $a'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

As retas  $a$  e  $a'$  contêm os pontos  $A$  e  $A'$  (respetivamente), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir cada uma das duas retas (em perspectiva). A perspectiva da reta  $a$  fica definida pela perspectiva do seu traço lateral (que não se identificou e que se situa sobre a perspectiva de  $p_{\varphi}$ ) e pela perspectiva do ponto  $A$  (já determinada). A perspectiva da reta  $a'$  fica definida pela perspectiva do seu traço lateral (que não também se identificou e que se situa sobre a perspectiva de  $p_{\varphi'}$ ) e pela perspectiva do ponto  $A'$  (já determinada).

Este procedimento permitiu-nos, ainda, determinar as perspectivas das projeções frontais das duas retas ( $a_2 \equiv a'_2$ ), que estão definidas pelas perspectivas das projeções frontais dos dois pontos que as definem, o que nos permitiu desenhá-las imediatamente.

Por fim conduziu-se, por  $B_{2r} \equiv B'_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_2 \equiv B'_2$  (as perspectivas das projeções frontais dos pontos  $B$  e  $B'$ ), sobre  $a_2 \equiv a'_2$  (as perspectivas das projeções frontais das retas  $a$  e  $a'$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspectiva do ponto  $B$  (sobre a perspectiva da reta  $a$ ), bem como a perspectiva do ponto  $B'$  (sobre a perspectiva da reta  $a'$ ).

### Determinação das perspectivas dos vértices $C$ , $C'$ , $D$ e $D'$ , do prisma e, ainda, dos vértices $C''$ e $D''$ do cubo:

Para inverter o rebatimento dos pontos  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$ ,  $D$ ,  $D'$  e  $D''$  optou-se por recorrer a retas dos planos  $\varphi$ ,  $\varphi'$  e  $\varphi''$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas  $b$ ,  $b'$  e  $b''$ . A reta  $b$  é uma reta do plano  $\varphi$  e é a reta suporte do lado  $[CD]$  do quadrado  $[ABCD]$ . A reta  $b'$  é uma reta do plano  $\varphi'$  e é a reta suporte do lado  $[C'D']$  do quadrado  $[A'B'C'D']$ . A reta  $b''$  é uma reta do plano  $\varphi''$  e é a reta suporte do lado  $[C''D'']$  do quadrado  $[C''D''E''F'']$ . As três retas têm as suas projeções frontais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano  $XZ$  rebatido) – a reta  $b_{2r} \equiv b'_{2r} \equiv b''_{2r}$  é a projeção frontal (em rebatimento) das retas  $b$ ,  $b'$  e  $b''$  e está definida por dois pontos (passa por  $C_{2r} \equiv C'_{2r} \equiv C''_{2r}$  e por  $D_{2r} \equiv D'_{2r} \equiv D''_{2r}$ . Cada uma das retas ( $b$ ,  $b'$  e  $b''$ ) está definida por dois pontos.

Salienta-se que as retas  $b$ ,  $b'$  e  $b''$  são necessariamente paralelas às retas  $a$  e  $a'$ , pois trata-se de retas suporte de lados paralelos de quadrados que estão, todos na mesma posição.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $b_{2r} \equiv b'_{2r} \equiv b''_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção frontal dos traços laterais das três retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspetivas desses pontos, sobre a perspetiva de  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ), sobre a perspetiva de  $p_{\phi'}$  (o traço lateral do plano  $\phi'$ ) e ainda sobre a perspetiva de  $p_{\phi''}$  (o traço lateral do plano  $\phi''$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva de cada uma das três retas (as retas  $b$ ,  $b'$  e  $b''$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Uma vez que as retas  $b$ ,  $b'$  e  $b''$  são paralelas às retas  $a$  e  $a'$ , também já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das três retas (em perspetiva). A perspetiva da reta  $b$  fica definida pela perspetiva do seu traço lateral (que não se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $p_\phi$ ) e é paralela às perspetivas das retas  $a$  e  $a'$ . A perspetiva da reta  $b'$  fica definida pela perspetiva do seu traço lateral (que não também se identificou e é paralela às perspetivas das retas  $a$  e  $a'$ ). A perspetiva da reta  $b''$  fica definida pela perspetiva do seu traço lateral (que não também se identificou e é paralela às perspetivas das retas  $a$  e  $a'$ ).

Este procedimento permitiu-nos, ainda, determinar as perspetivas das projeções frontais das três retas ( $b_2 \equiv b'_2 \equiv b''_2$ ), que estão igualmente definidas por um ponto e por uma direção.

Em seguida, conduziu-se, por  $C_{2r} \equiv C'_{2r} \equiv C''_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_2 \equiv C'_2 \equiv C''_2$  (as perspetivas das projeções frontais dos pontos  $C$ ,  $C'$  e  $C''$ ), sobre  $b_2 \equiv b'_2 \equiv b''_2$  (as perspetivas das projeções frontais das retas  $b$ ,  $b'$  e  $b''$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $C$  (sobre a perspetiva da reta  $b$ ), bem como a perspetiva do ponto  $C'$  (sobre a perspetiva da reta  $b'$ ) e, ainda, a perspetiva do ponto  $C''$  (sobre a perspetiva da reta  $b''$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $D_{2r} \equiv D'_{2r} \equiv D''_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $D_2 \equiv D'_2 \equiv D''_2$  (as perspetivas das projeções frontais dos pontos  $D$ ,  $D'$  e  $D''$ ), sobre  $b_2 \equiv b'_2 \equiv b''_2$  (as perspetivas das projeções frontais das retas  $b$ ,  $b'$  e  $b''$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $D$  (sobre a perspetiva da reta  $b$ ), bem como a perspetiva do ponto  $D'$  (sobre a perspetiva da reta  $b'$ ) e, ainda, a perspetiva do ponto  $D''$  (sobre a perspetiva da reta  $b''$ ).

#### Determinação das perspetivas dos vértices $E$ , $E'$ , $F$ e $F'$ , do cubo:

Para inverter o rebatimento dos pontos  $E$ ,  $E'$ ,  $F$  e  $F'$  optou-se por recorrer a retas dos planos  $\phi$  e  $\phi''$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas  $c$  e  $c'$ . A reta  $c$  é uma reta do plano  $\phi$  e é a reta suporte do lado  $[EF]$  do quadrado  $[CDEF]$ . A reta  $c'$  é uma reta do plano  $\phi''$  e é a reta suporte do lado  $[E'F']$  do quadrado  $[C'D'E'F']$ . As duas retas têm as suas projeções frontais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano  $XZ$  rebatido) – a reta  $c_{2r} \equiv c'_{2r}$  é a projeção frontal (em rebatimento) das retas  $c$  e  $c'$  e está definida por dois pontos (passa por  $E_{2r} \equiv F'_{2r}$ , e por  $F_{2r} \equiv E'_{2r}$ ). Cada uma das duas retas ( $c$  e  $c'$ ) está definida por dois pontos.

Salienta-se que as retas  $c$  e  $c'$  são necessariamente paralelas às retas  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$  e  $b''$ , pois trata-se de retas suporte de lados paralelos de quadrados que estão, todos na mesma posição.

A reta  $c_{2r} \equiv c'_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção frontal dos traços laterais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspetivas desses pontos, sobre a perspetiva de  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ) e sobre a perspetiva de  $p_{\phi''}$  (o traço lateral do plano  $\phi''$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva de cada uma das duas retas (as retas  $c$  e  $c'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Uma vez que as retas  $c$  e  $c'$  são paralelas às retas  $a$  e  $a'$ , também já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das duas retas (em perspetiva). A perspetiva da reta  $c$  fica definida pela perspetiva do seu traço lateral (que não se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $p_\phi$ ) e é paralela às perspetivas das retas  $a$  e  $a'$ . A perspetiva da reta  $c'$  fica definida pela perspetiva do seu traço lateral (que não também se identificou e é paralela às perspetivas das retas  $a$  e  $a'$ ).

Este procedimento permitiu-nos, ainda, determinar as perspetivas das projeções frontais das duas retas ( $c_2 \equiv c'_2$ ), que estão igualmente definidas por um ponto e por uma direção.

Em seguida, conduziu-se, por  $E_{2r} \equiv E'_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $E_2 \equiv E'_2$  (as perspetivas das projeções frontais dos pontos  $E$  e  $E'$ ), sobre  $c_2 \equiv c'_2$  (as perspetivas das projeções frontais das retas  $c$  e  $c'$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $E$  (sobre a perspetiva da reta  $c$ ), bem como a perspetiva do ponto  $E'$  (sobre a perspetiva da reta  $c'$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $F_{2r} \equiv F'_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $F_2 \equiv F'_2$  (as perspetivas das projeções frontais dos pontos  $F$  e  $F'$ ), sobre  $c_2 \equiv c'_2$  (as perspetivas das projeções frontais das retas  $c$  e  $c'$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $F$  (sobre a perspetiva da reta  $c$ ), bem como a perspetiva do ponto  $F'$  (sobre a perspetiva da reta  $c'$ ).

#### Determinação das perspetivas do sólido:

Por fim, a partir das perspetivas dos dez vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspetiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as arestas visíveis e as arestas invisíveis. Salienta-se que os pontos  $C$  e  $D$ , sendo dois vértices comuns ao cubo e ao prisma, não são, na realidade, vértices do sólido final.

De facto, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um cubo e um prisma quadrangular regular), as faces do objeto que resultam de duas faces coplanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso dos segmentos de reta  $[CC'']$ ,  $[DD'']$  e  $[CD]$ . De facto, os segmentos de reta  $[CC'']$ ,  $[DD'']$  e  $[CD]$  **não são** arestas do sólido, porque não resultam da interseção entre duas faces distintas (aqueles três segmentos de reta são, na prática, linhas auxiliares que estão contidas em determinadas faces do objeto e, por isso, não são arestas do sólido).

Sublinha-se que, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente «**um sólido composto**»), os segmentos  $[CC'']$ ,  $[DD'']$  e  $[CD]$  seriam três arestas comuns aos dois sólidos.

(continua na página seguinte)

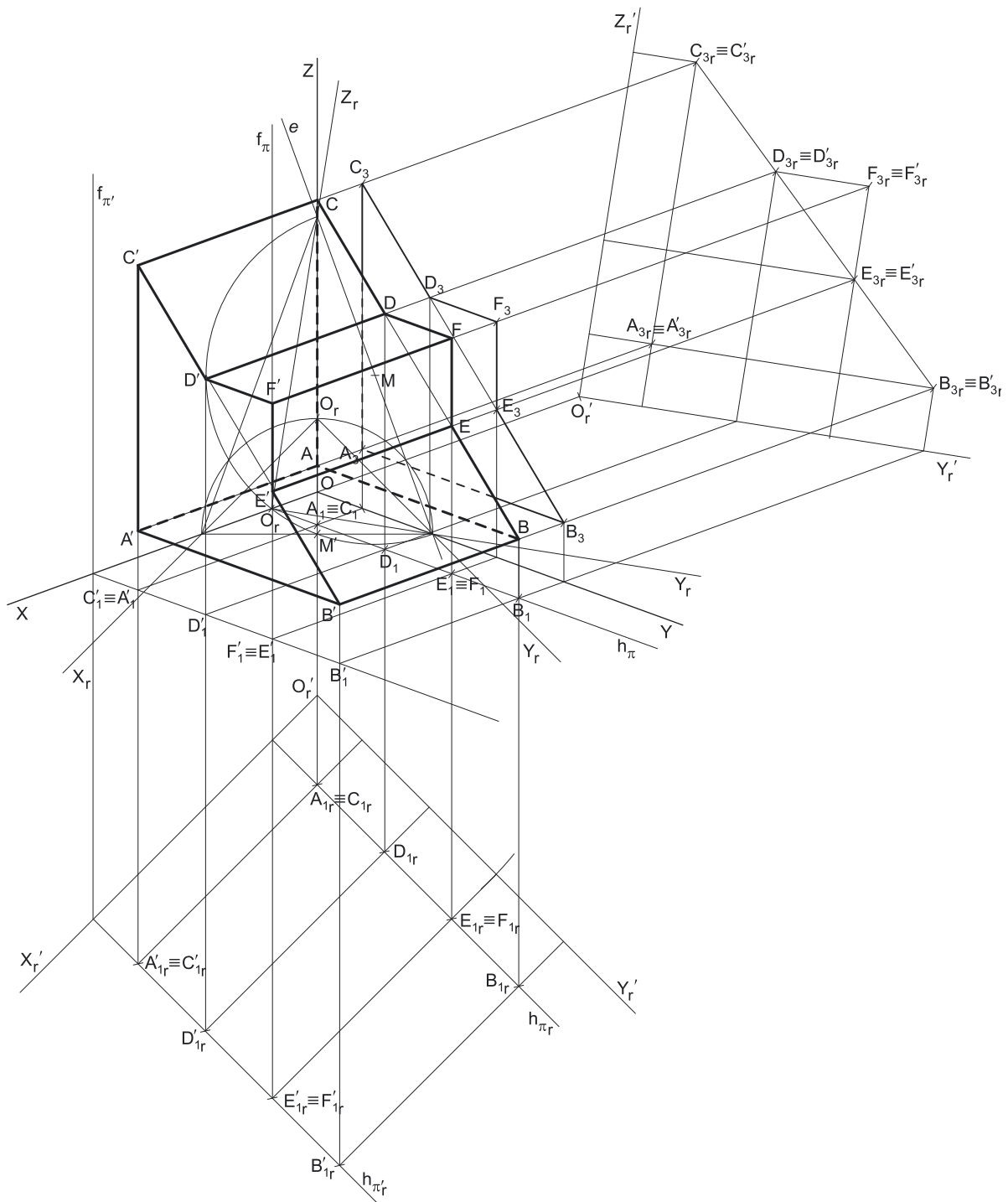
(continuação da página anterior)

Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções horizontais nem das projeções laterais dos vértices de qualquer dos sólidos (excepto dos vértices **A** e **A'**), por não serem necessárias. Nesse sentido, também não se representaram as perspectivas de qualquer das projeções do objeto final. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\varphi$  (o plano que contém a face de menor afastamento do cubo e a base de menor afastamento do prisma), o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de maior afastamento do prisma) e o plano  $\varphi''$  (o plano que contém a face de maior afastamento do cubo), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As perspectivas do sólido representaram-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado XZ*, da translação do plano **XZ** rebatido, da construção das projeções frontais dos dois sólidos em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, os traçados referentes ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, para a determinação das perspectivas dos afastamentos dos planos frontais (de frente).

1234.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. A perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $140^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y**, pelo que o ângulo restante é um ângulo de  $220^\circ$  ( $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ ). Note que não pode haver mais nenhum ângulo de  $140^\circ$ , pois, caso houvesse um outro ângulo de  $140^\circ$ , o terceiro ângulo seria um ângulo de  $80^\circ$  ( $220^\circ - 140^\circ = 80^\circ$ ), que é um **ângulo agudo**. Ora, os ângulos que as perspectivas dos eixos fazem, entre si são necessariamente **ângulos obtusos**.

Assim, conclui-se que não pode haver dois ângulos de  $140^\circ$ . No entanto, tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois dos ângulos que as perspectivas dos eixos fazem entre si são iguais. Assim, a soma dos dois ângulos iguais é  $220^\circ$  (o ângulo restante), pelo que a perspectiva do eixo **Z** faz ângulos de  $110^\circ$  ( $220^\circ : 2 = 110^\circ$ ) com as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**). Dessa forma, o eixo **Z** é o eixo que sofre a **redução isolada**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, **cujos vértices não se identificaram** para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações (recorde que as dimensões do *triângulo fundamental* são arbitrárias).

## Resolução:

As bases dos dois prismas estão contidas em planos de perfil e a aresta [DE] (da base de menor abscissa de um dos prismas) está contida na aresta [BC] (da base de menor abscissa do outro prisma), pelo que se depreende que as duas bases (o triângulo [ABC] e o triângulo [DEF] são coplanares (estão contidas no mesmo plano de perfil). O plano que contém os dois triângulos é um plano de perfil, que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que **os triângulos não se projetam em verdadeira grandeza** (as perspectivas dos triângulos não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que os triângulos estão contidos num plano paralelo ao *plano coordenado de perfil YZ*, sabe-se que os triângulos se projetam em verdadeira grandeza no *plano coordenado YZ* – o triângulo [ABC] e a sua projeção lateral são duas figuras geometricamente iguais, o mesmo acontecendo com o triângulo [DEF] e a sua projeção lateral. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual os triângulos se projetam em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado YZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

Por outro lado, dada a complexidade do sólido (formado pela justaposição de dois prismas triangulares retos), considera-se conveniente o recurso a rebatimento de dois *planos coordenados* distintos, de forma a ser possível representar previamente o sólido em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento. Nesse sentido, é aconselhável o recurso ao **método dos cortes**, em que, rebatendo dois *planos coordenados*, será possível representar o sólido pelas suas duas projeções.

### Rebatimento do plano coordenado YZ:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta suporte do lado do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo X.

O rebatimento do *plano coordenado YZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano YZ. Nesse sentido, determinou-se o ponto M, o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091, e respetivo **relatório**).

Em seguida, determinou-se  $O_r$  (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspectiva do eixo X). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo  $Y_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano YZ rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo X. O ponto  $O_r'$  é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

### Rebatimento do plano coordenado XY:

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta suporte do lado do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo Z.

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano XY. Nesse sentido, determinou-se o ponto M', o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091, e respetivo **relatório**).

Em seguida, determinou-se  $O_r$  (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspectiva do eixo Z). O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XY rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo Z. O ponto  $O_r'$  é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

### Construção da projeção lateral do sólido, em verdadeira grandeza:

No plano YZ rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representaram-se os **afastamentos** dos pontos B e C (11 cm e 2 cm, respetivamente). No plano YZ rebatido e transladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representaram-se as **cotas** dos pontos B e C (2 cm e 11 cm, respetivamente). A partir dos afastamentos e das cotas dos dois pontos, foi possível determinar as suas projeções laterais em rebatimento –  $B_{3r}$  e  $C_{3r}$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir de  $B_{3r}$  e de  $C_{3r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do triângulo [ABC]**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar a projeção lateral (em rebatimento) do terceiro vértice do polígono ( $A_{3r}$ ), de acordo com os dados – o ponto **A** é o vértice do ângulo reto, pois **[BC]** é a hipotenusa do triângulo. Assim, o lado **[AC]**, do triângulo, é vertical (o segmento  $[A_{3r}, C_{3r}]$  é paralelo ao eixo  $Z_r'$ ) e o lado **[AB]** do triângulo é de topo (o segmento  $[A_{3r}, B_{3r}]$  é paralelo ao eixo  $Y_r'$ ). O triângulo  $[A_{3r}, B_{3r}, C_{3r}]$  é a projeção lateral do triângulo **[ABC]**, em rebatimento (no rebatimento do plano **YZ**).

Em seguida, no plano **YZ** rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representou-se o **afastamento** do ponto **D** (5 cm) e determinou-se  $D_{3r}$  (a projeção lateral do ponto **D**, em rebatimento), sobre o segmento  $[B_{3r}, C_{3r}]$  (o ponto **D** é um ponto do segmento **[BC]**). No plano **YZ** rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representou-se a **cota** do ponto **E** (5 cm) e determinou-se  $E_{3r}$  (a projeção lateral do ponto **E**, em rebatimento), sobre o segmento  $[B_{3r}, C_{3r}]$  (o ponto **E** é outro ponto do segmento **[BC]**).

A partir de  $D_{3r}$  e de  $E_{3r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do triângulo [DEF]**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar a projeção lateral (em rebatimento) do terceiro vértice do polígono ( $F_{3r}$ ), de acordo com os dados – o ponto **F** é o vértice do ângulo reto, pois **[DE]** é a hipotenusa do triângulo. Assim, o lado **[EF]**, do triângulo, é vertical (o segmento  $[E_{3r}, F_{3r}]$  é paralelo ao eixo  $Z_r'$ ) e o lado **[DF]** do triângulo é de topo (o segmento  $[D_{3r}, F_{3r}]$  é paralelo ao eixo  $Y_r'$ ). O triângulo  $[D_{3r}, E_{3r}, F_{3r}]$  é a projeção lateral do triângulo **[DEF]**, em rebatimento (no rebatimento do plano **YZ**).

Note que se atendeu ao facto (expresso no enunciado) de que o ponto **F** tem cota superior a **E** e afastamento superior a **D**, o que nos garante que os dois prismas não se interpenetram.

Tendo em conta que o triângulo **[ABC]** é a face de menor abcissa de um prisma triangular reto, sabe-se que as arestas laterais do sólido são necessariamente fronto-horizontais (projetantes laterais), pelo que as projeções laterais dos vértices do triângulo **[A'B'C']** (a face de maior abcissa do prisma) estão coincidentes com as projeções laterais dos vértices da sua face de menor abcissa – tem-se, imediatamente,  $A'_{3r} \equiv A_{3r}$ ,  $B'_{3r} \equiv B_{3r}$  e  $C'_{3r} \equiv C_{3r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção lateral do primeiro prisma, em rebatimento (no plano **YZ** rebatido e trasladado).

Tendo em conta que o triângulo **[DEF]** é a base de menor abcissa do segundo prisma triangular reto, sabe-se que as arestas laterais do sólido são igualmente fronto-horizontais (projetantes laterais), pelo que as projeções laterais dos vértices do triângulo **[D'E'F']** (a base de maior abcissa do sólido) estão coincidentes com as projeções laterais dos vértices da sua base de menor abcissa – tem-se, imediatamente,  $D'_{3r} \equiv D_{3r}$ ,  $E'_{3r} \equiv E_{3r}$  e  $F'_{3r} \equiv F_{3r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção lateral do prisma, em rebatimento (no plano **YZ** rebatido e trasladado).

#### *Construção da projeção horizontal do sólido, em verdadeira grandeza:*

As bases de menor abcissa dos dois prismas estão contidas num mesmo plano de perfil  $\pi$  – um plano de perfil com 2 cm de abcissa (a abcissa dos pontos **B** e **C**, que é dada no enunciado). Isso permitiu-nos representar, no plano **XY** rebatido e trasladado, o traço horizontal do plano  $\pi$  em rebatimento ( $h_{\pi r}$ ) –  $h_{\pi r}$  é paralelo ao eixo  $Y_r'$  e dista 2 cm (a abcissa do plano  $\pi$ ) do eixo  $Y_r'$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (é ortogonal do plano **XY**), pelo que projeta no plano **XY** todas as suas retas e pontos, sobre o seu traço horizontal –  $h_{\pi r}$ . Assim, as projeções horizontais (em rebatimento) de todos os vértices dos triângulos **[ABC]** e **[DEF]**, porque pertencem ao plano  $\pi$ , situar-se-ão necessariamente sobre  $h_{\pi r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ , em rebatimento).

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as abscissas dos planos de perfil que contêm as bases. O primeiro prisma tem 8 cm de altura e a sua base de menor abcissa tem 2 cm de abcissa, pelo que o plano  $\pi'$  (o plano que contém a base de maior abcissa do prisma) tem necessariamente 10 cm de abcissa ( $2 + 8 = 10$ ). Por outro lado, atendendo a que as bases de maior abcissa dos dois prismas são complanares (como o enunciado refere expressamente), o plano  $\pi'$  contém, também, a base de maior abcissa do segundo prisma.

O raciocínio atrás exposto permitiu-nos representar, no plano **XY** rebatido e trasladado, o traço horizontal do plano  $\pi'$  em rebatimento ( $h_{\pi' r}$ ) –  $h_{\pi' r}$  é paralelo ao eixo  $Y_r'$  e dista 10 cm (a abcissa do plano  $\pi'$ ) do eixo  $Y_r'$ . O plano  $\pi'$  é outro plano projetante horizontal (é ortogonal do plano **XY**), pelo que projeta no plano **XY** todas as suas retas e pontos, sobre o seu traço horizontal –  $h_{\pi' r}$ . Assim, as projeções horizontais (em rebatimento) de todos os vértices dos triângulos **[A'B'C']** e **[D'E'F']**, porque pertencem ao plano  $\pi'$ , situar-se-ão necessariamente sobre  $h_{\pi' r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi'$ , em rebatimento).

Em seguida, no plano **YZ** rebatido e trasladado, determinou-se, sobre o eixo  $Y_r'$ , o afastamento dos pontos **E** e **E'**, para o que se conduziu, por  $E_{3r} \equiv E'_{3r}$  (as projeções laterais dos pontos **E** e **E'**, em rebatimento), uma paralela ao eixo  $Z_r'$  até ao eixo  $Y_r'$ . Com o compasso, transportou-se o afastamento dos pontos **E** e **E'**, do eixo  $Y_r'$  do rebatimento do plano **YZ** para o eixo  $Y_r'$  do rebatimento do plano **XY**.

Assim, no plano **XY** rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representaram-se os **afastamentos** de todos os vértices do sólido. A partir das abscissas dos planos  $\pi$  e  $\pi'$  e dos afastamentos de todos os vértices do sólido, foi possível determinar as respetivas projeções horizontais (em rebatimento) e, assim, concluir a construção da projeção horizontal do sólido (em rebatimento, no plano **XY** rebatido e trasladado).

#### *Determinação da perspetiva do sólido:*

Em primeiro lugar, transportaram-se, para a perspetiva do eixo **X**, as perspetivas das abscissas dos planos  $\pi$  e  $\pi'$ , o que nos permitiu representar os dois planos pelos respetivos traços.

Para inverter o rebatimento do ponto **A** (por exemplo), a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção lateral), conduziu-se, por  $A_{3r}$  (a projeção lateral do ponto **A**, em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e**) e, por  $A_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto **A**, em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e'**) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**. Note que se determinou, também, a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A** ( $A_1$ ), que se situa sobre a perspetiva do traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_{\pi}$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento dos outros vértices do sólido, bem como a determinação das respetivas perspetivas, processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **A**. Note que não se representaram as perspetivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais de qualquer dos vértices do sólido, pois, na realidade, são absolutamente desnecessárias para a concretização do pedido (a perspetiva do sólido). Por outro lado, apesar de se terem representado as perspetivas das projeções horizontais dos vértices do sólido, salienta-se que estas também não são fundamentais à resolução do exercício e, por isso, poderiam ter sido omitidas.

Por fim, a partir das perspetivas dos doze vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspetiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as arestas visíveis e as arestas invisíveis.

Salienta-se que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – dois prismas triangulares retos), as faces do objeto que resultam de duas faces coplanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso dos segmentos de reta **[DE]** e **[D'E']**. De facto, os segmentos de reta **[DE]** e **[D'E']** **não são** arestas do sólido, porque não resultam da interseção entre duas faces distintas (aqueles segmentos são, apenas, linhas auxiliares que estão contidas em determinadas faces do objeto e, por isso, não são arestas do sólido).

Sublinha-se que, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente «**um sólido composto**»), os segmentos de reta **[DE]** e **[D'E']** seriam partes comuns a duas arestas colineares dos dois sólidos.

### Traçado:

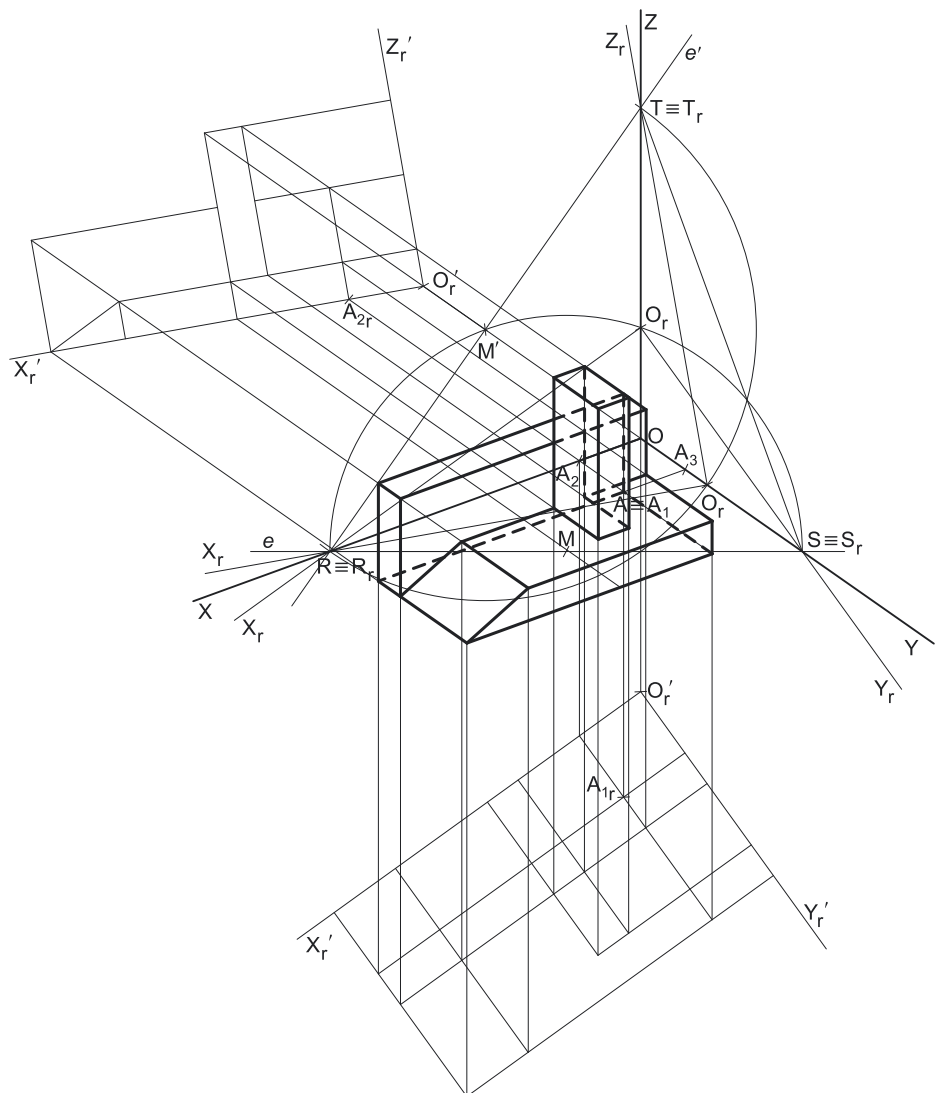
As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva do sólido representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). Os planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos de perfil que contêm as bases do sólido), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos respetivos traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso dos rebatimentos do *plano coordenado XY* e do *plano coordenado YZ*, das translações dos *planos coordenados* rebatidos, da construção das projeções horizontal e lateral do sólido em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos e construir a perspetiva do sólido.

## 1235.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que o eixo **Y** é o eixo que sofre uma **redução isolada** (como o enunciado refere expressamente), a perspetiva do eixo **Y** faz ângulos iguais com as perspetivas dos outros dois eixos. Assim, uma vez que a perspetiva do eixo **Y** faz um ângulo de  $125^\circ$  com a perspetiva do eixo **X** (é dado no enunciado), a perspetiva do eixo **Y** faz, igualmente, um ângulo de  $125^\circ$  com a perspetiva do eixo **Z**, o que perfaz um total de  $250^\circ$  ( $125^\circ + 125^\circ = 250^\circ$ ). Assim, as perspetivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $110^\circ$ , que é o ângulo restante ( $360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Resolução:

São dadas duas vistas do objeto (as suas projeções horizontal e frontal), sendo que o objeto assenta, pela sua face inferior, no *plano coordenado XY*, pelo que se depreende que o objeto tem as suas arestas paralelas aos *eixos coordenados*. Os planos que contêm qualquer das projeções fornecidas (o *plano coordenado horizontal* e o *plano coordenado frontal*) não são paralelos ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das projeções do objeto se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Nesta situação, é conveniente representar o objeto dado por duas das suas projeções, pelo menos, o que significa ter de rebater dois dos três *planos coordenados*. Tendo em conta que são dadas, apenas, as projeções horizontal e frontal do objeto, é conveniente representar previamente o objeto pelas suas projeções horizontal e frontal (em Dupla Projeção Ortogonal), pelo que é necessário recorrer ao **rebatimento dos planos coordenados** – o rebatimento do *plano coordenado horizontal* (o plano **XY**) e o rebatimento do *plano coordenado frontal* (o plano **XZ**).

O **rebatimento dos planos coordenados** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Destes dois processos, o mais eficaz (com vista à representação prévia do objeto por duas das suas projeções) é, inquestionavelmente, o **método dos cortes**.

#### Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspetiva do eixo **Y**). Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **1091**. e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspetiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspetiva do eixo **Z**) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Y<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>**. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**.

#### Rebatimento do plano coordenado XZ:

Para efetuar o rebatimento do plano **XZ**, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é o lado **[RT]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspetiva do eixo **Y**). Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O rebatimento do *plano coordenado XZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M'**, o ponto médio do lado **[RT]** do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **1091**. e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspetiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspetiva do eixo **Y**) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **R<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **T<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Z<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo **Y**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>**. O eixo **Z<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Z<sub>r</sub>**.

#### Representação do objeto pelas suas projeções horizontal e frontal, em rebatimento:

No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo **X<sub>r</sub>'**, representou-se a **abscissa** do ponto **A** (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O<sub>r</sub>'**). No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>'**, representou-se o **afastamento** do ponto **A** (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O<sub>r</sub>'**). A partir da abscissa e do afastamento do ponto **A** foi possível representar, de imediato, **A<sub>1r</sub>**, que é a projeção horizontal do ponto **A**, em rebatimento.

Tendo em conta que, a partir das projeções fornecidas, é possível contactar que o objeto tem as suas arestas paralelas aos *eixos coordenados*, a partir de **A<sub>1r</sub>**, reproduziu-se a projeção horizontal fornecida do objeto, com as suas arestas paralelas ao eixo **X<sub>r</sub>'** e ao eixo **Y<sub>r</sub>'**.

No plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **X<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **A** (2 cm, em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, **A<sub>2r</sub>**, que é a projeção frontal do ponto **A**, em rebatimento – **A<sub>2r</sub>** situa-se no eixo **X<sub>r</sub>'**, pois o ponto **A** tem cota nula.

Tendo em conta que o objeto tem as suas arestas paralelas aos *eixos coordenados*, a partir de **A<sub>2r</sub>**, reproduziu-se a projeção frontal fornecida do objeto, com as suas arestas paralelas ao eixo **X<sub>r</sub>'** e ao eixo **Z<sub>r</sub>'**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação da perspectiva do objeto:

Para inverter o rebatimento do ponto **A** (por exemplo), a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção frontal), conduziu-se, por **A<sub>1r</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**, em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e**) e, por **A<sub>2r</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**, em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e'**) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**.

Por fim, determinaram-se as restantes perspectivas do ponto **A** – o ponto **A** é um ponto do plano **XY** (pois tem cota nula), pelo que se tem imediatamente **A<sub>1</sub> ≡ A** (sendo **A<sub>1</sub>** a perspectiva da sua projeção horizontal). **A<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**) situa-se na perspectiva do eixo **X** e **A<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**) situa-se na perspectiva do eixo **Y**.

A inversão do rebatimento dos restantes vértices do sólido, bem como a determinação das respetivas perspectivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **A**. Note que não se representaram as perspectivas de nenhuma das projeções de qualquer dos pontos (projeção horizontal, projeção frontal e projeção lateral) pois, na realidade, não são necessárias.

Por fim, a partir das perspectivas da totalidade dos vértices do sólido, desenhou-se a sua perspectiva, atendendo às invisibilidades. Note que apenas existem arestas a separar faces distintas – tendo em conta que uma aresta é o segmento de reta segundo o qual se interseccionam duas faces distintas (que estão contidas em planos distintos), na superfície de uma única face, porque está contida num único plano, não existe qualquer aresta “no meio” da face.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do sólido representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso dos rebatimentos do *plano coordenado XY* e do *plano coordenado XZ*, das translações dos *planos coordenados* rebatidos, da construção das projeções horizontal e frontal do objeto em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter o rebatimento e determinar a perspectiva do objeto.

(continua na página seguinte)

## 1236.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo  $X$  faz um ângulo de  $105^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Y$  e um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Z$ , as perspectivas destes dois eixos (o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ ) fazem, entre si, um ângulo de  $135^\circ$ , que é o ângulo restante ( $105^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (um plano horizontal) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o triângulo  $[ABC]$  **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao *plano coordenado horizontal* (o plano  $XY$ ), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado  $XY$*  – o triângulo  $[ABC]$  e a sua projeção horizontal (a sua projeção no *plano coordenado  $XY$* ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado  $XY$**  (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado  $XY$*  pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

*Rebatimento do plano coordenado  $XY$ :*

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado  $XY$* ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado  $[RS]$  do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo  $Z$ ). Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O rebatimento do *plano coordenado  $XY$*  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano  $XY$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do lado  $[RS]$  do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

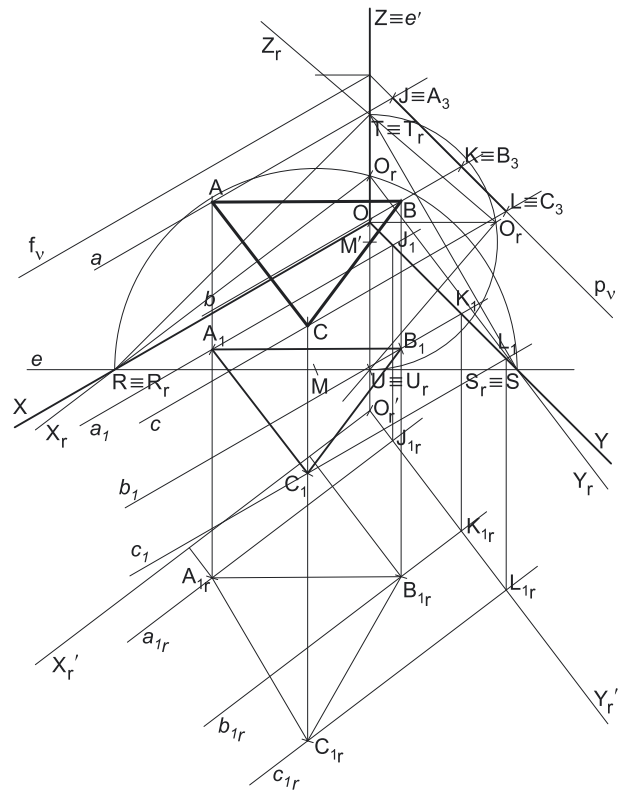
Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

*Construção da projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza:*

No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos  $A$  e  $B$ , em verdadeira grandeza (6 cm e 2 cm, respetivamente). Em seguida, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos  $A$  e  $B$ , em verdadeira grandeza (1 cm e 4 cm, respetivamente). A partir das abscissas e dos afastamentos dos pontos  $A$  e  $B$ , em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $B$ , em rebatimento ( $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , respetivamente).

A partir de  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do triângulo**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{1r}$  (a projeção horizontal do terceiro vértice do triângulo, em rebatimento) – o triângulo  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}]$  é a projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do triângulo  $[ABC]$  é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a figura.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém o triângulo [ABC]:*

Para tal, é necessário determinar a perspectiva da cota do plano  $v$  (o plano horizontal que contém o polígono), que se mede sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo  $Z$  sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo  $Z$ , para determinar a perspectiva da cota do plano  $v$ .

O rebatimento do eixo  $Z$  pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo  $Z$ , o **rebatimento dos planos coordenados** (um *plano coordenado* que contenha o eixo  $Z$ ) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo  $Z$ .

Nesse sentido, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a perspectiva do eixo  $Z$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto  $O$  e cuja hipotenusa está contida na perspectiva do eixo  $Z$  – esse triângulo é, na presente situação, o triângulo [TOU] (sendo  $U$  o ponto em que o plano projetante do eixo  $Z$  corta o lado [RS] do *triângulo fundamental*). Nesse sentido, pontos  $T$  e  $U$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

Em seguida, determinou-se o ponto  $M'$  (o ponto médio do segmento [TU], que é a hipotenusa do triângulo retângulo [TOU]) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033. e respetivo relatório).

Depois, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (a reta  $e'$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é um ponto fixo. A reta definida por  $O_r$  e por  $U_r$  é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Z$  com o plano coordenado  $XY$  (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo  $Z_r$  é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto  $O_r$ .

Em seguida, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 6 cm (a cota do plano  $v$ , que é a cota dos pontos  $A$  e  $B$ , dada no enunciado) e determinou-se um ponto, que não se identificou. Esse ponto é o ponto do eixo  $Z$  que tem 6 cm de cota. Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o triângulo [ABC] contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizantal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação da perspectiva do triângulo [ABC]:*

Para inverter o rebatimento do ponto  $A$  recorreu-se a uma reta  $a$ , que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo  $X$  – a reta  $a_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $a$ , em rebatimento, passa por  $A_{1r}$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta  $a$  está definida por um ponto e por uma direção). A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $J_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $a$  que tem abcissa nula). Por  $J_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $J$  é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $J$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $a$ , que é o ponto  $J$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $a$  é paralela ao eixo  $X$ , pelo que, em perspectiva, a reta  $a$  é paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $a$ . A reta  $a$  está definida por um ponto (o ponto  $J$ ) e por uma direção (a direção do eixo  $X$ ), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta  $a$  –  $a_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ), que passa por  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) e é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , que passa por  $J$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ ) e é paralela à perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $A_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ), sobre  $a_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , na mesma perpendicular à charneira.

Para inverter o rebatimento do ponto  $B$  recorreu-se a uma reta  $b$ , que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo  $X$  – a reta  $b_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $b$ , em rebatimento, passa por  $B_{1r}$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta  $b$  está definida por um ponto e por uma direção). A reta  $b_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $K_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $b$  que tem abcissa nula). Por  $K_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $K$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $K$ . A reta  $b$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $K$  é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $K$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $b$ , que é o ponto  $K$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $b$  é paralela ao eixo  $X$ , pelo que, em perspectiva, a reta  $b$  é paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ . A reta  $b$  está definida por um ponto (o ponto  $K$ ) e por uma direção (a direção do eixo  $X$ ), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta  $b$  –  $b_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$ ), que passa por  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $K$ ) e é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , que passa por  $K$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $K$ ) e é paralela à perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, conduziu-se, por  $B_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ), sobre  $b_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira.

Para inverter o rebatimento do ponto  $C$  recorreu-se a uma reta  $c$ , que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo  $X$  – a reta  $c_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $c$ , em rebatimento, passa por  $C_{1r}$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta  $c$  está definida por um ponto e por uma direção). A reta  $c_{1r}$  intersecta o eixo  $Y_r'$  no ponto  $L_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $c$  que tem abcissa nula). Por  $L_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $L$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $L$ . A reta  $c$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $L$  é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $L$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $L_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $c$ , que é o ponto  $L$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $c$  é paralela ao eixo  $X$ , pelo que, em perspectiva, a reta  $c$  é paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $c$ . A reta  $c$  está definida por um ponto (o ponto  $L$ ) e por uma direção (a direção do eixo  $X$ ), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta  $c$  –  $c_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $c$ ), que passa por  $L_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $L$ ) e é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ , que passa por  $L$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $L$ ) e é paralela à perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ), sobre  $c_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $c$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ , na mesma perpendicular à charneira.

A partir das perspectivas dos três vértices do polígono, desenhou-se a perspectiva do triângulo  $[ABC]$ , identificando-se, ainda, as perspectivas das projeções laterais dos três vértices do polígono que, na realidade, estão coincidentes com os traços laterais das retas que nos permitiram determinar as suas perspectivas. Assim, tem-se  $A_3 \equiv J$ ,  $B_3 \equiv K$  e  $C_3 \equiv L$ . Note que não se representaram as perspectivas das projeções frontais dos vértices do triângulo, por não serem absolutamente necessárias à resolução do exercício. Na realidade, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido regularmente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o triângulo, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

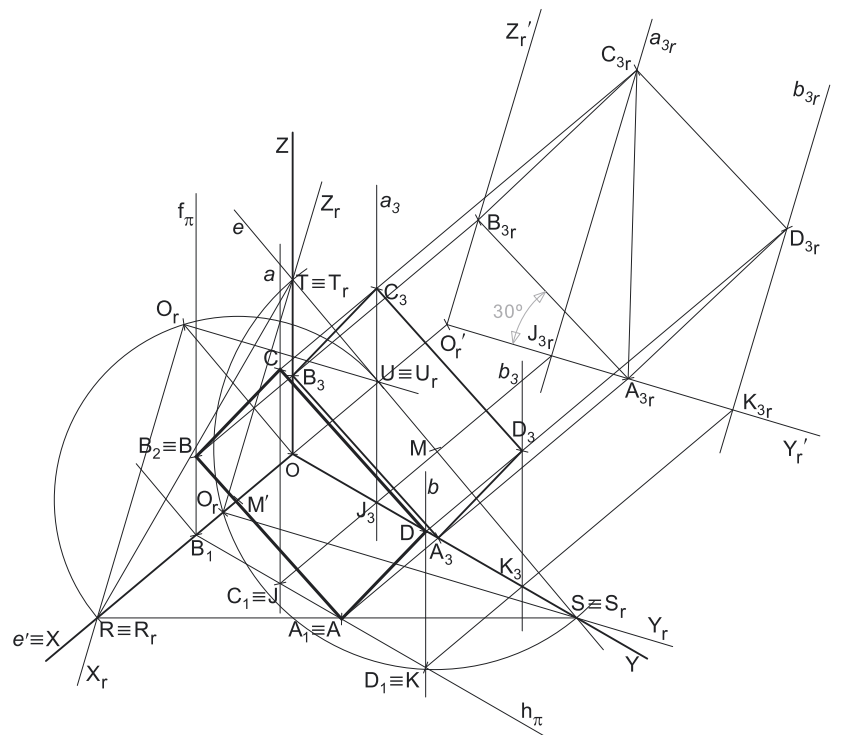
As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano horizontal que contém o triângulo), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano *coordenado XY*, da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção da projeção horizontal do triângulo em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento, das perpendiculares à charneira e, ainda, do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ .

## 1237.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo  $X$  faz um ângulo de  $110^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Y$  e um ângulo de  $130^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Z$ , as perspectivas destes dois eixos (o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ ) fazem, entre si, um ângulo de  $120^\circ$ , que é o ângulo restante ( $110^\circ + 130^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo  $[RST]$ , que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo  $[RST]$  são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (um plano de perfil) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza (a perspetiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano de perfil, que é paralelo ao plano coordenado de perfil (o plano **YZ**), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado **YZ** – o quadrado **[ABCD]** e a sua projeção lateral (a sua projeção no plano coordenado **YZ**) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado **YZ** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

### Rebatimento do plano coordenado YZ:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **YZ**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[ST]** do triângulo fundamental (o lado que se opõe à perspetiva do eixo **X**). Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

O rebatimento do plano coordenado **YZ** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano **YZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[ST]** do triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, conduziu-se, pela perspetiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspetiva do eixo **X**) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **T<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** e o eixo **Z<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo **X**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**. O eixo **Z<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Z<sub>r</sub>**.

### Construção da projeção lateral do quadrado [ABCD], em verdadeira grandeza:

No plano **YZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representou-se o afastamento do ponto **A**, em verdadeira grandeza (4 cm). Tendo em conta que o ponto **A** tem cota nula, foi possível determinar, de imediato, a projeção lateral do ponto **A**, em rebatimento (**A<sub>3r</sub>**), que se situa no eixo **Y<sub>r</sub>'**.

O quadrado está contido num plano de perfil, pelo que o lado **[AB]**, do quadrado, está contido numa reta de perfil. Assim, o ângulo que o lado **[AB]** faz com o plano **XY** está contido no plano de perfil que contém o próprio quadrado e projeta-se em verdadeira grandeza no plano coordenado **YZ**. Uma vez que o quadrado está em verdadeira grandeza (porque está no plano **YZ** rebatido), a verdadeira grandeza do ângulo está no ângulo que o segmento **[A<sub>3r</sub>B<sub>3r</sub>]** fará com o eixo **Y<sub>r</sub>'**. Assim, foi possível, em verdadeira grandeza, medir o ângulo de 30° que o lado **[AB]** faz com o eixo **Y** e desenhar a reta suporte (em rebatimento) do lado **[AB]**. Uma vez que o ponto **B** tem afastamento nulo (como o enunciado refere expressamente), o ponto **B** é um ponto do plano **XZ**, pelo que a sua projeção lateral se situa no eixo **Z**. Assim, determinou-se **B<sub>3r</sub>**, (a projeção lateral do ponto **B**, em rebatimento), que é o ponto em que a reta suporte do segmento **[A<sub>3r</sub>B<sub>3r</sub>]** interseca o eixo **Z<sub>r</sub>'**.

Note que das duas hipóteses de medir o ângulo de 30°, a partir de **A<sub>3r</sub>**, (a projeção lateral do ponto **A**, em rebatimento), apenas a que a resolução apresenta consegue garantir que o ponto **B** tem afastamento nulo e nos permite que o quadrado (a construção posterior) se situe no espaço do 1.º Triedro.

A partir de **A<sub>3r</sub>** e **B<sub>3r</sub>**, foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano **YZ**), o que nos permitiu determinar as projeções laterais dos outros dois vértices do polígono – **C<sub>3r</sub>** e **D<sub>3r</sub>**. Note que se garantiu, na construção da figura, que o quadrado se situa no espaço do 1.º Triedro. O quadrado **[A<sub>3r</sub>B<sub>3r</sub>C<sub>3r</sub>D<sub>3r</sub>]** é a projeção lateral do quadrado **[ABCD]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspetiva do quadrado **[ABCD]** é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $\pi$ , o plano de perfil que contém a figura.

### Representação do plano de perfil que contém o quadrado [ABCD]:

Para tal, é necessário determinar a perspetiva da abscissa do plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém o polígono), que se mede sobre a perspetiva do eixo **X**. Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo **X** sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo **X**, para determinar a perspetiva da abscissa do plano  $\pi$ .

O rebatimento do eixo **X** pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo **X**, o **rebatimento dos planos coordenados** (um plano coordenado que contenha o eixo **X**) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo **X**.

Nesse sentido, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta **e'**), que é a perspetiva do eixo **X**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto **O** e cuja hipotenusa está contida na perspetiva do eixo **X** – esse triângulo é, na presente situação, o triângulo **[ROU]** (sendo **U** o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[ST]** do triângulo fundamental). Nesse sentido, pontos **R** e **U** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $U_r \equiv U$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se o ponto  $M'$  (o ponto médio do segmento  $[RU]$ , que é a hipotenusa do triângulo retângulo  $[ROU]$ ) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033. e respetivo relatório).

Depois, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (a reta  $e'$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. A reta definida por  $O_r$  e por  $U_r$  é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo  $X$  com o plano coordenado  $YZ$  (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo  $X_r$  é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto  $O_r$ .

Em seguida, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 4 cm (a abcissa do plano  $\pi$ , que é a abcissa do ponto  $A$ , dada no enunciado) e determinou-se um ponto, que não se identificou. Esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo  $X$  que tem 4 cm de abcissa. Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo  $X$ . O plano de perfil  $\pi$  que contém o quadrado  $[ABCD]$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi - f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ) e  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ). Note que  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ . Pelo seu lado,  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$ , com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante horizontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ).

*Determinação da perspectiva do quadrado  $[ABCD]$ :*

O ponto  $A$  pertence ao plano  $\pi$  e é um ponto com cota nula, pelo que o ponto  $A$  é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ). Assim, por  $A_{3r}$  (a projeção lateral do ponto  $A$ , em rebatimento) conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e$ ) e determinou-se  $A_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , determinando-se, ainda, a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$  sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). Por outro lado, atendendo a que o ponto  $A$  é um ponto do plano  $XY$  (porque tem cota nula), o ponto  $A$  está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho – tem-se, imediatamente,  $A_1 \equiv A$ .

O ponto  $B$  pertence ao plano  $\pi$  e é um ponto com afastamento nulo, pelo que o ponto  $B$  é necessariamente um ponto do traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ). Assim, por  $B_{3r}$  (a projeção lateral do ponto  $B$ , em rebatimento) conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e$ ) e determinou-se  $B_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $B$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , determinando-se, ainda, a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$  sobre a perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ). Por outro lado, atendendo a que o ponto  $B$  é um ponto do plano  $XZ$  (porque tem afastamento nulo), o ponto  $B$  está coincidente com a sua projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho – tem-se, imediatamente,  $B_2 \equiv B$ .

Para inverter o rebatimento do ponto  $C$  recorreu-se a uma reta  $a$ , que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo  $Z$  – a reta  $a_{3r}$  é a projeção lateral da reta  $a$ , em rebatimento, passa por  $C_{3r}$  e é paralela ao eixo  $Z_r'$  (a reta  $a$  está definida por um ponto e por uma direção). A reta  $a_{3r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $J_{3r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta  $a$  que tem cota nula). Por  $J_{3r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $J$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto  $J$  é um ponto de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $J$  situa-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{3r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $a$ , que é o ponto  $J$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $a$  é paralela ao eixo  $Z$ , pelo que, em perspectiva, a reta  $a$  é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $a$ . A reta  $a$  está definida por um ponto (o ponto  $J$ ) e por uma direção (a direção do eixo  $X$ ), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta  $a - a_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta  $a$ ), que passa por  $J_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $J$ ) e é paralela à perspectiva do eixo  $Z$  e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , que passa por  $J$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ ) e é paralela à perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_{3r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C$ ), sobre  $a_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , na mesma perpendicular à charneira.

Para inverter o rebatimento do ponto  $D$  recorreu-se a uma reta  $b$ , que contém aquele ponto e que é paralela ao eixo  $Z$  – a reta  $b_{3r}$  é a projeção lateral da reta  $b$ , em rebatimento, passa por  $D_{3r}$  e é paralela ao eixo  $Z_r'$  (a reta  $b$  está definida por um ponto e por uma direção). A reta  $b_{3r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $K_{3r}$  (que é a projeção lateral do ponto da reta  $b$  que tem cota nula). Por  $K_{3r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $K$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $K$ . A reta  $b$  é uma reta do plano  $\pi$ , pelo que o ponto  $K$  é um ponto de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $K$  situa-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_{3r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $b$ , que é o ponto  $K$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $b$  é paralela ao eixo  $Z$ , pelo que, em perspectiva, a reta  $b$  é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ . A reta  $b$  está definida por um ponto (o ponto  $K$ ) e por uma direção (a direção do eixo  $Z$ ), o que nos permitiu desenhar as perspectivas da reta  $b - b_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta  $b$ ), que passa por  $K_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $K$ ) e é paralela à perspectiva do eixo  $Z$  e, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , que passa por  $K$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $K$ ) e é paralela à perspectiva de  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, conduziu-se, por  $D_{3r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $D_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **D**), sobre  $b_3$  (a perspectiva da projeção lateral da reta **b**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **D** sobre a perspectiva propriamente dita da reta **b**, na mesma perpendicular à charneira.

A partir das perspectivas dos quatro vértices do polígono, desenhou-se a perspectiva do quadrado **[ABCD]**, identificando-se, ainda, as perspectivas das projeções horizontais dos vértices **C** e **D** do polígono que, na realidade, estão coincidentes com os traços horizontais das retas que nos permitiram determinar as suas perspectivas. Assim, tem-se  $C_1 \equiv J$  e  $D_1 \equiv K$ . Note que não se representaram as perspectivas das projeções frontais dos vértices do quadrado (excetuando o ponto **B**), por não serem absolutamente necessárias à resolução do exercício. Na realidade, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido regularmente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o quadrado, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do quadrado representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém o quadrado), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e horizontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado **YZ**, da translação do plano **YZ** rebatido, da construção da projeção lateral do quadrado em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento, das perpendiculares à charneira e, ainda, do rebatimento do plano projetante do eixo **X**.

## 1238.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de  $130^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de  $110^\circ$ , que é o ângulo restante ( $120^\circ + 130^\circ + 110^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

### Resolução:

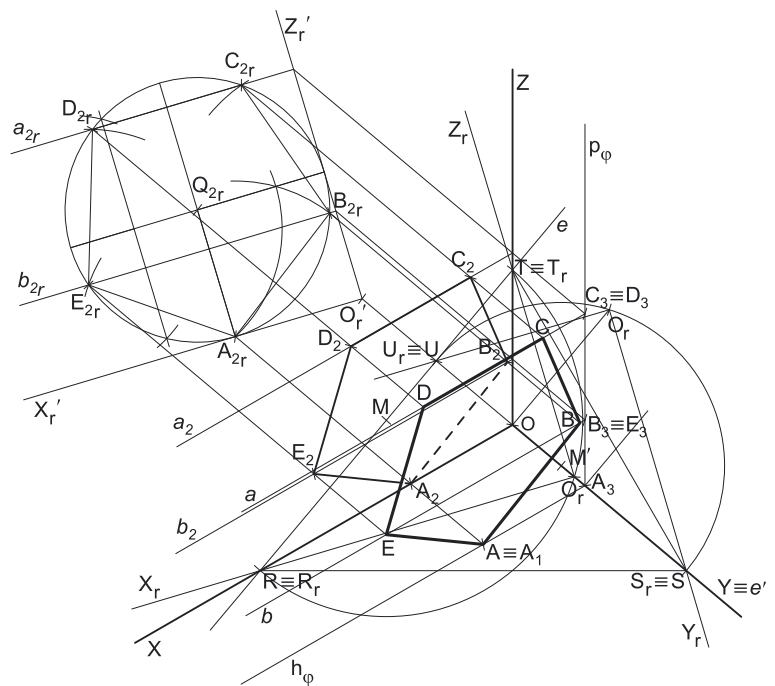
O plano que contém o pentágono **[ABCDE]** (um plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o pentágono **[ABCDE]** não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do pentágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o pentágono está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao plano coordenado frontal (o plano **XZ**), sabe-se que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado **XZ** – o pentágono **[ABCDE]** e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado **XZ**) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o pentágono se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado **XZ** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

#### Rebatimento do plano coordenado **XZ**:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XZ**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[RT]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **R** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O rebatimento do plano coordenado  $XZ$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano  $XZ$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do lado  $[RT]$  do triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

*Construção da projeção frontal do pentágono  $[ABCDE]$ , em verdadeira grandeza:*

O enunciado refere, expressamente, que a circunferência circunscrita ao pentágono é tangente ao plano  $XY$  e ao plano  $YZ$ . Assim, o ponto  $Q$  (o centro da circunferência circunscrita ao pentágono) tem necessariamente 3,5 cm de **abscissa** (a distância do ponto  $Q$  ao plano  $YZ$  é igual ao raio da circunferência) e 3,5 cm de **cota** (a distância do ponto  $Q$  ao plano  $XY$  é igual ao raio da circunferência).

Assim, no plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $Q$  em verdadeira grandeza (3,5 cm). Em seguida, no plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto  $Q$  em verdadeira grandeza (3,5 cm). A partir da abscissa e da cota do ponto  $Q$ , em verdadeira grandeza, foi possível determinar a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento ( $Q_{2r}$ ).

Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento), e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal (em rebatimento) da circunferência em que o pentágono se inscreve – essa circunferência é necessariamente tangente ao eixo  $X_r'$  e ao eixo  $Z_r'$ . Tendo em conta que o ponto  $A$  tem cota nula (como o enunciado refere expressamente), o ponto  $A$  é necessariamente o ponto em que a circunferência é tangente ao plano  $XY$  (o ponto da circunferência que pertence ao plano  $XY$ ). Nesse sentido, determinou-se  $A_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $A$ , em rebatimento), que é o ponto em que a circunferência é tangente ao eixo  $X_r'$ .

Por fim, a partir de  $A_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $A$ , em rebatimento), efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu concluir a construção da **projeção frontal do pentágono**, em verdadeira grandeza e, dessa forma, determinar os restantes quatro vértices do polígono (em rebatimento) – o pentágono  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}E_{2r}]$  é a projeção frontal do pentágono  $[ABCDE]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XZ$ .

Para determinar a perspectiva do pentágono  $[ABCDE]$  é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $\phi$ , o plano frontal (de frente) que contém a figura.

*Representação do plano frontal (de frente) que contém o pentágono  $[ABCDE]$ :*

Para tal, é necessário determinar a perspectiva do afastamento do plano  $\phi$  (o plano frontal que contém o polígono), que se mede sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo  $Y$  sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo  $Y$ , para determinar a perspectiva do afastamento do plano  $\phi$ .

O rebatimento do eixo  $Y$  pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo  $Y$ , o **rebatimento dos planos coordenados** (um plano coordenado que contenha o eixo  $Y$ ) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo  $Y$ .

Nesse sentido, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a perspectiva do eixo  $Y$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto  $O$  e cuja hipotenusa está contida na perspectiva do eixo  $Y$  – esse triângulo é, na presente situação, o triângulo  $[SOU]$  (sendo  $U$  o ponto em que o plano projetante do eixo  $Y$  corta o lado  $[RT]$  do triângulo fundamental). Nesse sentido, pontos  $S$  e  $U$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $U_r \equiv U$ .

Em seguida, determinou-se o ponto  $M'$  (o ponto médio do segmento  $[SU]$ , que é a hipotenusa do triângulo retângulo  $[SOU]$ ) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033. e respetivo relatório).

Depois, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (a reta  $e'$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é um ponto fixo. A reta definida por  $O_r$  e por  $U_r$  é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Y$  com o plano coordenado  $XZ$  (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo  $Y_r$  é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto  $O_r$ .

Em seguida, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 3 cm (o afastamento do plano  $\phi$ , dado no enunciado) e determinou-se um ponto, que não se identificou. Esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Y$  que tem 3 cm de afastamento. Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . O plano frontal (de frente)  $\phi$  que contém o pentágono  $[ABCDE]$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\phi$  –  $h_\phi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ) e  $p_\phi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\phi$ ). Note que  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\phi$ , com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ) é uma reta vertical do plano  $\phi$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

### Determinação da perspetiva do pentágono [ABCDE]:

O ponto **A** pertence ao plano  $\varphi$  e é um ponto com cota nula, pelo que o ponto **A** é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ). Assim, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto **A**, em rebatimento) conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta **e**) e determinou-se  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**) sobre a perspetiva do eixo **X**, determinando-se, ainda, a perspetiva propriamente dita do ponto **A** sobre a perspetiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ). Por outro lado, atendendo a que o ponto **A** é um ponto do plano  $XY$  (porque tem cota nula), o ponto **A** está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho – tem-se, imediatamente,  $A_1 \equiv A$ . A projeção lateral do ponto **A** situa-se no eixo **Y**, pois o ponto **A** tem cota nula (é um ponto do plano  $XY$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos **C** e **D** recorreu-se a uma reta **a**, pertencente ao plano  $\varphi$  e que contém aqueles dois pontos – a reta **a** é paralela ao eixo **X** (a reta **a** é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, a reta  $a_2$  é a projeção frontal da reta **a**, em rebatimento, passa por  $C_2$  e por  $D_2$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta **a** está definida por dois pontos e por uma direção.). A reta  $a_2$  interseca o eixo  $Z_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção frontal do traço lateral da reta). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva desse ponto, sobre a perspetiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva da reta **a**. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta **a** é paralela ao eixo **X** (e ao traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pelo que, em perspetiva, a reta **a** é paralela à perspetiva de  $h_\varphi$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a perspetiva da reta **a**, que está definida por um ponto (o seu traço lateral, que não se identificou e se situa sobre  $p_\varphi$ ) e por uma direção (a direção de  $h_\varphi$ ), o que nos permitiu desenhar a perspetiva da reta **a**.

Pelo ponto em que a perpendicular à charneira (que nos permitiu inverter o rebatimento) interseca a perspetiva do eixo **Z**, conduziu-se uma reta paralela à perspetiva do eixo **X** – essa reta é  $a_2$ , a perspetiva da projeção frontal da reta **a**.

Por fim, conduziram-se, por  $C_2$  e  $D_2$ , as perpendiculares à charneira que por eles passam e determinaram-se  $C_2$  e  $D_2$  (as perspetivas das projeções frontais dos pontos **C** e **D**, respetivamente), sobre  $a_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta **a**) e, ainda, as perspetivas propriamente ditas daqueles dois pontos (**C** e **D**) sobre a perspetiva propriamente dita da reta **a**. A reta **a** é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ , pelo que é uma reta projetante lateral. Nesse sentido, os pontos **C** e **D**, porque se situam na mesma reta projetante lateral (a reta **a**), têm as suas projeções laterais coincidentes, o que se assinalou devidamente no desenho –  $C_3 \equiv D_3$ . Note ainda que o ponto em que se situam as projeções laterais dos dois pontos é, na realidade, o traço lateral da reta **a**.

Para inverter o rebatimento dos pontos **B** e **E** recorreu-se a uma reta **b**, pertencente ao plano  $\varphi$  e que contém aqueles dois pontos – a reta **b** é paralela ao eixo **X** (a reta **b** é outra reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, a reta  $b_2$  é a projeção frontal da reta **b**, em rebatimento, passa por  $B_2$  e por  $E_2$  e é paralela ao eixo  $X_r'$  (a reta **b** está definida por dois pontos e por uma direção.). A reta  $b_2$  interseca o eixo  $Z_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção frontal do traço lateral da reta). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva desse ponto, sobre a perspetiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva da reta **b**. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta **b** é paralela ao eixo **X** (e ao traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pelo que, em perspetiva, a reta **b** é paralela à perspetiva de  $h_\varphi$ . Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a perspetiva da reta **b**, que está definida por um ponto (o seu traço lateral, que não se identificou e se situa sobre  $p_\varphi$ ) e por uma direção (a direção de  $h_\varphi$ ), o que nos permitiu desenhar a perspetiva da reta **b**.

Pelo ponto em que a perpendicular à charneira (que nos permitiu inverter o rebatimento) interseca a perspetiva do eixo **Z**, conduziu-se uma reta paralela à perspetiva do eixo **X** – essa reta é  $b_2$ , a perspetiva da projeção frontal da reta **b**.

Por fim, conduziram-se, por  $B_2$  e  $E_2$ , as perpendiculares à charneira que por eles passam e determinaram-se  $B_2$  e  $E_2$  (as perspetivas das projeções frontais dos pontos **B** e **E**, respetivamente), sobre  $b_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta **b**) e, ainda, as perspetivas propriamente ditas daqueles dois pontos (**B** e **E**) sobre a perspetiva propriamente dita da reta **b**. A reta **b** é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ , pelo que é uma reta projetante lateral. Nesse sentido, os pontos **B** e **E**, porque se situam na mesma reta projetante lateral (a reta **b**), têm as suas projeções laterais coincidentes, o que se assinalou devidamente no desenho –  $B_3 \equiv E_3$ . Note ainda que o ponto em que se situam as projeções laterais dos dois pontos é, na realidade, o traço lateral da reta **b**.

A partir das perspetivas dos cinco vértices do polígono, desenhou-se a perspetiva do pentágono [ABCDE]. Note que não se representaram as perspetivas das projeções horizontais dos vértices do pentágono (excetuando o ponto **A**), por não serem absolutamente necessárias à resolução do exercício. Na realidade, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido regularmente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o pentágono, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva do pentágono representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém o pentágono), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado  $XZ$ , da translação do plano  $XZ$  rebatido, da construção da projeção frontal do pentágono em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento, das perpendiculares à charneira e, ainda, do rebatimento do plano projetante do eixo **Y**.



## 1239.

## Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de  $110^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de  $130^\circ$ , que é o ângulo restante ( $120^\circ + 110^\circ + 130^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

## Resolução:

O plano que contém o hexágono **[ABCDEF]** (um plano horizontal) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o hexágono **[ABCDEF]** não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do hexágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o hexágono está contido num plano de horizontal (de nível), que é paralelo ao *plano coordenado horizontal* (o plano **XY**), sabe-se que o hexágono se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY* – o hexágono **[ABCDEF]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no *plano coordenado XY*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o hexágono se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XY* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

*Rebatimento do plano coordenado XY:*

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

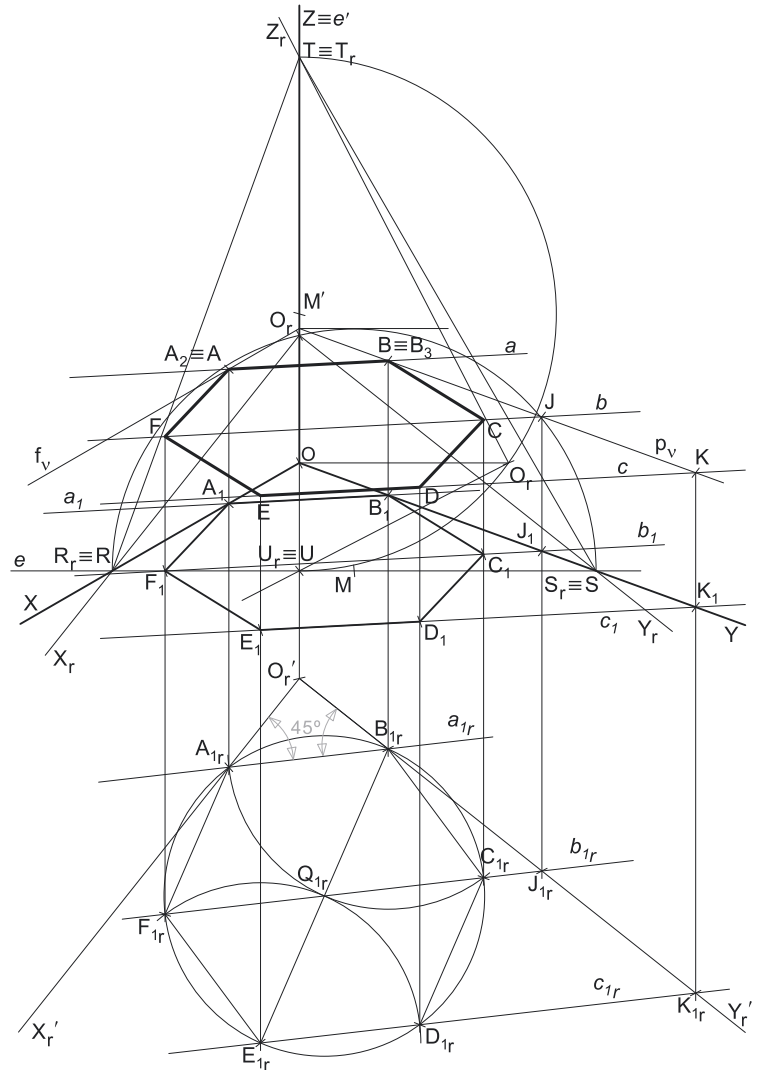
O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo **Z**) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

*Construção da projeção horizontal do hexágono, em verdadeira grandeza:*

No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **A** em verdadeira grandeza (3 cm). Atendendo a que o ponto **A** tem afastamento nulo, foi possível determinar a projeção horizontal do ponto **A**, em rebatimento ( $A_{1r}$ ), que se situa no eixo  $X_r'$  (pois o ponto **A** tem afastamento nulo).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O enunciado refere expressamente que o lado **[AB]** faz ângulos de  $45^\circ$  com o plano **XZ** e com o plano **YZ** – esse ângulo está contido no plano horizontal (de nível) que contém o hexágono e projeta-se em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY*. Uma vez que o hexágono está em verdadeira grandeza (porque está no plano **XY** rebatido), a verdadeira grandeza do ângulo está no ângulo que o segmento  $[A_1, B_1]$  fará com o eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$ . Assim, foi possível, em verdadeira grandeza, medir o ângulo de  $45^\circ$  que o lado **[AB]** faz com o eixo **X** e o eixo **Y** e desenhar a reta suporte (em rebatimento) do lado **[AB]**. Uma vez que o ponto **B** tem abscissa nula (como o enunciado refere expressamente), o ponto **B** é um ponto do plano **YZ**, pelo que a sua projeção horizontal se situa no eixo **Y**. Assim, determinou-se  $B_1$  (a projeção horizontal do ponto **B**, em rebatimento), que é o ponto em que a reta suporte do segmento  $[A_1, B_1]$  intersecta o eixo  $Y_r$ .

Note que das duas hipóteses de medir o ângulo de  $45^\circ$ , a partir de  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**, em rebatimento), apenas a que a resolução apresenta consegue garantir que o ponto **B** tem afastamento positivo e, por isso, se situe no espaço do  $1^\circ$  *Triedro*, como o enunciado refere expressamente.

Em seguida, a partir de  $A_1$  e de  $B_1$  (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, em rebatimento), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do hexágono, em rebatimento, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar  $Q_1$  (a projeção horizontal do centro do hexágono, em rebatimento). Salienta-se que a determinação de  $Q_1$  se processou através da construção de um triângulo equilátero, de que  $A_1$ ,  $B_1$  e  $Q_1$  são os vértices.

Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**, em rebatimento) e com raio até  $A_1$  e  $B_1$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao hexágono (em verdadeira grandeza, em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu concluir a construção da **projeção horizontal do hexágono**, em verdadeira grandeza e, dessa forma, determinar os restantes quatro vértices do polígono (em rebatimento) – o hexágono  $[A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1]$  é a projeção horizontal do hexágono **[ABCDEF]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano **XY**.

Para determinar a perspectiva do hexágono **[ABCDEF]** é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a figura.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém o hexágono [ABCDEF]:*

Para tal, é necessário determinar a perspectiva da cota do plano  $v$  (o plano horizontal que contém o polígono), que se mede sobre a perspectiva do eixo **Z**. Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo **Z** sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo **Z**, para determinar a perspectiva da cota do plano  $v$ .

O rebatimento do eixo **Z** pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo **Z**, o **rebatimento dos planos coordenados** (um *plano coordenado* que contenha o eixo **Z**) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo **Z**.

Nesse sentido, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a perspectiva do eixo **Z**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto **O** e cuja hipotenusa está contida na perspectiva do eixo **Z** – esse triângulo é, na presente situação, o triângulo **[TOU]** (sendo **U** o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[RS]** do *triângulo fundamental*). Nesse sentido, pontos **T** e **U** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

Em seguida, determinou-se o ponto  $M'$  (o ponto médio do segmento **[TU]**, que é a hipotenusa do triângulo retângulo **[TOU]**) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033. e respetivo relatório).

Depois, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (a reta  $e'$ ) e determinou-se  $O_r$  (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é um ponto fixo. A reta definida por  $O_r$  e por  $U_r$  é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o plano coordenado **XY** (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo  $Z_r$  é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto  $O_r$ .

Em seguida, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 4 cm (a cota do plano  $v$ , que é a cota do ponto **A**, dada no enunciado) e determinou-se um ponto, que não se identificou. Esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo **Z** que tem 4 cm de cota. Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo **Z**. O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o hexágono **[ABCDEF]** contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação da perspectiva do hexágono [ABCDEF]:*

O ponto **A** pertence ao plano  $v$  e é um ponto com afastamento nulo, pelo que o ponto **A** é necessariamente um ponto do traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ). Assim, por  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto **A**, em rebatimento) conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**) sobre a perspectiva do eixo **X**, determinando-se, ainda, a perspectiva propriamente dita do ponto **A** sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Por outro lado, atendendo a que o ponto **A** é um ponto do plano **XZ** (porque tem afastamento nulo), o ponto **A** está coincidente com a sua projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho – tem-se, imediatamente,  $A_2 \equiv A$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **B** pertence ao plano  $v$  e é um ponto com abcissa nula, pelo que o ponto **B** é necessariamente um ponto do traço lateral do plano  $v$  ( $p_v$ ). Assim, por  $B_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto **B**, em rebatimento) conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e$ ) e determinou-se  $B_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , determinando-se, ainda, a perspectiva propriamente dita do ponto **B** sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Por outro lado, atendendo a que o ponto **B** é um ponto do plano  $YZ$  (porque tem abcissa nula), o ponto **B** está coincidente com a sua projeção lateral, o que se assinalou devidamente no desenho – tem-se, imediatamente,  $B_3 \equiv B$ .

Para inverter o rebatimento dos vértices do hexágono optou-se por recorrer a retas do plano  $v$ , às quais aqueles pontos pertençam. Uma vez que os lados **[AB]** e **[DE]** do hexágono são paralelos entre si e ainda paralelos à diagonal **[CF]**, optou-se por recorrer às retas suporte daqueles elementos. Por outro lado, uma vez que as perspectivas dos pontos **A** e **B** já foram determinadas, é possível definir, de forma imediata, as perspectivas da reta suporte do lado **[AB]**.

Assim, desenhou-se a reta  $a_{1r}$ , que é, em rebatimento, a reta suporte do lado **[AB]** – a reta  $a_{1r}$  está definida pelos pontos  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ . Em seguida, foi possível desenhar, igualmente, a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_1$ ), que está definida pelos pontos  $A_1$  e  $B_1$  (as perspectivas das projeções horizontais dos pontos **A** e **B**). Desenhou-se, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , que está definida pelas perspectivas propriamente ditas dos pontos **A** e **B**.

Para inverter o rebatimento dos pontos **C** e **F** recorreu-se à reta  $b$ , que contém aqueles pontos (a reta  $b$  é a reta suporte da diagonal **[CF]** do hexágono) – a reta  $b_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $b$ , em rebatimento, e passa por  $C_{1r}$  e por  $F_{1r}$  (a reta  $b$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , porque a diagonal **[CF]** é paralela ao lado **[AB]** do hexágono. A reta  $b_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $J_{1r}$  (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto da reta  $b$  com abcissa nula). Por  $J_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **J**) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **J**. A reta  $b$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto **J** é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto **J** situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $b$ , que é o ponto **J**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ . Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_1$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $b$ ). A perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_1$ ) está definida por um ponto ( $J_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **J**) e por uma direção (é paralela a  $a_1$ , a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ). A perspectiva propriamente dita da reta  $b$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto **J**) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**), sobre  $b_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **C** sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto **F** (conduzindo, por  $F_{1r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **F** (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ ), bem como a perspectiva da projeção horizontal do ponto **F** ( $F_1$ ), sobre a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_1$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos **D** e **E** recorreu-se à reta  $c$ , que contém aqueles pontos (a reta  $c$  é a reta suporte do lado **[DE]** do hexágono) – a reta  $c_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $c$ , em rebatimento, e passa por  $D_{1r}$  e por  $E_{1r}$  (a reta  $c$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que a reta  $c$  é paralela às retas  $a$  e  $b$ , porque o lado **[DE]** é paralelo à diagonal **[CF]** e ao lado **[AB]** do hexágono. A reta  $c_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $K_{1r}$  (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto da reta  $c$  com abcissa nula). Por  $K_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **K**) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **K**. A reta  $c$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto **K** é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto **K** situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $c$ , que é o ponto **K**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $c$  é paralela à reta  $a$  (e à reta  $b$ ), também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $c$ . Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção horizontal da reta  $c$  ( $c_1$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $c$ ). A perspectiva da projeção horizontal da reta  $c$  ( $c_1$ ) está definida por um ponto ( $K_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **K**) e por uma direção (é paralela a  $a_1$ , a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ). A perspectiva propriamente dita da reta  $c$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto **K**) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $D_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $D_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **D**), sobre  $c_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $c$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **D** sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto **E** (conduzindo, por  $E_{1r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **E** (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ ), bem como a perspectiva da projeção horizontal do ponto **E** ( $E_1$ ), sobre a perspectiva da projeção horizontal da reta  $c$  ( $c_1$ ).

A partir das perspectivas dos seis vértices do hexágono **[ABCDEF]**, desenhou-se a perspectiva da figura. Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções laterais nem das projeções frontais dos vértices do hexágono (à exceção do ponto **A** e do ponto **B**), por não serem necessárias. Na realidade, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido sistematicamente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o hexágono, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do hexágono representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano horizontal que contém o hexágono), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado  $XY$ , da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção da projeção horizontal do hexágono em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira.

## 1240.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $105^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $135^\circ$ , que é o ângulo restante ( $105^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

### Resolução:

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano horizontal (de nível), que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao *plano coordenado horizontal* (o plano **XY**), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY* – o quadrado **[ABCD]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no *plano coordenado XY*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XY* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

#### Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[RS]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

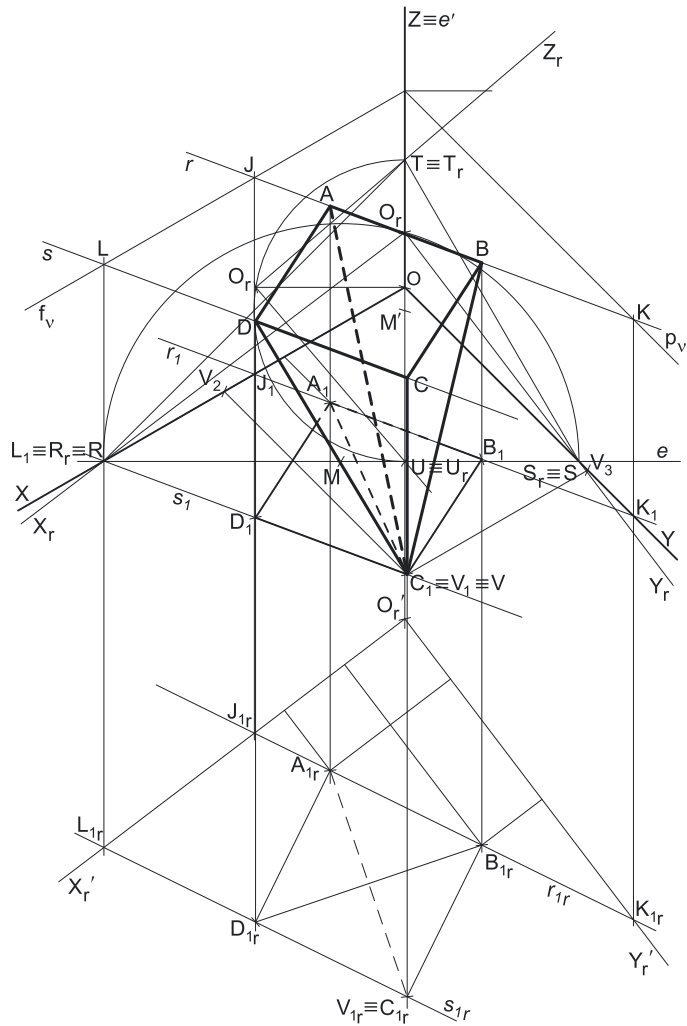
O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[RS]** do *triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).*

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo **Z**) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

#### Construção das projeções horizontais do quadrado **[ABCD]** e da pirâmide, em verdadeira grandeza:

No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos **A** e **B** em verdadeira grandeza (4 cm e 2 cm, respetivamente). Em seguida, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **A** e **B** em verdadeira grandeza (2 cm e 6 cm, respetivamente). A partir das abscissas e dos afastamentos dos dois pontos, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, em rebatimento ( $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , respetivamente).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir de  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{1r}$  e  $D_{1r}$  (as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Salienta-se que se trata de uma **pirâmide oblíqua**, cujo vértice (o ponto  $V$ ) se situa na mesma projetante horizontal do vértice  $C$ , da base. Assim, os dois pontos (o ponto  $V$  e o ponto  $C$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou devidamente no plano  $XY$  rebatido e trasladado –  $V_{1r} \equiv C_{1r}$ .

Para determinar as perspectivas do quadrado  $[ABCD]$  e da pirâmide é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $v$ , o plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém o quadrado  $[ABCD]$ :*

Para tal, é necessário determinar a perspectiva da cota do plano  $v$  (o plano horizontal que contém o polígono), que se mede sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo  $Z$  sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo  $Z$ , para determinar a perspectiva da cota do plano  $v$ .

O rebatimento do eixo  $Z$  pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo  $Z$ , o **rebatimento dos planos coordenados** (um *plano coordenado* que contenha o eixo  $Z$ ) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo  $Z$ .

Nesse sentido, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a perspectiva do eixo  $Z$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto  $O$  e cuja hipotenusa está contida na perspectiva do eixo  $Z$  – esse triângulo é, na presente situação, o triângulo  $[TOU]$  (sendo  $U$  o ponto em que o plano projetante do eixo  $Z$  corta o lado  $[RS]$  do *triângulo fundamental*). Nesse sentido, pontos  $T$  e  $U$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

Em seguida, determinou-se o ponto  $M'$  (o ponto médio do segmento  $[TU]$ , que é a hipotenusa do triângulo retângulo  $[TOU]$ ) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033. e respetivo **relatório**).

Depois, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (a reta  $e'$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é um ponto fixo. A reta definida por  $O_r$  e por  $U_r$ , é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Z$  com o plano coordenado  $XY$  (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo  $Z_r$  é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto  $O_r$ .

Em seguida, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 8 cm (a cota do plano  $v$ , que é a cota dos pontos  $A$  e  $B$ , dada no enunciado) e determinou-se um ponto, que não se identificou. Esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Z$  que tem 8 cm de cota. Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o quadrado  $[ABCD]$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado*  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado*  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado*  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado*  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação das perspectivas dos vértices do quadrado  $[ABCD]$ :*

Para inverter o rebatimento dos vértices do quadrado optou-se por recorrer a retas do plano  $v$ , às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos  $A$  e  $B$  recorreu-se à reta  $r$ , que é a reta suporte do lado  $[AB]$  do quadrado. A reta  $r_{1r}$  (que está definida por  $A_{1r}$  e por  $B_{1r}$ ) é a projeção horizontal da reta  $r$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $r$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $r_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $J_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $r$  que tem afastamento nulo). Por  $J_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ . A reta  $r$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $J$  é um ponto de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $J$  situa-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta, que é o ponto  $J$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $r_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $K_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $r$  que tem abcissa nula). Por  $K_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $K$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $K$ . A reta  $r$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $K$  é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $K$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_{1r}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) e o ponto  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $K$ ). Por outro lado, a perspectiva propriamente dita da reta  $r$  também está definida por dois pontos – as perspectivas propriamente ditas dos pontos  $J$  e  $K$ . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $r$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $A_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ), sobre  $r_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $r$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $r$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $B$  (conduzindo, por  $B_{1r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $r$ ), bem como a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$  ( $B_1$ ), sobre a perspectiva da projeção horizontal da reta  $r$  ( $r_1$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos  $C$  e  $D$  recorreu-se à reta  $s$ , que contém aqueles pontos (a reta  $s$  é a reta suporte do lado  $[CD]$  do quadrado) – a reta  $s_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $s$ , em rebatimento, e passa por  $C_{1r}$  e por  $D_{1r}$  (a reta  $s$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que a reta  $s$  é paralela à reta  $r$ , porque são retas suporte de lados paralelos do quadrado. A reta  $s_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $L_{1r}$  (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto da reta  $s$  com afastamento nulo). Por  $L_{1r}$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $L$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $L$ . A reta  $s$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto  $L$  é um ponto de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $L$  situa-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $L_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $s$ , que é o ponto  $L$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $s$  é paralela à reta  $r$ , também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $s$ . Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção horizontal da reta  $s$  ( $s_1$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $s$ ). A perspectiva da projeção lateral da reta  $s$  ( $s_1$ ) está definida por um ponto ( $L_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $L$ ) e por uma direção (é paralela a  $r_1$ , a perspectiva da projeção horizontal da reta  $r$ ). A perspectiva propriamente dita da reta  $s$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto  $L$ ) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $s$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_{1s}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ), sobre  $s_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $s$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $s$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $D$  (conduzindo, por  $D_{1s}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $s$ ), bem como a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $D$  ( $D_1$ ), sobre a perspectiva da projeção horizontal da reta  $s$  ( $s_1$ ).

#### Determinação das perspectivas do ponto $V$ :

Tendo em conta que o ponto  $V$  e o ponto  $C$  se situam na mesma reta projetante horizontal (como o enunciado refere e atrás se expôs), sabe-se que os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se identificou imediatamente no desenho – tem-se  $V_1 \equiv C_1$  (sendo  $V_1$  a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V$ ). Por outro lado, é referido, no enunciado, que o ponto  $V$  tem cota nula, pelo que o vértice da pirâmide (o ponto  $V$ ) é um ponto do plano coordenado  $XY$ . Nesse sentido, o ponto  $V$  está coincidente com a sua projeção horizontal, pelo que se tem, imediatamente,  $V \equiv V_1$  (sendo  $V$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $V$ ).

Por outro lado, atendendo a que o ponto  $V$  tem cota nula (e se situa no plano  $XY$ ) sabe-se que a sua projeção frontal ( $V_2$ ) se situa no eixo  $X$  e que a sua projeção lateral ( $V_3$ ) se situa necessariamente no eixo  $Y$ , o que se assinalou devidamente no desenho.

#### Determinação da perspectiva da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a perspectiva da pirâmide, começando pelo seu contorno aparente – o contorno aparente da perspectiva da pirâmide é a linha quebrada fechada  $[ABVD]$ . Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice  $C$ . Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é visível, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[BC]$  e  $[CD]$ , da base, e a aresta lateral  $[CV]$ ). Salienta-se que a aresta lateral  $[AV]$  é invisível, pois separa duas faces da pirâmide que são invisíveis (as faces laterais  $[ABV]$  e  $[ADV]$ ).

As faces laterais  $[BCV]$  e  $[CDV]$  são visíveis, bem como a base  $[ABCD]$ . Já as faces laterais  $[ABV]$  e  $[ADV]$  são invisíveis.

Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais dos vértices da pirâmide (à exceção do ponto  $V$ ), por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da representação axonométrica, é exclusivamente a representação de um dado objeto (a pirâmide, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a médio, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a leve pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a forte, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a leve. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a leve – caso do rebatimento do plano coordenado  $XY$ , da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção da projeção horizontal da pirâmide em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ .



## 1241.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $105^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $135^\circ$ , que é o ângulo restante ( $105^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

**Resolução:**

O triângulo **[ABC]** (a base de menor abscissa do prisma) está contido num plano (um plano de perfil) que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano de perfil, que é paralelo ao *plano coordenado de perfil* (o plano **YZ**), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado YZ* – o triângulo **[ABC]** e a sua projeção lateral (a sua projeção no *plano coordenado YZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado YZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

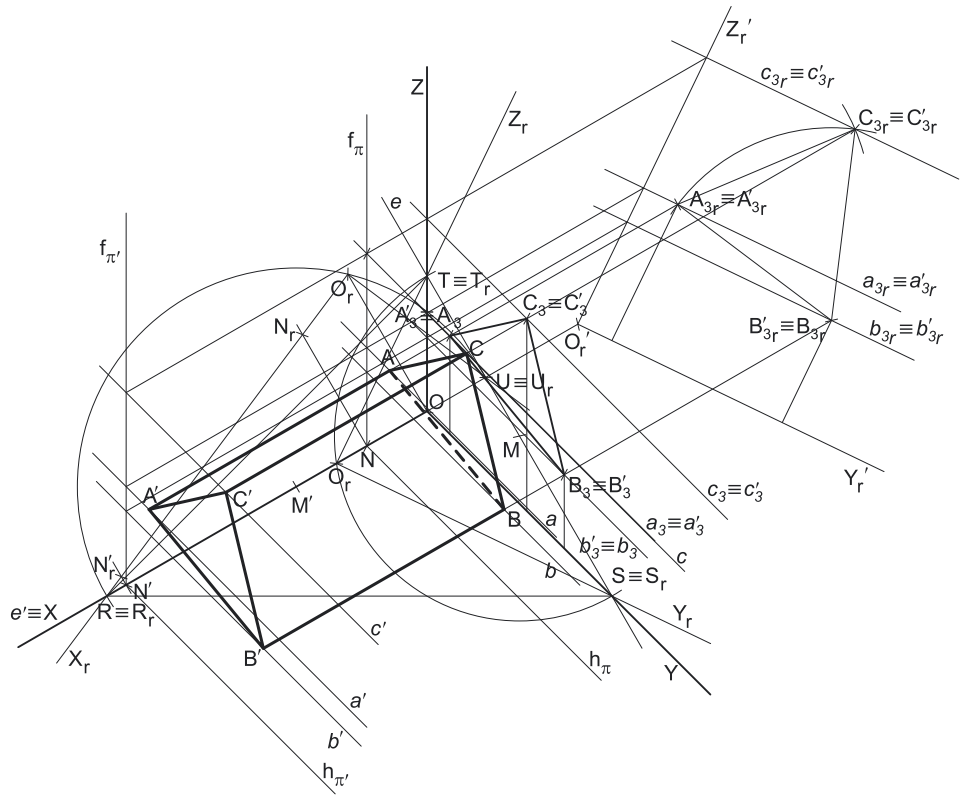
*Rebatimento do plano coordenado YZ:*

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é o lado **[ST]** do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **S** e **T** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $S_r \equiv S$  e  $T_r \equiv T$ .

O rebatimento do *plano coordenado YZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **YZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[ST]** do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo **Y**) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **S<sub>r</sub>**, que é um ponto fixo. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e **T<sub>r</sub>**, que é outro ponto fixo. O eixo **Y<sub>r</sub>** e o eixo **Z<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **X**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**. O eixo **Z<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Z<sub>r</sub>**.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Construção das projeções frontais do triângulo [ABC] e do prisma, em verdadeira grandeza:*

No plano  $YZ$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **A** e **B** em verdadeira grandeza (1 cm e 6 cm, respetivamente). Em seguida, no plano  $YZ$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos pontos **A** e **B** em verdadeira grandeza (4 cm e 3 cm, respetivamente). A partir dos afastamentos e das cotas dos pontos **A** e **B**, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções laterais dos pontos **A** e **B**, em rebatimento ( $A_{3_r}$  e  $B_{3_r}$ , respetivamente).

A partir de  $A_{3_r}$  e  $B_{3_r}$  foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do triângulo**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $YZ$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{3_r}$  (a projeção lateral do terceiro vértice do triângulo, em rebatimento) – o triângulo  $[A_{3_r}B_{3_r}C_{3_r}]$  é a projeção lateral do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases (que são planos de perfil). Assim, as arestas laterais do sólido estão contidas em retas fronto-horizontais, que são retas projetantes laterais. Nesse sentido, os vértices da base de maior abscissa do prisma (a base  $[A'B'C']$ ) têm as suas projeções laterais coincidentes com as projeções laterais dos vértices correspondentes da base  $[ABC]$ , o que se assinalou imediatamente –  $A'_{3_r} \equiv A_{3_r}$ ,  $B'_{3_r} \equiv B_{3_r}$  e  $C'_{3_r} \equiv C_{3_r}$ . Este raciocínio permitiu-nos concluir a construção da projeção lateral do prisma (em rebatimento, no rebatimento do plano  $YZ$ ).

Para determinar as perspetivas do triângulo  $[ABC]$  e do prisma é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar os planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos de perfil que contêm as bases do prisma).

*Representação do plano de perfil  $\pi$ , que contém a base de menor abscissa do prisma (o triângulo  $[ABC]$ ):*

Para tal, é necessário determinar a perspetiva da abscissa do plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém o polígono), que se mede sobre a perspetiva do eixo  $X$ . Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo  $X$  sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo  $X$ , para determinar a perspetiva da abscissa do plano  $\pi$ .

O rebatimento do eixo  $X$  pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo  $X$ , o **rebatimento dos planos coordenados** (um plano coordenado que contenha o eixo  $X$ ) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo  $X$ .

Nesse sentido, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a perspetiva do eixo  $X$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto **O** e cuja hipotenusa está contida na perspetiva do eixo  $X$  – esse triângulo é, na presente situação, o triângulo  $[ROU]$  (sendo **U** o ponto em que o plano projetante do eixo  $X$  corta o lado  $[ST]$  do triângulo fundamental). Nesse sentido, pontos **R** e **U** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $U_r \equiv U$ .

Em seguida, determinou-se o ponto  $M'$  (o ponto médio do segmento  $[RU]$ , que é a hipotenusa do triângulo retângulo  $[ROU]$ ) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033. e respetivo relatório).

Depois, conduziu-se, pela perspetiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (a reta  $e'$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. A reta definida por  $O_r$  e por  $U_r$  é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo  $X$  com o plano coordenado  $YZ$  (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo  $X_r$  é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto  $O_r$ .

Em seguida, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 2 cm (a abscissa do plano  $\pi$ ) e determinou-se um ponto – o ponto  $N_r$ . O ponto **N** é o ponto do eixo  $X$  que tem 2 cm de abscissa. Para se determinar a perspetiva do ponto **N** conduziu-se, por  $N_r$ , uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto **N**, sobre a perspetiva do eixo  $X$ . O ponto **N** é a perspetiva do ponto do eixo  $X$  que tem 2 cm de abscissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém a base  $[ABC]$  do prisma contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_\pi$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi$ ). Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$ , com cota nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

*Representação do plano de perfil  $\pi'$ , que contém a base de maior abscissa do prisma (o triângulo  $[A'B'C']$ ):*

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as abscissas dos planos de perfil que contêm as bases. O prisma tem 8 cm de altura e a sua base de menor abscissa tem 2 cm de abscissa, pelo que o plano  $\pi'$  (o plano que contém a base de maior abscissa do prisma) tem necessariamente 10 cm de abscissa ( $2 + 8 = 10$ ). Assim, há que determinar, sobre a perspetiva do eixo  $X$ , um ponto com 10 cm de abscissa. Tendo em conta que já temos o eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ), é possível, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $X_r$ , medir a abscissa do plano  $\pi'$ .

Assim, sobre o eixo  $X_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 10 cm (a abscissa do plano  $\pi'$ ) e determinou-se um ponto – o ponto  $N'_r$ . O ponto **N'** é o ponto do eixo  $X$  que tem 10 cm de abscissa. Para se determinar a perspetiva do ponto **N'** conduziu-se, por  $N'_r$ , uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspetiva propriamente dita do ponto **N'**, sobre a perspetiva do eixo  $X$ . O ponto **N'** é a perspetiva do ponto do eixo  $X$  que tem 10 cm de abscissa. O plano de perfil  $\pi'$  que contém o triângulo  $[A'B'C']$  contém necessariamente esse ponto.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\pi'$  –  $h_{\pi'}$  (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\pi'$ ) e  $f_{\pi'}$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi'$ ). Note que  $h_{\pi'}$  (o traço horizontal do plano  $\pi'$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi'$ , com cota nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi'$ , com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\pi'$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_{\pi'}$ ). Por outro lado, o plano  $\pi'$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_{\pi'}$ ).

*Inversão do rebatimento do plano YZ e determinação das perspetivas dos vértices do prisma:*

Para inverter o rebatimento dos vértices  $A$  e  $A'$  do prisma optou-se por recorrer a retas dos planos  $\pi$  e  $\pi'$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas  $a$  e  $a'$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $\pi$ , contém o ponto  $A$  e é paralela ao eixo  $Y$ . A reta  $a'$  é uma reta do plano  $\pi'$ , contém o ponto  $A'$  e é igualmente paralela ao eixo  $Y$ . As duas retas têm as suas projeções laterais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano  $YZ$  rebatido) – a reta  $a_{3r} \equiv a'_{3r}$  é a projeção lateral (em rebatimento) das retas  $a$  e  $a'$  e está definida por um ponto (passa por  $A_{3r} \equiv A'_{3r}$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $Y_r'$ ). Cada uma das retas ( $a$  e  $a'$ ) está definida por um ponto e por uma direção.

A reta  $a_{3r} \equiv a'_{3r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção lateral dos traços frontais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspetivas desses pontos, sobre a perspetiva de  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) e sobre a perspetiva de  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva de cada uma das duas retas (as retas  $a$  e  $a'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Tendo em conta que as retas  $a$  e  $a'$  são paralelas ao eixo  $Y$ , já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das duas retas. A perspetiva da reta  $a$  fica definida pela perspetiva do seu traço frontal (que não se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $f_{\pi}$ ) e pela direção da perspetiva de  $h_{\pi}$  (é paralela ao traço horizontal do plano  $\pi$  e ao eixo  $Y$ ). A perspetiva da reta  $a'$  fica definida pela perspetiva do seu traço frontal (que não também se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $f_{\pi'}$ ) e pela direção da perspetiva de  $h_{\pi'}$  (é paralela ao traço horizontal do plano  $\pi'$  e ao eixo  $Y$ ).

Este procedimento permitiu-nos, ainda, determinar as perspetivas das projeções laterais das duas retas ( $a_3 \equiv a'_3$ ), que estão definidas pelas perspetivas das projeções laterais dos seus traços frontais (que não se identificaram) e pela direção da perspetiva do eixo  $Y$ , o que nos permitiu desenhá-las imediatamente.

Por fim, conduziu-se, por  $A_{3r} \equiv A'_{3r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_3 \equiv A'_3$  (as perspetivas das projeções laterais dos pontos  $A$  e  $A'$ ), sobre  $a_3 \equiv a'_3$  (as perspetivas das projeções laterais das retas  $a$  e  $a'$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $A$  (sobre a perspetiva da reta  $a$ ), bem como a perspetiva do ponto  $A'$  (sobre a perspetiva da reta  $a'$ ).

Para inverter o rebatimento dos vértices  $B$  e  $B'$  do prisma optou-se por recorrer a retas dos planos  $\pi$  e  $\pi'$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas  $b$  e  $b'$ . A reta  $b$  é uma reta do plano  $\pi$ , contém o ponto  $B$  e é paralela ao eixo  $Y$ . A reta  $b'$  é uma reta do plano  $\pi'$ , contém o ponto  $B'$  e é igualmente paralela ao eixo  $Y$ . As duas retas têm as suas projeções laterais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano  $YZ$  rebatido) – a reta  $b_{3r} \equiv b'_{3r}$  é a projeção lateral (em rebatimento) das retas  $b$  e  $b'$  e está definida por um ponto (passa por  $B_{3r} \equiv B'_{3r}$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $Y_r'$ ). Cada uma das retas ( $b$  e  $b'$ ) está definida por um ponto e por uma direção.

A reta  $b_{3r} \equiv b'_{3r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção lateral dos traços frontais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspetivas desses pontos, sobre a perspetiva de  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) e sobre a perspetiva de  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva de cada uma das duas retas (as retas  $b$  e  $b'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Tendo em conta que as retas  $b$  e  $b'$  são paralelas ao eixo  $Y$ , já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das duas retas. A perspetiva da reta  $b$  fica definida pela perspetiva do seu traço frontal (que não se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $f_{\pi}$ ) e pela direção da perspetiva de  $h_{\pi}$  (é paralela ao traço horizontal do plano  $\pi$  e ao eixo  $Y$ ). A perspetiva da reta  $b'$  fica definida pela perspetiva do seu traço frontal (que não também se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $f_{\pi'}$ ) e pela direção da perspetiva de  $h_{\pi'}$  (é paralela ao traço horizontal do plano  $\pi'$  e ao eixo  $Y$ ).

Este procedimento permitiu-nos, ainda, determinar as perspetivas das projeções laterais das duas retas ( $b_3 \equiv b'_3$ ), que estão definidas pelas perspetivas das projeções laterais dos seus traços frontais (que não se identificaram) e pela direção da perspetiva do eixo  $Y$ , o que nos permitiu desenhá-las imediatamente.

Por fim, conduziu-se, por  $B_{3r} \equiv B'_{3r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_3 \equiv B'_3$  (as perspetivas das projeções laterais dos pontos  $B$  e  $B'$ ), sobre  $b_3 \equiv b'_3$  (as perspetivas das projeções laterais das retas  $b$  e  $b'$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $B$  (sobre a perspetiva da reta  $b$ ), bem como a perspetiva do ponto  $B'$  (sobre a perspetiva da reta  $b'$ ).

Para inverter o rebatimento dos vértices  $C$  e  $C'$  do prisma optou-se por recorrer a retas dos planos  $\pi$  e  $\pi'$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas  $c$  e  $c'$ . A reta  $c$  é uma reta do plano  $\pi$ , contém o ponto  $C$  e é paralela ao eixo  $Y$ . A reta  $c'$  é uma reta do plano  $\pi'$ , contém o ponto  $C'$  e é igualmente paralela ao eixo  $Y$ . As duas retas têm as suas projeções laterais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano  $YZ$  rebatido) – a reta  $c_{3r} \equiv c'_{3r}$  é a projeção lateral (em rebatimento) das retas  $c$  e  $c'$  e está definida por um ponto (passa por  $C_{3r} \equiv C'_{3r}$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $Y_r'$ ). Cada uma das retas ( $c$  e  $c'$ ) está definida por um ponto e por uma direção.

A reta  $c_{3r} \equiv c'_{3r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção lateral dos traços frontais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspetivas desses pontos, sobre a perspetiva de  $f_{\pi}$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) e sobre a perspetiva de  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva de cada uma das duas retas (as retas  $c$  e  $c'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que as retas  $c$  e  $c'$  são paralelas ao eixo  $Y$ , já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das duas retas. A perspetiva da reta  $c$  fica definida pela perspetiva do seu traço frontal (que não se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $f_{\pi}$ ) e pela direção da perspetiva de  $h_{\pi}$  (é paralela ao traço horizontal do plano  $\pi$  e ao eixo  $Y$ ). A perspetiva da reta  $c'$  fica definida pela perspetiva do seu traço frontal (que não também se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $f_{\pi'}$ ) e pela direção da perspetiva de  $h_{\pi'}$  (é paralela ao traço horizontal do plano  $\pi'$  e ao eixo  $Y$ ).

Este procedimento permitiu-nos, ainda, determinar as perspetivas das projeções laterais das duas retas ( $c_3 \equiv c'_3$ ), que estão definidas pelas perspetivas das projeções laterais dos seus traços frontais (que não se identificaram) e pela direção da perspetiva do eixo  $Y$ , o que nos permitiu desenhá-las imediatamente.

Por fim, conduziu-se, por  $C_{3r} \equiv C'_{3r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_3 \equiv C'_3$  (as perspetivas das projeções laterais dos pontos  $C$  e  $C'$ ), sobre  $c_3 \equiv c'_3$  (as perspetivas das projeções laterais das retas  $c$  e  $c'$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $C$  (sobre a perspetiva da reta  $c$ ), bem como a perspetiva do ponto  $C'$  (sobre a perspetiva da reta  $c'$ ).

#### Determinação da perspetiva do prisma:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[AA'B'BC]$ . Existe um único vértice do prisma que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice  $C'$ . Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[A'C']$  e  $[B'C']$ , da base  $[A'B'C']$ , e a aresta lateral  $[CC']$ ). Por outro lado, a aresta  $[AB]$  (da base  $[ABC]$ ) é **invisível**, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – a face lateral  $[ABB'A']$  e a base  $[ABC]$ .

As faces laterais  $[AA'C'C]$  e  $[BB'C'C]$  são visíveis, bem como a base  $[A'B'C']$ . Já a face lateral  $[AA'B'B']$  e a base  $[ABC]$  são invisíveis.

Note que não se representaram as perspetivas nem das projeções frontais nem das projeções horizontais dos vértices do prisma, por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o prisma, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\pi$  (o plano que contém a base de menor abcissa do prisma) e o plano  $\pi'$  (o plano que contém a base de maior abcissa do prisma), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos respetivos traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. A perspetiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado*  $YZ$ , da translação do plano  $YZ$  rebatido, da construção da projeção lateral do prisma em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, do rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  (que nos permitiu determinar as perspetivas das abcissas dos planos  $\pi$  e  $\pi'$ ).

## 1242.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo  $X$  faz um ângulo de  $105^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Y$  e um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Z$ , as perspectivas destes dois eixos (o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$ ) fazem, entre si, um ângulo de  $135^\circ$ , que é o ângulo restante ( $105^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações (recorde que as dimensões do *triângulo fundamental* são arbitrárias).

**Resolução:**

O quadrado  $[ABCD]$  (a base da pirâmide) está contido num plano (um plano frontal) que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao plano coordenado frontal (o plano  $XZ$ ), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XZ$  – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado  $XZ$ ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado  $XZ$**  (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado  $XZ$  pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

**Rebatimento do plano coordenado  $XZ$ :**

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XZ$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta suporte do lado do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo  $Y$ .

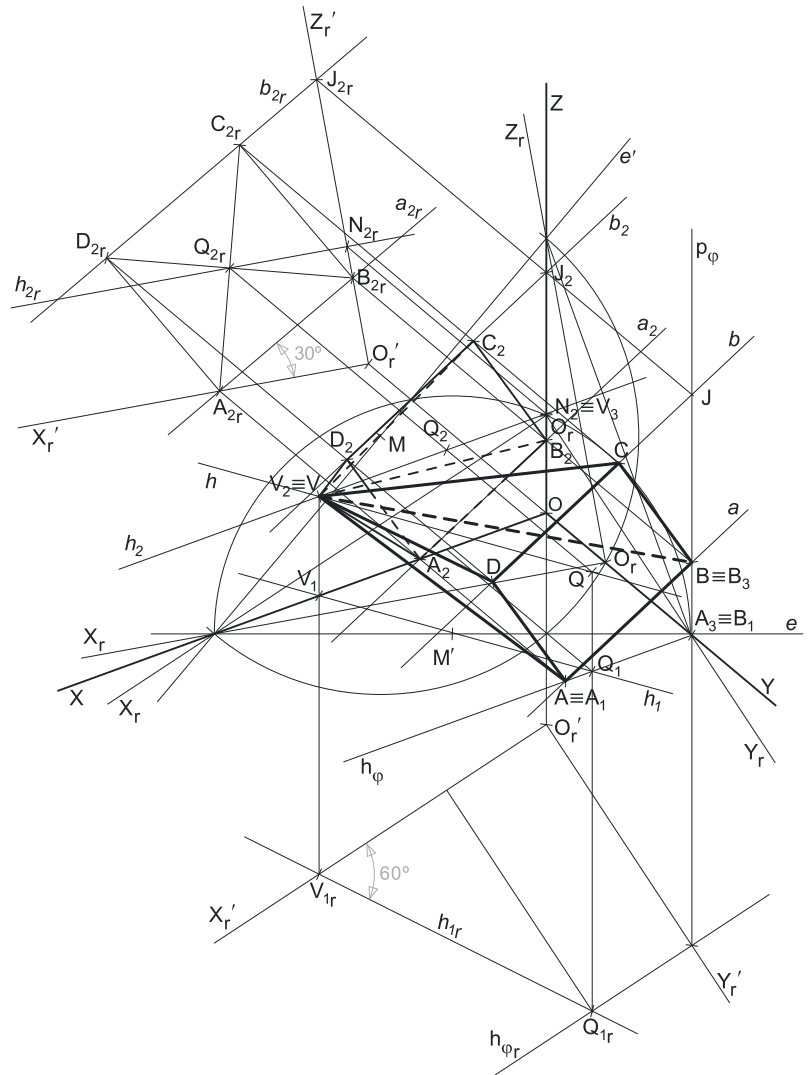
O rebatimento do plano coordenado  $XZ$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano  $XZ$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, determinou-se  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por  $O$  (que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ ). O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo  $X_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

**Construção da projeção frontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza:**

No plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto  $A$  em verdadeira grandeza (4 cm). Atendendo a que o ponto  $A$  tem cota nula, foi possível determinar a projeção frontal do ponto  $A$ , em rebatimento ( $A_{2r}$ ), que se situa no eixo  $X_r'$  (pois o ponto  $A$  tem cota nula).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O enunciado refere expressamente que o lado  $[AB]$  faz um ângulo de  $30^\circ$  com o plano  $XY$  – esse ângulo está contido no plano frontal (de frente) que contém o quadrado e projeta-se em verdadeira grandeza no *plano coordenado*  $XZ$ . Uma vez que o quadrado está em verdadeira grandeza (porque está no plano  $XZ$  rebatido), a verdadeira grandeza do ângulo está no ângulo que o segmento  $[A_2, B_2]$  fará com o eixo  $X_r'$ . Assim, foi possível, em verdadeira grandeza, medir o ângulo de  $30^\circ$  que o lado  $[AB]$  faz com o eixo  $X$  e desenhar a reta suporte (em rebatimento) do lado  $[AB]$ . Uma vez que o ponto  $B$  tem abcissa nula (como o enunciado refere expressamente), o ponto  $B$  é um ponto do plano  $YZ$ , pelo que a sua projeção frontal se situa no eixo  $Z$ . Assim, determinou-se  $B_2$ , (a projeção frontal do ponto  $B$ , em rebatimento), que é o ponto em que a reta suporte do segmento  $[A_2, B_2]$  intersecta o eixo  $Z_r'$ .

Note que das duas hipóteses de medir o ângulo de  $30^\circ$ , a partir de  $A_2$ , (a projeção frontal do ponto  $A$ , em rebatimento), apenas a que a resolução apresenta consegue garantir que o ponto  $B$  tem cota positiva e, por isso, se situe no espaço do  $1^a$  *Triedro*, como o enunciado refere expressamente.

A partir de  $A_2$  e  $B_2$ , foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XZ$ ), o que nos permitiu determinar  $C_2$  e  $D_2$  (as projeções frontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[A_2, B_2, C_2, D_2]$  é a projeção frontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Sendo dada informação sobre o eixo da pirâmide, optou-se por determinar o centro do quadrado (o ponto  $Q$ ), que é uma dos extremos do eixo da pirâmide. Assim, com o recurso às diagonais do quadrado  $[A_2, B_2, C_2, D_2]$ , determinou-se  $Q_2$ , que é a projeção frontal (em rebatimento) do centro da base da pirâmide.

Trata-se de uma **pirâmide oblíqua**, cujo eixo está contido numa reta horizontal (de nível), sendo dado o ângulo que a reta  $h$  (a reta suporte do eixo da pirâmide) faz com o plano  $XZ$ . Acontece que esse ângulo está contido num plano horizontal (o plano horizontal que contém a reta  $h$ ) e não se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção (o *plano axonométrico*), pois o plano que contém o ângulo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*).

Por outro lado, foi possível representar, de imediato, a reta  $h$  (a reta suporte do eixo da pirâmide), em projeção frontal –  $h_2$ , é a projeção frontal da reta  $h$ , em rebatimento (no rebatimento do plano  $XZ$ ). A reta  $h_2$ , (a projeção frontal, em rebatimento, da reta  $h$ ) passa por  $Q_2$ , (a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) e é paralela ao eixo  $X_r'$  (pois todos os pontos da reta  $h$  têm a mesma cota).

Uma vez que o ângulo que a reta  $h$  faz com o plano  $XZ$  não se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção (o *plano axonométrico*), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar tem de ser o rebatimento do *plano coordenado horizontal* (o plano  $XY$ ), que é o plano no qual o ângulo se projeta em verdadeira grandeza (por estar contido num plano paralelo ao *plano coordenado*  $XY$ ).

#### Rebatimento do plano coordenado $XY$ :

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado*  $XY$ ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta suporte do lado do *triângulo fundamental* que se opõe à perspetiva do eixo  $Z$ .

O rebatimento do *plano coordenado*  $XY$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano  $XY$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M'$ , o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).

Em seguida, determinou-se  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por  $O$  (que é a própria perspetiva do eixo  $Z$ ). O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

#### Representação da reta $h$ em projeção horizontal e determinação da projeção horizontal do vértice da pirâmide, no rebatimento do plano $XY$ :

No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do plano frontal (de frente) que contém a base da pirâmide em verdadeira grandeza (7 cm, que é o afastamento do ponto  $A$ , dado no enunciado). Isso permitiu-nos representar, no plano  $XY$  rebatido e transladado, o traço horizontal do plano  $\varphi$  em rebatimento ( $h_{\varphi}$ ) –  $h_{\varphi}$  é paralelo ao eixo  $X_r'$  e dista 7 cm (o afastamento do plano  $\varphi$ ) do eixo  $X_r'$ .

No plano  $XY$  rebatido e transladado, transportou-se para o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, a **abcissa** do ponto  $Q$  (determinada no em projeção frontal, no rebatimento do plano  $XZ$ ), o que nos permitiu determinar  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento), sobre  $h_{\varphi}$ . Note que o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (é ortogonal do plano  $XY$ ), pelo que projeta no plano  $XY$  todas as suas retas e pontos, sobre o seu traço horizontal –  $h_{\varphi}$ .

O eixo da pirâmide está contido numa reta horizontal (de nível)  $h$ , que faz um ângulo de  $60^\circ$  (de abertura para a direita) com o plano  $XZ$ . Assim, no plano  $XY$ , rebatido e transladado, representou-se a projeção horizontal da reta  $h$ , em rebatimento –  $h_{1r}$ , passa por  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) e faz um ângulo de  $60^\circ$  de abertura para a direita com o eixo  $X_r'$ . Note que  $h_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $h$ , em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ). Em rebatimento, determinou-se a projeção horizontal do vértice da pirâmide ( $V_{1r}$ ), que é o traço frontal da reta  $h$  (o ponto  $V$  é o ponto de  $h$  que tem afastamento nulo).

Para se determinar a perspetiva da pirâmide, é necessário inverter os dois rebatimentos efetuados, de forma a compilar toda a informação fornecida pelos dois rebatimentos. Salienta-se que se poderia ter optado pela representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, através da sua projeção horizontal (no plano  $XY$  rebatido e transladado) e da sua projeção frontal (no plano  $XZ$ , rebatido e transladado).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Representação do plano frontal (de frente)  $\varphi$ , que contém a base da pirâmide:*

Em primeiro lugar, pelo ponto do eixo  $Y_r'$  que tem 7 cm de afastamento (no plano  $XY$  rebatido e transladado), conduziu-se uma perpendicular à charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) e determinou-se, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , a perspectiva do ponto do eixo  $Y$  que tem 7 cm de afastamento.

Em seguida, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ). Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ , com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

*Determinação da perspectiva do quadrado [ABCD]:*

O ponto  $A$  pertence ao plano  $\varphi$  e é um ponto com cota nula, pelo que o ponto  $A$  é necessariamente um ponto do traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ). Assim, por  $A_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $A$ , no rebatimento do plano  $XZ$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e$ ) e determinou-se  $A_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ , determinando-se, ainda, a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$  sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ). Por outro lado, atendendo a que o ponto  $A$  é um ponto do plano  $XY$  (porque tem cota nula), o ponto  $A$  está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho – tem-se, imediatamente,  $A_1 \equiv A$ .

O ponto  $B$  pertence ao plano  $\varphi$  e é um ponto com abcissa nula, pelo que o ponto  $B$  é necessariamente um ponto do traço lateral do plano  $\varphi$  ( $p_\varphi$ ). Assim, por  $B_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $B$ , no rebatimento do plano  $XZ$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e$ ) e determinou-se  $B_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $B$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , determinando-se, ainda, a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$  sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Por outro lado, atendendo a que o ponto  $B$  é um ponto do plano  $YZ$  (porque tem abcissa nula), o ponto  $B$  está coincidente com a sua projeção lateral, o que se assinalou devidamente no desenho – tem-se, imediatamente,  $B_3 \equiv B$ .

Para inverter o rebatimento dos restantes dois vértices do quadrado (os pontos  $C$  e  $D$ ), optou-se por recorrer a uma reta do plano  $\varphi$ , à qual aqueles pontos pertencem. Uma vez que os lados  $[AB]$  e  $[CD]$  do quadrado são paralelos entre si, optou-se por recorrer à reta suporte daqueles dois lados. Por outro lado, uma vez que as perspectivas dos pontos  $A$  e  $B$  já foram determinadas, é possível definir, de forma imediata, as perspectivas da reta suporte do lado  $[AB]$ .

Assim, desenhou-se a reta  $a_{2r}$ , que é, em rebatimento, a reta suporte do lado  $[AB]$  – a reta  $a_{2r}$  está definida pelos pontos  $A_{2r}$  e  $B_{2r}$ . Em seguida, foi possível desenhar, igualmente, a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$  ( $a_2$ ), que está definida pelos pontos  $A_2$  e  $B_2$  (as perspectivas das projeções frontais dos pontos  $A$  e  $B$ ). Desenhou-se, ainda, a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , que está definida pelas perspectivas propriamente ditas dos pontos  $A$  e  $B$ .

Para inverter o rebatimento dos pontos  $C$  e  $D$  recorreu-se à reta  $b$ , que contém aqueles pontos (a reta  $b$  é a reta suporte do lado  $[CD]$  do quadrado) – a reta  $b_{2r}$  é a projeção frontal da reta  $b$ , em rebatimento, e passa por  $C_{2r}$  e por  $D_{2r}$  (a reta  $b$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ . A reta  $b_{2r}$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $J_{2r}$  (que é a projeção frontal, em rebatimento, do ponto da reta  $b$  com abcissa nula). Por  $J_{2r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $J$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $J$ . A reta  $b$  é uma reta do plano  $\varphi$ , pelo que o ponto  $J$  é um ponto de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ). Assim, a perspectiva do ponto  $J$  situa-se sobre a perspectiva de  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{2r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $b$ , que é o ponto  $J$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ . Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção frontal da reta  $b$  ( $b_2$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $b$ ). A perspectiva da projeção frontal da reta  $b$  ( $b_2$ ) está definida por um ponto ( $J_2$ , que é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $J$ ) e por uma direção (é paralela a  $a_2$ , a perspectiva da projeção frontal da reta  $a$ ). A perspectiva propriamente dita da reta  $b$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto  $J$ ) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $C$ ), sobre  $b_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$  sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto  $D$  (conduzindo, por  $D_{2r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$  (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ ), bem como a perspectiva da projeção frontal do ponto  $D$  ( $D_2$ ), sobre a perspectiva da projeção frontal da reta  $b$  ( $b_2$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto  $V$ :*

Para determinar a perspectiva do ponto  $V$  e necessário, antes de mais, determinar a perspectiva da projeção frontal da reta  $h$  ( $h_2$ ). A reta  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ) é uma reta do plano coordenado  $XZ$  e está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo  $Z_r'$  – o ponto  $N_{2r}$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $X_r'$ ). Assim, por  $N_{2r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e$ ) e determinou-se a perspectiva de  $N_2$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Já temos um ponto para definir a reta  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta  $h_2$  (a projeção frontal da reta  $h$ ) é paralela ao eixo  $X$ , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta. Nesse sentido, desenhou-se a perspectiva da reta  $h_2$ , que passa pela perspectiva de  $N_2$  e é paralela à perspectiva do eixo  $X$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Depois, por  $Q_2$ , (a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e$ ) e por  $Q_1$ , (a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ . A perpendicular à charneira (reta  $e$ ) que passa por  $Q_2$ , permitiu-nos, ainda, determinar  $Q_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q$ ) sobre  $h_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $h$ ). Por outro lado, a perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) que passa por  $Q_1$ , permitiu-nos, também, determinar  $Q_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $Q$ ), sobre  $h_\phi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ).

Por fim, por  $V_1$ , (a projeção horizontal do ponto  $V$ , em rebatimento), conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se  $V_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V$ ) sobre a perspectiva do eixo  $X$ , bem como a perspectiva propriamente dita do ponto  $V$  sobre  $h_2$  (a perspectiva da projeção frontal da reta  $h$ ). O ponto  $V$  é um ponto com abcissa nula, pelo que o ponto  $V$  está coincidente com a sua projeção frontal, o que se assinalou em perspectiva – tem-se, imediatamente,  $V_2 \equiv V$ .

Por fim, se bem que não fosse estritamente necessário, desenhou-se a perspectiva da reta  $h$  (que está definida por dois pontos – as perspectivas dos pontos  $V$  e  $Q$ ), bem como  $h_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal da reta  $h$  (e que está igualmente definida por dois pontos –  $V_1$  e  $Q_1$ ).

#### Determinação da perspectiva da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada  $[ABCV]$ . Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice  $D$ . Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[AD]$  e  $[CD]$ , da base, e a aresta lateral  $[DV]$ ). Salienta-se que a aresta lateral  $[BV]$  é invisível, pois separa duas faces da pirâmide que são invisíveis (as faces laterais  $[ABV]$  e  $[BCV]$ ).

As faces laterais  $[ADV]$  e  $[CDV]$  são visíveis, bem como a base  $[ABCD]$ . Já as faces laterais  $[ABV]$  e  $[BCV]$  são invisíveis.

Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais dos vértices  $C$  e  $D$  da pirâmide, por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (a pirâmide, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\phi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado XZ*, e da sua translação, do rebatimento do *plano coordenado XY* e da sua translação, da construção da projeção frontal do quadrado em rebatimento, da representação da reta  $h$  tanto em projeção horizontal como em projeção frontal (em rebatimento), das perpendiculares à charneira e, ainda, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento.

## 1243.

## Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo  $Z$  faz um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo  $X$  e um ângulo de  $110^\circ$  com a perspectiva do eixo  $Y$ , as perspectivas destes dois eixos (o eixo  $X$  e o eixo  $Y$ ) fazem, entre si, um ângulo de  $130^\circ$ , que é o ângulo restante ( $110^\circ + 120^\circ + 130^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

## Resolução:

O hexágono [ABCDEF] e o retângulo [EFGH] estão contidos num plano horizontal (de nível), que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que **nenhuma das duas figuras se projeta em verdadeira grandeza** (as perspectivas do hexágono e do retângulo não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que as duas figuras estão contidas num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao *plano coordenado horizontal* (o plano  $XY$ ), sabe-se que ambas as figuras se projetam em verdadeira grandeza no *plano coordenado  $XY$*  – o hexágono [ABCDEF] e a sua projeção horizontal (a sua projeção no *plano coordenado  $XY$* ) são duas figuras geometricamente iguais, tal como o retângulo [EFGH] e a sua projeção horizontal (a sua projeção no *plano coordenado  $XY$* ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado  $XY$**  (o plano no qual as duas figuras se projetam em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado  $XY$*  pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

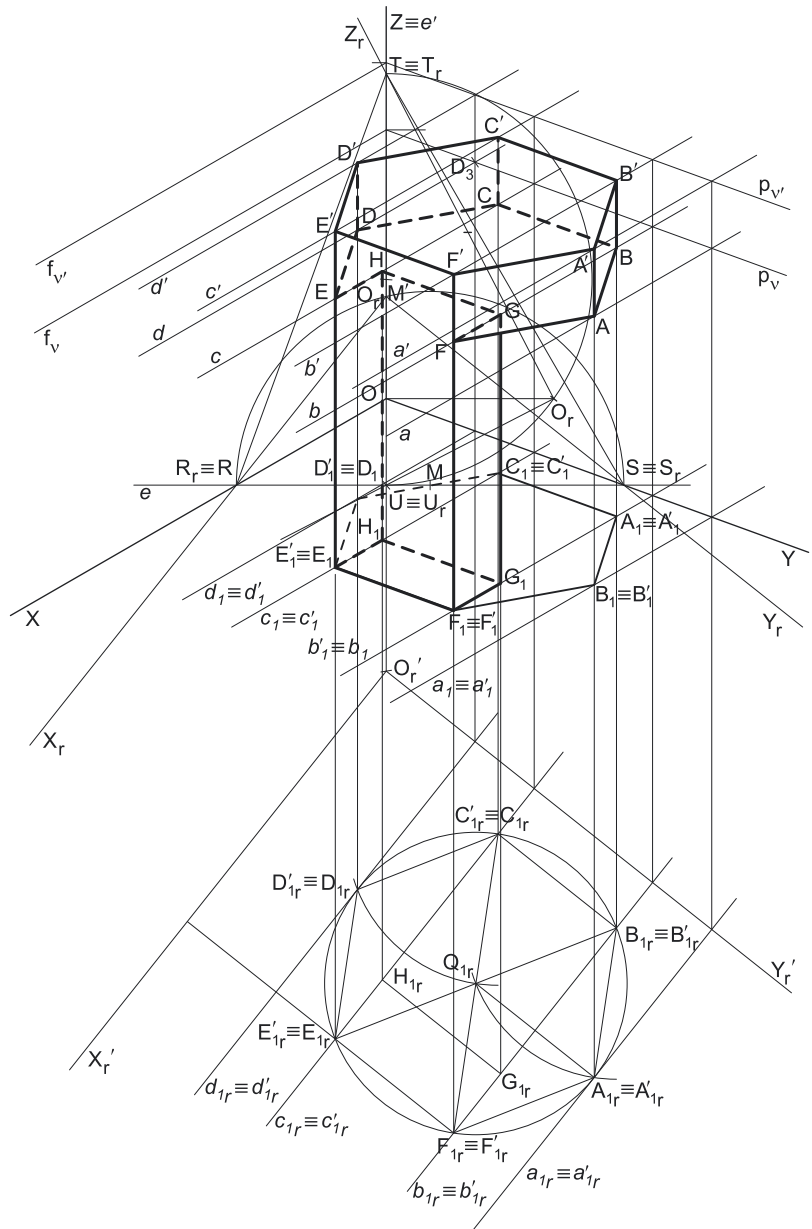
*Rebatimento do plano coordenado  $XY$ :*

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado  $XY$* ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado [RS] do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo  $Z$ ). Os pontos  $R$  e  $S$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O rebatimento do *plano coordenado  $XY$*  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano  $XY$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do lado [RS] do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Construção das projeções horizontais do hexágono [ABCDEF] e do retângulo [EFGH], em verdadeira grandeza:*

No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** dos pontos **E** e **F** em verdadeira grandeza (8 cm). Em seguida, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **E** e **F** em verdadeira grandeza (5 cm e 9 cm, respetivamente). A partir das abscissas e dos afastamentos dos dois pontos, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais dos pontos **E** e **F**, em rebatimento ( $E_{1r}$  e  $F_{1r}$ , respetivamente).

Em seguida, a partir de  $E_{1r}$  e de  $F_{1r}$  (as projeções horizontais dos pontos **E** e **F**, em rebatimento), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do hexágono, em rebatimento, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do centro do hexágono, em rebatimento). Salienta-se que a determinação de  $Q_{1r}$ , se processou através da construção de um triângulo equilátero, de que  $E_{1r}$ ,  $F_{1r}$  e  $Q_{1r}$  são os vértices.

Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto **Q**, em rebatimento) e com raio até  $E_{1r}$  e  $F_{1r}$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao hexágono (em verdadeira grandeza, em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu concluir a construção da **projeção horizontal do hexágono**, em verdadeira grandeza e, dessa forma, determinar os restantes quatro vértices do polígono (em rebatimento) – o hexágono  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}E_{1r}F_{1r}]$  é a projeção horizontal do hexágono [ABCDEF], em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ .

Note que, na construção da projeção horizontal do hexágono em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ) se respeitou que os pontos **E** e **F** pertencem à face lateral de maior abscissa do prisma (como o enunciado refere expressamente). Assim,  $E_{1r}$  e  $F_{1r}$  são os vértices de maior abscissa do hexágono  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}E_{1r}F_{1r}]$ .

Em seguida, a partir de  $E_{1r}$  e  $F_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do retângulo [EFGH]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $G_{1r}$  e  $H_{1r}$  (as projeções horizontais dos outros dois vértices do retângulo, em rebatimento) – o retângulo  $[E_{1r}F_{1r}G_{1r}H_{1r}]$  é a projeção horizontal do retângulo [EFGH], em verdadeira grandeza (em no rebatimento do plano  $XY$ ).

Tendo em conta que o lado [EF] do retângulo [EFGH] mede 4 cm (a diferença das abscissas dos dois pontos), os lados do retângulo que medem 2 cm (de acordo com os dados do enunciado) são os outros dois lados do retângulo, que são os seus lados menores.

Note que, na construção da projeção horizontal do retângulo em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ) se respeitou que os pontos **E** e **F** pertencem à face de maior abscissa do paralelepípedo (como o enunciado refere expressamente). Assim,  $E_{1r}$  e  $F_{1r}$  são os vértices de maior abscissa do retângulo  $[E_{1r}F_{1r}G_{1r}H_{1r}]$ .

O prisma hexagonal é um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases (que são planos horizontais). Assim, as arestas laterais do sólido estão contidas em retas verticais, que são retas projetantes horizontais. Nesse sentido, os vértices da base superior do prisma (a base  $[A'B'C'D'E'F']$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da base [ABCDEF], o que se assinalou imediatamente –  $A'_{1r} \equiv A_{1r}$ ,  $B'_{1r} \equiv B_{1r}$ ,  $C'_{1r} \equiv C_{1r}$ ,  $D'_{1r} \equiv D_{1r}$ ,  $E'_{1r} \equiv E_{1r}$  e  $F'_{1r} \equiv F_{1r}$ . Este raciocínio permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do prisma (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ).

O paralelepípedo é um **prisma reto**, pelo que as suas arestas laterais estão igualmente contidas em retas ortogonais aos planos das bases (que são planos horizontais). Assim, as arestas laterais do sólido estão igualmente contidas em retas verticais, que são retas projetantes horizontais. Nesse sentido, os vértices da face superior do paralelepípedo (a face [EFGH]) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da face inferior. No entanto, para não sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações (atribuindo notações distintas aos vértices da face inferior), e uma vez que a face inferior do paralelepípedo está contida no próprio plano  $XY$ , considerou-se que a face inferior do paralelepípedo é o retângulo que é a projeção horizontal do retângulo [EFGH] – assim, a face inferior do paralelepípedo é o retângulo  $[E_{1r}F_{1r}G_{1r}H_{1r}]$ .

Para determinar as perspetivas do hexágono [ABCDEF], do retângulo [EFGH] e dos dois prismas é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $v$  (o plano horizontal que contém as duas figuras) e, ainda, o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma hexagonal).

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém o hexágono [ABCDEF] e o retângulo [EFGH]:*

Para tal, é necessário determinar a perspetiva da cota do plano  $v$  (o plano horizontal que contém os dois polígonos), que se mede sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo  $Z$  sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo  $Z$ , para determinar a perspetiva da cota do plano  $v$ .

O rebatimento do eixo  $Z$  pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo  $Z$ , o **rebatimento dos planos coordenados** (um plano coordenado que contenha o eixo  $Z$ ) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo  $Z$ .

Nesse sentido, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a perspetiva do eixo  $Z$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto **O** e cuja hipotenusa está contida na perspetiva do eixo  $Z$  – esse triângulo é, na presente situação, o triângulo [TOU] (sendo **U** o ponto em que o plano projetante do eixo  $Z$  corta o lado [RS] do triângulo fundamental). Nesse sentido, pontos **T** e **U** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $T_r \equiv T$  e  $U_r \equiv U$ .

Em seguida, determinou-se o ponto **M'** (o ponto médio do segmento [TU], que é a hipotenusa do triângulo retângulo [TOU]) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033. e respetivo relatório).

Depois, conduziu-se, pela perspetiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (a reta  $e'$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é um ponto fixo. A reta definida por  $O_r$  e por  $U_r$  é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Z$  com o plano coordenado  $XY$  (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo  $Z_r$  é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto  $O_r$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 8 cm (a cota do plano  $v$ , que é a cota dos pontos  $E$  e  $F$ , dada no enunciado) e determinou-se um ponto, que não se identificou. Esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Z$  que tem 8 cm de cota. Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o hexágono  $[ABCDEF]$  e o retângulo  $[EFGH]$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Representação do plano horizontal (de nível)  $v'$ , que contém a base de superior do prisma hexagonal (o hexágono  $[A'B'C'E'D'F']$ ):*

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos horizontais (de nível) que contém as bases. O prisma tem 2 cm de altura e a sua base inferior tem 8 cm de cota, pelo que o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma) tem necessariamente 10 cm de cota ( $8 + 2 = 10$ ). Assim, há que determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ , um ponto com 10 cm de cota. Tendo em conta que já temos o eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ), é possível, em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $Z_r$ , medir a cota do plano  $v'$ .

Nesse sentido, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 10 cm (a cota do plano  $v'$ ) e determinou-se um ponto, que não se identificou. Esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Z$  que tem 10 cm de cota. Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . O plano horizontal (de nível)  $v'$  que contém o hexágono  $[A'B'C'D'E'F']$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v'$  –  $f_{v'}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v'$ ) e  $p_{v'}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v'$ ). Note que  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v'$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ) é uma reta de topo do plano  $v'$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v'$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). Por outro lado, o plano  $v'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{v'}$ ).

*Inversão do rebatimento do plano  $XY$  e determinação das perspectivas dos vértices  $A$  e  $A'$  do sólido:*

Para inverter o rebatimento dos vértices  $A$  e  $A'$  do prisma optou-se por recorrer a retas dos planos  $v$  e  $v'$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas  $a$  e  $a'$ . A reta  $a$  é uma reta do plano  $v$ , contém o ponto  $A$  e é paralela ao eixo  $X$ . A reta  $a'$  é uma reta do plano  $v'$ , contém o ponto  $A'$  e é igualmente paralela ao eixo  $X$ . As duas retas têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido) – a reta  $a_{1r} \equiv a'_{1r}$  é a projeção horizontal (em rebatimento) das retas  $a$  e  $a'$  e está definida por um ponto (passa por  $A_{1r} \equiv A'_{1r}$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $X_r$ ). Cada uma das retas ( $a$  e  $a'$ ) está definida por um ponto e por uma direção.

A reta  $a_{1r} \equiv a'_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção horizontal dos traços laterais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspectivas desses pontos, sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) e sobre a perspectiva de  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ). Já temos um ponto para definir a perspectiva de cada uma das duas retas (as retas  $a$  e  $a'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Tendo em conta que as retas  $a$  e  $a'$  são paralelas ao eixo  $X$ , já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das duas retas. A perspectiva da reta  $a$  fica definida pela perspectiva do seu traço lateral (que não se identificou e que se situa sobre a perspectiva de  $p_v$ ) e pela direção da perspectiva de  $f_v$  (é paralela ao traço frontal do plano  $v$  e ao eixo  $X$ ). A perspectiva da reta  $a'$  fica definida pela perspectiva do seu traço lateral (que não também se identificou e que se situa sobre a perspectiva de  $p_{v'}$ ) e pela direção da perspectiva de  $f_{v'}$  (é paralela ao traço frontal do plano  $v'$  e ao eixo  $X$ ).

Este procedimento permitiu-nos, ainda, determinar as perspectivas das projeções horizontais das duas retas ( $a_1 \equiv a'_1$ ), que estão definidas pelas perspectivas das projeções horizontais dos seus traços laterais (que não se identificaram) e pela direção da perspectiva do eixo  $X$ , o que nos permitiu desenhá-las imediatamente.

Por fim, conduziu-se, por  $A_{1r} \equiv A'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_1 \equiv A'_1$  (as perspectivas das projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $A'$ ), sobre  $a_1 \equiv a'_1$  (as perspectivas das projeções horizontais das retas  $a$  e  $a'$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspectiva do ponto  $A$  (sobre a perspectiva da reta  $a$ ), bem como a perspectiva do ponto  $A'$  (sobre a perspectiva da reta  $a'$ ).

*Determinação das perspectivas dos vértices  $B$ ,  $B'$ ,  $F$ ,  $F'$  e  $G$ , do sólido:*

Para inverter o rebatimento dos vértices  $B$ ,  $B'$ ,  $F$ ,  $F'$  e  $G$  do sólido optou-se por recorrer a retas dos planos  $v$  e  $v'$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas  $b$  e  $b'$ . A reta  $b$  é uma reta do plano  $v$ , contém os pontos  $B$ ,  $F$  e  $G$  e é paralela ao eixo  $X$ . A reta  $b'$  é uma reta do plano  $v'$ , contém os pontos  $B'$  e  $F'$  e é igualmente paralela ao eixo  $X$ . As duas retas têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido) – a reta  $b_{1r} \equiv b'_{1r}$  é a projeção horizontal (em rebatimento) das retas  $b$  e  $b'$  e está definida por três pontos (passa por  $B_{1r} \equiv B'_{1r}$ , por  $F_{1r} \equiv F'_{1r}$ , e, ainda, por  $G_{1r}$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $X_r$ ). Cada uma das retas ( $b$  e  $b'$ ) está definida, no mínimo, por um ponto e por uma direção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $b_{1r} \equiv b'_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção horizontal dos traços laterais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspetivas desses pontos, sobre a perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) e sobre a perspetiva de  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva de cada uma das duas retas (as retas  $b$  e  $b'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Tendo em conta que as retas  $b$  e  $b'$  são paralelas ao eixo  $X$ , já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das duas retas. A perspetiva da reta  $b$  fica definida pela perspetiva do seu traço lateral (que não se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $p_v$ ) e pela direção da perspetiva de  $f_v$  (é paralela ao traço frontal do plano  $v$  e ao eixo  $X$ ). A perspetiva da reta  $b'$  fica definida pela perspetiva do seu traço lateral (que não também se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $p_{v'}$ ) e pela direção da perspetiva de  $f_{v'}$  (é paralela ao traço frontal do plano  $v'$  e ao eixo  $X$ ).

Este procedimento permitiu-nos, ainda, determinar as perspetivas das projeções horizontais das duas retas ( $b_1 \equiv b'_1$ ), que estão definidas pelas perspetivas das projeções horizontais dos seus traços laterais (que não se identificaram) e pela direção da perspetiva do eixo  $X$ , o que nos permitiu desenhá-las imediatamente.

Depois conduziu-se, por  $B_{1r} \equiv B'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_1 \equiv B'_1$  (as perspetivas das projeções horizontais dos pontos  $B$  e  $B'$ ), sobre  $b_1 \equiv b'_1$  (as perspetivas das projeções horizontais das retas  $b$  e  $b'$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $B$  (sobre a perspetiva da reta  $b$ ), bem como a perspetiva do ponto  $B'$  (sobre a perspetiva da reta  $b'$ ).

Em seguida, conduziu-se, por  $F_{1r} \equiv F'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $F_1 \equiv F'_1$  (as perspetivas das projeções horizontais dos pontos  $F$  e  $F'$ ), sobre  $b_1 \equiv b'_1$  (as perspetivas das projeções horizontais das retas  $b$  e  $b'$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $F$  (sobre a perspetiva da reta  $b$ ), bem como a perspetiva do ponto  $F'$  (sobre a perspetiva da reta  $b'$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $G_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $G_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $G$ ), sobre  $b_1$  (a perspetiva da projeção horizontal da reta  $b$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $G$  (sobre a perspetiva da reta  $b$ ).

### Determinação das perspetivas dos vértices $C$ , $C'$ , $E$ , $E'$ e $H$ , do sólido:

Para inverter o rebatimento dos vértices  $C$ ,  $C'$ ,  $E$ ,  $E'$  e  $H$  do sólido optou-se por recorrer a retas dos planos  $v$  e  $v'$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas  $c$  e  $c'$ . A reta  $c$  é uma reta do plano  $v$ , contém os pontos  $C$ ,  $E$  e  $H$  e é paralela ao eixo  $X$ . A reta  $c'$  é uma reta do plano  $v'$ , contém os pontos  $C'$  e  $E'$  e é igualmente paralela ao eixo  $X$ . As duas retas têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido) – a reta  $c_{1r} \equiv c'_{1r}$  é a projeção horizontal (em rebatimento) das retas  $c$  e  $c'$  e está definida por três pontos (passa por  $C_{1r} \equiv C'_{1r}$ , por  $E_{1r} \equiv E'_{1r}$ , e, ainda, por  $H_{1r}$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $X_r'$ ). Cada uma das retas ( $c$  e  $c'$ ) está definida, no mínimo, por um ponto e por uma direção.

A reta  $c_{1r} \equiv c'_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção horizontal dos traços laterais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspetivas desses pontos, sobre a perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) e sobre a perspetiva de  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva de cada uma das duas retas (as retas  $c$  e  $c'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Tendo em conta que as retas  $c$  e  $c'$  são paralelas ao eixo  $X$ , já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das duas retas. A perspetiva da reta  $c$  fica definida pela perspetiva do seu traço lateral (que não se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $p_v$ ) e pela direção da perspetiva de  $f_v$  (é paralela ao traço frontal do plano  $v$  e ao eixo  $X$ ). A perspetiva da reta  $c'$  fica definida pela perspetiva do seu traço lateral (que não também se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $p_{v'}$ ) e pela direção da perspetiva de  $f_{v'}$  (é paralela ao traço frontal do plano  $v'$  e ao eixo  $X$ ).

Este procedimento permitiu-nos, ainda, determinar as perspetivas das projeções horizontais das duas retas ( $c_1 \equiv c'_1$ ), que estão definidas pelas perspetivas das projeções horizontais dos seus traços laterais (que não se identificaram) e pela direção da perspetiva do eixo  $X$ , o que nos permitiu desenhá-las imediatamente.

Depois conduziu-se, por  $C_{1r} \equiv C'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_1 \equiv C'_1$  (as perspetivas das projeções horizontais dos pontos  $C$  e  $C'$ ), sobre  $c_1 \equiv c'_1$  (as perspetivas das projeções horizontais das retas  $c$  e  $c'$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $C$  (sobre a perspetiva da reta  $c$ ), bem como a perspetiva do ponto  $C'$  (sobre a perspetiva da reta  $c'$ ).

Em seguida, conduziu-se, por  $E_{1r} \equiv E'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $E_1 \equiv E'_1$  (as perspetivas das projeções horizontais dos pontos  $E$  e  $E'$ ), sobre  $c_1 \equiv c'_1$  (as perspetivas das projeções horizontais das retas  $c$  e  $c'$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $E$  (sobre a perspetiva da reta  $c$ ), bem como a perspetiva do ponto  $E'$  (sobre a perspetiva da reta  $c'$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $H_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $H_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $H$ ), sobre  $c_1$  (a perspetiva da projeção horizontal da reta  $c$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspetiva do ponto  $H$  (sobre a perspetiva da reta  $c$ ).

### Determinação das perspetivas dos vértices $D$ e $D'$ , do sólido:

Para inverter o rebatimento dos vértices  $D$  e  $D'$  do prisma optou-se por recorrer a retas dos planos  $v$  e  $v'$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas  $d$  e  $d'$ . A reta  $d$  é uma reta do plano  $v$ , contém o ponto  $D$  e é paralela ao eixo  $X$ . A reta  $d'$  é uma reta do plano  $v'$ , contém o ponto  $D'$  e é igualmente paralela ao eixo  $X$ . As duas retas têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido) – a reta  $d_{1r} \equiv d'_{1r}$  é a projeção horizontal (em rebatimento) das retas  $d$  e  $d'$  e está definida por um ponto (passa por  $D_{1r} \equiv D'_{1r}$ ) e por uma direção (é paralela ao eixo  $X_r'$ ). Cada uma das retas ( $d$  e  $d'$ ) está definida por um ponto e por uma direção.

A reta  $d_{1r} \equiv d'_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção horizontal dos traços laterais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspetivas desses pontos, sobre a perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) e sobre a perspetiva de  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva de cada uma das duas retas (as retas  $d$  e  $d'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que as retas  $d$  e  $d'$  são paralelas ao eixo  $X$ , já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das duas retas. A perspectiva da reta  $d$  fica definida pela perspectiva do seu traço lateral (que não se identificou e que se situa sobre a perspectiva de  $p_v$ ) e pela direção da perspectiva de  $f_v$  (é paralela ao traço frontal do plano  $v$  e ao eixo  $X$ ). A perspectiva da reta  $d'$  fica definida pela perspectiva do seu traço lateral (que não também se identificou e que se situa sobre a perspectiva de  $p_{v'}$ ) e pela direção da perspectiva de  $f_{v'}$  (é paralela ao traço frontal do plano  $v'$  e ao eixo  $X$ ).

Este procedimento permitiu-nos, ainda, determinar as perspectivas das projeções horizontais das duas retas ( $d_1 \equiv d'_1$ ), que estão definidas pelas perspectivas das projeções horizontais dos seus traços laterais (que não se identificaram) e pela direção da perspectiva do eixo  $X$ , o que nos permitiu desenhá-las imediatamente.

Por fim, conduziu-se, por  $D_{1r} \equiv D'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $D_1 \equiv D'_1$  (as perspectivas das projeções horizontais dos pontos  $D$  e  $D'$ ), sobre  $d_1 \equiv d'_1$  (as perspectivas das projeções horizontais das retas  $d$  e  $d'$ ). A mesma perpendicular à charneira permitiu-nos determinar, ainda a perspectiva do ponto  $D$  (sobre a perspectiva da reta  $d$ ), bem como a perspectiva do ponto  $D'$  (sobre a perspectiva da reta  $d'$ ).

#### Determinação das perspectivas do sólido:

Por fim, a partir das perspectivas dos dezoito vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspectiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as arestas visíveis e as arestas invisíveis. Salienta-se que os pontos  $E$  e  $F$ , sendo dois vértices comuns ao paralelepípedo e ao prisma, não definem qualquer aresta do sólido final.

De facto, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um paralelepípedo e um prisma hexagonal regular), as faces do objeto que resultam de duas faces complanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso do segmento de reta  $[EF]$ . De facto, o segmento de reta  $[EF]$  **não é** uma aresta do sólido, porque não resulta da interseção entre duas faces distintas (aquele segmento de reta é, na prática, uma linha auxiliar que está contida numa determinada face do objeto e, por isso, não é uma aresta do sólido).

Sublinha-se que, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente «**um sólido composto**»), o segmento  $[EF]$  seria, efetivamente, uma aresta comum aos dois sólidos.

Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais dos vértices de qualquer dos sólidos, por não serem necessárias. Nesse sentido, também não se representaram as perspectivas de qualquer das projeções do objeto final. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a face superior do paralelepípedo e a base inferior do prisma) e o plano  $v'$  (o plano que contém a base superior do prisma), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As perspectivas do sólido representaram-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção das projeções horizontais dos dois sólidos em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, os traçados referentes ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ , para a determinação das perspectivas das cotas dos planos horizontais (de nível).



## 1244.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de  $100^\circ$  com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de  $140^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de  $120^\circ$ , que é o ângulo restante ( $100^\circ + 140^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações (recorde que as dimensões do *triângulo fundamental* são arbitrárias).

### Resolução:

Os quadrados **[ABCD]** e **[DEFG]** estão contidos no plano coordenado horizontal (o plano **XY**), que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das duas figuras se projeta em verdadeira grandeza (as perspectivas dos dois quadrados não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que as duas figuras estão contidas no plano coordenado horizontal (o plano **XY**), sabe-se que ambas as figuras estão em verdadeira grandeza no plano coordenado **XY** – o quadrado **[ABCD]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado **XY**) são a mesma figura, tal como o quadrado **[DEFG]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado **XY**) são a mesma figura. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual as duas figuras estão em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado **XY** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

#### Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XY**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta suporte do lado do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo **Z**.

O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

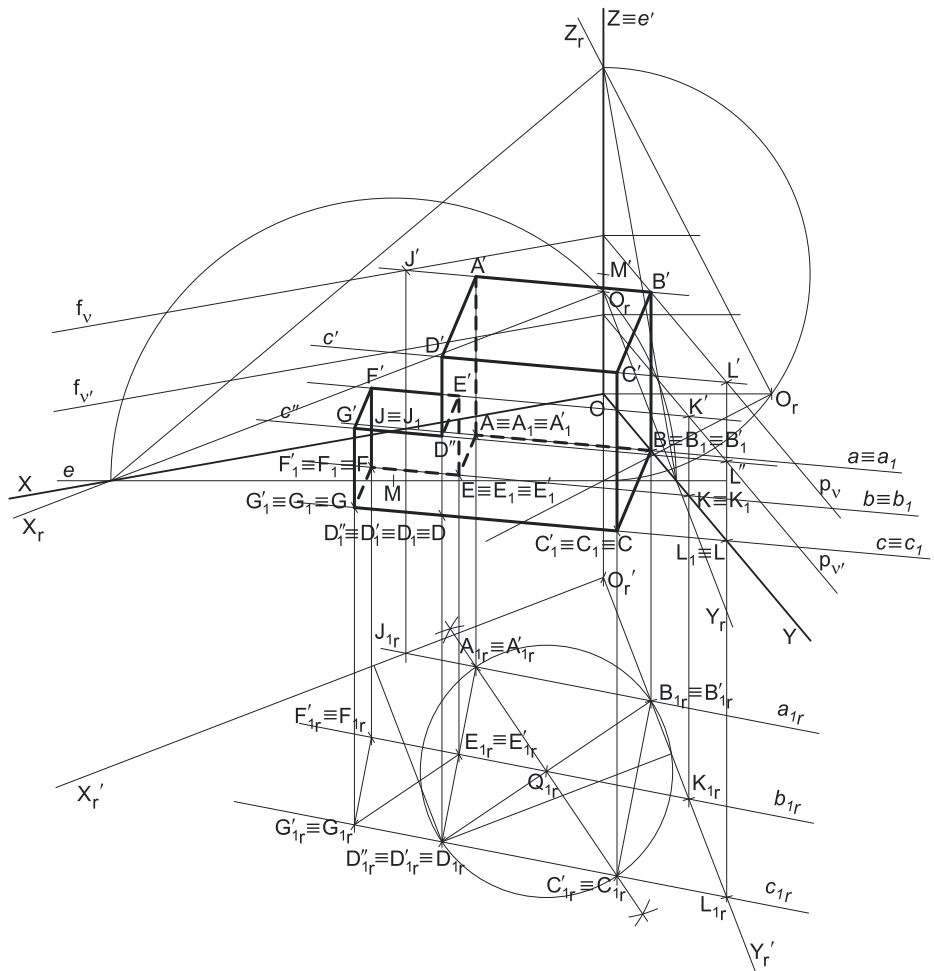
Em seguida, determinou-se **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspectiva do eixo **Z**). O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Y<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>**. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**.

#### Construção das projeções horizontais dos quadrados **[ABCD]** e **[DEFG]**, em verdadeira grandeza:

No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo **X<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **D** em verdadeira grandeza (6,5 cm) – salienta-se que o ponto **B** tem abscissa nula. Em seguida, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **B** e **D** em verdadeira grandeza (3,5 cm e 5 cm, respetivamente). A partir das abscissas e dos afastamentos dos dois pontos, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais dos pontos **B** e **D**, em rebatimento (**B<sub>1r</sub>** e **D<sub>1r</sub>**, respetivamente). Note que **B<sub>1r</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**, em rebatimento) se situa sobre o eixo **Y<sub>r</sub>'**, pois o ponto **B** tem abscissa nula.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, a partir de  $B_{1r}$  e de  $D_{1r}$  (as projeções horizontais dos pontos  $B$  e  $D$ , em rebatimento), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$ , em rebatimento, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do centro da circunferência circunscrita ao quadrado, em rebatimento), que é o ponto médio do segmento  $[B_{1r}D_{1r}]$ . Salienta-se que a determinação de  $Q_{1r}$  se processou através da construção da mediatriz do segmento  $[B_{1r}D_{1r}]$ .

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) e com raio até  $B_{1r}$  e  $D_{1r}$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado (em verdadeira grandeza, em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu concluir a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza e, dessa forma, determinar os restantes dois vértices do polígono (em rebatimento) – o quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ .

Em seguida, determinou-se  $E_{1r}$  (a projeção horizontal, em rebatimento, do vértice  $E$ , do quadrado  $[DEFG]$ ), que é o ponto médio do segmento  $[A_{1r}D_{1r}]$  (conforme o enunciado refere expressamente). A partir de  $D_{1r}$  e  $E_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado  $[DEFG]$** , em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $F_{1r}$  e  $G_{1r}$  (as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[D_{1r}E_{1r}F_{1r}G_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado  $[DEFG]$ , em verdadeira grandeza (em no rebatimento do plano  $XY$ ).

Note que, na construção do quadrado  $[D_{1r}E_{1r}F_{1r}G_{1r}]$ , se atendeu ao facto de  $D$  ser o vértice de maior afastamento do quadrado (como o enunciado refere expressamente).

As arestas dos cubos que não são horizontais (de nível) são necessariamente verticais (projetantes horizontais), pois são ortogonais aos planos que contêm as faces horizontais (de nível).

Nesse sentido, os vértices da face superior do primeiro cubo (a face  $[A'B'C'D']$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da face  $[ABCD]$ , o que se assinalou imediatamente –  $A'_{1r} \equiv A_{1r}$ ,  $B'_{1r} \equiv B_{1r}$ ,  $C'_{1r} \equiv C_{1r}$  e  $D'_{1r} \equiv D_{1r}$ . Este raciocínio permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do primeiro cubo (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ).

De forma semelhante, os vértices da face superior do segundo cubo (a face  $[D''E''F''G'']$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da face  $[DEFG]$ , o que se assinalou imediatamente –  $D''_{1r} \equiv D_{1r}$ ,  $E''_{1r} \equiv E_{1r}$ ,  $F''_{1r} \equiv F_{1r}$  e  $G''_{1r} \equiv G_{1r}$ . Este raciocínio permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do segundo cubo (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ).

Para determinar as perspectivas dos quadrados  $[ABCD]$  e  $[DEFG]$ , bem como dos dois cubos, é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar os planos  $v$  (o plano horizontal que contém a face superior do primeiro cubo), bem como o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a face superior do segundo cubo).

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém o quadrado  $[ABCD]$ :*

Para tal, é necessário determinar a perspectiva da cota do plano  $v$  (o plano horizontal que contém a face superior do primeiro cubo), que se mede sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo  $Z$  sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo  $Z$ , para determinar a perspectiva da cota do plano  $v$ .

O rebatimento do eixo  $Z$  pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo  $Z$ , o **rebatimento dos planos coordenados** (um plano coordenado que contenha o eixo  $Z$ ) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo  $Z$ .

Nesse sentido, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a perspectiva do eixo  $Z$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto  $O$  e cuja hipotenusa está contida na perspectiva do eixo  $Z$ . A hipotenusa desse triângulo retângulo tem um extremo no ponto em que o plano axonométrico interseca o eixo  $Z$  (ponto esse que não se identificou) e o outro extremo no ponto em que o plano projetante do eixo  $Z$  interseca o lado do triângulo fundamental que se opõe ao eixo  $Z$  (e que também não se identificou). Estes dois pontos, porque pertencem à charneira, rodam sobre si próprios.

Em seguida, determinou-se o ponto  $M'$  (o ponto médio da hipotenusa) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033, e respetivo relatório).

Depois, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (a reta  $e'$ ) e determinou-se  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo extremo da hipotenusa que pertence ao eixo  $Z$ , que é um ponto fixo. A reta que passa por  $O_r$  e pelo outro extremo da hipotenusa (que é outro ponto fixo) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Z$  com o plano coordenado  $XY$  (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo  $Z_r$  é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto  $O_r$ .

Em seguida, transportou-se para o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, a medida do lado do quadrado  $[ABCD]$  (que está, em verdadeira grandeza, em qualquer dos lados do quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$ ) e determinou-se um ponto, que não se identificou. Esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Z$  cuja cota é igual à medida do lado do quadrado  $[ABCD]$ , que é a medida da aresta do primeiro cubo. Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo  $Z$ . O plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o quadrado  $[A'B'C'D']$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Representação do plano horizontal (de nível)  $v'$ , que contém o quadrado  $[D''E''F''G'']$ :*

De forma semelhante, transportou-se para o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, a medida do lado do quadrado  $[DEFG]$  (que está, em verdadeira grandeza, em qualquer dos lados do quadrado  $[D_1E_1F_1G_1]$ ) e determinou-se um outro ponto, que também não se identificou. Esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Z$  cuja cota é igual à medida do lado do quadrado  $[DEFG]$ , que é a medida da aresta do segundo cubo. Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspetiva desse ponto, sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . O plano horizontal (de nível)  $v'$  que contém o quadrado  $[D''E''F''G'']$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $v' - f_{v'}$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v'$ ) e  $p_{v'}$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v'$ ). Note que  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v'$ , com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ) é uma reta de topo do plano  $v'$ , com abcissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v'$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). Por outro lado, o plano  $v'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{v'}$ ).

*Inversão do rebatimento do plano  $XY$  e determinação das perspetivas dos vértices  $A, A', B$  e  $B'$  do sólido:*

Para inverter o rebatimento dos pontos  $A$  e  $B$  optou-se por recorrer a uma reta do plano  $XY$  à qual aqueles dois pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos  $A$  e  $B$  recorreu-se à reta  $a$ , que é a reta suporte do lado  $[AB]$  do quadrado  $[ABCD]$ . A reta  $a_r$  (que está definida por  $A_{1r}$  e por  $B_{1r}$ ) é a projeção horizontal da reta  $a$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspetiva da projeção horizontal da reta  $a$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r$  no ponto  $B_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $a$  que tem abcissa nula). Por  $B_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ) sobre a perspetiva do eixo  $Y$ . Tendo em conta que o ponto  $B$  tem cota nula (o quadrado  $[ABCD]$  está contido no plano  $XY$ ), o ponto  $B$  é um ponto do eixo  $Y$ , pelo que está coincidente com a sua projeção horizontal – tem-se, imediatamente,  $B \equiv B_1$ . Já temos um ponto para definir a reta  $a$ , que é o ponto  $B$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $X_r$  no ponto  $J_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $a$  que tem afastamento nulo). Por  $J_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) sobre a perspetiva do eixo  $X$ . Tendo em conta que o ponto  $J$  tem cota nula, o ponto  $J$  é um ponto do eixo  $X$ , pelo que está coincidente com a sua projeção horizontal – tem-se, imediatamente,  $J \equiv J_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $a$ .

A projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_r$ ), em perspetiva, está definida por dois pontos – o ponto  $B_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ) e o ponto  $J_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ). Por outro lado, a perspetiva propriamente dita da reta  $a$  também está definida por dois pontos – as perspetivas propriamente ditas dos pontos  $B$  e  $J$ . Note que a reta  $a$  é uma reta do plano  $XY$ , pelo que está coincidente com a sua projeção horizontal – tem-se, imediatamente,  $a \equiv a_r$ .

O ponto  $B$  é imediatamente um dos vértices do quadrado  $[ABCD]$ . Por fim, conduziu-se, por  $A_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ), sobre  $a_r$  (a perspetiva da projeção horizontal da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$  – tem-se, imediatamente,  $A \equiv A_1$ , pois o ponto  $A$  é um ponto com cota nula e pertence à reta  $a$ .

Para inverter o rebatimento dos pontos  $A'$  e  $B'$  optou-se por recorrer a uma reta do plano  $v$  (o plano que contém a face  $[A'B'C'D']$  do primeiro cubo) à qual aqueles dois pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos  $A'$  e  $B'$  recorreu-se à reta  $a'$ , que é a reta suporte do lado  $[A'B']$  do quadrado  $[A'B'C'D']$ . Tenha em conta que, apesar de não se ter identificado, a reta  $a'$  tem a sua projeção horizontal coincidente com a projeção horizontal da reta  $a$ . Assim, a reta  $a'$  é a reta do plano  $v$  cuja projeção horizontal está coincidente com a projeção horizontal da reta  $a$ .

É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspetiva da reta  $a'$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Uma vez que a reta  $a'$  é uma reta do plano  $v$ , o ponto  $B'$  é também um ponto do plano  $v$  – é um ponto do plano  $v$  que tem abcissa nula. Nesse sentido, o ponto  $B'$  situa-se necessariamente sobre  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perpendicular à charneira que nos permitiu inverter o rebatimento do ponto  $B$  permitiu-nos, também, determinar a perspetiva do ponto  $B'$  sobre a perspetiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $a'$  em perspetiva. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Uma vez que a reta  $a'$  é uma reta do plano  $v$ , considerou-se que o ponto  $J'$  é o ponto da reta  $a'$  que tem afastamento nulo. Nesse sentido, o ponto  $J'$  também pertence ao plano  $v$  – é um ponto do plano  $v$  que tem afastamento nulo, pelo que o ponto  $J'$  situa-se necessariamente sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Assim, a perpendicular à charneira que nos permitiu inverter o rebatimento do ponto  $J$  permitiu-nos, também, determinar a perspetiva do ponto  $J'$  sobre a perspetiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $a'$  em perspetiva, o que nos permitiu desenhar a sua perspetiva (passando pelas perspetivas dos pontos  $B'$  e  $J'$ ).

O ponto  $B'$  é imediatamente um dos vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$ . Por fim, a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspetiva do ponto  $A$  permitiu-nos, igualmente, determinar a perspetiva do ponto  $A'$ , sobre a perspetiva da reta  $a'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação das perspectivas dos vértices E, E', F e F', do sólido:*

Para inverter o rebatimento dos pontos **E** e **F** optou-se por recorrer a uma reta do plano **XY** à qual aqueles dois pontos pertençam – a reta **b**, que é a reta suporte do lado **[EF]** do quadrado **[DEFG]**. A reta  $b_{1r}$  (que está definida por  $E_{1r}$  e por  $F_{1r}$ ) é a projecção horizontal da reta **b**, em rebatimento. Salienta-se que a reta **b** é paralela à reta **a**, porque o lado **[EF]** do quadrado **[DEFG]** é paralelo ao lado **[AB]** do quadrado **[ABCD]**. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projecção horizontal da reta **b**, que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção.

A reta  $b_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $K_{1r}$  (que é a projecção horizontal do ponto da reta **b** que tem abcissa nula). Por  $K_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_1$  (a perspectiva da projecção horizontal do ponto **K**) sobre a perspectiva do eixo **Y**. O ponto **K** é um ponto do eixo **Y**, pelo que está coincidente com a sua projecção horizontal – tem-se, imediatamente,  $K \equiv K_1$ . Já temos um ponto para definir a reta **b**, que é o ponto **K**. Falta-nos outro ponto ou uma direcção para definir a reta.

Uma vez que a reta **b** é paralela à reta **a**, também já temos a direcção que nos faltava para definir a reta **b**. Assim, desenhou-se a perspectiva da projecção horizontal da reta **b** ( $b_1$ ), que passa por  $K_1$  (a perspectiva da projecção horizontal do ponto **K**) e é paralela a  $a_1$  (a perspectiva da projecção horizontal da reta **a**). Tendo em conta que a reta **b** é uma reta do plano **XY**, a reta está coincidente com a sua projecção horizontal – tem-se, imediatamente,  $b \equiv b_1$ .

Por fim, conduziu-se, por  $E_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $E_1$  (a perspectiva da projecção horizontal do ponto **E**), sobre  $b_1$  (a perspectiva da projecção horizontal da reta **b**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **E** – tem-se, imediatamente,  $E \equiv E_1$ , pois o ponto **E** é um ponto com cota nula e pertence à reta **b**. De forma semelhante conduziu-se, por  $F_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $F_1$  (a perspectiva da projecção horizontal do ponto **F**), sobre  $b_1$  (a perspectiva da projecção horizontal da reta **b**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **F** – tem-se, imediatamente,  $F \equiv F_1$ , pois o ponto **F** é um ponto com cota nula e pertence à reta **b**.

Para inverter o rebatimento dos pontos **E'** e **F'** optou-se por recorrer a uma reta do plano  $v'$  (o plano que contém a face **[D''E'F'G']** do segundo cubo) à qual aqueles dois pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos **E'** e **F'** recorreu-se à reta  $b'$ , que é a reta suporte do lado **[E'F']** do quadrado **[D''E'F'G']**. Tenha em conta que, apesar de não se ter identificado, a reta  $b'$  tem a sua projecção horizontal coincidente com a projecção horizontal da reta **b**. Assim, a reta  $b'$  é a reta do plano  $v'$  cuja projecção horizontal está coincidente com a projecção horizontal da reta **b**.

Uma vez que a reta  $b'$  é uma reta do plano  $v'$ , considerou-se que o ponto  $K'$  é o ponto da reta  $b'$  que tem abcissa nula. Nesse sentido, o ponto  $K'$  também pertence ao plano  $v'$  – é um ponto do plano  $v'$  que tem abcissa nula, pelo que o ponto  $K'$  situa-se necessariamente sobre  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ). Assim, a perpendicular à charneira que nos permitiu inverter o rebatimento do ponto **K** permitiu-nos, também, determinar a perspectiva do ponto  $K'$  sobre a perspectiva de  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $b'$  em perspectiva. Falta-nos outro ponto ou uma direcção.

Uma vez que a reta  $b'$  é necessariamente paralela à reta **b** (porque são retas suporte de arestas paralelas do mesmo cubo), também já temos a direcção que nos faltava para definir a reta  $b'$ . Assim, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da reta  $b'$ , que passa por  $K'$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $K'$ ) e é paralela a **b** (a perspectiva propriamente dita da reta **b**).

Por fim, a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspectiva do ponto **E** permitiu-nos, igualmente, determinar a perspectiva do ponto **E'**, sobre a perspectiva da reta  $b'$ , tal como a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspectiva do ponto **F** nos permitiu, também, determinar a perspectiva do ponto **F'**, sobre a perspectiva da reta  $b'$ .

*Determinação das perspectivas dos vértices C, C', D, D', D'', G e G', do sólido:*

Para inverter o rebatimento dos pontos **C**, **D** e **G** optou-se por recorrer a uma reta do plano **XY** à qual aqueles dois pontos pertençam – a reta **c**, que é a reta suporte do lado **[CD]** do quadrado **[ABCD]** e, simultaneamente, a reta suporte do lado **[DG]** do quadrado **[DEFG]**. A reta  $c_1$  (que está definida por  $C_{1r}$ ,  $D_{1r}$  e  $G_{1r}$ ) é a projecção horizontal da reta **c**, em rebatimento. Salienta-se que a reta **c** é paralela às retas **a** e **b**, porque o lado **[CD]** do quadrado **[ABCD]** é paralelo ao lado **[EF]** do quadrado **[DEFG]** e ao lado **[AB]** do quadrado **[ABCD]**. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projecção horizontal da reta **c**, que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção.

A reta  $c_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $L_{1r}$  (que é a projecção horizontal do ponto da reta **c** que tem abcissa nula). Por  $L_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_1$  (a perspectiva da projecção horizontal do ponto **L**) sobre a perspectiva do eixo **Y**. O ponto **L** é um ponto do eixo **Y**, pelo que está coincidente com a sua projecção horizontal – tem-se, imediatamente,  $L \equiv L_1$ . Já temos um ponto para definir a reta **c**, que é o ponto **L**. Falta-nos outro ponto ou uma direcção para definir a reta.

Uma vez que a reta **c** é paralela às retas **a** e **b**, também já temos a direcção que nos faltava para definir a reta **c**. Assim, desenhou-se a perspectiva da projecção horizontal da reta **c** ( $c_1$ ), que passa por  $L_1$  (a perspectiva da projecção horizontal do ponto **L**) e é paralela a  $a_1$  (a perspectiva da projecção horizontal da reta **a**). Tendo em conta que a reta **c** é uma reta do plano **XY**, a reta está coincidente com a sua projecção horizontal – tem-se, imediatamente,  $c \equiv c_1$ .

Por fim, conduziu-se, por  $C_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $c_1$  (a perspectiva da projecção horizontal do ponto **c**), sobre  $C_1$  (a perspectiva da projecção horizontal da reta **C**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **C** – tem-se, imediatamente,  $C \equiv C_1$ , pois o ponto **C** é um ponto com cota nula e pertence à reta **c**. De forma semelhante, conduziu-se, por  $D_{1r}$  e por  $G_{1r}$ , as perpendiculares à charneira que por eles passam e determinaram-se  $D_1$  e  $G_1$  (as perspectivas das projecções horizontais dos pontos **D** e **G**), sobre  $c_1$  (a perspectiva da projecção horizontal da reta **c**), determinando-se, também, as perspectivas propriamente ditas daqueles dois pontos – tem-se, imediatamente,  $D \equiv D_1$  e  $G \equiv G_1$  (pois os pontos **D** e **G** são pontos com cota nula e pertencem à reta **b**).

Para inverter o rebatimento dos pontos **C'** e **D'** optou-se por recorrer a uma reta do plano  $v$  (o plano que contém a face **[A'B'C'D']** do primeiro cubo) à qual aqueles dois pontos pertençam – a reta  $c'$ , que é a reta suporte do lado **[C'D']** do quadrado **[A'B'C'D']**. Tenha em conta que, apesar de não se ter identificado, a reta  $c'$  tem a sua projecção horizontal coincidente com a projecção horizontal da reta **c**. Assim, a reta  $c'$  é a reta do plano  $v$  cuja projecção horizontal está coincidente com a projecção horizontal da reta **c**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da reta  $c'$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Uma vez que a reta  $c'$  é uma reta do plano  $v$ , considerou-se que o ponto  $L'$  é o ponto da reta  $c'$  que tem abcissa nula. Nesse sentido, o ponto  $L'$  situa-se necessariamente sobre  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perpendicular à charneira que nos permitiu inverter o rebatimento do ponto  $L$  permitiu-nos, também, determinar a perspectiva do ponto  $L'$  sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v'$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $c'$  em perspectiva. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Uma vez que a reta  $c'$  é necessariamente paralela à reta  $c$  (porque são retas suporte de arestas paralelas do mesmo cubo), também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $c'$ . Assim, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da reta  $c'$ , que passa por  $L'$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $L'$ ) e é paralela a  $c$  (a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ ).

Por fim, a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspectiva do ponto  $C$  permitiu-nos, igualmente, determinar a perspectiva do ponto  $C'$ , sobre a perspectiva da reta  $c'$ , tal como a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspectiva do ponto  $D$  nos permitiu, também, determinar a perspectiva do ponto  $D'$ , sobre a perspectiva da reta  $c'$ .

Para inverter o rebatimento dos pontos  $D''$  e  $G'$  optou-se por recorrer a uma reta do plano  $v'$  (o plano que contém a face  $[D''E'F'G']$  do segundo cubo) à qual aqueles dois pontos pertençam – a reta  $c''$ , que é a reta suporte do lado  $[D''G']$  do quadrado  $[D''E'F'G']$ . Tenha em conta que, apesar de não se ter identificado, a reta  $c''$  tem a sua projeção horizontal coincidente com a projeção horizontal da reta  $c$  (e da reta  $c'$ ). Assim, a reta  $c''$  é a reta do plano  $v'$  cuja projeção horizontal está coincidente com a projeção horizontal da reta  $c$ .

Uma vez que a reta  $c''$  é uma reta do plano  $v'$ , considerou-se que o ponto  $L''$  é o ponto da reta  $c''$  que tem abcissa nula. Nesse sentido, o ponto  $L''$  também pertence ao plano  $v'$  – é um ponto do plano  $v'$  que tem abcissa nula, pelo que o ponto  $L''$  situa-se necessariamente sobre  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ). Assim, a perpendicular à charneira que nos permitiu inverter o rebatimento do ponto  $L$  e do ponto  $L'$  permitiu-nos, também, determinar a perspectiva do ponto  $L''$  sobre a perspectiva de  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $c''$  em perspectiva. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Uma vez que a reta  $c''$  é necessariamente paralela à reta  $c$  (porque são retas suporte de arestas paralelas do mesmo cubo), também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $c''$ . Assim, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da reta  $c''$ , que passa por  $L''$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $L''$ ) e é paralela a  $c$  (a perspectiva propriamente dita da reta  $c$ ).

Por fim, a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspectiva dos pontos  $D$  e  $D'$  permitiu-nos, igualmente, determinar a perspectiva do ponto  $D''$ , sobre a perspectiva da reta  $c''$ , tal como a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspectiva do ponto  $G$  nos permitiu, também, determinar a perspectiva do ponto  $G'$ , sobre a perspectiva da reta  $c''$ .

#### Determinação das perspectivas do sólido:

Por fim, a partir das perspectivas dos catorze vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspectiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as arestas visíveis e as arestas invisíveis. Saliencia-se que o ponto  $D$ , sendo um vértice comum aos dois cubos, não é, na realidade, um vértice do sólido final.

De facto, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – dois cubos), as faces do objeto que resultam de duas faces complanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso do segmento de reta  $[DD']$ . De facto, o segmento de reta  $[DD']$  **não é** uma aresta do sólido, porque não resulta da interseção entre duas faces distintas (aquele segmento de reta é, na prática, uma linha auxiliar que está contida numa determinada face do objeto e, por isso, não é uma aresta do sólido).

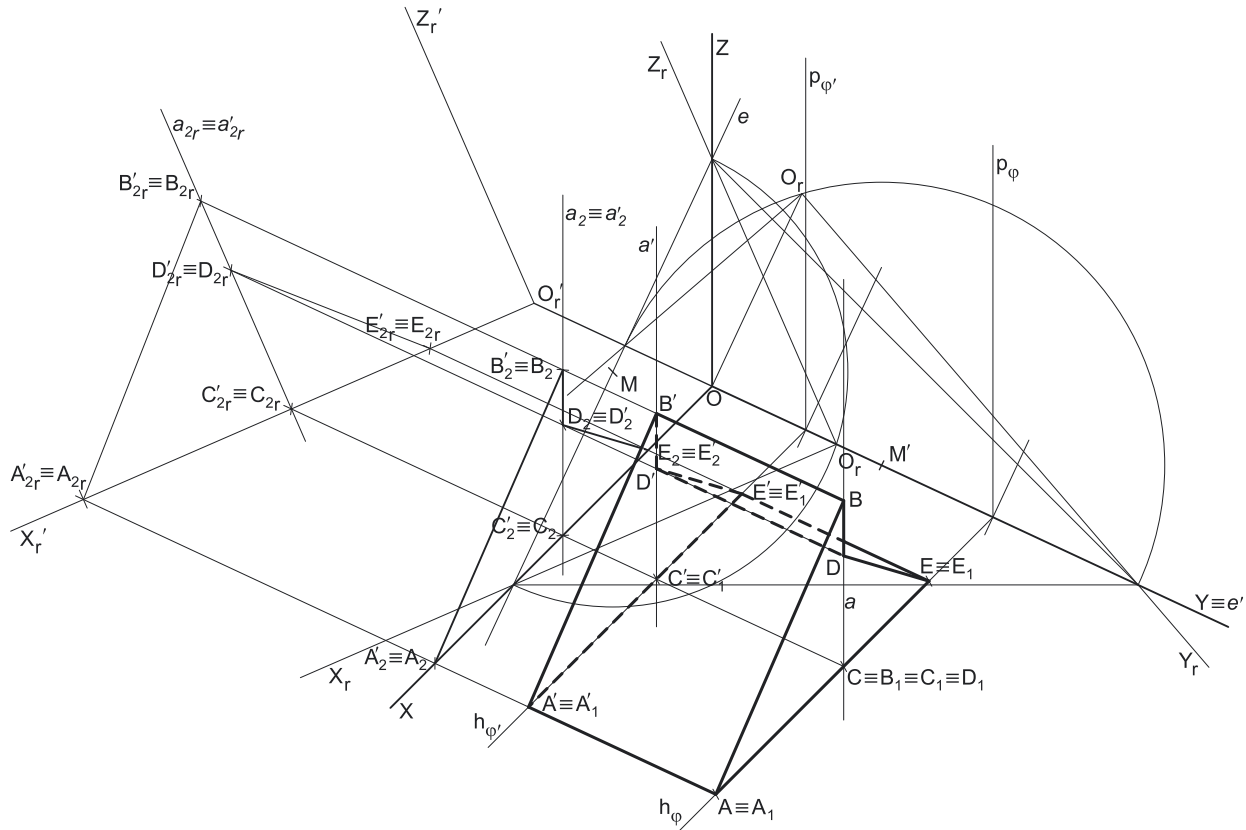
Sublinha-se que, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente «**um sólido (...) constituído (...)**»), o segmento  $[DD']$  seria, efetivamente, uma aresta comum aos dois sólidos.

Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais dos vértices de qualquer dos sólidos, por não serem necessárias. Nesse sentido, também não se representaram as perspectivas de qualquer das projeções do objeto final. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a face superior do cubo maior) e o plano  $v'$  (o plano que contém a face superior do cubo menor), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As perspectivas do sólido representaram-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado  $XY$ , da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção das projeções horizontais dos dois sólidos em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, os traçados referentes ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ , para a determinação das perspectivas das cotas dos planos horizontais (de nível).

1245.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $110^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de  $135^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $115^\circ$ , que é o ângulo restante ( $110^\circ + 135^\circ + 115^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações (recorde que as dimensões do *triângulo fundamental* são arbitrarias).

**Resolução:**

Os triângulos **[ABC]** e **[CDE]** estão contidos num plano frontal (de frente), que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que **nenhuma das duas figuras se projeta em verdadeira grandeza** (as perspectivas dos dois triângulos não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que as duas figuras estão contidas num plano paralelo ao plano coordenado frontal (o plano **XZ**), sabe-se que ambas as figuras se projetam em verdadeira grandeza no plano coordenado **XZ** – o triângulo **[ABC]** e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado **XZ**) são duas figuras geometricamente iguais, tal como o triângulo **[CDE]** e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado **XZ**) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual as duas figuras se projetam em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado **XZ** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

**Rebatimento do plano coordenado XZ:**

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XZ**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta suporte do lado do triângulo fundamental que se opõe à perspetiva do eixo **Y**.

O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano **XZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, determinou-se **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspetiva do eixo **Y**). O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Z<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Y**. O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo **X**. O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo **Z**.

*Construção das projeções frontais dos triângulos [ABC] e [CDE] e construção das projeções frontais dos dois prismas, em verdadeira grandeza (em rebatimento):*

No plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** dos pontos **C** e  $C'$ , em verdadeira grandeza (7 cm) – salienta-se que os dois pontos têm cota nula. A partir da abscissa e da cota (que é nula) dos dois pontos, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções frontais dos dois pontos, em rebatimento ( $C_{2r}$  e  $C'_{2r}$ ), que se situam no eixo  $X_r'$ , pois os dois pontos têm cota nula. Salienta-se que os dois pontos têm a mesma abscissa e a mesma cota, pelo que os dois pontos se situam necessariamente na mesma reta projetante frontal (uma reta de topo) – assim, os dois pontos têm as suas projeções frontais coincidentes, o que se assinalou devidamente em rebatimento ( $C_{2r} \equiv C'_{2r}$ ).

Tendo em conta que o triângulo **[ABC]** é um triângulo retângulo isósceles, sabe-se que o triângulo tem um ângulo reto e dois dos seus lados são iguais. Por outro lado, a aresta lateral **[CC']** mede 6 cm (a diferença entre os afastamentos dos pontos **C** e **C'**) e o enunciado refere expressamente que as duas faces laterais deste prisma que são contíguas à aresta lateral **[CC']** são quadradas, pelo que essas duas faces laterais são quadrados com 6 cm de lado. Isso permite-nos concluir que os dois lados do triângulo **[ABC]** que têm extremo no ponto **C** (os lados **[AC]** e **[BC]**) medem 6 cm. Assim, os lados **[AC]** e **[BC]** são os lados iguais do triângulo **[ABC]** (são os catetos do triângulo retângulo), pelo que o ângulo com vértice no ponto **C** é o ângulo reto do triângulo **[ABC]** (o lado **[BC]** é a hipotenusa do triângulo).

Por fim, uma vez que a face inferior do sólido composto pelos dois prismas está contida no plano **XY**, conclui-se que uma das faces quadrangulares do prisma está contida no plano **XY**.

Assim, considerando as premissas atrás referidas e, ainda, que o triângulo **[ABC]** se projeta em verdadeira grandeza no plano **XZ**, efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo em rebatimento (no plano **XZ** rebatido) – o triângulo  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}]$ , retângulo em  $C_{2r}$ , é a projeção frontal do triângulo **[ABC]**, em verdadeira grandeza (no rebatimento do plano **XZ**).

Já em relação ao triângulo **[CDE]**, e uma vez que é, igualmente, um triângulo retângulo isósceles, o triângulo tem também um ângulo reto e dois dos seus lados também são iguais. Por outro lado, a aresta lateral **[CC']** mede 6 cm e o enunciado refere expressamente que as duas faces laterais deste prisma que são contíguas à aresta lateral **[CC']** são retângulos geometricamente iguais, pelo que essas duas faces laterais são retângulos com 6 cm de comprimento e 4 cm de largura (a medida dos lados menores dos retângulos, dada no enunciado). Isso permite-nos concluir que os dois lados do triângulo **[CDE]** que têm extremo no ponto **C** (os lados **[CD]** e **[CE]**) medem 4 cm. Assim, os lados **[CD]** e **[CE]** são os lados iguais do triângulo **[CDE]** (são os catetos do triângulo retângulo), pelo que o ângulo com vértice no ponto **C** é o ângulo reto do triângulo **[CDE]** (o lado **[DE]** é a hipotenusa do triângulo).

Por fim, uma vez que a face inferior do sólido composto pelos dois prismas está contida no plano **XY**, conclui-se que uma das faces retangulares do prisma está contida no plano **XY**.

Assim, considerando as premissas atrás referidas e, ainda, que o triângulo **[CDE]** se projeta em verdadeira grandeza no plano **XZ**, efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo em rebatimento (no plano **XZ** rebatido) – o triângulo  $[C_{2r}D_{2r}E_{2r}]$ , retângulo em  $C_{2r}$ , é a projeção frontal do triângulo **[CDE]**, em verdadeira grandeza (no rebatimento do plano **XZ**).

Ambos os prismas são **prismas retos**, cujas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases (que são planos frontais). Assim, as arestas laterais de ambos os sólidos estão contidas em retas de topo, que são retas projetantes frontais. Nesse sentido, os vértices do triângulo **[A'B'C']** (a base de menor afastamento do primeiro prisma) têm as suas projeções frontais coincidentes com as projeções frontais dos vértices do triângulo **[ABC]** (a base de maior afastamento do primeiro prisma), o que se assinalou mediatamente em rebatimento no rebatimento do plano **XZ** –  $A'_{2r} \equiv A_{2r}$ ,  $B'_{2r} \equiv B_{2r}$  e  $C'_{2r} \equiv C_{2r}$ . De forma semelhante, também os vértices do triângulo **[C'D'E']** (a base de menor afastamento do segundo prisma) têm as suas projeções frontais coincidentes com as projeções frontais dos vértices do triângulo **[CDE]** (a base de maior afastamento do segundo prisma), o que se assinalou mediatamente em rebatimento no rebatimento do plano **XZ** –  $D'_{2r} \equiv D_{2r}$  e  $E'_{2r} \equiv E_{2r}$ .

Para determinar as perspectivas dos triângulos **[ABC]**, **[CDE]**, **[A'B'C']** e **[C'D'E']**, bem como dos dois prismas, é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar os planos  $\varphi$  (o plano frontal que contém os dois triângulos – as bases de maior afastamento dos prismas), bem como o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém as bases de menor afastamento dos dois prismas).

*Representação do plano frontal (de frente) que contém as bases de maior afastamento dos dois prismas (os triângulos [ABC] e [CDE]):*

Salienta-se que se poderia ter recorrido, por exemplo, ao rebatimento do plano **XY**, pelo **método dos cortes** e, assim, representar os dois prismas pelas respetivas projeções horizontais. No entanto, optou-se por uma situação bastante mais simples.

Assim, começou-se por determinar a perspectiva do afastamento do plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém as bases de maior afastamento dos dois prismas), que se mede sobre a perspectiva do eixo **Y**. Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo **Y** sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo **Y**, para determinar a perspectiva da cota do plano  $\varphi$ .

O rebatimento do eixo **Y** pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo **Y**, o **rebatimento dos planos coordenados** (um plano coordenado que contenha o eixo **Y**) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo **Y**.

Nesse sentido, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a perspectiva do eixo **Y**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Y** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto **O** e cuja hipotenusa está contida na perspectiva do eixo **Y**. A hipotenusa desse triângulo retângulo tem um extremo no ponto em que o plano axonométrico interseja o eixo **Y** (ponto esse que não se identificou) e o outro extremo no ponto em que o plano projetante do eixo **Y** interseja o lado do triângulo fundamental que se opõe ao eixo **Y** (e que também não se identificou). Estes dois pontos, porque pertencem à charneira, rodam sobre si próprios.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se o ponto  $M'$  (o ponto médio da hipotenusa) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033. e respetivo relatório).

Depois, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (a reta  $e'$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo extremo da hipotenusa que pertence ao eixo  $Y$ , que é um ponto fixo. A reta que passa por  $O_r$  e pelo outro extremo da hipotenusa (que é outro ponto fixo) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Y$  com o plano coordenado  $XZ$  (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo  $Y_r$  é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto  $O_r$ .

Em seguida, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediu-se o afastamento do plano  $\varphi$  (que é 9 cm – o afastamento do ponto  $C$ ) e determinou-se um ponto, que não se identificou. Esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Y$  que tem 9 cm de afastamento. Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . O plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém os triângulos  $[ABC]$  e  $[CDE]$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ). Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ , com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

*Representação do plano frontal (de frente) que contém as bases de menor afastamento dos dois prismas (os triângulos  $[A'B'C']$  e  $[C'D'E']$ ):*

De forma semelhante, sobre o eixo  $Y_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediu-se o afastamento do plano  $\varphi'$  (que é 3 cm – o afastamento do ponto  $C'$ ) e determinou-se um ponto, que não se identificou. Esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Y$  que tem 3 cm de afastamento. Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspectiva desse ponto, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . O plano frontal (de frente)  $\varphi'$  que contém os triângulos  $[A'B'C']$  e  $[C'D'E']$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi'$  –  $h_{\varphi'}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) e  $p_{\varphi'}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi'$ ). Note que  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi'$ , com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{\varphi'}$  (o traço lateral do plano  $\varphi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi'$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{\varphi'}$ ).

*Inversão do rebatimento do plano  $XZ$  e determinação das perspectivas dos vértices  $A, A', C, C', E$  e  $E'$  do sólido:*

Para inverter o rebatimento dos pontos  $A$  e  $A'$  (que são dois pontos com cota nula) conduziu-se, por  $A_{2r} \equiv A'_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_2 \equiv A'_2$  (as perspectivas das projeções frontais dos pontos  $A$  e  $A'$ ), sobre a perspectiva do eixo  $X$ . Por outro lado, uma vez que o ponto  $A$  é um ponto com cota nula do plano  $\varphi$ , sabe-se que o ponto  $A$  é, necessariamente, um ponto do traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ). De forma semelhante, uma vez que o ponto  $A'$  é um ponto com cota nula do plano  $\varphi'$ , sabe-se que o ponto  $A'$  é, necessariamente, um ponto do traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ). Assim, recorrendo à perpendicular à charneira que passa por  $A_{2r} \equiv A'_{2r}$ , determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ , sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), bem como a perspectiva propriamente dita do ponto  $A'$ , sobre a perspectiva de  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ). Por fim, os pontos  $A$  e  $A'$  são dois pontos do plano coordenado  $XY$  (porque têm cota nula), pelo que os pontos estão coincidentes com as respetivas projeções horizontais, o que se identificou imediatamente em perspectiva –  $A_1 \equiv A$  e  $A'_1 \equiv A'$ .

Para inverter o rebatimento dos pontos  $C$  e  $C'$  (que são outros dois pontos com cota nula) conduziu-se, por  $C_{2r} \equiv C'_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_2 \equiv C'_2$  (as perspectivas das projeções frontais dos pontos  $C$  e  $C'$ ), sobre a perspectiva do eixo  $X$ . Por outro lado, uma vez que o ponto  $C$  é um ponto com cota nula do plano  $\varphi$ , sabe-se que o ponto  $C$  é, necessariamente, um ponto do traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ). De forma semelhante, uma vez que o ponto  $C'$  é um ponto com cota nula do plano  $\varphi'$ , sabe-se que o ponto  $C'$  é, necessariamente, um ponto do traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ). Assim, recorrendo à perpendicular à charneira que passa por  $C_{2r} \equiv C'_{2r}$ , determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$ , sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), bem como a perspectiva propriamente dita do ponto  $C'$ , sobre a perspectiva de  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ). Por fim, os pontos  $C$  e  $C'$  são dois pontos do plano coordenado  $XY$  (porque têm cota nula), pelo que os pontos estão coincidentes com as respetivas projeções horizontais, o que se identificou imediatamente em perspectiva –  $C_1 \equiv C$  e  $C'_1 \equiv C'$ .

Para inverter o rebatimento dos pontos  $E$  e  $E'$  (que são dois pontos com cota nula) conduziu-se, por  $E_{2r} \equiv E'_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $E_2 \equiv E'_2$  (as perspectivas das projeções frontais dos pontos  $E$  e  $E'$ ), sobre a perspectiva do eixo  $X$ . Por outro lado, uma vez que o ponto  $E$  é um ponto com cota nula do plano  $\varphi$ , sabe-se que o ponto  $E$  é, necessariamente, um ponto do traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ). De forma semelhante, uma vez que o ponto  $E'$  é um ponto com cota nula do plano  $\varphi'$ , sabe-se que o ponto  $E'$  é, necessariamente, um ponto do traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ). Assim, recorrendo à perpendicular à charneira que passa por  $E_{2r} \equiv E'_{2r}$ , determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $E$  sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), bem como a perspectiva propriamente dita do ponto  $E'$ , sobre a perspectiva de  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ). Por fim, os pontos  $E$  e  $E'$  são dois pontos do plano coordenado  $XY$  (porque têm cota nula), pelo que os pontos estão coincidentes com as respetivas projeções horizontais, o que se identificou imediatamente em perspectiva –  $E_1 \equiv E$  e  $E'_1 \equiv E'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das perspetivas dos vértices $B$ , $B'$ , $D$ e $D'$ , do sólido:

Para inverter o rebatimento dos pontos  $B$  e  $D$  recorreu-se a uma reta  $a$ , pertencente ao plano  $\varphi$  e que contém aqueles dois pontos – a reta  $a$  é paralela ao eixo  $Z$  (a reta  $a$  é uma reta vertical do plano  $\varphi$ ). Nesse sentido, a reta  $a_{2r}$  é a projeção frontal da reta  $a$ , em rebatimento, passa por  $B_{2r}$  e por  $D_{2r}$  e é paralela ao eixo  $Z_r'$  (a reta  $a$  está definida por dois pontos e por uma direção). Para inverter o rebatimento dos pontos  $B'$  e  $D'$  recorreu-se a uma reta  $a'$ , pertencente ao plano  $\varphi'$  e que contém aqueles dois pontos – a reta  $a'$  é paralela ao eixo  $Z$  (a reta  $a'$  é uma reta vertical do plano  $\varphi'$ ). Nesse sentido, a reta  $a'_{2r}$  é a projeção frontal da reta  $a'$ , em rebatimento, passa por  $B'_{2r}$  e por  $D'_{2r}$  e é paralela ao eixo  $Z_r'$  (a reta  $a'$  está também definida por dois pontos e por uma direção). Note que os pontos  $B$  e  $B'$  têm as suas projeções coincidentes, al como os pontos  $D$  e  $D'$ , pelo que as retas  $a$  e  $a'$  têm necessariamente as suas projeções frontais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento –  $a_{2r} \equiv a'_{2r}$ .

A reta  $a_{2r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $C_{2r}$  (que é a projeção frontal, em rebatimento, do ponto  $C$ ), cuja perspetiva já foi determinada. De forma semelhante, a reta  $a'_{2r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $C'_{2r}$  (que é a projeção frontal, em rebatimento, do ponto  $C'$ ), cuja perspetiva também já foi determinada. Assim, pelo ponto  $C_2 \equiv C'_2$  (a perspetiva das projeções frontais dos pontos  $C$  e  $C'$ ) conduziu-se a reta  $a_2 \equiv a'_2$  (que é a perspetiva da projeção frontal das retas  $a$  e  $a'$ ). Já temos um ponto para definir a perps da projeção frontal das duas retas. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

As retas  $a$  e  $a'$  são retas verticais (paralelas ao eixo  $Z$ ), pelo que as suas projeções frontais são igualmente paralelas ao eixo  $Z$ . Assim, já temos a direção que nos faltava – desenhou-se a reta  $a_2 \equiv a'_2$  (a perspetiva das projeções frontais das retas  $a$  e  $a'$ ), passando por  $C_2 \equiv C'_2$  e paralela à perspetiva do eixo  $Z$ .

Nesse sentido, a perspetiva propriamente dita da reta  $a$  também está definida por um ponto (a perspetiva do ponto  $C$ , que se situa sobre a perspetiva de  $h_\varphi$ ) e por uma direção (a direção da perspetiva do eixo  $Z$ ), o que nos permitiu desenhar a perspetiva da reta  $a$ . De forma semelhante, a perspetiva propriamente dita da reta  $a'$  também está definida por um ponto (a perspetiva do ponto  $C'$ , que se situa sobre a perspetiva de  $h_{\varphi'}$ ) e por uma direção (a direção da perspetiva do eixo  $Z$ ), o que nos permitiu desenhar a perspetiva da reta  $a'$ .

Por fim, conduziu-se, por  $B_{2r} \equiv B'_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_2 \equiv B'_2$  (as perspetivas das projeções frontais dos pontos  $B$  e  $B'$ ), sobre  $a_2 \equiv a'_2$  (a perspetiva das projeções frontais das retas  $a$  e  $a'$ ), determinando-se, também, a perspetiva propriamente dita do ponto  $B$  sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $a$  e a perspetiva propriamente dita do ponto  $B'$  sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $a'$ .

Tal como exposto para o ponto  $B$ , conduziu-se, por  $D_{2r} \equiv D'_{2r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $D_2 \equiv D'_2$  (as perspetivas das projeções frontais dos pontos  $D$  e  $D'$ ), sobre  $a_2 \equiv a'_2$  (a perspetiva das projeções frontais das retas  $a$  e  $a'$ ), determinando-se, também, a perspetiva propriamente dita do ponto  $D$  sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $a$  e a perspetiva propriamente dita do ponto  $D'$  sobre a perspetiva propriamente dita da reta  $a'$ .

## Determinação das perspetivas do sólido:

Por fim, a partir das perspetivas dos oito vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspetiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as arestas visíveis e as arestas invisíveis. Salienta-se que os pontos  $C$  e  $C'$ , sendo dois vértices comuns aos dois prismas, não são, na realidade, dois vértices do sólido final.

De facto, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – dois prismas), as faces do objeto que resultam de duas faces complanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso do segmento de reta  $[CC']$ . De facto, o segmento de reta  $[CC']$  **não é** uma aresta do sólido, porque não resulta da interseção entre duas faces distintas (aquele segmento de reta é, na prática, uma linha auxiliar que está contida numa determinada face do objeto e, por isso, não é uma aresta do sólido).

Sublinha-se que, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente «**um sólido (...) constituído (...)**»), o segmento  $[CC']$  seria, efetivamente, uma aresta comum aos dois sólidos.

Note que não se representaram as perspetivas das projeções laterais dos vértices de qualquer dos sólidos, nem mesmo as perspetivas das projeções horizontais de todos os seus vértices, por não serem necessárias. Nesse sentido, também não se representaram as perspetivas de qualquer das projeções do objeto final. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

## Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) e o plano  $\varphi'$  (o plano que contém a base de menor afastamento do sólido), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos respetivos traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As perspetivas do sólido representaram-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado XZ*, da translação do plano  $XZ$  rebatido, da construção das projeções frontais dos dois prismas em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, os traçados referentes ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ , para a determinação das perspetivas dos afastamentos dos planos frontais (de frente).

## 1246.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $110^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de  $130^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $120^\circ$ , que é o ângulo restante ( $110^\circ + 130^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações (recorde que as dimensões do *triângulo fundamental* são arbitrárias).

**Resolução:**

O retângulo **[ABCD]** e o triângulo **[EFG]** estão contidos no plano coordenado horizontal (o plano **XY**), que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das duas figuras se projeta em verdadeira grandeza (as perspectivas dos dois quadrados não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que as duas figuras estão contidas no plano coordenado horizontal (o plano **XY**), sabe-se que ambas as figuras estão em verdadeira grandeza no plano coordenado **XY** – o retângulo **[ABCD]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado **XY**) são a mesma figura, tal como o triângulo **[EFG]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado **XY**) são a mesma figura. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o rebatimento do plano coordenado **XY** (o plano no qual as duas figuras estão em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado **XY** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo rebatimento dos planos coordenados ou pelo método dos cortes – optou-se por recorrer ao método dos cortes.

**Rebatimento do plano coordenado XY:**

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XY**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta suporte do lado do triângulo fundamental que se opõe à perspectiva do eixo **Z**.

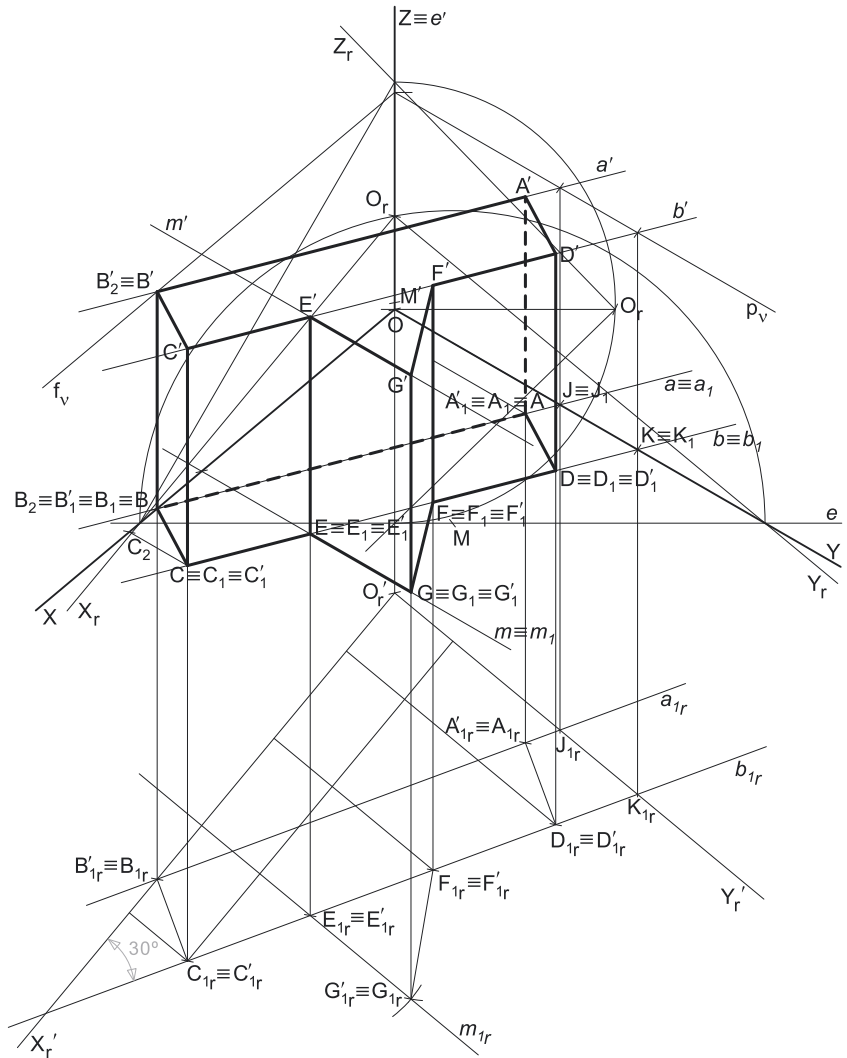
O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, determinou-se **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspectiva do eixo **Z**). O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Y<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>**. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**.

**Construção das projeções horizontais do retângulo [ABCD] e do triângulo [EFG], em verdadeira grandeza:**

No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo **X<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representou-se a abscissa do ponto **C** em verdadeira grandeza (11 cm). Em seguida, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>'**, a partir de **O<sub>r</sub>'** e no sentido positivo do eixo, representou-se o afastamento do ponto **C** em verdadeira grandeza (2 cm). A partir da abscissa e do afastamento do ponto **C**, em verdadeira grandeza, foi possível determinar a projeção horizontal do ponto **C**, em rebatimento (**C<sub>1r</sub>**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O enunciado refere expressamente que o lado **[CD]** faz um ângulo de  $30^\circ$  (de abertura para a direita) com o eixo **X** – esse ângulo está contido no plano **XY** (o plano que contém o retângulo) e está em verdadeira grandeza na *plano coordenado XY*. Uma vez que o retângulo está em verdadeira grandeza (porque está no plano **XY** rebatido), a verdadeira grandeza do ângulo está no ângulo que o segmento **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** fará com o eixo **X<sub>r</sub>'**. Assim, foi possível, em verdadeira grandeza, medir o ângulo de  $30^\circ$  que o lado **[CD]** faz com o eixo **X** e desenhar a reta suporte (em rebatimento) do lado **[CD]** do retângulo. Sabendo que o ponto **D** tem 2 cm de abscissa (como o enunciado refere expressamente), determinou-se **D<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **D**, em rebatimento), que é o ponto da reta suporte do segmento **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** que tem 2 cm de abscissa.

Em seguida, a partir de **C<sub>1</sub>** e de **D<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **C** e **D**, em rebatimento), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do retângulo **[ABCD]**, em rebatimento. Sabendo que o ponto **B** (o outro vértice consecutivo a **C**) tem afastamento nulo (como o enunciado refere expressamente), foi possível determinar **B<sub>1</sub>** (A projeção horizontal do ponto **B**, em rebatimento), no eixo **X<sub>r</sub>'**. Note que o segmento **[B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>]** é perpendicular ao segmento **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]**, pois são lados contíguos do retângulo.

Assim, efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, o que nos permitiu concluir a construção da **projeção horizontal do retângulo**, em verdadeira grandeza e, dessa forma, determinar o último vértice do polígono (em rebatimento) – o retângulo **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** é a projeção horizontal do retângulo **[ABCD]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano **XY**.

Em seguida, determinaram-se **E<sub>1</sub>** e **F<sub>1</sub>** (as projeções horizontais, em rebatimento, dos vértices **E** e **F**, do triângulo **[EFG]**), em função das suas abscissas (que são dadas no enunciado). Assim, **E<sub>1</sub>** é o ponto do segmento de reta **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** que tem 8 cm de abscissa, tal como **F<sub>1</sub>**, é o ponto do segmento de reta **[C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** que tem 2 cm de abscissa. A partir de **E<sub>1</sub>** e **F<sub>1</sub>**, foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do triângulo [EFG]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano **XY**), o que nos permitiu determinar **G<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do terceiro vértice do triângulo, em rebatimento) – o triângulo **[E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>G<sub>1</sub>]** é a projeção horizontal do triângulo **[EFG]**, em verdadeira grandeza (em no rebatimento do plano **XY**).

Tanto o **paralelepípedo** como o **prisma triangular regular** são **prismas retos**, pelo que as respetivas arestas laterais estão contidas em retas verticais (projetantes horizontais), pois são ortogonais aos planos que contêm as bases (que são plano horizontais).

Nesse sentido, os vértices da base superior do paralelepípedo (a base **[A'B'C'D']**) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da base **[ABCD]**, o que se assinalou imediatamente – **A'<sub>1</sub> ≡ A<sub>1</sub>**, **B'<sub>1</sub> ≡ B<sub>1</sub>**, **C'<sub>1</sub> ≡ C<sub>1</sub>** e **D'<sub>1</sub> ≡ D<sub>1</sub>**. Este raciocínio permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do paralelepípedo (em rebatimento, no rebatimento do plano **XY**).

De forma semelhante, os vértices da base superior do prisma triangular (a base **[E'F'G']**) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da base inferior (a base **[EFG]**), o que se assinalou imediatamente – **E'<sub>1</sub> ≡ E<sub>1</sub>**, **F'<sub>1</sub> ≡ F<sub>1</sub>** e **G'<sub>1</sub> ≡ G<sub>1</sub>**. Este raciocínio permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do prisma triangular regular (em rebatimento, no rebatimento do plano **XY**).

Para determinar as perspetivas do retângulo **[ABCD]** e do triângulo **[EFG]**, bem como dos dois sólidos, é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano **v** (o plano horizontal que contém as bases superiores daqueles dois sólidos).

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém o retângulo [A'B'C'D'] e o triângulo [E'F'G']:*

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos que contêm as bases. Ambos os prismas têm 6 cm de altura e as suas bases inferiores têm cota nula (pois estão contidas no plano **XY**), pelo que o plano **v** (o plano horizontal que contém as bases superiores dos dois sólidos) tem necessariamente 6 cm de cota ( $0 + 6 = 6$ ). Assim, há que determinar, sobre a perspetiva do eixo **Z**, um ponto com 6 cm de cota.

Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo **Z** sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo **Z**, para determinar a perspetiva da cota do plano **v**.

O rebatimento do eixo **Z** pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo **Z**, o **rebatimento dos planos coordenados** (um *plano coordenado* que contenha o eixo **Z**) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo **Z**. Nesse sentido, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta **e'**), que é a perspetiva do eixo **Z**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto **O** e cuja hipotenusa está contida na perspetiva do eixo **Z**. A hipotenusa desse triângulo retângulo tem um extremo no ponto em que o *plano axonométrico* intersesta o eixo **Z** (ponto esse que não se identificou) e o outro extremo no ponto em que o plano projetante do eixo **Z** intersesta o lado do *triângulo fundamental* que se opõe ao eixo **Z** (e que também não se identificou). Estes dois pontos, porque pertencem à charneira, rodam sobre si próprios.

Em seguida, determinou-se o ponto **M'** (o ponto médio da hipotenusa) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033. e respetivo **relatório**).

Depois, conduziu-se, pela perspetiva do ponto **O**, uma perpendicular à charneira (a reta **e'**) e determinou-se **O<sub>r</sub>**, (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo **Z<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e pelo extremo da hipotenusa que pertence ao eixo **Z**, que é um ponto fixo. A reta que passa por **O<sub>r</sub>** e pelo outro extremo da hipotenusa (que é outro ponto fixo) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o plano coordenado **XY** (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo **Z<sub>r</sub>** é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, no eixo **Z<sub>r</sub>**, a partir de **O<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, mediu-se a cota do plano **v** (6 cm), em verdadeira grandeza, e determinou-se um ponto, que não se identificou. Esse ponto é, em rebatimento, o ponto do eixo **Z** que tem 6 cm de cota. Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta **e'**) e determinou-se a perspetiva desse ponto, sobre a perspetiva do eixo **Z**. O plano horizontal (de nível) **v** que contém as bases dos dois sólidos contém necessariamente esse ponto.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v - f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Inversão do rebatimento do plano  $XY$  e determinação das perspectivas dos vértices  $A, A, B$  e  $B'$  do sólido:*

Para inverter o rebatimento dos pontos  $B$  e  $B'$  (que são dois pontos com afastamento nulo) conduziu-se, por  $B_{1r} \equiv B'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_1 \equiv B'_1$  (as perspectivas das projeções horizontais dos pontos  $B$  e  $B'$ ), sobre a perspectiva do eixo  $X$ . O ponto  $B$  é um ponto do eixo  $X$ , pelo que tem cota nula. Assim, o ponto  $B$  está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se identificou em perspectiva – tem-se, imediatamente,  $B \equiv B_1$ . Por outro lado, e porque o ponto  $B$  é um ponto do eixo  $X$ , o ponto  $B$  afastamento nulo, pelo que o ponto  $B$  está também coincidente com a sua projeção frontal, o que se identificou em perspectiva – tem-se, imediatamente,  $B_2 \equiv B \equiv B_1$ .

Por outro lado, o ponto  $B'$  é um ponto com afastamento nulo que pertence ao plano  $v$ , pelo que o ponto  $B'$  é, necessariamente, um ponto do traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ). Assim, recorrendo à perpendicular à charneira que passa por  $B_{1r} \equiv B'_{1r}$ , determinou-se a perspectiva propriamente dita do ponto  $B'$ , sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Por fim, o ponto  $B'$  é, também, um ponto do plano coordenado  $XZ$  (porque tem afastamento nulo), pelo que o ponto  $B'$  está igualmente coincidente com a sua projeção frontal, o que se identificou em perspectiva – tem-se, imediatamente,  $B'_2 \equiv B'$ .

Para inverter o rebatimento do ponto  $A$  optou-se por recorrer a uma reta do plano  $XY$  à qual aquele ponto pertença – a reta  $a$ , que é a reta suporte do lado  $[AB]$  do retângulo  $[ABCD]$ . A reta  $a_{1r}$  (que está definida por  $A_{1r}$  e por  $B_{1r}$ ) é a projeção horizontal da reta  $a$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $B_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto  $B$ ), cuja perspectiva já foi determinada. Assim, já temos um ponto para definir a reta  $a_{1r}$ , que é o ponto  $B_1$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $J_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $a$  que tem abcissa nula). Por  $J_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . Tendo em conta que o ponto  $J$  tem cota nula, o ponto  $J$  é um ponto do eixo  $Y$ , pelo que está coincidente com a sua projeção horizontal – tem-se, imediatamente,  $J \equiv J_1$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $a$ .

A projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_{1r}$ ), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto  $B_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ) e o ponto  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $J$ ). Por outro lado, a perspectiva propriamente dita da reta  $a$  também está definida por dois pontos – as perspectivas propriamente ditas dos pontos  $B$  e  $J$ . Note que a reta  $a$  é uma reta do plano  $XY$ , pelo que está coincidente com a sua projeção horizontal – tem-se, imediatamente,  $a \equiv a_{1r}$ .

Por fim, conduziu-se, por  $A_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ), sobre  $a_{1r}$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$  – tem-se, imediatamente,  $A \equiv A_1$ , pois o ponto  $A$  é um ponto com cota nula e pertence à reta  $a$ .

Para inverter o rebatimento dos pontos  $A'$  e  $B'$  optou-se por recorrer a uma reta do plano  $v$  (o plano que contém a base  $[A'B'C'D']$  do paralelepípedo) à qual aqueles dois pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos  $A'$  e  $B'$  recorreu-se à reta  $a'$ , que é a reta suporte do lado  $[A'B']$  do quadrado  $[A'B'C'D']$ . Tenha em conta que, apesar de não se ter identificado, a reta  $a'$  tem a sua projeção horizontal coincidente com a projeção horizontal da reta  $a$ . Assim, a reta  $a'$  é a reta do plano  $v$  cuja projeção horizontal está coincidente com a projeção horizontal da reta  $a$ .

É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da reta  $a'$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Tendo em conta que a perspectiva do ponto  $B'$  já foi determinada, já temos um ponto para definir a reta  $a'$ , que é o ponto  $B'$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $a'$  é uma reta do plano  $v$ , considerou-se que o ponto  $J'$  é o ponto da reta  $a'$  que tem abcissa nula. Nesse sentido, o ponto  $J'$  também pertence ao plano  $v$  – é um ponto do plano  $v$  que tem abcissa nula, pelo que o ponto  $J'$  situa-se necessariamente sobre  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perpendicular à charneira que nos permitiu inverter o rebatimento do ponto  $J$  permitiu-nos, também, determinar a perspectiva do ponto  $J'$  sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta  $a'$  em perspectiva, o que nos permitiu desenhar a sua perspectiva (passando pelas perspectivas dos pontos  $B'$  e  $J'$ ).

Por fim, a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspectiva do ponto  $A$  permitiu-nos, igualmente, determinar a perspectiva do ponto  $A'$ , sobre a perspectiva da reta  $a'$ .

*Determinação das perspectivas dos vértices  $C, C', D, D', E, E', F$  e  $F'$ , do sólido:*

Para inverter o rebatimento dos pontos  $C, D, E$  e  $F$  optou-se por recorrer a uma reta do plano  $XY$  à qual aqueles dois pontos pertençam – a reta  $b$ , que é a reta suporte do lado  $[CD]$  do retângulo  $[ABCD]$  (e que contém, ainda, o lado  $[EF]$  do triângulo  $[EFG]$ ). A reta  $b_{1r}$  (que está definida por  $C_{1r}$  e por  $D_{1r}$ ) é a projeção horizontal da reta  $b$ , em rebatimento. Salienta-se que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , porque se trata de retas suporte de lados paralelos de um mesmo retângulo (os lados  $[AB]$  e  $[CD]$ ). É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A reta  $b_1$ , intersecta o eixo  $Y_r'$  no ponto  $K_1$ , (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $b$  que tem abcissa nula). Por  $K_1$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $K$ ) sobre a perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $K$  é um ponto do eixo  $Y$ , pelo que está coincidente com a sua projeção horizontal – tem-se, imediatamente,  $K \equiv K_1$ . Já temos um ponto para definir a reta  $b$ , que é o ponto  $K$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ . Assim, desenhou-se a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_1$ ), que passa por  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $K$ ) e é paralela a  $a_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ). Tendo em conta que a reta  $b$  é uma reta do plano  $XY$ , a reta está coincidente com a sua projeção horizontal – tem-se, imediatamente,  $b \equiv b_1$ .

Por fim, conduziu-se, por  $C_1$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ), sobre  $b_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$  – tem-se, imediatamente,  $C \equiv C_1$ , pois o ponto  $C$  é um ponto com cota nula e pertence à reta  $b$ . De forma semelhante conduziu-se, por  $D_1$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $D_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $D$ ), sobre  $b_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$  – tem-se, imediatamente,  $D \equiv D_1$ , pois o ponto  $D$  é um ponto com cota nula e pertence à reta  $b$ .

De forma idêntica à exposta para a determinação das perspectivas dos pontos  $C$  e  $D$ , determinaram-se as perspectivas dos pontos  $E$  e  $F$ , que são igualmente dois pontos da reta  $b$  e que são, também por isso, dois pontos do plano  $XY$ .

Para inverter o rebatimento dos pontos  $C'$ ,  $D'$ ,  $E'$  e  $F'$  optou-se por recorrer a uma reta do plano  $v$  (o plano que contém a base  $[A'B'C'D']$  do paralelepípedo) à qual aqueles dois pontos pertençam – a reta  $b'$ , que é a reta suporte do lado  $[C'D']$  do retângulo  $[A'B'C'D']$ . Tenha em conta que, apesar de não se ter identificado, a reta  $b'$  tem a sua projeção horizontal coincidente com a projeção horizontal da reta  $b$ . Assim, a reta  $b'$  é a reta do plano  $v$  cuja projeção horizontal está coincidente com a projeção horizontal da reta  $b$ .

Uma vez que a reta  $b'$  é uma reta do plano  $v$ , considerou-se que o ponto  $K'$  é o ponto da reta  $b'$  que tem abcissa nula. Nesse sentido, o ponto  $K'$  também pertence ao plano  $v$  – é um ponto do plano  $v$  que tem abcissa nula, pelo que o ponto  $K'$  situa-se necessariamente sobre  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perpendicular à charneira que nos permitiu inverter o rebatimento do ponto  $K$  permitiu-nos, também, determinar a perspectiva do ponto  $K'$  sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Já temos um ponto para definir a reta  $b'$  em perspectiva. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Uma vez que a reta  $b'$  é necessariamente paralela à reta  $b$  (porque são retas suporte de arestas paralelas do mesmo paralelepípedo), também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b'$ . Assim, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da reta  $b'$ , que passa por  $K'$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $K'$ ) e é paralela a  $b$  (a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ ).

Por fim, a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspectiva do ponto  $C$  permitiu-nos, igualmente, determinar a perspectiva do ponto  $C'$ , sobre a perspectiva da reta  $b'$ , tal como a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspectiva do ponto  $D$  nos permitiu, também, determinar a perspectiva do ponto  $D'$ , sobre a perspectiva da reta  $b'$ .

De forma semelhante, a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspectiva do ponto  $E$  permitiu-nos, igualmente, determinar a perspectiva do ponto  $E'$ , sobre a perspectiva da reta  $b'$ , tal como a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspectiva do ponto  $F$  nos permitiu, ainda, determinar a perspectiva do ponto  $F'$ , sobre a perspectiva da reta  $b'$ .

### Determinação das perspectivas dos vértices $G$ e $G'$ , do sólido:

Para inverter o rebatimento do ponto  $G$  recorreu-se a uma reta  $m$ , pertencente ao plano  $XY$  e que contém aquele ponto – a reta  $m$  é paralela ao eixo  $Y$  (a reta  $m$  é uma reta de topo do plano  $XY$ ) e passa ainda por  $E_1$ , (a projeção horizontal do ponto  $E$ , em rebatimento). Nesse sentido, a reta  $m_1$ , é a projeção horizontal da reta  $m$ , em rebatimento, passa por  $E_1$ , e por  $G_1$ , e é paralela ao eixo  $Y_r'$  (a reta  $m$  está definida por dois pontos e por uma direção). É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $m$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Note que, na prática, a reta  $m$  é a reta suporte do lado  $[EG]$  do triângulo  $[EFG]$ .

A reta  $m_1$ , passa pelo ponto  $E_1$ , (que é a projeção horizontal do ponto  $E$ ), cuja perspectiva já foi determinada. Assim, já temos um ponto para definir a reta  $m_1$ , que é o ponto  $E_1$ . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta. A reta  $m$  é uma reta de topo (paralela ao eixo  $Y$ ), pelo que a sua projeção horizontal é igualmente paralela ao eixo  $Y$ . Assim, já temos a direção que nos faltava – desenhou-se a reta  $m_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $m$ ), passando por  $E_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $E$ ) e paralela à perspectiva do eixo  $Y$ . Tendo em conta que a reta  $m$  é uma reta do plano  $XY$ , a reta está coincidente com a sua projeção horizontal – tem-se, imediatamente,  $m \equiv m_1$ .

Por fim, conduziu-se, por  $G_1$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $G_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $G$ ), sobre  $m_1$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $m$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto  $G$  – tem-se, imediatamente,  $G \equiv G_1$ , pois o ponto  $G$  é um ponto com cota nula e pertence à reta  $m$ .

Para inverter o rebatimento do ponto  $G'$  optou-se por recorrer a uma reta do plano  $v$  (o plano que contém a base  $[E'F'G']$  do prisma) à qual aquele ponto pertença – a reta  $m'$ , que é outra reta de topo. Tenha em conta que, apesar de não se ter identificado, a reta  $m'$  tem a sua projeção horizontal coincidente com a projeção horizontal da reta  $m$ . Assim, a reta  $m'$  é a reta do plano  $v$  cuja projeção horizontal está coincidente com a projeção horizontal da reta  $m$ .

Uma vez que a reta  $m'$  é uma reta do plano  $v$ , e que passa pelo ponto  $E'$  (cuja perspectiva já foi determinada), já temos um ponto para definir a reta  $m'$  em perspectiva (a perspectiva do ponto  $E'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Uma vez que a reta  $m'$  é necessariamente paralela à reta  $m$  (porque são retas suporte de arestas paralelas do mesmo prisma) e paralela ao eixo  $Y$ , também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $m'$ . Assim, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da reta  $m'$ , que passa por  $E'$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $E'$ ) e é paralela a  $m$  (a perspectiva propriamente dita da reta  $m$ ).

Por fim, a perpendicular à charneira que nos permitiu determinar a perspectiva do ponto  $G$  permitiu-nos, igualmente, determinar a perspectiva do ponto  $G'$ , sobre a perspectiva da reta  $m'$ .

#### *Determinação das perspectivas do sólido:*

Por fim, a partir das perspectivas dos catorze vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspectiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as arestas visíveis e as arestas invisíveis.

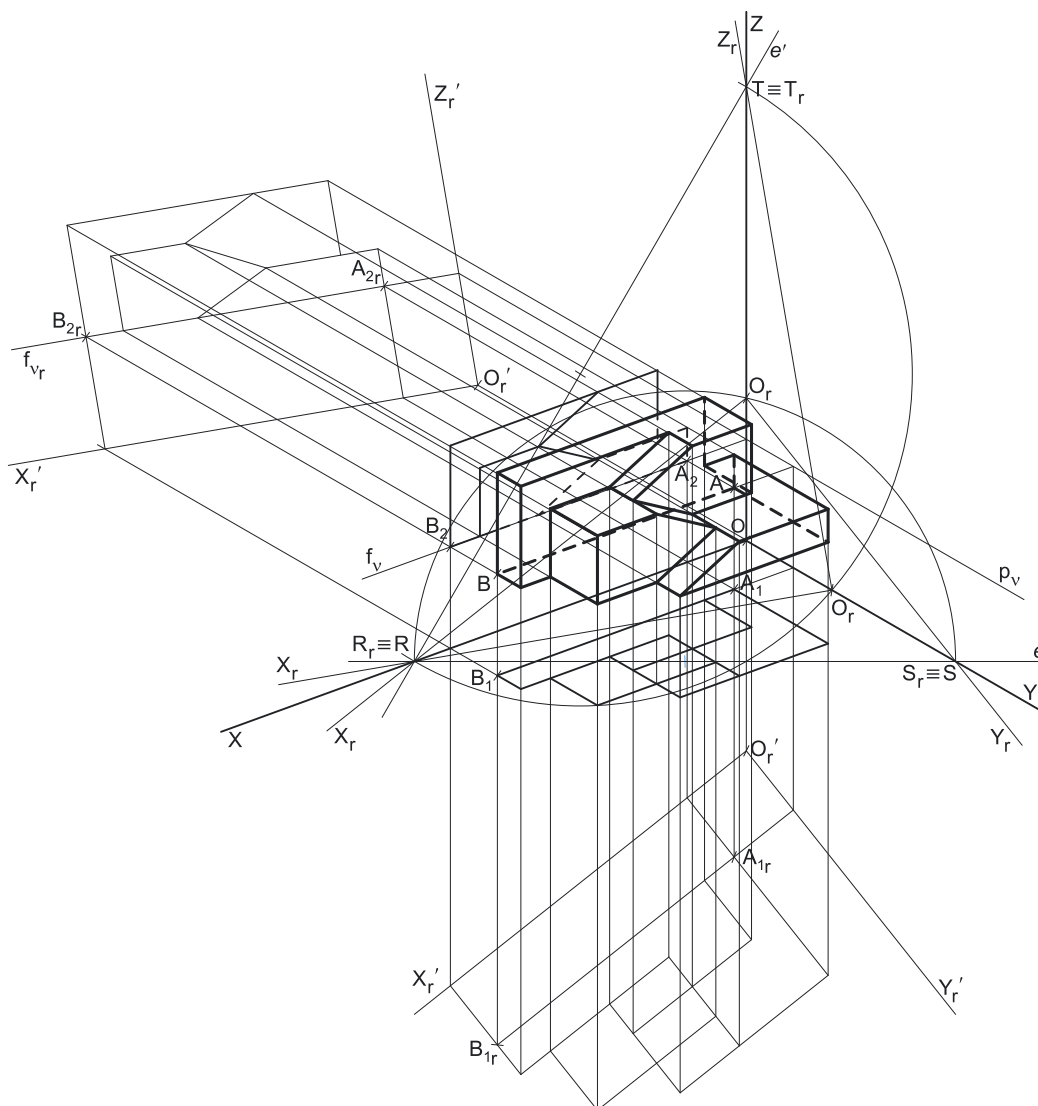
Note que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um paralelepípedo e um prisma triangular regular), as faces do objeto que resultam de duas faces coplanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso dos segmentos de reta  $[EF]$  e  $[E'F']$ . De facto, aqueles dois segmentos de reta **não são** arestas do sólido, porque não resultam da interseção entre duas faces distintas (ambos os segmentos de reta são, na prática, linhas auxiliares que estão contidas em determinadas faces do objeto e, por isso, não são arestas do sólido).

Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais dos vértices de qualquer dos sólidos, por não serem necessárias (excetuando os pontos  $B$  e  $B'$ ). Nesse sentido, também não se representaram as perspectivas de qualquer das projeções do objeto final. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### **Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a face superior do sólido), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As perspectivas do sólido representaram-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, da translação do plano  $XY$  rebatido, da construção das projeções horizontais dos dois sólidos em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, os traçados referentes ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ , para a determinação da perspectiva da cota do plano horizontal (de nível).

1248.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $130^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de  $110^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $120^\circ$ , que é o ângulo restante ( $110^\circ + 130^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

**Resolução:**

São dadas duas vistas do objeto (as suas projeções horizontal e frontal), a partir das quais se depreende que o objeto tem as suas arestas paralelas aos eixos coordenados. Os planos que contêm qualquer destas duas projeções (o *plano coordenado horizontal* e o *plano coordenado frontal*) não são paralelos ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das projeções do objeto se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Nesta situação, é conveniente representar o objeto dado por duas das suas projeções, pelo menos, o que significa ter de rebater dois dos três *planos coordenados*. Tendo em conta que são dadas, apenas, as projeções horizontal e frontal do objeto, é conveniente representar previamente o objeto pelas suas projeções horizontal e frontal (em Dupla Projeção Ortogonal), pelo que é necessário recorrer ao **rebatimento dos planos coordenados** – o rebatimento do *plano coordenado horizontal* (o plano **XY**) e o rebatimento do *plano coordenado frontal* (o plano **XZ**).

O **rebatimento dos planos coordenados** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Destes dois processos, o mais eficaz (com vista à representação prévia do objeto por duas das suas projeções) é, inquestionavelmente, o **método dos cortes**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado XY) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado [RS] do triângulo fundamental (o lado que se opõe à perspectiva do eixo Y). Os pontos R e S são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $S_r \equiv S$ .

O rebatimento do plano coordenado XY processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano XY. Nesse sentido, determinou-se o ponto M, o ponto médio do lado [RS] do triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto O, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo Z) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e  $S_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XY rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo Z. O ponto  $O_r'$  é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

#### Rebatimento do plano coordenado XZ:

Para efetuar o rebatimento do plano XZ, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado XZ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o lado [RT] do triângulo fundamental (o lado que se opõe à perspectiva do eixo Y). Os pontos R e T são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

O rebatimento do plano coordenado XZ processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano XZ. Nesse sentido, determinou-se o ponto M', o ponto médio do lado [RT] do triângulo fundamental (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto O, uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo Y) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XZ rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo Y. O ponto  $O_r'$  é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

#### Representação do objeto pelas suas projeções horizontal e frontal, em rebatimento:

No plano XY rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , representou-se a **abscissa** do ponto A (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de  $O_r'$ ). No plano XY rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , representou-se o **afastamento** do ponto A (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de  $O_r'$ ). A partir da abscissa e do afastamento do ponto A foi possível representar, de imediato,  $A_{1r}$ , que é a projeção horizontal do ponto A, em rebatimento –  $A_{1r}$  situa-se no eixo  $X_r'$ , pois o ponto A tem afastamento nulo.

Tendo em conta que, a partir das projeções fornecidas, é possível contatar que o objeto tem as suas arestas paralelas aos eixos coordenados, a partir de  $A_{1r}$ , reproduziu-se a projeção horizontal fornecida do objeto, com as suas arestas paralelas ao eixo  $X_r'$  e ao eixo  $Y_r'$ . Note que a aresta [AB], do sólido, é fronto-horizontal, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no plano XY. Assim, o segmento  $[A_{1r}B_{1r}]$  é paralelo ao eixo  $X_r'$  e mede 8 cm (o comprimento real da aresta).

No plano XZ rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto A (2 cm, em verdadeira grandeza). No plano XZ rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto A (3 cm, em verdadeira grandeza). A partir da abscissa e da cota do ponto A foi possível determinar  $A_{2r} - A_{2r}$  é a projeção frontal do ponto A, em rebatimento.

Tendo em conta que o objeto tem as suas arestas paralelas aos eixos coordenados, a partir de  $A_{2r}$ , reproduziu-se a projeção frontal fornecida do objeto, com as suas arestas paralelas ao eixo  $X_r'$  e ao eixo  $Z_r'$ . Note que a aresta [AB], do sólido, é fronto-horizontal, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no plano XZ. Assim, o segmento  $[A_{2r}B_{2r}]$  é paralelo ao eixo  $X_r'$  e mede 8 cm (o comprimento real da aresta).

Note que, no plano XZ rebatido e trasladado, se representou, também, o plano horizontal (de nível) que contém a face inferior do sólido. Nesse sentido,  $f_{vr}$  é, em rebatimento, o traço frontal do plano v (o plano horizontal que contém a face inferior do objeto) –  $f_{vr}$  é paralelo ao eixo  $X_r'$  (pois é uma reta fronto-horizontal do plano, com afastamento nulo) e passa por  $A_{2r}$  e por  $B_{2r}$  (as projeções frontais dos pontos A e B, em rebatimento), pois o plano v é um plano projetante frontal.

#### Determinação da perspectiva do objeto:

Para inverter o rebatimento do ponto A (por exemplo), a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção frontal), conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto A, em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{2r}$  (a projeção frontal do ponto A, em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e'$ ) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspectiva propriamente dita do ponto A.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinaram-se as perspectivas das projeções horizontal e frontal do ponto **A**, a partir das perspectivas das suas coordenadas. **A<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A** e **A<sub>1</sub>** é a perspectiva da sua projeção horizontal.

A inversão do rebatimento dos restantes vértices do sólido, bem como a determinação das respetivas perspectivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **A**. Note que se optou por desenhar as perspectivas da projeção horizontal e da projeção frontal do objeto, apesar de estas não serem necessárias nem determinantes para a concretização do exercício – estas permitem, apenas, uma melhor visualização da situação.

Por outro lado, também se optou por representar o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a face inferior do sólido), pelas perspectivas dos seus traços. Nesse sentido, e tendo em conta que o plano  $v$  é um plano projetante frontal,  $f_v$  (a perspectiva do seu traço frontal) passa necessariamente por **A<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**) e é paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ) é concorrente com  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) sobre a perspectiva do eixo **Z** e é paralela à perspectiva do eixo **Y** (pois é uma reta de topo do plano, com abcissa nula).

Por fim, a partir das perspectivas da totalidade dos vértices do sólido, desenhou-se a sua perspectiva, atendendo às invisibilidades. Note que apenas existem arestas a separar faces distintas – tendo em conta que uma aresta é o segmento de reta segundo o qual se interseam duas faces distintas (que estão contidas em planos distintos), na superfície de uma única face, porque está contida num único plano, não existe qualquer aresta «no meio» da face.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do sólido representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano que contém a face inferior do sólido), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso dos rebatimentos do *plano coordenado XY* e do *plano coordenado XZ*, das translações dos *planos coordenados* rebatidos, da construção das projeções horizontal e frontal do objeto em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter o rebatimento e determinar a perspectiva do objeto.

## 1249.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $X$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $XZ$  – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $130^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $140^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto  $Q$  (3 cm) sobre o eixo  $X$  (em verdadeira grandeza), bem como a sua cota (6 cm) sobre o eixo  $Z$  (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato,  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ ), bem como  $Q_0$  (a referência da abscissa do ponto  $Q$ , no eixo  $X$ ). Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém o triângulo), pelos seus traços. O plano  $\pi$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ). Nesse sentido, desenhou-se  $f_\pi$ , o traço frontal do plano  $\pi$ , paralelo ao eixo  $Z$  –  $f_\pi$  passa por  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal. Note que  $f_\pi$  é uma reta vertical do plano, com afastamento nulo.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ), que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$  e é concorrente com  $f_\pi$  no eixo  $X$  –  $h_\pi$  é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula. Salienta-se que o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante horizontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ).

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (um plano de perfil) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano de perfil, que é paralelo ao plano coordenado de perfil (o plano  $YZ$ ), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $YZ$  – o triângulo  $[ABC]$  e a sua projeção lateral (a sua projeção no plano coordenado  $YZ$ ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do rebatimento do plano coordenado  $YZ$  (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

**Rebatimento do plano  $YZ$  e construção da projeção lateral do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza:**

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $YZ$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $Z$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $X$ , facto que se assinalou devidamente –  $X \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano  $YZ$ .

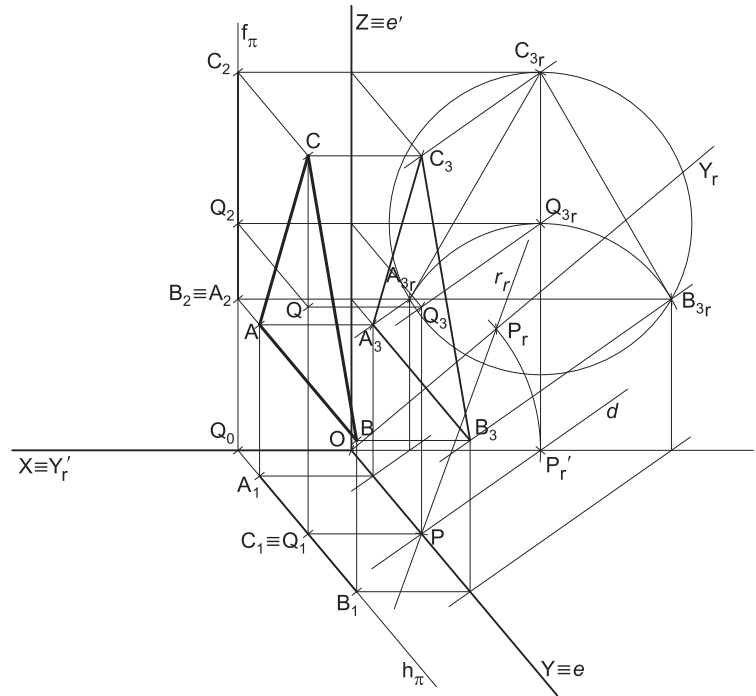
Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $YZ$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $YZ$  com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $YZ$  rebatido, representou-se a projeção lateral do ponto  $Q$ , em rebatimento, em função do seu afastamento. Assim,  $Q_{3r}$  é a projeção lateral do ponto  $Q$  (em rebatimento), situa-se 5 cm (o afastamento do ponto  $Q$ ) para a direita do eixo  $Z$ , na sua linha de chamada (que passa por  $Q_2$  e é perpendicular ao eixo  $Z$ ).

Com o compasso, fazendo centro em  $Q_{3r}$  (a projeção lateral do ponto  $Q$ , em rebatimento) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao triângulo (em verdadeira grandeza, em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo, inscrito na circunferência (de acordo com os dados). Tendo em conta que o lado  $[AB]$  do polígono é de topo, sabe-se que o lado  $[AB]$ , no espaço, é paralelo ao eixo  $Y$ . Assim, em rebatimento, o lado  $[A_3, B_3]$  é necessariamente paralelo ao eixo  $Y_r'$ . Por outro lado, teve-se ainda em conta que o ponto  $C$  é o vértice de maior cota do triângulo.

Assim, efetuou-se a construção da projeção lateral do triângulo, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os três vértices do triângulo (em rebatimento) – o triângulo  $[A_3, B_3, C_3]$  é a projeção lateral do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $YZ$ .

Para determinar a perspectiva do triângulo  $[ABC]$  é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à direção de afinidade.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **YZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Y**, pois só assim será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Y<sub>r</sub>** está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **Y**).

Em seguida, transportou-se, para o eixo **Y<sub>r</sub>**, o afastamento do ponto **Q**, a partir de **Q<sub>3r</sub>**, com uma paralela ao eixo **Z**. Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto **P<sub>r</sub>**, no eixo **Y<sub>r</sub>** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do ponto **Q** (**OP<sub>r</sub>** é o afastamento do ponto **Q**, no eixo **Y<sub>r</sub>**, pelo rebatimento do plano **YZ**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio **OP<sub>r</sub>**, transportou-se o **afastamento** do ponto **P** (que é 5 cm) para o eixo **Y<sub>r</sub>**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Y**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). Assim, **OP<sub>r</sub>** é o afastamento do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. O segmento **OP** é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto **Q** – **OP** é a perspectiva do afastamento do ponto **Q**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **YZ**).

## Inversão do rebatimento do plano coordenado YZ e determinação das perspectivas do ponto C:

Em primeiro lugar, conduziu-se, por **C<sub>3r</sub>** (a projeção lateral do ponto **C**, em rebatimento) a linha de chamada do ponto **C** que, neste caso, é perpendicular ao eixo **Z**. Este procedimento permitiu-nos determinar **C<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **C**), que se situa necessariamente sobre **f<sub>π</sub>** (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.

Nesse sentido, as projeções do ponto **C** (a projeção frontal e a projeção lateral) são dois extremos da linha de chamada do ponto **C** – a linha de chamada do ponto **C** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **C<sub>2</sub>**, outro extremo em **C<sub>3</sub>** e um vértice no eixo **Z**. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **C** que está contida no plano **YZ** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **Z** e que tem um extremo em **C<sub>3</sub>** e o outro extremo no eixo **Z**. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **C** é o segmento que é perpendicular ao eixo **Z** e que tem um extremo em **C<sub>3r</sub>** e o outro extremo no eixo **Z**. **Em perspectiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **C** (a parte que se situa no plano **YZ**) é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y** e tem um extremo no eixo **Z**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspectiva** da parte da linha de chamada do ponto **C** que se situa no plano **YZ** (e que é paralela à perspectiva do eixo **Y**). Em seguida, por **C<sub>3r</sub>**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto **C** (anteriormente desenhada) é **C<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **YZ**.

Em seguida, por **C<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **C**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto **C**, que é de topo (paralela à perspectiva do eixo **Y**). Depois, por **C<sub>3</sub>** (a projeção lateral do ponto **C**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral do ponto **C** (que é paralela ao eixo **X**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**.

A partir das perspectivas do afastamento e da abscissa do ponto **C** determinou-se a perspectiva de **C<sub>1</sub>**, a sua projeção horizontal (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **C<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos) – **C<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C** e situa-se sobre a perspectiva de **h<sub>π</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.

Note que o ponto **C** e o ponto **Q** se situam na mesma reta projetante horizontal, pelo que os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes – tem-se, imediatamente, **C<sub>1</sub> ≡ Q<sub>1</sub>**.

## Determinação das perspectivas dos pontos A, B e Q:

As perspectivas dos pontos **A**, **B** e **Q** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto **C**.

## Determinação das perspectivas do triângulo:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo **[ABC]** é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo **[A<sub>3</sub>B<sub>3</sub>C<sub>3</sub>]** é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. O segmento de reta **[A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]** é a perspectiva da projeção frontal do triângulo (que se situa sobre **f<sub>π</sub>**, pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal). O segmento de reta **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>]** é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo (que se situa sobre **h<sub>π</sub>**, pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal).

Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o triângulo, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção lateral do triângulo, em rebatimento, do eixo **Y<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **YZ**.

## 1250.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $X$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $XZ$  – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com as partes positivas do eixo  $X$  e do eixo  $Z$ , ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar a abcissa do ponto  $A$  (4 cm) sobre o eixo  $X$  (em verdadeira grandeza), bem como a sua cota (3 cm) sobre o eixo  $Z$  (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato,  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ), bem como  $A_0$  (a referência da abcissa do ponto, no eixo  $X$ ). Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

Salienta-se que o ponto  $A$  tem afastamento nulo (é um ponto do plano coordenado  $XZ$ ), pelo que  $A_1$  (a sua projeção horizontal) se situa necessariamente no eixo  $X$ . Por outro lado, e ainda porque o ponto  $A$  é um ponto do plano coordenado  $XZ$ , o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, pelo que se tem, imediatamente,  $A \equiv A_2$  (sendo  $A$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém o quadrado), pelos seus traços. O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Nesse sentido, desenhou-se  $f_v$ , o traço frontal do plano  $v$  –  $f_v$ , passa por  $A_2$ , pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Note que  $f_v$  é uma reta fronto-horizontal do plano, com afastamento nulo.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço lateral do plano  $v$  ( $p_v$ ), que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$  e é concorrente com  $f_v$  no eixo  $Z$  –  $p_v$  é uma reta de topo do plano  $v$  com abcissa nula. Salienta-se que o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

**Resolução:**

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (um plano horizontal) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao plano coordenado horizontal (o plano  $XY$ ), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XY$  – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado  $XY$ ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do rebatimento do plano coordenado  $XY$  (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

**Rebatimento do plano  $XY$  e construção da projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza:**

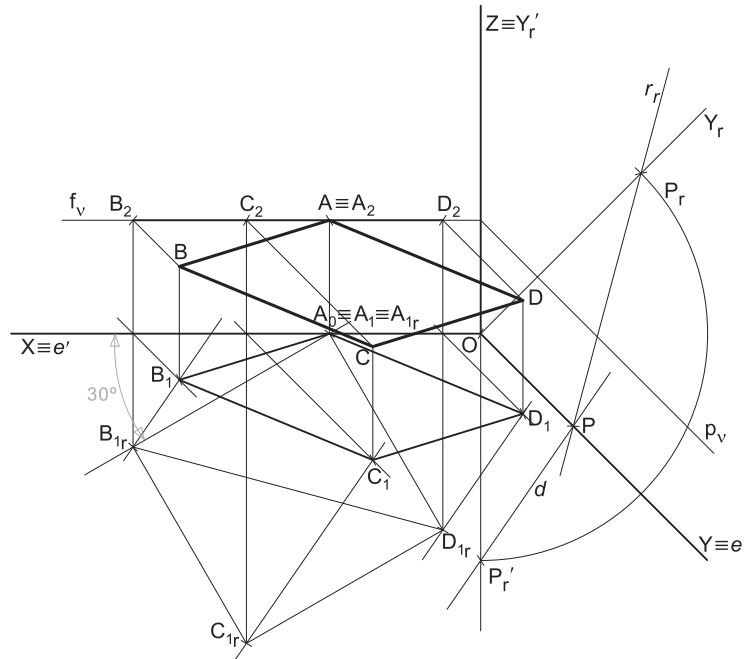
Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XY$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $X$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Z$ , facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XY$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$  com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $XY$  rebatido, representou-se a projeção horizontal do ponto  $A$ , em rebatimento. Uma vez que a projeção horizontal do ponto  $A$  ( $A_1$ ) se situa na charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), trata-se de um ponto fixo (roda sobre si própria), pelo que se tem, imediatamente,  $A_{1r} \equiv A_1 \equiv A_0$ .

Uma vez que o quadrado está em verdadeira grandeza (porque está no plano  $XY$  rebatido), foi possível, em verdadeira grandeza, medir o ângulo de  $30^\circ$  que o lado  $[AB]$  faz com o plano  $XZ$ , que é o ângulo que o lado  $[AB]$  faz com o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ). Esse ângulo está, em verdadeira grandeza, no ângulo que o lado  $[A_1B_{1r}]$  faz com o eixo  $X$ . Assim, a partir de  $A_{1r}$ , desenhou-se a reta suporte (em rebatimento) do lado  $[AB]$ , com o ângulo referido (com abertura à esquerda, como o enunciado refere expressamente). Em seguida, sobre essa reta suporte mediram-se 6 cm (o comprimento do lado do quadrado) e determinou-se  $B_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ , em rebatimento).

A partir de  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da projeção horizontal do quadrado, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{1r}$  e  $D_{1r}$  (as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ . Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do 1.º Triedro, como o enunciado pede expressamente.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, pelas projeções horizontais (em rebatimento) dos pontos **C** e **D** ( $C_1$  e  $D_1$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo **X**) e determinaram-se as projeções frontais daqueles pontos ( $C_2$  e  $D_2$ , respetivamente), sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Para determinar a perspetiva do quadrado **[ABCD]** é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XY** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Y**, pois só assim será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o plano *axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo **Y**).

Em seguida, marcou-se, no eixo  $Y_r$ , um ponto  $P_r'$  qualquer – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com um afastamento qualquer ( $\overline{OP}$  é o afastamento do ponto **P**, no eixo  $Y_r$ , pelo rebatimento do plano **XY**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto **P** para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Y**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspetiva do afastamento do ponto **P** –  $\overline{OP}$  é a perspetiva do afastamento do ponto **P**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação das perspetivas do ponto C:*

As projeções do ponto **C** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **C** – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $C_1$ , outro extremo em  $C_2$  e um vértice no eixo **X**. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **C** que está contida no plano **XY** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **X** e que tem um extremo em  $C_1$  e o outro extremo no eixo **X**. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **C** é o segmento que é perpendicular ao eixo **X** e que tem um extremo em  $C_1$ , e o outro extremo no eixo **X**. **Em perspetiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **C** (a parte que se situa no plano **XY**) é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Y** e tem um extremo no eixo **X**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspetiva** da parte da linha de chamada do ponto **C** que se situa no plano **XY**. Em seguida, por  $C_1$ , conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspetiva da linha de chamada do ponto **C** (anteriormente desenhada) é  $C_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **C**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XY**.

Em seguida, por  $C_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **C**) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto **C**, que é vertical (paralela ao eixo **Z**). Depois, por  $C_2$  (a projeção frontal do ponto **C**), conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal do ponto **C** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto **C**.

*Determinação das perspetivas dos pontos B e D:*

As perspetivas dos pontos **B** e **D** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto **C**.

*Determinação das perspetivas do quadrado:*

Por fim, desenharam-se as perspetivas do quadrado. O quadrilátero **[ABCD]** é a perspetiva propriamente dita do quadrado. O quadrilátero **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** é a perspetiva da projeção horizontal do quadrado. O segmento de reta **[B<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]** é a perspetiva da projeção frontal do quadrado (que se situa sobre  $f_v$ , pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal).

Note que não se determinaram as perspetivas das projeções laterais dos vértices do quadrado (nem da própria figura), pois, na realidade, estas não são fundamentais para a consecução do objetivo do exercício (a determinação da perspetiva da figura). Salienta-se que a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o quadrado, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

**Traçado:**

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do quadrado representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano horizontal que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção horizontal do quadrado, em rebatimento, do eixo  $Y_r$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XY**.

## 1251.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $Y$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $YZ$  – o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $X$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $Y$  um ângulo de  $150^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $120^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar o afastamento do ponto  $Q$  (5 cm) sobre o eixo  $Y$  (em verdadeira grandeza), bem como a sua cota (4 cm) sobre o eixo  $Z$  (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato,  $Q_3$  (a projeção lateral do ponto  $Q$ ). Note que o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém o pentágono), pelos seus traços. O plano  $v$  é um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ). Nesse sentido, desenhou-se  $p_v$ , o traço lateral do plano  $v$  –  $p_v$  passa por  $Q_3$ , pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral. Note que  $p_v$  é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), que é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e é concorrente com  $p_v$  no eixo  $Z$  –  $f_v$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo. Salienta-se que o plano  $v$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ).

**Resolução:**

O plano que contém o pentágono  $[ABCDE]$  (um plano horizontal) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $YZ$ ), pelo que o pentágono  $[ABCDE]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do pentágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o pentágono está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao plano coordenado horizontal (o plano  $XY$ ), sabe-se que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XY$  – o pentágono  $[ABCDE]$  e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado  $XY$ ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado  $XY$**  (o plano no qual o pentágono se projeta em verdadeira grandeza).

**Rebatimento do plano  $XY$  e construção da projeção horizontal do pentágono  $[ABCDE]$ , em verdadeira grandeza:**

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XY$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $Y$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Z$ , facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv X_r'$ . O eixo  $X_r'$  é o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XY$ .

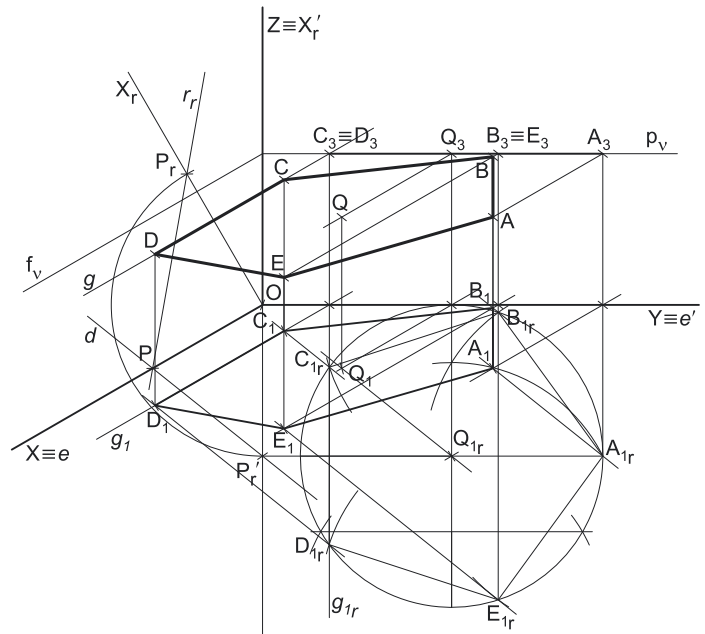
Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$  com a notação  $X_r'$ , optando-se por manter a notação  $X_r$  para o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $XY$  rebatido, representou-se a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento ( $Q_{1r}$ ) em função da sua abcissa. Assim,  $Q_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto  $Q$  (em rebatimento), situa-se 4 cm (a abcissa do ponto  $Q$ ) para baixo do eixo  $Y$ , na sua linha de chamada (que passa por  $Q_3$  e é perpendicular ao eixo  $Y$ ). O pentágono inscreve-se numa circunferência tangente ao plano  $YZ$ . Tendo em conta que o centro da circunferência (o ponto  $Q$ ) tem 4 cm de abcissa (que é a distância do ponto  $Q$  ao plano  $YZ$ ), a circunferência circunscrita ao pentágono tem necessariamente 4 cm de raio. Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono (em verdadeira grandeza, em rebatimento), que é tangente ao eixo  $Y$ .

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do pentágono, inscrito na circunferência e de acordo com os dados. O lado de menor afastamento (o lado mais próximo do eixo  $X$ ) é fronto-horizontal, ou seja, em rebatimento, o lado do pentágono que está mais próximo do eixo  $X_r'$  é paralelo ao eixo  $X_r'$ . Por outro lado, na atribuição de notações aos vértices do pentágono, teve-se em conta que  $A$  é o vértice de maior afastamento do polígono e que  $B$  é o seu vértice de menor abcissa (como o enunciado refere expressamente).

Assim, efetuou-se a construção da **projeção horizontal do pentágono**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os cinco vértices da figura (em rebatimento) – o pentágono  $[A_1, B_1, C_1, D_1, E_1]$  é a projeção horizontal do pentágono  $[ABCDE]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ .

Para determinar a perspectiva do pentágono  $[ABCDE]$  é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XY** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **X**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **X** para o plano *axonométrico* (o plano **YZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **X**. O eixo **X** rebatido (o eixo **X<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspetiva do eixo **X**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **X<sub>r</sub>** está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo **X**).

Em seguida, transportou-se, para o eixo **X<sub>r</sub>**, a abscissa do ponto **Q**, a partir de **Q<sub>1r</sub>**, com uma paralela ao eixo **Y**. Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto **P<sub>r</sub>**, no eixo **X<sub>r</sub>** – o ponto **P** é um ponto do eixo **X** com a abscissa do ponto **Q** (**OP<sub>r</sub>** é a abscissa do ponto **Q**, no eixo **X<sub>r</sub>**, pelo rebatimento do plano **XY**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio **OP<sub>r</sub>**, transportou-se a **abscissa** do ponto **P** para o eixo **X<sub>r</sub>**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **X**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **X**). Assim, **OP<sub>r</sub>** é a abscissa do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **X**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 50°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspetiva da abscissa do ponto **P** – **OP** é a perspetiva da abscissa do ponto **P**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>** e pela perspetiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

## Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação das perspetivas do ponto A:

Em primeiro lugar, conduziu-se, por **A<sub>1r</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**, em rebatimento) a linha de chamada do ponto **A** que, neste caso, é perpendicular ao eixo **Y**. Este procedimento permitiu-nos determinar **A<sub>3</sub>** (a projeção lateral do ponto **A**), que se situa necessariamente sobre **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano **v**), pois o plano **v** é um plano projetante lateral.

Nesse sentido, as projeções do ponto **A** (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **A** – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **A<sub>1</sub>**, outro extremo em **A<sub>3</sub>** e um vértice no eixo **Y**. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **A** que está contida no plano **XY** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **Y** e que tem um extremo em **A<sub>1</sub>** e o outro extremo no eixo **Y**. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **A** é o segmento que é perpendicular ao eixo **Y** e que tem um extremo em **A<sub>1r</sub>** e o outro extremo no eixo **Y**. **Em perspetiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **A** (a parte que se situa no plano **XY**) é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **X** e tem um extremo no eixo **Y**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte da **perspetiva** da parte da linha de chamada do ponto **A** que se situa no plano **XY**. Em seguida, por **A<sub>1r</sub>** conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspetiva da linha de chamada do ponto **A** (anteriormente desenhada) é **A<sub>1</sub>** (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XY**.

Em seguida, por **A<sub>1</sub>** (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto **A**, que é vertical (paralela ao eixo **Z**). Depois, por **A<sub>3</sub>** (a projeção lateral do ponto **A**), conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**.

## Determinação das perspetivas dos pontos Q, B, C, D e E:

As perspetivas dos pontos **Q, B, C, D** e **E** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto **A**.

## Determinação das perspetivas do pentágono:

Por fim, desenharam-se as perspetivas do pentágono. O pentágono (irregular) **[ABCDE]** é a perspetiva propriamente dita do pentágono. O pentágono (irregular) **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>]** é a perspetiva da projeção horizontal do pentágono. O segmento de reta **[C<sub>3</sub>A<sub>3</sub>]** é a perspetiva da projeção lateral do pentágono (que se situa sobre **p<sub>v</sub>**, pois o plano **v** é um plano projetante lateral).

Note que não se determinaram as perspetivas das projeções frontais dos vértices do pentágono (nem da própria figura), pois, na realidade, estas não são fundamentais para a consecução do objetivo do exercício (a determinação da perspetiva da figura). Salienta-se que a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o pentágono, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

## Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do pentágono representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano **v** (o plano que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção horizontal do pentágono, em rebatimento, do eixo **X<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XY**.



## 1252.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – nesse sentido, o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo **X** e do eixo **Z**, ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar as abscissas dos pontos **A** e **B** (4 cm e 1 cm, respetivamente) sobre o eixo **X** (em verdadeira grandeza), bem como as cotas dos pontos **A** e **B** (1 cm e 4 cm, respetivamente) sobre o eixo **Z** (também em verdadeira grandeza). Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato, **A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), bem como **A<sub>0</sub>** e **B<sub>0</sub>** (as referências das abscissas dos dois pontos, no eixo **X**). Note que o eixo **X** e o eixo **Z** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

**Resolução:**

O plano que contém o hexágono (um plano frontal) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XZ**), pelo que o hexágono **se projeta em verdadeira grandeza** no *plano axonométrico* (a perspectiva do hexágono não apresenta qualquer deformação) – o hexágono, a sua perspectiva e a sua projeção frontal são figuras geometricamente iguais.

Assim, a partir de **A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>**, foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do hexágono**, em verdadeira grandeza. Para tal, recorrendo ao compasso, em primeiro lugar, determinou-se **Q<sub>2</sub>** (a projeção frontal do centro da circunferência circunscrita ao hexágono). Depois, com compasso, fazendo centro em **Q<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **Q**) e com raio até **A<sub>2</sub>** ou **B<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao hexágono e efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, inscrita na circunferência.

Para determinar a perspectiva do hexágono **[ABCDEF]** é necessário determinar a perspectiva do afastamento do plano frontal (de frente) que contém o hexágono.

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação:*

O **afastamento** do plano frontal (de frente) que contém o hexágono, porque se mede no eixo **Y**, está afetado pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, o processo mais simples consiste em recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Y<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo **Y**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), representou-se o **afastamento** do plano frontal (de frente) que contém o hexágono (que é 3 cm – o afastamento dos pontos **A** e **B**), em verdadeira grandeza, determinando-se um ponto **P<sub>r</sub>**. O ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do plano frontal (de frente) que contém o hexágono (**OP<sub>r</sub>** = 3 cm e é o afastamento do plano frontal, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **P**, sobre a perspectiva do eixo **Y** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva do afastamento do plano frontal (de frente) que contém o hexágono (**OP** é a perspectiva do afastamento do plano frontal).

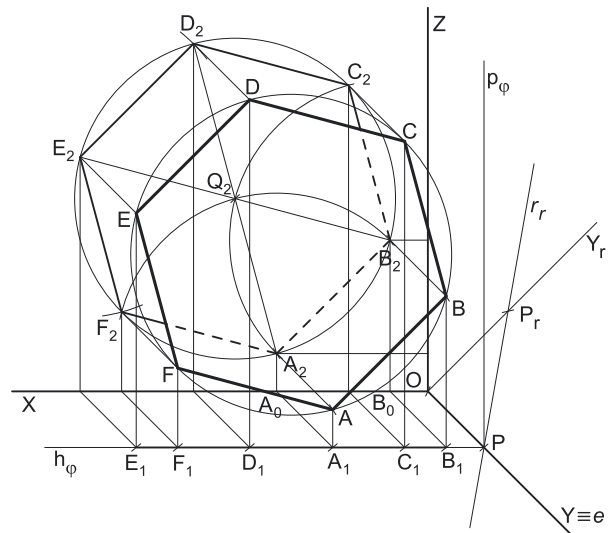
*Representação do plano frontal (de frente) que contém o hexágono:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a perspectiva do ponto **P**, que é o ponto do eixo **Y** que tem 3 cm de afastamento. O plano frontal (de frente)  $\phi$  que contém o hexágono, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de afastamento, contém necessariamente o ponto **P**.

Assim, pela perspectiva do ponto **P** conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\phi$  – **h<sub>φ</sub>** (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ) e **p<sub>φ</sub>** (a perspectiva do traço lateral do plano  $\phi$ ).

Note que **h<sub>φ</sub>** (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\phi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado, **p<sub>φ</sub>** (o traço lateral ou de perfil do plano  $\phi$ ) é uma reta vertical do plano  $\phi$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z**.

O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**). Por outro lado, o plano  $\phi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral (**p<sub>φ</sub>**).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação das perspetivas do ponto A:

A partir das perspetivas do afastamento e da abcissa do ponto **A**, determinou-se a perspetiva da sua projeção horizontal (**A**<sub>1</sub>), recorrendo ao paralelogramo de que **A**<sub>1</sub> e **O** são dois vértices opostos. **A**<sub>1</sub> é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A** e situa-se sobre a perspetiva de **h**<sub>φ</sub> (o traço horizontal do plano φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal. Note que o troço da linha de chamada do ponto **A** que se situa no plano **XY** tem um extremo em **A**<sub>0</sub> e o outro extremo em **A**<sub>1</sub> (que se situa sobre o traço horizontal do plano φ) – nesse sentido, salienta-se que o segmento [**A**<sub>0</sub>**A**<sub>1</sub>] é necessariamente paralelo à perspetiva do eixo **Y**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal, conduziu-se, pela perspetiva de **A**<sub>1</sub>, a perspetiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**) e pela perspetiva de **A**<sub>2</sub> conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) – as duas retas intersectam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**.

## Determinação das perspetivas dos pontos B, C, D, E e F:

As perspetivas dos pontos **B**, **C**, **D**, **E** e **F** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **A**. Atendendo a que os cinco pontos pertencem ao plano φ, que é um plano projetante horizontal, as perspetivas das respetivas projeções horizontais (**B**<sub>1</sub>, **C**<sub>1</sub>, **D**<sub>1</sub>, **E**<sub>1</sub> e **F**<sub>1</sub>) situam-se sobre a perspetiva de **h**<sub>φ</sub> (o traço horizontal do plano φ).

Note que não se determinaram as perspetivas das projeções laterais dos vértices do hexágono, por não serem absolutamente necessárias à resolução do exercício (a determinação da perspetiva do hexágono). No entanto, caso se tivessem determinado as perspetivas das projeções laterais dos seis pontos, estas estariam necessariamente sobre a perspetiva do traço lateral do plano φ (**p**<sub>φ</sub>), pois o plano φ é um plano projetante lateral.

De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

## Determinação da perspetiva do hexágono:

Atendendo a que o plano φ (o plano que contém o hexágono) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o hexágono projeta-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano **XZ**). Assim, a partir das perspetivas de todos os seus vértices, desenhou-se o hexágono [**ABCDEF**], que é a perspetiva propriamente dita do hexágono [**ABCDEF**].

O hexágono [**A**<sub>2</sub>**B**<sub>2</sub>**C**<sub>2</sub>**D**<sub>2</sub>**E**<sub>2</sub>**F**<sub>2</sub>] é a perspetiva da projeção frontal do hexágono. O segmento de reta [**B**<sub>1</sub>**E**<sub>1</sub>] é a perspetiva da projeção horizontal do hexágono, que se reduz a um segmento de reta sobre **h**<sub>φ</sub> (a perspetiva do traço horizontal do plano φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal.

Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o hexágono, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

## Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do hexágono representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano φ (o plano que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo **Y**' e da reta **r**<sub>r</sub>.

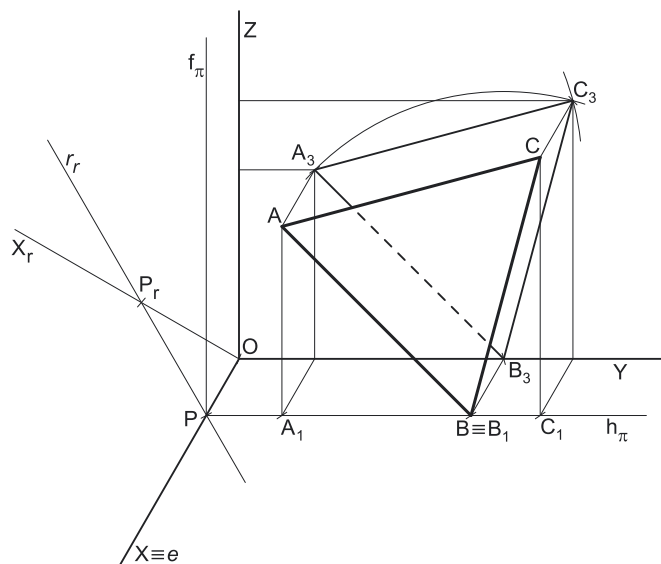
## 1253.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **Y** e ao eixo **Z**, conclui-se que o plano axonométrico é o plano **YZ** – nesse sentido, o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspetiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 120° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de 150° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar os afastamentos dos pontos **A** e **B** (2 cm e 7 cm, respetivamente) sobre o eixo **X** (em verdadeira grandeza), bem como as cotas do ponto **A** (5 cm) sobre o eixo **Z** (também em verdadeira grandeza) – salienta-se que o ponto **B** tem cota nula. Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato, **A**<sub>3</sub> e **B**<sub>3</sub> (as projeções laterais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). Note que o eixo **Y** e o eixo **Z** estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

O ponto **B** tem cota nula, pelo que **B**<sub>3</sub> (a sua projeção lateral) se situa necessariamente no eixo **Y**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo (um plano de perfil) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano  $YZ$ ), pelo que o triângulo **se projeta em verdadeira grandeza** no *plano axonométrico* (a perspetiva do triângulo não apresenta qualquer deformação) – o triângulo, a sua perspetiva e a sua projeção lateral são figuras geometricamente iguais.

Assim, a partir de  $A_3$  e  $B_3$ , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do triângulo**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar  $C_3$ . A projeção lateral do ponto  $C$ . Note que se atendeu, na construção efetuada, ao facto de que a figura se situa no espaço do  $1^{\circ}$  Triedro.

Para determinar a perspetiva do triângulo  $[ABC]$  é necessário determinar a perspetiva da abcissa do plano de perfil que contém o triângulo.

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A **abcissa** do plano de perfil que contém o triângulo, porque se mede no eixo  $X$ , está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, o processo mais simples consiste em recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  para o *plano axonométrico* (o plano  $YZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $X$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $X$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspetiva do eixo  $X$ ).

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $X_r$  (e no sentido positivo do eixo), representou-se a **abcissa** do plano de perfil que contém o triângulo (que é 3 cm – a abcissa dos pontos  $A$  e  $B$ ), em verdadeira grandeza, determinando-se um ponto  $P_r$ . O ponto  $P$  é um ponto do eixo  $X$  com a abcissa do plano de perfil que contém o triângulo ( $OP_r = 3$  cm e é a abcissa do plano de perfil, em verdadeira grandeza).

Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P_r$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspetiva do ponto  $P$ , sobre a perspetiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspetiva da abcissa do plano de perfil que contém o triângulo ( $OP$  é a perspetiva da abcissa do plano de perfil).

#### Representação do plano de perfil que contém o triângulo:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspetiva do eixo  $X$ , a perspetiva do ponto  $P$ , que é o ponto do eixo  $X$  que tem 3 cm de abcissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém o triângulo, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de abcissa, contém necessariamente o ponto  $P$ .

Assim, pela perspetiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\pi$  –  $f_\pi$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi$ ) e  $h_\pi$  (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ).

Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ).

#### Determinação das perspetivas do ponto A:

A partir das perspetivas do afastamento e da abcissa do ponto  $A$ , determinou-se a perspetiva da sua projeção horizontal ( $A_1$ ), recorrendo ao paralelogramo de que  $A_1$  e  $O$  são dois vértices opostos.  $A_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $A$  e situa-se sobre a perspetiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal. Note que o traço da linha de chamada do ponto  $A$  que se situa no plano  $XY$  tem um extremo no eixo  $Y$  e o outro extremo em  $A_1$  (que se situa sobre o traço horizontal do plano  $\pi$ ) e é necessariamente paralelo à perspetiva do eixo  $X$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ . Para tal, conduziu-se, pela perspetiva de  $A_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de  $A$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$ ) e pela perspetiva de  $A_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de  $A$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $X$ ) – as duas retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ .

#### Determinação das perspetivas dos pontos B e C:

As perspetivas dos pontos  $B$  e  $C$  determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto  $A$ . Atendendo a que os dois pontos pertencem ao plano  $\pi$ , que é um plano projetante horizontal, as perspetivas das respetivas projeções horizontais ( $B_1$  e  $C_1$ ) situam-se sobre a perspetiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ).

Por fim, e atendendo a que o ponto  $B$  tem cota nula, o ponto  $B$  situa-se no *plano coordenado XY*, pelo que se tem imediatamente  $B_1 \equiv B$  (sendo  $B$  a perspetiva propriamente dita do ponto  $B$ ).

Note que não se determinaram as perspetivas das projeções frontais dos vértices do triângulo, por não serem absolutamente necessárias à resolução do exercício (a determinação da perspetiva do triângulo). No entanto, caso se tivessem determinado as perspetivas das projeções frontais dos três pontos, estas estariam necessariamente sobre a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.

De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

#### Determinação da perspetiva do triângulo:

Atendendo a que o plano  $\pi$  (o plano que contém o triângulo) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), e como atrás se referiu, o triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o plano  $YZ$ ). Assim, a partir das perspetivas dos seus três vértices, desenhou-se o triângulo  $[ABC]$ , que é a perspetiva propriamente dita do triângulo  $[ABC]$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo  $[A_3B_3C_3]$  é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. O segmento de reta  $[A_1C_1]$  é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo, que se reduz a um segmento de reta sobre  $h_{\Pi}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\Pi$ ), pois o plano  $\Pi$  é um plano projetante horizontal.

Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o triângulo, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo  $X_r$  e da reta  $r_r$ .

## 1254.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $Y$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano  $YZ$  – o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $X$  (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo  $Y$ , um ângulo de  $140^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $130^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos concluir que o ponto  $Q$  tem 3,5 cm de afastamento e de cota. De facto, uma vez que o círculo (que tem 3,5 cm de raio) é tangente ao plano  $XY$  (como o enunciado refere expressamente), o ponto  $Q$  (o centro da figura) tem necessariamente 3,5 cm de cota (a distância do ponto  $Q$  ao plano  $XY$  é igual ao raio do círculo). De forma semelhante, o círculo (que tem 3,5 cm de raio) é tangente ao plano  $XZ$  (como o enunciado refere expressamente), pelo que o ponto  $Q$  (o centro da figura) tem necessariamente 3,5 cm de afastamento (a distância do ponto  $Q$  ao plano  $XZ$  é igual ao raio do círculo).

Assim, foi possível, de forma direta, representar o afastamento do ponto  $Q$  (3,5 cm) sobre o eixo  $Y$  (em verdadeira grandeza), bem como a cota do ponto  $Q$  (3,5 cm) sobre o eixo  $Z$  (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato,  $Q_3$  (a projeção lateral do ponto  $Q$ ). Note que o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

### Resolução:

O plano que contém o círculo (um plano de perfil) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o círculo **projeta-se em verdadeira grandeza** (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção lateral são figuras geometricamente iguais.

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_3$  (a projeção lateral do ponto  $Q$ ) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção lateral do círculo. Para determinar a perspectiva do círculo é necessário, em primeiro lugar, determinar a perspectiva do ponto  $Q$  (o seu centro). Para tal, é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $X$ , de forma a ser possível determinar a perspectiva da abcissa do plano de perfil que contém a figura (a abcissa do ponto  $Q$  é a única coordenada do ponto que apresenta deformação).

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A **abcissa** do plano de perfil que contém o círculo, porque se mede no eixo  $X$ , está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, o processo mais simples consiste em recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  para o *plano axonométrico* (o plano  $YZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $X$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ ).

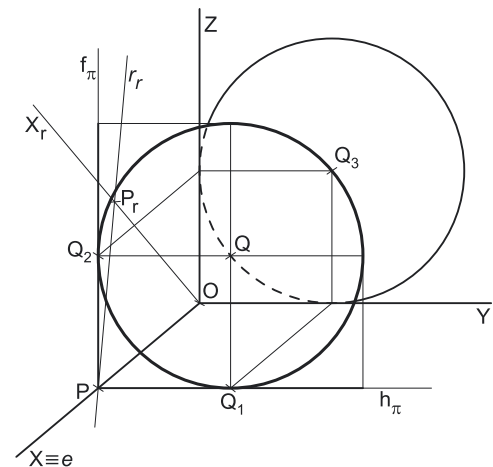
A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $X_r$  (e no sentido positivo do eixo), representou-se a **abcissa** do plano de perfil que contém o triângulo (que é 3 cm – a abcissa do plano de perfil, que é dada no enunciado), em verdadeira grandeza, determinando-se um ponto  $P_r$ . O ponto  $P$  é um ponto do eixo  $X$  com a abcissa do plano de perfil que contém o círculo ( $\overline{OP_r} = 3$  cm e é a abcissa do plano de perfil, em verdadeira grandeza).

Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $45^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $P$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abcissa do plano de perfil que contém o círculo ( $\overline{OP}$  é a perspectiva da abcissa do plano de perfil).

#### Representação do plano de perfil que contém o círculo:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , a perspectiva do ponto  $P$ , que é o ponto do eixo  $X$  que tem 3 cm de abcissa. O plano de perfil  $\pi$  que contém o círculo, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de abcissa, contém necessariamente o ponto  $P$ .

Assim, pela perspectiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $f_{\pi}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ) e  $h_{\pi}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ).

#### Determinação das perspectivas do ponto $Q$ :

A partir das perspectivas do afastamento e da abscissa do ponto  $Q$ , determinou-se a perspectiva da sua projeção horizontal ( $Q_1$ ), recorrendo ao paralelogramo de que  $Q_1$  e  $O$  são dois vértices opostos.  $Q_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $Q$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal. Note que o traço da linha de chamada do ponto  $Q$  que se situa no plano  $XY$  tem um extremo no eixo  $Y$  e o outro extremo em  $Q_1$  (que se situa sobre o traço horizontal do plano  $\pi$ ) e é necessariamente paralelo à perspectiva do eixo  $X$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $Q_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ) e pela perspectiva de  $Q_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as duas retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ .

#### Determinação das perspectivas do círculo:

Atendendo a que o plano  $\pi$  (o plano que contém o círculo) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o círculo projeta-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano  $YZ$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ ) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita do círculo, em verdadeira grandeza.

Por fim, desenharam-se, também, as perspectivas da projeção horizontal da figura (que é um segmento de reta sobre a perspectiva de  $h_\pi$ ) e da sua projeção lateral (que é um círculo que se havia desenhado previamente), atendendo às invisibilidades verificadas.

Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o círculo, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do círculo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo  $X_r$  e da reta  $r_r$ .

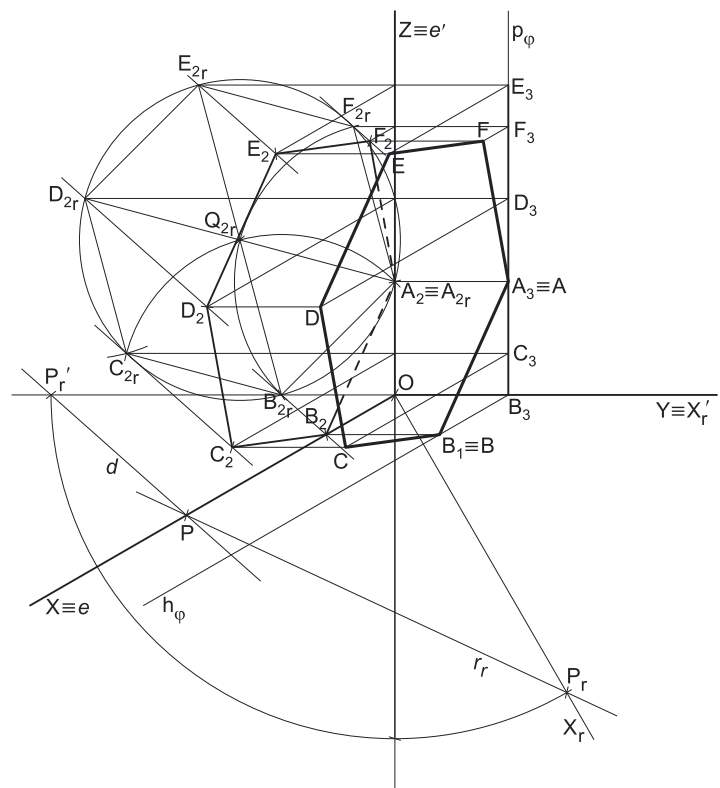
## 1255.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $Y$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $YZ$  – o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $X$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $Y$  um ângulo de  $150^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $120^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar o afastamento do plano frontal (de frente) que contém a figura (3 cm) sobre o eixo  $X$  (em verdadeira grandeza), bem como a cota do ponto  $A$  (3 cm) sobre o eixo  $Z$  (também em verdadeira grandeza) – note que o ponto  $B$  tem cota nula. Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato,  $A_3$  e  $B_3$  (as projeções laterais dos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente). O ponto  $A$  é um ponto do plano coordenado  $YZ$  (tem abscissa nula), pelo que a sua projeção frontal se situa necessariamente no eixo  $Z$ . Note que o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém o hexágono), pelos seus traços. O plano  $\phi$  é um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\phi$ ). Nesse sentido, desenhou-se  $p_\phi$ , o traço lateral do plano  $\phi$ , paralelo ao eixo  $Z$  –  $p_\phi$  passa por  $A_3$  e por  $B_3$  (as projeções laterais dos pontos  $A$  e  $B$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral. Note que  $p_\phi$  é uma reta vertical do plano, com abscissa nula.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenhóu-se a perspetiva do traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), que é paralela à perspetiva do eixo  $X$  e é concorrente com  $p_\varphi$  no eixo  $Y$  –  $h_\varphi$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula. Salienta-se que o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante horizontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ).

## Resolução:

O plano que contém o hexágono  $[ABCDEF]$  (um plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $YZ$ ), pelo que o hexágono  $[ABCDEF]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspetiva do hexágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o hexágono está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao plano coordenado frontal (o plano  $XZ$ ), sabe-se que o hexágono se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XZ$  – o hexágono  $[ABCDEF]$  e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado  $XZ$ ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado  $XZ$**  (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

### Rebatimento do plano $XZ$ e construção da projeção frontal do hexágono $[ABCDEF]$ , em verdadeira grandeza:

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XZ$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $Z$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Y$ , facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv X_r'$ . O eixo  $X_r'$  é o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XZ$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XZ$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XZ$  com a notação  $X_r'$ , optando-se por manter a notação  $X_r$  para o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

O ponto  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ) é um ponto da charneira do rebatimento (que é o eixo  $Z$ ), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_{2r} \equiv A_2$ . No plano  $XZ$  rebatido, representou-se a projeção frontal do ponto  $B$ , em rebatimento ( $B_{2r}$ ), em função da sua abcissa. Assim,  $B_{2r}$  é a projeção frontal do ponto  $B$  (em rebatimento), situa-se 3 cm (a abcissa do ponto  $B$ ) para a esquerda do eixo  $Z$ , na sua linha de chamada (que passa por  $B_3$  e é perpendicular ao eixo  $Z$ ).

A partir de  $A_{2r}$  e  $B_{2r}$ , efetuou-se a construção da **projeção frontal do hexágono**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XZ$ ). Para tal, recorrendo ao compasso, em primeiro lugar, determinou-se  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do centro da circunferência circunscrita ao hexágono, em rebatimento). Depois, com compasso, fazendo centro em  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) e com raio até  $A_{2r}$  ou  $B_{2r}$  (as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente, em rebatimento), desenhóu-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao hexágono e efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção frontal da figura (em rebatimento), inscrita na circunferência, o que nos permitiu determinar as projeções frontais (em rebatimento) dos restantes vértices do polígono. O hexágono  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}E_{2r}F_{2r}]$  é a projeção frontal do hexágono  $[ABCDEF]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspetiva do hexágono  $[ABCDEF]$  é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

### Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XZ$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $X$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  para o plano axonométrico (o plano  $YZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $X$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $X$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo  $X$ ).

Em seguida, marcou-se, no eixo  $X_r'$ , um ponto  $P_r'$  qualquer – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $X$  com uma abcissa qualquer ( $\overline{OP_r'}$  é a abcissa do ponto  $P$ , no eixo  $X_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XZ$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **abcissa** do ponto  $P$  para o eixo  $X_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $X$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a abcissa do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva da abcissa do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da abcissa do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XZ$ ).

### Inversão do rebatimento do plano coordenado $XZ$ e determinação das perspetivas do ponto $C$ :

Em primeiro lugar, conduziu-se, por  $C_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $C$ , em rebatimento) a linha de chamada do ponto  $C$  que, neste caso, é perpendicular ao eixo  $Z$ . Este procedimento permitiu-nos determinar  $C_3$  (a projeção lateral do ponto  $C$ ), que se situa necessariamente sobre  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, as projeções do ponto **C** (a projeção horizontal e a projeção lateral) são dois extremos da linha de chamada do ponto **C** – a linha de chamada do ponto **C** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **C<sub>3</sub>**, outro extremo em **C<sub>1</sub>** e um vértice no eixo **Y**. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **C** que está contida no plano **XZ** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **Z** e que tem um extremo em **C<sub>2</sub>** e o outro extremo no eixo **Z**. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **C** é o segmento que é perpendicular ao eixo **Z** e que tem um extremo em **C<sub>2r</sub>**, e o outro extremo no eixo **Z**. **Em perspectiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **C** (a parte que se situa no plano **XZ**) é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X** e tem um extremo no eixo **Z**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspectiva** da parte da linha de chamada do ponto **C** que se situa no plano **XZ** (e que é paralela à perspectiva do eixo **X**). Em seguida, por **C<sub>2r</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**, em rebatimento) conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto **C** (anteriormente desenhada) é **C<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XZ**.

Em seguida, por **C<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **C**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto **C**, que é de topo (paralela ao eixo **Y**). Depois, por **C<sub>3</sub>** (a projeção lateral do ponto **C**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral do ponto **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**.

Salienta-se que não se determinou a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C** (**C<sub>1</sub>**), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica. No entanto, caso se tivesse determinado **C<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**), esta estaria necessariamente sobre **h<sub>φ</sub>** (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

#### Determinação das perspectivas dos pontos **B**, **C**, **D**, **E** e **F**:

As perspectivas dos pontos **B**, **C**, **D**, **E** e **F** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto **C**.

Note que o ponto **B** se situa no *plano coordenado XY* (pois tem cota nula), pelo que se tem, imediatamente, **B<sub>1</sub> ≡ B** (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**).

Salienta-se que não se determinaram as perspectivas das projeções frontais dos vértices do hexágono (à exceção do ponto **B**), por aquelas não serem determinantes para a resolução do exercício. De facto, apenas a identificação da perspectiva da projeção horizontal do ponto **B** adquire alguma relevância para o exercício, pois o ponto **B** tem cota nula. Nesse sentido, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

No entanto, caso se tivessem determinado as perspectivas das projeções horizontais dos restantes vértices do hexágono, estas estariam necessariamente sobre **h<sub>φ</sub>** (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

#### Determinação das perspectivas do hexágono:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do hexágono. O hexágono **[ABCDEF]** é a perspectiva propriamente dita do hexágono. O hexágono **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>]** é a perspectiva da projeção frontal do hexágono. O segmento de reta **[B<sub>3</sub>E<sub>3</sub>]** é a perspectiva da projeção lateral do hexágono (que se situa sobre **p<sub>φ</sub>**, pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral).

Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o hexágono, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do hexágono representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção frontal do hexágono, em rebatimento, do eixo **X<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d** e, ainda dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XZ**.



## 1256.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de  $145^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $125^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa dos pontos **A** e **B** (2 cm) sobre o eixo **X** (em verdadeira grandeza), bem como as cotas daqueles dois pontos (2 cm e 4 cm, respetivamente) sobre o eixo **Z** (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, **A<sub>2</sub>** e **B<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). Note que o eixo **X** e o eixo **Z** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base da pirâmide), pelos seus traços. O plano  $\pi$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal (**f<sub>π</sub>**). Nesse sentido, desenhou-se **f<sub>π</sub>**, o traço frontal do plano  $\pi$ , paralelo ao eixo **Z** – **f<sub>π</sub>** passa por **A<sub>2</sub>** e por **B<sub>2</sub>** (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal. Note que **f<sub>π</sub>** é uma reta vertical do plano, com afastamento nulo.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$  (**h<sub>π</sub>**), que é paralela à perspectiva do eixo **Y** e é concorrente com **f<sub>π</sub>** no eixo **X** – **h<sub>π</sub>** é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula. Salienta-se que o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante horizontal (é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>π</sub>**).

### Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (a base da pirâmide) é um plano de perfil, que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XZ**), pelo que o triângulo **[ABC]** **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano de perfil, que é paralelo ao *plano coordenado de perfil* (o plano **YZ**), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado YZ* – o triângulo **[ABC]** e a sua projeção lateral (a sua projeção no *plano coordenado YZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

#### Rebatimento do plano YZ e construção da projeção lateral do triângulo [ABC], em verdadeira grandeza:

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano **YZ** para o *plano axonométrico*, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é o eixo **Z**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>'**) fica coincidente com o eixo **X**, facto que se assinalou devidamente – **X  $\equiv$  Y<sub>r</sub>'**. O eixo **Y<sub>r</sub>'** é o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do plano **YZ**.

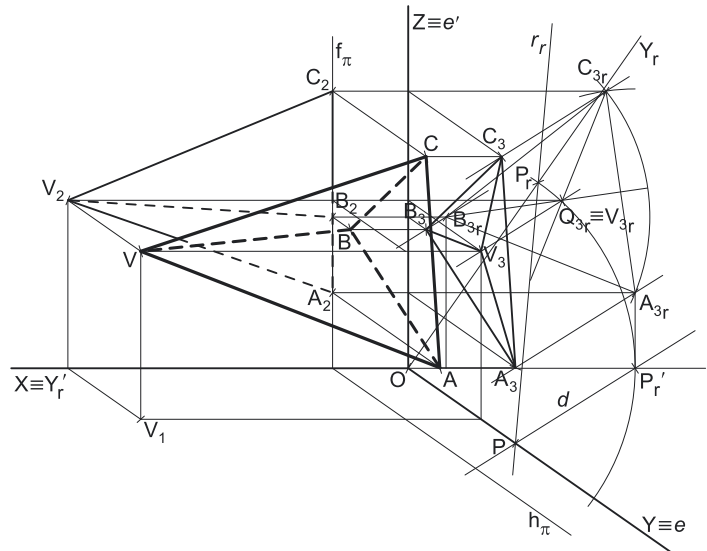
Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **YZ** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **YZ** com a notação **Y<sub>r</sub>'**, optando-se por manter a notação **Y<sub>r</sub>** para o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano **YZ** rebatido, representaram-se as projeções laterais dos pontos **A** e **B**, em rebatimento (**A<sub>3r</sub>** e **B<sub>3r</sub>**, respetivamente), em função dos respetivos afastamentos. Assim, **A<sub>3r</sub>** é a projeção lateral do ponto **A** (em rebatimento) e situa-se 6 cm (o afastamento do ponto **A**) para a direita do eixo **Z**, na sua linha de chamada (que passa por **A<sub>2</sub>** e é perpendicular ao eixo **Z**). Pelo seu lado, **B<sub>3r</sub>** é a projeção lateral do ponto **B** (em rebatimento) e situa-se 1 cm (o afastamento do ponto **B**) para a direita do eixo **Z**, na sua linha de chamada (que passa por **B<sub>2</sub>** e é perpendicular ao eixo **Z**).

A partir de **A<sub>3r</sub>** e **B<sub>3r</sub>**, foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do triângulo**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano **YZ**), o que nos permitiu determinar **C<sub>3r</sub>** (a projeção lateral do terceiro vértice do triângulo) – o triângulo **[A<sub>3r</sub>B<sub>3r</sub>C<sub>3r</sub>]** é a projeção lateral do triângulo **[ABC]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano **YZ**. Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do *1<sup>ª</sup> Triedra*, como o enunciado pede expressamente.

Note que se determinou, também, o centro do triângulo **[A<sub>3r</sub>B<sub>3r</sub>C<sub>3r</sub>]**, em rebatimento – o ponto **Q<sub>3r</sub>** (a projeção lateral do ponto **Q**, o centro do triângulo **[ABC]**). Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base. Uma vez que o plano que contém a base é um plano de perfil (o plano  $\pi$ ), o eixo da pirâmide está contido numa reta fronto-horizontal, que é uma reta projetante lateral. Assim, o centro da base (o ponto **Q**) e o vértice da pirâmide (o ponto **V**) têm as suas projeções laterais coincidentes. Nesse sentido, assinalou-se esse facto em rebatimento – tem-se, imediatamente, **Q<sub>3r</sub>  $\equiv$  V<sub>3r</sub>**.

Para determinar a perspectiva do triângulo **[ABC]** é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **YZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Y**, pois só assim será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Y<sub>r</sub>** está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo **Y**).

Em seguida, transportou-se, para o eixo **Y<sub>r</sub>**, o afastamento do ponto **A**, a partir de **A<sub>3r</sub>**, com uma paralela ao eixo **Z** (o ponto **A** é o vértice de maior afastamento da pirâmide, o que nos permite um maior rigor em termos dos traçados efetuados). Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto **P<sub>r</sub>**, no eixo **Y<sub>r</sub>** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do ponto **A** (**OP<sub>r</sub>** é o afastamento do ponto **A**, no eixo **Y<sub>r</sub>**, pelo rebatimento do plano **YZ**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio **OP<sub>r</sub>**, transportou-se o **afastamento** do ponto **P** (que é 6 cm) para o eixo **Y<sub>r</sub>**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Y**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). Assim, **OP<sub>r</sub>** é o afastamento do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Y**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspetiva do afastamento do ponto **A** – **OP** é a perspetiva do afastamento do ponto **A**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>** e pela perspetiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **YZ**).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado YZ e determinação das perspetivas do ponto A:*

Em primeiro lugar, conduziu-se, por **A<sub>3</sub>**, (a projeção lateral do ponto **A**, em rebatimento) a linha de chamada do ponto **A** que, neste caso, é perpendicular ao eixo **Z**. Este procedimento permitiu-nos determinar **A<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**), que se situa necessariamente sobre **f<sub>π</sub>** (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.

Nesse sentido, as projeções do ponto **A** (a projeção frontal e a projeção lateral) são dois extremos da linha de chamada do ponto **A** – a linha de chamada do ponto **A** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **A<sub>2</sub>**, outro extremo em **A<sub>3</sub>** e um vértice no eixo **Z**. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **A** que está contida no plano **YZ** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **Z** e que tem um extremo em **A<sub>3</sub>** e o outro extremo no eixo **Z**. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **A** é o segmento que é perpendicular ao eixo **Z** e que tem um extremo em **A<sub>3r</sub>** e o outro extremo no eixo **Z**. **Em perspetiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **A** (a parte que se situa no plano **YZ**) é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Y** e tem um extremo no eixo **Z**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspetiva** da parte da linha de chamada do ponto **A** que se situa no plano **YZ** (e que é paralela à perspetiva do eixo **Y**). Em seguida, por **A<sub>3</sub>**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspetiva da linha de chamada do ponto **A** (anteriormente desenhada) é **A<sub>3</sub>** (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **YZ**.

Em seguida, por **A<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **A**) conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal do ponto **A**, que é de topo (paralela à perspetiva do eixo **Y**). Depois, por **A<sub>3</sub>** (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**), conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto **A** (que é paralela ao eixo **X**) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**.

Note que não se determinou a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A** (**A<sub>1</sub>**), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado, **A<sub>1</sub>** (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**) estaria necessariamente sobre **h<sub>π</sub>** (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.

*Determinação das perspetivas dos pontos B e C:*

As perspetivas dos pontos **B** e **C** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto **A**. À semelhança do referido para o ponto **A**, também não se determinaram as perspetivas das projeções horizontais dos pontos **B** e **C** (**B<sub>1</sub>** e **C<sub>1</sub>**, respetivamente).

De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

*Determinação das perspetivas do ponto V:*

Em primeiro lugar, atendeu-se ao facto de que a altura de uma pirâmide é a distância do vértice da pirâmide ao plano que contém a base o que, neste caso, corresponde à diferença entre as abcissas do vértice **V** e do plano da base (o plano  $\pi$ ). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\pi$ ) tem 2 cm de abcissa (a abcissa dos pontos **A** e **B**) e a pirâmide tem 7 cm de altura, pelo que o ponto **V** (o vértice da pirâmide) tem 9 cm de abcissa ( $2 + 7 = 9$ ).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e em verdadeira grandeza, mediram-se os 9 cm de abcissa, o que nos permitiu desenhar a linha de chamada perpendicular ao eixo **X** sobre a qual se situa **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **V**). Em seguida, por **V<sub>3r</sub>** (a projeção lateral do ponto **V**, em rebatimento), conduziu-se a linha de chamada do ponto **V**, perpendicular ao eixo **Z** – o ponto de interseção das duas linhas de chamada é **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **V**).

Em seguida, determinou-se **V<sub>3</sub>** (a perspetiva da projeção lateral do ponto **V**), de forma semelhante à atrás exposta para o ponto **A** (com o recurso à direção de afinidade). Em seguida, por **V<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **V**) conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal do ponto **V**, que é de topo (paralela à perspetiva do eixo **Y**). Depois, por **V<sub>3</sub>** (a projeção lateral do ponto **V**), conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto **V** (que é paralela ao eixo **X**) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto **V**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das perspectivas já determinadas do ponto **V** construiu-se a perspectiva do paralelepípedo cujos vértices são as perspectivas das projeções do ponto **V** e de que as perspectivas dos pontos **O** e **V** são dois vértices espacialmente opostos – a construção da perspectiva desse paralelepípedo permitiu-nos determinar **V<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V**), a perspectiva em falta do ponto **V**. Note que esta construção não é determinante para a resolução do exercício, pois a perspectiva do ponto **V** já havia sido determinada. No entanto, a sua construção permite uma melhor visualização do exercício.

### Determinação da perspectiva da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspectiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[AVC]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **B**. Este, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[BV]**). A face lateral **[ACV]** é visível. Já as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** são invisíveis, bem como a base **[ABC]**.

Note que a representação das perspectivas da projeção frontal e da projeção lateral da pirâmide (que se apresentam, neste exercício) não são absolutamente necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (a pirâmide, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção lateral da pirâmide, em rebatimento, do eixo  $Y_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **Z**.

## 1257.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o *plano axonométrico* é o plano **YZ** – nesse sentido, o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo **Y** e do eixo **Z**, ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar os afastamentos dos pontos **A**, **B** e **V** (1 cm, 4 cm e 5 cm, respetivamente) sobre o eixo **Y** (em verdadeira grandeza), bem como as cotas daqueles três pontos (2 cm e 9 cm, respetivamente) sobre o eixo **Z** (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, **A<sub>3</sub>**, **B<sub>3</sub>** e **V<sub>3</sub>** (as projeções laterais dos pontos **A**, **B** e **V**, respetivamente). Note que o eixo **Y** e o eixo **Z** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

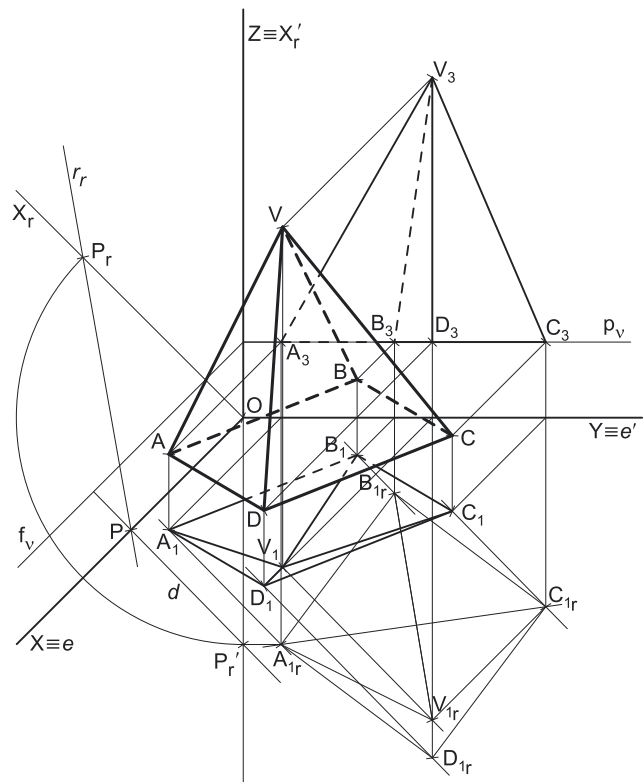
Em seguida, representou-se o plano  $\nu$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide), pelos seus traços. O plano  $\nu$  é um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_\nu$ ). Nesse sentido, desenhou-se  $p_\nu$ , o traço lateral do plano  $\nu$ , paralelo ao eixo **Y** –  $p_\nu$ , passa por **A<sub>3</sub>** e por **B<sub>3</sub>** (as projeções laterais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), pois o plano  $\nu$  é um plano projetante lateral. Note que  $p_\nu$  é uma reta de topo do plano, com abcissa nula.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço frontal do plano  $\nu$  ( $f_\nu$ ), que é paralela à perspectiva do eixo **X** e é concorrente com  $p_\nu$  no eixo **Z** –  $f_\nu$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $\nu$  com afastamento nulo. Salienta-se que o plano  $\nu$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_\nu$ ).

### Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (a base da pirâmide) é um plano horizontal (de nível), que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano **YZ**), pelo que o quadrado **[ABCD]** **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao *plano coordenado horizontal* (o plano **XY**), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY* – o quadrado **[ABCD]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no *plano coordenado XY*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Rebatimento do plano XY e construção da projeção horizontal do quadrado [ABCD], em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano XY para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo Y. O eixo X rebatido (o eixo  $X_r'$ ) fica coincidente com o eixo Z, facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv X_r'$ . O eixo  $X_r'$  é o eixo X rebatido pelo rebatimento do plano XY.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano XY com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo X. De forma semelhante, identificou-se o eixo X rebatido pelo rebatimento do plano coordenado XY com a notação  $X_r'$ , optando-se por manter a notação  $X_r$  para o eixo X rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano XY rebatido, representaram-se as projeções horizontais dos pontos A, B e V, em rebatimento ( $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$  e  $V_{1r}$ , respetivamente), em função das respetivas abcissas. Assim,  $A_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto A (em rebatimento) e situa-se 6 cm (a abcissa do ponto A) para baixo do eixo Y, na sua linha de chamada (que passa por  $A_3$  e é perpendicular ao eixo Y). De forma semelhante,  $B_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto B (em rebatimento) e situa-se 2 cm (a abcissa do ponto B) para baixo do eixo Y, na sua linha de chamada (que passa por  $B_3$  e é perpendicular ao eixo Y). Por fim,  $V_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto V (em rebatimento) e situa-se 8 cm (a abcissa do ponto V) para baixo do eixo Y, na sua linha de chamada (que passa por  $V_3$  e é perpendicular ao eixo Y).

A partir de  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano XY), o que nos permitiu determinar  $C_{1r}$  e  $D_{1r}$  (as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado [ABCD], em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano XY. Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do 1.º Triedro, como o enunciado pede expressamente.

Em seguida, pelas projeções horizontais (em rebatimento dos pontos C e D ( $C_{1r}$  e  $D_{1r}$ , respetivamente)), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo Y) e determinaram-se as projeções laterais daqueles pontos ( $C_3$  e  $D_3$ , respetivamente), sobre o traço lateral do plano  $v(p_v)$ , pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

Para se determinarem as perspetivas do quadrado [ABCD] e da pirâmide é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado XY (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano XY com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo X, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo X para o plano axonométrico (o plano YZ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo X. O eixo X rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo X. O ponto O é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está definido por um ponto (o ponto O) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo X).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $X_r'$ , a abcissa do ponto A, a partir de  $A_{1r}$ , com uma paralela ao eixo Y. Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $X_r'$  – o ponto P é um ponto do eixo X com a abcissa do ponto A ( $OP_r'$  é a abcissa do ponto A, no eixo  $X_r'$ , pelo rebatimento do plano XY).

Com o compasso, fazendo centro no ponto O e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **abcissa** do ponto P (que é 6 cm) para o eixo  $X_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto P do eixo X, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo X). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a abcissa do ponto P, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo X. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de 55°) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto P, em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva da abcissa do ponto A –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da abcissa do ponto A.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano XY com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto P (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano XY).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação das perspetivas do ponto A:*

As projeções do ponto A (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto A – a linha de chamada do ponto A é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $A_3$ , outro extremo em  $A_1$  e um vértice no eixo Y. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto A que está contida no plano XY é o segmento de reta perpendicular ao eixo Y e que tem um extremo em  $A_1$  e o outro extremo no eixo Y. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto A é o segmento que é perpendicular ao eixo Y e que tem um extremo em  $A_{1r}$  e o outro extremo no eixo Y. **Em perspetiva**, essa parte da linha de chamada do ponto A (a parte que se situa no plano XY) é necessariamente paralela à perspetiva do eixo X e tem um extremo no eixo Y.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspetiva** da parte da linha de chamada do ponto A que se situa no plano XY (e que é paralela à perspetiva do eixo X). Em seguida, por  $A_{1r}$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta intersesta a perspetiva da linha de chamada do ponto A (anteriormente desenhada) é  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto A). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano XY.

Em seguida, por  $A_3$  (a projeção lateral do ponto A) conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto A, que é fronto-horizontal (paralela à perspetiva do eixo X). Depois, por  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto A), conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto A (que é paralela ao eixo Z) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto A.

Note que não se determinou a perspetiva da projeção frontal do ponto A ( $A_2$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado,  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto A) estaria necessariamente sobre  $f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das perspectivas dos pontos B, C, D e V:

As perspectivas dos pontos **B, C, D e V** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto **A**. À semelhança do referido para o ponto **A**, também não se determinaram as perspectivas das projeções frontais dos pontos **B, C, D e V**.

No entanto, caso se tivessem determinado, **B<sub>2</sub>, C<sub>2</sub> e D<sub>2</sub>** (as perspectivas das projeções frontais dos pontos **B, C e D**, respetivamente) estariam necessariamente sobre **f<sub>v</sub>**, (a perspectiva do traço frontal do plano **v**), pois o plano **v** é um plano projetante frontal. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

## Determinação da perspectiva da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[AVCD]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **B**. Este, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[BV]**). As faces laterais **[ADV]** e **[CDV]** são visíveis. Já as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** são invisíveis, bem como a base **[ABCD]**.

Note que a representação das perspectivas da projeção frontal e da projeção horizontal da pirâmide (que se apresentam, neste exercício) não são absolutamente necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (a pirâmide, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano **v** (o plano horizontal que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção horizontal da pirâmide, em rebatimento, do eixo **X<sub>r</sub>'**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XY**.

## 1258.

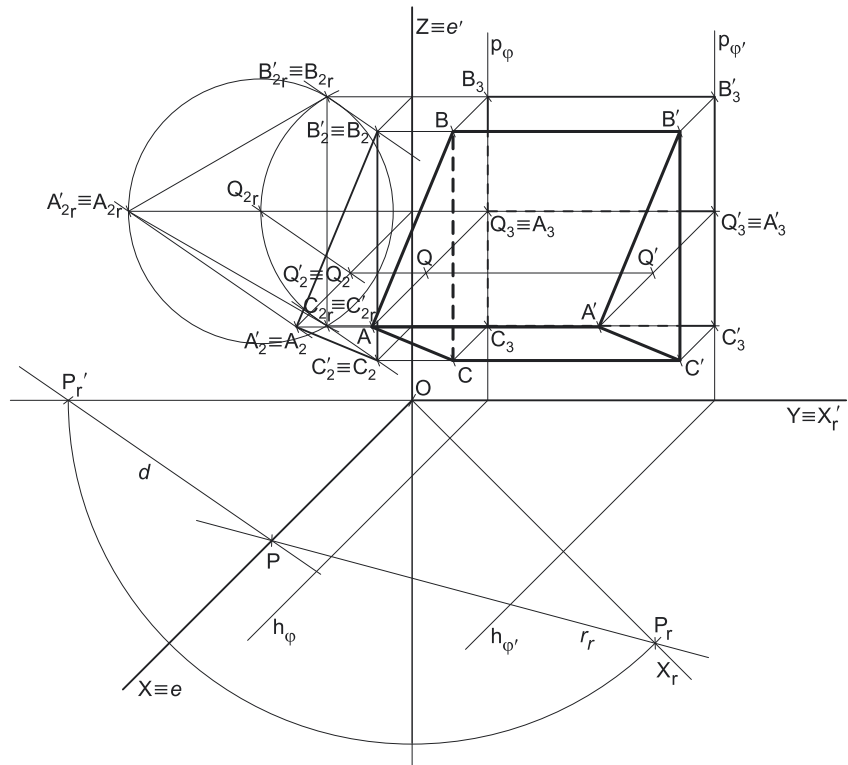
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o *plano axonométrico* é o plano **YZ** – nesse sentido, o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo **Y** e do eixo **Z**, ângulos de 135° (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar o afastamento do ponto **Q** (2 cm) sobre o eixo **Y** (em verdadeira grandeza), bem como a cota daquele ponto (5 cm) sobre o eixo **Z** (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, **Q<sub>3</sub>** (a projeção lateral do ponto **Q**). Note que o eixo **Y** e o eixo **Z** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a base **[ABC]** do prisma), pelos seus traços. O plano  $\phi$  é um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral (**p<sub>φ</sub>**). Nesse sentido, desenhou-se **p<sub>φ</sub>**, o traço lateral do plano  $\phi$ , paralelo ao eixo **Z** – **p<sub>φ</sub>** passa por **Q<sub>3</sub>** (a projeção lateral do ponto **Q**), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral. Note que **p<sub>φ</sub>** é uma reta vertical do plano, com abcissa nula.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$  (**h<sub>φ</sub>**), que é paralela à perspectiva do eixo **X** e é concorrente com **p<sub>φ</sub>** no eixo **Y** – **h<sub>φ</sub>** é uma reta fronto-horizontal do plano  $\phi$  com cota nula. Salienta-se que o plano  $\phi$  é, também, um plano projetante horizontal (é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

### Resolução:

A altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as duas bases do sólido o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos planos das bases. O plano que contém a base de menor afastamento do prisma (o plano  $\varphi$ ) tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $Q$ ) e o prisma tem 6 cm de altura, pelo que o plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do prisma) tem 8 cm de afastamento ( $2 + 6 = 8$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\varphi'$  pelos seus traços – o plano  $\varphi'$  é o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do sólido.

Assim, no eixo  $Y$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, mediu-se o afastamento do plano  $\varphi'$  (8 cm) e determinou-se um ponto, pelo qual se conduziu o traço lateral do plano  $\varphi'$  ( $p_{\varphi'}$ ), que é paralelo ao eixo  $Z - p_{\varphi'}$  é uma reta vertical do plano  $\varphi'$ , com abcissa nula. Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi'$  ( $h_{\varphi'}$ ), que é paralela à perspectiva do eixo  $X$  e é concorrente com  $p_{\varphi'}$ , no eixo  $Y - h_{\varphi'}$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi'$ , com cota nula.

Salienta-se que o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ). O plano  $\varphi'$  é, também, um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{\varphi'}$ ).

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (a base de menor afastamento do prisma) é um plano frontal (de frente), que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $YZ$ ), pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao plano coordenado frontal (o plano  $XZ$ ), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XZ$  – o triângulo  $[ABC]$  e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado  $XZ$ ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o **rebatimento do plano coordenado  $XZ$**  (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

#### Rebatimento do plano $XZ$ e construção da projeção frontal do triângulo $[ABC]$ , em verdadeira grandeza:

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XZ$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $Z$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Y$ , facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv X_r'$ . O eixo  $X_r'$  é o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XZ$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XZ$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XZ$  com a notação  $X_r'$ , optando-se por manter a notação  $X_r$  para o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $XZ$  rebatido, representou-se a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento ( $Q_{2r}$ ), em função da sua abcissa. Assim,  $Q_{2r}$  é a projeção frontal do ponto  $Q$  (em rebatimento) e situa-se 4 cm (a abcissa do ponto  $Q$ ) para a esquerda do eixo  $Z$ , na sua linha de chamada (que passa por  $Q_3$  e é perpendicular ao eixo  $Z$ ).

Com o compasso, fazendo centro em  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao triângulo (em verdadeira grandeza, em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo, inscrito na circunferência (de acordo com os dados). Tendo em conta que a face lateral que contém os vértices  $B$  e  $C$  do triângulo é de perfil, sabe-se que o lado  $[BC]$ , do polígono, é vertical (é paralelo ao eixo  $Z$ ). Assim, em rebatimento, o lado  $[B_{2r}C_{2r}]$  é necessariamente paralelo ao eixo  $Z$ . Por outro lado, teve-se ainda em conta que o ponto  $B$  é o vértice de maior cota do triângulo e que  $A$  é o seu vértice de maior abcissa.

Assim, efetuou-se a construção da **projeção frontal do triângulo**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os três vértices do triângulo (em rebatimento) – o triângulo  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}]$  é a projeção frontal do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XZ$ .

Uma vez que se trata de um **prisma regular** (cujas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases), as arestas laterais do prisma estão contidas em retas de topo (retas projetantes frontais). Assim, os vértices da base de maior afastamento (a base  $[A'B'C']$ ) têm as suas projeções frontais coincidentes com as projeções frontais dos vértices correspondentes da base de menor afastamento (a base  $[ABC]$ ), o que se assinalou imediatamente –  $A'_{2r} \equiv A_{2r}$ ,  $B'_{2r} \equiv B_{2r}$  e  $C'_{2r} \equiv C_{2r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção frontal do prisma, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XZ$ ).

Para se determinarem as perspectivas do triângulo  $[ABC]$  e do prisma é necessário inverter o rebatimento do plano  $XZ$ , o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

#### Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XZ$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $X$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  para o plano axonométrico (o plano  $YZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $X$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ ).

Em seguida, marcou-se, no eixo  $X_r'$ , um ponto  $P_r'$  qualquer – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $X$  com uma abcissa qualquer ( $\overline{OP_r'}$  é a abcissa do ponto  $P$ , no eixo  $X_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XZ$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **abcissa** do ponto  $P$  para o eixo  $X_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $X$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a abcissa do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva da abcissa do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da abcissa do ponto  $P$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação das perspetivas do ponto A:*

Em primeiro lugar, conduziu-se, por  $A_{2r}$  (a projeção frontal do ponto **A**, em rebatimento) a linha de chamada do ponto **A** que, neste caso, é perpendicular ao eixo **Z**. Este procedimento permitiu-nos determinar  $A_3$  (a projeção lateral do ponto **A**), que se situa necessariamente sobre  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral.

Nesse sentido, as projeções do ponto **A** (a projeção frontal e a projeção lateral) são dois extremos da linha de chamada do ponto **A** – a linha de chamada do ponto **A** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $A_2$ , outro extremo em  $A_3$  e um vértice no eixo **Z**. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **A** que está contida no plano **XZ** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **Z** e que tem um extremo em  $A_2$  e o outro extremo no eixo **Z**. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **A** é o segmento que é perpendicular ao eixo **Z** e que tem um extremo em  $A_{2r}$ , e o outro extremo no eixo **Z**. **Em perspetiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **A** (a parte que se situa no plano **XZ**) é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **X** e tem um extremo no eixo **Z**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspetiva** da parte da linha de chamada do ponto **A** que se situa no plano **XZ** (e que é paralela à perspetiva do eixo **X**). Em seguida, por  $A_{2r}$ , conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspetiva da linha de chamada do ponto **A** (anteriormente desenhada) é  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XZ**.

Em seguida, por  $A_3$  (a projeção lateral do ponto **A**) conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto **A**, que é fronto-horizontal (paralela à perspetiva do eixo **X**). Depois, por  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**), conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal do ponto **A** (que é paralela ao eixo **Y**) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**.

Note que não se determinou a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A** ( $A_1$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado,  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**) estaria necessariamente sobre  $h_\phi$  (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.

*Determinação das perspetivas dos pontos B e C:*

As perspetivas dos pontos **B** e **C** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto **A**. À semelhança do referido para o ponto **A**, também não se determinaram as perspetivas das projeções horizontais dos pontos **B** e **C** ( $B_1$  e  $C_1$ , respetivamente).

De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

*Determinação das perspetivas dos vértices da base [A'B'C'] do prisma:*

Em primeiro lugar, prolongou-se a linha de chamada do ponto  $A'$ , que passa por  $A'_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $A'$ , em rebatimento) e é perpendicular ao eixo **Z**. Este procedimento permitiu-nos determinar  $A'_3$  (a projeção lateral do ponto  $A'$ ), que se situa necessariamente sobre  $p_{\phi'}$  (o traço lateral do plano  $\phi'$ ), pois o plano  $\phi'$  é um plano projetante lateral.

Como atrás se referiu, e porque se trata de um **prisma regular** (cujas arestas laterais estão contidas em retas projetantes frontais), os vértices da base de maior afastamento (a base  $[A'B'C']$ ) têm as suas projeções frontais coincidentes com as projeções frontais dos vértices correspondentes da base de menor afastamento (a base  $[ABC]$ ), o que se assinalou imediatamente em perspetiva –  $A'_2 \equiv A_2$ ,  $B'_2 \equiv B_2$  e  $C'_2 \equiv C_2$ .

Em seguida, por  $A'_3$  (a projeção lateral do ponto  $A'$ ) conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto  $A'$ , que é fronto-horizontal (paralela à perspetiva do eixo **X**). Depois, por  $A'_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $A'$ ), conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal do ponto  $A'$  (que é paralela ao eixo **Y**) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto  $A'$ .

As perspetivas dos pontos  $B'$  e  $C'$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto  $A'$ . À semelhança do referido para o ponto **A**, também não se determinaram as perspetivas das projeções horizontais dos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  ( $A'_1$ ,  $B'_1$  e  $C'_1$ , respetivamente). Salienta-se, mais uma vez, que a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

*Determinação da perspetiva do prisma:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[ABB'C']$ . Existe um único vértice do prisma que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice  $A'$ . Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[A'B']$  e  $[A'C']$ , da base  $[A'B'C']$ , e a aresta lateral  $[AA']$ ). Salienta-se que a aresta  $[BC]$  da base  $[ABC]$  é **invisível**, pois separa duas faces invisíveis (a face lateral  $[BB'C'C]$  e a base  $[ABC]$ ).

As faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'C'C]$  são visíveis, bem como a base  $[A'B'C']$ . Já a face lateral  $[BB'C'C]$  e a base  $[ABC]$  são invisíveis.

Note que a representação das perspetivas das projeções do prisma não são absolutamente necessárias, facto pelo qual estas não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o prisma, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

**Traçado:**

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. Os planos  $\phi$  e  $\phi'$  (os planos que contêm as bases do prisma), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos respetivos traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. A perspetiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção frontal do prisma, em rebatimento, do eixo  $X_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XZ**.

## 1259.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $X$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $XZ$  – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $140^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $130^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar as abcissas dos pontos  $A$  e  $B$  (6 cm e 8 cm, respetivamente) sobre o eixo  $X$  (em verdadeira grandeza), o que nos permitiu determinar  $A_0$  e  $B_0$  (as referências das abcissas dos dois pontos). Uma vez que os dois pontos têm cota nula, ambos os pontos se situam no plano coordenado  $XY$ , pelo que as suas projeções frontais se situam no eixo  $X$  – tem-se, imediatamente,  $A_2 \equiv A_0$  e  $B_2 \equiv B_0$ . Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

**Resolução:**

A altura de um prisma é a distância entre os planos que contém as duas bases do sólido o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das bases. O plano que contém a base inferior do prisma (o plano  $XY$ ) tem cota nula e o prisma tem 7 cm de altura, pelo que o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma) tem 7 cm de cota ( $0 + 7 = 7$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $v$  pelos seus traços – o plano  $v$  é o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do sólido.

Assim, no eixo  $Z$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, mediou-se a cota do plano  $v$  (7 cm) e determinou-se um ponto, pelo qual se conduziu o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), que é paralelo ao eixo  $X$  –  $f_v$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo. Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço lateral do plano  $v$  ( $p_v$ ), que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$  e é concorrente com  $f_v$  no eixo  $Z$  –  $p_v$  é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula.

Salienta-se que o plano  $v$  é um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). O plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (a base inferior do prisma) é o plano coordenado horizontal (o plano  $XY$ ), que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

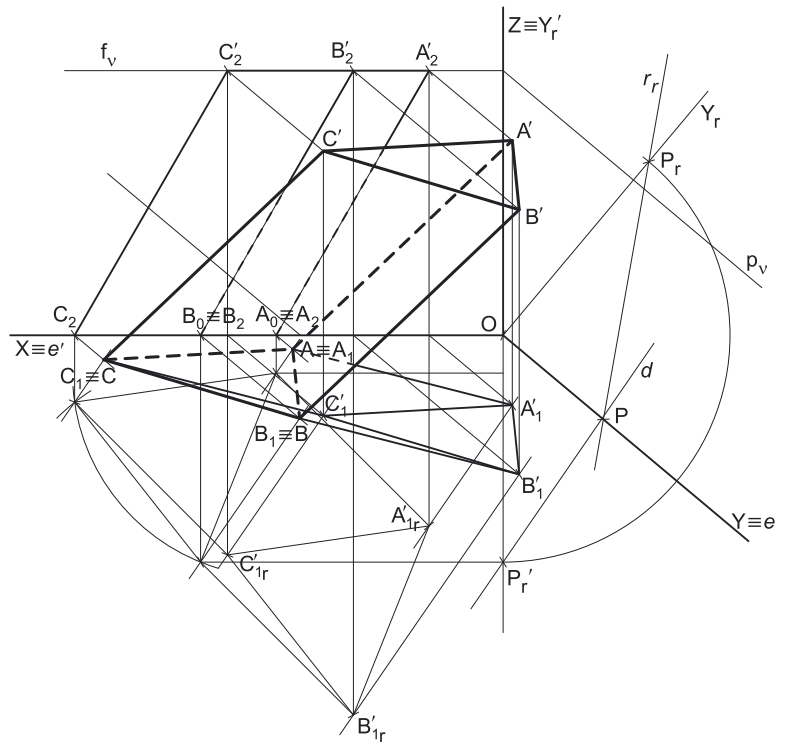
Tendo em conta que o triângulo está contido no plano coordenado horizontal (o plano  $YZ$ ), sabe-se que o triângulo está em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XY$  – o triângulo  $[ABC]$  e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado  $XY$ ) são, neste caso, a mesma figura. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do rebatimento do plano coordenado  $XY$  (o plano no qual o triângulo está em verdadeira grandeza).

**Rebatimento do plano  $XY$  e construção da projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$  e do prisma, em verdadeira grandeza:**

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XY$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $Y$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Z$ , facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv X_r'$ . O eixo  $X_r'$  é o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XY$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$  com a notação  $X_r'$ , optando-se por manter a notação  $X_r$  para o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $XY$  rebatido, representaram-se as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $B$ , em rebatimento ( $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , respetivamente), em função dos respetivos afastamentos. Assim,  $A_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto  $A$  (em rebatimento) e situa-se 1 cm (o afastamento do ponto  $A$ ) para baixo do eixo  $X$ , na sua linha de chamada (que passa por  $A_0$  e é perpendicular ao eixo  $X$ ). De forma semelhante,  $B_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto  $B$  (em rebatimento) e situa-se 6 cm (o afastamento do ponto  $B$ ) para baixo do eixo  $X$ , na sua linha de chamada (que passa por  $B_0$  e é perpendicular ao eixo  $X$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir de  $A_1$  e  $B_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do triângulo**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{1r}$  (a projeção horizontal do terceiro vértices do triângulo) – o triângulo  $[A_1, B_{1r}, C_{1r}]$  é a projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ . Note que se garantiu que  $C$  é o vértice de maior abscissa do polígono, como o enunciado pede expressamente.

Em função da particularidade dos dados (os ângulos que as arestas laterais do prisma fazem, em projeção horizontal e em projeção frontal), optou-se por representar previamente o prisma em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal (em rebatimento) e frontal.

Assim, pela projeção horizontal do ponto  $A$  em rebatimento ( $A_{1r}$ ), conduziu-se uma reta fazendo, com o eixo  $X$ , um ângulo de  $45^\circ$  (com abertura para a direita) – essa reta é a projeção horizontal da reta suporte da aresta lateral  $[AA']$ , em rebatimento. Em seguida, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ) conduziu-se uma reta fazendo, com o eixo  $X$ , um ângulo de  $60^\circ$  (com abertura também para a direita) – essa reta é a projeção frontal da reta suporte da aresta  $[AA']$ . Por fim, atendendo a que a base superior está contida no plano  $v$  (que é um plano projetante frontal), determinaram-se as duas projeções do ponto  $A'$  (o extremo superior da aresta  $[AA']$ ), a partir da sua projeção frontal – o ponto  $A'$  é o ponto de interseção da reta suporte da aresta  $[AA']$  com o plano  $v$ .

Repetiu-se o processo atrás exposto para as arestas laterais  $[BB']$  e  $[CC']$ , o que nos permitiu determinar as projeções frontal e horizontal (em rebatimento) dos pontos  $B'$  e  $C'$  (os outros dois vértices da base superior) e, assim, concluir a representação do prisma em Dupla Projeção Ortogonal (considerando o plano  $XY$  rebatido).

Para se determinarem as perspetivas do triângulo  $[ABC]$  e do prisma é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo  $Y$ ).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $X_r'$ , o afastamento do ponto  $C'$ , a partir de  $C'_{1r}$ , com uma paralela ao eixo  $X$ . Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $Y_r'$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Y$  com o afastamento do ponto  $C'$  ( $OP_r'$  é o afastamento do ponto  $C'$ , no eixo  $X_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XY$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto  $P$  para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Y$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ ). Assim,  $OP_r$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva do afastamento do ponto  $C'$  –  $OP$  é a perspetiva do afastamento do ponto  $C'$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XY$  e determinação das perspetivas do ponto  $A$ :*

As projeções do ponto  $A$  (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $A$  – a linha de chamada do ponto  $A$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $A_1$ , outro extremo em  $A_2$  e um vértice no eixo  $X$  (em  $A_0$ ). A parte da linha de chamada do ponto  $A$  que está contida no plano  $XY$  é o segmento  $[A_0A_1]$  – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento  $[A_0A_{1r}]$ . A perspetiva desse segmento tem um extremo em  $A_0$  e é paralela à perspetiva do eixo  $Y$ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspetiva do segmento de reta  $[A_0A_1]$ . Em seguida, por  $A_{1r}$  conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta intersesta a perspetiva da linha de chamada do ponto  $A$  (a reta suporte do segmento  $[A_0A_1]$ ) é  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XY$ .

Tendo em conta que o ponto  $A$  tem cota nula, o ponto  $A$  é um ponto do plano coordenado  $XY$ , pelo que se tem imediatamente  $A \equiv A_1$  (sendo  $A$  a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

Note que não se determinou a perspetiva da projeção lateral do ponto  $A$  ( $A_3$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado,  $A_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $A$ ) estaria necessariamente sobre a perspetiva do eixo  $Y$ , pois o ponto  $A$  tem cota nula. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

*Determinação das perspetivas dos pontos  $B$  e  $C$ :*

As perspetivas dos pontos  $B$  e  $C$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto  $A$ . À semelhança do referido para o ponto  $A$ , também não se determinaram as perspetivas das projeções laterais dos pontos  $B$  e  $C$ . De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No entanto, caso se tivessem determinado,  $B_2$  e  $C_2$  (as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $B$  e  $C$ , respetivamente) estariam necessariamente sobre o eixo  $Y$ , pois os dois pontos têm cota nula.

#### Determinação das perspectivas do ponto $A'$ :

As projeções do ponto  $A'$  (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $A'$  – a linha de chamada do ponto  $A'$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $A'_2$ , outro extremo em  $A'_1$  e um vértice no eixo  $X$ . **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto  $A'$  que está contida no plano  $XY$  é o segmento de reta perpendicular ao eixo  $X$  e que tem um extremo em  $A'_1$  e o outro extremo no eixo  $X$ . **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto  $A'$  é o segmento que é perpendicular ao eixo  $X$  e que tem um extremo em  $A'_{1r}$  e o outro extremo no eixo  $X$ . **Em perspectiva**, essa parte da linha de chamada do ponto  $A'$  (a parte que se situa no plano  $XY$ ) é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$  e tem um extremo no eixo  $X$ .

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspectiva** da parte da linha de chamada do ponto  $A'$  que se situa no plano  $XY$  (e que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ). Em seguida, por  $A'_{1r}$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto  $A'$  (anteriormente desenhada) é  $A'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A'$ ).

Em seguida, por  $A'_2$  (a projeção frontal do ponto  $A'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto  $A'$ , que é de topo (paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ). Depois, por  $A'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto  $A'$  (que é paralela ao eixo  $Z$ ) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A'$ .

Note que não se determinou a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A'$  ( $A'_3$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado,  $A'_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $A'$ ) estaria necessariamente sobre  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral. Salienta-se que a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

#### Determinação das perspectivas dos pontos $B'$ e $C'$ :

As perspectivas dos pontos  $B'$  e  $C'$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto  $A'$ . À semelhança do referido para o ponto  $A'$ , também não se determinaram as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $B'$  e  $C'$ . Salienta-se, mais uma vez, que a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

No entanto, caso se tivessem determinado,  $B'_3$  e  $C'_3$  (as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $B'$  e  $C'$ , respetivamente) estariam necessariamente sobre  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

#### Determinação da perspectiva do prisma:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[BCC'A'B']$ . Existe um único vértice do prisma que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice  $A$ . Este, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[AB]$  e  $[AC]$ , da base  $[ABC]$ , e a aresta lateral  $[AA']$ ). Salienta-se que a aresta  $[B'C']$  da base  $[A'B'C']$  é **visível**, pois separa duas faces visíveis (a face lateral  $[BB'C'C]$  e a base  $[A'B'C']$ ).

As faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[AA'C'C]$  são invisíveis, bem como a base  $[ABC]$ . Já a face lateral  $[BB'C'C]$  e a base  $[A'B'C']$  são visíveis.

Note que a representação das perspectivas das projeções do prisma não são absolutamente necessárias, facto pelo qual estas não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o prisma, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção horizontal do prisma, em rebatimento, da projeção frontal do sólido, do eixo  $Y_r$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$  e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano  $XY$ .

## 1260.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o plano axonométrico é o plano **XZ** – nesse sentido, o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com as partes positivas do eixo **X** e do eixo **Z**, ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto **Q** (5 cm) sobre o eixo **X** (em verdadeira grandeza), bem como a cota do ponto **Q** (4 cm) sobre o eixo **Z** (também em verdadeira grandeza). Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato, **Q<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **Q**), bem como **Q<sub>0</sub>** (a referência da abscissa do ponto **Q**). Note que o eixo **X** e o eixo **Z** estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

### Resolução:

O plano que contém a base do cone (um plano frontal) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano **XZ**), pelo que o círculo (a base do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção frontal são figuras geometricamente iguais.

Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **Q**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal da base do cone. Por outro lado, trata-se de um cone de revolução, cujo eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (que é um plano frontal) – o eixo do cone está, assim, contido numa reta de topo (uma reta projetante frontal). Dessa forma, o ponto **Q** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice do cone) estão contidos na mesma reta projetante frontal, pelo que têm as suas projeções frontais coincidentes, o que se assinalou imediatamente – **V<sub>2</sub> ≡ Q<sub>2</sub>**.

Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos do vértice e do plano da base. O plano frontal (de frente) que contém a base do cone (o plano  $\phi$ ) tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto **Q**) e o cone tem 8 cm de altura, pelo que o vértice do cone (o ponto **V**) tem 10 cm de afastamento ( $2 + 8 = 10$ ).

Para determinar a perspectiva do cone é necessário, em primeiro lugar, determinar as perspectivas dos pontos **Q** (o centro da base) e do ponto **V** (o vértice do cone). Para tal, é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Y**, de forma a ser possível determinar as perspectivas dos afastamentos daqueles dois pontos (o afastamento é a única coordenada que apresenta deformação).

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

Os afastamentos dos dois pontos, porque se medem no eixo **Y**, estão afetados pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o plano axonométrico (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Y<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo **Y**).

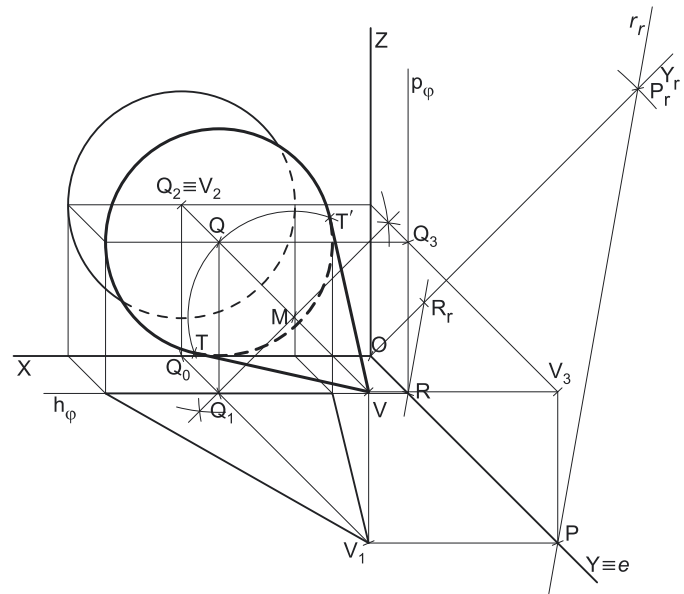
A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), representaram-se os afastamentos dos dois pontos (2 cm e 10 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se dois pontos – o ponto **P<sub>r</sub>** e o ponto **R<sub>r</sub>**. O ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do ponto **V** ( $\overline{OP}_r = 10$  cm e é o afastamento do ponto **V**, em verdadeira grandeza). O ponto **R** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do ponto **Q** e do plano frontal que contém a base do sólido ( $\overline{OR}_r = 2$  cm e é o afastamento do ponto **Q**, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **P**, sobre a perspectiva do eixo **Y** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto **V** ( $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento do ponto **V**).

Por **R<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto **R**, em rebatimento e é paralela à reta **r<sub>r</sub>**. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **R**, sobre a perspectiva do eixo **Y** – o segmento **[OR]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto **Q** ( $\overline{OR}$  é a perspectiva do afastamento do ponto **Q**).

### Representação do plano frontal (de frente) que contém a base do cone:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a perspectiva do ponto **R**, que é o ponto do eixo **Y** que tem 2 cm de afastamento e que é um ponto do plano  $\phi$  (o plano que contém a base do cone). Assim, pela perspectiva do ponto **R** conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\phi$  – **h<sub>φ</sub>** (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ) e **p<sub>φ</sub>** (a perspectiva do traço lateral do plano  $\phi$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) é uma reta fronto-horizantal do plano  $\phi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\phi$  (o traço lateral ou de perfil do plano  $\phi$ ) é uma reta vertical do plano  $\phi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Z$ .

O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ). Por outro lado, o plano  $\phi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\phi$ ).

#### Determinação das perspectivas do ponto $Q$ :

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $Q$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $Q_1$ ) e da sua projeção lateral ( $Q_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $Q_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $Q_3$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $Q_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $Q$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal.  $Q_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $Q$  e situa-se sobre  $p_\phi$  (o traço lateral do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $Q_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $Q_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $Q_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $Q$  são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas do ponto $V$ :

As perspectivas do ponto  $V$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto  $Q$ . Salienta-se apenas o facto de o ponto  $V$  não pertencer ao plano  $\phi$  (o vértice do cone é necessariamente um ponto exterior ao plano da base). Nesse sentido, a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V$  ( $V_1$ ) não se situa sobre  $h_\phi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$ ), tal como a perspectiva da projeção lateral do ponto  $V$  ( $V_3$ ) também não se situa sobre  $p_\phi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\phi$ ).

#### Determinação da perspectiva do cone:

Atendendo a que o plano  $\phi$  (o plano que contém a base do cone) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o círculo projeta-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano  $XZ$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base do cone, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do cone é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a base do cone) que passam por um ponto exterior (a perspectiva do ponto  $V$ ).

Assim, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do segmento  $[QV]$  (com o recurso à mediatriz do segmento) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio até ao ponto  $Q$ , desenhou-se um arco de circunferência – os pontos em que o arco corta a circunferência são os pontos  $T$  e  $T'$ . Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone são tangentes à base do sólido.

Após a determinação dos pontos  $T$  e  $T'$ , desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone (as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ ) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – o arco menor  $\widehat{TT'}$  (da circunferência que delimita a base) é invisível.

Note que a representação das perspectivas das projeções do cone não são absolutamente necessárias, apesar de se terem representado as perspectivas da projeção horizontal e da projeção frontal do cone. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o cone, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cone representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a base do cone), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo  $Y_r$ , da reta  $r_r$  e da reta não identificada que é paralela à reta  $r_r$ , e, ainda, da construção que nos permitiu determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido.



## 1261.

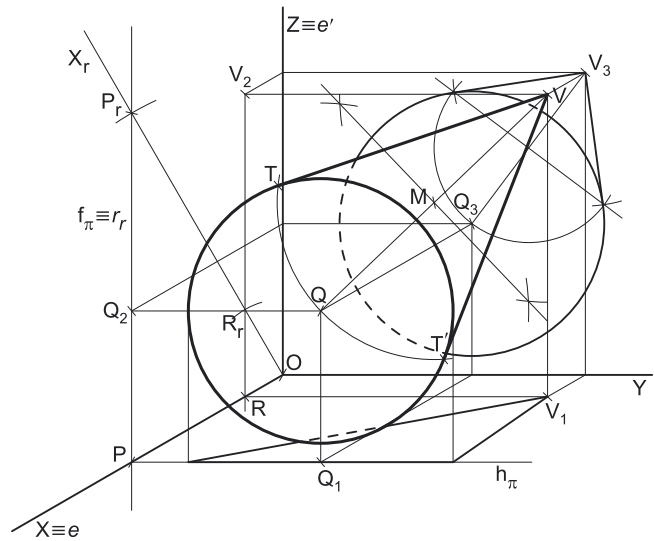
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $Y$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $YZ$  – o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $X$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $Y$  um ângulo de  $150^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $120^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar os afastamentos dos pontos  $Q$  e  $V$  (5 cm e 8 cm, respetivamente) sobre o eixo  $Y$  (em verdadeira grandeza), bem como as cotas dos pontos  $Q$  e  $V$  (4 cm e 8 cm, respetivamente) sobre o eixo  $Z$  (também em verdadeira grandeza). Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato,  $Q_3$  (a projeção lateral do ponto  $Q$ ), bem como  $V_3$  (a projeção lateral do ponto  $V$ ). Note que o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

### Resolução:

O plano que contém a base do cone (um plano de perfil) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $YZ$ ), pelo que o círculo (a base do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção lateral são figuras geometricamente iguais.



Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_3$  (a projeção lateral do ponto  $Q$ ) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção lateral da base do cone.

Para determinar a perspectiva do cone é necessário, em primeiro lugar, determinar as perspectivas dos pontos  $Q$  (o centro da base) e do ponto  $V$  (o vértice do cone). Para tal, é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $X$ , de forma a ser possível determinar as perspectivas das abcissas daqueles dois pontos (a abcissa é a única coordenada que apresenta deformação).

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

As abcissas dos dois pontos, porque se medem no eixo  $X$ , estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  para o plano axonométrico (o plano  $YZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $X$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ ).

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $X_r$  (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as abcissas dos dois pontos (2 cm e 8 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se dois pontos – o ponto  $P_r$  e o ponto  $R_r$ . O ponto  $P_r$  é um ponto do eixo  $X_r$  com a abcissa do ponto  $Q$  e do plano de perfil que contém a base do cone ( $OP_r = 8$  cm e é a abcissa do ponto  $Q$ , em verdadeira grandeza). O ponto  $R_r$  é um ponto do eixo  $X_r$  com a abcissa do ponto  $V$  ( $OR_r = 2$  cm e é a abcissa do ponto  $V$ , em verdadeira grandeza).

Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P_r$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $P$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abcissa do ponto  $Q$  ( $OP$  é a perspectiva da abcissa do ponto  $Q$  e do plano da base do cone).

Por  $R_r$  conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $R_r$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $R$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OR]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abcissa do ponto  $V$  ( $OR$  é a perspectiva da abcissa do ponto  $V$ ).

### Representação do plano de perfil que contém a base do cone:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , a perspectiva do ponto  $P$ , que é o ponto do eixo  $X$  que tem 8 cm de abcissa e que é um ponto do plano  $\pi$  (o plano que contém a base do cone). Assim, pela perspectiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Z$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspectivas do ponto **Q**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **Q** determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal (**Q<sub>1</sub>**) e da sua projeção frontal (**Q<sub>2</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **Q<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **Q<sub>2</sub>** e **O** são dois vértices opostos). **Q<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **Q** e situa-se sobre a perspectiva de **h<sub>π</sub>** (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal. **Q<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **Q** e situa-se sobre **f<sub>π</sub>** (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **Q**. Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de **Q<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **Q** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **Q<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **Q** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **Q<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **Q** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **Q** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas do ponto **V**:

As perspectivas do ponto **V** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto **Q**. Salienta-se apenas o facto de o ponto **V** não pertencer ao plano  $\pi$  (o vértice do cone é necessariamente um ponto exterior ao plano da base). Nesse sentido, a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V** (**V<sub>1</sub>**) não se situa sobre **h<sub>π</sub>** (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ), tal como a perspectiva da projeção frontal do ponto **V** (**V<sub>2</sub>**) também não se situa sobre **f<sub>π</sub>** (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

#### Determinação da perspectiva do cone:

Atendendo a que o plano  $\pi$  (o plano que contém a base do cone) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o círculo projeta-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano **YZ**). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q** (a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base do cone, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do cone é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a base do cone) que passam por um ponto exterior (a perspectiva do ponto **V**).

Assim, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do segmento **[QV]** (com o recurso à mediatriz do segmento) e, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio até ao ponto **Q**, desenhou-se um arco de circunferência – os pontos em que o arco corta a circunferência são os pontos **T** e **T'**. Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone são tangentes à base do sólido.

Após a determinação dos pontos **T** e **T'**, desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone (as geratrizes **[TV]** e **[T'V]**) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – o arco menor **TT'** (da circunferência que delimita a base) é visível (a base do cone é visível, pois tem maior abcissa do que o vértice).

Note que a representação das perspectivas das projeções do cone não são absolutamente necessárias, apesar de se terem representado as perspectivas da projeção horizontal e da projeção lateral do cone. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o cone, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cone representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base do cone), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo **X<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>** e da reta não identificada que é paralela à reta **r<sub>r</sub>**, e, ainda, da construção que nos permitiu determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido.

## 1262.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $Y$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $YZ$  – o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $X$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $Y$  um ângulo de  $130^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $140^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar o afastamento do ponto  $Q$  (5 cm) sobre o eixo  $Y$  em verdadeira grandeza (a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), bem como a cota do ponto  $Q$  (5 cm) sobre o eixo  $Z$  também em verdadeira grandeza (também a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato,  $Q_3$  (a projeção lateral do ponto  $Q$ ). Note que o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

### Resolução:

O plano que contém a base de menor abscissa do cilindro (um plano de perfil  $\pi$ ) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $YZ$ ), pelo que o círculo (a base de menor abscissa do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção lateral são figuras geometricamente iguais.

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_3$  (a projeção lateral do ponto  $Q$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção lateral da base de menor abscissa do cilindro. Por outro lado, porque se trata de um cilindro de revolução (um cilindro reto), o seu eixo está contido numa reta ortogonal aos planos das bases, que são planos de perfil – assim, o eixo do cilindro está contido numa reta fronto-horizontal, que é uma reta projetante lateral. Nesse sentido, o ponto  $Q$  (o centro da base de menor abscissa) e o ponto  $Q'$  (o centro da base de maior abscissa) têm as suas projeções laterais coincidentes, facto que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente,  $Q'_3 \equiv Q_3$ .

A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, nesta situação, corresponde à diferença das abscissas dos planos das bases. O plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base de menor abscissa do sólido) tem 3 cm de abscissa (a abscissa do ponto  $Q$ ) e o cilindro tem 9 cm de altura, pelo que o plano  $\pi'$  (o plano que contém a base de maior abscissa do sólido) tem 12 cm de abscissa ( $3 + 9 = 12$ ).

Assim, para determinar a perspectiva do cilindro é necessário, em primeiro lugar, determinar as perspectivas dos pontos  $Q$  e  $Q'$  (os centros das bases), para o que é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $X$ , de forma a ser possível determinar as perspectivas das abscissas daqueles dois pontos (a abscissa é a única coordenada dos pontos que apresenta deformação).

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

As abscissas dos dois pontos, porque se medem no eixo  $X$ , estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  para o plano axonométrico (o plano  $YZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $X$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ ).

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $X_r$  (e no sentido positivo do eixo), representaram-se as abscissas dos dois pontos (3 cm e 12 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se dois pontos – o ponto  $P_r$  e o ponto  $R_r$ . O ponto  $P_r$  é um ponto do eixo  $X_r$  com a abscissa do ponto  $Q$  ( $\overline{OP_r} = 3$  cm e é a abscissa do ponto  $Q$ , em verdadeira grandeza). O ponto  $R_r$  é um ponto do eixo  $X_r$  com a abscissa do ponto  $Q'$  ( $\overline{OR_r} = 12$  cm e é a abscissa do ponto  $Q'$ , em verdadeira grandeza).

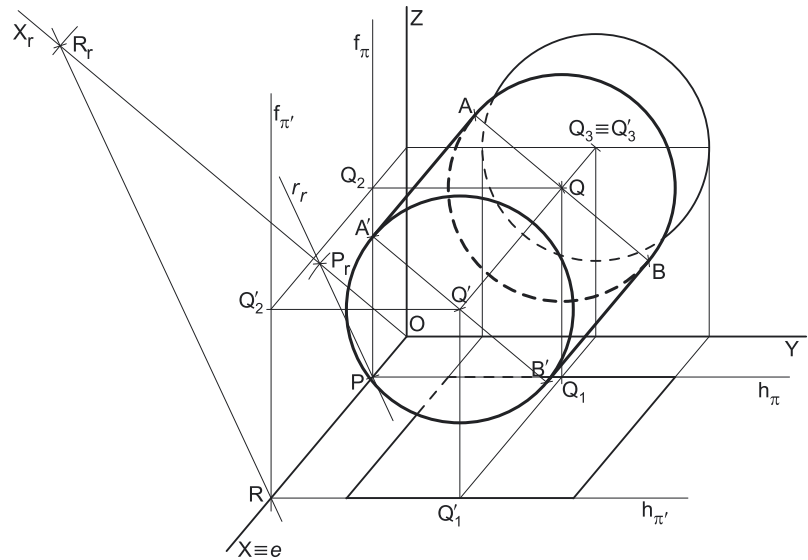
Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $65^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P_r$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $P$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto  $Q$  ( $\overline{OP}$  é a perspectiva da abscissa do ponto  $Q$ ).

Por  $R_r$  conduziu-se uma reta (que não se identificou) com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $65^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $R_r$ , em rebatimento e é paralela à reta  $r_r$ . Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $R$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OR]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto  $Q'$  ( $\overline{OR}$  é a perspectiva da abscissa do ponto  $Q'$ ).

### Representação do plano de perfil que contém a base de menor abscissa do cilindro:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , a perspectiva do ponto  $P$ , que é o ponto do eixo  $X$  que tem 3 cm de abscissa e que é um ponto do plano  $\pi$  (o plano que contém a base de menor abscissa do cilindro). Assim, pela perspectiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Z$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

*Representação do plano de perfil que contém a base de maior abscissa do cilindro:*

A determinação gráfica do coeficiente de deformação permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , a perspectiva do ponto  $R$ , que é o ponto do eixo  $X$  que tem 12 cm de abscissa e que é um ponto do plano  $\pi'$  (o plano que contém a base de maior abscissa do cilindro). Assim, pela perspectiva do ponto  $R$  conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi' - h_{\pi'}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi'$ ) e  $f_{\pi'}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi'$ ).

Note que  $h_{\pi'}$  (o traço horizontal do plano  $\pi'$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi'$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi'$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Z$ .

Tal como o plano  $\pi$ , também o plano  $\pi'$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\pi'}$ ). Por outro lado, e tal como o plano  $\pi$ , o plano  $\pi'$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_{\pi'}$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto Q:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $Q$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $Q_1$ ) e da sua projeção frontal ( $Q_2$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $Q_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $Q_2$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $Q_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $Q$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.  $Q_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q$  e situa-se sobre  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $Q_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $Q_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $Q_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $Q$  são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas do ponto Q':*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $Q'$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $Q'_1$ ) e da sua projeção frontal ( $Q'_2$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $Q'_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $Q'_2$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $Q'_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $Q'$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_{\pi'}$  (o traço horizontal do plano  $\pi'$ ), pois o plano  $\pi'$  é um plano projetante horizontal.  $Q'_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q'$  e situa-se sobre  $f_{\pi'}$  (o traço frontal do plano  $\pi'$ ), pois o plano  $\pi'$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $Q'$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $Q'_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $Q'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $Q'_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $Q'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $Q'_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $Q'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q'$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $Q'$  são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação da perspectiva do cilindro:*

Atendendo a que o plano  $\pi$  e o plano  $\pi'$  (os planos que contêm as bases do cilindro) são paralelos ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $YZ$ ), e como atrás se referiu, as bases projetam-se, ambas, em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano  $YZ$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base de menor abscissa do cilindro, em verdadeira grandeza. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $Q'$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q'$ ) e também com 3 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base de maior abscissa do cilindro, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do cilindro é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (as circunferências que delimitam as duas bases do cilindro) que são paralelas a uma reta dada (a perspectiva do eixo do cilindro).

Assim, desenharam-se os diâmetros das duas circunferências que são perpendiculares ao segmento  $[QQ']$  (a perspectiva do eixo do sólido), o que nos permitiu determinar os pontos de tangência – os pontos  $A$  e  $B$  (da base de menor afastamento) e os pontos  $A'$  e  $B'$  (da base de maior afastamento).

Após a determinação dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  e  $B'$ , desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cilindro (as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ ) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – a semicircunferência  $\widehat{AB}$  de menor cota (da base de menor abscissa) é invisível. A base de maior abscissa é visível na sua totalidade.

Note que a representação das perspectivas das projeções do cilindro não são absolutamente necessárias, razão pela qual não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o cilindro, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cilindro representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). Os planos  $\pi$  e  $\pi'$  (os planos que contêm as bases do sólido), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo  $X_r$ , da reta  $r_r$  e da reta não identificada que é paralela à reta  $r_r$ , e, ainda, da construção que nos permitiu determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido.

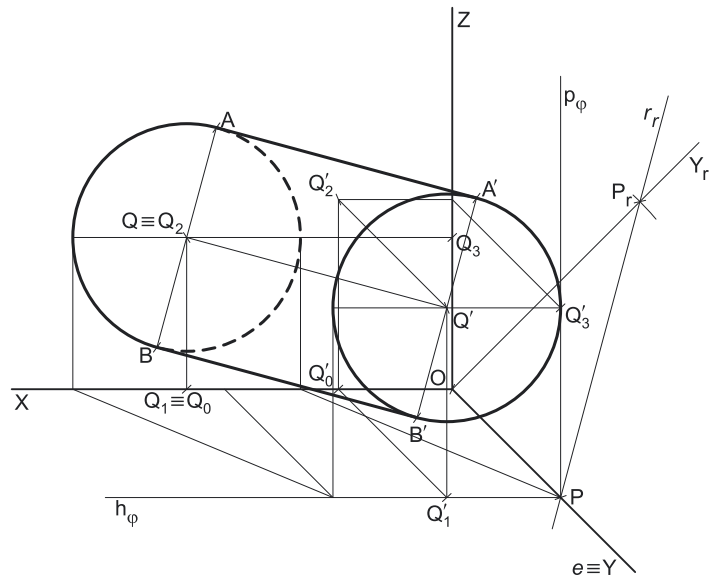
## 1263.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o plano axonométrico é o plano  $XZ$  – nesse sentido, o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com as partes positivas do eixo  $X$  e do eixo  $Z$ , ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar as abcissas dos pontos  $Q$  e  $Q'$  (7 cm e 3 cm, respetivamente) sobre o eixo  $X$  em verdadeira grandeza (a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu determinar  $Q_0$  e  $Q'_0$  (as referências das abcissas dos dois pontos). Os dados permitiram-nos, também, representar as cotas daqueles dois pontos (4 cm e 5 cm, respetivamente) sobre o eixo  $Z$  também em verdadeira grandeza (também a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu determinar, de imediato,  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ ) e  $Q'_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q'$ ). Note que se representou, também, a projeção lateral do ponto  $Q$  ( $Q_3$ ), que se situa no eixo  $Z$ , pois o ponto  $Q$  tem afastamento nulo. Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

Por fim, uma vez que o ponto  $Q$  tem afastamento nulo, o ponto  $Q$  situa-se no plano coordenado  $XZ$ , pelo que  $Q_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $Q$ ) se situa sobre o eixo  $X$  e tem-se, imediatamente,  $Q_2 \equiv Q$  (sendo  $Q$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ ).



### Resolução:

O plano que contém a base de menor afastamento do cilindro é o próprio plano axonométrico (o plano  $XZ$ ), pelo que o círculo (a base de menor afastamento do sólido) está em verdadeira grandeza (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção frontal são a mesma figura.

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q$  (perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a perspectiva da base de menor afastamento do cilindro.

No entanto, para determinar a perspectiva do cilindro é necessário, em primeiro lugar, determinar a perspectiva do ponto  $Q'$  (o centro da base de maior afastamento do sólido), para o que é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , de forma a ser possível determinar a perspectiva do afastamento daquele ponto (o afastamento é a única coordenada que apresenta deformação).

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

O afastamento do ponto  $Q'$ , porque se mede no eixo  $Y$ , está afetado pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o plano axonométrico (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ ).

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $Y_r$  (e no sentido positivo do eixo), representou-se o afastamento do ponto  $Q'$  (7 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se um ponto  $P_r$ . O ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Y$  com o afastamento do ponto  $Q$  ( $OP_r = 7$  cm e é o afastamento do ponto  $Q'$ , em verdadeira grandeza).

Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P_r$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $P$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto  $Q'$  ( $OP$  é a perspectiva do afastamento do ponto  $Q'$ ).

#### Representação do plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do cilindro:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , a perspectiva do ponto  $P$ , que é o ponto do eixo  $Y$  que tem 7 cm de afastamento e que é um ponto do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro). Assim, pela perspectiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

#### Determinação das perspectivas do ponto $Q'$ :

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $Q'$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $Q'_1$ ) e da sua projeção lateral ( $Q'_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $Q'_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $Q'_3$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $Q'_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $Q'$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.  $Q'_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $Q'$  e situa-se sobre  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $Q'$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $Q'_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $Q'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $Q'_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $Q'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $Q'_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $Q'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q'$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $Q'$  são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação da perspectiva do cilindro:

Atendendo a que o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), e como atrás se referiu, as bases projetam-se, ambas, em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano  $XZ$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q'$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q'$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base de maior afastamento do cilindro, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do cilindro é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (as circunferências que delimitam as duas bases do cilindro) que são paralelas a uma reta dada (a perspectiva do eixo do cilindro).

Assim, desenharam-se os diâmetros das duas circunferências que são perpendiculares ao segmento  $[QQ']$  (a perspectiva do eixo do sólido), o que nos permitiu determinar os pontos de tangência – os pontos  $A$  e  $B$  (da base de menor afastamento) e os pontos  $A'$  e  $B'$  (da base de maior afastamento).

Após a determinação dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  e  $B'$ , desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cilindro (as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ ) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – a semicircunferência  $AB$  de menor cota (da base de menor afastamento) é invisível. A base de maior afastamento é visível na sua totalidade.

Note que a representação das perspectivas das projeções do cilindro não são absolutamente necessárias, razão pela qual não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o cilindro, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cilindro representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do cilindro), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo  $Y_r$ , da reta  $r_r$  e, ainda, da construção que nos permitiu determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido.

## 1264.

#### Dados:

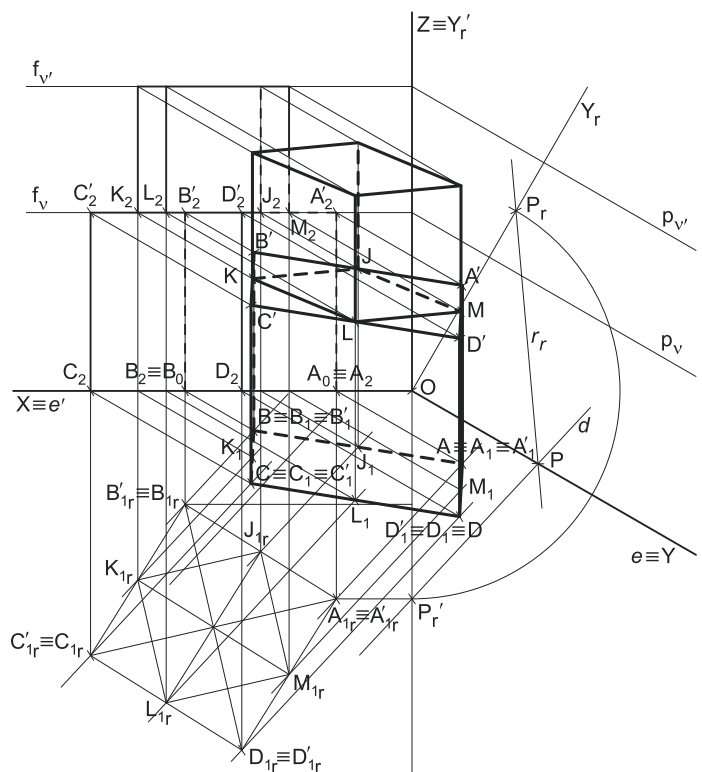
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $X$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $XZ$  – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $150^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $120^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar as abcissas dos pontos  $A$  e  $B$  (2 cm e 6 cm, respetivamente) sobre o eixo  $X$  (em verdadeira grandeza), o que nos permitiu determinar  $A_0$  e  $B_0$  (as referências das abcissas dos dois pontos). Uma vez que os dois pontos têm cota nula, ambos os pontos se situam no plano coordenado  $XY$ , pelo que as suas projeções frontais se situam no eixo  $X$  – tem-se, imediatamente,  $A_2 \equiv A_0$  e  $B_2 \equiv B_0$ . Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

#### Resolução:

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano coordenado  $XY$ ) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido no plano coordenado horizontal (o plano  $XY$ ), sabe-se que o quadrado está em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XY$  – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado  $XY$ ) são a mesma figura. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado  $XY$**  (o plano no qual o quadrado está em verdadeira grandeza).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

*Rebatimento do plano XY e construção da projeção horizontal do quadrado [ABCD], em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano XY para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo X. O eixo Y rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo Z, facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo Y rebatido pelo rebatimento do plano XY.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano XY com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo Y. De forma semelhante, identificou-se o eixo Y rebatido pelo rebatimento do plano coordenado XY com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo Y rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano XY rebatido, representaram-se as projeções horizontais dos pontos A e B, em rebatimento ( $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , respetivamente), em função dos respetivos afastamentos. Assim,  $A_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto A (em rebatimento) e situa-se 5,5 cm (o afastamento do ponto A) para baixo do eixo X, na sua linha de chamada (que passa por  $A_0$  e é perpendicular ao eixo X). De forma semelhante,  $B_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto B (em rebatimento) e situa-se 3 cm (o afastamento do ponto B) para baixo do eixo X, na sua linha de chamada (que passa por  $B_0$  e é perpendicular ao eixo X).

A partir de  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano XY), o que nos permitiu determinar  $C_{1r}$  e  $D_{1r}$  (as projeções horizontais, em rebatimento, dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado [ABCD], em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano XY. Note que se garantiu que o quadrado se situa, na totalidade, no espaço do  $1^{\circ}$  Triedro, como o enunciado refere expressamente.

*Construção da projeção horizontal do sólido, em verdadeira grandeza:*

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do sólido, em rebatimento (no rebatimento do plano XY).

Tendo em conta que o quadrado [ABCD] é a face inferior de um cubo, sabe-se que as arestas do sólido ortogonais ao plano XY são necessariamente verticais (projetantes horizontais), pelo que as projeções horizontais dos vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$  (a face superior do cubo) estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices da sua face inferior – tem-se, imediatamente,  $A'_{1r} \equiv A_{1r}$ ,  $B'_{1r} \equiv B_{1r}$ ,  $C'_{1r} \equiv C_{1r}$ , e  $D'_{1r} \equiv D_{1r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do primeiro cubo, em rebatimento (no plano XY rebatido).

Em seguida, com o recurso às diagonais do quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$ , determinaram-se os pontos médios dos lados do quadrado – esses pontos são as projeções horizontais dos vértices da face inferior do segundo cubo – os pontos  $J_{1r}$ ,  $K_{1r}$ ,  $L_{1r}$  e  $M_{1r}$ . À semelhança do referido para o outro cubo, as arestas do cubo que são ortogonais às faces horizontais do sólido são necessariamente verticais (projetantes horizontais), pelo que as projeções horizontais dos vértices do quadrado  $[J'K'L'M']$  (a face superior do segundo cubo) estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices da sua face inferior. No entanto, com vista a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica com excesso de notações, omitiu-se a identificação destes vértices em rebatimento.

De qualquer forma, estes procedimentos permitiram-nos concluir a construção da projeção horizontal do sólido (composto pelos dois cubos), em rebatimento (no rebatimento do plano XY).

*Construção da projeção frontal do sólido:*

Para construir a projeção frontal do sólido, há que determinar a cota da face superior do primeiro cubo, bem como a cota da face superior do segundo cubo.

Todas as arestas de um cubo têm o mesmo comprimento. Nesse sentido, a distância entre os planos das duas faces horizontais do primeiro cubo corresponde ao comprimento de qualquer dos lados do quadrado [ABCD] (uma das faces do cubo), que está em verdadeira grandeza no rebatimento do plano XY – a cota do plano v (o plano que contém a face superior do primeiro cubo) é igual à medida do lado do quadrado [ABCD]. Nesse sentido, sobre o eixo Z, a partir do ponto O e no sentido positivo do eixo, representou-se a cota do plano v (que é igual ao comprimento de qualquer dos lados do quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$ ) e representou-se o plano v pelos seus traços –  $f_v$  (o traço frontal do plano v) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano v). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano v) é uma reta fronto-horizontal do plano v com afastamento nulo – é paralelo ao eixo X. Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano v) é uma reta de topo do plano v, com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo Y.

O plano v é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado XZ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado XZ, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano v é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado YZ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado YZ, sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

Por outro lado, a distância entre os planos das duas faces horizontais do segundo cubo corresponde igualmente ao comprimento de qualquer dos lados do quadrado [JKLM] (uma das faces do cubo), que está em verdadeira grandeza no rebatimento do plano XY – o plano v' (o plano que contém a face superior do segundo cubo) situa-se acima do plano v, a uma distância igual à medida do lado do quadrado [JKLM]. Nesse sentido, sobre o eixo Z, a partir do traço frontal do plano v ( $f_v$ ) e no sentido positivo do eixo, representou-se o comprimento de qualquer dos lados do quadrado  $[J_{1r}K_{1r}L_{1r}M_{1r}]$  e representou-se o plano v' pelos seus traços –  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano v') e  $p_{v'}$  (a perspectiva do traço lateral do plano v'). Tal como referido para o plano v,  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano v') é uma reta fronto-horizontal do plano v' com afastamento nulo – é paralelo ao eixo X. Pelo seu lado,  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano v') é uma reta de topo do plano v', com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo Y.

Tal como referido para o plano v, o plano v' é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado XZ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado XZ, sobre o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). Por outro lado, o plano v' é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado YZ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado YZ, sobre o seu traço lateral ( $p_{v'}$ ).

Em seguida, pelas projeções horizontais (em rebatimento) de todos os vértices do sólido conduziram-se as respetivas linhas de chamada, perpendiculares ao eixo X, e determinaram-se as projeções frontais de todos os vértices do sólido.  $C_2$  e  $D_2$  são as projeções frontais dos vértices C e D (do quadrado [ABCD]) e situam-se no eixo X, pois têm cota nula (o quadrado [ABCD] está contido no plano XY).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

$A'_2, B'_2, C'_2$  e  $D'_2$  são as projeções frontais dos vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$  e situam-se sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal (o quadrado  $[A'B'C'D']$  está contido no plano  $v$ ).  $J_2, K_2, L_2$  e  $M_2$  são as projeções frontais dos vértices do quadrado  $[JKLM]$  e situam-se sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal (o quadrado  $[JKLM]$  está contido no plano  $v$ ). De forma semelhante, determinaram-se as projeções frontais dos vértices da face superior do segundo cubo (que não se identificaram), que está sobre  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal (a face superior do segundo cubo está contida no plano  $v'$ ). Estes procedimentos permitiram-nos concluir a construção da projeção frontal do sólido.

Para determinar as perspetivas dos quadrados  $[ABCD]$  e  $[JKLM]$  e do sólido é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo  $Y$ ).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Y_r$ , o afastamento do ponto  $A$ , a partir de  $A_{1r}$ , com uma paralela ao eixo  $X$ . Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r$ , no eixo  $Y_r$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Y$  com o afastamento do ponto  $A$  ( $OP_r$  é o afastamento do ponto  $A$ , no eixo  $Y_r$ , pelo rebatimento do plano  $XY$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto  $P$  (que é 5,5 cm) para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Y$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva do afastamento do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspetiva do afastamento do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r$  e pela perspetiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XY$  e determinação das perspetivas do ponto  $A$ :*

As projeções do ponto  $A$  (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $A$  – a linha de chamada do ponto  $A$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $A_1$ , outro extremo em  $A_2$  e um vértice no eixo  $X$  (em  $A_0$ ). A parte da linha de chamada do ponto  $A$  que está contida no plano  $XY$  é o segmento  $[A_0A_1]$  – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento  $[A_0A_{1r}]$ . A perspetiva desse segmento tem um extremo em  $A_0$  e é paralela à perspetiva do eixo  $Y$ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspetiva do segmento de reta  $[A_0A_1]$ . Em seguida, por  $A_{1r}$  conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspetiva da linha de chamada do ponto  $A$  (a reta suporte do segmento  $[A_0A_1]$ ) é  $A_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $A$ ).

Tendo em conta que o ponto  $A$  tem cota nula, o ponto  $A$  é um ponto do plano coordenado  $XY$ , pelo que se tem imediatamente  $A \equiv A_1$  (sendo  $A$  a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

Note que não se determinou a perspetiva da projeção lateral do ponto  $A$  ( $A_3$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica. No entanto, caso se tivesse determinado,  $A_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $A$ ) estaria necessariamente sobre a perspetiva do eixo  $Y$ , pois o ponto  $A$  tem cota nula.

*Determinação das perspetivas dos pontos  $B, C$  e  $D$ :*

As perspetivas dos pontos  $B, C$  e  $D$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto  $A$ . À semelhança do ponto  $A$ , também os pontos  $B, C$  e  $D$  têm cota nula, pelo que os três pontos também pertencem ao plano coordenado  $XY$ , pelo que se tem imediatamente  $B \equiv B_1$  (sendo  $B$  a perspetiva propriamente dita do ponto  $B$ ),  $C \equiv C_1$  (sendo  $C$  a perspetiva propriamente dita do ponto  $C$ ) e  $D \equiv D_1$  (sendo  $D$  a perspetiva propriamente dita do ponto  $D$ ).

*Determinação das perspetivas dos pontos  $A', B', C'$  e  $D'$ :*

Como atrás se referiu, as arestas do primeiro cubo que se situam entre os planos horizontais são verticais (projetantes horizontais), pelo que os vértices da face superior (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices da face inferior (o quadrado  $[ABCD]$ ), facto que se identificou em perspetiva – tem-se, imediatamente,  $A' \equiv A \equiv A_1$ ,  $B' \equiv B \equiv B_1$ ,  $C' \equiv C \equiv C_1$  e  $D' \equiv D \equiv D_1$ .

Em seguida, por  $A'_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $A'$ ) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto  $A'$ , que é vertical (paralela ao eixo  $Z$ ). Depois, por  $A'_2$  (a projeção frontal do ponto  $A'$ ), conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal do ponto  $A'$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto  $A'$ . Este procedimento repetiu-se para os pontos  $B', C'$  e  $D'$ , o que nos permitiu determinar as respetivas perspetivas.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que não se determinaram as perspetivas das projeções laterais dos pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**, por estas não serem determinantes para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica. No entanto, caso se tivesse determinado as perspetivas das projeções laterais daqueles pontos, estas estariam necessariamente sobre  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

#### Determinação das perspetivas do ponto **J**:

As projeções do ponto **J** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **J** – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $J_1$ , outro extremo em  $J_2$  e um vértice no eixo **X**. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **J** que está contida no plano **XY** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **X** e que tem um extremo em  $J_1$  e o outro extremo no eixo **X**. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **J** é o segmento que é perpendicular ao eixo **X** e que tem um extremo em  $J_{1r}$  e o outro extremo no eixo **X**. **Em perspetiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **J** (a parte que se situa no plano **XY**) é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Y** e tem um extremo no eixo **X**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspetiva** da parte da linha de chamada do ponto **J** que se situa no plano **XY**. Em seguida, por  $J_{1r}$  conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspetiva da linha de chamada do ponto **J** (anteriormente desenhada) é  $J_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **J**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XY**.

Em seguida, por  $J_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **J**) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto **J**, que é vertical (paralela ao eixo **Z**). Depois, por  $J_2$  (a projeção frontal do ponto **J**), conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal do ponto **J** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto **J**.

Note que não se determinou a perspetiva da projeção lateral do ponto **J** ( $J_3$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica. No entanto, caso se tivesse determinado,  $J_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **J**) estaria necessariamente sobre  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

#### Determinação das perspetivas dos pontos **K**, **L** e **M**:

As perspetivas dos pontos **K**, **L** e **M** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto **J**.

Note que não se determinaram as perspetivas das projeções laterais dos pontos **K**, **L** e **M**, por estas não serem determinantes para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica. No entanto, caso se tivesse determinado as perspetivas das projeções laterais daqueles pontos, estas estariam necessariamente sobre  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

#### Determinação das perspetivas dos vértices da face superior do segundo cubo:

Atendendo a que as projeções horizontais dos vértices da face superior do segundo cubo (que não se identificaram) estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes do quadrado [**JKLM**] e que já temos as suas projeções frontais (que estão sobre  $f_v$  e que também não se identificaram), a determinação das perspetivas destes pontos efetuou-se de forma semelhante à atrás exposta para a determinação das perspetivas do ponto **A'**.

#### Determinação da perspetiva do sólido:

Por fim, a partir das perspetivas dos dezasseis vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspetiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as arestas visíveis e as arestas invisíveis.

Note que a representação das perspetivas das projeções do sólido não são absolutamente necessárias, facto pelo qual não se representaram as perspetivas nem da projeção horizontal nem da projeção lateral do sólido. Por esse mesmo motivo, não se determinaram as perspetivas das projeções laterais de qualquer dos vértices do sólido. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido dado, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício (como o foi a sua projeção frontal) e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do sólido representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). Os planos  $v$  e  $v'$ , no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que as perspetivas dos respetivos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da representação do sólido em Dupla Projeção Ortogonal, do eixo  $Y_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XY**.

## 1265.

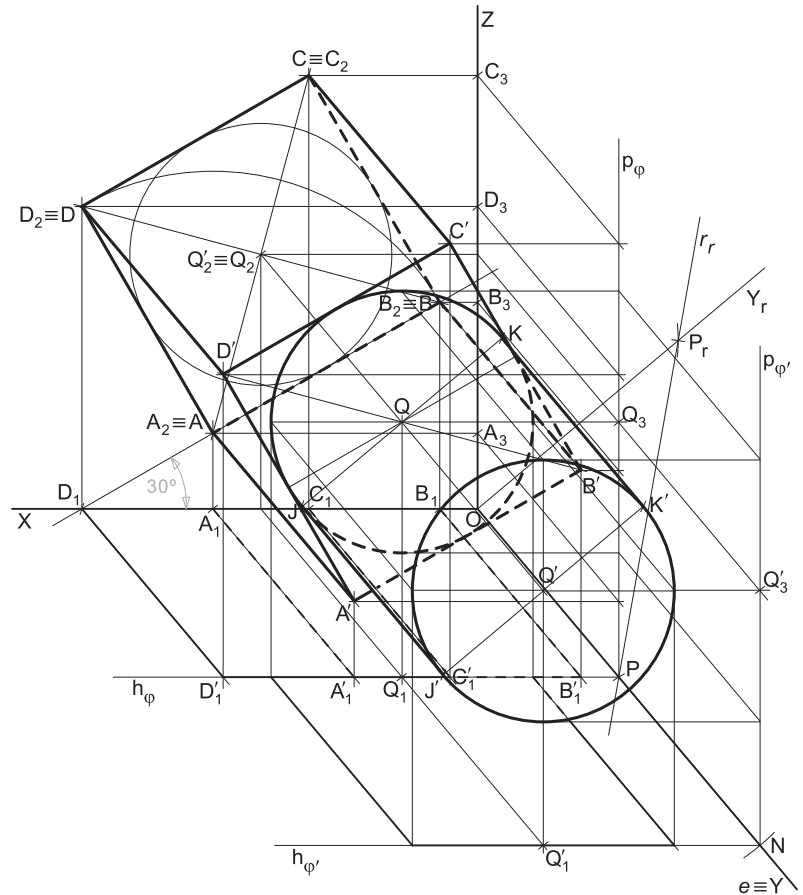
## Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $X$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $XZ$  – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $130^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $140^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto  $A$  (7 cm) sobre o eixo  $X$  em verdadeira grandeza (a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), bem como a cota do ponto  $A$  (2 cm) sobre o eixo  $Z$  também em verdadeira grandeza (também a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato,  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ), bem como  $A_0$  (a referência da abscissa do ponto  $A$ ). Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

O ponto  $A$  é um ponto com afastamento nulo, pelo que é possível de forma direta, determinar as restantes perspectivas do ponto –  $A_1$  (a sua projeção horizontal) situa-se no eixo  $X$  e  $A_3$  (a sua projeção lateral) situa-se no eixo  $Z$ . Por fim, atendendo a que o ponto  $A$  é um ponto do plano coordenado  $XZ$ , tem-se, imediatamente,  $A \equiv A_2$ .

Os dados permitiram-nos, ainda, representar a abscissa do ponto  $B$  (1 cm) em verdadeira grandeza, sobre o eixo  $X$ , e a partir do ponto  $O$  (e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu determinar  $B_0$  (a referência da abscissa do ponto  $B$ ).



## Resolução:

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano  $XZ$ ) é o próprio plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), pelo que o quadrado está em verdadeira grandeza no plano axonométrico (a perspectiva do quadrado não apresenta qualquer deformação) – o quadrado, a sua perspectiva e a sua projeção frontal são a mesma figura.

Assim, a partir da perspectiva do ponto  $A$  foi possível desenhar a reta suporte do lado  $[AB]$  do quadrado, fazendo com o eixo  $X$ , um ângulo de  $30^\circ$  (de abertura para a direita). Em seguida, determinou-se o ponto  $B$ , que é o ponto dessa reta que tem 1 cm de abscissa (que havia sido previamente marcada sobre o eixo  $X$ ). A partir das perspectivas dos pontos  $A$  e  $B$ , foi possível efetuar a construção da perspectiva do quadrado, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar as perspectivas dos restantes dois vértices do quadrado (os pontos  $C$  e  $D$ ). Tendo em conta que o quadrado está contido no plano coordenado frontal (o plano  $XZ$ ), tem-se, imediatamente,  $B_2 \equiv B$ ,  $C_2 \equiv C$  e  $D_2 \equiv D$ . Não se determinaram nem as projeções horizontais nem as projeções laterais dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$ , por estas não serem determinantes para a resolução do exercício. De qualquer forma, caso se tivessem determinado, as projeções horizontais daqueles vértices estariam no eixo  $X$ , enquanto as suas projeções laterais estariam no eixo  $Z$ .

Uma vez que as arestas do cubo (que não são frontais) estão contidas em retas de topo (retas projetantes frontais), é possível identificar, de forma imediata, as projeções frontais dos vértices da face de maior afastamento do cubo (a face  $[A'B'C'D']$ ), que estão coincidentes com as projeções frontais dos vértices correspondentes da face de menor afastamento – tem-se, imediatamente,  $A'_2 \equiv A_2 \equiv A$ ,  $B'_2 \equiv B_2 \equiv B$ ,  $C'_2 \equiv C_2 \equiv C$  e  $D'_2 \equiv D_2 \equiv D$ .

O plano que contém a base de menor afastamento do cilindro (o plano frontal que contém a face de maior afastamento do cubo) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), pelo que o círculo (a base de menor afastamento do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção frontal são figuras geometricamente iguais.

Por outro lado, atendendo a que a base do cilindro se inscreve na face de maior afastamento do cubo, sabe-se que o centro daquela base (o ponto  $Q$ ) é o centro do quadrado  $[A'B'C'D']$  e que o raio daquela base é metade do lado do quadrado. Assim, determinou-se o centro do quadrado  $[A'_2B'_2C'_2D'_2]$  (a projeção frontal da face  $[A'B'C'D']$  do cubo), que é o ponto  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ ). Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ ), desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal da base de menor afastamento do cilindro – essa circunferência é necessariamente tangente aos lados do quadrado  $[A'_2B'_2C'_2D'_2]$ .

Por outro lado, porque se trata de um cilindro de revolução (um cilindro reto), o seu eixo está contido numa reta ortogonal aos planos das bases, que são planos frontais (de frente) – assim, o eixo do cilindro está contido numa reta de topo, que é uma reta projetante frontal. Nesse sentido, o ponto  $Q$  (o centro da base de menor afastamento) e o ponto  $Q'$  (o centro da base de maior afastamento) têm as suas projeções frontais coincidentes, facto que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente,  $Q'_2 \equiv Q_2$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Todas as arestas de um cubo têm o mesmo comprimento. Nesse sentido, a distância entre os planos das duas faces frontais (de frente) do cubo corresponde ao comprimento de qualquer dos lados do quadrado  $[ABCD]$  (uma das faces do cubo), que está em verdadeira grandeza no plano  $XZ$  – o afastamento do plano  $\varphi$  (o plano que contém a face de maior afastamento do cubo) é igual à medida do lado do quadrado  $[ABCD]$ .

Por outro lado, a altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, nesta situação, corresponde à diferença dos afastamentos dos planos das bases. Tendo em conta que a altura do cilindro é igual ao comprimento do seu diâmetro (como o enunciado refere expressamente), salienta-se que, nesta situação (e porque a base do cilindro está inscrita no quadrado  $[A'B'C'D']$ ), o diâmetro do cilindro é igual ao comprimento do lado do quadrado  $[A'B'C'D']$  e, neste caso, igual à altura do cilindro. Assim, o afastamento do plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) é o dobro do afastamento do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro).

Nesse sentido, para determinar as perspetivas dos dois sólidos há que, em primeiro lugar, determinar as perspetivas dos afastamentos dos planos  $\varphi$  e  $\varphi'$ , para o que é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , de forma a ser possível determinar as perspetivas dos afastamentos daqueles dois planos (o **afastamento** é a única coordenada que apresenta deformação).

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

O **afastamento** do plano  $\varphi$ , o plano frontal (de frente) que contém o quadrado  $[A'B'C'D']$ , porque se mede no eixo  $Y$ , está afetado pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, o processo mais simples consiste em recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o plano *axonométrico* (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está, assim, definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (a direção perpendicular à perspetiva do eixo  $Y$ ).

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $Y_r$  (e no sentido positivo do eixo), representou-se, em verdadeira grandeza, o **afastamento** do plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém o quadrado  $[A'B'C'D']$ ), que é igual ao comprimento do lado do quadrado  $[ABCD]$ , determinando-se um ponto  $P_r$ . O ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Y$  com o afastamento do plano  $\varphi$  ( $OP_r$  é o afastamento do plano frontal, em verdadeira grandeza).

Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $50^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspetiva do ponto  $P$ , sobre a perspetiva do eixo  $Y$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspetiva do afastamento do plano frontal (de frente) que contém a face de maior afastamento do cubo ( $OP$  é a perspetiva do afastamento do plano frontal).

### Representação do plano frontal (de frente) que contém a face de maior afastamento do cubo:

Em seguida, pela perspetiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_\varphi$  (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_\varphi$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\varphi$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\varphi$ ).

### Representação do plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do cilindro:

Como atrás se referiu, o afastamento do plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do cilindro) é o dobro do afastamento do plano  $\varphi$  (que é o plano que contém a base de menor afastamento do cilindro). Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto  $P$  e com raio  $OP$  (a perspetiva do afastamento do plano  $\varphi$ ), determinou-se, sobre a perspetiva do eixo  $Y$ , um ponto  $N$  – o ponto  $N$  é o ponto do eixo  $Y$  tal que  $ON = 2 \times OP$ .

Em seguida, pela perspetiva do ponto  $N$  conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $\varphi'$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do cilindro) –  $h_{\varphi'}$  (a perspetiva do traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) e  $p_{\varphi'}$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $\varphi'$ ).

Salienta-se que  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi'$ , com cota nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{\varphi'}$  (o traço lateral do plano  $\varphi'$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi'$ , com abcissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi'$  é, também ele, um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\varphi'}$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{\varphi'}$ ).

### Determinação das perspetivas do ponto Q:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto  $Q$  determinaram-se as perspetivas da sua projeção horizontal ( $Q_1$ ) e da sua projeção lateral ( $Q_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $Q_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $Q_3$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $Q_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $Q$  e situa-se sobre a perspetiva de  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.  $Q_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto  $Q$  e situa-se sobre  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **Q**. Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de **Q<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **Q** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **Q<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **Q** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **Q<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **Q** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **Q** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação das perspectivas dos pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**:

A determinação das perspectivas dos pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'** efetuou-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **Q**. Os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'** também pertencem ao plano  $\varphi$ , pelo que as perspectivas das suas projeções horizontais (**A'<sub>1</sub>**, **B'<sub>1</sub>**, **C'<sub>1</sub>** e **D'<sub>1</sub>**, respetivamente), situam-se sobre  $h_\varphi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal. De forma semelhante, e ainda porque os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'** pertencem ao plano  $\varphi$ , as perspectivas das suas projeções laterais (**A'<sub>3</sub>**, **B'<sub>3</sub>**, **C'<sub>3</sub>** e **D'<sub>3</sub>**, respetivamente), situam-se sobre  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

#### Determinação das perspectivas do ponto **Q'**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **Q'** determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal (**Q'<sub>1</sub>**) e da sua projeção frontal (**Q'<sub>3</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **Q'<sub>1</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **Q'<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos). **Q'<sub>1</sub>** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **Q'** e situa-se sobre a perspectiva de  $h_{\varphi'}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi'$ ), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante horizontal. **Q'<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **Q'** e situa-se sobre  $p_{\varphi'}$  (o traço lateral do plano  $\varphi'$ ), pois o plano  $\varphi'$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **Q'**. Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de **Q'<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **Q'** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **Q'<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **Q'** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **Q'<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **Q'** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **Q'**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **Q'** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação da perspectiva do cilindro:

Atendendo a que o plano  $\varphi$  e o plano  $\varphi'$  (os planos que contêm as bases do cilindro) são paralelos ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano **XZ**), e como atrás se referiu, as bases projetam-se, ambas, em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano **XZ**). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q** (a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**) e com raio igual a metade do lado do quadrado **[ABCD]**, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base de **menor afastamento** do cilindro, em verdadeira grandeza. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **Q'** (a perspectiva propriamente dita do ponto **Q'**) e com o mesmo raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base de **maior afastamento** do cilindro, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do cilindro é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (as circunferências que delimitam as duas bases do cilindro) que são paralelas a uma reta dada (a perspectiva do eixo do cilindro).

Assim, desenharam-se os diâmetros das duas circunferências que são perpendiculares ao segmento **[QQ']** (a perspectiva do eixo do sólido), o que nos permitiu determinar os pontos de tangência – os pontos **J** e **K** (da base de menor afastamento) e os pontos **J'** e **K'** (da base de maior afastamento).

Após a determinação dos pontos **J**, **K**, **J'** e **K'**, desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cilindro (as geratrizes **[JJ']** e **[KK']**) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – a semicircunferência **JK** de menor cota (da base de menor afastamento) é invisível. A base de maior afastamento é visível na sua totalidade.

#### Determinação da perspectiva do cubo:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do cubo**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** do cubo é a linha quebrada fechada **[AA'B'C'D]**. Existem dois vértices do cubo que não integram o contorno aparente da perspectiva do sólido – os vértices **D'** e **B**. O vértice **D'**, por ser um dos vértices mais próximos do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'D']**, **[C'D']** e **[DD']**. O vértice **B**, por ser um dos vértices mais distantes do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]**, **[BC]** e **[BB']**.

Salienta-se que o cilindro oculta parcialmente o cubo. Nesse sentido, foram respeitadas todas as invisibilidades resultantes da ocultação provocada pelo cilindro (as arestas **[A'B']** e **[B'C']** estão parcialmente invisíveis).

Note que a representação das perspectivas das projeções dos dois sólidos não são absolutamente necessárias, razão pela qual não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto pelo cubo e pelo cilindro, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada. É nesse contexto que foi representada a projeção frontal dos dois sólidos.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. As perspectivas dos dois sólidos representaram-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). Os planos  $\varphi$  e  $\varphi'$  (os planos frontais que contêm as bases do cilindro e a face de maior afastamento do cubo), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo **Y<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>**, e, ainda, da construção que nos permitiu determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido.



## 1266.

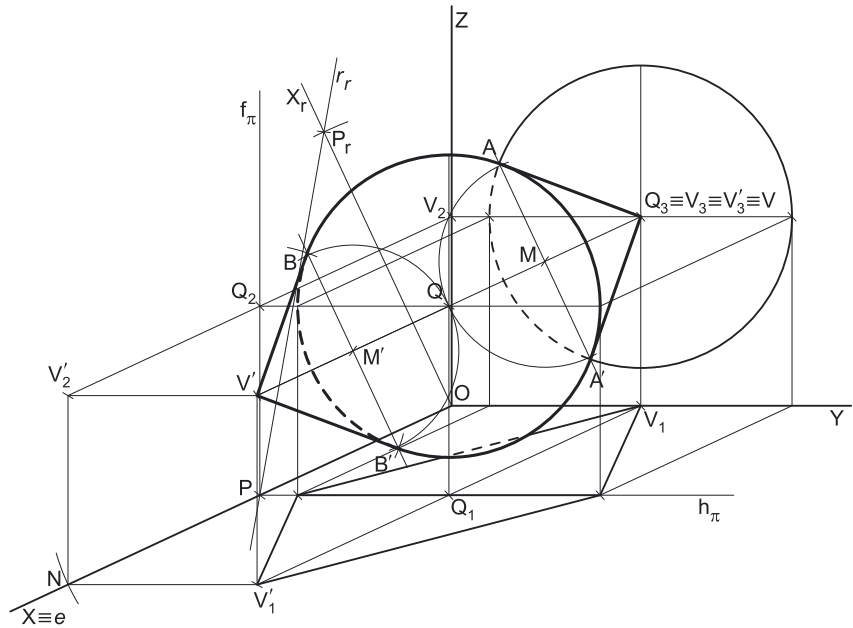
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo Y e ao eixo Z, conclui-se que o plano axonométrico é o plano YZ – o eixo Y e o eixo Z fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo X (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo Y um ângulo de 155° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo Z, um ângulo de 115° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar o afastamento do ponto Q (5 cm) em verdadeira grandeza, sobre o eixo Y (a partir do ponto O e no sentido positivo do eixo), bem como a cota do ponto Q (5 cm) também em verdadeira grandeza, sobre o eixo Z (a partir do ponto O e no sentido positivo do eixo). Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato, Q<sub>3</sub> (a projeção lateral do ponto Q). Note que o eixo Y e o eixo Z estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

### Resolução:

O plano que contém a base dos cones (um plano de perfil) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano YZ), pelo que o círculo (a base comum aos dois cones) projeta-se em verdadeira grandeza (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção lateral são figuras geometricamente iguais.



Assim, com o compasso, fazendo centro em Q<sub>3</sub> (a projeção lateral do ponto Q) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção lateral da base do sólido.

Por outro lado, trata-se de um sólido composto por dois cones de revolução, cujos eixos estão contidos em retas ortogonais ao plano que contém a base comum aos dois cones (que é um plano de perfil) – assim, os eixos dos dois cones são colineares (estão contidos na mesma reta) e estão contidos numa reta fronto-horizontal (uma reta projetante lateral). Dessa forma, o ponto Q (o centro da base), o ponto V (o vértice de um dos cones) e o ponto V' (o vértice do outro cone) estão contidos na mesma reta projetante lateral, pelo que têm as suas projeções laterais coincidentes, o que se assinalou imediatamente – V'<sub>3</sub> ≡ V<sub>3</sub> ≡ Q<sub>3</sub>.

Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base o que, neste caso, corresponde à diferença entre as abcissas dos vértices e do plano da base. O plano de perfil que contém a base comum aos dois cones (o plano π) tem 8 cm de abcissa (a abcissa do ponto Q) e os cones têm, ambos, 8 cm de altura. Assim, o vértice de um dos cones (o ponto V, por hipótese) tem abcissa nula (8 – 8 = 0), enquanto o ponto V' (o vértice do outro cone) tem 16 cm de abcissa (8 + 8 = 16).

Nesse sentido, foi possível determinar, de forma imediata, a perspectiva do ponto V (que é um ponto com abcissa nula) – V<sub>1</sub> (a sua projeção horizontal) situa-se no eixo Y e V<sub>2</sub> (a sua projeção frontal) situa-se no eixo Z. Por fim, atendendo a que o ponto V é um ponto do plano coordenado YZ, tem-se, imediatamente, V ≡ V<sub>3</sub>. Salienta-se que V é o vértice de um dos cones – o cone com menor afastamento ou o «primeiro cone».

Para determinar a perspectiva do sólido é necessário, em primeiro lugar, determinar as perspectivas dos pontos Q (o centro da base comum aos dois cones) e do ponto V' (o vértice do «segundo cone»). Para tal, é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo X, de forma a ser possível determinar as perspectivas das abcissas daqueles dois pontos (a abcissa é a única coordenada que apresenta deformação).

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

As abcissas dos dois pontos, porque se medem no eixo X, estão afetadas pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo X para o plano axonométrico (o plano YZ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta e), que é a própria perspectiva do eixo X. O eixo X rebatido (o eixo X<sub>r</sub>) fica perpendicular à perspectiva do eixo X. O ponto O é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo X<sub>r</sub> está, assim, definido por um ponto (o ponto O) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo X).

A partir do ponto O, sobre o eixo X<sub>r</sub> (e no sentido positivo do eixo), representaram-se a abcissa do ponto Q (8 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se um ponto P<sub>r</sub>. O ponto P é um ponto do eixo X com a abcissa do ponto Q e do plano de perfil que contém a base do sólido (OP<sub>r</sub> = 8 cm e é a abcissa do ponto Q, em verdadeira grandeza).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $P$ , sobre a perspectiva do eixo  $X$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto  $Q$  ( $OP$  é a perspectiva da abscissa do ponto  $Q$  e do plano da base do sólido).

Como atrás se referiu, o ponto  $V'$  (o vértice do «segundo cone» tem 16 cm de abscissa, que é o dobro da abscissa do plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base do sólido). Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto  $P$  e com raio  $OP$  (a perspectiva da abscissa do plano  $\pi$ ), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , um ponto  $N$  – o ponto  $N$  é o ponto do eixo  $X$  tal que  $ON = 2 \times OP$  ( $N$  é o ponto do eixo  $X$  cuja abscissa é o dobro da abscissa do plano  $\pi$  – assim, o ponto  $N$  tem 16 cm de abscissa).

*Representação do plano de perfil que contém a base comum aos dois cones:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $X$ , a perspectiva do ponto  $P$ , que é o ponto do eixo  $X$  que tem 8 cm de abscissa e que é um ponto do plano  $\pi$  (o plano que contém a base comum aos dois cones). Assim, pela perspectiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\pi$ ) e  $f_\pi$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$ ).

Note que  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ) é uma reta de topo do plano  $\pi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Y$ . Pelo seu lado,  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ) é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Z$ .

O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Por outro lado, o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto Q:*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $Q$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $Q_1$ ) e da sua projeção frontal ( $Q_2$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $Q_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $Q_2$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $Q_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $Q$  e situa-se sobre a perspectiva de  $h_\pi$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.  $Q_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q$  e situa-se sobre  $f_\pi$  (o traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $Q_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $Q_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $Q_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $Q$  são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação das perspectivas do ponto V':*

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $V'$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal ( $V'_1$ ) e da sua projeção frontal ( $V'_2$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $V'_1$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $V'_2$  e  $O$  são dois vértices opostos) –  $V'_1$  é a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V'$  e  $V'_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $V'$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $V'$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $V'_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $V'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $V'_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $V'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $V'_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $V'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $V'$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $V'$  são dois vértices espacialmente opostos.

*Determinação da perspectiva do sólido:*

Atendendo a que o plano  $\pi$  (o plano que contém a base comum aos dois cones) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o círculo projeta-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano  $YZ$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ ) e com 4 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base do cone, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do «primeiro cone» é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a base do cone) que passam por um ponto exterior (a perspectiva do ponto  $V$ ).

Assim, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do segmento  $[QV]$  (com o recurso à mediatriz do segmento) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio até ao ponto  $Q$ , desenhou-se um arco de circunferência – os pontos em que o arco corta a circunferência são os pontos  $A$  e  $A'$ . Os pontos  $A$  e  $A'$  são os pontos em que as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone são tangentes à base do sólido.

Após a determinação dos pontos  $A$  e  $A'$ , desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone (as geratrizes  $[AV]$  e  $[A'V]$ ) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – o arco menor  $\widehat{AA'}$  (da circunferência que delimita a base) é visível (a base do cone é visível, pois tem maior abscissa do que o vértice).

A perspectiva do «segundo cone» é igualmente limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam também com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a base do cone) que passam por um ponto exterior (a perspectiva do ponto  $V'$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, determinou-se o ponto  $M'$ , o ponto médio do segmento  $[QV']$  (com o recurso à mediatriz do segmento) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M'$  e com raio até ao ponto  $Q$ , desenhou-se um arco de circunferência – os pontos em que o arco corta a circunferência são os pontos  $B$  e  $B'$ . Os pontos  $B$  e  $B'$  são os pontos em que as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone são tangentes à base do sólido.

Após a determinação dos pontos  $B$  e  $B'$ , desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone (as geratrizes  $[BV]$  e  $[B'V']$ ) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – o arco menor  $BB'$  (da circunferência que delimita a base) é **invisível** (a base do cone é invisível, pois tem menor abcissa do que o vértice).

Note que a representação das perspectivas das projeções do sólido não são absolutamente necessárias, apesar de se terem representado as perspectivas das suas projeção horizontal e frontal. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto pelos dois cones, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cone representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base comum aos dois cones), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo  $X_r$ , da reta  $r_r$ , e, ainda, das construções que nos permitiram determinar as geratrizes do contorno aparente das perspectivas dos dois cones.

## 1267.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o plano axonométrico é o plano  $YZ$  – nesse sentido, o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $X$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com as partes positivas do eixo  $Y$  e do eixo  $Z$ , ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar o afastamento do ponto  $Q$  (5 cm) sobre o eixo  $Y$  (em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato,  $Q_3$  (a projeção lateral do ponto  $Q$ ) – salienta-se que o ponto  $Q$  tem cota nula, pelo que  $Q_3$  (a sua projeção lateral) se situa no eixo  $Y$ . Note que o eixo  $Y$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

### Resolução:

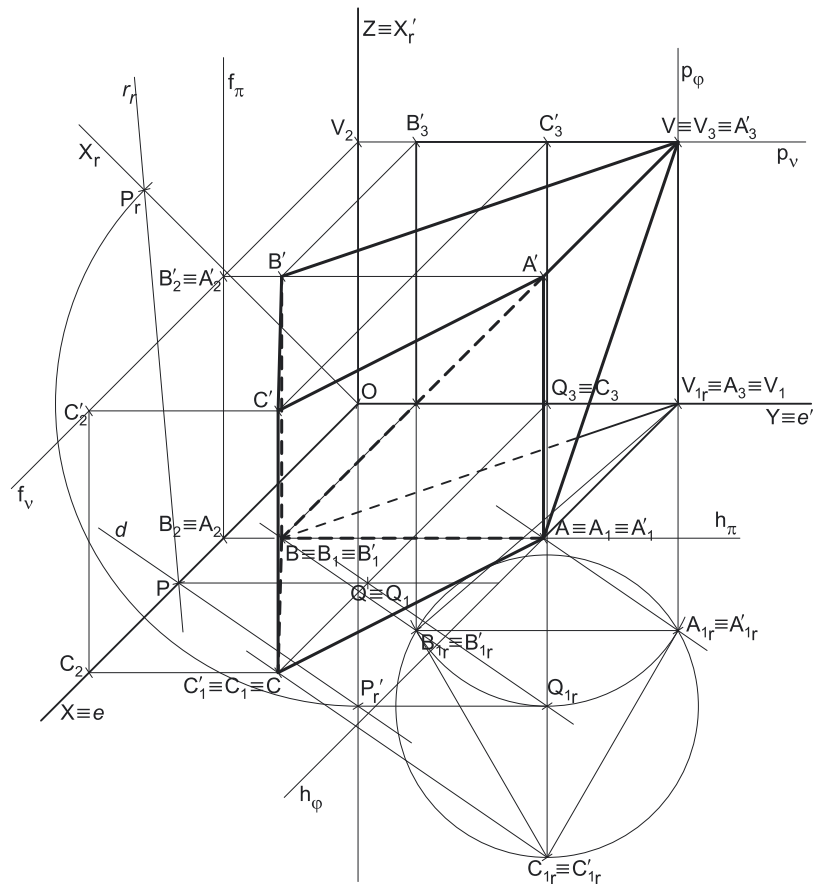
O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (o plano  $XY$ ) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $YZ$ ), pelo que o triângulo  $[ABC]$  **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido no plano coordenado horizontal (o plano  $XY$ ), sabe-se que o triângulo está em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XY$  – o triângulo  $[ABC]$  e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado  $XY$ ) são a mesma figura. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado  $XY$**  (o plano no qual o triângulo está em verdadeira grandeza).

*Rebatimento do plano  $XY$  e construção da projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XY$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $Y$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Z$ , facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv X_r'$ . O eixo  $X_r'$  é o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XY$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$  com a notação  $X_r'$ , optando-se por manter a notação  $X_r$  para o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No plano  $XY$  rebatido, representou-se a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento ( $Q_{1r}$ ) em função da sua abcissa. Assim,  $Q_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto  $Q$  (em rebatimento), situa-se 8 cm (a abcissa do ponto  $Q$ ) para baixo do eixo  $Y$ , na sua linha de chamada (que passa por  $Q_3$  e é perpendicular ao eixo  $Y$ ).

O triângulo inscreve-se numa circunferência com 4 cm de raio – assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao triângulo (em verdadeira grandeza, em rebatimento).

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção do triângulo, inscrito na circunferência e de acordo com os dados do enunciado. Uma vez que a face lateral  $[AA'B'B]$  do prisma é de perfil, sabe-se que o lado  $[AB]$ , do triângulo, é de topo (paralelo ao eixo  $Y$ ). Por outro lado, a aresta lateral  $[CC']$ , do prisma, é a sua aresta de maior abcissa, o que significa que a face lateral  $[AA'B'B]$  (a face oposta à aresta  $[CC']$ ) é a face de menor abcissa do triângulo. Assim, o lado  $[A_1B_1]$  do triângulo em rebatimento tem de ser paralelo ao eixo  $Y$  e é o lado do triângulo que está mais próximo do eixo  $Y$ .

Assim, efetuou-se a construção da **projeção horizontal do triângulo**, em verdadeira grandeza, de acordo com as premissas acima apresentadas, o que nos permitiu determinar os três vértices da figura (em rebatimento) – o triângulo  $[A_1B_1C_1]$  é a projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ .

*Construção da projeção horizontal do sólido, em verdadeira grandeza:*

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do sólido, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ).

Tendo em conta que o triângulo  $[ABC]$  é a face inferior de um prisma triangular regular, sabe-se que as arestas laterais do prisma são necessariamente ortogonais aos planos das bases (ortogonais ao plano  $XY$ ), pelo que são verticais (projetantes horizontais). Assim, as projeções horizontais dos vértices do triângulo  $[A'B'C']$  (a base superior do prisma) estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices da sua base inferior – tem-se, imediatamente,  $A'_{1r} \equiv A_{1r}$ ,  $B'_{1r} \equiv B_{1r}$  e  $C'_{1r} \equiv C_{1r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do prisma, em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido).

A face lateral  $[AA'B'B]$ , do prisma (que já está representada, em projeção horizontal), é a base da pirâmide. Tendo em conta que a face lateral  $[AA'V]$ , da pirâmide, está contida num plano frontal (de frente), sabe-se imediatamente que o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) tem o mesmo afastamento dos pontos  $A$  e  $A'$ . Por outro lado, o ponto  $V$  tem abcissa nula (é dado no enunciado), pelo que o ponto  $V$  é um ponto do plano  $YZ$ . Assim, a projeção horizontal do ponto  $V$  está no eixo  $X$ , o que nos permitiu determinar, de forma imediata,  $V_{1r} - V_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $V$ , em rebatimento), situa-se no eixo  $Y$  (porque tem abcissa nula), na paralela ao eixo  $X_r$  que passa por  $A_1 \equiv A'_1$  (porque a face lateral  $[AA'V]$  está contida num plano frontal). Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal da pirâmide (em rebatimento), que é o triângulo  $[A'_{1r}B'_{1r}V_{1r}]$ .

*Construção da projeção frontal do sólido:*

Para construir a projeção frontal do sólido, há que determinar a cota da base superior do prisma. Uma vez que as faces laterais do prisma são quadrados, sabe-se que a altura do prisma é igual ao comprimento das arestas da base, que estão em verdadeira grandeza no triângulo  $[A_1B_1C_1]$ . Assim, sobre o eixo  $Z$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a cota do plano  $v$  (que é igual ao comprimento de qualquer dos lados do triângulo  $[A_1B_1C_1]$ ) e representou-se o plano  $v$  pelos seus traços –  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – é paralela ao eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

Em seguida, pelas projeções horizontais (em rebatimento) de todos os vértices do sólido conduziram-se as respetivas linhas de chamada, perpendiculares ao eixo  $Y$ , e determinaram-se as projeções laterais de todos os vértices do sólido.  $A'_3$ ,  $B'_3$  e  $C'_3$  são as projeções laterais dos vértices  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  (do triângulo  $[A'B'C']$ ) e situam-se sobre  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral (o triângulo  $[A'B'C']$  está contido no plano  $v$ ).

O enunciado refere, expressamente, que a face lateral  $[AA'V]$ , da pirâmide, está contida num plano horizontal (de nível). Esse plano horizontal (de nível) tem a cota dos pontos  $A$  e  $A'$ , pelo que se trata, precisamente, do plano horizontal (de nível) que contém a base superior do prisma – o plano  $v$ . Assim,  $V_3$  é a projeção lateral do vértice  $V$ , da pirâmide, e situa-se igualmente sobre  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

Este procedimento permitiu-nos concluir a representação do sólido dado em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ) e lateral.

Para determinar as perspectivas do triângulo  $[ABC]$  e do sólido é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $X$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  para o plano axonométrico (o plano  $YZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $X$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $X$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $X_r'$ , a abscissa do ponto  $Q$ , a partir de  $Q_{1r}$ , com uma paralela ao eixo  $Y$ . Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $X_r'$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $X$  com a abscissa do ponto  $Q$  ( $OP_r'$  é a abscissa do ponto  $Q$ , no eixo  $X_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XY$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **abscissa** do ponto  $P$  para o eixo  $X_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $X$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ ). Assim,  $OP_r$  é a abscissa do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $50^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da abscissa do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XY$  e determinação das perspectivas do ponto  $A'$ :*

As projeções do ponto  $A'$  (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $A'$  – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $A'_1$ , outro extremo em  $A'_3$  e um vértice no eixo  $Y$ . **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto  $A'$  que está contida no plano  $XY$  é o segmento de reta perpendicular ao eixo  $Y$  e que tem um extremo em  $A'_1$  e o outro extremo no eixo  $Y$ . **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto  $A'$  é o segmento que é perpendicular ao eixo  $Y$  e que tem um extremo em  $A'_{1r}$  e o outro extremo no eixo  $Y$ . **Em perspectiva**, essa parte da linha de chamada do ponto  $A'$  (a parte que se situa no plano  $XY$ ) é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$  e tem um extremo no eixo  $Y$ .

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspectiva** da parte da linha de chamada do ponto  $A'$  que se situa no plano  $XY$ . Em seguida, por  $A'_{1r}$  conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta intersesta a perspectiva da linha de chamada do ponto  $A'$  (anteriormente desenhada) é  $A'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A'$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XY$ .

Em seguida, por  $A'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto  $A'$ , que é vertical (paralela ao eixo  $Z$ ). Depois, por  $A'_3$  (a projeção lateral do ponto  $A'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral do ponto  $A'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $X$ ) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A'$ .

Salienta-se que não se determinou a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A'$  ( $A'_2$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica. No entanto, caso se tivesse determinado  $A'_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $A'$ ), esta estaria necessariamente sobre  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

*Determinação das perspectivas dos pontos  $A, B, C, B'$  e  $C'$ :*

As perspectivas dos pontos  $A, B, C, B'$  e  $C'$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto  $A'$ . Salienta-se que os pontos  $A, B$  e  $C$  têm cota nula, pelo que os três pontos se situam no *plano coordenado  $XY$*  – nesse sentido, tem-se imediatamente  $A_1 \equiv A$  (sendo  $A$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ ),  $B_1 \equiv B$  (sendo  $B$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ ),  $C_1 \equiv C$  (sendo  $C$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$ ).

Salienta-se que não se determinaram as perspectivas das projeções frontais dos pontos  $A, B, C, B'$  e  $C'$  ( $A_2, B_2, C_2, B'_2$  e  $C'_2$ , respetivamente), por estas não serem determinantes para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

No entanto, caso se tivessem determinado  $B'_2$  e  $C'_2$  (as perspectivas das projeções frontais dos pontos  $B'$  e  $C'$ , respetivamente), estas estariam necessariamente sobre  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Já caso se tivessem determinado  $A_2, B_2$  e  $C_2$  (as perspectivas das projeções frontais dos pontos  $A, B$  e  $C$ , respetivamente), estas estariam necessariamente sobre o eixo  $X$ , pois aqueles pontos têm cota nula.

Por outro lado, foi possível determinar, de forma imediata, a perspectiva do ponto  $V$  (que é um ponto com abscissa nula). A projeção horizontal do ponto  $V$  ( $V_1$ ) situa-se no eixo  $Y$ , que é a charneira do rebatimento, pelo que  $V_1$  é um ponto fixo (roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente,  $V_1 \equiv V_{1r}$ .  $V_2$  (a projeção frontal do ponto  $V$ ) situa-se no eixo  $Z$  e, atendendo a que o ponto  $V$  é um ponto do *plano coordenado  $YZ$* , tem-se, imediatamente,  $V \equiv V_3$ .

*Determinação da perspectiva do sólido:*

Por fim, a partir das perspectivas dos sete vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspectiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as arestas visíveis e as arestas invisíveis.

Salienta-se que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um prisma triangular regular e uma pirâmide quadrangular oblíqua), as faces do objeto que resultam de duas faces complanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso do segmento de reta  $[A'B']$ . De facto, o segmento de reta  $[A'B']$  **não é** uma aresta do sólido, porque não resulta da interseção entre duas faces distintas (aquele segmento é, apenas, uma linha auxiliar que está contida na face superior do objeto e, por isso, não é uma aresta do sólido).

Sublinha-se que, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente «**um sólido composto**»), o segmento de reta  $[A'B']$  seriam uma aresta comum aos dois sólidos.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do sólido (com as respetivas invisibilidades devidamente assinaladas) representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano que contém a face superior do sólido), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da construção da projeção horizontal do sólido, em rebatimento, do eixo  $X_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$  e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano  $XY$ .



## 1268.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $X$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $XZ$  – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz ângulos de  $135^\circ$  com as partes positivas dos outros dois eixos (o eixo  $X$  e o eixo  $Z$ ).

Tendo em conta que as coordenadas do ponto  $A$  são  $(0; 0; 0)$ , o ponto  $A$  é o próprio ponto  $O$  (a origem do referencial), facto que se assinalou imediatamente.

**Resolução:**

Uma vez que é referido, no texto que a aresta  $[AB]$ , do sólido, está contida no eixo  $X$ , é possível, de forma imediata, medir os 8 cm (o comprimento da aresta  $[AB]$ ), em verdadeira grandeza (no eixo  $X$ , a partir do ponto  $A$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu determinar  $B_0$  (a referência da abscissa do ponto  $B$ ). Uma vez que o ponto  $B$  é um ponto do eixo  $X$  (é dado, no enunciado, que a aresta  $[AB]$  está contida no eixo  $X$ ), determinaram-se as projeções do ponto  $B$  de forma imediata – tem-se, imediatamente,  $B_2 \equiv B_1 \equiv B \equiv B_0$ .

São dadas duas vistas do objeto (as suas projeções horizontal e frontal) e a aresta  $[AB]$  está contida no eixo  $X$ , pelo que é possível depreender que as restantes arestas do objeto são paralelas aos eixos coordenados, à exceção das arestas que limitam a «rampa». Tendo em conta que o plano axonométrico é o plano coordenado frontal (o plano  $XZ$ ), a projeção frontal está em verdadeira grandeza. Assim, a partir do ponto  $A$  e do ponto  $B$ , e atendendo a que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  estão em verdadeira grandeza, reproduziu-se a projeção frontal do sólido, em verdadeira grandeza, a partir da projeção frontal fornecida no enunciado e das medidas (cotas) ali apresentadas.

Em seguida, há que representar a outra projeção do objeto (a projeção horizontal do objeto), de forma a ser possível a determinação da sua perspectiva. Acontece que a projeção horizontal do objeto está contida no plano  $XY$ , que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), pelo que a projeção horizontal do objeto não está em verdadeira grandeza, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser o rebatimento do plano  $XY$ .

*Rebatimento do plano  $XY$  e construção da projeção horizontal do sólido, em rebatimento:*

Ao rebater o plano  $XY$  sobre o plano axonométrico, a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) é o eixo  $X$ , que se identificou imediatamente. O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Z$ , facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XY$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$  com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $XY$  rebatido, reproduziu-se a projeção horizontal do objeto, em rebatimento, a partir da projeção horizontal fornecida no enunciado e das medidas (cotas) ali apresentadas. Para determinar a perspectiva do objeto é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

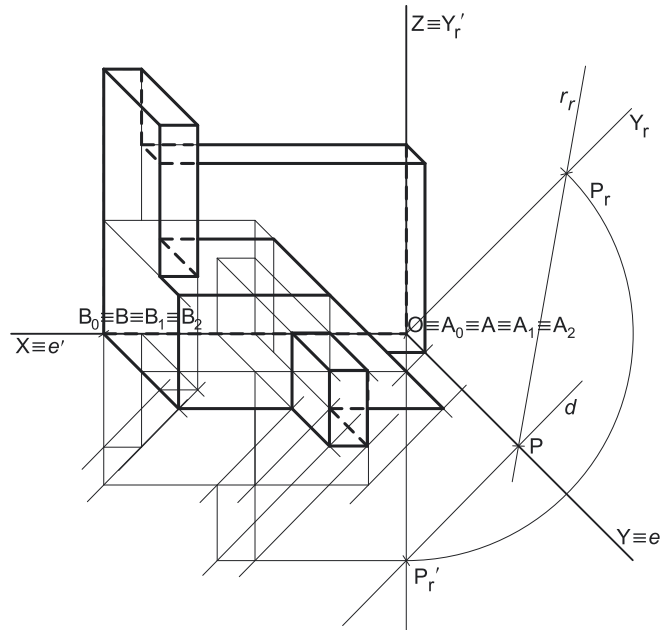
*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o plano axonométrico (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ ).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Y_r'$ , o afastamento dos pontos de maior afastamento do objeto, com uma paralela ao eixo  $X$ . Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $Y_r'$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Y$  com o afastamento dos pontos de maior afastamento do objeto ( $OP_r'$  é o afastamento do ponto  $P$ , no eixo  $Y_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XY$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto  $P$  para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Y$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento do ponto  $P$ .



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação da perspectiva da projeção horizontal do objeto:*

Todas as linhas de chamada da projeção horizontal do sólido (em rebatimento) que são paralelas ao eixo **Y<sub>r</sub>'**, em perspectiva, são necessariamente paralelas à perspectiva do eixo **Y**. Assim, a partir dos seus extremos no eixo **X**, desenharam-se as retas suporte dessas linhas de chamada, paralelamente à perspectiva do eixo **Y**.

Em seguida, pelos seus extremos de maior afastamento, em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**), conduziram-se retas paralelas à direção de afinidade **d**, o que nos permitiu determinar as perspectivas daqueles pontos, sobre as retas suporte das linhas de chamada a que pertencem. Este procedimento permitiu-nos desenhar a perspectiva da projeção horizontal do objeto, com a deformação inerente à perspectiva.

*Determinação da perspectiva do objeto:*

Para determinar a perspectiva de um dado vértice do objeto, conduziu-se, pela perspectiva da sua projeção horizontal, a perspectiva da sua reta projetante horizontal (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**). Em seguida, pela projeção frontal desse mesmo vértice, conduziu-se a perspectiva da sua reta projetante frontal (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) – o ponto de concorrência das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita desse vértice.

O procedimento exposto repetiu-se para cada um dos vértices do sólido, o que nos permitiu determinar as suas perspectivas. Por fim, a partir das perspectivas da totalidade dos vértices do sólido, desenhou-se a sua perspectiva, atendendo às invisibilidades existentes. Note que apenas existem arestas a separar faces distintas – tendo em conta que uma aresta é o segmento de reta segundo o qual se interseam duas faces distintas (que estão contidas em planos distintos), na superfície de uma única face, porque está contida num único plano, não existe qualquer aresta «no meio» da face.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do objeto representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção horizontal do objeto, em rebatimento, do eixo **Y<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d** e, ainda dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XY**.

## 1269.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 130° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 140° (que é outro ângulo obtuso).

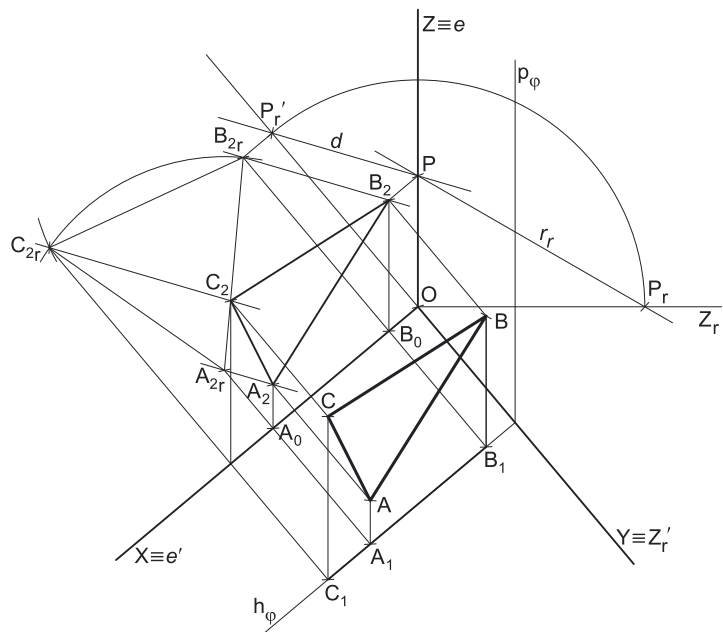
Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, as abscissas dos pontos **A** e **B** (5 cm e 1 cm, respetivamente), sobre o eixo **X** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), bem como o afastamento daqueles pontos (4 cm) sobre o eixo **Y** (também a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato, **A<sub>1</sub>** e **B<sub>1</sub>** (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), bem como **A<sub>0</sub>** e **B<sub>0</sub>** (as respetivas referências das abscissas, no eixo **X**). Note que o eixo **X** e o eixo **Y** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém o triângulo), pelos seus traços. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**). Nesse sentido, desenhou-se **h<sub>φ</sub>**, o traço horizontal do plano  $\phi$  – **h<sub>φ</sub>** passa por **A<sub>1</sub>** e por **B<sub>1</sub>**, pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. Note que **h<sub>φ</sub>** é uma reta fronto-horizontal do plano, com cota nula.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço lateral do plano  $\phi$  (**p<sub>φ</sub>**), que é paralela à perspectiva do eixo **Z** e é concorrente com **h<sub>φ</sub>** no eixo **Y** – **p<sub>φ</sub>** é uma reta vertical do plano  $\phi$  com abscissa nula. Saliencia-se que o plano  $\phi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral (**p<sub>φ</sub>**).

**Resolução:**

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (um plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XY**), pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao *plano coordenado frontal* (o plano **XZ**), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* – o triângulo **[ABC]** e a sua projeção frontal (a sua projeção no *plano coordenado XZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

*Rebatimento do plano XZ e construção da projeção frontal do triângulo [ABC], em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano **XZ** para o *plano axonométrico*, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é o eixo **X**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>'**) fica coincidente com o eixo **Y**, facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv Z_r'$ . O eixo **Z<sub>r</sub>'** é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **XZ**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XZ** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ** com a notação **Z<sub>r</sub>'**, optando-se por manter a notação **Z<sub>r</sub>** para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano **XZ** rebatido, representaram-se as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, em rebatimento, em função das respetivas cotas. Assim, **A<sub>2r</sub>** é a projeção frontal do ponto **A** (em rebatimento) e situa-se 2 cm (a cota do ponto **A**) para cima do eixo **X**, na sua linha de chamada (que passa por **A<sub>1</sub>** e é perpendicular ao eixo **X**). Pelo seu lado, **B<sub>2r</sub>** é a projeção frontal do ponto **B** (em rebatimento) e situa-se 6 cm (a cota do ponto **B**) para cima do eixo **X**, na sua linha de chamada (que passa por **B<sub>1</sub>** e é perpendicular ao eixo **X**).

A partir de **A<sub>2r</sub>** e **B<sub>2r</sub>**, foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do triângulo**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano **XZ**), o que nos permitiu determinar **C<sub>2r</sub>** (a projeção frontal do terceiro vértice do triângulo) – o triângulo **[A<sub>2r</sub>B<sub>2r</sub>C<sub>2r</sub>]** é a projeção frontal do triângulo **[ABC]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano **XZ**. Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do *1.<sup>a</sup> Triedro*, como o enunciado pede expressamente.

Em seguida, pela projeção frontal (em rebatimento) do ponto **C** (**C<sub>2r</sub>**), conduziu-se a respetiva linha de chamada (perpendicular ao eixo **X**) e determinou-se a projeção horizontal do ponto **C** (**C<sub>1</sub>**), sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  (**h<sub>0</sub>**), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Para determinar a perspetiva do triângulo **[ABC]** é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z<sub>r</sub>** está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo **Z**).

Em seguida, transportou-se, para o eixo **Z<sub>r</sub>'**, a cota do ponto **B**, a partir de **B<sub>2r</sub>**, com uma paralela ao eixo **X**. Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto **P<sub>r</sub>'**, no eixo **Z<sub>r</sub>'** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do ponto **B** (**OP<sub>r</sub>'** é a cota do ponto **B**, no eixo **Z<sub>r</sub>'**, pelo rebatimento do plano **XZ**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **cota** do ponto **P** (que é 6 cm) para o eixo **Z<sub>r</sub>**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Z**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspetiva da cota do ponto **P** –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da cota do ponto **P**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>'** e pela perspetiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação das perspetivas do ponto A:*

As projeções do ponto **A** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **A** – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **C<sub>1</sub>**, outro extremo em **A<sub>2</sub>** e um vértice no eixo **X** (em **A<sub>0</sub>**). A parte da linha de chamada do ponto **A** que está contida no plano **XY** é o segmento **[A<sub>0</sub>A<sub>1</sub>]** – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento **[A<sub>0</sub>A<sub>1</sub>]**. A perspetiva desse segmento tem um extremo em **A<sub>0</sub>** e é paralela à perspetiva do eixo **Y**.

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspetiva do segmento de reta **[A<sub>0</sub>A<sub>1</sub>]**. Em seguida, por **A<sub>1</sub>**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta intersesta a perspetiva da linha de chamada do ponto **A** (a reta suporte do segmento **[A<sub>0</sub>A<sub>1</sub>]**) é **A<sub>1</sub>** (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XY**.

Em seguida, por **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto **A**, que é vertical (paralela à perspetiva do eixo **Z**). Depois, por **A<sub>2</sub>** (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**), conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal do ponto **A** (que é paralela ao eixo **Y**) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das perspectivas dos pontos B e C:

As perspectivas dos pontos B e C determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto A.

## Determinação das perspectivas do triângulo:

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo [ABC] é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo [A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>] é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O segmento de reta [C<sub>1</sub>A<sub>1</sub>] é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo (que se situa sobre h<sub>π</sub>, pois o plano φ é um plano projetante horizontal).

Note que não se determinaram as perspectivas das projeções laterais dos vértices do triângulo (nem da própria figura), pois, na realidade, estas não são fundamentais para a consecução do objetivo do exercício (a determinação da perspectiva da figura). Salienta-se que a omissão de algumas notações a que se tem recorrido regularmente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o triângulo, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X, eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano φ (o plano frontal que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção frontal do triângulo, em rebatimento, do eixo Z', da reta r<sub>r</sub>, da direção de afinidade d e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano XZ.

## 1270.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **plano-métrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano XY – assim, o eixo X e o eixo Y fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo Z (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo X um ângulo de 155° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo Y, um ângulo de 115° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, a abscissa do ponto Q (3 cm), sobre o eixo X (a partir do ponto O e no sentido positivo do eixo), bem como o afastamento daquele ponto (5 cm) sobre o eixo Y (também a partir do ponto O e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato, Q<sub>1</sub> (a projeção horizontal do ponto Q). Note que o eixo X e o eixo Y estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

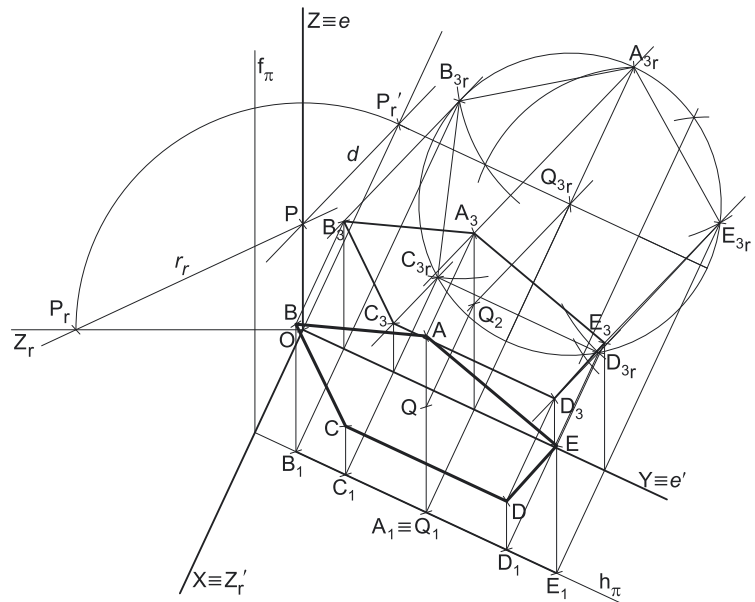
Em seguida, representou-se o plano π (o plano de perfil que contém o pentágono), pelos seus traços. O plano π é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado XY) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado XY, sobre o seu traço horizontal (h<sub>π</sub>). Nesse sentido, desenhou-se h<sub>π</sub>, o traço horizontal do plano π – h<sub>π</sub> passa por Q<sub>1</sub>, pois o plano π é um plano projetante horizontal. Note que h<sub>π</sub> é uma reta de topo do plano, com cota nula.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço frontal do plano π (f<sub>π</sub>), que é paralela à perspectiva do eixo Z e é concorrente com h<sub>π</sub> no eixo X – f<sub>π</sub> é uma reta vertical do plano π com afastamento nulo. Salienta-se que o plano π é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado XZ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado XZ, sobre o seu traço frontal (f<sub>π</sub>).

### Resolução:

O plano que contém o pentágono [ABCDE] (um plano de perfil) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano XY), pelo que o pentágono [ABCDE] **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do pentágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o pentágono está contido num plano de perfil, que é paralelo ao plano coordenado de perfil (o plano YZ), sabe-se que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado YZ – o pentágono [ABCDE] e a sua projeção lateral (a sua projeção no plano coordenado YZ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o pentágono se projeta em verdadeira grandeza).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Rebatimento do plano YZ e construção da projeção lateral do pentágono [ABCDE], em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano YZ para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo Y. O eixo Z rebatido (o eixo  $Z_r'$ ) fica coincidente com o eixo X, facto que se assinalou devidamente –  $X \equiv Z_r'$ . O eixo  $Z_r'$  é o eixo Z rebatido pelo rebatimento do plano YZ.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano YZ com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo Z. De forma semelhante, identificou-se o eixo Z rebatido pelo rebatimento do plano coordenado YZ com a notação  $Z_r'$ , optando-se por manter a notação  $Z_r$  para o eixo Z rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano YZ rebatido, representou-se a projeção lateral do ponto Q, em rebatimento, em função da sua cota. Assim,  $Q_3$  é a projeção lateral do ponto Q (em rebatimento) e situa-se 6 cm (a cota do ponto Q) para cima do eixo Y, na sua linha de chamada (que passa por  $Q_1$  e é perpendicular ao eixo Y).

Com o compasso, fazendo centro em  $Q_3$  (a projeção lateral do ponto Q, em rebatimento) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono (em verdadeira grandeza, em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção do pentágono, inscrito na circunferência (de acordo com os dados). Tendo em conta que o lado inferior do polígono é de topo, sabe-se que esse lado, no espaço, é paralelo ao eixo Y. Assim, em rebatimento, o lado inferior do pentágono (o lado  $[C_3, D_3]$ ) é necessariamente paralelo ao eixo  $Y_r'$ . Salienta-se que o enunciado é omissivo em relação à posição dos vértices do polígono, pelo que estes foram identificados de forma arbitrária, mas sequencial.

Assim, efetuou-se a construção da **projeção lateral do pentágono**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar os cinco vértices do pentágono (em rebatimento) – o pentágono  $[A_3, B_3, C_3, D_3, E_3]$  é a projeção lateral do pentágono [ABCDE], em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano YZ

Em seguida, pelas projeções laterais (em rebatimento) dos cinco vértices do pentágono, conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo Y) e determinaram-se as projeções horizontais daqueles pontos ( $A_1, B_1, C_1, D_1$  e  $E_1$ ), sobre o traço horizontal do plano  $\pi (h_\pi)$ , pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal. Sublinha-se que o ponto A e o ponto Q se situam na mesma reta projetante horizontal, pelo que têm as suas projeções horizontais coincidentes – tem-se, imediatamente,  $A_1 \equiv Q_1$ .

Para determinar a perspetiva do pentágono [ABCDE] é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado YZ (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano YZ com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo Z, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo Z para o plano axonométrico (o plano XY). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo Z. O eixo Z rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo Z. O ponto O é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto O) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo Z).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Z_r'$ , a cota do ponto Q, a partir de  $Q_3$ , com uma paralela ao eixo Y. Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $Z_r'$  – o ponto P é um ponto do eixo Z com a cota do ponto Q ( $OP_r'$  é a cota do ponto Q, no eixo  $Z_r'$ , pelo rebatimento do plano XZ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto O e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a cota do ponto P (que é 6 cm) para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto P do eixo Z, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo Z). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto P, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo Z. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $65^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto P, em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva da cota do ponto P –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da cota do ponto P.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano YZ com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto P (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano YZ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado YZ e determinação das perspetivas do ponto Q:*

As projeções do ponto Q (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto Q – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $Q_1$ , outro extremo em  $Q_3$  e um vértice no eixo Y. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto Q que está contida no plano YZ é o segmento de reta perpendicular ao eixo Y e que tem um extremo em  $Q_3$  e o outro extremo no eixo Y. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto Q é o segmento que é perpendicular ao eixo Y e que tem um extremo em  $Q_3$  e o outro extremo no eixo Y. **Em perspetiva**, essa parte da linha de chamada do ponto Q (a parte que se situa no plano YZ) é necessariamente paralela à perspetiva do eixo Z e tem um extremo no eixo Y.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte da **perspetiva** da parte da linha de chamada do ponto Q que se situa no plano YZ. Em seguida, por  $Q_3$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta intersesta a perspetiva da linha de chamada do ponto Q (anteriormente desenhada) é  $Q_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto Q). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano YZ.

Em seguida, por  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto Q) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto Q, que é vertical (paralela à perspetiva do eixo Z). Depois, por  $Q_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto Q), conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto Q (que é paralela ao eixo X) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto Q.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação das perspectivas dos pontos A, B, C, D e E (os cinco vértices do pentágono):*

As perspectivas dos pontos **A, B, C, D e E** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto **Q**.

*Determinação das perspectivas do pentágono:*

Por fim, desenharam-se as perspectivas do pentágono. O pentágono **[ABCDE]** é a perspectiva propriamente dita do pentágono. O pentágono **[A<sub>3</sub>B<sub>3</sub>C<sub>3</sub>D<sub>3</sub>E<sub>3</sub>]** é a perspectiva da projeção lateral do pentágono. O segmento de reta **[B<sub>1</sub>E<sub>1</sub>]** é a perspectiva da projeção horizontal do pentágono (que se situa sobre **h<sub>π</sub>**, pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal).

Note que não se determinaram as perspectivas das projeções frontais dos vértices do pentágono (nem da própria figura), pois, na realidade, estas não são fundamentais para a consecução do objetivo do exercício (a determinação da perspectiva da figura). Salienta-se que a omissão de algumas notações a que se tem recorrido regularmente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o pentágono, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do pentágono representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção lateral do pentágono, em rebatimento, do eixo **Z'**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **Z**.

## 1271.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 155° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 115° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, a abscissa do ponto **A** (4 cm), sobre o eixo **X** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), bem como o afastamento daquele ponto (4 cm) sobre o eixo **Y** (também a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato, **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**), bem como **A<sub>0</sub>** (a referência da abscissa do ponto **A**). Note que o eixo **X** e o eixo **Y** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

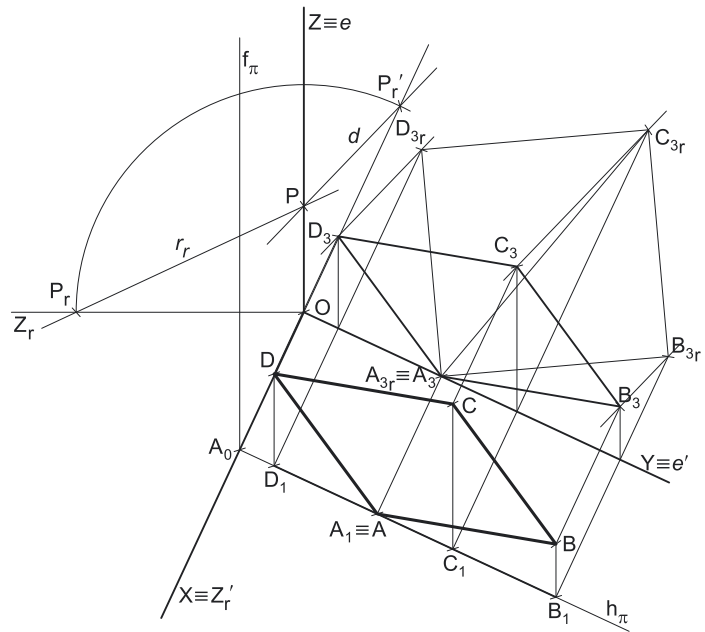
Salienta-se que o ponto **A** tem cota nula (é um ponto do *plano coordenado XY*), pelo que **A<sub>3</sub>** (a sua projeção lateral) se situa necessariamente no eixo **X**. Por outro lado, e ainda porque o ponto **A** é um ponto do *plano coordenado XY*, o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, pelo que se tem, imediatamente, **A**  $\equiv$  **A<sub>1</sub>** (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**).

Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém o quadrado), pelos seus traços. O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>π</sub>**). Nesse sentido, desenhou-se **h<sub>π</sub>**, o traço horizontal do plano  $\pi$  – **h<sub>π</sub>** passa por **A<sub>1</sub>**, pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal. Note que **h<sub>π</sub>** é uma reta de topo do plano, com cota nula.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço frontal do plano  $\pi$  (**f<sub>π</sub>**), que é paralela à perspectiva do eixo **Z** e é concorrente com **h<sub>π</sub>** no eixo **X** – **f<sub>π</sub>** é uma reta vertical do plano  $\pi$  com afastamento nulo. Salienta-se que o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal (**f<sub>π</sub>**).

**Resolução:**

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (um plano de perfil) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XY**), pelo que o quadrado **[ABCD]** **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano de perfil, que é paralelo ao *plano coordenado de perfil* (o plano **YZ**), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado YZ* – o quadrado **[ABCD]** e a sua projeção lateral (a sua projeção no *plano coordenado YZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

*Rebatimento do plano YZ e construção da projeção lateral do quadrado [ABCD], em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano **YZ** para o *plano axonométrico*, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo **Y**. O eixo **Z** rebatido (o eixo  $Z_r'$ ) fica coincidente com o eixo **X**, facto que se assinalou devidamente –  $X \equiv Z_r'$ . O eixo  $Z_r'$  é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **YZ**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **YZ** com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **YZ** com a notação  $Z_r'$ , optando-se por manter a notação  $Z_r$  para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano **YZ** rebatido, representou-se a projeção lateral do ponto **A**, em rebatimento. Uma vez que a projeção lateral do ponto **A** ( $A_3$ ) se situa na charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), trata-se de um ponto fixo (roda sobre si própria), pelo que se tem, imediatamente,  $A_{3r} \equiv A_3$ .

Uma vez que o quadrado está em verdadeira grandeza (porque está no plano **YZ** rebatido), foi possível, em verdadeira grandeza, medir o ângulo de  $30^\circ$  que o lado **[AB]** faz com o plano **XY**, que é o ângulo que o lado **[AB]** faz com o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ). Esse ângulo está, em verdadeira grandeza, no ângulo que o segmento  $[A_3, B_{3r}]$  (a projeção lateral do lado **[AB]**, em rebatimento) faz com o eixo **Y**. Assim, a partir de  $A_3$ , desenhou-se a reta suporte da projeção lateral do lado **[AB]** (em rebatimento), com o ângulo referido. Em seguida, sobre essa reta suporte mediram-se 6 cm (o comprimento do lado do quadrado) e determinou-se  $B_{3r}$  (a projeção lateral do ponto **B**, em rebatimento).

Note que das duas hipóteses de medir o ângulo de  $30^\circ$ , a partir de  $A_{3r}$  (a projeção lateral do ponto **A**, em rebatimento), apenas a que a resolução apresenta consegue garantir que o ponto **B** tem cota e afastamento superiores ao ponto **A**, como o enunciado refere expressamente.

A partir de  $A_{3r}$  e  $B_{3r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano **YZ**), o que nos permitiu determinar  $C_{3r}$  e  $D_{3r}$  (as projeções laterais dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado  $[A_{3r}, B_{3r}, C_{3r}, D_{3r}]$  é a projeção lateral do quadrado **[ABCD]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano **YZ**. Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do  $1^\circ$  *Triedro*, como o enunciado pede expressamente.

Em seguida, pelas projeções laterais (em rebatimento) dos pontos **B**, **C** e **D** ( $B_{3r}$ ,  $C_{3r}$  e  $D_{3r}$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo **Y**) e determinaram-se as projeções horizontais daqueles pontos ( $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$ ), sobre o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.

Para determinar a perspetiva do quadrado **[ABCD]** é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **YZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo **Z**).

Em seguida, marcou-se, no eixo  $Z_r'$ , um ponto  $P_r'$  qualquer – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com uma cota qualquer ( $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto **P**, no eixo  $Z_r'$ , pelo rebatimento do plano **YZ**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **cota** do ponto **P** para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Z**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $65^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspetiva da cota do ponto **P** –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da cota do ponto **P**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto **P** (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **YZ**).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado YZ e determinação das perspetivas do ponto B:*

As projeções do ponto **B** (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **B** – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $B_1$ , outro extremo em  $B_3$  e um vértice no eixo **Y**. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **B** que está contida no plano **YZ** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **Y** e que tem um extremo em  $B_3$  e o outro extremo no eixo **Y**. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **B** é o segmento que é perpendicular ao eixo **Y** e que tem um extremo em  $B_{3r}$  e o outro extremo no eixo **Y**. **Em perspetiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **B** (a parte que se situa no plano **YZ**) é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Z** e tem um extremo no eixo **Y**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte da perspectiva da parte da linha de chamada do ponto **B** que se situa no plano **YZ**. Em seguida, por **B<sub>3</sub>**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a direção de afinidade) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto **B** (anteriormente desenhada) é **B<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **B**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **YZ**.

Em seguida, por **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto **B**, que é vertical (paralela à perspectiva do eixo **Z**). Depois, por **B<sub>3</sub>** (a perspectiva da projeção lateral do ponto **B**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral do ponto **B** (que é paralela ao eixo **X**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **B**.

*Determinação das perspectivas dos pontos C e D (as restantes vértices do quadrado):*

As perspectivas dos pontos **C** e **D** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto **B**.

*Determinação das perspectivas do quadrado:*

Por fim, desenharam-se as perspectivas do quadrado. O quadrilátero **[ABCD]** é a perspectiva propriamente dita do quadrado. O quadrilátero **[A<sub>3</sub>B<sub>3</sub>C<sub>3</sub>D<sub>3</sub>]** é a perspectiva da projeção lateral do quadrado. O segmento de reta **[B<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** é a perspectiva da projeção horizontal do quadrado (que se situa sobre **h<sub>π</sub>**, pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal).

Note que não se determinaram as perspectivas das projeções frontais dos vértices do pentágono (nem da própria figura), pois, na realidade, estas não são fundamentais para a consecução do objetivo do exercício (a determinação da perspectiva da figura). Salienta-se que a omissão de algumas notações a que se tem recorrido regularmente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o quadrado, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do quadrado representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção lateral do quadrado, em rebatimento, do eixo **Z<sub>r</sub>**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **YZ**.

## 1272.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 140° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 130° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, a abscissa do ponto **A** (7 cm), sobre o eixo **X** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), bem como o afastamento daquele ponto (1 cm) sobre o eixo **Y** (também a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato, **A<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **A**), bem como **A<sub>0</sub>** (a referência da abscissa do ponto **A**). Note que o eixo **X** e o eixo **Y** estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

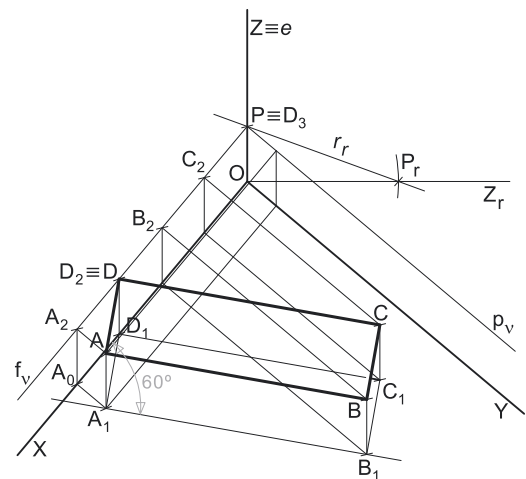
### Resolução:

O retângulo está contido num plano  $v$ , horizontal (de nível), que é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano **XY**), pelo que o retângulo **se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico** (a perspectiva do retângulo não apresenta qualquer deformação) – o retângulo, a sua perspectiva e a sua projeção horizontal são figuras geometricamente iguais.

Assim, a partir de **A<sub>1</sub>** (A projeção horizontal do ponto **A**) mediu-se, em verdadeira grandeza, o ângulo de 60° (de abertura para a direita) que o lado **[AB]** faz com o plano **XZ**, que é o ângulo que o lado **[AB]** faz com o traço frontal do plano  $v$  (**f<sub>v</sub>**). Esse ângulo está, em verdadeira grandeza, no ângulo que a projeção horizontal do lado **[AB]** faz com o eixo **X**. Assim, a partir de **A<sub>1</sub>** desenhou-se a reta suporte da projeção horizontal do lado **[AB]**, com o ângulo referido. Em seguida, sobre essa reta suporte mediram-se 7 cm (o comprimento do lado **[AB]**) e determinou-se **B<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **B**).

Em seguida, a partir de **A<sub>1</sub>** e **B<sub>1</sub>**, foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do retângulo**, em verdadeira grandeza, de acordo com os dados. O vértice **D**, do retângulo, tem afastamento nulo, pelo eu a sua projeção horizontal (**D<sub>1</sub>**) se situa necessariamente no eixo **X**. Este raciocínio permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do retângulo **[ABCD]** e, dessa forma, determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices da figura – os vértices **C** e **D**.

Para determinar a perspectiva do retângulo **[ABCD]** é necessário determinar a perspectiva da cota do plano horizontal (de nível) que contém o retângulo.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A **cota** do plano horizontal (de nível) que contém o retângulo, porque se mede no eixo **Z**, está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, o processo mais simples consiste em recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o plano *axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo **Z**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), representou-se a **cota** do plano horizontal (de nível) que contém o retângulo (que é 4 cm – a cota do ponto **A**), em verdadeira grandeza, determinando-se um ponto **P<sub>r</sub>**. O ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do plano horizontal (de nível) que contém o retângulo (**OP<sub>r</sub>** = 4 cm e é a cota do plano horizontal, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 70°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **P**, sobre a perspectiva do eixo **Z** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do plano horizontal (de nível) que contém o retângulo (**OP** é a perspectiva da cota do plano horizontal).

#### Representação do plano horizontal (de nível) que contém o retângulo:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva do ponto **P**, que é o ponto do eixo **Z** que tem 4 cm de cota. O plano horizontal (de nível)  $\varphi$  que contém o retângulo, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 4 cm de cota, contém necessariamente o ponto **P**.

Assim, pela perspectiva do ponto **P** conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  – **f<sub>v</sub>** (a perspectiva do traço horizontal do plano  $v$ ) e **p<sub>v</sub>** (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ).

Note que **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado, **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal (**f<sub>v</sub>**). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral (**p<sub>v</sub>**).

#### Determinação da perspectiva do ponto A:

A partir das perspectivas da abcissa e da cota do ponto **A**, determinou-se a perspectiva da sua projeção frontal (**A<sub>2</sub>**), recorrendo ao paralelogramo de que **A<sub>2</sub>** e **O** são dois vértices opostos. **A<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A** e situa-se sobre a perspectiva de **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Note que o traço da linha de chamada do ponto **A** que se situa no plano **XZ** tem um extremo em **A<sub>0</sub>** e o outro extremo em **A<sub>2</sub>** (que se situa sobre o traço frontal do plano  $v$ ) – nesse sentido, salienta-se que o segmento **[A<sub>0</sub>A<sub>2</sub>]** é necessariamente paralelo à perspectiva do eixo **Z**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**) e pela perspectiva de **A<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) – as duas retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**.

#### Determinação das perspectivas dos pontos B, C e D:

As perspectivas dos pontos **B**, **C** e **D** determinaram-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto **A**. Atendendo a que os três pontos pertencem ao plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, as perspectivas das respetivas projeções frontais (**B<sub>2</sub>**, **C<sub>2</sub>** e **D<sub>2</sub>**) situam-se sobre a perspectiva de **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano  $v$ ).

Salienta-se que o ponto **D** tem afastamento nulo (é um ponto do plano coordenado **XZ**), pelo que **A<sub>3</sub>** (a sua projeção lateral) se situa necessariamente no eixo **Z**. Por outro lado, e ainda porque o ponto **D** é um ponto do plano coordenado **XZ**, o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, pelo que se tem, imediatamente, **D ≡ D<sub>2</sub>** (sendo **D** a perspectiva propriamente dita do ponto **D**).

Note que não se determinaram as perspectivas das projeções laterais dos vértices **A**, **B** e **C** do retângulo, por não serem absolutamente necessárias à resolução do exercício (a determinação da perspectiva do retângulo). No entanto, caso se tivessem determinado as perspectivas das projeções laterais dos três pontos, estas estariam necessariamente sobre a perspectiva do traço lateral do plano  $v$  (**p<sub>v</sub>**), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

#### Determinação da perspectiva do retângulo:

Atendendo a que o plano  $v$  (o plano que contém o retângulo) é paralelo ao plano de projeção (o plano *axonométrico*), e como atrás se referiu, o retângulo projeta-se em verdadeira grandeza no plano *axonométrico* (o plano **XY**). Assim, a partir das perspectivas de todos os seus vértices, desenhou-se o retângulo **[ABCD]**, que é a perspectiva propriamente dita do retângulo **[ABCDEF]**

O retângulo **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>]** é a perspectiva da projeção horizontal do retângulo. O segmento de reta **[A<sub>2</sub>C<sub>2</sub>]** é a perspectiva da projeção frontal do retângulo, que se reduz a um segmento de reta sobre **f<sub>v</sub>**, (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o retângulo, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do retângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo **Z<sub>r</sub>** e da reta **r<sub>r</sub>**.

## 1273.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de  $120^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de  $150^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, a abscissa do ponto **Q** (4 cm), sobre o eixo **X** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), bem como o afastamento daquele ponto (5 cm) sobre o eixo **Y** (também a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato, **Q<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **Q**), bem como **Q<sub>0</sub>** (a referência da abscissa do ponto **Q**). Note que o eixo **X** e o eixo **Y** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

### Resolução:

O plano que contém o círculo (um plano horizontal) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XY**), pelo que o círculo **projeta-se em verdadeira grandeza** (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção horizontal são figuras geometricamente iguais.

Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal do círculo. Para determinar a perspectiva do círculo é necessário, em primeiro lugar, determinar a perspectiva do ponto **Q** (o seu centro). Para tal é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, de forma a ser possível determinar a perspectiva da cota do plano horizontal (de nível) que contém a figura (a cota do ponto **Q** é a única coordenada do ponto que apresenta deformação).

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A **cota** do plano horizontal (de nível) que contém o círculo, porque se mede no eixo **Z**, está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, o processo mais simples consiste em recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspectiva do eixo **Z**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), representou-se a **cota** do plano horizontal (de nível) que contém o triângulo (que é 3 cm – a cota do ponto **Q**), em verdadeira grandeza, determinando-se um ponto **P<sub>r</sub>**. O ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do plano horizontal (de nível) que contém o círculo (**OP<sub>r</sub>** = 3 cm e é a cota do ponto **Q**, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $50^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto **P**, sobre a perspectiva do eixo **Z** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do plano horizontal (de nível) que contém o círculo (**OP** é a perspectiva da cota do ponto **Q**).

#### Representação do plano horizontal (de nível) que contém o círculo:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva do ponto **P**, que é o ponto do eixo **Z** que tem 3 cm de cota. O plano horizontal (de nível) **v** que contém o círculo, sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 3 cm de cota, contém necessariamente o ponto **P**.

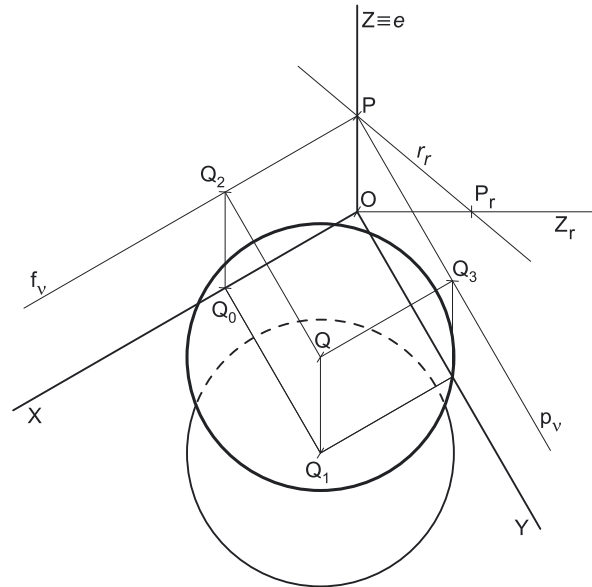
Assim, pela perspectiva do ponto **P** conduziram-se as perspectivas dos traços do plano **v** – **f<sub>v</sub>** (a perspectiva do traço frontal do plano **v**) e **p<sub>v</sub>** (a perspectiva do traço lateral do plano **v**).

Note que **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano **v**) é uma reta fronto-horizontal do plano **v** com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado, **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano **v**) é uma reta de topo do plano **v**, com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

O plano **v** é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal (**f<sub>v</sub>**). Por outro lado, o plano **v** é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral (**p<sub>v</sub>**).

#### Determinação das perspectivas do ponto **Q**:

A partir das perspectivas da abscissa e da cota do ponto **Q**, determinou-se a perspectiva da sua projeção frontal (**Q<sub>2</sub>**), recorrendo ao paralelogramo de que **Q<sub>2</sub>** e **O** são dois vértices opostos. **Q<sub>2</sub>** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **Q** e situa-se sobre a perspectiva de **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano **v**), pois o plano **v** é um plano projetante frontal. Note que o traço da linha de chamada do ponto **Q** que se situa no plano **XZ** tem um extremo em **Q<sub>0</sub>** e o outro extremo em **Q<sub>2</sub>** (que se situa sobre o traço frontal do plano **v**) e é necessariamente paralelo à perspectiva do eixo **Z**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto **Q**, determinou-se a perspectiva da sua projeção lateral (**Q<sub>3</sub>**), recorrendo ao paralelogramo de que **Q<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos. **Q<sub>3</sub>** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **Q** e situa-se sobre a perspectiva de **p<sub>v</sub>**, (o traço lateral do plano **v**), pois o plano **v** é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **Q**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **Q<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **Q** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **Q<sub>3</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **Q** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) e pela perspectiva de **Q<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **Q** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**.

#### Determinação das perspectivas do círculo:

Atendendo a que o plano **v** (o plano que contém o círculo) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o círculo projeta-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano **XY**). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q** (a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita do círculo, em verdadeira grandeza.

Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o círculo, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do círculo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano **v** (o plano que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo **Z<sub>r</sub>** e da reta **r<sub>r</sub>**.

## 1274.

#### Dados:

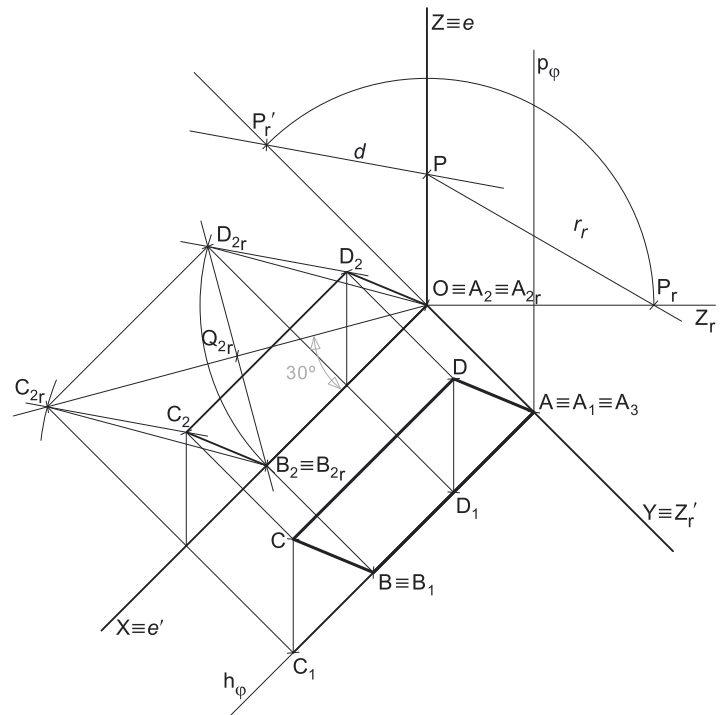
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) ângulos de 135° (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar, de forma direta, o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a figura), pelos seus traços. Assim, em primeiro lugar, representou-se o afastamento do plano  $\phi$  (4 cm) sobre o eixo **Y** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu determinar, de imediato, o ponto do eixo **Y** que tem aquele afastamento. O plano frontal (de frente)  $\phi$  que contém o losango é o lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 4 cm de afastamento, pelo que o plano  $\phi$  contém necessariamente esse ponto.

Assim, por esse ponto conduziu-se **h<sub>φ</sub>**, o traço horizontal do plano  $\phi$  – **h<sub>φ</sub>** é uma reta fronto-horizontal do plano, com cota nula (é paralelo ao eixo **X**). Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço lateral do plano  $\phi$  (**p<sub>φ</sub>**), que é paralela à perspectiva do eixo **Z** e é concorrente com **h<sub>φ</sub>** no eixo **Y** – **p<sub>φ</sub>** é uma reta vertical do plano  $\phi$  com abcissa nula.

O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XY**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XY**, sobre o seu traço horizontal (**h<sub>φ</sub>**). Por outro lado, o plano  $\phi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral (**p<sub>φ</sub>**).

Tendo em conta que o ponto **A** é um ponto do eixo **Y**, o ponto **A** é. Imediatamente, o ponto de concorrência dos traços do plano  $\phi$ . Assim, determinaram-se as perspectivas do ponto **A**, de forma direta. O ponto **A** tem abcissa e cota nulas, pelo que é, simultaneamente, um ponto do plano **XY** e um ponto do plano **YZ**. Nesse sentido, o ponto está coincidente com as suas projeções horizontal e lateral, o que se identificou de imediato – tem-se **A<sub>3</sub> ≡ A<sub>1</sub> ≡ A**. A projeção frontal do ponto **A** (**A<sub>2</sub>**) está coincidente com o ponto **O**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Resolução:

Uma vez que o lado **[AB]** do losango tem cota nula, sabe-se que o segmento **[AB]** está contido no traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), que é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$ , com cota nula. Assim, o lado **[AB]** está em verdadeira grandeza em projeção horizontal (pois está contido no próprio plano de projeção – o plano **XY**). Assim, sobre  $h_\varphi$  e a partir do ponto **A**, mediram-se os 6 cm (o comprimento do lado **[AB]**) e determinou-se o ponto **B**, sobre  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ). Note que se garantiu que o ponto **B** se situa no espaço do  $1^a$  Triedro, como o enunciado pede expressamente.

O ponto **B** é um ponto do plano **XY** (pois tem cota nula), pelo que o ponto **B** está coincidente com a sua projeção horizontal – tem-se, imediatamente,  $B_1 \equiv B$ . Por outro lado, e mais uma vez atendendo a que o ponto **B** tem cota nula, a sua projeção frontal (**B**<sub>2</sub>) situa-se no eixo **X**.

O plano que contém o losango **[ABCD]** (um plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano **XY**), pelo que o losango **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do losango não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o losango está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao plano coordenado frontal (o plano **XZ**), sabe-se que o losango se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado **XZ** – o losango **[ABCD]** e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado **XZ**) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o losango se projeta em verdadeira grandeza).

### Rebatimento do plano XZ e construção da projeção frontal do losango [ABCD], em verdadeira grandeza:

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano **XZ** para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é o eixo **X**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z**<sub>r</sub>) fica coincidente com o eixo **Y**, facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv Z_r$ . O eixo **Z**<sub>r</sub> é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **XZ**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XZ** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ** com a notação **Z**<sub>r</sub>, optando-se por manter a notação **Z**<sub>r</sub> para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

As projeções frontais dos pontos **A** e **B** situam-se no eixo **X**, que é a charneira, pelo que rodam sobre si próprias (são fixas) – tem-se, imediatamente,  $A_{2r} \equiv A_2$  e  $B_{2r} \equiv B_2$ .

Uma vez que o losango está em verdadeira grandeza (porque está no plano **XZ** rebatido), foi possível, em verdadeira grandeza, medir o ângulo de 30° que a diagonal **[AC]** faz com o plano **XY**, que é o ângulo que a diagonal **[AC]** faz com o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ). Esse ângulo está, em verdadeira grandeza, no ângulo que o segmento **[A**<sub>2</sub>**C**<sub>2</sub>**]** (a projeção frontal da diagonal **[AC]**, em rebatimento) faz com o eixo **X**. Assim, a partir de **A**<sub>2r</sub> desenhou-se a reta suporte da projeção frontal da diagonal **[AC]** (em rebatimento), com o ângulo referido (um ângulo de 30°, de abertura para a esquerda). Em seguida, por **B**<sub>2r</sub> (a projeção frontal do ponto **B**, em rebatimento) conduziu-se uma perpendicular a essa reta – essa perpendicular é a reta suporte da diagonal **[BD]** da figura. O ponto de interseção entre as duas retas é o ponto **Q**<sub>2r</sub> (a projeção frontal do centro do polígono, em rebatimento).

O ponto **Q** (o centro do losango) é, necessariamente, o ponto médio das duas diagonais (**Q** é o ponto em que as duas diagonais da figura se bissectam). Nesse sentido, o segmento **[Q**<sub>2r</sub>**A**<sub>2r</sub>**]** é metade da diagonal **[A**<sub>2</sub>**C**<sub>2</sub>**]** e o segmento **[Q**<sub>2r</sub>**B**<sub>2r</sub>**]** é metade da diagonal **[B**<sub>2</sub>**D**<sub>2</sub>**]**.

Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q**<sub>2r</sub> (a projeção frontal do ponto **Q**, em rebatimento) e com raio  $\overline{Q_{2r}A_{2r}}$ , determinou-se **C**<sub>2r</sub>, sobre a reta suporte da diagonal **[AC]**, em rebatimento. De forma semelhante, com o compasso, fazendo centro em **Q**<sub>2r</sub> (a projeção frontal do ponto **Q**, em rebatimento) e com raio  $\overline{Q_{2r}B_{2r}}$ , determinou-se **D**<sub>2r</sub>, sobre a reta suporte da diagonal **[BD]**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções frontais (em rebatimento) dos outros dois vértices do losango.

Em seguida, pelas projeções frontais (em rebatimento) dos pontos **C** e **D** (**C**<sub>2r</sub> e **D**<sub>2r</sub>, respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo **X**) e determinaram-se as projeções horizontais daqueles pontos (**C**<sub>1</sub> e **D**<sub>1</sub>), sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Para determinar a perspectiva do losango **[ABCD]** é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

### Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o plano axonométrico (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z**<sub>r</sub>) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z**<sub>r</sub> está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **Z**).

Em seguida, marcou-se, no eixo **Z**<sub>r</sub>, um ponto **P**<sub>r</sub> qualquer – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com uma cota qualquer ( $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto **P**, no eixo **Z**<sub>r</sub>), pelo rebatimento do plano **XZ**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **cota** do ponto **P** para o eixo **Z<sub>r</sub>**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>** se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Z**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). Assim,  $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspectiva da cota do ponto **P** –  $\overline{OP_r'}$  é a perspectiva da cota do ponto **P**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>'** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação das perspectivas dos pontos C e D:*

As projeções do ponto **C** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **C** – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **C<sub>1</sub>**, outro extremo em **C<sub>2</sub>** e um vértice no eixo **X**. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **C** que está contida no plano **XZ** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **X** e que tem um extremo em **C<sub>2</sub>** e o outro extremo no eixo **X**. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **C** é o segmento que é perpendicular ao eixo **X** e que tem um extremo em **C<sub>2r</sub>** e o outro extremo no eixo **X**. **Em perspectiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **C** (a parte que se situa no plano **XZ**) é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Z** e tem um extremo no eixo **X**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspectiva** da parte da linha de chamada do ponto **C** que se situa no plano **XZ**. Em seguida, por **C<sub>2r</sub>** conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto **C** (anteriormente desenhada) é **C<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XZ**.

Em seguida, por **C<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **C**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto **C**, que é vertical (paralela à perspectiva do eixo **Z**). Depois, por **C<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto **C** (que é paralela ao eixo **Y**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **C**.

As perspectivas do ponto **D** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto **C**.

*Determinação das perspectivas do losango:*

Por fim, desenharam-se as perspectivas do losango. O quadrilátero **[ABCD]** é a perspectiva propriamente dita do losango. O quadrilátero **[A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>]** é a perspectiva da projeção frontal do losango. O segmento de reta **[C<sub>1</sub>A<sub>1</sub>]** é a perspectiva da projeção horizontal do losango (que se situa sobre  $h_\varphi$ , pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal).

Note que não se determinaram as perspectivas das projeções laterais dos vértices do losango (à exceção do ponto **A**), nem da própria figura, pois, na realidade, estas não são fundamentais para a consecução do objetivo do exercício (a determinação da perspectiva da figura). Salienta-se que a omissão de algumas notações a que se tem recorrido regularmente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o losango, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do losango representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a figura), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção frontal do losango, em rebatimento, do eixo **Z<sub>r</sub>'**, da reta  $r_r$ , da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XZ**.



## 1275.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $130^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Y$ , um ângulo de  $140^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, a abscissa do ponto  $A$  (2 cm), sobre o eixo  $X$  (a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), bem como o afastamento daquele ponto (4 cm) sobre o eixo  $Y$  (também a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato,  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ). Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

Salienta-se que o ponto  $A$  tem cota nula (é um ponto do plano coordenado  $XY$ ), pelo que  $A_3$  (a sua projeção lateral) se situa necessariamente no eixo  $Y$ , tal como  $A_2$  (a sua projeção frontal) se situa no eixo  $X$ . Por outro lado, e ainda porque o ponto  $A$  é um ponto do plano coordenado  $XY$ , o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, pelo que se tem, imediatamente,  $A \equiv A_1$  (sendo  $A$  a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

Em seguida, representou-se o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base da pirâmide), pelos seus traços. O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). Nesse sentido, desenhou-se  $h_\pi$ , o traço horizontal do plano  $\pi$  –  $h_\pi$  passa por  $A_1$ , pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal. Note que  $h_\pi$  é uma reta de topo do plano, com cota nula.

Em seguida, desenhou-se a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ), que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$  e é concorrente com  $h_\pi$  no eixo  $X$  –  $f_\pi$  é uma reta vertical do plano  $\pi$  com afastamento nulo. Salienta-se que o plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).

### Resolução:

O plano que contém o triângulo  $[ABC]$  (a base da pirâmide) é um plano de perfil, que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XY$ ), pelo que o triângulo  $[ABC]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspetiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano de perfil, que é paralelo ao plano coordenado de perfil (o plano  $YZ$ ), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $YZ$  – o triângulo  $[ABC]$  e a sua projeção lateral (a sua projeção no plano coordenado  $YZ$ ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado  $YZ$**  (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

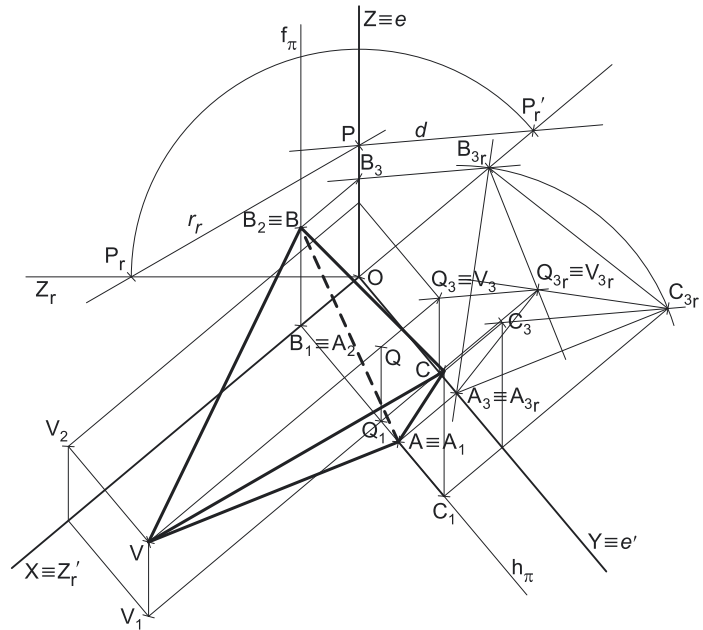
*Rebatimento do plano  $YZ$  e construção da projeção lateral do triângulo  $[ABC]$  e da pirâmide, em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $YZ$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $Y$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $X$ , facto que se assinalou devidamente –  $X \equiv Z_r'$ . O eixo  $Z_r'$  é o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano  $YZ$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $YZ$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $YZ$  com a notação  $Z_r'$ , optando-se por manter a notação  $Z_r$  para o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $YZ$  rebatido, representou-se a projeção lateral do ponto  $A$ , em rebatimento ( $A_{3r}$ ).  $A_3$  (a projeção lateral do ponto  $A$ ) é um ponto da charneira (que é o eixo  $Y$ ), pelo que roda sobre si própria (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_{3r} \equiv A_3$ .

Por outro lado, o enunciado refere expressamente que o ponto  $B$  é um ponto com afastamento nulo, pelo que o ponto  $B$  é um ponto do plano  $XZ$ . Assim, a sua projeção lateral ( $B_3$ ) situa-se necessariamente no eixo  $Z$ . Em rebatimento (no rebatimento do plano  $YZ$ ), a projeção lateral do ponto  $B$  ( $B_{3r}$ ) situar-se-á no eixo  $Z_r'$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $A_{3_r}$  (a projeção lateral do ponto  $A$ , em rebatimento), e com 6 cm de raio (o comprimento do lado do triângulo), determinou-se  $B_{3_r}$  (a projeção lateral do ponto  $B$ , em rebatimento), no eixo  $Z_r'$ . A partir de  $A_{3_r}$  e  $B_{3_r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do triângulo**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $YZ$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{3_r}$  (a projeção lateral do terceiro vértice do triângulo) – o triângulo  $[A_{3_r}B_{3_r}C_{3_r}]$  é a projeção lateral do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $YZ$ . Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do 1.<sup>a</sup> Triedro, como o enunciado pede expressamente.

Note que se determinou, também, o centro do triângulo  $[A_{3_r}B_{3_r}C_{3_r}]$ , em rebatimento – o ponto  $Q_{3_r}$  (a projeção lateral do ponto  $Q$ , o centro do triângulo  $[ABC]$ ). Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base. Uma vez que o plano que contém a base é um plano de perfil (o plano  $\pi$ ), o eixo da pirâmide está contido numa reta fronto-horizontal, que é uma reta projetante lateral. Assim, o centro da base (o ponto  $Q$ ) e o vértice da pirâmide (o ponto  $V$ ) têm as suas projeções laterais coincidentes. Nesse sentido, assinalou-se esse facto em rebatimento – tem-se, imediatamente,  $Q_{3_r} \equiv V_{3_r}$ .

Em seguida, pelas projeções laterais (em rebatimento) dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $Q$  ( $B_{3_r}$ ,  $C_{3_r}$  e  $Q_{3_r}$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo  $Y$ ) e determinaram-se as projeções horizontais daqueles pontos ( $B_1$ ,  $C_1$  e  $Q_1$ , respetivamente), sobre o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.

Para determinar a perspetiva do triângulo  $[ABC]$  e da pirâmide é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

#### Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $YZ$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $YZ$  com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo  $Z$ ).

Em seguida, marcou-se, no eixo  $Z_r'$ , um ponto  $P_r'$  qualquer – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com uma cota qualquer ( $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto  $P$ , no eixo  $Z_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XZ$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **cota** do ponto  $P$  para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Z$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva da cota do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da cota do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $YZ$  com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $YZ$ ).

#### Inversão do rebatimento do plano coordenado $YZ$ e determinação das perspetivas do ponto $C$ :

Para se determinarem as perspetivas do ponto  $C$  teve-se em conta que as projeções do ponto  $C$  (a projeção horizontal e a projeção lateral) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $C$  – a linha de chamada do ponto  $C$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $C_1$ , outro extremo em  $C_3$  e um vértice no eixo  $Y$ . **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto  $C$  que está contida no plano  $YZ$  é o segmento de reta perpendicular ao eixo  $Y$  e que tem um extremo em  $C_3$  e o outro extremo no eixo  $Y$ . **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto  $C$  é o segmento que é perpendicular ao eixo  $Y$  e que tem um extremo em  $C_{3_r}$  e o outro extremo no eixo  $Y$ . **Em perspetiva**, essa parte da linha de chamada do ponto  $C$  (a parte que se situa no plano  $YZ$ ) é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Z$  e tem um extremo no eixo  $Y$ .

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspetiva** da parte da linha de chamada do ponto  $C$  que se situa no plano  $YZ$  (e que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$ ). Em seguida, por  $C_{3_r}$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspetiva da linha de chamada do ponto  $C$  (anteriormente desenhada) é  $C_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $C$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $YZ$ .

Em seguida, por  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto  $C$ , que é vertical (paralela à perspetiva do eixo  $Z$ ). Depois, por  $C_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $C$ ), conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto  $C$  (que é paralela ao eixo  $X$ ) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto  $C$ .

Note que não se determinou a perspetiva da projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado,  $C_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $C$ ) estaria necessariamente sobre  $f_\pi$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal.

#### Determinação das perspetivas dos pontos $B$ e $Q$ :

As perspetivas dos pontos  $B$  e  $Q$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto  $C$ .

Salienta-se que o ponto  $B$  tem afastamento nulo (é um ponto do *plano coordenado*  $XZ$ ), pelo que  $B_3$  (a perspetiva da sua projeção lateral) se situa necessariamente sobre a perspetiva do eixo  $Z$ , tal como  $B_1$  (a sua projeção horizontal) se situa necessariamente no eixo  $X$ . Por outro lado, e ainda porque o ponto  $B$  é um ponto do *plano coordenado*  $XZ$ , o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, pelo que se tem, imediatamente,  $B \equiv B_2$  (sendo  $B_2$  a perspetiva da projeção frontal do ponto  $B$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Determinação das perspectivas do ponto $V$ :

Em primeiro lugar, atendeu-se ao facto de que a altura de uma pirâmide é a distância do vértice da pirâmide ao plano que contém a base o que, neste caso, corresponde à diferença entre as abcissas do vértice  $V$  e do plano da base (o plano  $\pi$ ). O plano que contém a base da pirâmide (o plano  $\pi$ ) tem 2 cm de abcissa (a abcissa do ponto  $A$ ) e a pirâmide tem 8 cm de altura, pelo que o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) tem 10 cm de abcissa ( $2 + 8 = 10$ ).

Assim, sobre o eixo  $X$ , a partir do ponto  $O$  e em verdadeira grandeza, mediram-se os 10 cm de abcissa, o que nos permitiu desenhar a linha de chamada perpendicular ao eixo  $X$  sobre a qual se situa  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto  $V$ ). Em seguida, por  $V_3$ , (a projeção lateral do ponto  $V$ , em rebatimento), conduziu-se a linha de chamada do ponto  $V$ , perpendicular ao eixo  $Y$  – o ponto de interseção das duas linhas de chamada é  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto  $V$ ).

Em seguida, determinou-se  $V_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $V$ ), que está coincidente com  $Q_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $Q$ ), pois os dois pontos se situam na mesma reta projetante lateral. Em seguida, por  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto  $V$ ) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto  $V$ , que é vertical (paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ). Depois, por  $V_3$  (a projeção lateral do ponto  $V$ ), conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral do ponto  $V$  (que é paralela ao eixo  $X$ ) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto  $V$ .

A partir das perspectivas já determinadas do ponto  $V$  construiu-se a perspectiva do paralelepípedo cujos vértices são as perspectivas das projeções do ponto  $V$  e de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $V$  são dois vértices espacialmente opostos – a construção da perspectiva desse paralelepípedo permitiu-nos determinar  $V_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $V$ ), a perspectiva em falta do ponto  $V$ . Note que esta construção não é determinante para a resolução do exercício, pois a perspectiva do ponto  $V$  já havia sido determinada. No entanto, a sua construção permite uma melhor visualização do exercício.

## Determinação da perspectiva da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada  $[AVBC]$ . Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente da perspectiva do sólido. No entanto, a aresta lateral  $[CV]$  é visível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais  $[BCV]$  e  $[ACV]$ . Por outro lado, a aresta  $[AB]$ , da base, é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – a base  $[ABC]$  e a face lateral  $[ABV]$ .

Assim, e como acima se referiu, a face lateral  $[BCV]$  é invisível, bem como a base  $[ABC]$ . Já as faces laterais  $[ACV]$  e  $[BCV]$  são visíveis.

Note que a representação das perspectivas da projeção lateral e da projeção horizontal da pirâmide (que se apresentam, neste exercício) não são absolutamente necessárias. Nesse sentido não se determinaram as perspectivas das projeções frontais dos vértices da pirâmide (à exceção dos pontos  $B$  e  $V$ ), nem da própria pirâmide, pois, na realidade, estas não são fundamentais para a consecução do objetivo do exercício (a determinação da perspectiva do sólido). Salienta-se que a omissão de algumas notações a que se tem recorrido regularmente (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

De facto, o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (a pirâmide, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da construção da projeção lateral da pirâmide, em rebatimento, do eixo  $Z_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$  e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano  $YZ$ .

## 1276.

## Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $150^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Y$ , um ângulo de  $120^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, as abscissas dos pontos  $A$  e  $C$  (6 cm e 4 cm, respetivamente), sobre o eixo  $X$  (a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), bem como o afastamento daqueles dois pontos (7 cm) sobre o eixo  $Y$  (também a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato,  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) e  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ). Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

Salienta-se que o ponto  $A$  tem cota nula (é um ponto do plano coordenado  $XY$ ), pelo que  $A_3$  (a sua projeção lateral) se situa necessariamente no eixo  $Y$ , tal como  $A_2$  (a sua projeção frontal) se situa no eixo  $X$ . Por outro lado, e ainda porque o ponto  $A$  é um ponto do plano coordenado  $XY$ , o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, pelo que se tem, imediatamente,  $A \equiv A_1$  (sendo  $A$  a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a base da pirâmide), pelos seus traços. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ). Nesse sentido, desenhou-se  $h_\phi$ , o traço horizontal do plano  $\phi$  –  $h_\pi$  passa por  $A_1$  e por  $C_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. Note que  $h_\phi$  é uma reta fronto-horizontal do plano, com cota nula.

Em seguida, desenhou-se a perspetiva do traço lateral do plano  $\phi$  ( $p_\phi$ ), que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$  e é concorrente com  $h_\phi$  no eixo  $Y$  –  $p_\phi$  é uma reta vertical do plano  $\phi$  com abscissa nula. Salienta-se que o plano  $\phi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\phi$ ).

## Resolução:

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (a base da pirâmide) é um plano frontal (de frente), que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XY$ ), pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspetiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao plano coordenado frontal (o plano  $XZ$ ), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XZ$  – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado  $XZ$ ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado  $XZ$**  (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

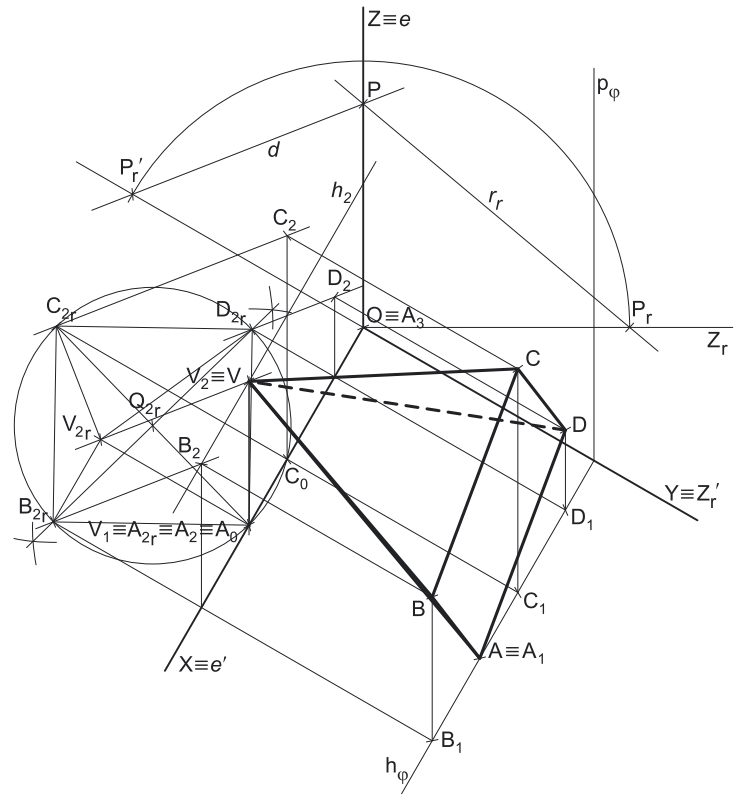
*Rebatimento do plano  $XZ$  e construção da projeção frontal do quadrado  $[ABCD]$  e da pirâmide, em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XZ$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $X$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Y$ , facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv Z_r'$ . O eixo  $Z_r'$  é o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XZ$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XZ$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XZ$  com a notação  $Z_r'$ , optando-se por manter a notação  $Z_r$  para o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $XZ$  rebatido, representou-se a projeção frontal do ponto  $A$ , em rebatimento ( $A_{2r}$ ).  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ) é um ponto da charneira (que é o eixo  $X$ ), pelo que roda sobre si própria (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_{2r} \equiv A_2$ .

No plano  $XY$  rebatido, representou-se, ainda a projeção frontal do ponto  $C$ , em rebatimento ( $C_{2r}$ ), em função da sua cota. Assim,  $C_{2r}$  é a projeção frontal do ponto  $C$  (em rebatimento) e situa-se 7 cm (a cota do ponto  $C$ ) para cima do eixo  $X$ , na sua linha de chamada (que passa por  $C_0$  e é perpendicular ao eixo  $X$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir de  $A_{2r}$  e  $C_{2r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XZ$ ), o que nos permitiu determinar  $B_{2r}$  e  $D_{2r}$  (as projeções frontais, em rebatimento, dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}]$  é a projeção frontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XZ$ . Note que se garantiu que o ponto  $B$  se situa à esquerda do ponto  $A$ , como o enunciado refere expressamente.

Salienta-se que a construção da projeção frontal do quadrado (em rebatimento) careceu da determinação do ponto  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do centro do quadrado, em rebatimento), bem como do desenho da circunferência em que aquele quadrado se inscreve (a circunferência que tem centro em  $Q_{2r}$  e raio até  $A_{2r}$  e  $B_{2r}$ ).

Em seguida, construiu-se, ainda, a projeção frontal da pirâmide (em rebatimento), atendendo aos dados. Uma vez que a aresta lateral  $[AV]$  é de perfil, é possível concluir que os pontos  $A$  e  $V$  têm a mesma abcissa. Por outro lado, atendendo a que a aresta lateral  $[BV]$  é horizontal (de nível), é possível concluir que os pontos  $B$  e  $V$  têm a mesma cota. Estes dois raciocínios permitiram-nos determinar  $V_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $V$ , em rebatimento) –  $V_{2r}$  situa-se na paralela ao eixo  $X$  que passa por  $B_{2r}$  (para garantir que os dois pontos têm a mesma cota) e na mesma perpendicular ao eixo  $X$  que passa por  $A_{2r}$  (para garantir que os dois pontos têm a mesma abcissa).

Em seguida, pelas projeções frontais (em rebatimento) dos pontos  $B$  e  $D$  ( $B_{2r}$  e  $D_{2r}$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo  $X$ ) e determinaram-se as projeções horizontais daqueles pontos ( $B_1$  e  $D_1$ , respetivamente), sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Para determinar a perspetiva do quadrado  $[ABCD]$  e da pirâmide é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

### Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XZ$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo  $Z$ ).

Em seguida, marcou-se, no eixo  $Z_r$ , um ponto  $P_r$  qualquer – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com uma cota qualquer ( $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto  $P$ , no eixo  $Z_r$ , pelo rebatimento do plano  $XZ$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r}$ , transportou-se a **cota** do ponto  $P$  para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Z$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . Por  $P_r$ , conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $50^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva da cota do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da cota do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r$  e pela perspetiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XZ$ ).

### Inversão do rebatimento do plano coordenado $XZ$ e determinação das perspetivas do ponto $C$ :

Para se determinarem as perspetivas do ponto  $C$  teve-se em conta que as projeções do ponto  $C$  (a projeção horizontal e a projeção frontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $C$  – a linha de chamada do ponto  $C$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $C_1$ , outro extremo em  $C_2$  e um vértice no eixo  $X$  (em  $C_0$ ). A parte da linha de chamada do ponto  $C$  que está contida no plano  $XZ$  é o segmento  $[C_0C_2]$  – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento  $[C_0C_{2r}]$ . A perspetiva desse segmento tem um extremo em  $C_0$  e é paralela à perspetiva do eixo  $Z$ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspetiva do segmento de reta  $[C_0C_2]$ . Em seguida, por  $C_{2r}$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspetiva da linha de chamada do ponto  $C$  (a reta suporte do segmento  $[C_0C_2]$ ) é  $C_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $C$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XZ$ .

Em seguida, por  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto  $C$ , que é vertical (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$ ). Depois, por  $C_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $C$ ), conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal do ponto  $C$  (que é paralela ao eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto  $C$ .

Note que não se determinou a perspetiva da projeção lateral do ponto  $C$  ( $C_3$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado,  $C_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $C$ ) estaria necessariamente sobre  $p_\varphi$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

### Determinação das perspetivas dos pontos $B$ , $D$ e $V$ :

As perspetivas dos pontos  $B$  e  $D$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto  $C$ .

A determinação da perspetiva da projeção frontal do ponto  $V$  ( $V_2$ ) processou-se repetindo, para o ponto  $V$ , o procedimento atrás exposto para a determinação da projeção frontal do ponto  $C$ . De acordo com os dados do enunciado, o ponto  $V$  tem afastamento nulo (é um ponto do *plano coordenado  $XZ$* ), pelo que  $V_1$  (a sua projeção horizontal) se situa necessariamente sobre o eixo  $X$ , tal como  $V_3$  (a perspetiva da sua projeção lateral) se situa necessariamente na perspetiva do eixo  $Z$ . Por outro lado, e ainda porque o ponto  $V$  é um ponto do *plano coordenado  $XZ$* , o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, pelo que se tem, imediatamente,  $V \equiv V_2$  (sendo  $V$  a perspetiva propriamente dita do ponto  $V$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação da perspectiva da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada [AVCD]. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **B**. Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas [AB] e [BC], da base, e a aresta lateral [BV]). Note que a aresta lateral [BV] é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais [ADV] e [CDV].

As faces laterais [ADV] e [CDV] são invisíveis. Já as faces laterais [ABV] e [BCV] são visíveis, bem como a base [ABCD].

Note que a representação das perspetivas da projeção frontal e da projeção horizontal da pirâmide (que se apresentam, neste exercício, com as respetivas invisibilidades devidamente assinaladas) não são absolutamente necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (a pirâmide, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\varphi$  (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da construção da projeção frontal do quadrado e da pirâmide, em rebatimento, do eixo  $Z_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$  e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano  $XZ$ .

## 1277.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos *coordenados*. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo **X** e do eixo **Y**, ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Uma vez que a base [ABC], do prisma, está contida no plano **YZ**, todos os seus vértices têm abcissa nula. Por outro lado, o ponto **A** tem cota nula, pelo que o ponto **A** é um ponto do plano **XY**. Assim, e porque o ponto **A** é, simultaneamente, um ponto do plano **XY** e um ponto do plano **YZ** (tem abcissa e cotas nulas), o ponto **A** é um ponto do eixo **Y**, pelo que foi possível determinar as suas perspetivas de forma direta.

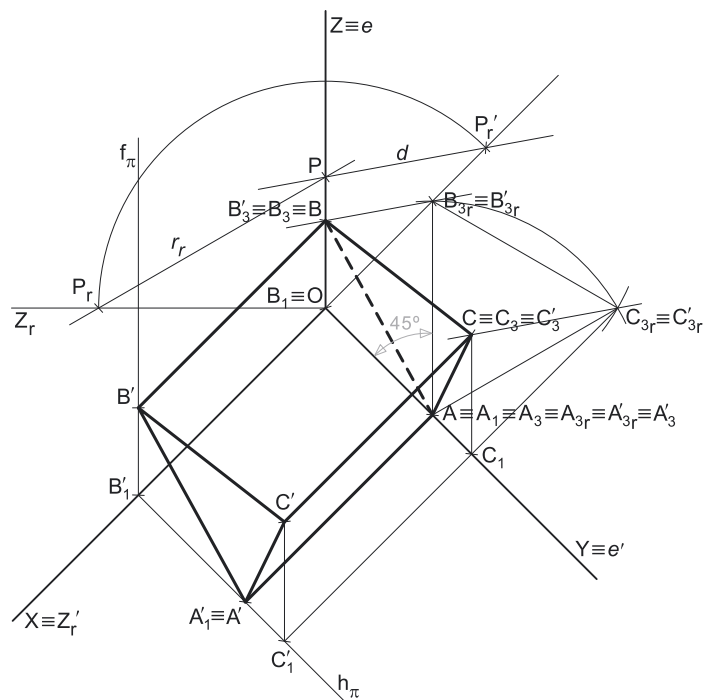
Nesse sentido, os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, o afastamento do ponto **A** (4 cm), sobre o eixo **Y** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo). Porque o ponto **A** é um ponto do eixo **Y**, o ponto está coincidente com as suas projeções horizontal e lateral, o que se identificou de imediato – tem-se  $A_3 \equiv A_1 \equiv A$ . A projeção frontal do ponto **A** ( $A_2$ ) está coincidente com o ponto **O**.

#### Resolução:

A base [ABC] está contida no *plano coordenado YZ*, que é o *plano coordenado de perfil*, pelo que as bases do prisma estão contidas em planos de perfil. A altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as duas bases do sólido o que, neste caso, corresponde à diferença entre as abcissas dos planos das bases. O plano que contém a base mais à direita do prisma (o plano **YZ**) tem abcissa nula e o prisma tem 7 cm de altura, pelo que o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do prisma) tem 7 cm de abcissa ( $0 + 7 = 7$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $\pi$  pelos seus traços – o plano  $\pi$  é o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do sólido (o triângulo [A'B'C']).

Assim, no eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, mediu-se a abcissa do plano  $\pi$  (7 cm) e determinou-se um ponto, pelo qual se conduziu o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_\pi$ ), que é paralelo ao eixo **Y** –  $h_\pi$  é uma reta de topo do plano  $\pi$ , com cota nula. Em seguida, desenhou-se a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi$  ( $f_\pi$ ), que é paralela à perspetiva do eixo **Z** e é concorrente com  $h_\pi$  no eixo **X** –  $f_\pi$  é uma reta vertical do plano  $\pi$ , com afastamento nulo.

Salienta-se que o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal (é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_\pi$ ). O plano  $\pi$  é, também, um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_\pi$ ).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

As bases do prisma estão contidas em planos de perfil, que não são paralelos ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano  $XY$ ), pelo que as duas bases do prisma **não se projetam em verdadeira grandeza** (as perspetivas dos triângulos  $[ABC]$  e  $[A'B'C']$  não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que os triângulos estão contidos em planos de perfil, que são paralelos ao *plano coordenado de perfil* (o plano  $YZ$ ), sabe-se que os triângulos se projetam em verdadeira grandeza no *plano coordenado  $YZ$*  – os triângulos  $[ABC]$  e  $[A'B'C']$  e as respetivas projeções laterais (as suas projeções no *plano coordenado  $YZ$* ) são figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado  $YZ$**  (o plano no qual as duas bases se projetam em verdadeira grandeza).

*Rebatimento do plano  $YZ$  e construção das projeções laterais dos triângulos  $[ABC]$  e  $[A'B'C']$ , bem como do prisma, em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $YZ$  para o *plano axonométrico*, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $Y$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $X$ , facto que se assinalou devidamente –  $X \equiv Z_r'$ . O eixo  $Z_r'$  é o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano  $YZ$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $YZ$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $YZ$  com a notação  $Z_r'$ , optando-se por manter a notação  $Z_r$  para o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

A projeção lateral do ponto  $A$  situa-se no eixo  $Y$ , que é a charneira, pelo que roda sobre si própria (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_{3_r} \equiv A_3$ .

Uma vez que o triângulo  $[ABC]$  está em verdadeira grandeza (porque está no plano  $YZ$  rebatido), foi possível, em verdadeira grandeza, medir o ângulo de  $45^\circ$  que o lado  $[AB]$  faz com o eixo  $Y$ . Esse ângulo está, em verdadeira grandeza, no ângulo que o segmento  $[A_3, B_{3_r}]$  (a projeção lateral do lado  $[AB]$ , em rebatimento) faz com o eixo  $Y$  (que é a charneira). Assim, a partir de  $A_3$ , desenhou-se a reta suporte da projeção lateral do lado  $[AB]$  (em rebatimento), com o ângulo referido (um ângulo de  $45^\circ$ ). Por outro lado, o ponto  $B$  tem afastamento nulo, pelo que o ponto  $B$  é necessariamente um ponto do eixo  $Z$ . Assim, determinou-se  $B_{3_r}$  (a projeção lateral do ponto  $B$ , em rebatimento), no ponto em que a reta suporte do segmento  $[A_3, B_{3_r}]$  intersesta o eixo  $Z_r'$ .

Salienta-se que, das duas hipóteses que existem para medir o ângulo de  $45^\circ$  com o eixo  $Y$ , a partir de  $A_{3_r}$ , apenas a que a resolução apresenta nos garante que o ponto  $B$ , em simultâneo, tenha cota positiva (para que o triângulo se situe no espaço do  $1^\circ$  Triedro, como o enunciado refere expressamente) e afastamento nulo.

A partir de  $A_{3_r}$  e  $B_{3_r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do triângulo  $[ABC]$** , em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $YZ$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{3_r}$  (a projeção lateral do terceiro vértice do triângulo) – o triângulo  $[A_3, B_{3_r}, C_{3_r}]$  é a projeção lateral do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $YZ$ . Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do  $1^\circ$  Triedro, como o enunciado pede expressamente.

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases, que são retas fronto-horizontais (retas projetantes laterais). Assim, os vértices da base mais à esquerda (a base  $[A'B'C']$ ) têm as suas projeções laterais coincidentes com as projeções laterais dos vértices correspondentes da base mais à direita (a base  $[ABC]$ ), o que se assinalou imediatamente em rebatimento –  $A'_{3_r} \equiv A_{3_r}$ ,  $B'_{3_r} \equiv B_{3_r}$  e  $C'_{3_r} \equiv C_{3_r}$ .

Em seguida, pelas projeções laterais (em rebatimento) dos pontos  $B'$ ,  $C$  e  $C'$  ( $B'_{3_r}$ ,  $C_{3_r}$  e  $C'_{3_r}$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo  $Y$ ) e determinaram-se as projeções horizontais daqueles pontos ( $B'_1$ ,  $C_1$  e  $C'_1$ , respetivamente) –  $C_1$  situa-se no eixo  $Y$ , pois  $C$  tem abscissa nula e  $B'_1$  e  $C'_1$  situam-se sobre o traço horizontal do plano  $\pi$  ( $h_r$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal.

Para determinar as perspetivas dos triângulos  $[ABC]$  e  $[A'B'C']$  e do prisma, é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $YZ$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $YZ$  com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo  $Z$ ).

Em seguida, marcou-se, no eixo  $Z_r'$ , um ponto  $P_r'$  qualquer – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com uma cota qualquer ( $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto  $P$ , no eixo  $Z_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XZ$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **cota** do ponto  $P$  para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Z$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . Por  $P_r$ , conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva da cota do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da cota do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $YZ$  com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $YZ$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Inversão do rebatimento do plano coordenado YZ e determinação das perspetivas dos pontos B e C:*

Para se determinarem as perspetivas do ponto **B**, que é um ponto do eixo **Z**, conduziu-se, por  $B_3$ , (a projeção lateral do ponto **B**, em rebatimento), uma paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que essa paralela à reta **d** intersesta a perspetiva do eixo **Z** é, imediatamente,  $B_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **B**). O ponto **B** é um ponto do eixo **Z**, pelo que as suas perspetivas se determinam de forma imediata. O ponto **B** tem abcissa e afastamento nulos, pelo que se tem, imediatamente,  $B_2 \equiv B \equiv B_3$  (sendo  $B_2$  a perspetiva da projeção frontal do ponto **B** e **B** a sua perspetiva propriamente dita). Por fim,  $B_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **B**) está coincidente com o ponto **O**.

Para se determinarem as perspetivas do ponto **C** desenhou-se a reta suporte da **perspetiva** da linha de chamada do ponto **C** que se situa no plano **YZ** – é paralela à perspetiva do eixo **Z** e tem um extremo em  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto **C**). Em seguida, por  $C_{3r}$  conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta intersesta a perspetiva da linha de chamada do ponto **C** (anteriormente desenhada) é  $C_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto **C**). Uma vez que o ponto **C** tem abcissa nula, o ponto **C** é um ponto do plano **YZ**, pelo que o ponto está coincidente com a sua projeção lateral, o que se assinalou imediatamente no desenho –  $C \equiv C_3$  (sendo **C** a perspetiva propriamente dita do ponto **C**).

Note que não se determinou a perspetiva da projeção frontal do ponto **C** ( $C_2$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado,  $C_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto **C**) estaria necessariamente no eixo **Z**, pois o ponto **C** tem abcissa nula.

*Determinação das perspetivas dos vértices da base [A'B'C'] do prisma:*

Como atrás se referiu, e porque se trata de um **prisma regular** (cujas arestas laterais estão contidas em retas projetantes laterais), os vértices da base mais à esquerda (a base [A'B'C']) têm as suas projeções laterais coincidentes com as projeções laterais dos vértices correspondentes da base mais à direita (a base [ABC]), o que se assinalou imediatamente em perspetiva –  $A'_3 \equiv A_3$ ,  $B'_3 \equiv B_3$  e  $C'_3 \equiv C_3$ .

Depois, por  $C'_3$  (a projeção lateral do ponto **C'**) conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto **C'**, que é fronto-horizontal (paralela ao eixo **X**). Depois, por  $C'_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **C'**), conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto **C'** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto **C'**.

As perspetivas dos pontos **A'** e **B'** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto **C'**. O ponto **A'** é um ponto com cota nula (um ponto do plano **XY**), pelo que o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou imediatamente no desenho –  $A \equiv A_1$ . De forma semelhante, o ponto **B'** é um ponto com afastamento nulo (um ponto do plano **XZ**), pelo que o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, o que se assinalou imediatamente no desenho –  $B \equiv B_2$ . A projeção horizontal do ponto **B** ( $B_1$ ) situa-se no eixo **X**, pois **B** tem afastamento nulo.

À semelhança do referido para o ponto **C**, também não se determinaram as perspetivas das projeções frontais dos pontos **A'** e **C'** ( $A'_2$  e  $C'_2$ , respetivamente) mas, acaso se tivessem determinado, aquelas situar-se-iam sobre  $f_\pi$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $\pi$ ), pois o plano  $\pi$  é um plano projetante frontal. Salienta-se, mais uma vez, que a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

*Determinação da perspetiva do prisma:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada [AA'B'BC]. Existe um único vértice do prisma que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **C'**. Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas [A'C'] e [B'C'], da base [A'B'C'], e a aresta lateral [CC']). Salienta-se que a aresta [AB] da base [ABC] é **invisível**, pois separa duas faces invisíveis (a face lateral [AA'B'B] e a base [ABC]).

As faces laterais [BB'C'C] e [AA'C'C] são visíveis, bem como a base [A'B'C']. Já a face lateral [AA'B'B] e a base [ABC] são invisíveis.

Note que a representação das perspetivas das projeções do prisma não são absolutamente necessárias, facto pelo qual estas não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o prisma, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

**Traçado:**

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do prisma representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano que contém a base mais à esquerda do prisma), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da construção da projeção lateral do triângulo [ABC] e do prisma, em rebatimento, do eixo  $Z_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **YZ**.

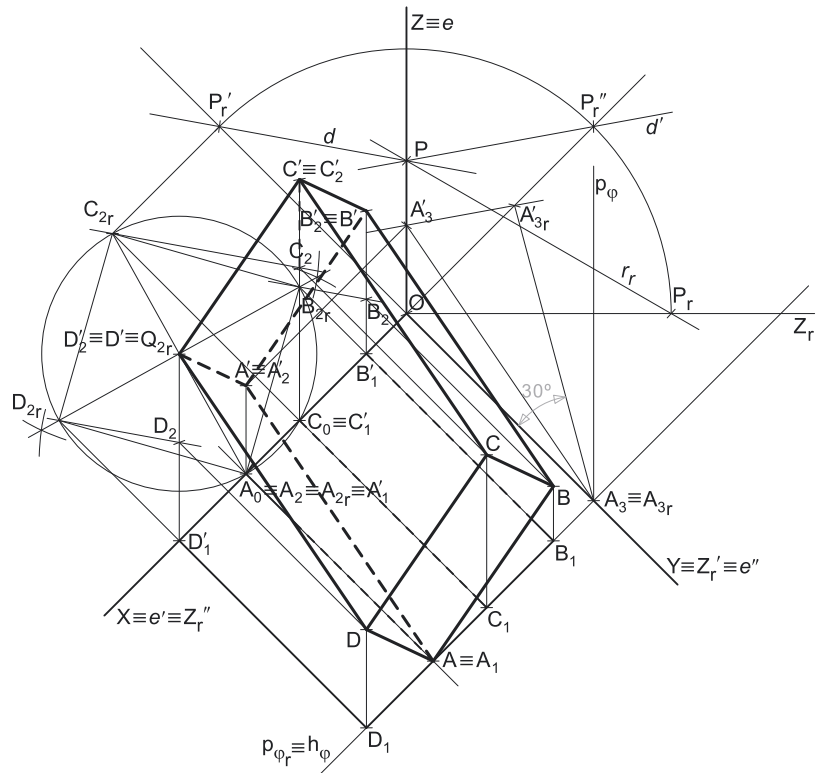
## 1278.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com as partes positivas do eixo  $X$  e do eixo  $Y$ , ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, as abscissas dos pontos  $A$  e  $C$  (6 cm e 4 cm, respetivamente), sobre o eixo  $X$  (a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), bem como o afastamento daqueles dois pontos (7 cm) sobre o eixo  $Y$  (também a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato,  $A_1$  e  $C_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente), bem como  $A_0$  e  $C_0$  (as referências das abscissas daqueles dois pontos, no eixo  $X$ ). Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

Salienta-se que o ponto  $A$  tem cota nula (é um ponto do plano coordenado  $XY$ ), pelo que  $A_3$  (a sua projeção lateral) se situa necessariamente no eixo  $Y$ , tal como  $A_2$  (a sua projeção frontal) se situa no eixo  $X$ . Por outro lado, e ainda porque o ponto  $A$  é um ponto do plano coordenado  $XY$ , o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, pelo que se tem, imediatamente,  $A \equiv A_1$  (sendo  $A$  a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ ).



Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém o quadrado  $[ABCD]$ ), pelos seus traços. O plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ). Nesse sentido, desenhou-se  $h_\phi$ , o traço horizontal do plano  $\phi$  –  $h_\pi$  passa por  $A_1$  e por  $C_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. Note que  $h_\phi$  é uma reta fronto-horizontal do plano, com cota nula.

Em seguida, desenhou-se a perspetiva do traço lateral do plano  $\phi$  ( $p_\phi$ ), que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$  e é concorrente com  $h_\phi$  no eixo  $Y$  –  $p_\phi$  é uma reta vertical do plano  $\phi$  com abscissa nula. Salienta-se que o plano  $\phi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_\phi$ ).

### Resolução:

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (a base de maior afastamento do prisma) é um plano frontal (de frente), que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XY$ ), pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspetiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao plano coordenado frontal (o plano  $XZ$ ), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XZ$  – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado  $XZ$ ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado  $XZ$**  (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

#### Rebatimento do plano $XZ$ e construção da projeção frontal do quadrado $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza:

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XZ$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $X$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Y$ , facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv Z_r'$ . O eixo  $Z_r'$  é o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XZ$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XZ$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XZ$  com a notação  $Z_r'$ , optando-se por manter a notação  $Z_r$  para o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $XZ$  rebatido, representou-se a projeção frontal do ponto  $A$ , em rebatimento ( $A_{2r}$ ).  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ) é um ponto da charneira (que é o eixo  $X$ ), pelo que roda sobre si própria (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_{2r} \equiv A_2$ .

No plano  $XY$  rebatido, representou-se, ainda a projeção frontal do ponto  $C$ , em rebatimento ( $C_{2r}$ ), em função da sua cota. Assim,  $C_{2r}$  é a projeção frontal do ponto  $C$  (em rebatimento) e situa-se 7 cm (a cota do ponto  $C$ ) para cima do eixo  $X$ , na sua linha de chamada (que passa por  $C_0$  e é perpendicular ao eixo  $X$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir de  $A_{2r}$  e  $C_{2r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XZ$ ), o que nos permitiu determinar  $B_{2r}$  e  $D_{2r}$  (as projeções frontais, em rebatimento, dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado  $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}]$  é a projeção frontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XZ$ . Os vértices  $B$  e  $D$  foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

Salienta-se que a construção da projeção frontal do quadrado (em rebatimento) careceu da determinação do ponto  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do centro do quadrado, em rebatimento), bem como do desenho da circunferência em que aquele quadrado se inscreve (a circunferência que tem centro em  $Q_{2r}$  e raio até  $A_{2r}$  e  $C_{2r}$ ).

Pelas projeções frontais dos pontos  $B$  e  $D$ , em rebatimento ( $B_{2r}$  e  $D_{2r}$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo  $X$ ) e determinaram-se as projeções horizontais daqueles dois pontos ( $B_1$  e  $D_1$ , respetivamente) sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Para determinar a perspectiva do quadrado  $[ABCD]$  é necessário inverter o rebatimento do plano  $XZ$ , o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade que permite inverter o rebatimento do plano  $XZ$ :*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XZ$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Z$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ ).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Z_r$ , a cota do ponto  $C$ , a partir de  $C_{2r}$ , com uma paralela ao eixo  $X$ . Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $Z_r$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota do ponto  $C$  ( $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto  $C$ , no eixo  $Z_r$ , pelo rebatimento do plano  $XZ$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **cota** do ponto  $P$  para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Z$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva da cota do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XZ$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XZ$  e determinação das perspectivas do ponto  $C$ :*

Para se determinarem as perspectivas do ponto  $C$  teve-se em conta que as projeções do ponto  $C$  (a projeção horizontal e a projeção frontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $C$  – a linha de chamada do ponto  $C$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $C_1$ , outro extremo em  $C_2$  e um vértice no eixo  $X$  (em  $C_0$ ). A parte da linha de chamada do ponto  $C$  que está contida no plano  $XZ$  é o segmento  $[C_0C_2]$  – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento  $[C_0C_{2r}]$ . A perspectiva desse segmento tem um extremo em  $C_0$  e é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta  $[C_0C_2]$ . Em seguida, por  $C_{2r}$  conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto  $C$  (a reta suporte do segmento  $[C_0C_2]$ ) é  $C_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $C$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XZ$ .

Em seguida, por  $C_1$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ ) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto  $C$ , que é vertical (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ). Depois, por  $C_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $C$ ), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto  $C$  (que é paralela ao eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$ .

Note que não se determinou a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C$  ( $C_3$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado,  $C_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C$ ) estaria necessariamente sobre  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

*Determinação das perspectivas dos pontos  $B$  e  $D$ :*

As perspectivas dos pontos  $B$  e  $D$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto  $C$ .

À semelhança do exposto para o ponto  $C$ , também não se determinaram as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $B$  e  $D$  ( $B_3$  e  $D_3$ , respetivamente), por estas não serem determinantes para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivessem determinado,  $B_3$  e  $D_3$  (as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $B$  e  $D$ , respetivamente) estariam necessariamente sobre  $p_\varphi$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

A partir das perspectivas propriamente ditas dos quatro vértices do quadrado, desenhou-se a perspectiva do quadrado  $[ABCD]$ .

*Construção da projeção horizontal do prisma:*

Atendendo a que as arestas laterais do prisma estão contidas em retas de perfil, foi possível determinar, de forma direta, as projeções horizontais dos vértices da base  $[A'B'C'D']$ . Nesse sentido, pelas projeções horizontais dos vértices da base  $[ABCD]$  conduziram-se as projeções horizontais das respetivas arestas laterais (que são paralelas ao eixo  $Y$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, tendo em conta que a base  $[A'B'C'D']$  está contida no plano  $XZ$  sabe-se que todos os seus vértices têm afastamento nulo. Assim, determinaram-se as projeções horizontais dos vértices da base  $[A'B'C'D']$  ( $A'_1$ ,  $B'_1$ ,  $C'_1$  e  $D'_1$ ), que se situam no eixo  $X$ .

É dado o ângulo que as arestas laterais do sólido (que são de perfil) fazem com o plano  $XY$ . Consideremos um desses ângulos, apenas, como exemplo da situação apresentada – consideremos o ângulo que a aresta lateral  $[AA']$  faz com o plano  $XY$ . Esse ângulo está contido no plano que contém a aresta lateral  $[AA']$  e é ortogonal ao plano  $XY$  – trata-se de um plano de perfil (que não se identificou).

O plano que contém o ângulo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano  $XY$ ), pelo que o ângulo **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspetiva do ângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o ângulo está contido num plano de perfil, que é paralelo ao *plano coordenado de perfil* (o plano  $YZ$ ), sabe-se que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado YZ* – o ângulo projeta-se em verdadeira grandeza no ângulo que a projeção lateral da aresta  $[AA']$  faz com o eixo  $Y$ . Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o ângulo se projeta em verdadeira grandeza).

*Rebatimento do plano YZ e construção do ângulo que as arestas laterais fazem com o plano XY, em projeção lateral, em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $YZ$  para o *plano axonométrico*, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e''$ ), que é o eixo  $Y$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r''$ ) fica coincidente com o eixo  $X$ , facto que se assinalou devidamente –  $X \equiv Z_r''$ . O eixo  $Z_r''$  é o eixo  $Z$  rebatido pelo rebatimento do plano  $YZ$  (salienta-se que se trata do terceiro rebatimento do eixo  $Z$ , neste exercício).

No plano  $YZ$  rebatido, representou-se a projeção lateral do ponto  $A$ , em rebatimento ( $A_{3r}$ ).  $A_3$  (a projeção lateral do ponto  $A$ ) é um ponto da charneira (que é o eixo  $Y$ ), pelo que roda sobre si própria (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_{3r} \equiv A_3$ .

Uma vez que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no plano  $YZ$ , foi possível, em verdadeira grandeza (no plano  $YZ$  rebatido), medir o ângulo de  $30^\circ$  que a aresta lateral  $[AA']$  faz com o plano  $XY$ , que é o ângulo que a aresta lateral  $[AA']$  faz com a sua projeção horizontal. Esse ângulo está, em verdadeira grandeza, no ângulo que o segmento  $[A_3A'_{3r}]$  (a projeção lateral da aresta  $[AA']$ , em rebatimento) faz com o eixo  $Y$ . Assim, a partir de  $A_{3r}$ , desenhou-se a reta suporte da projeção lateral da aresta  $[AA']$  (em rebatimento), com o ângulo referido (um ângulo de  $30^\circ$ ) e determinou-se  $A'_{3r}$  (a projeção lateral do ponto  $A'$ , em rebatimento), sobre o eixo  $Z_r''$ . Salienta-se que o ponto  $A'$  tem afastamento nulo (pois a base  $[A'B'C'D']$  está contida no plano  $XZ$ ).

Note que das duas hipóteses de medir o ângulo de  $30^\circ$  com o eixo  $Y$ , a partir de  $A_{3r}$ , apenas a que a resolução apresenta nos garante que o ponto  $A'$  tenha cota positiva, para que o ponto (e o prisma) se situe no espaço do  $1^\circ$  Triedro, como o enunciado refere expressamente.

Para determinar a perspetiva do ponto  $A'$  é necessário inverter o rebatimento do plano  $YZ$ , o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade que permite inverter o rebatimento do plano YZ:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $YZ$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $YZ$  com a sua perspetiva. Por outro lado, já se determinou o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Z$ , pelo que é possível, de forma quase direta, determinar a **direção de afinidade**.

A **direção de afinidade** que nos permite inverter o rebatimento do plano  $YZ$  (a direção  $d'$ ) determina-se na sequência dos traçados efetuados para a determinação da **direção de afinidade** que nos permitiu inverter o rebatimento do plano  $XZ$  (a direção  $d$ ).

Assim, determinou-se o ponto  $P_r''$ , no eixo  $Z_r''$  – note  $P_r''$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Z$  (o ponto utilizado para determinar a direção de afinidade  $d$ ) mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano  $YZ$ ). Assim,  $OP_r''$  é a cota do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano  $YZ$ . Note que o ponto  $P_r''$  foi determinado diretamente, no ponto de interseção do arco  $P_rP_r'$  com o eixo  $Z_r''$  mas, caso esse arco não intersetasse o eixo  $Z_r''$ , teria de ser prolongado, com o compasso, até que tal acontecesse.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $YZ$  com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r''$  e pela perspetiva do ponto  $P$  (a reta  $d'$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $YZ$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado YZ e determinação das perspetivas do ponto A':*

A projeção lateral do ponto  $A'$  ( $A'_3$ ) é necessariamente um ponto do eixo  $Z$ , pois o ponto tem afastamento nulo. Assim, a perspetiva da projeção lateral do ponto  $A'$  ( $A'_3$ ) situa-se necessariamente sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . Nesse sentido, por  $A'_{3r}$ , (a projeção lateral do ponto  $A'$ , em rebatimento) conduziu-se uma paralela à reta  $d'$  e determinou-se  $A'_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $A'$ ) sobre a perspetiva do eixo  $Z$ .

Em seguida, por  $A'_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $A'$ ) conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto  $A'$  (que é paralela ao eixo  $X$ ) e por  $A'_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A'$ ) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto  $A'$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$ ) – o ponto de interseção das duas retas é a perspetiva propriamente dita do ponto  $A'$ . Tendo em conta que o ponto  $A'$  é um ponto do plano  $XZ$  (porque tem afastamento nulo), o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, o que se assinalou em perspetiva – tem-se, imediatamente,  $A'_2 \equiv A'$ .

*Determinação das perspetivas dos pontos B', C' e D':*

Para se determinarem as perspetivas do ponto  $B'$  conduziu-se, por  $B'_1$  (que se situa no eixo  $X$ ) a perspetiva da sua linha de chamada (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$ ). Em seguida, teve-se em conta que os lados do quadrado  $[A'B'C'D']$  são necessariamente paralelos aos lados correspondentes do quadrado  $[ABCD]$ . Nesse sentido, pela perspetiva do ponto  $A'$  conduziu-se uma paralela à perspetiva do segmento  $[AB]$  (que é um lado da perspetiva do quadrado  $[ABCD]$ ) e determinou-se a perspetiva do ponto  $B'$ , sobre a perspetiva da respetiva linha de chamada. Tendo em conta que o ponto  $B'$  é um ponto do plano  $XZ$  (porque tem afastamento nulo), o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, o que se assinalou em perspetiva – tem-se, imediatamente,  $B'_2 \equiv B'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para se determinarem as perspetivas do ponto  $D'$  conduziu-se, por  $D'_1$  (que se situa no eixo  $X$ ) a perspetiva da sua linha de chamada (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$ ). Em seguida, teve-se novamente em conta que os lados do quadrado  $[A'B'C'D']$  são necessariamente paralelos aos lados correspondentes do quadrado  $[ABCD]$ . Nesse sentido, pela perspetiva do ponto  $A'$  conduziu-se uma paralela à perspetiva do segmento  $[AD]$  (que é um lado da perspetiva do quadrado  $[ABCD]$ ) e determinou-se a perspetiva do ponto  $D'$ , sobre a perspetiva da respetiva linha de chamada. Tendo em conta que o ponto  $D'$  é um ponto do plano  $XZ$  (porque tem afastamento nulo), o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, o que se assinalou em perspetiva – tem-se, imediatamente,  $D'_2 \equiv D'$ .

Por fim, para se determinarem as perspetivas do ponto  $C'$  conduziu-se, por  $C'_1$  (que se situa no eixo  $X$ ) a perspetiva da sua linha de chamada (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$ ). Em seguida, teve-se mais uma vez em conta que os lados do quadrado  $[A'B'C'D']$  são necessariamente paralelos aos lados correspondentes do quadrado  $[ABCD]$ . Nesse sentido, pela perspetiva do ponto  $B'$  (por exemplo) conduziu-se uma paralela à perspetiva do segmento  $[BC]$  (que é um lado da perspetiva do quadrado  $[ABCD]$ ) e determinou-se a perspetiva do ponto  $C'$ , sobre a perspetiva da respetiva linha de chamada. Tendo em conta que o ponto  $C'$  é um ponto do plano  $XZ$  (porque tem afastamento nulo), o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, o que se assinalou em perspetiva – tem-se, imediatamente,  $C'_2 \equiv C'$ .

#### Determinação da perspetiva do prisma:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[ABB'C'D'D]$ . Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente do sólido – os vértices  $C$  e  $A'$ . O vértice  $C$ , por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[BC]$  e  $[CD]$ , da base  $[ABCD]$ , e a aresta lateral  $[CC']$ ). Já o vértice  $A'$ , por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[A'B']$  e  $[A'D']$ , da base  $[A'B'C'D']$ , e a aresta lateral  $[AA']$ ).

Salienta-se que as perspetivas das arestas laterais  $[BB']$ ,  $[CC']$  e  $[DD']$  são necessariamente paralelas à perspetiva da aresta lateral  $[AA']$ , sendo que este facto poderia ter sido utilizado para se determinarem, atrás, as perspetivas dos vértices  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  do quadrado  $[A'B'C'D']$ .

As faces laterais  $[BB'C'C]$  e  $[AA'C'C]$  são visíveis, bem como a base  $[A'B'C']$ . Já a face lateral  $[AA'B'B]$  e a base  $[ABC]$  são invisíveis.

Note que a representação das perspetivas das projeções do prisma não são absolutamente necessárias, facto pelo qual estas não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o prisma, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do prisma representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do prisma), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspetivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano  $XZ$  e da construção da projeção frontal do quadrado  $[ABCD]$  (em rebatimento), do rebatimento do plano  $YZ$  e da representação da projeção lateral da aresta  $[AA']$  (em rebatimento), do eixo  $Z_r$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$ , da direção de afinidade  $d'$  e, ainda, de todos os traçados referentes à inversão do rebatimento do plano  $XZ$  e do plano  $YZ$ .



## 1279.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com as partes positivas do eixo **Y** e do eixo **X**, ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, a abscissa do ponto **Q** (6 cm), sobre o eixo **X** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), bem como o afastamento do ponto **Q** (6 cm) sobre o eixo **Y** (também a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato, **Q<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **Q**), bem como **Q<sub>0</sub>** (a referência da abscissa do ponto **Q**, no eixo **X**). Note que o eixo **X** e o eixo **Y** estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

### Resolução:

O plano que contém a base do cone (um plano horizontal) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano **XY**), pelo que o círculo (a base do sólido) **projeta-se em verdadeira grandeza** (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção horizontal são figuras geometricamente iguais.

Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal da base do cone.

Por outro lado, trata-se de um **cone oblíquo**, cujo eixo está contido numa reta frontal (de frente) **f**, cuja direção é dada – é dado o ângulo que a reta **f** faz com o plano **XY**. Acontece que esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano **XY**), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Atendendo a que o ângulo que a reta **f** faz com o plano **XY** se projeta em verdadeira grandeza no plano **XZ** (que é o plano ao qual a reta **f** é paralela), o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o ângulo se projeta em verdadeira grandeza).

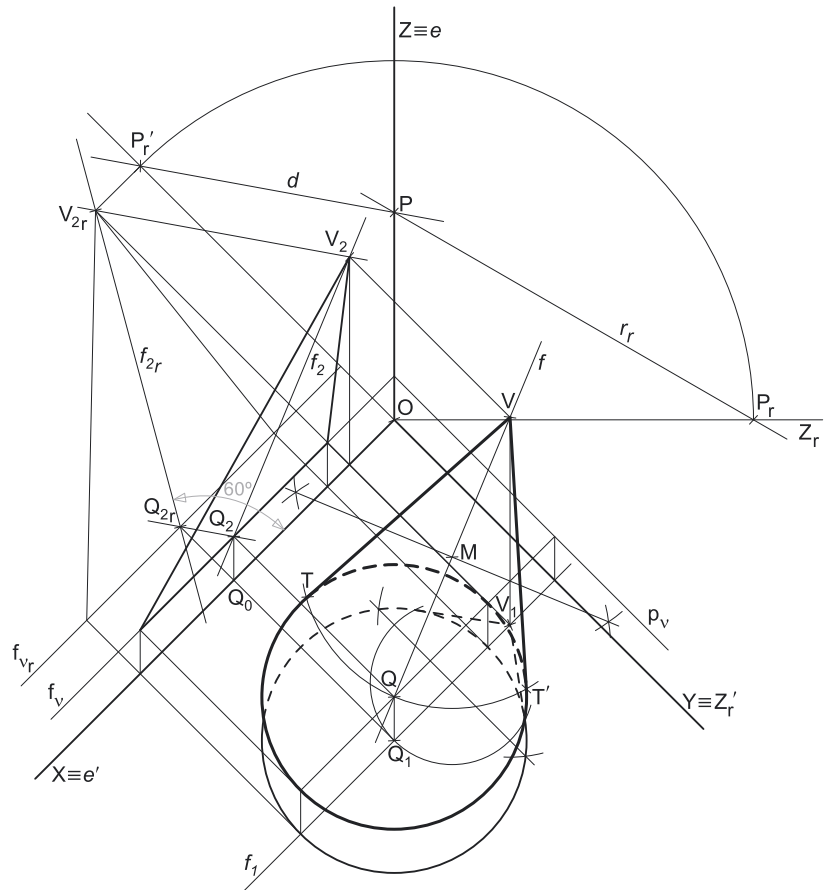
### Rebatimento do plano XZ e construção da projeção frontal do cone, em verdadeira grandeza:

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano **XZ** para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é o eixo **X**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>'**) fica coincidente com o eixo **Y**, facto que se assinalou devidamente – **Y ≡ Z<sub>r</sub>'**. O eixo **Z<sub>r</sub>'** é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **XZ**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XZ** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ** com a notação **Z<sub>r</sub>'**, optando-se por manter a notação **Z<sub>r</sub>** para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano **XZ** rebatido, representou-se a projeção frontal do ponto **Q**, em rebatimento (**Q<sub>2r</sub>**), em função da sua cota (que é 2 cm). Assim, **Q<sub>2r</sub>** é a projeção frontal do ponto **Q** (em rebatimento) e situa-se 2 cm (a cota do ponto **Q**) para cima do eixo **X**, na sua linha de chamada (que passa por **Q<sub>0</sub>** e é perpendicular ao eixo **X**). Por **Q<sub>2r</sub>** (a projeção frontal do ponto **Q**, em rebatimento) conduziu-se uma paralela ao eixo **X**, que é o traço frontal do plano **v**, em rebatimento – **f<sub>vr</sub>**. O plano **v** (o plano horizontal que contém a base do cone) é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano **XZ**), pelo que projeta todas as suas retas e pontos no seu traço frontal (**f<sub>v</sub>**). Assim, tanto no espaço como em perspectiva e em rebatimento, as projeções frontais de todos os pontos do plano **v** estão sobre o traço frontal do plano **v** (**f<sub>v</sub>**).

Dessa forma, foi também possível representar a projeção frontal da base do cone, para o que se desenhou o diâmetro fronto-horizontal do círculo (o diâmetro que é paralelo ao eixo **X**) – a projeção frontal da base do cone (em rebatimento) reduz-se a um segmento de reta sobre **f<sub>vr</sub>** (o traço frontal do plano **v**, em rebatimento), do qual **Q<sub>2r</sub>** (a projeção frontal do ponto **Q**, em rebatimento) é o ponto médio.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No plano  $XZ$  rebatido, foi possível, em verdadeira grandeza e a partir de  $Q_2$ , (a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento), medir o ângulo que a projeção frontal da reta  $f$ , em rebatimento ( $f_2$ ) faz com o eixo  $X$  (e que é o ângulo que a reta  $f$  faz com o plano  $XY$ ). Assim,  $f_2$ , (a projeção frontal da reta  $f$ , em rebatimento) passa por  $Q_2$ , (a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) e faz, com o eixo  $X$ , um ângulo de  $60^\circ$  (de abertura para a direita).

Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas do vértice e do plano da base. O plano horizontal (de nível) que contém a base do cone (o plano  $v$ ) tem 2 cm de cota (a cota do ponto  $Q$ ) e o cone tem 7,5 cm de altura, pelo que o vértice do cone (o ponto  $V$ ) tem 9,5 cm de cota ( $2 + 7,5 = 9,5$ ). Assim, o ponto  $V$  é o ponto da reta  $f$  (a reta suporte do eixo do cone) que tem 9,5 cm de cota. Nesse sentido, determinou-se  $V_2$ , (a projeção frontal, em rebatimento, do ponto  $V$ ), sobre  $f_2$ , (a projeção frontal, em rebatimento, da reta  $f$ ), em função da sua cota (a sua distância ao eixo  $X$ ).

A determinação do ponto  $V_2$ , permitiu-nos concluir o desenho da projeção frontal do cone, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XZ$ ). Note ainda que se representou a reta  $f$  pela sua projeção horizontal ( $f_1$ ), passando por  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ ) e paralela ao eixo  $X$  (pois todos os pontos da reta  $f$  têm o mesmo afastamento).

Para determinar a perspectiva do cone é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XZ$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XY$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ . O eixo  $Z$  rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Z$ ).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Z_r$ , a cota do ponto  $V$ , a partir de  $V_2$ , com uma paralela ao eixo  $X$ . Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r$ , no eixo  $Z_r$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com a cota do ponto  $V$  ( $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto  $V$ , no eixo  $Z_r$ , pelo rebatimento do plano  $XZ$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r}$ , transportou-se a **cota** do ponto  $P$  para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Z$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva da cota do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XZ$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XZ$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XZ$  e determinação das perspectivas do ponto  $Q$ :*

Para se determinar a perspectiva do ponto  $Q$  foi necessário inverter o rebatimento do plano  $XZ$ . Nesse sentido, as projeções do ponto  $Q$  (a projeção horizontal e a projeção frontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $Q$  – a linha de chamada do ponto  $Q$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $Q_1$ , outro extremo em  $Q_2$  e um vértice no eixo  $X$  (em  $Q_0$ ). A parte da linha de chamada do ponto  $Q$  que está contida no plano  $XZ$  é o segmento  $[Q_0Q_2]$  – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento  $[Q_0Q_2]$ . A perspectiva desse segmento tem um extremo em  $Q_0$  e é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta  $[Q_0Q_2]$ . Em seguida, por  $Q_2$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto  $Q$  (a reta suporte do segmento  $[Q_0Q_2]$ ) é  $Q_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XZ$ .

Em seguida, por  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ ) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto  $Q$ , que é vertical (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ). Depois, por  $Q_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q$ ), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto  $Q$  (que é paralela ao eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ .

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base do cone:*

Tendo em conta que o plano  $v$  é um plano projetante frontal, sabe-se que as projeções frontais de todos os pontos do plano estão sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ). O ponto  $Q$  é um ponto do plano  $v$ . Assim, por  $Q_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q$ ) conduziu-se uma paralela ao eixo  $X$ , que é a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$  com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $X$ .

Em seguida, desenhou-se  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ), que é concorrente com  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) na perspectiva do eixo  $Z$  e é necessariamente paralela ao eixo  $Z$ . Note que o traço lateral do plano  $v$  ( $p_v$ ) é uma reta vertical do plano  $v$ , com abcissa nula.

O plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado  $YZ$* ) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado  $YZ$* , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto  $V$ :*

As perspectivas do ponto  $V$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto  $Q$ . Salienta-se apenas o facto de o ponto  $V$  não pertencer ao plano  $v$  (o vértice do cone é necessariamente um ponto exterior ao plano da base). Nesse sentido, a perspectiva da projeção frontal do ponto  $V$  ( $V_2$ ) não se situa sobre  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que não se determinaram as perspectivas das projeções laterais dos pontos **Q** e **V** ( $Q_3$  e  $V_3$ , respectivamente), por estas não serem determinantes para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado  $Q_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **Q**), esta estaria necessariamente sobre  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

### Determinação da perspectiva do cone:

Atendendo a que o plano  $v$  (o plano que contém a base do cone) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o círculo projeta-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano **XY**). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q** (a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base do cone, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do cone é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a base do cone) que passam por um ponto exterior (a perspectiva do ponto **V**).

Assim, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do segmento  $[QV]$  (com o recurso à mediatriz do segmento) e, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio até ao ponto **Q**, desenhou-se um arco de circunferência – os pontos em que o arco corta a circunferência são os pontos **T** e **T'**. Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone são tangentes à base do sólido.

Após a determinação dos pontos **T** e **T'**, desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone (as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ ) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – o arco menor  $\overline{TT'}$  (da circunferência que delimita a base) é invisível.

Note que a representação das perspectivas das projeções do cone não são absolutamente necessárias, apesar de se terem representado as perspectivas da projeção horizontal e da projeção frontal do cone. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o cone, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cone representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base do cone), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da construção da projeção frontal do cone, em rebatimento, do eixo  $Z_r$ , da direção de afinidade  $d$ , dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano  $XZ$  e, ainda, da construção que nos permitiu determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido.

## 1280.

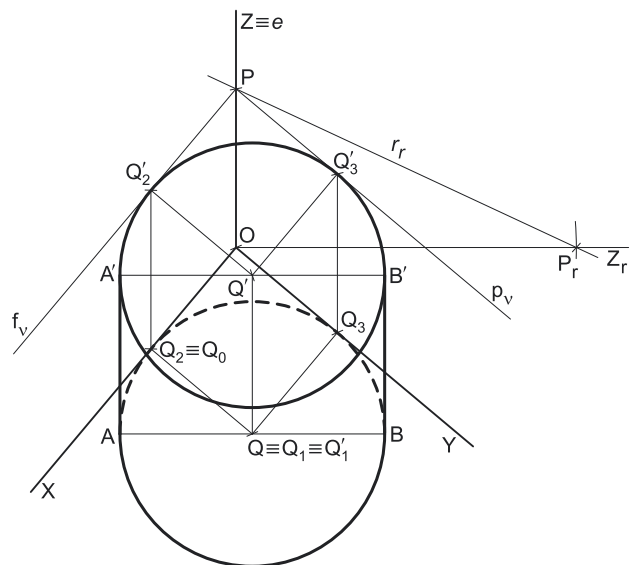
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de  $140^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de  $130^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

### Resolução:

As bases do cilindro são tangentes aos planos coordenados verticais (o plano  $XZ$  e o plano  $YZ$ ), pelo que as distâncias dos respetivos centros àqueles planos coordenados são iguais ao raio das bases, que é 3,5 cm. Assim, o ponto **Q** (o centro da base inferior) tem 3,5 cm de abscissa e 3,5 cm de afastamento. Por outro lado, atendendo a que se trata de um cilindro de revolução com bases horizontais (de nível), as suas geratrizes (e o seu eixo) são ortogonais aos planos das bases, pelo que estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais). Assim, o eixo do sólido está contido numa reta vertical, pelo que, tal como o ponto **Q**, o ponto **Q'** tem 3,5 cm de abscissa e 3,5 cm de afastamento.

Assim, foi possível representar, em verdadeira grandeza, a abscissa do ponto **Q** (3,5 cm), sobre o eixo **X** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), bem como o seu afastamento (3,5 cm) sobre o eixo **Y** (também a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato,  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**), bem como  $Q_0$  (a referência da abscissa do ponto **Q**, no eixo **X**). Note que o eixo **X** e o eixo **Y** estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **Q** pertence ao plano **XY** (o plano que contém a base inferior do cilindro), pelo que tem cota nula. Nesse sentido, a projeção frontal do ponto **Q** (**Q<sub>2</sub>**) situa-se no eixo **X**, tal como a sua projeção lateral (**Q<sub>3</sub>**) se situa no eixo **Y**. Por fim, o ponto **Q** é um ponto do plano **XY**, pelo que o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou imediatamente no desenho –  $Q \equiv Q_1$  (sendo **Q** a perspetiva propriamente dita do ponto **Q**).

Por outro lado, porque se trata de um **cilindro de revolução** (um **cilindro reto**), como atrás se referiu, o seu eixo está contido numa reta vertical, que é uma reta projetante horizontal. Nesse sentido, o ponto **Q** (o centro da base inferior) e o ponto **Q'** (o centro da base superior) têm as suas projeções horizontais coincidentes, facto que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente,  $Q'_1 \equiv Q_1$ .

A base inferior do cilindro está contida no próprio *plano axonométrico* (que é o plano **XY**), pelo que o círculo (a base inferior do sólido) **está em verdadeira grandeza** (a perspetiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspetiva e a sua projeção horizontal são a mesma figura. Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q** (a perspetiva propriamente dita do ponto **Q**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a perspetiva da base inferior do cilindro – note que a circunferência é tangente ao eixo **X** no ponto **Q<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **Q**) e é também tangente ao eixo **Y** no ponto **Q<sub>3</sub>** (a projeção lateral do ponto **Q**).

A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, nesta situação, corresponde à diferença das cotas dos planos das bases. A base inferior do cilindro está contida no plano **XY**, que é um plano horizontal (de nível) com cota nula e o cilindro tem 9 cm de altura, pelo que o plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do cilindro) tem 9 cm de cota ( $0 + 9 = 9$ ).

Assim, para determinar a perspetiva do cilindro é necessário, em primeiro lugar, determinar a perspetiva do ponto **Q'** (o centro da base superior), para o que é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, de forma a ser possível determinar a perspetiva da cota daquele ponto (a **cota** é a única coordenada que apresenta deformação).

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A **cota** do ponto **Q'**, porque se mede no eixo **Z**, está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspetiva do eixo **Z**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), representou-se a **cota** do ponto **Q'** (9 cm), em verdadeira grandeza, determinando-se um ponto – o ponto **P<sub>r</sub>**. O ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do ponto **Q'** ( $OP_r = 9$  cm e é a cota do plano da base superior do cilindro, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $65^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspetiva do ponto **P**, sobre a perspetiva do eixo **Z** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspetiva da cota do ponto **Q** (**OP** é a perspetiva da cota do ponto **Q**).

#### Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base superior do cilindro:

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspetiva do eixo **Z**, a perspetiva do ponto **P**, que é o ponto do eixo **Z** que tem 9 cm de cota e que é um ponto do plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do cilindro). Assim, pela perspetiva do ponto **P** conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $v$  – **f<sub>v</sub>** (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ) e **p<sub>v</sub>** (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ).

Note que **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela ao eixo **X**. Pelo seu lado, **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela ao eixo **Y**.

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal (**f<sub>v</sub>**). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral (**p<sub>v</sub>**).

#### Determinação das perspetivas do ponto Q':

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **Q'** determinaram-se as perspetivas da sua projeção frontal (**Q'<sub>2</sub>**) e da sua projeção lateral (**Q'<sub>3</sub>**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **Q'<sub>2</sub>** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **Q'<sub>3</sub>** e **O** são dois vértices opostos). **Q'<sub>2</sub>** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **Q'** e situa-se sobre a perspetiva de **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. **Q'<sub>3</sub>** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **Q'** e situa-se sobre **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **Q'**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **Q'<sub>1</sub>**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **Q'** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **Q'<sub>2</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **Q'** (que é paralela ao eixo **Y**) e pela perspetiva de **Q'<sub>3</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **Q'** (que é paralela ao eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **Q'**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **Q'** são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação da perspetiva do cilindro:

Atendendo a que o plano  $v$  (o plano que contém a base superior do cilindro) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XY**), esta base projeta-se em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o plano **XY**) – o círculo da base, a sua perspetiva e a sua projeção horizontal são figuras geometricamente iguais. Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q'** (a perspetiva propriamente dita do ponto **Q**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a perspetiva propriamente dita da base **superior** do cilindro, em verdadeira grandeza. Salienta-se que o círculo é tangente a **f<sub>v</sub>** (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ) no ponto **Q'<sub>2</sub>** (a perspetiva da projeção frontal do ponto **Q'**) e é igualmente tangente a **p<sub>v</sub>** (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ) no ponto **Q'<sub>3</sub>** (a perspetiva da projeção lateral do ponto **Q'**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A perspectiva do cilindro é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (as circunferências que delimitam as duas bases do cilindro) que são paralelas a uma reta dada (a perspectiva do eixo do cilindro).

Assim, desenharam-se os diâmetros das duas circunferências que são perpendiculares ao segmento  $[QQ']$  (a perspectiva do eixo do sólido), o que nos permitiu determinar os pontos de tangência – os pontos **A** e **B** (da base inferior) e os pontos **A'** e **B'** (da base superior).

Após a determinação dos pontos **A**, **B**, **A'** e **B'**, desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cilindro (as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ ) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – a semicircunferência **AB** de menor abscissa (da base inferior) é invisível. A base superior é visível na sua totalidade.

Note que a representação das perspectivas das projeções do cilindro não são absolutamente necessárias, razão pela qual não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o cilindro, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cilindro representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano que contém a base superior do sólido), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo  $Z_r$ , da reta  $r_r$ , e, ainda, da construção que nos permitiu determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido.

## 1281.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo **X** e do eixo **Y**, ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, a abscissa do ponto **Q** (4 cm), sobre o eixo **X** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), bem como o afastamento do ponto **Q** (3 cm) sobre o eixo **Y** (também a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato,  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**), bem como  $Q_0$  (a referência da abscissa do ponto **Q**, no eixo **X**). Note que o eixo **X** e o eixo **Y** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

### Resolução:

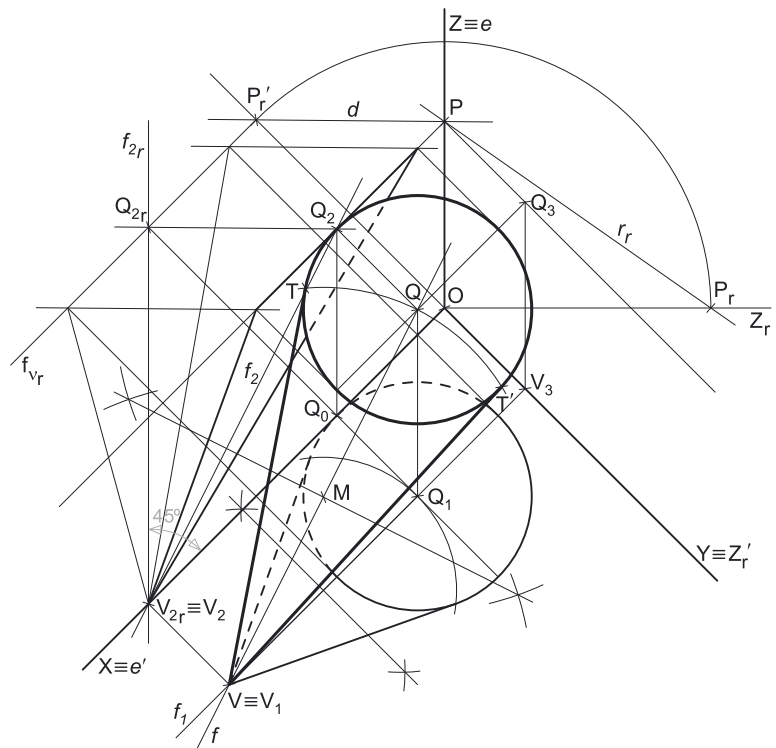
O plano que contém a base do cone (um plano horizontal) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XY**), pelo que o círculo (a base do sólido) **projeta-se em verdadeira grandeza** (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção horizontal são figuras geometricamente iguais.

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal da base do cone – salienta-se que a circunferência é tangente ao eixo **X** (no ponto  $Q_0$ ), pois o raio da circunferência é igual ao afastamento do ponto **Q**.

Por outro lado, trata-se de um **cone oblíquo**, cujo eixo está contido numa reta frontal (de frente)  $f$ , cuja direção é dada – é dado o ângulo que a reta  $f$  faz com o plano **XY**. Acontece que esse ângulo não se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XY**), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Atendendo a que o ângulo que a reta  $f$  faz com o plano **XY** se projeta em verdadeira grandeza no plano **XZ** (que é o plano ao qual a reta  $f$  é paralela), o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o ângulo se projeta em verdadeira grandeza).

(continua na página seguinte)





(continuação da página anterior)

*Rebatimento do plano XZ e construção da projeção frontal do cone, em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano XZ para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo X. O eixo Z rebatido (o eixo  $Z_r'$ ) fica coincidente com o eixo Y, facto que se assinalou devidamente  $-Y \equiv Z_r'$ . O eixo  $Z_r'$  é o eixo Z rebatido pelo rebatimento do plano XZ.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano XZ com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo Z. De forma semelhante, identificou-se o eixo Z rebatido pelo rebatimento do plano coordenado XZ com a notação  $Z_r'$ , optando-se por manter a notação  $Z_r$  para o eixo Z rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano XZ rebatido, representou-se a projeção frontal do ponto Q, em rebatimento ( $Q_{2r}$ ), em função da sua cota (que é 7 cm). Assim,  $Q_{2r}$  é a projeção frontal do ponto Q (em rebatimento) e situa-se 7 cm (a cota do ponto Q) para cima do eixo X, na sua linha de chamada (que passa por  $Q_0$  e é perpendicular ao eixo X). Por  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do ponto Q, em rebatimento) conduziu-se uma paralela ao eixo X, que é o traço frontal do plano v, em rebatimento  $-f_{vr}$ . O plano v (o plano horizontal que contém a base do cone) é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano XZ), pelo que projeta todas as suas retas e pontos no seu traço frontal ( $f_v$ ). Assim, tanto no espaço como em perspectiva e em rebatimento, as projeções frontais de todos os pontos do plano v estão sobre o traço frontal do plano v ( $f_v$ ).

Dessa forma, foi também possível representar a projeção frontal da base do cone, para o que se desenhou o diâmetro fronto-horizontal do círculo (o diâmetro que é paralelo ao eixo X) – a projeção frontal da base do cone (em rebatimento) reduz-se a um segmento de reta sobre  $f_{vr}$  (o traço frontal do plano v, em rebatimento), do qual  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do ponto Q, em rebatimento) é o ponto médio.

No plano XZ rebatido, foi possível, em verdadeira grandeza e a partir de  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do ponto Q, em rebatimento), medir o ângulo que a projeção frontal da reta  $f$ , em rebatimento ( $f_{2r}$ ) faz com o eixo X (e que é o ângulo que a reta  $f$  faz com o plano XY). Assim,  $f_{2r}$  (a projeção frontal da reta  $f$ , em rebatimento) passa por  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do ponto Q, em rebatimento) e faz, com o eixo X, um ângulo de  $45^\circ$  (de abertura para a direita). Em seguida, desenhou-se  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ), passando por  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto Q) e paralela ao eixo X (pois todos os pontos da reta  $f$  têm o mesmo afastamento).

Por outro lado, é dado, no enunciado, que o vértice do cone tem cota nula – o ponto V é, assim, o traço horizontal da reta  $f$ , que se determinou de forma imediata, em Dupla Projeção Ortogonal (a partir da projeção horizontal e da projeção frontal, em rebatimento, da reta  $f$ ). Assim,  $V_{2r}$  (a projeção frontal do ponto V, em rebatimento) é o ponto de  $f_{2r}$  (a projeção frontal da reta  $f$ , em rebatimento) que tem cota nula (e, por isso, se situa no eixo X). A determinação do ponto  $V_{2r}$  permitiu-nos concluir o desenho da projeção frontal do cone, em rebatimento (no rebatimento do plano XZ).

Em seguida, determinou-se  $V_1$  (a projeção horizontal do ponto V), que está sobre  $f_1$  (a projeção horizontal da reta  $f$ ). A determinação do ponto  $V_1$  permitiu-nos concluir o desenho da projeção horizontal do cone.

O ponto V pertence ao plano XY (pois tem cota nula), pelo que a projeção frontal do ponto V ( $V_2$ ) se situa no eixo X (tem-se, imediatamente,  $V_2 \equiv V_{2r}$ ), tal como a sua projeção lateral ( $V_3$ ) se situa no eixo Y. Por fim, o ponto V é um ponto do plano XY, pelo que o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou imediatamente no desenho  $-V \equiv V_1$  (sendo V a perspectiva propriamente dita do ponto V).

Para determinar a perspectiva do cone é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado XZ (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano XZ com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo Y, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo Z para o plano axonométrico (o plano XY). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo Z. O eixo Z rebatido (o eixo  $Z_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo Z. O ponto O é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Z_r$  está definido por um ponto (o ponto O) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo Z).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Z_r'$ , a cota do plano v, o que nos permitiu determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $Z_r'$  – o ponto P é um ponto do eixo Z com a cota do plano v ( $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto Q, no eixo  $Z_r'$ , pelo rebatimento do plano XZ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto O e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a cota do ponto P para o eixo  $Z_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto P do eixo Z, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo Z). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto P, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo Z. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $55^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto P, em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva da cota do plano v –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota do plano v.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano XZ com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto P (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano XZ).

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base superior do cilindro:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo Z, a perspectiva do ponto P, que é o ponto do eixo Z que tem 7 cm de cota e que é um ponto do plano v (o plano horizontal que contém a base superior do cilindro). Assim, pela perspectiva do ponto P conduziram-se as perspectivas dos traços do plano v –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano v) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano v).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abscissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XZ$  e determinação das perspectivas do ponto  $Q$ :*

Para se determinar a perspectiva do ponto  $Q$  foi necessário inverter o rebatimento do plano  $XZ$ . Nesse sentido, as projeções do ponto  $Q$  (a projeção horizontal e a projeção frontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $Q$  – a linha de chamada do ponto  $Q$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $Q_1$ , outro extremo em  $Q_2$  e um vértice no eixo  $X$  (em  $Q_0$ ). A parte da linha de chamada do ponto  $Q$  que está contida no plano  $XZ$  é o segmento  $[Q_0Q_2]$  – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento  $[Q_0Q_2]$ . A perspectiva desse segmento tem um extremo em  $Q_0$  e é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta  $[Q_0Q_2]$ . Em seguida, por  $Q_2$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a direção de afinidade) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto  $Q$  (a reta suporte do segmento  $[Q_0Q_2]$ ) é  $Q_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q$ ). Salienta-se que  $Q_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q$ ) se situa necessariamente sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, por  $Q_1$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ ) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto  $Q$ , que é vertical (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ). Depois, por  $Q_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q$ ), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto  $Q$  (que é paralela ao eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ .

Note que, apesar de não ser fundamental para a resolução do exercício, se optou por determinar, ainda, a perspectiva da projeção lateral do ponto  $Q$  ( $Q_3$ ), que se situa sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

*Determinação da perspectiva do cone:*

Atendendo a que o plano  $v$  (o plano que contém a base do cone) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o círculo projetava-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano  $XY$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base do cone, em verdadeira grandeza. Note que a circunferência é tangente a  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) no ponto  $Q_2$  (a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q$ ).

A perspectiva do cone é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a base do cone) que passam por um ponto exterior (a perspectiva do ponto  $V$ ).

Assim, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do segmento  $[QV]$  (com o recurso à mediatriz do segmento) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio até ao ponto  $Q$ , desenhou-se um arco de circunferência – os pontos em que o arco corta a circunferência são os pontos  $T$  e  $T'$ . Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone são tangentes à base do sólido.

Após a determinação dos pontos  $T$  e  $T'$ , desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone (as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ ) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido. Salienta-se que, nesta situação, não existem quaisquer invisibilidades na perspectiva do sólido, pois a base é visível na sua totalidade.

Note que a representação das perspectivas das projeções do cone não são absolutamente necessárias, apesar de se terem representado as perspectivas da projeção horizontal e da projeção frontal do cone. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o cone, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cone representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base do cone), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da construção da projeção frontal do cone, em rebatimento, do eixo  $Z_r$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$ , dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano  $XZ$  e, ainda, da construção que nos permitiu determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido.



(continuação da página anterior)

Por outro lado, é dado, no enunciado, que o vértice **V**, do cone, se situa na reta suporte da aresta **[AA']** do cubo, que é uma reta projetante horizontal. Nesse sentido, os pontos **A**, **A'** e **V** situam-se na mesma reta projetante horizontal, pelo que têm as suas projeções horizontais coincidentes, facto que se assinalou convenientemente no desenho – tem-se, imediatamente,  $V_1 \equiv A'_1 \equiv A_1 \equiv A$ .

Todas as arestas de um cubo têm o mesmo comprimento. Nesse sentido, a distância entre os planos das duas faces horizontais (de nível) do cubo corresponde ao comprimento de qualquer dos lados do quadrado **[ABCD]** (uma das faces do cubo), que está em verdadeira grandeza no plano **XY** – a cota do plano **v** (o plano que contém a face superior do cubo) é igual à medida do lado do quadrado **[ABCD]**.

Por outro lado, a altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano que contém a base o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre a cota do vértice **V** e a cota do plano **v** (o plano que contém, simultaneamente, a base do cone e a face superior do cubo). Uma vez que o cone tem 7 cm de altura, sabe-se que a cota do ponto **V** é 7 superior à cota do plano **v**.

Nesse sentido, para determinar as perspetivas dos dois sólidos há que, em primeiro lugar, determinar as perspetivas das cotas do plano **v** e do vértice **V**, para o que é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, de forma a ser possível determinar as perspetivas daquelas duas cotas (a **cota** é a única coordenada que apresenta deformação).

### Determinação gráfica do coeficiente de deformação das cotas do plano horizontal (de nível) e do vértice **V**:

A **cota** do plano **v**, o plano horizontal (de nível) que contém o quadrado **[A'B'C'D']**, porque se mede no eixo **Z**, está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, o processo mais simples consiste em recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o plano axonométrico (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>**) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z<sub>r</sub>** está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção perpendicular à perspetiva do eixo **Z**).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z<sub>r</sub>** (e no sentido positivo do eixo), representou-se, em verdadeira grandeza, a **cota** do plano **v** (o plano horizontal que contém o quadrado **[A'B'C'D']**), que é igual ao comprimento do lado do quadrado **[ABCD]**, determinando-se um ponto **P<sub>r</sub>**. O ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do plano **v** (**OP<sub>r</sub>** é a cota do plano horizontal, em verdadeira grandeza).

Em seguida, e atendendo a que a cota do vértice **V** é 7 cm superior à cota do plano **v** (que, em rebatimento, é  $\overline{OP_r}$ ), mediram-se os 7 cm (a altura do cone), sobre o eixo **Z<sub>r</sub>**, a partir do ponto **P<sub>r</sub>** e no sentido positivo do eixo, o que nos permitiu determinar um ponto **R<sub>r</sub>**. O ponto **R** é um ponto do eixo **Z** com a cota do vértice **V** (**OR<sub>r</sub>** é a cota do vértice do cone, em verdadeira grandeza).

Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 50°) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspetiva do ponto **P**, sobre a perspetiva do eixo **Z** – o segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspetiva da cota do plano horizontal (de nível) que contém a face superior do cubo (**OP** é a perspetiva da cota do plano horizontal **v**).

Em seguida, por **R<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta (que não se identificou) paralela à reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 50°) – essa reta é a reta projetante do ponto **R**, em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspetiva do ponto **R**, sobre a perspetiva do eixo **Z** – o segmento **[OR]** é, assim, um segmento representativo da perspetiva da cota do vértice **V**, do cone (**OR** é a perspetiva da cota do ponto **V**).

### Representação do plano horizontal (de nível) que contém a face superior do cubo e a base do cone:

Em seguida, pela perspetiva do ponto **P** conduziram-se as perspetivas dos traços do plano **v** – **f<sub>v</sub>** (a perspetiva do traço frontal do plano **v**) e **p<sub>v</sub>** (a perspetiva do traço lateral do plano **v**).

Note que **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano **v**) é uma reta fronto-horizontal do plano **v**, com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **X**. Pelo seu lado, **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano **v**) é uma reta de topo do plano **v**, com abcissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo **Y**.

O plano **v** é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal (**f<sub>v</sub>**). Por outro lado, o plano **v** é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral (**p<sub>v</sub>**).

### Determinação das perspetivas do ponto **Q**:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **Q** determinou-se a perspetiva da sua projeção frontal (**Q<sub>2</sub>**), recorrendo ao paralelogramo de que **Q<sub>2</sub>** e **O** são dois vértices opostos. **Q<sub>2</sub>** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **Q** e situa-se sobre a perspetiva de **f<sub>v</sub>** (o traço frontal do plano **v**), pois o plano **v** é um plano projetante frontal e o ponto **Q** pertence ao plano **v**. Salienta-se que não se determinou a perspetiva da projeção lateral do ponto **Q** (**Q<sub>3</sub>**), pois esta não é determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado, **Q<sub>3</sub>** (a perspetiva da projeção lateral do ponto **Q**) estaria necessariamente sobre **p<sub>v</sub>** (a perspetiva do traço lateral do plano **v**), pois o plano **v** é um plano projetante lateral.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **Q**. Para tal conduziu-se, por **Q<sub>1</sub>**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **Q** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**) e pela perspetiva de **Q<sub>2</sub>** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **Q** (que é paralela ao eixo **Y**) – as duas retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **Q**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação das perspectivas dos pontos $A'$ , $B'$ , $C'$ e $D'$ :

A determinação das perspectivas dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  efetuou-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $Q$ . Os pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  também pertencem ao plano  $v$ , pelo que as perspectivas das suas projeções frontais ( $A'_2$ ,  $B'_2$ ,  $C'_2$  e  $D'_2$ , respetivamente), situam-se sobre  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

De forma semelhante à exposta para o ponto  $Q$ , também não se determinaram as perspectivas das projeções laterais dos quatro vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$ , mas caso se tivessem determinado, as perspectivas das suas projeções laterais ( $A'_3$ ,  $B'_3$ ,  $C'_3$  e  $D'_3$ ) situar-se-iam sobre  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

#### Determinação das perspectivas do ponto $V$ :

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto  $V$  determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal ( $V_2$ ) e da sua projeção lateral ( $V_3$ ), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que  $V_2$  e  $O$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $V_3$  e  $O$  são dois vértices opostos).  $V_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $V$  e  $V_3$  é a perspectiva da projeção lateral do ponto  $V$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $V$ . Para tal conduziu-se, por  $V_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $V$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $V_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $V$  (que é paralela ao eixo  $Y$ ) e pela perspectiva de  $V_3$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de  $V$  (que é paralela ao eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $V$ , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos  $O$  e  $V$  são dois vértices espacialmente opostos.

#### Determinação da perspectiva do cone:

Atendendo a que o plano  $v$  (o plano que contém a base do cone) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o círculo projetado-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano  $XY$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ ) e com raio igual ao raio da circunferência que delimita a projeção horizontal da base (e que já havia sido desenhada), desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base do cone, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do cone é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a base do cone) que passam por um ponto exterior (a perspectiva do ponto  $V$ ).

Assim, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do segmento  $[QV]$  (com o recurso à mediatriz do segmento) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio até ao ponto  $Q$ , desenhou-se um arco de circunferência – os pontos em que o arco corta a circunferência são os pontos  $T$  e  $T'$ . Os pontos  $T$  e  $T'$  são os pontos em que as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone são tangentes à base do sólido.

Após a determinação dos pontos  $T$  e  $T'$ , desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone (as geratrizes  $[TV]$  e  $[T'V]$ ) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – o arco menor  $TT'$  (da circunferência que delimita a base) é invisível.

#### Determinação da perspectiva do cubo:

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, começando pelo seu contorno aparente – o contorno aparente da perspectiva do cubo é a linha quebrada fechada  $[AA'B'C'D]$ . Existem dois vértices do cubo que não integram o contorno aparente da perspectiva do sólido – os vértices  $D'$  e  $B$ . O vértice  $D'$ , por ser um dos vértices mais próximos do observador, é visível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[A'D']$ ,  $[C'D']$  e  $[DD']$ . O vértice  $B$ , por ser um dos vértices mais distantes do observador, é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[BC]$  e  $[BB']$ .

Salienta-se que o cone oculta parcialmente o cubo. Nesse sentido, foram respeitadas todas as invisibilidades resultantes da ocultação provocada pelo cilindro (parte da aresta  $[A'B']$  é invisível).

Note que a representação das perspectivas das projeções dos dois sólidos não são absolutamente necessárias, apesar de se ter representado a perspectiva da projeção frontal do objeto. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da representação axonométrica, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto pelo cubo e pelo cone, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada. É nesse contexto que foi representada a projeção frontal dos dois sólidos.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a médio, pois são as linhas estruturantes do exercício. As perspectivas dos dois sólidos representaram-se a forte (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano horizontal que contém a face superior do cubo e a base do cone), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a leve. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a leve – caso do eixo  $Z_r$ , da reta  $r_r$ , da reta paralela à reta  $r_r$  que não se identificou e, ainda, da construção que nos permitiu determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido.

## 1283.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma perspectiva militar (ou planométrica), pelo que o plano axonométrico é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $125^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Y$ , um ângulo de  $145^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar as abscissas dos pontos  $C$  e  $D$  (2 cm e 8 cm, respetivamente) sobre o eixo  $X$  em verdadeira grandeza (a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), bem como o afastamento daqueles dois pontos (8 cm) sobre o eixo  $Y$  também em verdadeira grandeza (também a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato,  $C_1$  e  $D_1$  (as projeções horizontais dos pontos  $C$  e  $D$ , respetivamente), bem como  $C_0$  e  $D_0$  (as referências das abscissas dos pontos  $C$  e  $D$ ). Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

Os pontos  $C$  e  $D$  têm cota nula, pelo que as suas projeções frontais ( $C_2$  e  $D_2$ , respetivamente) se situam no eixo  $X$ , tal como as suas projeções laterais ( $C_3$  e  $D_3$ , respetivamente) se situam no eixo  $Y$ . Os pontos  $C$  e  $D$  situam-se numa reta fronto-horizontal (que é uma reta projetante lateral), pelo que as suas projeções laterais estão coincidentes – tem-se, imediatamente,  $C_3 \equiv D_3$ . Por outro lado, atendendo a que ambos os pontos pertencem ao plano  $XY$  (porque têm cota nula), os pontos estão coincidentes com as suas projeções horizontais, o que se assinalou imediatamente –  $C_1 \equiv C$  e  $D_1 \equiv D$ .

### Resolução:

O plano que contém o retângulo  $[ABCD]$  (o plano  $XY$ ) é o próprio plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XY$ ), pelo que o retângulo está em verdadeira grandeza no plano axonométrico (a perspectiva do retângulo não apresenta qualquer deformação) – o retângulo, a sua perspectiva e a sua projeção horizontal são a mesma figura.

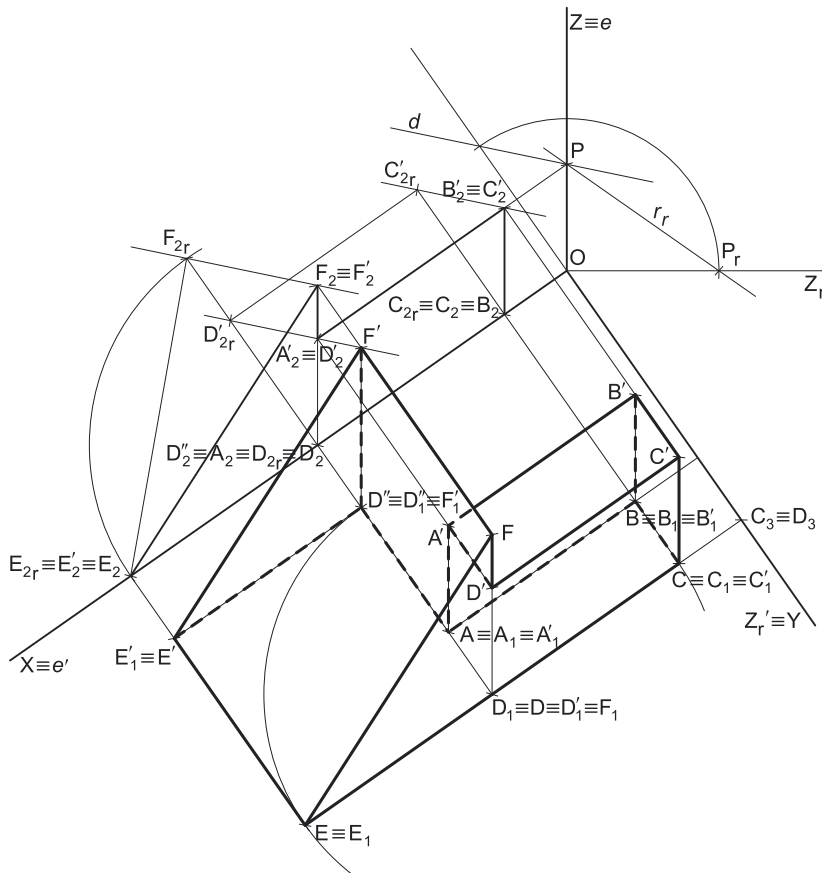
Assim, efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura (em verdadeira grandeza), de acordo com os dados, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do retângulo (os pontos  $A$  e  $B$ ), bem como as respetivas projeções. Os pontos  $A$  e  $B$  têm cota nula, pelo que as suas projeções frontais ( $A_2$  e  $B_2$ , respetivamente) se situam no eixo  $X$ . Por outro lado, atendendo a que ambos os pontos pertencem ao plano  $XY$  (porque têm cota nula), os pontos estão coincidentes com as suas projeções horizontais, o que se assinalou imediatamente –  $A_1 \equiv A$  e  $B_1 \equiv B$ .

Os pontos  $A$  e  $D$  situam-se numa reta de topo (que é uma reta projetante frontal), pelo que as suas projeções frontais estão coincidentes – tem-se, imediatamente,  $A_2 \equiv D_2$ . De forma semelhante, também os pontos  $B$  e  $C$  se situam numa reta de topo (que é uma reta projetante frontal), pelo que as suas projeções frontais estão coincidentes – tem-se, imediatamente,  $B_2 \equiv C_2$ .

Por outro lado, as arestas laterais do paralelepípedo (as arestas que não são horizontais) são necessariamente verticais (por se tratar de um prisma reto, as arestas laterais são ortogonais aos planos das bases). Nesse sentido, as projeções horizontais dos vértices da face superior do paralelepípedo (o retângulo  $[A'B'C'D']$ ) estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da face inferior, o que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente,  $A'_1 \equiv A_1 \equiv A$ ,  $B'_1 \equiv B_1 \equiv B$ ,  $C'_1 \equiv C_1 \equiv C$  e  $D'_1 \equiv D_1 \equiv D$ .

Em seguida, teve-se em conta que uma face lateral do prisma triangular (a face  $[DEE'D'']$ ) está igualmente contida no plano  $XY$  e que é quadrada. Nesse sentido, em primeiro lugar determinou-se o ponto  $E$ , diretamente, atendendo a que o ponto  $D$  é o ponto médio do segmento  $[CE]$  (como o enunciado refere expressamente). Atendendo a que todos aqueles pontos pertencem ao plano  $XY$  (porque têm cota nula), os pontos estão coincidentes com as suas projeções horizontais, o que se assinalou imediatamente –  $E_1 \equiv E$ ,  $E'_1 \equiv E'$  e  $D''_1 \equiv D''$ .

Determinaram-se, ainda, as projeções frontais de todos os vértices da face  $[DEE'D'']$ , que se situam no eixo  $X$ . Os pontos  $E$  e  $E'$  situam-se numa reta de topo (que é uma reta projetante frontal), pelo que as suas projeções frontais estão coincidentes – tem-se, imediatamente,  $E_2 \equiv E'_2$ . De forma semelhante, também os pontos  $D$  e  $D''$  se situam numa reta de topo (que é uma reta projetante frontal – a mesma reta projetante frontal da aresta  $[AD]$  do paralelepípedo), pelo que as suas projeções frontais estão coincidentes – tem-se, imediatamente,  $D''_2 \equiv A_2 \equiv D_2$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que a base [DEF] do prisma é um triângulo retângulo (cujo ângulo reto tem vértice no ponto D), sabe-se que a aresta [DF] é perpendicular à aresta [DE]. Assim, e porque a base [DEF] está contida num plano frontal (de frente) e a aresta [DE] é fronto-horizontal, sabe-se imediatamente que a aresta [DF] é vertical (projetante horizontal). Assim, os pontos D e F têm as suas projeções horizontais coincidentes, o mesmo acontecendo com os pontos D' e F' (a aresta [D'F'] é vertical, à semelhança da aresta [DF]) – tem-se, imediatamente,  $D_1 \equiv D \equiv D'_1 \equiv F_1$  e  $D''_1 \equiv D'' \equiv F''_1$ .

O plano que contém o triângulo [DEF] (um plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano XY), pelo que o triângulo [DEF] não se projeta em verdadeira grandeza (a perspetiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano frontal (de frente), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado XZ – o triângulo [DEF] e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado XZ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

Por outro lado, e porque a altura do paralelepípedo (4 cm) se mede no eixo Z (o único eixo que apresenta deformação), optou-se por, rebatendo o plano XZ para a construção da projeção frontal do triângulo [DEF] (em verdadeira grandeza), construir, também, a projeção frontal da face [CC'D'D] do paralelepípedo (em verdadeira grandeza).

*Rebatimento do plano XZ e construção das projeções frontais do triângulo [DEF] e do retângulo [CC'D'D], em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano XZ para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta e'), que é o eixo X. O eixo Z rebatido (o eixo Z<sub>r</sub>') fica coincidente com o eixo Y, facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv Z'_r$ . O eixo Z<sub>r</sub>' é o eixo Z rebatido pelo rebatimento do plano XZ.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano XZ com a notação e', optando-se por manter a notação e para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo Z. De forma semelhante, identificou-se o eixo Z rebatido pelo rebatimento do plano coordenado XZ com a notação Z<sub>r</sub>', optando-se por manter a notação Z<sub>r</sub> para o eixo XZ rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Os pontos C<sub>2</sub>, D<sub>2</sub> e E<sub>2</sub> (as projeções frontais dos pontos C, D e E, respetivamente) situam-se na charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são pontos fixos) – assim, tem-se, imediatamente,  $C_2 \equiv C_{2r}$ ,  $D_2 \equiv D_{2r}$  e  $E_2 \equiv E_{2r}$ . Numa perpendicular ao eixo X que passa por D<sub>2r</sub>, mediram-se ao 4 cm (o comprimento das arestas verticais do paralelepípedo) e os 6 cm (o comprimento do segmento [DF], que é o lado vertical do triângulo [DDEF]). Este procedimento permitiu-nos determinar D'<sub>2r</sub> (a projeção frontal do ponto D', em rebatimento) e F'<sub>2r</sub> (a projeção frontal do ponto F, em rebatimento).

Assim, efetuou-se a construção das **projeções frontais do triângulo e do retângulo**, em verdadeira grandeza, de acordo com as premissas atrás referidas. Dessa forma, o triângulo [D<sub>2r</sub>E<sub>2r</sub>F<sub>2r</sub>] é a projeção frontal da base [DEF] do prisma (no rebatimento do plano XZ), tal como o retângulo [C<sub>2r</sub>C'<sub>2r</sub>D'<sub>2r</sub>D<sub>2r</sub>] é a projeção frontal da face [CC'D'D] do paralelepípedo (no rebatimento do plano XZ).

Para determinar as perspetivas do triângulo [DEF] e do retângulo [CC'D'D] e, ainda, do sólido, é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado XZ (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano XZ com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo Z, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo Z para o plano axonométrico (o plano XY). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta e), que é a própria perspetiva do eixo Z. O eixo Z rebatido (o eixo Z<sub>r</sub>) fica perpendicular à perspetiva do eixo Z. O ponto O é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo Z<sub>r</sub> está definido por um ponto (o ponto O) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo Z).

Em seguida, marcou-se, no eixo Z<sub>r</sub>', um ponto P<sub>r</sub>' qualquer – o ponto P é um ponto do eixo Z com uma cota qualquer ( $\overline{OP}_r$  é a cota do ponto P, no eixo Z<sub>r</sub>', pelo rebatimento do plano XZ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto O e com raio  $\overline{OP}_r$ , transportou-se a **cota** do ponto P para o eixo Z<sub>r</sub>, determinando-se o ponto P<sub>r</sub> – note P<sub>r</sub> se refere ao mesmo ponto P do eixo Z, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo Z). Assim,  $\overline{OP}_r$  é a cota do ponto P, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo Z. Por P<sub>r</sub> conduziu-se uma reta r<sub>r</sub>, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 55°) – a reta r<sub>r</sub> é a reta projetante do ponto P, em rebatimento. O segmento [OP] é, assim, o segmento representativo da perspetiva da cota do ponto P –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da cota do ponto P.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano XZ com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por P<sub>r</sub>' e pela perspetiva do ponto P (a reta d) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano XZ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação das perspetivas do ponto F:*

As projeções do ponto F (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto F – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em F<sub>1</sub>, outro extremo em F<sub>2</sub> e um vértice no eixo X. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto F que está contida no plano XZ é o segmento de reta perpendicular ao eixo X e que tem um extremo em F<sub>2</sub> e o outro extremo no eixo X. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto F é o segmento que é perpendicular ao eixo X e que tem um extremo em F<sub>2r</sub> e o outro extremo no eixo X. **Em perspetiva**, essa parte da linha de chamada do ponto F (a parte que se situa no plano XZ) é necessariamente paralela à perspetiva do eixo Z e tem um extremo no eixo X (em D<sub>0</sub>).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspectiva** da parte da linha de chamada do ponto **F** que se situa no plano **XZ**. Em seguida, por **F<sub>2</sub>**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto **F** (anteriormente desenhada) é **F<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **F**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XZ**.

Em seguida, por **F<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **F**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto **F**, que é de topo (paralela ao eixo **Y**). Depois, por **F<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **F**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto **F** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **F**.

Salienta-se que não se determinou a perspectiva da projeção frontal do ponto **F** (**F<sub>3</sub>**), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

#### *Determinação das perspectivas dos pontos C' e D':*

As perspectivas dos pontos **C'** e **D'** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto **F**.

À semelhança do referido para o referido para o ponto **F**, também nesta situação não se determinaram as perspectivas das projeções frontais dos pontos **C'** e **D'** (**C'<sub>2</sub>** e **D'<sub>2</sub>**, respetivamente), por estas não serem determinantes para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

#### *Determinação das perspectivas do ponto F', B' e A':*

Os pontos **F** e **F'** situam-se na mesma reta de topo (que é uma reta projetante frontal), pelo que têm as suas projeções frontais coincidentes, o que se assinalou em perspectiva – tem-se, imediatamente, **F'<sub>2</sub> ≡ F<sub>2</sub>**. Em seguida, por **F'<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **F'**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto **F'**, que é de topo (paralela ao eixo **Y**). Depois, por **F'<sub>1</sub>** (a projeção horizontal do ponto **F'**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto **F'** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **F'**.

Salienta-se que não se determinou a perspectiva da projeção frontal do ponto **F'** (**F'<sub>3</sub>**), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

As perspectivas dos pontos **A'** e **B'** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto **F'**, pois os pontos **A'** e **D'** também se situam na mesma reta de topo (tem-se, imediatamente, **A'<sub>2</sub> ≡ D'<sub>2</sub>**), tal como os pontos **B'** e **C'** também se situam na mesma reta de topo (tem-se, imediatamente, **B'<sub>2</sub> ≡ C'<sub>2</sub>**).

À semelhança do referido para o referido para o ponto **F'**, também nesta situação não se determinaram as perspectivas das projeções frontais dos pontos **A'** e **B'** (**A'<sub>2</sub>** e **B'<sub>2</sub>**, respetivamente), por estas não serem determinantes para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica.

#### *Determinação da perspectiva do sólido:*

Por fim, a partir das perspectivas dos sete vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspectiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as arestas visíveis e as arestas invisíveis.

Salienta-se que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um prisma triangular reto e um paralelepípedo), as faces do objeto que resultam de duas faces coplanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso dos segmentos de reta **[AD]** e **[DD']**. De facto, os segmentos de reta **[AD]** e **[DD']** **não são** arestas do sólido, porque não resultam da interseção entre duas faces distintas (aqueles dois segmentos são, apenas, linhas auxiliares que estão contidas em faces do objeto e, por isso, não são arestas do sólido).

Sublinha-se que, caso se tratasse de dois sólidos justapostos (o que não é o caso, pois o enunciado refere expressamente «**um sólido composto**»), os segmentos de reta **[AD]** e **[DD']** seriam partes de arestas comuns aos dois sólidos.

#### **Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do sólido (com as respetivas invisibilidades devidamente assinaladas) representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da construção da projeção frontal da face de maior afastamento do sólido, em rebatimento, do eixo **Z'**, da reta **r<sub>r</sub>**, da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XZ**.

## 1284.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Tendo em conta que as coordenadas do ponto **A** são  $(0; 0; 0)$ , o ponto **A** é o próprio ponto **O** (a origem do referencial), facto que se assinalou imediatamente.

**Resolução:**

Uma vez que é referido, no texto que a aresta **[AB]**, do sólido, está contida no eixo **X**, é possível, de forma imediata, medir os 8 cm (o comprimento da aresta **[AB]**), em verdadeira grandeza (no eixo **X**, a partir do ponto **A** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu determinar **B<sub>0</sub>** (a referência da abscissa do ponto **B**). Uma vez que o ponto **B** é um ponto do eixo **X** (é dado, no enunciado, que a aresta **[AB]** está contida no eixo **X**), determinaram-se as projeções do ponto **B** de forma imediata – tem-se, imediatamente,  $B_2 \equiv B_1 \equiv B$ .

São dadas duas vistas do objeto (as suas projeções horizontal e frontal) e a aresta **[AB]** está contida no eixo **X**, pelo que é possível depreender que as restantes arestas do objeto são paralelas aos *eixos coordenados*, à exceção das arestas que limitam a «rampa». Tendo em conta que o *plano axonométrico* é o *plano coordenado frontal* (o plano **XY**), a projeção horizontal está em verdadeira grandeza. Assim, a partir do ponto **A** e do ponto **B**, e atendendo a que o eixo **X** e o eixo **Y** estão em verdadeira grandeza, reproduziu-se a projeção horizontal do sólido, em verdadeira grandeza, a partir da projeção horizontal fornecida no enunciado e das medidas (cotas) ali apresentadas.

Em seguida, há que representar a outra projeção do objeto (a projeção frontal do objeto), de forma a ser possível a determinação da sua perspectiva. Acontece que a projeção frontal do objeto está contida no plano **XZ**, que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XY**), pelo que a projeção frontal do objeto não está em verdadeira grandeza, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser o rebatimento do plano **XZ**.

**Rebatimento do plano XZ e construção da projeção frontal do sólido, em rebatimento:**

Ao rebater o plano **XZ** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é o eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>'**) fica coincidente com o eixo **Y**, facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv Z_r'$ . O eixo **Z<sub>r</sub>'** é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **XZ**.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano **XZ** com a notação **e'**, optando-se por manter a notação **e** para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. De forma semelhante, identificou-se o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ** com a notação **Z<sub>r</sub>'**, optando-se por manter a notação **Z<sub>r</sub>** para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano **XZ** rebatido, reproduziu-se a projeção frontal do objeto, em rebatimento, a partir da projeção frontal fornecida no enunciado e das medidas (cotas) ali apresentadas. Para determinar a perspectiva do objeto é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

**Determinação da direção de afinidade:**

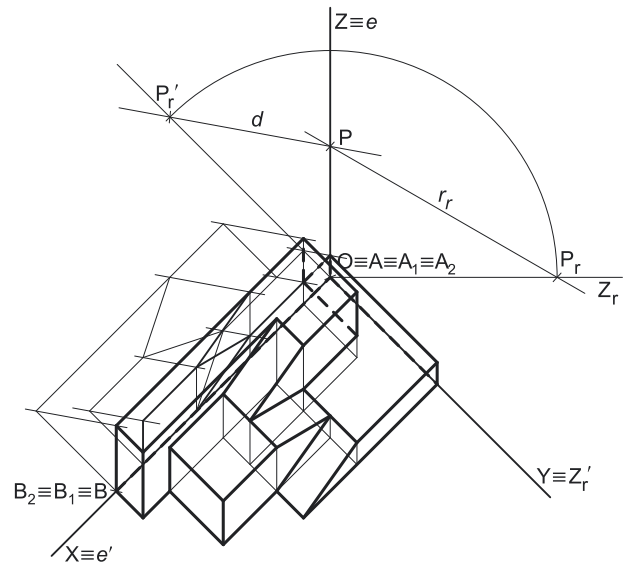
Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Y**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z<sub>r</sub>'**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z<sub>r</sub>'** está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo **Z**).

Em seguida, marcou-se, no eixo **Z<sub>r</sub>'**, um ponto **P<sub>r</sub>'** qualquer – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com uma cota qualquer ( $\overline{OP_r'}$  é a cota do ponto **P**, no eixo **Z<sub>r</sub>'**, pelo rebatimento do plano **XZ**).

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a **cota** do ponto **P** para o eixo **Z<sub>r</sub>'**, determinando-se o ponto **P<sub>r</sub>** – note **P<sub>r</sub>**, se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Z**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**. Por **P<sub>r</sub>** conduziu-se uma reta **r<sub>r</sub>**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta **r<sub>r</sub>** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. O segmento **[OP]** é, assim, o segmento representativo da perspectiva da cota do ponto **P** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da cota do ponto **P**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P<sub>r</sub>** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação da perspectiva da projeção frontal do objeto:*

Todas as linhas de chamada da projeção frontal do sólido (em rebatimento) que são paralelas ao eixo  $Z_r'$ , em perspectiva, são necessariamente paralelas à perspectiva do eixo  $Z$ . Assim, a partir dos seus extremos no eixo  $X$ , desenharam-se as retas suporte dessas linhas de chamada, paralelamente à perspectiva do eixo  $Z$ .

Em seguida, pelos seus extremos de maior cota, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XZ$ ), conduziram-se retas paralelas à direção de afinidade  $d$ , o que nos permitiu determinar as perspectivas daqueles pontos, sobre as retas suporte das linhas de chamada a que pertencem. Este procedimento permitiu-nos desenhar a perspectiva da projeção frontal do objeto, com a deformação inerente à perspectiva.

*Determinação da perspectiva do objeto:*

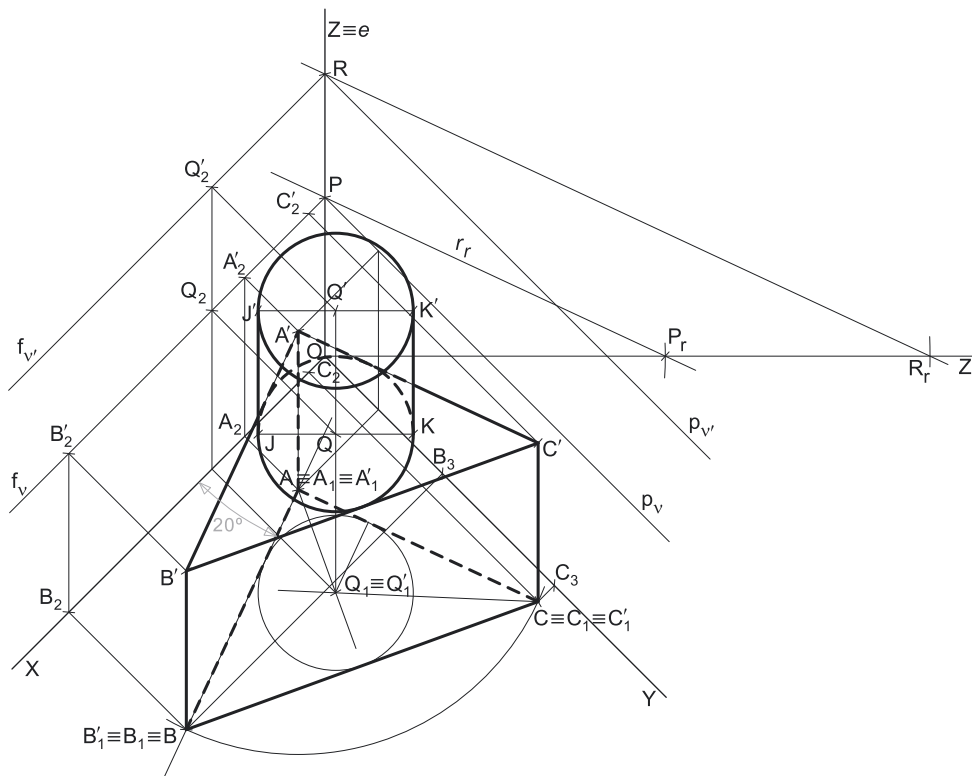
Para determinar a perspectiva de um dado vértice do objeto, conduziu-se, pela perspectiva da sua projeção horizontal, a perspectiva da sua reta projetante horizontal (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ). Em seguida, pela projeção frontal desse mesmo vértice, conduziu-se a perspectiva da sua reta projetante frontal (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita desse vértice.

O procedimento exposto repetiu-se para cada um dos vértices do sólido, o que nos permitiu determinar as suas perspectivas. Por fim, a partir das perspectivas da totalidade dos vértices do sólido, desenhou-se a sua perspectiva, atendendo às invisibilidades existentes. Note que apenas existem arestas a separar faces distintas – tendo em conta que uma aresta é o segmento de reta segundo o qual se interseam duas faces distintas (que estão contidas em planos distintos), na superfície de uma única face, porque está contida num único plano, não existe qualquer aresta «no meio» da face.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do objeto representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção frontal do objeto, em rebatimento, do eixo  $Z_r$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$  e, ainda dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano  $XZ$ .

## 1285.



**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano  $XY$  – assim, o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos (o eixo  $X$  e o eixo  $Y$ ) ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto  $A$  (3 cm) sobre o eixo  $X$  em verdadeira grandeza (a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), bem como o afastamento daquele ponto (2 cm) sobre o eixo  $Y$  também em verdadeira grandeza (também a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato,  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ), bem como  $A_0$  (a referência da abscissa do ponto  $A$ ). Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Y$  estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **A** tem cota nula, pelo que a sua projecção frontal (**A**<sub>2</sub>) se situa no eixo **X**, tal como a sua projecção lateral (**A**<sub>3</sub>) se situa no eixo **Y**. Por outro lado, atendendo a que o ponto **A** pertence ao plano **XY** (porque tem cota nula), o ponto está coincidente com a sua projecção horizontal, o que se assinalou imediatamente – **A**<sub>1</sub> ≡ **A**.

#### Resolução:

O plano que contém o triângulo [**ABC**] (o plano **XY**) é o próprio plano de projecção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XY**), pelo que o triângulo **está em verdadeira grandeza** no *plano axonométrico* (a perspectiva do triângulo não apresenta qualquer deformação) – o triângulo, a sua perspectiva e a sua projecção horizontal são a mesma figura.

A partir de **A**<sub>1</sub> (a projecção horizontal do ponto **A**) foi possível, em verdadeira grandeza, medir o ângulo de 20° que o lado [**AB**] faz com o eixo **X**. Esse ângulo está contido no próprio plano **XY** (o *plano axonométrico*) pelo que está em verdadeira grandeza no ângulo que o segmento [**A**<sub>1</sub>**B**<sub>1</sub>] (a projecção horizontal do lado [**AB**]) faz com o eixo **X**. Assim, a partir de **A**<sub>1</sub> desenhou-se a reta suporte da projecção horizontal do lado [**AB**], com o ângulo referido (um ângulo de 20°, de abertura para a esquerda). Em seguida, sobre essa reta suporte mediram-se 7 cm (o comprimento do lado [**AB**] do triângulo) e determinou-se **B**<sub>1</sub> (a projecção horizontal do ponto **B**).

O ponto **B** tem cota nula, pelo que pertence ao plano **XY**. Nesse sentido, o ponto está coincidente com a sua projecção horizontal, o que se assinalou imediatamente – **B**<sub>1</sub> ≡ **B**. Pelo mesmo motivo, a sua projecção frontal (**B**<sub>2</sub>) situa-se no eixo **X**, tal como a sua projecção lateral (**B**<sub>3</sub>) se situa no eixo **Y**.

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura (em verdadeira grandeza), de acordo com os dados. Uma vez que se trata de um **triângulo isósceles**, a figura tem apenas dois lados iguais – os lados [**AB**] e [**AC**], de acordo com o enunciado. Por outro lado, uma vez que se trata de um **triângulo retângulo**, o triângulo tem um ângulo reto, que tem de ser a ângulo que se situa entre os dois lados iguais do triângulo (o ângulo que tem vértice no ponto **A**). Assim, efetuou-se a construção do triângulo (de acordo com as premissas atrás referidas), o que nos permitiu determinar o terceiro vértices do triângulo (o ponto **C**), bem como as respetivas projecções.

O ponto **C** tem cota nula, pelo que pertence ao plano **XY**. Nesse sentido, o ponto está coincidente com a sua projecção horizontal, o que se assinalou imediatamente – **C**<sub>1</sub> ≡ **C**. Pelo mesmo motivo, a sua projecção frontal (**C**<sub>2</sub>) situa-se no eixo **X**, tal como a sua projecção lateral (**C**<sub>3</sub>) se situa no eixo **Y**.

Uma vez que as arestas laterais do prisma estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases, que são retas verticais (retas projetantes horizontais), é possível identificar, de forma imediata, as projecções horizontais dos vértices da base superior do prisma (a base [**A'B'C'**]), que estão coincidentes com as projecções horizontais dos vértices correspondentes da base inferior – tem-se, imediatamente, **A'**<sub>1</sub> ≡ **A**<sub>1</sub> ≡ **A**, **B'**<sub>1</sub> ≡ **B**<sub>1</sub> ≡ **B** e **C'**<sub>1</sub> ≡ **C**<sub>1</sub> ≡ **C**.

O plano que contém a base inferior do cilindro (o plano horizontal que contém a base superior do prisma) é paralelo ao plano de projecção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XY**), pelo que o círculo (a base inferior do sólido) **projeta-se em verdadeira grandeza** (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projecção horizontal são figuras geometricamente iguais.

Por outro lado, atendendo a que a base do cilindro se inscreve na base superior do prisma, sabe-se que o centro daquela base (o ponto **Q**) é o **incentro** do triângulo [**A'B'C'**] (o ponto que está equidistante dos lados do triângulo). Nesse sentido, recorreu-se às bissetrizes de dois dos ângulos internos do triângulo [**A'**<sub>1</sub>**B'**<sub>1</sub>**C'**<sub>1</sub>] e determinou-se o ponto **Q**<sub>1</sub> (que é a projecção horizontal do centro da base inferior do cilindro). Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **Q**<sub>1</sub> (a projecção horizontal do ponto **Q**), desenhou-se a circunferência que delimita a projecção horizontal da base inferior do cilindro – essa circunferência é necessariamente tangente aos lados do triângulo [**A'**<sub>1</sub>**B'**<sub>1</sub>**C'**<sub>1</sub>].

Por outro lado, porque se trata de um **cilindro de revolução** (um **cilindro reto**), o seu eixo está contido numa reta ortogonal aos planos das bases, que são planos horizontais (de nível) – assim, o eixo do cilindro está contido numa reta vertical, que é uma reta projetante horizontal. Nesse sentido, o ponto **Q** (o centro da base inferior) e o ponto **Q'** (o centro da base superior) têm as suas projecções horizontais coincidentes, facto que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente, **Q'**<sub>1</sub> ≡ **Q**<sub>1</sub>.

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos horizontais (de nível) que contêm as bases. O prisma tem 9 cm de altura e a sua base inferior tem cota nula (pois está contida no plano **XY**), pelo que o plano *v* (o plano horizontal que contém a base superior do prisma) tem necessariamente 9 cm de cota (0 + 9 = 9). Assim, há que determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, um ponto com 9 cm de cota.

Por outro lado, a altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases o que, nesta situação, corresponde à diferença das cotas dos planos das bases. Tendo em conta que a altura do cilindro é 7 cm e que a sua base inferior tem 9 cm de cota (pois está contida no plano que contém a base superior do prisma, que tem 9 cm de cota), o plano *v'* (o plano horizontal que contém a base superior do cilindro) tem necessariamente 16 cm de cota (9 + 7 = 16). Assim, há que determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, um ponto com 16 cm de cota.

Nesse sentido, para determinar as perspectivas dos dois sólidos há que, em primeiro lugar, determinar as perspectivas das cotas dos planos *v* e *v'*, para o que é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, de forma a ser possível determinar as perspectivas das cotas daqueles dois planos (a **cota** é a única coordenada que apresenta deformação).

#### Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A **cota** do plano *v*, o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do prisma, porque se mede no eixo **Z**, está afetada pela deformação inerente à projecção do eixo. Para determinar a deformação, o processo mais simples consiste em recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z**<sub>r</sub>) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo **Z**<sub>r</sub> está, assim, definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direcção (a direcção perpendicular à perspectiva do eixo **Z**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $Z_r$  (e no sentido positivo do eixo), representou-se, em verdadeira grandeza, a **cota** do plano  $v$  (o plano horizontal que contém o triângulo  $[A'B'C']$ ), que é 9 cm, determinando-se um ponto  $P_r$ . O ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Z$  com 9 cm de cota ( $OP_r$  é a cota do plano horizontal  $v$ , em verdadeira grandeza).

A partir do ponto  $O$ , sobre o eixo  $Z_r$  (e no sentido positivo do eixo), representou-se, em verdadeira grandeza, a **cota** do plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do cilindro), que é 16 cm, determinando-se um ponto  $R_r$ . O ponto  $R$  é um ponto do eixo  $Z$  com 16 cm de cota ( $OR_r$  é a cota do plano horizontal  $v'$ , em verdadeira grandeza).

Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $65^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $P$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$  – o segmento  $[OP]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do plano horizontal (de nível) que contém a base superior do prisma ( $OP$  é a perspectiva da cota do plano  $v$ ).

Por  $R_r$  conduziu-se uma reta paralela à reta  $r_r$  (e que não se identificou), com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $65^\circ$ ) – essa reta é a reta projetante do ponto  $R$ , em rebatimento. Este procedimento permitiu-nos determinar a perspectiva do ponto  $R$ , sobre a perspectiva do eixo  $Z$  – o segmento  $[OR]$  é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do plano horizontal (de nível) que contém a base superior do cilindro ( $OR$  é a perspectiva da cota do plano  $v'$ ).

*Representação do plano horizontal (de nível)  $v$ , que contém a base superior do prisma:*

Em seguida, pela perspectiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ).

Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a base superior do cilindro:*

Em seguida, pela perspectiva do ponto  $R$  conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do cilindro) –  $f_{v'}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v'$ ) e  $p_{v'}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v'$ ).

Salienta-se que  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v'$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ) é uma reta de topo do plano  $v'$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v'$  é, também ele, um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). Por outro lado, o plano  $v'$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{v'}$ ).

*Determinação das perspectivas do ponto  $Q$ :*

A partir das perspectivas da abcissa e da cota do ponto  $Q$  determinou-se a perspectiva da sua projeção frontal ( $Q_2$ ), recorrendo ao paralelogramo de que  $Q_2$  e  $O$  são dois vértices opostos.  $Q_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q$  e situa-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de  $Q_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $Q_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $Q$  (que é paralela ao eixo  $Y$ ) – as duas retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ .

*Determinação das perspectivas dos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ :*

A determinação das perspectivas dos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  efetuou-se de forma idêntica à atrás exposta para a determinação das perspectivas do ponto  $Q$ . Os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  também pertencem ao plano  $v$ , pelo que as perspectivas das suas projeções frontais ( $A'_2$ ,  $B'_2$  e  $C'_2$ , respetivamente), situam-se sobre  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

*Determinação das perspectivas do ponto  $Q'$ :*

A partir das perspectivas da abcissa e da cota do ponto  $Q'$  determinou-se a perspectiva da sua projeção frontal ( $Q'_2$ ), recorrendo ao paralelogramo de que  $Q'_2$  e  $O$  são dois vértices opostos.  $Q'_2$  é a perspectiva da projeção frontal do ponto  $Q'$  e situa-se sobre a perspectiva de  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante frontal.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto  $Q'$ . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de  $Q'_1$ , a perspectiva da reta projetante horizontal de  $Q'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Z$ ), pela perspectiva de  $Q'_2$  conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de  $Q'$  (que é paralela ao eixo  $Y$ ) – as duas retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q'$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Determinação da perspectiva do cilindro:*

Atendendo a que o plano  $v$  e o plano  $v'$  (os planos que contêm as bases do cilindro) são paralelos ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano  $XY$ ), e como atrás se referiu, as bases projetam-se, ambas, em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o plano  $XY$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ ) e com raio igual ao raio da circunferência que delimita a projeção horizontal do cilindro, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base **inferior** do cilindro, em verdadeira grandeza. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em  $Q'$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q'$ ) e com o mesmo raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base **superior** do cilindro, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do cilindro é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (as circunferências que delimitam as duas bases do cilindro) que são paralelas a uma reta dada (a perspectiva do eixo do cilindro).

Assim, desenharam-se os diâmetros das duas circunferências que são perpendiculares ao segmento  $[QQ']$  (a perspectiva do eixo do sólido), o que nos permitiu determinar os pontos de tangência – os pontos  $J$  e  $K$  (da base inferior) e os pontos  $J'$  e  $K'$  (da base superior).

Após a determinação dos pontos  $J$ ,  $K$ ,  $J'$  e  $K'$ , desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cilindro (as geratrizes  $[JJ']$  e  $[KK']$ ) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – a semicircunferência  $\widehat{JK}$  de menor abcissa (da base inferior) é invisível. A base superior é visível na sua totalidade.

*Determinação da perspectiva do prisma:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[BB'A'C'C]$ . Existe um único vértice do prisma que não integra o contorno aparente da perspectiva do sólido – o vértice  $A$ . Este vértice, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$  e  $[AC]$ , da base  $[ABC]$ , bem como a aresta lateral  $[AA']$ . Já a aresta  $[B'C']$ , da base  $[A'B'C']$ , é visível, pois separa duas faces do sólido que são visíveis – a base  $[A'B'C']$  e a face lateral  $[BB'C'C]$ .

Salienta-se que o cilindro oculta parcialmente o prisma. Nesse sentido, foram respeitadas todas as invisibilidades resultantes da ocultação provocada pelo cilindro (as arestas  $[A'B']$  e  $[A'C']$  estão parcialmente invisíveis).

Note que a representação das perspectivas das projeções dos dois sólidos não são absolutamente necessárias, razão pela qual não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto pelo prisma e pelo cilindro, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada. É nesse contexto que foi representada a projeção frontal dos dois sólidos.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. As perspectivas dos dois sólidos representaram-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). Os planos  $v$  e  $v'$  (os planos horizontais que contêm as bases do cilindro e a base superior do prisma), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do eixo  $Z_r$ , da reta  $r_r$ , da reta paralela à reta  $r_r$  e que não se identificou e, ainda, da construção que nos permitiu determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cilindro.



## 1286.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

Salienta-se que não é absolutamente necessário identificar os vértices do *triângulo fundamental*, antes pelo contrário – preferencialmente, os vértices do *triângulo fundamental* não devem ser identificados, para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações. A opção por identificar os vértices do triângulo fundamental visa, apenas, estabelecer uma melhor relação entre a resolução gráfica apresentada e o relatório que a explica.

### Resolução:

O plano que contém a base da pirâmide (o hexágono [ABCDEF]) é o *plano coordenado XZ*, que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o hexágono [ABCDEF] **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do hexágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o hexágono está contido no *plano coordenado XZ*, sabe-se que o hexágono está em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ*. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o hexágono está em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

#### Rebatimento do plano coordenado XZ:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é o lado [RT] do *triângulo fundamental* (o lado que se opõe à perspectiva do eixo  $Y$ ). Os pontos  $R$  e  $T$  são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se, imediatamente,  $R_r \equiv R$  e  $T_r \equiv T$ .

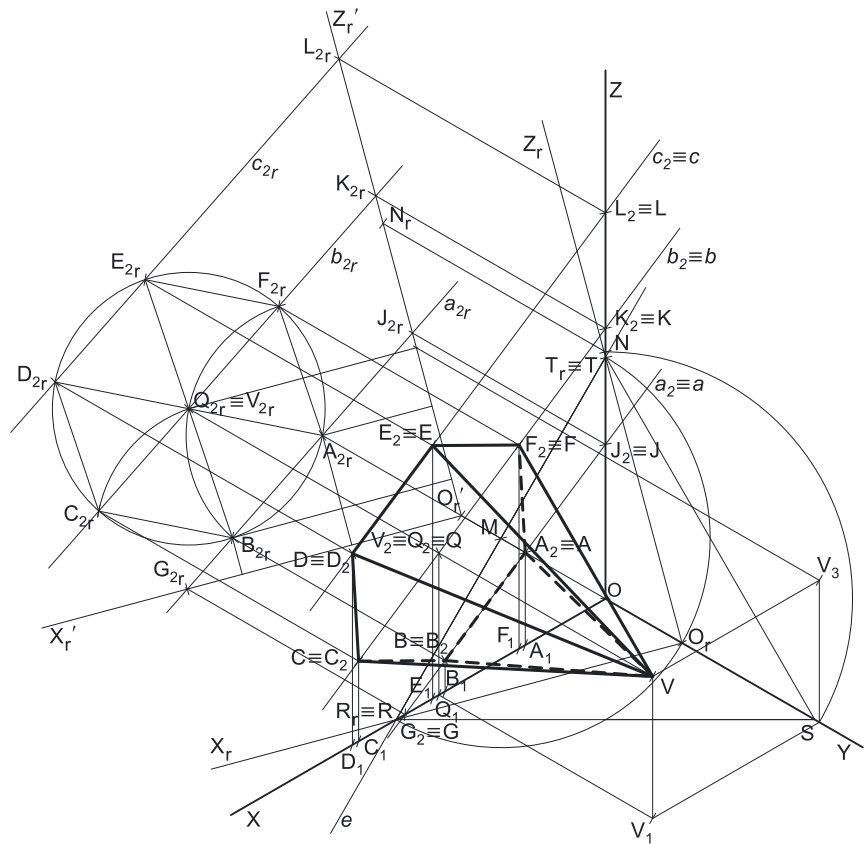
O rebatimento do *plano coordenado XZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano  $XZ$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do lado [RT] do *triângulo fundamental* (a charneira do rebatimento) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo **relatório**).

Em seguida, conduziu-se, pela perspectiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e  $R_r$ , que é um ponto fixo. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e  $T_r$ , que é outro ponto fixo. O eixo  $X_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

#### Construção da projeção horizontal do hexágono [ABCDEF] e da pirâmide, em verdadeira grandeza:

No plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos  $A$  e  $B$  (3 cm e 6 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. No plano  $XZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos pontos  $A$  e  $B$  (3 cm e 1 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e das cotas dos pontos  $A$  e  $B$ , em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções frontais daqueles dois pontos ( $A_{2r}$  e  $B_{2r}$ , respetivamente), em rebatimento.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir de  $A_2$  e  $B_2$ , efetuou-se a construção da **projeção frontal do hexágono**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XZ$ ), o que nos permitiu determinar as projeções frontais (em rebatimento) dos restantes quatro vértices da figura. Para tal, recorrendo ao compasso, determinou-se  $Q_2$  (a projeção frontal, em rebatimento, do centro da circunferência circunscrita ao hexágono). Depois, com compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) e com raio até  $A_2$  ou  $B_2$  (as projeções frontais, em rebatimento, dos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente), desenhou-se a projeção frontal (em rebatimento) da circunferência circunscrita ao hexágono e efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, inscrita na circunferência. O hexágono  $[A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2]$  é a projeção frontal do hexágono  $[ABCDEF]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Uma vez que se trata de uma **pirâmide regular** (cujo eixo é ortogonal ao plano da base), o eixo da pirâmide está contido numa reta de topo (uma reta projetante frontal). Assim, o centro do hexágono e o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) têm as suas projeções frontais coincidentes, facto que se assinalou devidamente no desenho – tem-se, imediatamente,  $V_2 \equiv Q_2$ . Este procedimento permitiu-nos, ainda, concluir o desenho da projeção frontal da pirâmide, em rebatimento.

Para determinar a perspetiva do hexágono  $[ABCDEF]$  e da pirâmide é necessário inverter o rebatimento, o que se pode processar recorrendo a retas do plano  $XZ$  que contêm os vértices do hexágono.

#### Determinação da perspetiva do hexágono $[ABCDEF]$ :

Para inverter o rebatimento dos pontos  $A$  e  $B$  recorreu-se a uma reta  $a$ , que contém aqueles dois pontos (a reta suporte do lado  $[AB]$  do quadrado) – a reta  $a_2$ , é a projeção frontal da reta  $a$ , em rebatimento, e passa por  $A_2$  e por  $B_2$  (a reta  $a$  está definida por dois pontos). A reta  $a_2$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $G_2$  (que é a projeção frontal do ponto da reta  $a$  que tem cota nula) e interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $J_2$  (que é a projeção frontal do ponto da reta  $a$  que tem abcissa nula).

Por  $G_2$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $G_2$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $G$ ) sobre a perspetiva do eixo  $X$ . Já temos um ponto para definir a reta (a perspetiva da projeção frontal da reta  $a$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por  $J_2$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $J$ ) sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . A projeção frontal da reta  $a$  ( $a_2$ ), em perspetiva, está definida por dois pontos – o ponto  $G_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $G$ ) e o ponto  $J_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $J$ ). Tendo em conta que os pontos  $G$  e  $J$  estão contidos no plano  $XZ$ , bem como a reta  $a$ , tem-se imediatamente  $G \equiv G_2$  ( $G$  é a perspetiva propriamente dita do ponto  $G$ ),  $J \equiv J_2$  ( $J$  é a perspetiva propriamente dita do ponto  $J$ ) e  $a \equiv a_2$  ( $a$  é a perspetiva propriamente dita da reta  $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $A_2$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $A$ ), sobre  $a_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta  $a$ ). Uma vez que o ponto  $A$  pertence à reta  $a$  e ao plano  $XZ$ , tem-se imediatamente  $A \equiv A_2$  ( $A$  é a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ ). De forma semelhante, conduziu-se, por  $B_2$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $B$ ), sobre  $a_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta  $a$ ). Uma vez que o ponto  $B$  pertence à reta  $a$  e ao plano  $XZ$ , tem-se imediatamente  $B \equiv B_2$  ( $B$  é a perspetiva propriamente dita do ponto  $B$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos  $C$  e  $F$  recorreu-se à reta  $b$ , que contém aqueles pontos (a reta  $b$  é a reta suporte da diagonal  $[CF]$  do hexágono) – a reta  $b_2$ , é a projeção frontal da reta  $b$ , em rebatimento, e passa por  $C_2$  e por  $F_2$ , e é ainda paralela à reta  $a_2$  (a reta  $b$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , porque a diagonal  $[CF]$  do hexágono é paralela ao lado  $[AB]$  da figura. A reta  $b_2$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $K_2$  (que é a projeção frontal, em rebatimento, do ponto da reta  $b$  com abcissa nula).

Por  $K_2$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $K$ ) sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . A projeção frontal da reta  $b$  ( $b_2$ ), em perspetiva, está definida por um ponto (o ponto  $K_2$ , que é a perspetiva da projeção frontal do ponto  $K$ ) e por uma direção (é paralela a  $a_2$ ). Tendo em conta que tanto o ponto  $K$  como a reta  $b$  estão contidos no plano  $XZ$ , tem-se imediatamente  $K \equiv K_2$  ( $K$  é a perspetiva propriamente dita do ponto  $K$ ) e  $b \equiv b_2$  ( $b$  é a perspetiva propriamente dita da reta  $b$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $C_2$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $C_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $C$ ), sobre  $b_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta  $b$ ). Uma vez que o ponto  $C$  pertence à reta  $b$  e ao plano  $XZ$ , tem-se imediatamente  $C \equiv C_2$  ( $C$  é a perspetiva propriamente dita do ponto  $C$ ). De forma semelhante, conduziu-se, por  $F_2$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $F_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $F$ ), sobre  $b_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta  $b$ ). Uma vez que o ponto  $F$  pertence à reta  $b$  e ao plano  $XZ$ , tem-se imediatamente  $F \equiv F_2$  ( $F$  é a perspetiva propriamente dita do ponto  $F$ ). Por outro lado, a atendendo a que o ponto  $Q$  é também um ponto da reta  $b$ , conduziu-se, por  $Q_2$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $Q_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $Q$ ), sobre  $b_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta  $b$ ). Uma vez que o ponto  $Q$  pertence à reta  $b$  e ao plano  $XZ$ , tem-se imediatamente  $Q \equiv Q_2$  ( $Q$  é a perspetiva propriamente dita do ponto  $Q$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos  $D$  e  $E$  recorreu-se à reta  $c$ , que contém aqueles pontos (a reta  $c$  é a reta suporte do lado  $[DE]$  do hexágono) – a reta  $c_2$ , é a projeção frontal da reta  $c$ , em rebatimento, e passa por  $D_2$  e por  $E_2$ , e é ainda paralela às retas  $a_2$  e  $b_2$  (a reta  $c$  está definida por dois pontos e por uma direção). Salienta-se que a reta  $c$  é paralela à reta  $a$ , porque se trata de retas suporte dos lados paralelos da figura. A reta  $c_2$  interseca o eixo  $Z_r'$  no ponto  $L_2$  (que é a projeção frontal, em rebatimento, do ponto da reta  $c$  com abcissa nula).

Por  $L_2$ , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $L_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $L$ ) sobre a perspetiva do eixo  $Z$ . A projeção frontal da reta  $c$  ( $c_2$ ), em perspetiva, está definida por um ponto (o ponto  $L_2$ , que é a perspetiva da projeção frontal do ponto  $L$ ) e por uma direção (é paralela a  $a_2$ ). Tendo em conta que tanto o ponto  $L$  como a reta  $c$  estão contidos no plano  $XZ$ , tem-se imediatamente  $L \equiv L_2$  ( $L$  é a perspetiva propriamente dita do ponto  $L$ ) e  $c \equiv c_2$  ( $c$  é a perspetiva propriamente dita da reta  $c$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $D_2$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $D_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $D$ ), sobre  $c_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta  $c$ ). Uma vez que o ponto  $D$  pertence à reta  $c$  e ao plano  $XZ$ , tem-se imediatamente  $D \equiv D_2$  ( $D$  é a perspetiva propriamente dita do ponto  $D$ ). De forma semelhante, conduziu-se, por  $E_2$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $E_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $E$ ), sobre  $c_2$  (a perspetiva da projeção frontal da reta  $c$ ). Uma vez que o ponto  $E$  pertence à reta  $c$  e ao plano  $XZ$ , tem-se imediatamente  $E \equiv E_2$  ( $E$  é a perspetiva propriamente dita do ponto  $E$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, apesar de não serem necessárias à resolução do exercício, optou-se por determinar as perspetivas das projeções horizontais de todos os vértices do hexágono ( $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$  e  $F_1$ ), que se situam no eixo  $X$  (pois o hexágono está contido no plano  $XZ$  – todos os seus vértices têm afastamento nulo).

### Determinação das perspetivas do ponto $V$ :

Atendendo a que se trata de uma **pirâmide regular**, e como atrás se referiu, o seu eixo está contido numa reta de topo (uma reta projetante frontal), pelo que o ponto  $Q$  (o centro da base) e o ponto  $V$  (o vértice da pirâmide) têm as suas projeções frontais coincidentes, o que se assinalou convenientemente – tem-se, imediatamente,  $V_2 \equiv Q_2$  (sendo  $V_2$  a perspetiva da projeção frontal do ponto  $V$ ).

A altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto  $V$ ) ao plano da base o que, neste caso, corresponde à diferença dos afastamentos entre o ponto  $V$  e o plano da base. Atendendo a que a pirâmide tem 8 cm de altura e que o plano da base (o plano  $XZ$ ) tem afastamento nulo, o vértice  $V$ , da pirâmide, tem 8 cm de afastamento ( $0 + 8 = 8$ ). Assim, falta-nos, ainda, determinar a perspetiva do afastamento do ponto  $V$  para determinar a perspetiva propriamente dita do ponto e, assim, concluir a construção da perspetiva da pirâmide.

Tendo em conta que, numa perspetiva isométrica, os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível determinar a perspetiva do afastamento do ponto  $V$  em qualquer eixo e, depois, transportá-la para o eixo correto (o eixo  $Y$ ). Tendo em conta que já temos dois dos eixos rebatidos (o eixo  $X$  e o eixo  $Z$ ), é possível, sobre qualquer deles, medir o afastamento do ponto  $V$  e, depois de determinar a sua perspetiva (afetada pela deformação inerente à projeção), transportá-la para a perspetiva do eixo correto (o eixo  $X$ ).

Nesse sentido, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o afastamento do ponto  $V$  (8 cm) e determinou-se o ponto  $N_r$  – o ponto  $N_r$  é, em rebatimento, o ponto do eixo  $Z$  que tem 8 cm de cota. Em seguida, inverteu-se o rebatimento, recorrendo a uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar a perspetiva do ponto  $N$ , sobre a perspetiva do eixo  $Z$ .

Assim,  $\overline{ON}$  é a perspetiva do afastamento do ponto  $V$  (o vértice da pirâmide), mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspetiva do eixo  $Y$ . Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{ON}$ , transportou-se a perspetiva do afastamento para a perspetiva do eixo  $Y$ , determinando um ponto (na perspetiva do eixo  $Y$ ) – esse ponto (que não se identificou) é a perspetiva do ponto do eixo  $Y$  que tem 8 cm de afastamento.

Para determinar a perspetiva do ponto  $V$  há que determinar, sobre as perspetivas do eixo  $X$  e do eixo  $Z$ , as perspetivas das suas coordenadas (abscissa e cota, respetivamente). Assim, por  $V_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $V$ ) conduziu-se uma paralela à perspetiva do eixo  $Z$  (até à perspetiva do eixo  $X$ ), onde se determinou a perspetiva da abscissa do ponto  $V$ . Em seguida, por  $V_2$  (a perspetiva da projeção frontal do ponto  $V$ ), conduziu-se uma paralela à perspetiva do eixo  $X$  (até ao eixo  $Z$ ), onde se determinou a perspetiva da cota do ponto  $V$ .

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto  $V$  determinaram-se as perspetivas das projeções em falta ( $V_1$  e  $V_3$ ), recorrendo aos paralelogramos respetivos – o paralelogramo de que  $O$  e  $V_3$  são dois vértices opostos e o paralelogramo de que  $V_1$  e  $O$  são dois vértices opostos.  $V_1$  é a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $V$ .  $V_3$  é a perspetiva da projeção lateral do ponto  $V$ .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto  $V$ . Para tal, conduziu-se, pela perspetiva de  $V_1$ , a perspetiva da reta projetante horizontal de  $V$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Z$ ), pela perspetiva de  $V_2$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de  $V$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Y$ ) e pela perspetiva de  $V_3$  conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de  $V$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $X$ ) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto  $V$ , definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos  $O$  e  $V$  são dois vértices espacialmente opostos.

### Determinação da perspetiva da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada  $[CDEFV]$ . Existem dois vértices da pirâmide que não integram o contorno aparente do sólido – os vértices  $A$  e  $B$ . Estes dois vértices, por serem os vértices mais distantes do observador, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem (as arestas  $[AF]$ ,  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base, e as arestas laterais  $[AV]$  e  $[BV]$ ). Por outro lado, as arestas laterais  $[DV]$  e  $[EV]$  são **visíveis**, pois separam faces do sólido que são visíveis.

As faces laterais  $[CDV]$ ,  $[DEV]$  e  $[EFV]$  são visíveis. Já as faces laterais  $[AFV]$ ,  $[ABV]$  e  $[BCV]$  são invisíveis, bem como a base  $[ABCDEF]$ .

Note que não se representaram as perspetivas das projeções laterais dos vértices da pirâmide (à exceção do vértice  $V$ ), por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (a pirâmide, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspetivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

### Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado*  $XZ$ , da translação do plano  $XZ$  rebatido, da construção da projeção frontal do hexágono e da pirâmide em rebatimento, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento, das perpendiculares à charneira e, ainda, do arco de transporte do afastamento do ponto  $V$ .

## 1287.

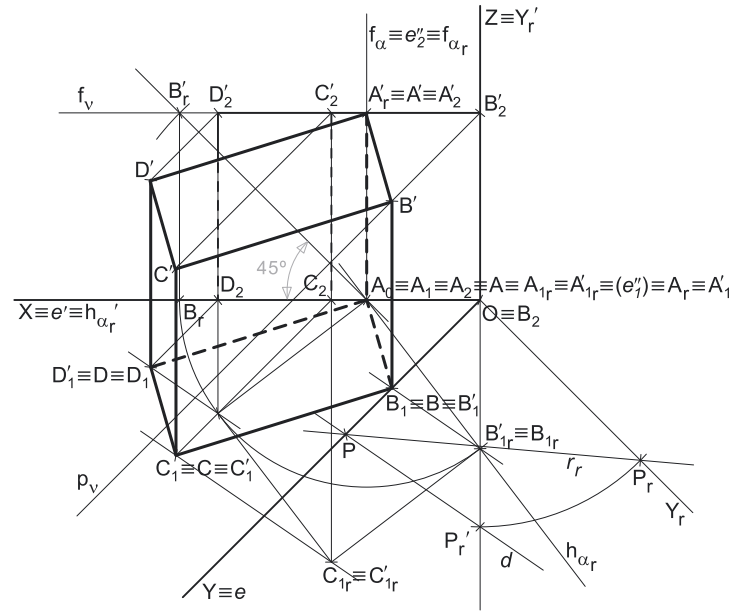
**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o plano axonométrico é o plano  $XZ$  – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $45^\circ$  (que é um ângulo agudo) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $135^\circ$  (que é um ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto  $A$  (3 cm) sobre o eixo  $X$  (em verdadeira grandeza), o que nos permitiu determinar  $A_0$  (a referência da abscissa do ponto  $A$ ). Uma vez que a aresta  $[AA']$  do cubo está contida no plano coordenado  $XZ$  e que o quadrado  $[ABCD]$  está contido no plano coordenado  $XY$ , o ponto  $A$  (que é comum à aresta  $[AA']$  e ao quadrado  $[ABCD]$ ) é necessariamente um ponto do eixo  $X$ . Este raciocínio permitiu-nos o ponto  $A$  e identificar as suas projeções – tem-se, imediatamente,  $A_0 \equiv A \equiv A_1 \equiv A_2$ .

**Resolução:**

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (o plano coordenado  $XY$ ) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



Tendo em conta que o quadrado está contido no plano coordenado horizontal (o plano  $XY$ ), sabe-se que o quadrado está em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XY$  – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado  $XY$ ) são a mesma figura. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do rebatimento do plano coordenado  $XY$  (o plano no qual o quadrado está em verdadeira grandeza).

**Rebatimento do plano  $XY$  e construção da projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza:**

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XY$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $X$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Z$ , facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XY$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$  com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

$A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_{1r} \equiv A_1$ .

Salienta-se que a informação dada sobre o cubo não nos permite efetuar qualquer construção de forma direta. De facto, é-nos dado o comprimento das diagonais faciais do cubo, mas não o comprimento da sua aresta, pelo que não é possível começar por determinar qualquer outro ponto do quadrado  $[ABCD]$ . Por outro lado, atendendo a que a aresta  $[BB']$  está contida no plano  $YZ$ , é possível concluir que nenhuma das faces do cubo será paralela a qualquer dos planos coordenados. Assim, não existe nenhuma diagonal facial do cubo que se projete em verdadeira grandeza em qualquer dos planos coordenados, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu foi o do rebatimento do plano projetante horizontal da face  $[AA'B'B]$  – o plano  $\alpha$ . No entanto, também não se sabe a orientação do plano  $\alpha$  (não se sabe a orientação de nenhuma das faces do cubo), pelo que, com os dados que temos, apenas é possível representar o seu traço frontal ( $f_\alpha$ ), que passa por  $A_2$  (pois o ponto  $A$  é um ponto do eixo  $X$ ). Assim, efetuou-se o rebatimento do plano  $\alpha$  para o plano  $XZ$ , pelo que se identificou a charneira do rebatimento imediatamente – a reta  $e''$ . Nesse sentido tem-se, imediatamente,  $f_\alpha \equiv e''_2 \equiv f_{\alpha_r}$ . A projeção horizontal da charneira é um ponto no eixo  $X$ .

O traço horizontal do plano  $\alpha$ , em rebatimento, roda até ficar sobre o eixo  $X$ , pelo que se tem, imediatamente,  $X \equiv h_{\alpha_r}'$ . Note que se considerou que o traço horizontal do plano  $\alpha$ , rebatido pelo seu rebatimento, é  $h_{\alpha_r}'$ , libertando-se a notação  $h_{\alpha_r}$  para a representação do traço horizontal do plano  $\alpha$ , no rebatimento do plano  $XY$ .

O ponto  $A$  é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente,  $A_r \equiv A_2$ . O plano  $\alpha$ , agora rebatido sobre o plano  $XZ$ , é o plano que contém a face  $[AA'B'B]$  do cubo. Esta face tem duas diagonais – a diagonal  $[AB']$  e a diagonal  $[A'B]$ . Tendo em conta que já temos o ponto  $A$  rebatido ( $A_r$ ), e na impossibilidade de ter qualquer outro ponto dessa face de forma direta, optou-se por representar a diagonal  $[AB']$ .

Em seguida, teve-se em conta que o segmento  $[AB']$  é a diagonal de um quadrado (a face  $[AA'B'B]$  é um quadrado). Nesse sentido, o ângulo que essa diagonal faz com o  $h_{\alpha_r}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$ ), onde se situa um dos lados do quadrado, é um ângulo de  $45^\circ$ . Dessa forma, a partir de  $A_r$  (o ponto  $A$  rebatido), mediou-se, em verdadeira grandeza, um ângulo de  $45^\circ$  com  $h_{\alpha_r}'$ , o que nos permitiu desenhar a reta suporte da diagonal  $[AB']$ , em rebatimento. Sobre essa reta mediram-se os 7 cm (o comprimento da diagonal) e determinou-se  $B_r'$  (o outro extremo da diagonal, em rebatimento).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que, no rebatimento efetuado do plano  $\alpha$ , se mantiveram as cotas, a cota da face superior do cubo já está determinada – o plano horizontal (de nível) que contém o arco do rebatimento do ponto  $B'$  é o plano que contém a face superior do cubo. Assim, por  $B'_r$  conduziu-se  $f_v$ , o traço frontal do plano  $v$  (o plano horizontal que contém a face superior do sólido).

Em seguida, para concluir a construção da projeção horizontal do quadrado (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), há que inverter o rebatimento do plano  $\alpha$ . Nesse sentido, desenhou-se a linha de chamada de  $B'_r$  até ao eixo  $X$  – com o compasso, fazendo centro da projeção horizontal da charneira (reta  $e'$ ) e com raio até esse ponto do eixo  $X$ , desenhou-se a projeção horizontal do arco do rebatimento do ponto  $B'$ , até ao eixo  $Y'_r$ , onde se situa  $B'_{1r}$  (a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto  $B'$ ).

Tendo em conta que as arestas do cubo que não são horizontais estão contidas em retas verticais (retas projetantes horizontais), sabe-se imediatamente que os pontos  $B$  e  $B'$  (os dois extremos da aresta  $[BB']$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente,  $B_{1r} \equiv B'_{1r}$ .

Finalmente, a partir de  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{1r}$  e  $D_{1r}$  (as projeções horizontais, em rebatimento, dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ . Note que se garantiu que o quadrado se situa, na totalidade, no espaço do 1.º *Triedro*, como o enunciado refere expressamente.

*Construção da projeção horizontal do cubo, em verdadeira grandeza:*

Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do cubo, em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ).

Tendo em conta que o quadrado  $[ABCD]$  é a face inferior de um cubo, e como atrás se referiu, as arestas do cubo ortogonais ao plano  $XY$  são necessariamente verticais (projetantes horizontais), pelo que as projeções horizontais dos vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$  (a face superior do cubo) estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices da sua face inferior – tem-se, imediatamente,  $A'_{1r} \equiv A_{1r}$ ,  $C'_{1r} \equiv C_{1r}$  e  $D'_{1r} \equiv D_{1r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do cubo, em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido).

*Construção da projeção frontal do cubo:*

O plano  $v$  (o plano que contém a face superior do cubo) é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Assim, pelas projeções horizontais (em rebatimento) de todos os vértices do cubo conduziram-se as respetivas linhas de chamada, perpendiculares ao eixo  $X$ , e determinaram-se as projeções frontais de todos os vértices do sólido.

$C_2$  e  $D_2$  são as projeções frontais dos vértices  $C$  e  $D$  (do quadrado  $[ABCD]$ ) e situam-se no eixo  $X$ , pois têm cota nula (o quadrado  $[ABCD]$  está contido no plano  $XY$ ).  $A'_2$ ,  $B'_2$ ,  $C'_2$  e  $D'_2$  são as projeções frontais dos vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$  e situam-se sobre  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal (o quadrado  $[A'B'C'D']$  está contido no plano  $v$ ).

Para determinar as perspetivas dos dois quadrados e do cubo é necessário inverter o rebatimento do plano  $XY$ , o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o plano *axonométrico* (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo  $Y$ ).

Em seguida, marcou-se, no eixo  $Y'_r$ , um ponto  $P'_r$  qualquer – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Y$  com um afastamento qualquer ( $\overline{OP}_r$  é o afastamento do ponto  $P$ , no eixo  $Y'_r$ , pelo rebatimento do plano  $XY$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP}_r$ , transportou-se o **afastamento** do ponto  $P$  para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Y$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ ). Assim,  $\overline{OP}_r$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $50^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva do afastamento do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspetiva do afastamento do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P'_r$  e pela perspetiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XY$  e determinação das perspetivas do ponto  $C$ :*

As projeções do ponto  $C$  (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $C$ . Uma vez que o ponto  $C$  é um ponto do plano  $XY$ , a linha de chamada do ponto  $C$  situa-se, na sua totalidade, no plano  $XY$  e é um segmento de reta, que tem um extremo em  $C_1$  e o outro extremo em  $C_2$  (que se situa no eixo  $X$ ). A perspetiva desse segmento tem um extremo em  $C_2$  e é paralela à perspetiva do eixo  $Y$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta  $[C_2C_1]$ . Em seguida, por  $C_1$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a direção de afinidade) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto  $C$  (a reta suporte do segmento  $[C_2C_1]$ ) é  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ).

Tendo em conta que o ponto  $C$  tem cota nula, o ponto  $C$  é um ponto do plano coordenado  $XY$ , pelo que se tem imediatamente  $C \equiv C_1$  (sendo  $C$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$ ).

Note que não se determinou a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C$  ( $C_3$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica. No entanto, caso se tivesse determinado,  $C_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C$ ) estaria necessariamente sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , pois o ponto  $C$  tem cota nula.

#### Determinação das perspectivas dos pontos $B$ e $D$ :

As perspectivas dos pontos  $B$  e  $D$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto  $C$ . À semelhança do ponto  $C$ , também os pontos  $B$  e  $D$  têm cota nula, pelo que os dois pontos também pertencem ao plano coordenado  $XY$ , pelo que se tem imediatamente  $B \equiv B_1$  (sendo  $B$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $B$ ) e  $D \equiv D_1$  (sendo  $D$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $D$ ). Salienta-se que o ponto  $B$  é um ponto do eixo  $Y$ .

Também à semelhança do exposto para o ponto  $C$ , optou-se por não se determinar as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $B$  e  $D$  ( $B_3$  e  $D_3$ , respetivamente), mas, caso se tivessem determinado, aquelas situar-se-iam sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , pois os pontos têm cota nula.

#### Determinação das perspectivas dos pontos $A'$ , $B'$ , $C'$ e $D'$ :

Como atrás se referiu, as arestas do cubo que não são horizontais são verticais (projetantes horizontais), pelo que os vértices da face superior (o quadrado  $[A'B'C'D']$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices da face inferior (o quadrado  $[ABCD]$ ), facto que se identificou em perspectiva – tem-se, imediatamente,  $A'_1 \equiv A \equiv A_1$ ,  $B'_1 \equiv B \equiv B_1$ ,  $C'_1 \equiv C \equiv C_1$  e  $D'_1 \equiv D \equiv D_1$ .

Em seguida, por  $A'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $A'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto  $A'$ , que é vertical (paralela ao eixo  $Z$ ). Depois, por  $A'_2$  (a projeção frontal do ponto  $A'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto  $A'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto  $A'$ . Este procedimento repetiu-se para os pontos  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ , o que nos permitiu determinar as respetivas perspectivas.

Note que não se determinaram as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ , por estas não serem determinantes para a resolução do exercício. De facto, a omissão de algumas notações a que se tem recorrido (e que é desejável) visa uma simplificação geral da resolução gráfica. No entanto, caso se tivesse determinado as perspectivas das projeções laterais daqueles pontos, estas estariam necessariamente sobre  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

#### Determinação das perspectivas do cubo:

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, começando pelo seu contorno aparente – o contorno aparente da perspectiva do cubo é a linha quebrada fechada  $[BCDD'A'B']$ . Existem dois vértices do cubo que não integram o contorno aparente da perspectiva do sólido – os vértices  $C'$  e  $A$ . O vértice  $C'$ , por ser o vértice mais próximo do observador, é visível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[B'C']$ ,  $[C'D']$  e  $[CC']$ . O vértice  $A$ , por ser o vértice mais distante do observador, é invisível, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas  $[AB]$ ,  $[AD]$  e  $[AA']$ .

As faces  $[A'B'C'D']$ ,  $[BB'C'C]$  e  $[CC'D'D]$  são visíveis, enquanto as faces  $[ABCD]$ ,  $[AA'B'B]$  e  $[AA'D'D]$  são invisíveis.

Note que não se representaram as perspectivas nem da projeção frontal nem da projeção lateral do cubo, por não serem necessárias. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da representação axonométrica, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o cubo, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo  $X$ , eixo  $Y$  e eixo  $Z$ ) representaram-se a médio, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cubo representou-se a forte, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano horizontal que contém a face superior do cubo), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a leve. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a leve – caso da representação do sólido em Dupla Projeção Ortogonal, do plano  $\alpha$  e do seu rebatimento, do eixo  $Y_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$  e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano  $XY$ .



## 1288.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $120^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de  $105^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $135^\circ$ , que é o ângulo restante ( $105^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações (recorde que as dimensões do *triângulo fundamental* são arbitrárias).

### Resolução:

O triângulo **[ABC]** (a base inferior do prisma) está contido no plano **XY**, que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido no *plano coordenado horizontal* (o plano **XY**), sabe-se que o triângulo está em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY* – o triângulo **[ABC]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no *plano coordenado XY*) são a mesma figura. Assim, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o triângulo está em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XY* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

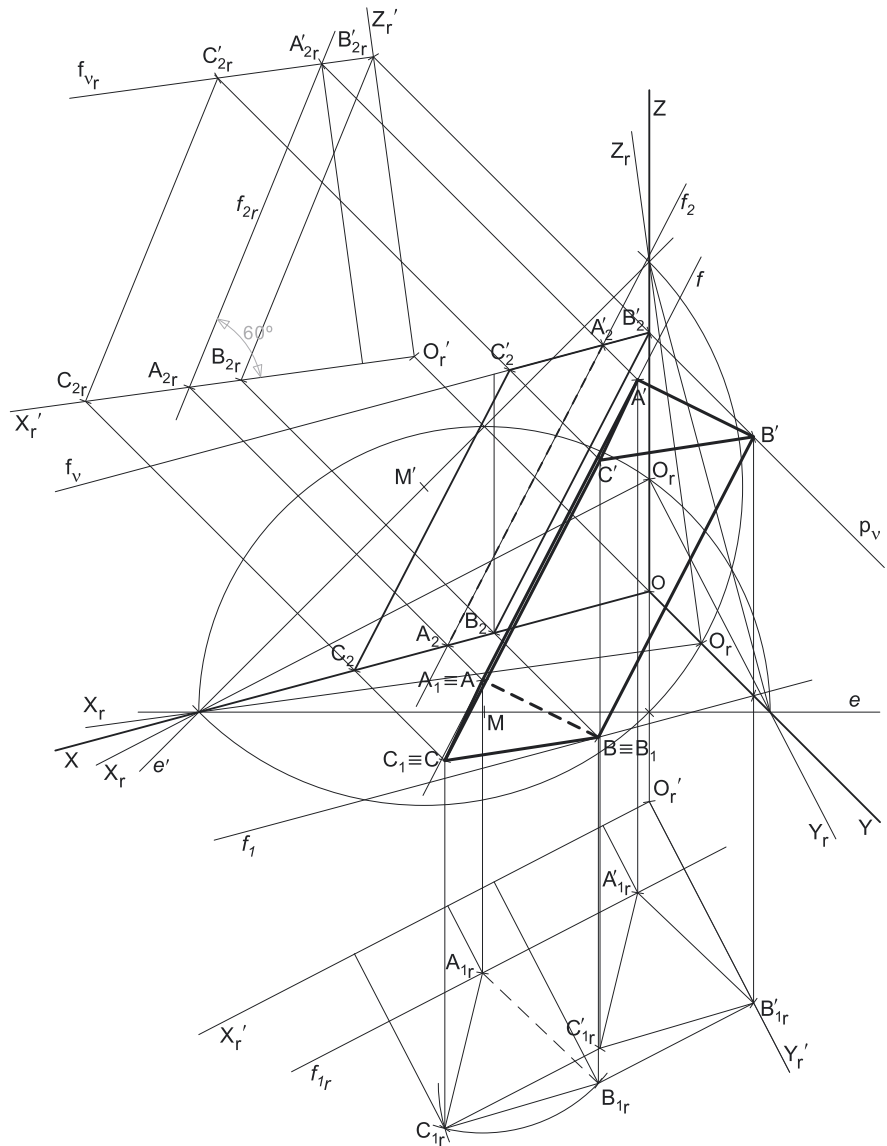
#### Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta suporte do lado do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo **Z**.

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, determinou-se **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspectiva do eixo **Z**). O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Y<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>**. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Construção da projeção frontal do triângulo [ABC], em verdadeira grandeza:*

No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **A** em verdadeira grandeza (6 cm) – salienta-se que o ponto **B'** tem abscissa nula. Em seguida, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **A** e **B'** em verdadeira grandeza (2 cm e 6 cm, respetivamente). A partir das abscissas e dos afastamentos dos pontos **A** e **B'**, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais dos pontos **A** e **B'**, em rebatimento ( $A_{1r}$  e  $B'_{1r}$ , respetivamente). Atendendo a que o ponto **B'** tem abscissa nula, a projeção horizontal do ponto **B'**, em rebatimento ( $B'_{1r}$ ), situa-se no eixo  $Y_r'$ .

Os dados de que dispomos são claramente insuficientes para, apenas a partir das projeções horizontais dos pontos **A** e **B'** em rebatimento ( $A_{1r}$  e  $B'_{1r}$ , respetivamente), ser possível construir a projeção horizontal (em rebatimento) da base inferior do prisma. Assim, esta situação é uma das situações em que o recurso à representação do sólido em Dupla Projeção Ortogonal (em rebatimento) é fundamental, para a conclusão do exercício.

Por outro lado, sendo dado o ângulo que as arestas laterais do sólido fazem com o plano **XY** – esses ângulos não se projetam em verdadeira grandeza no plano de projeção (o plano *axonométrico*), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar tem de ser o rebatimento do plano coordenado frontal (o plano **XZ**), que é o plano no qual aqueles ângulos se projetam em verdadeira grandeza (por estarem contidos em planos paralelos ao plano coordenado **XZ**).

*Rebatimento do plano coordenado XZ:*

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XZ**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta suporte do lado do triângulo fundamental que se opõe à perspetiva do eixo **Y**.

O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano **XZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M'**, o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, determinou-se  $O_r$  (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspetiva do eixo **Y**). O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo  $X_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo **Y**. O ponto  $O_r'$  é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

*Representação do prisma em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal e frontal, em rebatimento (nos planos XY e XZ rebatidos):*

No plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **A** (6 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto **B'** tem abscissa nula. No plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **B'** (8 cm), em verdadeira grandeza – salienta-se que o ponto **A** tem cota nula. Estes dois procedimentos permitiram-nos determinar as projeções frontais dos pontos **A** e **B'**, em rebatimento ( $A_{2r}$  e  $B'_{2r}$ , respetivamente). Atendendo a que o ponto **A** tem cota nula, a projeção frontal do ponto **A**, em rebatimento ( $A_{2r}$ ) situa-se no eixo  $X_r'$ . Atendendo a que o ponto **B'** tem abscissa nula, a projeção frontal do ponto **B'**, em rebatimento ( $B'_{2r}$ ) situa-se no eixo  $Z_r'$ .

Isso permitiu-nos representar, no plano **XZ** rebatido e transladado, o plano  $v$ , que é o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do prisma). Assim, desenhou-se o traço frontal do plano  $v$  em rebatimento ( $f_{vr}$ ) –  $f_{vr}$  é paralelo ao eixo  $X_r'$  e dista 8 cm (a cota do ponto **B'**) do eixo  $X_r'$ . Note que  $f_{vr}$  passa por  $B'_{2r}$ , pois o plano  $v$  e um plano projetante frontal (projeta todas as suas retas e pontos no plano **XZ**, sobre o seu traço frontal).

Em seguida, no plano **XZ** rebatido e transladado, por  $A_{2r}$  (a projeção frontal do ponto **A**, em rebatimento) conduziu-se uma reta fazendo, com o eixo  $X_r'$ , um ângulo de 60° (de abertura para a direita) – essa reta é, em projeção frontal (em rebatimento) a reta suporte da aresta lateral [**AA'**] do prisma. Por outro lado, o ângulo referido é, em verdadeira grandeza, o ângulo que as arestas laterais do sólido fazem com o plano **XY** (e que é dado no enunciado).

Em sequência, determinou-se  $A'_{2r}$ , no ponto em que a reta suporte da projeção frontal da aresta [**AA'**] intersesta  $f_{vr}$  (o traço frontal do plano  $v$ , em rebatimento). Note que se tratou da interseção entre uma reta não projetante (a reta suporte da aresta [**AA'**]) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).  $A'_{2r}$  é a projeção frontal (em rebatimento) do extremo superior da aresta lateral [**AA'**] do prisma e é, também, um dos vértices do triângulo [**A'B'C'**] (que é a base superior do sólido).

Em seguida, no plano **XZ** rebatido e transladado, por  $B'_{2r}$  (a projeção frontal do ponto **B'**, em rebatimento) conduziu-se a projeção frontal da aresta [**BB'**], em rebatimento (paralela ao segmento [ $A_{2r}A'_{2r}$ ]) e determinou-se  $B_{2r}$  (a projeção frontal do ponto **B**, em rebatimento). Note que **B** é um ponto com cota nula (pois a base inferior do prisma está contida no plano **XY**), pelo que  $B_{2r}$  se situa necessariamente no eixo  $X_r'$ .

Tendo em conta que as arestas laterais do sólido estão contidas em retas frontais (de frente), no plano **XY** rebatido e transladado, por  $B'_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto **B'**, em rebatimento) conduziu-se a projeção horizontal reta suporte da aresta [**BB'**], em rebatimento (paralela ao eixo  $X_r'$ , pois todos os pontos de uma reta frontal têm o mesmo afastamento). De forma semelhante, no plano **XY** rebatido e transladado, por  $A_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto **A**, em rebatimento) conduziu-se a projeção horizontal reta suporte da aresta [**AA'**], em rebatimento (novamente paralela ao eixo  $X_r'$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, no plano  $XZ$  rebatido e transladado, determinou-se, sobre o eixo  $X_r'$ , a abscissa do ponto  $A'$  para o que se conduziu, por  $A'_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $A'$ , em rebatimento), uma paralela ao eixo  $Z_r'$  até ao eixo  $X_r'$ . Com o compasso, transportaram-se as abscissas dos pontos  $A'$  e  $B$ , do eixo  $X_r'$  do rebatimento do plano  $XZ$  para o eixo  $X_r'$  do rebatimento do plano  $XY$ . Em seguida, no plano  $XY$  rebatido e transladado, transportou-se a abscissa do ponto  $A'$  para a reta suporte da projeção horizontal da aresta  $[AA']$  (com o recurso a uma paralela ao eixo  $Y_r'$ ), transportando-se igualmente a abscissa do ponto  $B$  para a reta suporte da projeção horizontal da aresta  $[BB']$ . Este procedimento permitiu-nos determinar  $A'_{1r}$  e  $B_{1r}$  (as projeções horizontais, em rebatimento, dos pontos  $A'$  e  $B$ ).

Por fim, a partir de  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$  (as projeções horizontais, em rebatimento, dos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente) foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do triângulo**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{1r}$  (a projeção horizontal do terceiro vértice do triângulo  $[ABC]$ , em rebatimento) – o triângulo  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}]$  é a projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento). Sublinha-se que, na construção do triângulo  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}]$  se teve em atenção que o prisma se situa no espaço do  $1^a$  Triedro, como o enunciado refere expressamente. Assim, para que o vértice  $C'$  da base superior se situe no espaço do  $1^a$  Triedro, o ponto  $C$  tem de ser o vértice de maior abscissa do triângulo  $[ABC]$ .

Finalmente, a partir da projeção horizontal (em rebatimento) do vértice  $C$  da base inferior ( $C_{1r}$ ), e atendendo, mais uma vez, a que as arestas laterais do sólido estão contidas em retas frontais (de frente), determinou-se  $C'_{1r}$  (a projeção horizontal, em rebatimento, do vértice  $C'$  da base superior) e, dessa forma, construiu-se o triângulo  $[A'_{1r}B'_{1r}C'_{1r}]$  em verdadeira grandeza. O triângulo  $[A'_{1r}B'_{1r}C'_{1r}]$  é a projeção horizontal, em rebatimento, da base superior do prisma (o triângulo  $[A'B'C']$ ). Dessa forma concluiu-se a construção da projeção horizontal do prisma, em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido e transladado).

Em seguida, no plano  $XY$  rebatido e transladado, determinou-se, sobre o eixo  $X_r'$ , a abscissa do ponto  $C$  para o que se conduziu, por  $C_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $C$ , em rebatimento), uma paralela ao eixo  $Y_r'$  até ao eixo  $X_r'$ . Com o compasso, transportou-se a abscissa do ponto  $C$ , do eixo  $X_r'$  do rebatimento do plano  $XY$  para o eixo  $X_r'$  do rebatimento do plano  $XZ$ . Este procedimento permitiu-nos determinar  $C_{2r}$  (a projeção frontal, em rebatimento, do ponto  $C$ ), no plano  $XZ$  rebatido e transladado.

Finalmente, a partir da projeção frontal do ponto  $C$  (em rebatimento, no plano  $XZ$  rebatido e transladado), e atendendo, mais uma vez, a que as arestas laterais do sólido estão contidas em retas frontais (de frente) paralelas entre si, por  $C_{1r}$  conduziu-se uma paralela aos segmentos  $[A_2A'_{2r}]$  e  $[B_2B'_{2r}]$  (que é a reta suporte da projeção frontal da aresta  $[CC']$ , em rebatimento) e determinou-se  $C'_{2r}$  (a projeção frontal, em rebatimento, do vértice  $C'$  da base superior).

Salienta-se que  $C'_{2r}$  é o ponto em que a reta suporte da projeção frontal da aresta  $[CC']$  interseca  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ , em rebatimento). Note que se tratou da interseção entre uma reta não projetante (a reta suporte da aresta  $[CC']$ ) com um plano projetante frontal (o plano  $v$ ).  $C'_{2r}$  é, assim, a projeção frontal (em rebatimento) do extremo superior da aresta lateral  $[CC']$  do prisma e é, também, um dos vértices do triângulo  $[A'B'C']$  (que é a base superior do sólido). Este procedimento permitiu-nos, finalmente concluir a construção da projeção frontal do prisma em rebatimento (no rebatimento do plano  $XZ$ ).

O prisma está, assim, representado em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontais (no plano  $XY$  rebatido e transladado) e frontal (no plano  $XZ$  rebatido e transladado). Para se determinar a perspetiva do prisma, é necessário inverter os dois rebatimentos efetuados.

*Representação do plano horizontal (de nível)  $v$ , que contém a base superior do prisma:*

Em primeiro lugar, por  $B'_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $B'$ , em rebatimento, no rebatimento do plano  $XZ$ ) conduziu-se uma perpendicular à charneira do rebatimento (reta  $e'$ ) e determinou-se, sobre a perspetiva do eixo  $Z$ , a perspetiva de  $B'_2$  (a projeção frontal do ponto  $B'$ ). Note que  $B'_2$  (a projeção frontal do ponto  $B'$ ) é um ponto do eixo  $Z$  (porque o ponto  $B'$  tem abscissa nula), pelo que a perspetiva de  $B'_2$  se situa necessariamente sobre a perspetiva do eixo  $Z$ .  $B'_2$  é, assim, o ponto do eixo  $Z$  que tem 8 cm de cota.

Em seguida, pela perspetiva de  $B'_2$ , conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $v - f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abscissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Y$ .

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Inversão dos rebatimentos e determinação das perspetivas dos vértices do prisma:*

Para inverter o rebatimento do ponto  $A'$  (por exemplo), a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção frontal), conduziu-se, por  $A'_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $A'$ , em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A'_{2r}$  (a projeção frontal do ponto  $A'$ , em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e'$ ) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspetiva propriamente dita do ponto  $A'$ . O ponto  $A'$  é um ponto do plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, pelo que a perspetiva da projeção frontal do ponto  $A'$  ( $A'_2$ ) se situa necessariamente sobre  $f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

A inversão do rebatimento dos restantes vértices do sólido, bem como a determinação das respetivas perspetivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto  $A'$ . Tal como referido para o ponto  $A'$ , também o ponto  $C'$  é um ponto do plano  $v$ , que é um plano projetante frontal, pelo que a perspetiva da projeção frontal do ponto  $C'$  ( $C'_2$ ) se situa necessariamente sobre  $f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

O ponto  $B$  pertence ao plano  $v$  e é um ponto com abscissa nula, pelo que o ponto  $B$  é necessariamente um ponto do traço lateral do plano  $v$  ( $p_v$ ). Assim,  $B_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $B$ ) situa-se necessariamente sobre a perspetiva do eixo  $X$ . Por outro lado, atendendo a que o ponto  $B$  é um ponto do plano  $YZ$  (porque tem abscissa nula), o ponto  $B$  está coincidente com a sua projeção lateral, o que se assinalou devidamente no desenho – tem-se, imediatamente,  $B_3 \equiv B$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Saliena-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$  com a notação  $X_r'$ , optando-se por manter a notação  $X_r$  para o eixo  $X$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $XY$  rebatido, representou-se a projeção horizontal do ponto  $A$ , em rebatimento ( $A_{1r}$ ), em função da sua abcissa. Assim,  $A_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto  $A$  (em rebatimento) e situa-se 2 cm (a abcissa do ponto  $A$ ) para baixo do eixo  $Y$ , na sua linha de chamada (que passa por  $A_3$  e é perpendicular ao eixo  $Y$ ). Tendo em conta que o lado  $[AB]$ , do triângulo, é fronto-horizontal (como o enunciado refere expressamente), sabe-se que o segmento  $[AB]$  é paralelo ao eixo  $X$  – em rebatimento, o segmento de reta  $[A_{1r}B_{1r}]$  (o segmento  $[AB]$  em rebatimento) é necessariamente paralelo ao eixo  $X_r'$ . Assim, por  $A_{1r}$ , conduziu-se uma paralela ao eixo  $X_r'$ , sobre a qual se mediram os 7 cm (a medida do lado do triângulo), o que nos permitiu determinar  $B_{1r}$  (a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto  $B$ ).

A partir de  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do triângulo**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $C_{1r}$  (a projeção horizontal do terceiro vértice do triângulo) – o triângulo  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}]$  é a projeção horizontal do triângulo  $[ABC]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ . Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  *Triedro*, como o enunciado pede expressamente.

Um **tetraedro** toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**, independentemente da face na qual o sólido assenta. Assim, o eixo do sólido (relativo a face  $[ABC]$ ) está necessariamente contido numa reta ortogonal ao plano  $XY$  (o plano que contém a face  $[ABC]$ ), que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal). Nesse sentido, o centro da face  $[ABC]$  (o ponto  $Q$ ) e o quarto vértice do sólido (o vértice  $D$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes. Assim, em seguida determinou-se o centro do triângulo  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}]$ , que é o ponto  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento).

Como atrás se referiu, os dois pontos (o ponto  $Q$  e o ponto  $D$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou convenientemente em rebatimento –  $Q_{1r} \equiv D_{1r}$ .

### Representação do tetraedro em Dupla Projeção Ortogonal:

A partir da construção da projeção horizontal do tetraedro (em rebatimento), e porque não é conhecida a altura de um tetraedro, é necessário representar o sólido em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal (em rebatimento) e lateral, de forma a determinar a cota do ponto  $D$  (o quarto vértice do tetraedro).

Assim, pelas projeções horizontais (em rebatimento) dos pontos  $B$ ,  $C$ ,  $Q$  e  $D$  ( $B_{1r}$ ,  $C_{1r}$ ,  $Q_{1r}$  e  $D_{1r}$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada, que são perpendiculares ao eixo  $Y$ , o que nos permitiu determinar as projeções laterais dos pontos  $B$ ,  $C$  e  $Q$  ( $B_3$ ,  $C_3$  e  $Q_3$ , respetivamente), que se situam no eixo  $X$ , pois a face  $[ABC]$  do sólido está contida no plano  $XY$ .

Note que se tem, imediatamente,  $B_3 \equiv A_3$ , pois os pontos  $A$  e  $B$  situam-se na mesma reta fronto-horizontal, que é uma reta projetante lateral (os dois pontos têm as suas projeções laterais coincidentes).

Como atrás se referiu, não se conhece a altura de um tetraedro – uma vez que se trata de um poliedro regular sabe-se, apenas, que todas as suas arestas têm o mesmo comprimento que, neste caso, é 7 cm (o comprimento do lado do triângulo  $[ABC]$ ). Assim, todas as arestas do sólido que convergem no ponto  $D$  (as arestas  $[AD]$ ,  $[BD]$  e  $[CD]$ ) têm, necessariamente, 7 cm de comprimento. Analisemos a situação de cada uma destas arestas, aresta a aresta.

A aresta  $[AD]$  é oblíqua a ambos os planos de projeção (o plano  $XY$  e o plano  $YZ$ ), pelo que a aresta  $[AD]$  não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. A aresta  $[BD]$  é igualmente oblíqua a ambos os planos de projeção (o plano  $XY$  e o plano  $YZ$ ), pelo que a aresta  $[BD]$  também não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Já a aresta  $[CD]$  está contida numa reta de perfil, que é necessariamente paralela ao plano  $YZ$  (o plano coordenado lateral), pelo que a aresta  $[CD]$  se projeta em verdadeira grandeza no plano  $YZ$  (em projeção lateral).

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $C_3$  (a projeção lateral do ponto  $C$ ) e com 7 cm de raio (o comprimento da aresta do tetraedro), determinou-se  $D_3$  (a projeção lateral do ponto  $D$ ), sobre a sua linha de chamada (que passa por  $D_{1r}$  e é perpendicular ao eixo  $Y$ ). Este procedimento permitiu-nos desenhar a projeção lateral do sólido e, assim, concluir a representação do tetraedro em Dupla Projeção Ortogonal (pelas suas projeções horizontal e lateral).

Para se determinarem as perspetivas do triângulo  $[ABC]$  e do tetraedro é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

### Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $X$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  para o *plano axonométrico* (o plano  $YZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $X$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $X$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo  $X$ ).

Em seguida, marcou-se, no eixo  $X_r'$ , um ponto  $P_r'$  qualquer – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $X$  com uma abcissa qualquer ( $\overline{OP_r'}$  é a abcissa do ponto  $P$ , no eixo  $X_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XZ$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OP}$ , transportou-se a **abscissa** do ponto **P** para o eixo  $X_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **X**, mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo **X**). Assim,  $\overline{OP}$  é a abscissa do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **X**. Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $65^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva da abscissa do ponto **P** –  $\overline{OP}$  é a perspectiva da abscissa do ponto **P**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação das perspectivas do ponto D:*

As projeções do ponto **D** (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **D** – a linha de chamada do ponto **D** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $D_3$ , outro extremo em  $D_1$  e um vértice no eixo **Y**. **No espaço**, a parte da linha de chamada do ponto **D** que está contida no plano **XY** é o segmento de reta perpendicular ao eixo **Y** e que tem um extremo em  $D_1$  e o outro extremo no eixo **Y**. **Em rebatimento**, essa parte da linha de chamada do ponto **D** é o segmento que é perpendicular ao eixo **Y** e que tem um extremo em  $D_{1r}$  e o outro extremo no eixo **Y**. **Em perspectiva**, essa parte da linha de chamada do ponto **D** (a parte que se situa no plano **XY**) é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X** e tem um extremo no eixo **Y**.

Assim, de acordo com as premissas atrás referidas, desenhou-se a reta suporte **da perspectiva** da parte da linha de chamada do ponto **D** que se situa no plano **XY** (e que é paralela à perspectiva do eixo **X**). Em seguida, por  $D_{1r}$ , conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto **D** (anteriormente desenhada) é  $D_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **D**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XY**.

Em seguida, por  $D_3$  (a projeção lateral do ponto **D**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral do ponto **D**, que é fronto-horizontal (paralela à perspectiva do eixo **X**). Depois, por  $D_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **D**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto **D** (que é paralela ao eixo **Z**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **D**.

Note que não se determinou a perspectiva da projeção frontal do ponto **D** ( $D_2$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício.

*Determinação das perspectivas dos pontos A, B, C e Q:*

As perspectivas dos pontos **A**, **B** e **C** determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto **D**. Os pontos **A**, **B** e **C** têm cota nula (pertencem ao plano **XY**), pelo que os pontos estão coincidentes com as suas projeções horizontais, o que se assinalou convenientemente em perspectiva – tem-se, imediatamente,  $A \equiv A_1$ ,  $B \equiv B_1$ ,  $C \equiv C_1$ .

Por outro lado, o ponto **Q** é o ponto do plano **XY** que se situa na mesma projetante horizontal do ponto **D**, facto que se assinalou diretamente em perspectiva – tem-se, imediatamente  $Q \equiv Q_1 \equiv V_1$  (note que a paralela à direção de afinidade **d** que nos permitiu inverter o rebatimento do ponto **D** é a ma que nos permite inverter o rebatimento do ponto **Q**)

À semelhança do referido para o ponto **D**, também não se determinaram as perspectivas das projeções frontais dos pontos **A**, **B**, **C** e **Q**. No entanto, caso se tivessem determinado,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  e  $Q_2$  (as perspectivas das projeções frontais dos pontos **A**, **B**, **C** e **Q**, respetivamente) estariam necessariamente sobre a perspectiva do eixo **X**, pois os quatro pontos têm cota nula.

*Determinação da perspectiva do tetraedro:*

Por fim, desenhou-se a **perspetiva do tetraedro**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[BCD]** (que é, na prática, o contorno da a face **[BCV]**). Existe um único vértice do tetraedro que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **A**. Este, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[AB]**, **[AC]** e **[AD]**). As faces **[ABD]**, **[BCD]** e **[ABC]** são invisíveis. Já a face **[BCD]** é visível.

Note que não se representou a perspectiva da projeção frontal do sólido, por tal não ser relevante para a resolução do exercício. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o tetraedro, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

**Traçado:**

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do tetraedro representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da projeção horizontal do tetraedro, em rebatimento, do eixo  $X_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade **d** e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XY**.



## 1290.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo  $Z$  representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo  $X$  e ao eixo  $Z$ , conclui-se que o plano axonométrico é o plano  $XZ$  – o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo  $Y$  (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo  $X$  um ângulo de  $125^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo  $Z$ , um ângulo de  $145^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, as abscissas dos pontos  $A$  e  $C$  (7 cm e 3 cm, respetivamente), sobre o eixo  $X$  (a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), bem como a cota daqueles dois pontos (9 cm) sobre o eixo  $Z$  (também a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato,  $A_2$  e  $C_2$  (as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente), bem como  $A_0$  e  $C_0$  (as referências das abscissas daqueles dois pontos, no eixo  $X$ ). Note que o eixo  $X$  e o eixo  $Z$  estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

Salienta-se que o ponto  $A$  tem afastamento nulo (é um ponto do plano coordenado  $XZ$ ), pelo que  $A_1$  (a sua projeção horizontal) se situa necessariamente no eixo  $X$ . Por outro lado, e ainda porque o ponto  $A$  é um ponto do plano coordenado  $XZ$ , o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, pelo que se tem, imediatamente,  $A = A_2$  (sendo  $A$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $A$ ).

Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém o quadrado  $[ABCD]$ ), pelos seus traços. O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Nesse sentido, desenhou-se  $f_v$ , o traço frontal do plano  $v$  –  $f_v$  passa por  $A_2$  e por  $C_2$  (as projeções frontais dos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Note que  $f_v$  é uma reta fronto-horizontal do plano, com afastamento nulo.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço lateral do plano  $v$  ( $p_v$ ), que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$  e é concorrente com  $f_v$  no eixo  $Z$  –  $p_v$  é uma reta de topo do plano  $v$ , com abscissa nula. Salienta-se que o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

### Resolução:

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (a base da pirâmide) é um plano horizontal (de nível), que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao plano coordenado horizontal (o plano  $XY$ ), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XY$  – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado  $XY$ ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do rebatimento do plano coordenado  $XY$  (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

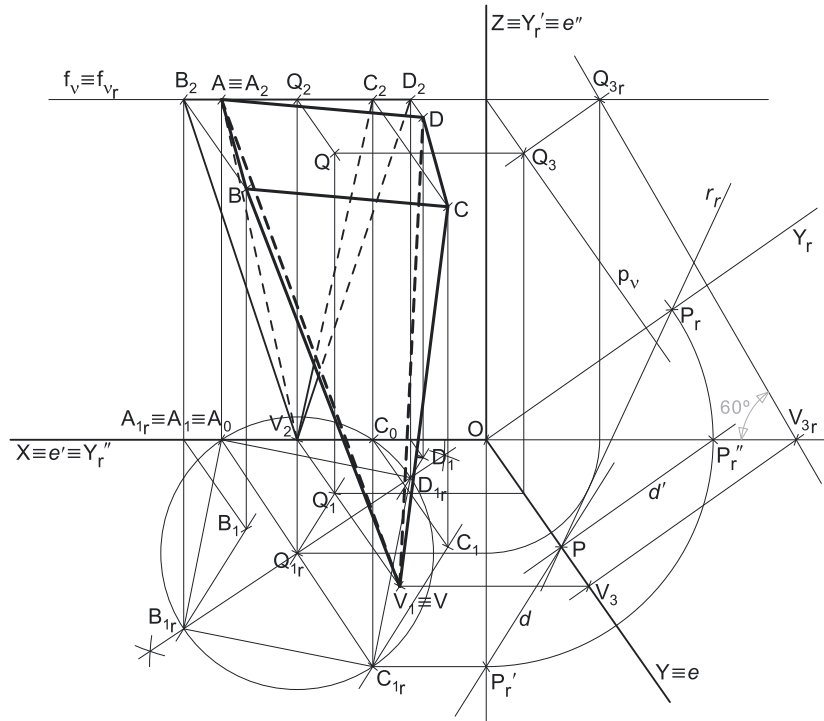
#### Rebatimento do plano $XY$ e construção da projeção horizontal do quadrado $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza:

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XY$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $X$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Z$ , facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XY$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$  com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $XY$  rebatido, representou-se a projeção horizontal do ponto  $A$ , em rebatimento ( $A_{1r}$ ).  $A_1$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) é um ponto da charneira (que é o eixo  $X$ ), pelo que roda sobre si própria (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_{1r} \equiv A_1$ .

No plano  $XY$  rebatido, representou-se, ainda a projeção horizontal do ponto  $C$ , em rebatimento ( $C_{1r}$ ), em função do seu afastamento. Assim,  $C_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto  $C$  (em rebatimento) e situa-se 6 cm (o afastamento do ponto  $C$ ) para baixo do eixo  $X$ , na sua linha de chamada (que passa por  $C_0$  e é perpendicular ao eixo  $X$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir de  $A_{1r}$  e  $C_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $B_{1r}$  e  $D_{1r}$  (as projeções horizontais, em rebatimento, dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ . Os vértices  $B$  e  $D$  foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

Salienta-se que a construção da projeção horizontal do quadrado (em rebatimento) careceu da determinação do ponto  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do centro do quadrado, em rebatimento), bem como do desenho da circunferência em que aquele quadrado se inscreve (a circunferência que tem centro em  $Q_{1r}$  e raio até  $A_{1r}$  e  $C_{1r}$ ).

Pelas projeções horizontais dos pontos  $B$  e  $D$ , em rebatimento ( $B_{1r}$  e  $D_{1r}$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo  $X$ ) e determinaram-se as projeções frontais daqueles dois pontos ( $B_2$  e  $D_2$ , respetivamente) sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Para determinar a perspetiva do quadrado  $[ABCD]$  é necessário inverter o rebatimento do plano  $XY$ , o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade que permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ :*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo  $Y$ ).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Y_r$ , o afastamento do ponto  $C$ , a partir de  $C_{1r}$ , com uma paralela ao eixo  $X$ . Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r'$ , no eixo  $Y_r$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Y$  com o afastamento do ponto  $C$  ( $\overline{OP_r'}$  é o afastamento do ponto  $C$ , no eixo  $Y_r$ , pelo rebatimento do plano  $XY$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto  $P$  para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Y$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva do afastamento do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspetiva do afastamento do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XY$  e determinação das perspetivas do ponto  $C$ :*

Para se determinarem as perspetivas do ponto  $C$  teve-se em conta que as projeções do ponto  $C$  (a projeção horizontal e a projeção frontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $C$  – a linha de chamada do ponto  $C$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $C_2$ , outro extremo em  $C_1$  e um vértice no eixo  $X$  (em  $C_0$ ). A parte da linha de chamada do ponto  $C$  que está contida no plano  $XY$  é o segmento  $[C_0C_1]$  – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento  $[C_0C_{1r}]$ . A perspetiva desse segmento tem um extremo em  $C_0$  e é paralela à perspetiva do eixo  $Y$ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspetiva do segmento de reta  $[C_0C_1]$ . Em seguida, por  $C_{1r}$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspetiva da linha de chamada do ponto  $C$  (a reta suporte do segmento  $[C_0C_1]$ ) é  $C_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XZ$ .

Em seguida, por  $C_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto  $C$ , que é vertical (que é paralela ao eixo  $Z$ ). Depois, por  $C_2$  (a projeção frontal do ponto  $C$ ), conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal do ponto  $C$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto  $C$ .

Note que não se determinou a perspetiva da projeção lateral do ponto  $C$  ( $C_3$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado,  $C_3$  (a perspetiva da projeção lateral do ponto  $C$ ) estaria necessariamente sobre  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

*Determinação das perspetivas dos pontos  $B$  e  $D$ :*

As perspetivas dos pontos  $B$  e  $D$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto  $C$ .

À semelhança do exposto para o ponto  $C$ , também não se determinaram as perspetivas das projeções laterais dos pontos  $B$  e  $D$  ( $B_3$  e  $D_3$ , respetivamente), por estas não serem determinantes para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivessem determinado,  $B_3$  e  $D_3$  (as perspetivas das projeções laterais dos pontos  $B$  e  $D$ , respetivamente) estariam necessariamente sobre  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

A partir das perspetivas propriamente ditas dos quatro vértices do quadrado, desenhou-se a perspetiva do quadrado  $[ABCD]$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

## Construção da projeção frontal da pirâmide:

Atendendo a que o eixo da pirâmide está contido numa reta de perfil e que o vértice da pirâmide tem cota nula (dado no enunciado), foi possível determinar, de forma direta, a projeção frontal do vértice **V**, da pirâmide. Em primeiro lugar, pela projeção horizontal do ponto **Q**, em rebatimento ( $Q_1$ ), conduziu-se a sua linha de chamada (perpendicular ao eixo **X**) e determinou-se a projeção frontal do ponto **Q** ( $Q_2$ ) sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Uma vez que o eixo da pirâmide está contido numa reta de perfil, o ponto **V** tem a mesma abcissa do ponto **Q**, pelo que a projeção frontal do ponto **V** ( $V_2$ ) se situa necessariamente na mesma linha de chamada do ponto **Q**. Por outro lado, atendendo a que o ponto **V** tem cota nula, a sua projeção frontal ( $V_2$ ) situa-se necessariamente no eixo **X**. Após a determinação da projeção frontal do ponto **V**, foi possível concluir a construção da projeção frontal da pirâmide.

É dado o ângulo que o eixo do sólido (que é de perfil) faz com o plano **XY**. No entanto, esse ângulo está contido no plano que contém o eixo da pirâmide e é ortogonal ao plano **XY** – trata-se de um plano de perfil (que não se identificou).

O plano que contém o ângulo não é paralelo ao plano de projeção (o plano *axonométrico*, que é o plano **XZ**), pelo que o ângulo **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do ângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o ângulo está contido num plano de perfil, que é paralelo ao plano *coordenado de perfil* (o plano **YZ**), sabe-se que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no plano *coordenado YZ* – o ângulo projeta-se em verdadeira grandeza no ângulo que a projeção lateral do eixo do sólido faz com o eixo **Y**. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o ângulo se projeta em verdadeira grandeza).

## Rebatimento do plano YZ e construção do ângulo que o eixo da pirâmide faz com o plano XY, em projeção lateral, em verdadeira grandeza:

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano **YZ** para o plano *axonométrico* (o plano **XZ**), pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e''$ ), que é o eixo **Z**. O eixo **Y** rebatido (o eixo  $Y_r''$ ) fica coincidente com o eixo **X**, facto que se assinalou devidamente –  $X \equiv Y_r''$ . O eixo  $Y_r''$  é o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do plano **YZ** (salienta-se que se trata do terceiro rebatimento do eixo **Y**, neste exercício).

No plano **YZ** rebatido, representou-se a projeção lateral do ponto **Q**, em rebatimento ( $Q_3$ ), em função do seu afastamento. Para tal, mediu-se, com o compasso, a distância do eixo **X** até  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto **Q**, em rebatimento), que é o afastamento do ponto **Q** em verdadeira grandeza. Em seguida, desenhou-se a linha de chamada do ponto **Q** que relaciona a sua projeção frontal ( $Q_2$ ) com a sua projeção lateral (em rebatimento),  $Q_3$  – essa linha de chamada é perpendicular ao eixo **Z** (está sobre o traço frontal do plano  $v$ ). Por fim, transportou-se o afastamento do ponto **Q** para a sua linha de chamada, o que nos permitiu determinar  $Q_{3r}$  (a projeção lateral do ponto **Q**, em rebatimento).

Uma vez que o ângulo que o eixo da pirâmide faz com o plano **XY** se projeta em verdadeira grandeza no plano **YZ**, foi possível, em verdadeira grandeza (no plano **YZ** rebatido), medir o ângulo de  $60^\circ$  que o eixo da pirâmide faz com o plano **XY**, que é o ângulo que o eixo do sólido faz com a sua projeção horizontal. Esse ângulo está, em verdadeira grandeza, no ângulo que o segmento [ $Q_{3r}V_{3r}$ ] (a projeção lateral do eixo da pirâmide, em rebatimento) faz com o eixo **Y**. Assim, a partir de  $Q_{3r}$ , desenhou-se a reta suporte da projeção lateral do eixo da pirâmide (em rebatimento), com o ângulo referido (um ângulo de  $60^\circ$ ) e determinou-se  $V_{3r}$  (a projeção lateral do ponto **V**, em rebatimento), sobre o eixo  $Y_r''$ . Salienta-se que o ponto **V** tem cota nula (como o enunciado refere expressamente).

Note que das duas hipóteses de medir o ângulo de  $60^\circ$  com o eixo **Y**, a partir de  $Q_{3r}$ , apenas a que a resolução apresenta nos garante que o ponto **V** tenha afastamento positivo, para que o ponto (e a pirâmide) se situe no espaço do  $1^a$  Triedro, como o enunciado refere expressamente.

Para determinar a perspectiva do ponto **V** é necessário inverter o rebatimento do plano **YZ**, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

## Determinação da direção de afinidade que permite inverter o rebatimento do plano YZ:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **YZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspectiva. Por outro lado, já se determinou o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Y**, pelo que é possível, de forma quase direta, determinar a **direção de afinidade**.

A **direção de afinidade** que nos permite inverter o rebatimento do plano **YZ** (a direção  $d'$ ) determina-se na sequência dos traçados efetuados para a determinação da **direção de afinidade** que nos permitiu inverter o rebatimento do plano **XY** (a direção  $d$ ).

Assim, determinou-se o ponto  $P_r''$ , no eixo  $Y_r''$  – note  $P_r''$  se refere ao mesmo ponto **P** do eixo **Y** (o ponto utilizado para determinar a direção de afinidade  $d$ ) mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano **YZ**). Assim,  $\overline{OP_r''}$  é o afastamento do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano **YZ**. Note que o ponto  $P_r''$  foi determinado diretamente, no ponto de interseção do arco  $\overline{P_rP_r'}$  com o eixo  $Y_r''$  mas, caso esse arco não interjetasse o eixo  $Y_r''$ , teria de ser prolongado, com o compasso, até que tal acontecesse.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **YZ** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r''$  e pela perspectiva do ponto **P** (a reta  $d'$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **YZ**).

## Inversão do rebatimento do plano coordenado YZ e determinação das perspectivas do ponto V:

A projeção lateral do ponto **V** ( $V_3$ ) é necessariamente um ponto do eixo **Y**, pois o ponto tem cota nula. Assim, a perspectiva da projeção lateral do ponto **V** ( $V_3$ ) situa-se necessariamente sobre a perspectiva do eixo **Y**. Nesse sentido, por  $V_{3r}$  (a projeção lateral do ponto **V**, em rebatimento) conduziu-se uma paralela à reta  $d'$  e determinou-se  $V_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **V**) sobre a perspectiva do eixo **Y**.

Em seguida, por  $V_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto **V**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral do ponto **V** (que é paralela ao eixo **X**) e por  $V_2$  (a projeção frontal do ponto **V**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) – o ponto de interseção das duas retas é a perspectiva propriamente dita do ponto **V**. Tendo em conta que o ponto **V** é um ponto do plano **XY** (porque tem cota nula), o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou em perspectiva – tem-se, imediatamente,  $V_1 \equiv V$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinaram-se, ainda as perspectivas do ponto **Q**, se bem que estas não sejam absolutamente necessárias à resolução do exercício.

#### Determinação da perspectiva da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspetiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspetiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ABVCD]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente da perspetiva do sólido. No entanto, a aresta lateral **[DV]** é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais **[ADV]** e **[CDV]**. Por outro lado, a aresta **[BC]**, da base, é visível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – a base **[ABCD]** e a face lateral **[BCV]**.

As faces laterais **[ABV]**, **[ADV]** e **[CDV]** são invisíveis. Já a face lateral **[BCV]** e a base **[ABCD]** são visíveis.

Note que a representação das perspectivas das projeções da pirâmide não são absolutamente necessárias, facto pelo qual estas não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (a pirâmide, neste caso) pela sua perspetiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano **XY** e da construção da projeção horizontal do quadrado **[ABCD]** (em rebatimento), do rebatimento do plano **YZ** e da representação da projeção lateral do eixo da pirâmide (em rebatimento), do eixo  $Y_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$ , da direção de afinidade  $d'$  e, ainda, de todos os traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XY** e do plano **YZ**.

## 1291.

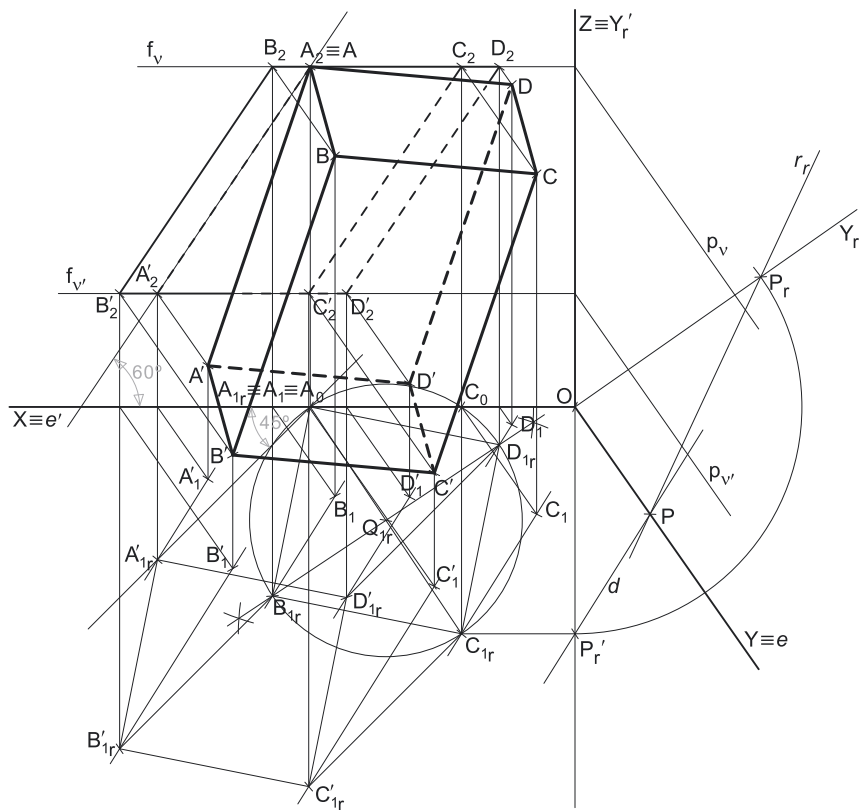
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspetiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de  $125^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $145^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, as abcissas dos pontos **A** e **C** (7 cm e 3 cm, respetivamente), sobre o eixo **X** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), bem como a cota daqueles dois pontos (9 cm) sobre o eixo **Z** (também a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato,  $A_2$  e  $C_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), bem como  $A_0$  e  $C_0$  (as referências das abcissas daqueles dois pontos, no eixo **X**). Note que o eixo **X** e o eixo **Z** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

Salienta-se que o ponto **A** tem afastamento nulo (é um ponto do *plano coordenado XZ*), pelo que  $A_1$  (a sua projeção horizontal) se situa necessariamente no eixo **X**. Por outro lado, e ainda porque o ponto **A** é um ponto do *plano coordenado XZ*, o ponto está coincidente com a sua projeção frontal, pelo que se tem, imediatamente,  $A \equiv A_2$  (sendo **A** a perspetiva propriamente dita do ponto **A**).

Em seguida, representou-se o plano  $v$  (o plano horizontal que contém o quadrado **[ABCD]**), pelos seus traços. O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao *plano coordenado XZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XZ*, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Nesse sentido, desenhou-se  $f_v$ , o traço frontal do plano  $v$  –  $f_v$ , passa por  $A_2$  e por  $C_2$  (as projeções frontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal. Note que  $f_v$  é uma reta fronto-horizontal do plano, com afastamento nulo.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço lateral do plano  $v$  ( $p_v$ ), que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$  e é concorrente com  $f_v$ , no eixo  $Z - p_v$  é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula. Salienta-se que o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

#### Resolução:

O plano que contém o quadrado  $[ABCD]$  (a base da pirâmide) é um plano horizontal (de nível), que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), pelo que o quadrado  $[ABCD]$  não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao plano coordenado horizontal (o plano  $XY$ ), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado  $XY$  – o quadrado  $[ABCD]$  e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado  $XY$ ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do rebatimento do plano coordenado  $XY$  (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

*Rebatimento do plano  $XY$  e construção da projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$  e do prisma, em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XY$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $X$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Z$ , facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XY$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$  com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $XY$  rebatido, representou-se a projeção horizontal do ponto  $A$ , em rebatimento ( $A_{1r}$ ).  $A_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ ) é um ponto da charneira (que é o eixo  $X$ ), pelo que roda sobre si própria (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $A_{1r} \equiv A_1$ .

No plano  $XY$  rebatido, representou-se, ainda a projeção horizontal do ponto  $C$ , em rebatimento ( $C_{1r}$ ), em função do seu afastamento. Assim,  $C_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto  $C$  (em rebatimento) e situa-se 6 cm (o afastamento do ponto  $C$ ) para baixo do eixo  $X$ , na sua linha de chamada (que passa por  $C_0$  e é perpendicular ao eixo  $X$ ).

A partir de  $A_{1r}$  e  $C_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da projeção horizontal do quadrado, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $B_{1r}$  e  $D_{1r}$  (as projeções horizontais, em rebatimento, dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ . Os vértices  $B$  e  $D$  foram nomeados de forma arbitrária, pois o enunciado é omissivo a esse respeito.

Salienta-se que a construção da projeção horizontal do quadrado (em rebatimento) careceu da determinação do ponto  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do centro do quadrado, em rebatimento), bem como do desenho da circunferência em que aquele quadrado se inscreve (a circunferência que tem centro em  $Q_{1r}$  e raio até  $A_{1r}$  e  $C_{1r}$ ).

Pelas projeções horizontais dos pontos  $B$  e  $D$ , em rebatimento ( $B_{1r}$  e  $D_{1r}$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo  $X$ ) e determinaram-se as projeções frontais daqueles dois pontos ( $B_2$  e  $D_2$ , respetivamente) sobre o traço frontal do plano  $v$  ( $f_v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante frontal.

Em função da particularidade dos dados (os ângulos que as arestas laterais do prisma fazem, em projeção frontal e em projeção horizontal), optou-se por representar previamente o prisma em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal (em rebatimento) e frontal.

A altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as duas bases do sólido o que, neste caso, corresponde à diferença entre as cotas dos planos das bases. O plano que contém a base superior do prisma (o plano  $v$ ) tem 9 cm de cota (a cota dos pontos  $A$  e  $C$ ) e o prisma tem 6 cm de altura, pelo que o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base inferior do prisma) tem 3 cm de afastamento ( $9 - 6 = 3$ ). Nesse sentido, representou-se o plano  $v'$  pelos seus traços – o plano  $v'$  é o plano horizontal (de nível) que contém a base inferior do sólido.

Assim, no eixo  $Z$ , a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo, mediu-se a cota do plano  $v'$  (3 cm) e determinou-se um ponto, pelo qual se conduziram o traço frontal do plano  $v'$  ( $f_{v'}$ ), que é paralela ao eixo  $X - f_{v'}$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $v'$ , com afastamento nulo. Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço lateral do plano  $v'$  ( $p_{v'}$ ), que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$  e é concorrente com  $f_{v'}$ , no eixo  $X - f_{v'}$  é uma reta de topo do plano  $v'$ , com abcissa nula.

Salienta-se que o plano  $v'$  é um plano projetante frontal (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço frontal ( $f_{v'}$ ). O plano  $v'$  é, também, um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao plano coordenado  $YZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $YZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{v'}$ ).

Em seguida, pela projeção horizontal do ponto  $A$  em rebatimento ( $A_{1r}$ ), conduziu-se uma reta fazendo, com o eixo  $X$ , um ângulo de  $45^\circ$  (com abertura para a esquerda) – essa reta é a projeção horizontal da reta suporte da aresta lateral  $[AA']$ , em rebatimento. Em seguida, por  $A_2$  (a projeção frontal do ponto  $A$ ) conduziu-se uma reta fazendo, com o eixo  $X$ , um ângulo de  $60^\circ$  (com abertura para a direita) – essa reta é a projeção frontal da reta suporte da aresta  $[AA']$ . Por fim, atendendo a que a base inferior do prisma está contida no plano  $v'$  (que é um plano projetante frontal), determinaram-se as duas projeções do ponto  $A'$  (o extremo inferior da aresta  $[AA']$ ), a partir da sua projeção frontal – o ponto  $A'$  é o ponto de interseção da reta suporte da aresta  $[AA']$  com o plano  $v'$ .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Repetiu-se o processo atrás exposto para as arestas laterais  $[BB']$ ,  $[CC']$  e  $[DD']$ , o que nos permitiu determinar as projeções frontal e horizontal (em rebatimento) dos pontos  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  (os outros três vértices da base inferior) e, assim, concluir a representação do prisma em Dupla Projeção Ortogonal (considerando o plano  $XY$  rebatido).

Para se determinarem as perspectivas do prisma é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade que permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ :*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o *plano axonométrico* (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ ).

Em seguida, transportou-se, para o eixo  $Y_r$ , o afastamento do ponto  $C$ , a partir de  $C_{1r}$ , com uma paralela ao eixo  $X$ . Este procedimento permitiu-nos determinar um ponto  $P_r$ , no eixo  $Y_r$  – o ponto  $P$  é um ponto do eixo  $Y$  com o afastamento do ponto  $C$  ( $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto  $C$ , no eixo  $Y_r$ , pelo rebatimento do plano  $XY$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto  $P$  para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Y$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XY$  e determinação das perspectivas do ponto  $C$ :*

Para se determinarem as perspectivas do ponto  $C$  teve-se em conta que as projeções do ponto  $C$  (a projeção horizontal e a projeção frontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $C$  – a linha de chamada do ponto  $C$  é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em  $C_2$ , outro extremo em  $C_1$  e um vértice no eixo  $X$  (em  $C_0$ ). A parte da linha de chamada do ponto  $C$  que está contida no plano  $XY$  é o segmento  $[C_0C_1]$  – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento  $[C_0C_{1r}]$ . A perspectiva desse segmento tem um extremo em  $C_0$  e é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta  $[C_0C_1]$ . Em seguida, por  $C_{1r}$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto  $C$  (a reta suporte do segmento  $[C_0C_1]$ ) é  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XZ$ .

Em seguida, por  $C_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto  $C$ , que é vertical (que é paralela ao eixo  $Z$ ). Depois, por  $C_2$  (a projeção frontal do ponto  $C$ ), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto  $C$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto  $C$ .

Note que não se determinou a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C$  ( $C_3$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado,  $C_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $C$ ) estaria necessariamente sobre  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

*Determinação das perspectivas dos pontos  $B$  e  $D$ :*

As perspectivas dos pontos  $B$  e  $D$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto  $C$ .

À semelhança do exposto para o ponto  $C$ , também não se determinaram as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $B$  e  $D$  ( $B_3$  e  $D_3$ , respetivamente), por estas não serem determinantes para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivessem determinado,  $B_3$  e  $D_3$  (as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $B$  e  $D$ , respetivamente) estariam necessariamente sobre  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ), pois o plano  $v$  é um plano projetante lateral.

*Determinação das perspectivas dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ :*

As perspectivas dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspectivas do ponto  $C$ .

À semelhança do exposto para o ponto  $C$ , também não se determinaram as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  ( $A'_3$ ,  $B'_3$ ,  $C'_3$  e  $D'_3$ , respetivamente), por estas não serem determinantes para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivessem determinado,  $A'_3$ ,  $B'_3$ ,  $C'_3$  e  $D'_3$  (as perspectivas das projeções laterais dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ , respetivamente) estariam necessariamente sobre  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v'$ ), pois o plano  $v'$  é um plano projetante lateral.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

## Determinação da perspectiva do prisma:

Por fim, desenhou-se a **perspectiva do prisma**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** do prisma é a linha quebrada fechada  $[AA'B'C'D]$ . Existem dois vértices do prisma que não integram o contorno aparente do sólido – os vértices **B** e **D'**. O vértice **D'**, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[A'D']$  e  $[C'D']$ , da base  $[A'B'C'D']$ , e a aresta lateral  $[DD']$ ). O vértice **B**, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas  $[AB]$  e  $[BC]$ , da base  $[ABCD]$ , e a aresta lateral  $[BB']$ ).

As faces laterais  $[AA'B'B]$  e  $[BB'C'C]$  são visíveis, bem como a base  $[ABCD]$ . Já as faces laterais  $[AA'D'D]$  e  $[CC'D'D]$  e a base  $[A'B'C'D']$  são invisíveis.

Note que a representação das perspectivas das projeções do prisma não são absolutamente necessárias, facto pelo qual estas não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o prisma, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do prisma representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma) e o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base inferior do prisma), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano **XY** e da construção da projeção horizontal do quadrado  $[ABCD]$  e do prisma (em rebatimento), do eixo  $Y_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$  e, ainda, de todos os traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XY**.

## 1292.

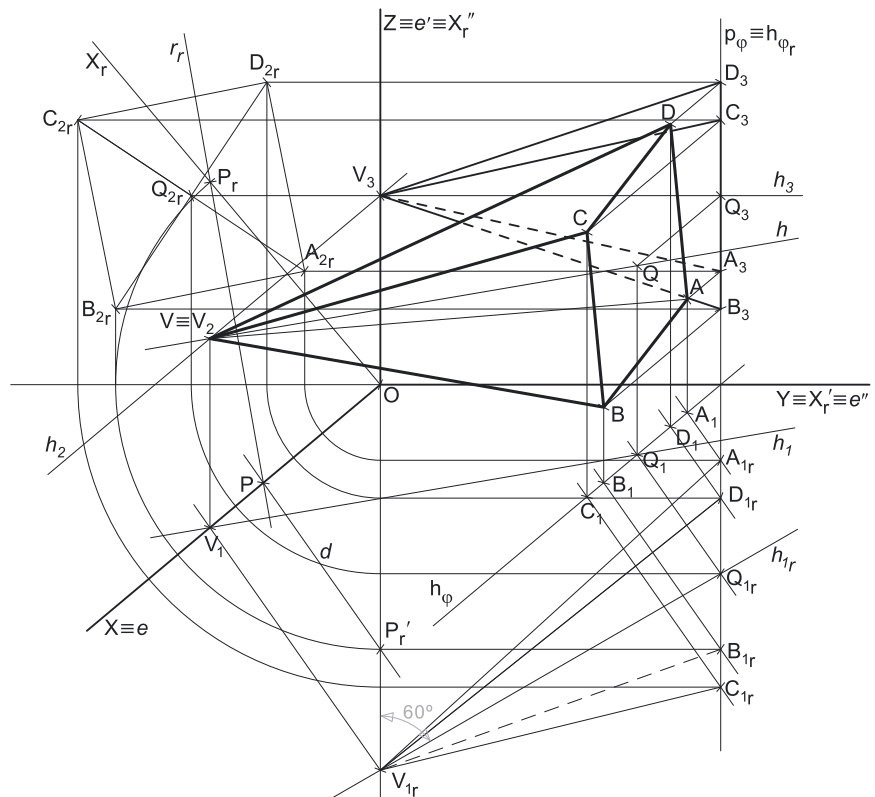
### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **Y** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **YZ** – o eixo **Y** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **Y** um ângulo de  $140^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $130^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar, em verdadeira grandeza, o afastamento dos pontos **A** e **B** (9 cm), sobre o eixo **Y** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), bem como as cotas daqueles dois pontos (3 cm e 2 cm, respetivamente) sobre o eixo **Z** (também a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu representar, de imediato, **A<sub>3</sub>** e **B<sub>3</sub>** (as projeções laterais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). Note que o eixo **Y** e o eixo **Z** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

Em seguida, representou-se o plano  $\phi$  (o plano frontal que contém o quadrado  $[ABCD]$ ), pelos seus traços. O plano  $\phi$  é um plano projetante lateral (pois é ortogonal ao *plano coordenado YZ*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado YZ*, sobre o seu traço lateral ( $p_\phi$ ). Nesse sentido, desenhou-se  $p_\phi$ , o traço lateral do plano  $\phi$  –  $p_\phi$  passa por **A<sub>3</sub>** e por **B<sub>3</sub>** (as projeções laterais dos pontos **A** e **B**, respetivamente), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante lateral. Note que  $p_\phi$  é uma reta vertical do plano, com abcissa nula.

Em seguida, desenhou-se a perspectiva do traço horizontal do plano  $\phi$  ( $h_\phi$ ), que é paralela à perspectiva do eixo **X** e é concorrente com  $p_\phi$  no eixo **Y** –  $h_\phi$  é uma reta fronto-horizontal do plano  $\phi$ , com cota nula. Salienta-se que o plano  $\phi$  é, também, um plano projetante horizontal (é ortogonal ao *plano coordenado XY*) – projeta todas as suas retas e pontos no *plano coordenado XY*, sobre o seu traço horizontal ( $h_\phi$ ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Resolução:

O plano que contém o quadrado [ABCD] (a base da pirâmide) é um plano frontal (de frente), que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano YZ), pelo que o quadrado [ABCD] **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao plano coordenado frontal (o plano XZ), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado XZ – o quadrado [ABCD] e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado XZ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

#### Rebatimento do plano XZ e construção da projeção frontal do quadrado [ABCD], em verdadeira grandeza:

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano XZ para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo Z. O eixo X rebatido (o eixo  $X_r'$ ) fica coincidente com o eixo Y, facto que se assinalou devidamente –  $Y \equiv X_r'$ . O eixo  $X_r'$  é o eixo X rebatido pelo rebatimento do plano XZ.

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano XZ com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo X. De forma semelhante, identificou-se o eixo X rebatido pelo rebatimento do plano coordenado XZ com a notação  $X_r'$ , optando-se por manter a notação  $X_r$  para o eixo X rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano XZ rebatido, representaram-se as projeções frontais dos pontos A e B, em rebatimento ( $A_{2r}$  e  $B_{2r}$ , respetivamente), em função das respetivas abscissas. Assim,  $A_{2r}$  é a projeção frontal do ponto A (em rebatimento) e situa-se 2 cm (a abscissa do ponto A) para a esquerda do eixo Z, na sua linha de chamada (que passa por  $A_3$  e é perpendicular ao eixo Z). De forma semelhante,  $B_{2r}$  é a projeção frontal do ponto B (em rebatimento) e situa-se 7 cm (a abscissa do ponto B) para a esquerda do eixo Z, na sua linha de chamada (que passa por  $B_3$  e é perpendicular ao eixo Z).

A partir de  $A_{2r}$  e  $B_{2r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano XZ), o que nos permitiu determinar  $C_{2r}$  e  $D_{2r}$  (as projeções frontais, em rebatimento, dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado [ $A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}$ ] é a projeção frontal do quadrado [ABCD], em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano XZ.

Note que, na construção da projeção frontal do quadrado (em rebatimento) se garantiu que o polígono se situa no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro, para que a pirâmide se situe, igualmente, no espaço do  $1^{\text{a}}$  Triedro (como o enunciado refere expressamente). Salienta-se que se determinou, ainda, o ponto  $Q_{2r}$  (a projeção frontal do centro do quadrado, em rebatimento), pois são dadas indicações sobre o eixo da pirâmide e o ponto Q é um dos extremos do eixo do sólido.

Pelas projeções frontais dos pontos C, D e Q, em rebatimento ( $C_{2r}$ ,  $D_{2r}$  e  $Q_{2r}$ , respetivamente), conduziram-se as respetivas linhas de chamada (perpendiculares ao eixo Z) e determinaram-se as projeções laterais daqueles três pontos ( $C_2$ ,  $D_2$  e  $Q_2$ , respetivamente) sobre o traço lateral do plano  $\varphi$  ( $p_\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

Para determinar a perspectiva do quadrado [ABCD] é necessário inverter o rebatimento do plano XZ, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

No entanto, em função da particularidade dos dados (o ângulo que o eixo da pirâmide faz, em **projeção horizontal**, com o plano XZ), optou-se por representar previamente a pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal (em rebatimento) e lateral.

#### Rebatimento do plano XY e construção da projeção horizontal da pirâmide, em rebatimento:

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano XY para o plano axonométrico (o plano YZ), pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e''$ ), que é o eixo Y. O eixo X rebatido (o eixo  $X_r''$ ) fica coincidente com o eixo Z, facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv X_r''$ . O eixo  $X_r''$  é o eixo X rebatido pelo rebatimento do plano XY (salienta-se que se trata do terceiro rebatimento do eixo X, neste exercício).

O traço horizontal do plano  $\varphi$ , em rebatimento ( $h_{\varphi r}$ ), fica coincidente com  $p_\varphi$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ), facto que se assinalou convenientemente no desenho – tem-se  $h_{\varphi r} \equiv p_\varphi$ .

Em seguida, no rebatimento do plano XZ (em projeção frontal), transportaram-se, para o eixo  $X_r'$ , as abscissas de todos os vértices do quadrado [ABCD] e, ainda, do ponto Q, com o recurso a paralelas ao eixo Z. Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto O, transportaram-se as abscissas dos cinco pontos para o eixo  $X_r''$  (que está coincidente com o eixo Z) e, do eixo  $X_r''$  para  $h_{\varphi r}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ , em rebatimento), através de paralelas ao eixo Y. Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções horizontais dos cinco pontos, em rebatimento ( $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$ ,  $C_{1r}$ ,  $D_{1r}$  e  $Q_{1r}$ ), sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  em rebatimento ( $h_{\varphi r}$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal.

Uma vez que o ângulo que o eixo da pirâmide (que está contido na reta  $h$ ) faz com o plano XZ se projeta em verdadeira grandeza no plano XY, foi possível, em verdadeira grandeza (no plano XY rebatido), medir o ângulo de  $60^\circ$  que o eixo da pirâmide faz com o plano XZ, que é o ângulo que o eixo do sólido faz com a sua projeção frontal. Esse ângulo está, em verdadeira grandeza, no ângulo que o segmento [ $Q_{1r}V_{1r}$ ] (a projeção horizontal do eixo da pirâmide, em rebatimento) faz com o eixo X. Assim, a partir de  $Q_{1r}$ , desenhou-se a reta suporte da projeção horizontal do eixo da pirâmide em rebatimento ( $h_{1r}$ ), com o ângulo referido (um ângulo de  $60^\circ$ ) e determinou-se  $V_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto V, em rebatimento), sobre o eixo  $X_r''$ . Salienta-se que o ponto V tem afastamento nulo (como o enunciado refere expressamente).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que das duas hipóteses de medir o ângulo de  $60^\circ$  com o eixo  $X$ , a partir de  $Q_{1r}$ , apenas a que a resolução apresenta nos garante que o ponto  $V$  tenha abcissa positiva, para que o ponto (e a pirâmide) se situe no espaço do  $1^a$  Triedro, como o enunciado refere expressamente.

Por fim, por  $Q_3$  (a projeção lateral do ponto  $Q$ ) conduziu-se uma paralela ao eixo  $Y$ , que é a projeção lateral da reta  $h$  (a reta suporte do eixo da pirâmide). Note que, nesta situação,  $h_3$  (A projeção lateral da reta  $h$ ) está coincidente com a linha de chamada do ponto  $Q$ . Este procedimento permitiu-nos, determinar  $V_3$  (a projeção lateral do ponto  $V$ ), que se situa no eixo  $Z$ , pois o ponto  $V$  tem afastamento nulo.

Os procedimentos atrás expostos permitiram-nos construir tanto a projeção horizontal da pirâmide (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), bem como a projeção lateral do sólido, o que nos permitiu concluir a representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal (em rebatimento) e lateral.

Para determinar a perspetiva da pirâmide é necessário inverter o rebatimento do plano  $XY$ , o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade que permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ :*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $X$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $X$  para o plano axonométrico (o plano  $YZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspetiva do eixo  $X$ . O eixo  $X$  rebatido (o eixo  $X_r$ ) fica perpendicular à perspetiva do eixo  $X$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $X_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspetiva do eixo  $X$ ).

Em seguida, identificou-se, no eixo  $X_r$ , um ponto com a abcissa do ponto  $B$  – o ponto  $P_r'$ , que é o ponto do eixo  $X$  com a abcissa do ponto  $B$  ( $\overline{OP_r'}$  é a abcissa do ponto  $B$ , no eixo  $X_r$ ), pelo rebatimento do plano  $XY$ .

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se a abcissa do ponto  $P$  para o eixo  $X_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $X$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é a abcissa do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $X$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspetiva da abcissa do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspetiva da abcissa do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspetiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XY$  e determinação das perspetivas do ponto  $C$ :*

Para se determinarem as perspetivas do ponto  $C$  teve-se em conta que a projeção horizontal do ponto  $C$  se situa necessariamente sobre  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ), pois o plano  $\phi$  é um plano projetante horizontal. Assim, a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $C$  ( $C_1$ ) situa-se necessariamente sobre a perspetiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ).

Nesse sentido, por  $C_{1r}$  conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspetiva de  $h_\phi$  (o traço horizontal do plano  $\phi$ ) é  $C_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano  $XZ$ .

Em seguida, por  $C_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $C$ ) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto  $C$ , que é vertical (que é paralela ao eixo  $Z$ ). Depois, por  $C_3$  (a projeção lateral do ponto  $C$ ), conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto  $C$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $X$ ) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto  $C$ .

Note que não se determinou a perspetiva da projeção frontal do ponto  $C$  ( $C_2$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício.

*Determinação das perspetivas dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $D$  e  $Q$ :*

As perspetivas dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $D$  e  $Q$  determinaram-se de acordo com os procedimentos atrás expostos para a determinação das perspetivas do ponto  $C$ . À semelhança do exposto para o ponto  $C$ , também não se determinaram as perspetivas das projeções frontais dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $D$  e  $Q$ .

A partir das perspetivas propriamente ditas dos quatro vértices do quadrado, desenhou-se a perspetiva do quadrado  $[ABCD]$ .

*Determinação das perspetivas do ponto  $V$ :*

O ponto  $V$  é um ponto com afastamento nulo, pelo que o ponto  $V$  é um ponto do plano  $XZ$ . Assim, a sua projeção horizontal ( $V_1$ ) situa-se necessariamente no eixo  $X$ . Nesse sentido, por  $V_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $V$ , em rebatimento), conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspetiva do eixo  $X$  é  $V_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $V$ ).

Em seguida, por  $V_1$  (a perspetiva da projeção horizontal do ponto  $V$ ) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto  $V$ , que é vertical (que é paralela ao eixo  $Z$ ). Depois, por  $V_3$  (a projeção lateral do ponto  $V$ ), conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto  $V$  (que é paralela à perspetiva do eixo  $X$ ) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto  $V$ .

Por fim, atendendo a que o ponto  $V$  é um ponto do plano  $XZ$ , o ponto  $V$  está coincidente com a sua projeção frontal, o que se assinalou em perspetiva – tem-se, imediatamente,  $V_2 \equiv V$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

#### Determinação da perspectiva da pirâmide:

Por fim, desenhou-se a **perspectiva da pirâmide**, começando pelo seu contorno aparente – o **contorno aparente da perspectiva** da pirâmide é a linha quebrada fechada **[ABVD]**. Existe um único vértice da pirâmide que não integra o contorno aparente do sólido – o vértice **C**. Este, por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem (as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**).

Salienta-se que a aresta lateral **[AV]** é invisível, pois separa duas faces do sólido que são invisíveis – as faces laterais **[ABV]** e **[ADV]**. No entanto, o enunciado refere expressamente para serem identificadas, apenas, as **arestas visíveis** do sólido. Nesse sentido, não há lugar à representação da aresta **[AV]**, precisamente por se tratar de uma aresta invisível.

As faces laterais **[BCV]** e **[CDV]** são visíveis, assim como a base **[ABCD]**. Já as faces laterais **[ADV]** e **[ABV]** são invisíveis.

Note que a representação das perspectivas das projeções da pirâmide não são absolutamente necessárias, facto pelo qual estas não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (a pirâmide, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano **XZ** e da construção da projeção frontal do quadrado **[ABCD]** (em rebatimento), do rebatimento do plano **XY** e da construção da projeção horizontal da pirâmide (em rebatimento), do eixo  $X_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$  e, ainda, de todos os traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XY**.

## 1293.

#### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – nesse sentido, o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo **X** e do eixo **Z**, ângulos de  $135^\circ$  (que são dois ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto **Q** (6 cm) sobre o eixo **X** em verdadeira grandeza (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu determinar  $Q_0$  (a referência da abscissa do ponto **Q**). Os dados permitiram-nos, também, representar a cota do ponto **Q** (6 cm) sobre o eixo **Z** também em verdadeira grandeza (também a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu determinar, de imediato,  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto **Q**). Note que o eixo **X** e o eixo **Z** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

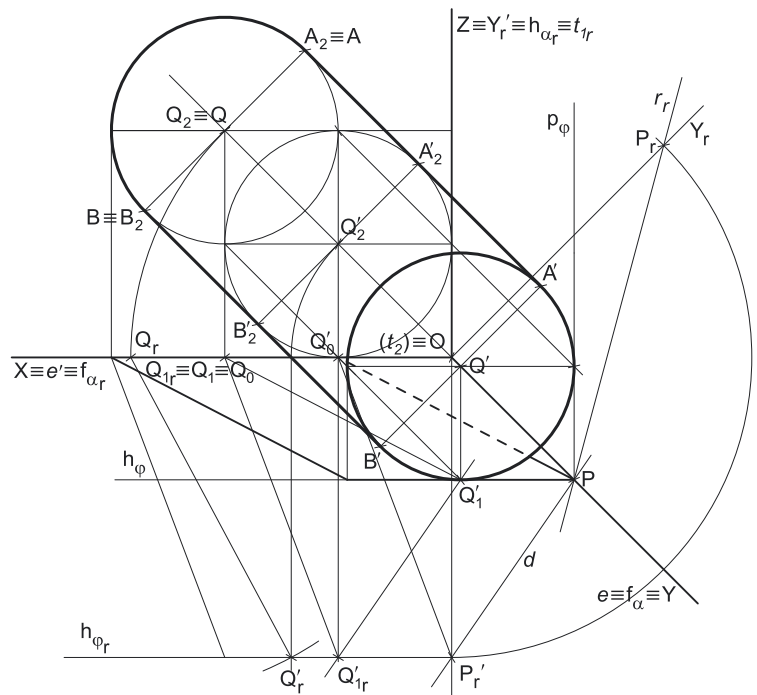
Por fim, uma vez que o ponto **Q** tem afastamento nulo, o ponto **Q** situa-se no *plano coordenado XZ*, pelo que  $Q_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **Q**) se situa sobre o eixo **X**. Exatamente pelo mesmo motivo, o ponto **Q** está coincidente com a sua projeção frontal, o que se assinalou no desenho – tem-se, imediatamente,  $Q_2 \equiv Q$ .

#### Resolução:

O plano que contém a base de menor afastamento do cilindro é o próprio *plano axonométrico* (o plano **XZ**), pelo que o círculo (a base de menor afastamento do sólido) **está em verdadeira grandeza** (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção frontal são a mesma figura.

Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q** (perspectiva propriamente dita do ponto **Q**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a perspectiva da base de menor afastamento do cilindro.

Tendo em conta que a base de maior afastamento do cilindro é tangente simultaneamente ao plano **XY** e ao plano **YZ** (como o enunciado refere expressamente), sabe-se que a distância do ponto  $Q'$  (o centro da base de maior afastamento do sólido) ao plano **XY** é 3 cm (o raio da circunferência), tal como o ponto  $Q'$  dista os mesmos 3 cm (o raio da circunferência) do plano **YZ**. Assim, é possível concluir que o ponto  $Q'$  tem 3 cm de cota (a distância do ponto  $Q'$  ao plano **XY**) e tem 3 cm de abscissa (a distância do ponto  $Q'$  ao plano **YZ**). Este raciocínio permitiu-nos determinar a projeção frontal do ponto  $Q'$ .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, representou-se a abscissa do ponto  $Q'$  (3 cm) sobre o eixo  $X$  em verdadeira grandeza (a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu determinar  $Q'_0$  (a referência da abscissa do ponto  $Q'$ ). Em seguida representou-se a cota do ponto  $Q'$  (3 cm) sobre o eixo  $Z$  também em verdadeira grandeza (também a partir do ponto  $O$  e no sentido positivo do eixo), o que nos permitiu determinar, de imediato,  $Q'_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q'$ ).

A base de maior afastamento do cilindro está contida num plano frontal (de frente) que é paralelo ao plano axonométrico (o plano  $XZ$ ), pelo que o círculo (a base de maior afastamento do sólido) **projeta-se em verdadeira grandeza** (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção frontal são figuras geometricamente iguais.

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q'_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q'$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal da base de maior afastamento do cilindro.

No entanto, para determinar a perspectiva do cilindro é necessário, em primeiro lugar, determinar a perspectiva do ponto  $Q'$  (o centro da base de maior afastamento do sólido), para o que é necessário atender aos restantes dados do enunciado. Salienta-se que é dado o comprimento do eixo do cilindro (o segmento  $[QQ']$ ). No entanto, o eixo do cilindro (o segmento  $[QQ']$ ) **não é paralelo ao plano axonométrico** (o plano  $XZ$ ) pelo que **o eixo do cilindro não se projeta em verdadeira grandeza** no plano de projeção (o plano axonométrico).

Assim, face aos dados fornecidos no enunciado, optou-se por se representar previamente o cilindro em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções frontal e horizontal (em rebatimento), para o que é necessário efetuar o rebatimento do plano  $XY$  sobre o plano axonométrico (o plano  $XZ$ ).

*Rebatimento do plano  $XY$  e construção da projeção horizontal do cilindro, em verdadeira grandeza:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XY$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $X$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Z$ , facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XY$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$  com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

$Q_1$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ ) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente,  $Q_{1r} \equiv Q_1$ .

Como atrás se referiu, o eixo do cilindro (o segmento  $[QQ']$ ), que mede 9 cm, **não é paralelo ao plano axonométrico** (o plano  $XZ$ ). No entanto, considerando a representação do cilindro em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal (em rebatimento) e frontal, o eixo do cilindro também não é paralelo a nenhum dos planos de projeção (o plano  $XY$  e o plano  $XZ$ ), pelo que **o eixo do cilindro não se projeta em verdadeira grandeza** em qualquer dos planos de projeção, pelo que **é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar**.

O **processo geométrico auxiliar** a que se recorreu foi o do rebatimento do plano projetante frontal do segmento  $[QQ']$  – o plano  $\alpha$ . Nesse sentido, identificaram-se os traços do plano  $\alpha$ . O plano  $\alpha$  é um plano de topo (um plano projetante frontal), pelo que o seu traço frontal passa pelas projeções frontais dos pontos  $Q$  e  $Q'$  ( $Q_2$  e  $Q'_2$ , respetivamente). Assim, e dada a especificidade dos dados deste exercício, o traço frontal do plano  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) fica coincidente com a perspectiva do eixo  $Y$ , facto que se assinalou – tem-se  $f_\alpha \equiv Y$ . O traço horizontal do plano  $\alpha$ , em rebatimento ( $h_{\alpha r}$ ), é concorrente com  $f_\alpha$  no eixo  $X$  e é perpendicular ao eixo  $X$ . Nesse sentido, e mais uma vez dada a especificidade dos dados deste exercício,  $h_{\alpha r}$  (o traço horizontal do plano  $\alpha$  em rebatimento) fica coincidente com o eixo  $Z$  – tem-se, imediatamente,  $h_{\alpha r} \equiv Y_r' \equiv Z$ .

Optou-se por se efetuar o rebatimento do plano  $\alpha$  para o plano  $XY$ , pelo que se identificou a charneira do rebatimento imediatamente – a reta  $t$  (que é o traço horizontal do plano  $\alpha$ ). Nesse sentido tem-se, imediatamente,  $t_r \equiv h_{\alpha r}$ . A projeção frontal da charneira ( $t_2$ ) é um ponto no eixo  $X$  – está coincidente com o ponto  $O$ . O traço frontal do plano  $\alpha$ , em rebatimento, roda até ficar sobre o eixo  $X$ , pelo que se tem, imediatamente,  $X \equiv f_{\alpha r}$ .

Em seguida, rebateram-se os pontos  $Q$  e  $Q'$ , o que nos permitiu determinar  $Q_r$  (o ponto  $Q$  rebatido), no eixo  $X$ , bem como a linha de referência do ponto  $Q'_r$ . O eixo do cilindro (o segmento  $[QQ']$ ) está rebatido no plano  $XY$ , pelo que está em verdadeira grandeza (em rebatimento). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_r$  (o ponto  $Q$  rebatido) e com 9 cm de raio (o comprimento do eixo do sólido), determinou-se  $Q'_r$  (o ponto  $Q'$  rebatido), sobre a sua linha de referência. Tendo em conta que, no rebatimento efetuado, se mantêm os afastamentos, já se determinou o afastamento do ponto  $Q'$  (o centro da base de maior afastamento do cilindro), bem como do plano que contém a base (o plano  $\varphi$ ). Assim, por  $Q'_r$  conduziu-se  $h_{\varphi r}$ , que é o traço horizontal do plano  $\varphi$  em rebatimento.

Dessa forma, foi possível determinar, em seguida,  $Q'_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $Q'$ , em rebatimento), que está sobre  $h_{\varphi r}$  (tem o mesmo afastamento de  $Q'_r$ ), o que nos permitiu concluir a construção da projeção horizontal do cilindro (em rebatimento) e, dessa forma, concluir a representação do sólido em Dupla Projeção Ortogonal (pelas suas projeções frontal e horizontal, em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do cilindro é necessário inverter o rebatimento do plano  $XY$ , o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o plano axonométrico (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ ).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, considerou-se, no eixo  $Y_r'$ , um ponto  $P_r'$ , com o afastamento do plano  $\varphi$  (a partir de  $h_{\varphi}$ ) – o ponto  $P$  é o ponto do eixo  $Y$  que tem o afastamento do plano  $\varphi$  ( $\overline{OP_r'}$  é o afastamento do ponto  $P$ , no eixo  $Y_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XY$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto  $P$  para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Y$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ ). Assim,  $\overline{OP_r}$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $60^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ ).

*Representação do plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do cilindro:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , a perspectiva do ponto  $P$ , que é o ponto do eixo  $Y$  que tem o afastamento do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro). Assim, pela perspectiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_{\varphi}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_{\varphi}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que  $h_{\varphi}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{\varphi}$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\varphi}$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{\varphi}$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XY$  e determinação das perspectivas do ponto  $Q'$ :*

Tendo em conta que o ponto  $Q'$  é um ponto do plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, sabe-se que a projeção horizontal do ponto  $Q$  se situa, necessariamente, sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano  $\varphi$  projeta todas as suas retas e pontos no plano  $XY$ , sobre o seu traço horizontal). Assim, por  $Q'_1$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{\varphi}$ ) é  $Q'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $Q'$ ). Depois, desenhou-se a perspectiva do segmento  $[Q'_0Q'_1]$ , que é a perspectiva da parte da linha de chamada do ponto  $Q'$  que se situa no plano  $XY$ .

Em seguida, por  $Q'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $Q'$ ) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto  $Q'$ , que é vertical (que é paralela ao eixo  $Z$ ). Depois, por  $Q'_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q'$ ), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto  $Q'$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q'$ .

Note que não se determinou a perspectiva da projeção lateral do ponto  $Q'$  ( $Q'_3$ ), por esta não ser determinante para a resolução do exercício. No entanto, caso se tivesse determinado  $Q'_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $Q'$ ), esta estaria necessariamente sobre  $p_{\varphi}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

*Determinação da perspectiva do cilindro:*

Atendendo a que o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico, que é o plano  $XZ$ ), e como atrás se referiu, as bases projetam-se, ambas, em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano  $XZ$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q'$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q'$ ) e com 3 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base de **maior afastamento** do cilindro, em verdadeira grandeza.

Note que a perspectiva da base de maior afastamento é necessariamente tangente às perspectivas dos traços horizontal e lateral do plano  $\varphi$  ( $h_{\varphi}$  e  $p_{\varphi}$ , respetivamente), pois a base de maior afastamento do sólido é tangente, simultaneamente, ao plano  $XY$  e ao plano  $YZ$ .

A perspectiva do cilindro é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (as circunferências que delimitam as duas bases do cilindro) que são paralelas a uma reta dada (a perspectiva do eixo do cilindro).

Assim, desenharam-se os diâmetros das duas circunferências que são perpendiculares ao segmento  $[QQ']$  (a perspectiva do eixo do sólido), o que nos permitiu determinar os pontos de tangência – os pontos  $A$  e  $B$  (da base de menor afastamento) e os pontos  $A'$  e  $B'$  (da base de maior afastamento).

Após a determinação dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  e  $B'$ , desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cilindro (as geratrizes  $[AA']$  e  $[BB']$ ) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido. Salienta-se que a semicircunferência  $AB$  de menor cota (da base de menor afastamento) é **invisível**. No entanto, o enunciado refere expressamente para serem identificadas, apenas, as **linhas visíveis** do sólido. Nesse sentido, não há lugar à representação dessa semicircunferência, precisamente por se tratar de uma linha invisível.

Note que a representação das perspectivas das projeções do cilindro não são absolutamente necessárias, razão pela qual não se representaram. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o cilindro, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

(continua na página seguinte)

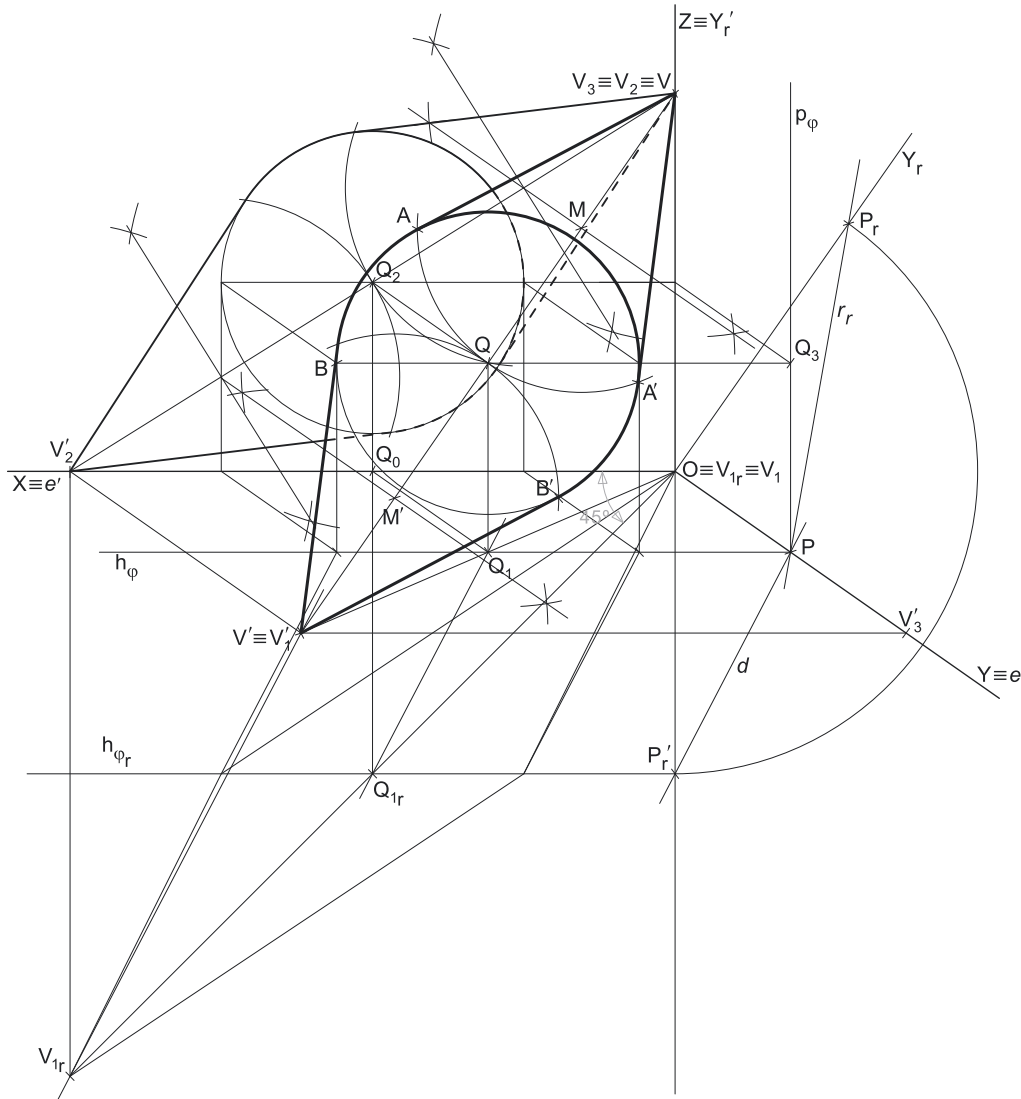


(continuação da página anterior)

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cilindro representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\phi$  (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do cilindro), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da representação do cilindro em Dupla Projeção Ortogonal, do plano  $\alpha$  e do seu rebatimento, do eixo  $Y_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$  e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano  $XY$ .

## 1294.



## Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de  $90^\circ$ . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de  $145^\circ$  (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de  $125^\circ$  (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto **Q** (8 cm) em verdadeira grandeza, sobre o eixo **X** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo), bem como a cota do ponto **Q** (5 cm), também em verdadeira grandeza, sobre o eixo **Z** (a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo). Este procedimento permitiu-nos representar, de imediato, **Q<sub>2</sub>** (a projeção frontal do ponto **Q**), bem como **Q<sub>0</sub>** (a referência da abscissa do ponto **Q**). Note que o eixo **X** e o eixo **Z** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

## Resolução:

O plano que contém a base dos cones (um plano frontal) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*, que é o plano **XZ**), pelo que o círculo (a base comum aos dois cones) **projeta-se em verdadeira grandeza** (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção frontal são figuras geometricamente iguais.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ ) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal da base do sólido.

No entanto, para determinar a perspectiva do sólido é necessário, em primeiro lugar, determinar as perspectivas dos pontos  $V$  e  $V'$  (os vértices dos dois cones que constituem o sólido), para o que é necessário atender aos restantes dados do enunciado. Salienta-se que é dado o ângulo que o eixo de um dos cones faz com o plano  $XZ$ . Por outro lado, uma vez que os dois cones são simétricos em relação ao plano que contém as duas bases, conclui-se imediatamente que os eixos dos dois cones são colineares e que os dois cones têm a mesma altura.

A altura de um cone é a distância do seu vértice ao plano da base o que, neste caso, corresponde à diferença entre os afastamentos dos vértices e do plano da base. O plano frontal (de frente) que contém a base comum aos dois cones (o plano  $\phi$ ) tem 8 cm de afastamento (o afastamento do ponto  $Q$ ) e o vértice de um dos cones (o ponto  $V$ ) tem afastamento nulo (é dado no enunciado), pelo que a altura desse cone é 8 cm ( $8 - 8 = 0$ ). Assim, o outro cone tem igualmente 8 cm de altura, pelo que o seu vértice (o ponto  $V'$ ) tem necessariamente 16 cm de afastamento ( $8 + 8 = 16$ ).

Assim, face aos dados fornecidos no enunciado, optou-se por se representar previamente o sólido em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções frontal e horizontal (em rebatimento), para o que é necessário efetuar o rebatimento do plano  $XY$  sobre o plano axonométrico (o plano  $XZ$ ).

*Rebatimento do plano  $XY$  e representação do sólido em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal (em rebatimento) e frontal:*

Nesse sentido, efetuou-se o rebatimento do plano  $XY$  para o plano axonométrico, pelo que se identificou imediatamente a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é o eixo  $X$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r'$ ) fica coincidente com o eixo  $Z$ , facto que se assinalou devidamente –  $Z \equiv Y_r'$ . O eixo  $Y_r'$  é o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano  $XY$ .

Salienta-se que se identificou a charneira do rebatimento do plano  $XY$  com a notação  $e'$ , optando-se por manter a notação  $e$  para a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . De forma semelhante, identificou-se o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do plano coordenado  $XY$  com a notação  $Y_r'$ , optando-se por manter a notação  $Y_r$  para o eixo  $Y$  rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

No plano  $XY$  rebatido, representou-se a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento ( $Q_{1r}$ ), em função do seu afastamento. Assim,  $Q_{1r}$  é a projeção horizontal do ponto  $Q$  (em rebatimento) e situa-se 8 cm (o afastamento do ponto  $Q$ ) para baixo do eixo  $X$ , na sua linha de chamada (que passa por  $Q_2$  e é perpendicular ao eixo  $X$ ). Em seguida, por  $Q_{1r}$ , conduziu-se  $h_{\phi r}$ , que é o traço horizontal do plano  $\phi$  em rebatimento (o plano  $\phi$  é o plano frontal que contém a base comum aos dois cones).

Uma vez que o ângulo que o eixo do cone faz com o plano  $XZ$  se projeta em verdadeira grandeza no plano  $XY$ , foi possível, em verdadeira grandeza (no plano  $XY$  rebatido), medir o ângulo de  $45^\circ$  que o eixo do cone faz com o plano  $XZ$ , que é o ângulo que o eixo do sólido faz com a sua projeção frontal. Esse ângulo está, em verdadeira grandeza, no ângulo que o segmento  $[Q_{1r}V_{1r}]$  (a projeção horizontal do eixo do cone, em rebatimento) faz com o eixo  $X$ . Assim, a partir de  $Q_{1r}$ , desenhou-se a reta suporte da projeção horizontal do eixo do cone em rebatimento, com o ângulo referido (um ângulo de  $45^\circ$ , de abertura para a esquerda) e determinou-se  $V_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $V$ , em rebatimento), sobre o eixo  $X$ . Salienta-se que o ponto  $V$  tem afastamento nulo (como o enunciado refere expressamente), pelo que, nesta situação específica, se tem  $V_{1r} \equiv O$ .

Como atrás se referiu, e atendendo a que os dois cones são simétricos em relação ao plano frontal (de frente) que contém a base comum aos dois sólidos, os eixos dos dois cones são colineares. Assim, prolongou-se a reta suporte da projeção horizontal do eixo do cone, em sentido oposto (para baixo de  $h_{\phi r}$ ) e determinou-se  $V'_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $V'$ , em rebatimento), em função do seu afastamento (que é 16 cm, como atrás se referiu).

Por fim, transportaram-se, para  $h_{\phi r}$ , os pontos de maior e de menor abcissa da base comum aos dois cones, o que nos permitiu concluir o desenho da projeção horizontal do sólido (em rebatimento).

A partir da projeção horizontal (em rebatimento) do ponto  $V$ , e sendo dada a sua cota no enunciado (que é 10 cm), foi possível determinar a projeção frontal do ponto  $V$  ( $V_2$ ). É possível inferir que o ponto  $V$  é um ponto do eixo  $Z$ , pois tem afastamento nulo e a sua projeção horizontal situa-se no ponto  $O$ . Assim,  $V_3$  (a projeção lateral do ponto  $V$ ) está coincidente com  $V_2$  (a projeção frontal do ponto  $V$ ) e com o próprio ponto, o que se assinalou no desenho –  $V \equiv V_3 \equiv V_2$ .

Em seguida, foi possível desenhar a projeção frontal da reta suporte do eixo do sólido, que é a reta que passa por  $V_2$  (a projeção frontal do ponto  $V$ ) e por  $Q_2$  (a projeção frontal do centro da base do sólido) e, dessa forma, determinar a projeção frontal do ponto  $V'$  ( $V'_2$ ), a partir da sua projeção horizontal (em rebatimento) que já havia sido determinada. Consta-se que a projeção frontal do ponto  $V'$  ( $V'_2$ ) se situa no eixo  $X$ , pelo que o ponto  $V'$  é necessariamente um ponto com cota nula.

Este procedimento permitiu-nos concluir o desenho da projeção frontal do sólido e, desta forma, concluir a representação do sólido em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontal (em rebatimento) e frontal. Para determinar a perspectiva do sólido é necessário inverter o rebatimento do plano  $XY$ , o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

*Determinação da direção de afinidade:*

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado  $XY$  (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo  $Y$ , pois só assim será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$  para o plano axonométrico (o plano  $XZ$ ). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a própria perspectiva do eixo  $Y$ . O eixo  $Y$  rebatido (o eixo  $Y_r$ ) fica perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ . O ponto  $O$  é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio). O eixo  $Y_r$  está definido por um ponto (o ponto  $O$ ) e por uma direção (é perpendicular à perspectiva do eixo  $Y$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, considerou-se no eixo  $Y_r'$ , um ponto  $P_r'$ , com o afastamento do plano  $\varphi$  (a partir de  $h_{\varphi_r}$ ) – o ponto  $P$  é o ponto do eixo  $Y$  que tem o afastamento do plano  $\varphi$  ( $OP_r'$  é o afastamento do ponto  $P$ , no eixo  $Y_r'$ , pelo rebatimento do plano  $XY$ ).

Com o compasso, fazendo centro no ponto  $O$  e com raio  $\overline{OP_r'}$ , transportou-se o **afastamento** do ponto  $P$  para o eixo  $Y_r$ , determinando-se o ponto  $P_r$  – note que  $P_r$  se refere ao mesmo ponto  $P$  do eixo  $Y$ , mas num outro rebatimento (o rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ ). Assim,  $OP_r'$  é o afastamento do ponto  $P$ , em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo  $Y$ . Por  $P_r$  conduziu-se uma reta  $r_r$ , com a inclinação das projetantes (um ângulo de  $65^\circ$ ) – a reta  $r_r$  é a reta projetante do ponto  $P$ , em rebatimento. O segmento  $[OP]$  é, assim, o segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto  $P$  –  $\overline{OP}$  é a perspectiva do afastamento do ponto  $P$ .

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano  $XY$  com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por  $P_r'$  e pela perspectiva do ponto  $P$  (a reta  $d$ ) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano  $XY$ ).

*Representação do plano frontal (de frente) que contém a base comum aos dois cones:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , a perspectiva do ponto  $P$ , que é o ponto do eixo  $Y$  que tem o afastamento do plano  $\varphi$  (o plano que contém a base comum aos dois cones). Assim, pela perspectiva do ponto  $P$  conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $\varphi$  –  $h_{\varphi}$  (a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$ ) e  $p_{\varphi}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ).

Note que  $h_{\varphi}$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $\varphi$  com cota nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{\varphi}$  (o traço lateral do plano  $\varphi$ ) é uma reta vertical do plano  $\varphi$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela ao eixo  $Z$ .

O plano  $\varphi$  é um plano projetante horizontal (pois é ortogonal ao plano coordenado  $XY$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XY$ , sobre o seu traço horizontal ( $h_{\varphi}$ ). Por outro lado, o plano  $\varphi$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado  $XZ$ ) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado  $XZ$ , sobre o seu traço lateral ( $p_{\varphi}$ ).

*Inversão do rebatimento do plano coordenado  $XY$  e determinação das perspectivas do ponto  $Q$ :*

Tendo em conta que o ponto  $Q$  é um ponto do plano  $\varphi$ , que é um plano projetante horizontal, sabe-se que a projeção horizontal do ponto  $Q$  se situa, necessariamente, sobre o traço horizontal do plano  $\varphi$  (o plano  $\varphi$  projeta todas as suas retas e pontos no plano  $XY$ , sobre o seu traço horizontal). Assim, por  $Q_1$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva do traço horizontal do plano  $\varphi$  ( $h_{\varphi}$ ) é  $Q_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $Q$ ). Depois, desenhou-se a perspectiva do segmento  $[Q_0Q_1]$ , que é a perspectiva da parte da linha de chamada do ponto  $Q$  que se situa no plano  $XY$ .

Em seguida, por  $Q_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $Q$ ) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto  $Q$ , que é vertical (que é paralela ao eixo  $Z$ ). Depois, por  $Q_2$  (a projeção frontal do ponto  $Q$ ), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto  $Q$  (que é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ ) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ .

Em seguida determinou-se, ainda, a perspectiva da projeção lateral do ponto  $Q$  ( $Q_3$ ), apesar de esta não ser determinante para a resolução do exercício –  $Q_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $Q$ ), situa-se sobre  $p_{\varphi}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $\varphi$ ), pois o plano  $\varphi$  é um plano projetante lateral.

*Determinação das perspectivas do ponto  $V'$ :*

As projeções do ponto  $V'$  (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto  $V'$  – uma vez que o ponto  $V'$  tem cota nula (como atrás se referiu), a linha de chamada do ponto  $V'$  é um segmento de reta, que tem um extremo em  $V'_1$ , outro extremo em  $V'_2$  (que se situa no eixo  $X$ ). A linha de chamada do ponto  $V'$  está contida no plano  $XY$  e a perspectiva desse segmento tem um extremo em  $V'_2$  e é paralela à perspectiva do eixo  $Y$ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta  $[V'_2V'_1]$ . Em seguida, por  $V'_1$ , conduziu-se uma reta paralela à reta  $d$  (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseca a perspectiva da linha de chamada do ponto  $V'$  (a reta suporte do segmento  $[V'_2V'_1]$ ) é  $V'_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto  $V'$ ).

Tendo em conta que o ponto  $V'$  tem cota nula, o ponto  $V'$  é um ponto do plano coordenado  $XY$ , pelo que se tem imediatamente  $V' \equiv V'_1$  (sendo  $V'$  a perspectiva propriamente dita do ponto  $V'$ ).

Determinou-se ainda a perspectiva da projeção lateral do ponto  $V'$  ( $V'_3$ ), apesar de esta não ser determinante para a resolução do exercício –  $V'_3$  (a perspectiva da projeção lateral do ponto  $V'$ ) situa-se sobre a perspectiva do eixo  $Y$ , pois o ponto  $V'$  tem cota nula.

*Determinação da perspectiva do sólido:*

Atendendo a que o plano  $\varphi$  (o plano que contém a base comum aos dois cones) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o círculo projeta-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano  $XZ$ ). Assim, com o compasso, fazendo centro em  $Q$  (a perspectiva propriamente dita do ponto  $Q$ ) e com 4 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base do sólido, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do «primeiro cone» é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a base do cone) que passam por um ponto exterior (a perspectiva do ponto  $V$ ).

Assim, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio do segmento  $[QV]$  (com o recurso à mediatriz do segmento) e, com o compasso, fazendo centro no ponto  $M$  e com raio até ao ponto  $Q$ , desenhou-se um arco de circunferência – os pontos em que o arco corta a circunferência são os pontos  $A$  e  $A'$ . Os pontos  $A$  e  $A'$  são os pontos em que as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone são tangentes à base do sólido.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Após a determinação dos pontos **A** e **A'**, desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone (as geratrizes **[AV]** e **[A'V']**) e concluiu-se o desenho da perspectiva do «primeiro cone».

A perspectiva do «segundo cone» é igualmente limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam também com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a base do cone) que passam por um ponto exterior (a perspectiva do ponto **V'**).

Assim, determinou-se o ponto **M'**, o ponto médio do segmento **[QV']** (com o recurso à mediatriz do segmento) e, com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio até ao ponto **Q**, desenhou-se um arco de circunferência – os pontos em que o arco corta a circunferência são os pontos **B** e **B'**. Os pontos **B** e **B'** são os pontos em que as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone são tangentes à base do sólido.

Após a determinação dos pontos **B** e **B'**, desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone (as geratrizes **[BV]** e **[B'V']**) e concluiu-se o desenho da perspectiva do «segundo cone».

Por fim, conclui-se o desenho da perspectiva do sólido composto pelos dois cones. Sublinha-se que o arco menor  $\widehat{BB'}$  (da circunferência que delimita a base) é **invisível**. No entanto, o enunciado refere expressamente para serem identificadas, apenas, as **linhas visíveis** do sólido. Nesse sentido, não há lugar à representação desse arco de circunferência (o arco menor  $\widehat{BB'}$ ), precisamente por se tratar de uma linha invisível.

Note que a representação das perspectivas das projeções do sólido não são absolutamente necessárias, apesar de se ter representado a sua projeção frontal. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto pelos dois cones, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cone representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\varphi$  (o plano frontal que contém a base comum aos dois cones), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e lateral) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representaram-se a **leve** – caso da representação do sólido em Dupla Projeção Ortogonal, do eixo  $Y_r'$ , da reta  $r_r$ , da direção de afinidade  $d$  e, ainda, dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano **XY**.

## 1295.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz ângulos iguais (de  $125^\circ$ ) com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo **X** é o eixo que sofre uma **redução isolada**. A soma dos ângulos que a perspectiva do eixo **X** faz com as perspectivas dos outros dois eixos é  $250^\circ$ , pelo que as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, o ângulo restante, que é um ângulo de  $110^\circ$  ( $360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$ ).

Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações (recorde que as dimensões do *triângulo fundamental* são arbitrárias).

### Resolução:

A base inferior de um dos prismas (o quadrado [ABCD]) está contida no plano **XY**, que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o quadrado [ABCD] não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido no plano coordenado horizontal **XY**, sabe-se que o quadrado está em verdadeira grandeza no plano coordenado **XY** – o quadrado [ABCD] e a sua projeção horizontal são a mesma figura. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o quadrado está em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado **XY** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**.

Por outro lado, a base de maior abscissa do outro dos prismas (o quadrado [EFGH]) está contida num plano de perfil, que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o quadrado [EFGH] não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano paralelo ao plano coordenado horizontal **YZ**, sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado **YZ** – o quadrado [EFGH] e a sua projeção lateral são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

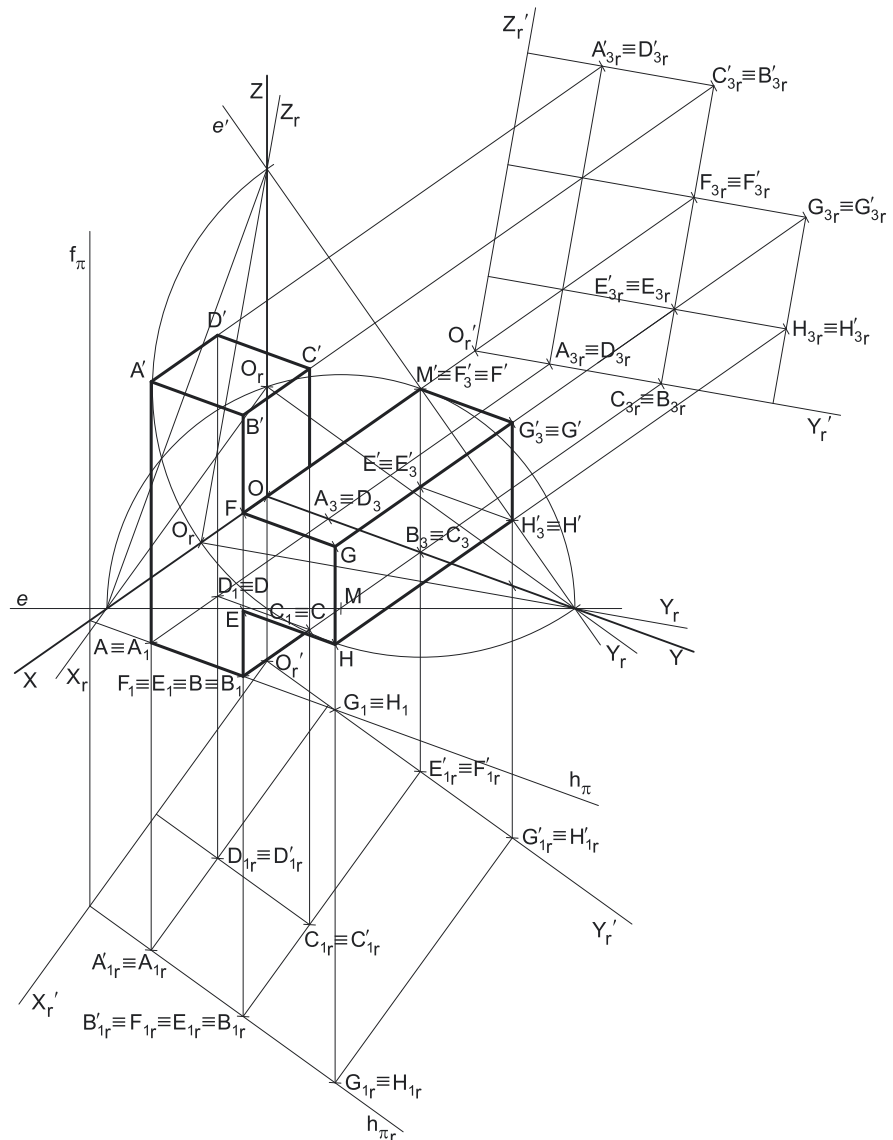
O rebatimento do plano coordenado **YZ** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**.

Assim, dada a complexidade do sólido (formado pela justaposição de dois prismas quadrangulares regulares), considera-se conveniente o recurso a rebatimento de dois planos coordenados distintos, de forma a ser possível representar previamente o sólido em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento. Nesse sentido, é aconselhável o recurso ao **método dos cortes**, em que, rebatendo dois planos coordenados, será possível representar o sólido pelas suas duas projeções.

### Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XY**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta suporte do lado do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo **Z**.

O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, determinou-se  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por  $O$  (que é a própria perspectiva do eixo  $Z$ ). O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

#### Rebatimento do plano coordenado $YZ$ :

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $YZ$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e'$ ), que é a reta suporte do lado do triângulo fundamental que se opõe à perspectiva do eixo  $X$ .

O rebatimento do plano coordenado  $YZ$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano  $YZ$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M'$ , o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, determinou-se  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por  $O$  (que é a própria perspectiva do eixo  $X$ ). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo  $Y_r$  e o eixo  $Z_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $YZ$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo  $X$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ . O eixo  $Z_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Z_r$ .

#### Construção da projeção horizontal do primeiro prisma, em verdadeira grandeza:

No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representaram-se a **abscissa** dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $E$  e  $F$  (8 cm). No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representou-se o **afastamento** do ponto  $A$  (2 cm), bem como o **afastamento** dos pontos  $B$ ,  $E$  e  $F$  (5 cm). A partir das abscissas e dos afastamentos dos quatro pontos, foi possível determinar as suas projeções horizontais em rebatimento –  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$ ,  $E_{1r}$  e  $F_{1r}$ .

Tendo em conta que os pontos  $B$ ,  $E$  e  $F$  têm a mesma abscissa e o mesmo afastamento, depreende-se que os três pontos se situam na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), pelo que as projeções horizontais dos três pontos estão coincidentes, o que se assinalou no desenho –  $B_{1r} \equiv E_{1r} \equiv F_{1r}$ .

A partir de  $A_{1r}$  e de  $B_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado [ABCD]**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais (em rebatimento) dos outros dois vértices do polígono ( $C_{1r}$  e  $D_{1r}$ ). O quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado [ABCD], em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ).

Salienta-se que, na construção do quadrado  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]$ , se teve em conta que os pontos  $A$  e  $B$  são os vértices de maior abscissa da figura, como o enunciado refere expressamente.

Tendo em conta que o quadrado [ABCD] é a base inferior de um prisma quadrangular regular, sabe-se que as arestas laterais do sólido são necessariamente verticais (projetantes horizontais), pelo que as projeções horizontais dos vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$  (a base superior do prisma) estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da sua base inferior – tem-se, imediatamente,  $A'_{1r} \equiv A_{1r}$ ,  $B'_{1r} \equiv B_{1r}$ ,  $C'_{1r} \equiv C_{1r}$  e  $D'_{1r} \equiv D_{1r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do primeiro prisma, em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido e transladado).

Por fim, optou-se por representar, em rebatimento, o plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a face de maior abscissa do primeiro prisma). O plano  $\pi$  é um plano projetante horizontal, pelo que projeta todas as suas retas e pontos no plano  $XY$ , sobre o seu traço horizontal. Assim,  $h_{\pi r}$  é o traço horizontal do plano  $\pi$  (em rebatimento) e passa necessariamente por  $A_{1r}$  e por  $B_{1r}$ .

#### Construção da projeção lateral do segundo prisma, em verdadeira grandeza:

No plano  $YZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representou-se o **afastamento** do ponto  $A$  (2 cm), bem como o **afastamento** dos pontos  $B$ ,  $E$  e  $F$  (5 cm). No plano  $YZ$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Z_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, em verdadeira grandeza, representaram-se as **cotas** dos pontos  $E$  e  $F$  (2 cm e 5 cm, respetivamente) – salienta-se que os pontos  $A$  e  $B$  têm cota nula. A partir dos afastamentos e das cotas dos quatro pontos, foi possível determinar as suas projeções laterais em rebatimento –  $A_{3r}$ ,  $B_{3r}$ ,  $E_{3r}$  e  $F_{3r}$ .

A partir de  $E_{3r}$  e de  $F_{3r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do quadrado [EFGH]**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar as projeções laterais (em rebatimento) dos outros dois vértices do polígono ( $G_{3r}$  e  $H_{3r}$ ). O quadrado  $[E_{3r}F_{3r}G_{3r}H_{3r}]$  é a projeção lateral do quadrado [EFGH], em rebatimento (no rebatimento do plano  $YZ$ ).

Salienta-se que, na construção do quadrado  $[E_{3r}F_{3r}G_{3r}H_{3r}]$ , se teve em conta que os pontos  $E$  e  $F$  são os vértices de menor afastamento da figura, como o enunciado refere expressamente.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Tendo em conta que o quadrado  $[EFGH]$  é a base de maior abscissa de um prisma quadrangular regular, sabe-se que as arestas laterais do sólido são necessariamente fronto-horizontais (projetantes laterais), pelo que as projeções laterais dos vértices do quadrado  $[E'F'G'H']$  (a base de menor abscissa do prisma) estão coincidentes com as projeções laterais dos vértices correspondentes da sua base de maior abscissa – tem-se, imediatamente,  $E'_{3r} \equiv E_{3r}$ ,  $F'_{3r} \equiv F_{3r}$ ,  $G'_{3r} \equiv G_{3r}$  e  $H'_{3r} \equiv H_{3r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção lateral do segundo prisma, em rebatimento (no plano  $YZ$  rebatido e transladado).

*Representação do sólido em Dupla Projeção Ortogonal, pelas suas projeções horizontais e lateral (em rebatimento):*

Tendo em conta que o quadrado  $[ABCD]$  tem dois lados fronto-horizontais (que são projetantes laterais – os lados  $[AD]$  e  $[BC]$ ), no plano  $YZ$  rebatido e transladado determinaram-se as projeções laterais (em rebatimento) dos vértices  $C$  e  $D$  do quadrado – tem-se, imediatamente,  $C_{3r} \equiv B_{3r}$  e  $D_{3r} \equiv A_{3r}$ .

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, no caso do primeiro prisma (cuja base inferior é o quadrado  $[ABCD]$ ), corresponde à diferença entre as cotas dos planos horizontais (de nível) que contêm as bases. O prisma tem 8 cm de altura e a sua base inferior tem cota nula (pois está contida no plano  $XY$ ), pelo que o plano que contém a base superior do prisma tem necessariamente 8 cm de cota ( $0 + 8 = 8$ ).

Assim, os vértices do quadrado  $[A'B'C'D']$  têm, todos, 8 cm de cota. Nesse sentido, no plano  $YZ$  rebatido e transladado, pelas projeções laterais (em rebatimento) dos vértices do quadrado  $[ABCD]$ , conduziram-se as retas suporte das projeções laterais das arestas laterais do prisma (que são paralelas ao eixo  $Z_r'$ , pois são verticais), e determinaram-se as projeções laterais (em rebatimento) dos vértices da base superior do prisma (em função da sua cota, que é 8 cm) – tem-se imediatamente  $C'_{3r} \equiv B'_{3r}$  e  $D'_{3r} \equiv A'_{3r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção lateral (em rebatimento) do primeiro prisma.

Em seguida, no plano  $YZ$  rebatido e transladado, determinou-se o afastamento dos pontos  $G$  e  $H$ , sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir das suas projeções laterais (em rebatimento). Depois, transportou-se esse afastamento para o eixo  $Y_r'$  do plano  $XY$  rebatido e transladado, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais (em rebatimento) daqueles dois pontos, sobre  $h_{\pi_r}$  (o traço horizontal do plano  $\pi$ , em rebatimento). Salienta-se que o plano  $\pi$  é o plano de perfil que contém o quadrado  $[EFGH]$ . Os pontos  $G$  e  $H$  situam-se na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), pelo que têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou no desenho – tem-se  $G_{1r} \equiv H_{1r}$ .

A base  $[EFGH]$  deste segundo prisma está contida num plano de perfil (o plano  $\pi$ ), pelo que as suas arestas laterais estão contidas em retas fronto-horizontais (retas projetantes laterais, que são ortogonais aos planos das bases). Assim, no plano  $XY$  rebatido e transladado, pelas projeções horizontais (em rebatimento) dos vértices do quadrado  $[EFGH]$  conduziram-se as retas suporte das projeções horizontais das arestas laterais do prisma (que são paralelas ao eixo  $X_r'$ , pois são fronto-horizontais). Por outro lado, é referido, no enunciado, que a outra base deste segundo prisma está contida no plano  $YZ$ , pelo que todos os vértices do quadrado  $[E'F'G'H']$  têm abscissa nula. Nesse sentido, determinaram-se as projeções horizontais (em rebatimento) dos vértices da base de menor abscissa deste segundo prisma, que estão sobre o eixo  $Y_r'$  – tem-se imediatamente  $E'_{1r} \equiv F'_{1r}$  e  $G'_{1r} \equiv H'_{1r}$ . Este procedimento permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal (em rebatimento) do segundo prisma.

Os procedimentos atrás expostos permitiram-nos concluir a representação do sólido composto pelos dois prismas em projeção horizontal (no plano  $XY$  rebatido e transladado) e em projeção lateral (no plano  $YZ$  rebatido e transladado). Para determinarmos a perspetiva do sólido é necessário, agora, inverter os dois rebatimentos em conjunto.

*Determinação da perspetiva do sólido:*

Em primeiro lugar, transportou-se, para a perspetiva do eixo  $X$ , a perspetiva da abscissa do plano  $\pi$  (com o recurso a uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu representar o plano  $\pi$  pelas perspetivas dos respetivos traços.

Para inverter o rebatimento do ponto  $A$  (por exemplo), a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção lateral), conduziu-se, por  $A_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $A$ , em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e$ ) e, por  $A_{3r}$  (a projeção lateral do ponto  $A$ , em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta  $e'$ ) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspetiva propriamente dita do ponto  $A$ .

A inversão do rebatimento dos outros vértices do sólido, bem como a determinação das respetivas perspetivas, processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto  $A$ .

Uma vez que o ponto  $A$  é um ponto do plano  $XY$  (porque tem cota nula), o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou convenientemente em perspetiva – tem-se, imediatamente,  $A_1 \equiv A$ . O mesmo acontece com os pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$ , pelo que se tem, imediatamente,  $B_1 \equiv B$ ,  $C_1 \equiv C$  e  $D_1 \equiv D$ .

Uma vez que o ponto  $E'$  é um ponto do plano  $YZ$  (porque tem abscissa nula), o ponto está coincidente com a sua projeção lateral, o que se assinalou convenientemente em perspetiva – tem-se, imediatamente,  $E'_3 \equiv E'$ . O mesmo acontece com os pontos  $F'$ ,  $G'$  e  $H'$ , pelo que se tem, imediatamente,  $F'_3 \equiv F'$ ,  $G'_3 \equiv G'$  e  $H'_3 \equiv H'$ .

Salienta-se que não se representaram as perspetivas nem das projeções frontais, nem das projeções horizontais, nem das projeções laterais de qualquer dos vértices do sólido (para além das situações referidas), pois, na realidade, não são absolutamente desnecessárias para a concretização do pedido (a perspetiva do sólido).

Por fim, a partir das perspetivas dos dezasseis vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspetiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as **arestas visíveis**. Sublinha-se que o enunciado refere expressamente para serem identificadas, apenas, as **arestas visíveis** do sólido. Nesse sentido, não há lugar à representação de quaisquer arestas do sólido que sejam invisíveis.

Salienta-se ainda que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – dois prismas quadrangulares regulares), as faces do objeto que resultam de duas faces complanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso do segmento de reta  $[EF]$ . De facto, o segmento de reta  $[EF]$  **não é** uma aresta do sólido, porque não resulta da interseção entre duas faces distintas (aquele segmento é, apenas, uma linha auxiliar que está contida numa determinada face do objeto e, por isso, não é uma aresta do sólido).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do sólido representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). O plano  $\pi$  (o plano de perfil que contém a face de maior abscissa do sólido), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (horizontal e frontal) se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares, representam-se a **leve** – caso dos rebatimentos do plano coordenado **XY** e do plano coordenado **YZ**, das translações dos planos coordenados rebatidos, da construção das projeções horizontal e lateral do sólido em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira que nos permitiram inverter os rebatimentos e construir a perspectiva do sólido.

## 1296.

### Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de  $120^\circ$ . A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações (recorde que as dimensões do *triângulo fundamental* são arbitrárias).

### Resolução:

O plano que contém a base superior do prisma (o hexágono [ABCDEF]) e a base da pirâmide (o quadrado [EFGH]) é um plano horizontal (de nível), que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que **nenhuma das duas figuras se projeta em verdadeira grandeza** (as perspectivas do hexágono e do quadrado não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que as duas figuras estão contidas num plano paralelo ao plano coordenado **XY**, sabe-se que as duas figuras se projetam em verdadeira grandeza no plano coordenado **XY** – o hexágono [ABCDEF] e a sua projeção horizontal são duas figuras geometricamente iguais, tal como o quadrado [EFGH] e a sua projeção horizontal também são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual as duas figuras se projetam em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado **XY** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

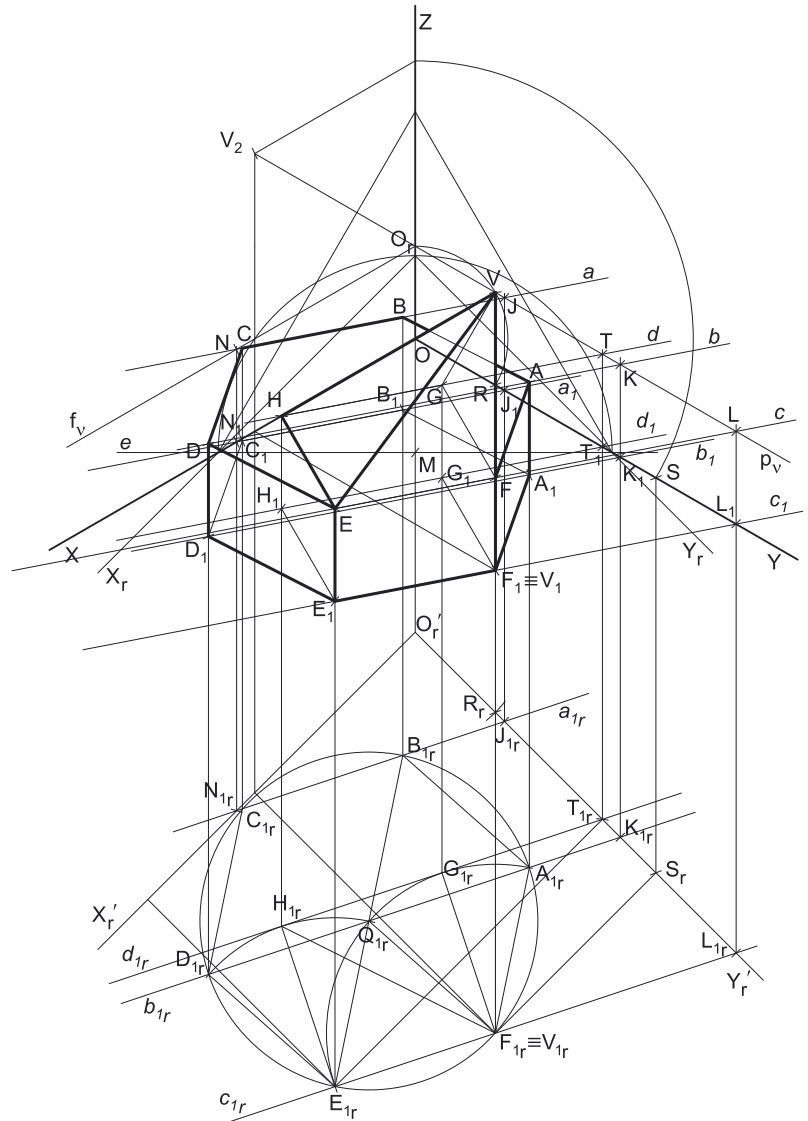
#### Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XY**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta suporte do lado do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo **Z**.

O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **1091**. e respetivo **relatório**).

Em seguida determinou-se **O<sub>r</sub>** (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspectiva do eixo **Z**). O eixo **X<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo **Y<sub>r</sub>** fica definido por **O<sub>r</sub>** e pelo ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo **X<sub>r</sub>** e o eixo **Y<sub>r</sub>** são perpendiculares entre si no ponto **O<sub>r</sub>**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O<sub>r</sub>'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **X<sub>r</sub>**. O eixo **Y<sub>r</sub>'** passa por **O<sub>r</sub>'** e é paralelo ao eixo **Y<sub>r</sub>**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Construção do hexágono [ABCDEF] e do quadrado [EFGH], em projeção horizontal, em verdadeira grandeza:*

No plano  $XY$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos pontos **E** e **F** (10 cm e 6 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. No plano  $XY$  rebatido e trasladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **E** e **F** (7 cm e 9 cm, respetivamente), em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e dos afastamentos dos pontos **E** e **F**, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais daqueles dois pontos ( $E_{1r}$  e  $F_{1r}$ , respetivamente), em rebatimento.

Em seguida, a partir de  $E_{1r}$  e de  $F_{1r}$  (as projeções horizontais dos pontos **E** e **F**, em rebatimento), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do hexágono, em rebatimento, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do centro do hexágono, em rebatimento). Salienta-se que a determinação de  $Q_{1r}$  se processou através da construção de um triângulo equilátero, de que  $E_{1r}$ ,  $F_{1r}$  e  $Q_{1r}$  são os vértices. Salienta-se que a determinação do ponto  $Q_{1r}$  teve em conta que os pontos **E** e **F** são os vértices de maior afastamento do hexágono (como o enunciado refere expressamente).

Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto **Q**, em rebatimento) e com raio até  $E_{1r}$  e  $F_{1r}$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao hexágono (em verdadeira grandeza, em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu concluir a construção da **projeção horizontal do hexágono**, em verdadeira grandeza e, dessa forma, determinar os restantes quatro vértices do polígono (em rebatimento) – o hexágono [ $A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}E_{1r}F_{1r}$ ] é a projeção horizontal do hexágono [ABCDEF], em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ . Salienta-se que a circunferência circunscrita ao hexágono pode parecer tangente ao eixo  $X_r'$ , mas, na realidade, não é, se bem que seja por uma diferença ínfima. Dessa forma, pode também parecer que o ponto  $C_{1r}$  é o ponto de tangência da circunferência ao eixo  $X_r'$ , mas também não é.

Em seguida, a partir de  $E_{1r}$  e  $F_{1r}$  efetuou-se a construção da **projeção horizontal do quadrado** [EFGH], em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), e de acordo com os dados. Uma vez que o quadrado (a base da pirâmide) está contido na base superior do prisma hexagonal (está contido no hexágono [ABCDEF]), sabe-se que a construção do quadrado tem de efetuar sobre a construção do hexágono, pelo que os pontos **E** e **F** têm de ser, também nesta situação, os vértices de maior afastamento do quadrado. A construção efetuada permitiu-nos determinar  $G_{1r}$  e  $H_{1r}$  (as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado [ $E_{1r}F_{1r}G_{1r}H_{1r}$ ] é a projeção horizontal do quadrado [EFGH], em verdadeira grandeza (em rebatimento).

*Construção das projeções horizontais do prisma e da pirâmide, em verdadeira grandeza:*

A partir das projeções horizontais das duas figuras (em rebatimento), construíram-se as projeções horizontais (em rebatimento) dos dois sólidos.

O prisma é um prisma regular, cujas bases estão contidas em planos horizontais (de nível), pelo que as suas arestas laterais estão contidas em retas projetantes horizontais (retas ortogonais aos planos das bases). Assim, atendendo a que a base inferior do prisma é o hexágono [ $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ], ou seja, considerou-se que a base inferior do sólido é a própria projeção horizontal do hexágono [ABCDEF]. Este raciocínio permite-nos economizar um sem-número de notações nas etapas seguintes do exercício.

Pelo seu lado, sabe-se que o vértice da pirâmide (o ponto **V**) se situa na mesma projetante horizontal do vértice **F**, da base (como o enunciado refere expressamente), pelo que os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou convenientemente em rebatimento – tem-se  $V_{1r} \equiv F_{1r}$ .

Estes procedimentos permitiram-nos concluir a construção das projeções horizontais do prisma e da pirâmide, em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido e trasladado). Para determinar as perspetivas dos dois sólidos é necessário, antes de mais, representar o plano horizontal (de nível) que contém o hexágono [ABCDEF] e o quadrado [EFGH].

*Determinação das perspetivas das cotas do plano horizontal que contém as duas figuras e do vértice da pirâmide:*

A cota do plano  $v$  (o plano horizontal que contém as duas figuras) e a cota do vértice da pirâmide (o ponto **V**) medem-se no eixo **Z**, que não se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que, numa perspetiva isométrica, os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível determinar as perspetivas das cotas em qualquer eixo e, depois, transportá-las para o eixo correto (o eixo **Z**). Tendo em conta que já temos dois dos eixos rebatidos (o eixo **X** e o eixo **Y**), é possível, sobre qualquer deles, medir as cotas do plano  $v$  e do vértice da pirâmide e, após determinar as suas perspetivas (afetadas pela deformação inerente à projeção), transportá-las para a perspetiva do eixo correto (o eixo **Z**)

O plano  $v$  (o plano horizontal que contém o hexágono e o quadrado) tem 3 cm de cota, que é a cota dos pontos **E** e **F** (dada no enunciado).

Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base o que, neste caso, corresponde à diferença das cotas entre o ponto **V** e o plano da base (o plano  $v$ ). Atendendo a que a pirâmide tem 6 cm de altura e que o plano da base (o plano  $v$ ) tem 3 cm de cota, o vértice **V**, da pirâmide, tem 9 cm de cota ( $3 + 6 = 9$ ).

Nesse sentido, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a cota do plano  $v$  (3 cm) e determinou-se um ponto  $R_r$ , que é, em rebatimento, o ponto do eixo **Y** que tem a cota do plano  $v$ . Ainda sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a cota do vértice **V** (9 cm) e determinou-se um ponto  $S_r$ , que é, em rebatimento, o ponto do eixo **Y** que tem a cota do vértice **V**. Em seguida, inverteu-se o rebatimento, recorrendo às perpendiculares à charneira que passam por aqueles pontos, e determinaram-se, sobre a perspetiva do eixo **Y**, as perspetivas dos pontos **R** e **S**. Note que o afastamento do ponto **S** (9 cm) é, na prática, igual ao afastamento do ponto **F** (dado no enunciado).

Assim,  $\overline{OR}$  é a perspetiva da cota do plano  $v$  (o plano horizontal que contém as duas figuras), mas está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspetiva do eixo **Z**. Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OR}$ , transportou-se a perspetiva da cota para a perspetiva do eixo **Z**, determinando um ponto (na perspetiva do eixo **Z**) – esse ponto (que não se identificou) é a perspetiva do ponto do eixo **Z** que tem a cota do plano  $v$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Pelo seu lado,  $\overline{OS}$  é a perspectiva da cota do vértice **V**, mas está igualmente no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo **Z**. Para tal, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e com raio  $\overline{OS}$ , transportou-se a perspectiva da cota para a perspectiva do eixo **Z**, determinando um ponto (na perspectiva do eixo **Z**) – esse ponto (que não se identificou) é a perspectiva do ponto do eixo **Z** que tem a cota do vértice **V**, da pirâmide.

*Representação do plano horizontal (de nível) que contém a face superior do cubo:*

O procedimento anterior permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, um ponto com a cota do plano  $v$  (o plano horizontal que contém o hexágono e o quadrado). Pela perspectiva desse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

O plano  $v$  é um plano projetante frontal (pois é ortogonal ao plano coordenado **XZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre o seu traço frontal ( $f_v$ ). Por outro lado, o plano  $v$  é, também, um plano projetante lateral (é ortogonal ao plano coordenado **YZ**) – projeta todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre o seu traço lateral ( $p_v$ ).

*Determinação da perspectiva do hexágono [ABCDEF]:*

Para inverter o rebatimento dos vértices do hexágono optou-se por recorrer a retas do plano  $v$ , às quais aqueles pontos pertençam. Assim, para inverter o rebatimento dos pontos **B** e **C** recorreu-se à reta  $a$ , que é a reta suporte do lado [BC] do hexágono. A reta  $a_{1r}$  (que está definida por  $B_{1r}$  e por  $C_{1r}$ ) é a projeção horizontal da reta  $a$ , em rebatimento. É necessário, ao inverter o rebatimento, determinar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ , que é uma reta e para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $J_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $a$  que tem abcissa nula). Por  $J_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **J**) sobre a perspectiva do eixo **Y**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **J**. A reta  $a$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto **J** é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto **J** situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $J_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta, que é o ponto **J**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

A reta  $a_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  no ponto  $N_{1r}$  (que é a projeção horizontal do ponto da reta  $a$  que tem afastamento nulo). Por  $N_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $N_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **N**) sobre a perspectiva do eixo **X**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **N**. A reta  $a$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto **N** é um ponto de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto **N** situa-se sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $N_{1r}$ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta.

A projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_{1r}$ ), em perspectiva, está definida por dois pontos – o ponto  $J_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **J**) e o ponto  $N_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **N**). Por outro lado, a perspectiva propriamente dita da reta  $a$  também está definida por dois pontos – as perspectivas propriamente ditas dos pontos **J** e **N**. Este raciocínio permitiu-nos desenhar a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_{1r}$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $B_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $B_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**), sobre  $a_{1r}$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **B** sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto **C** (conduzindo, por  $C_{1r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **C** (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $a$ ), bem como a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C** ( $C_{1r}$ ), sobre a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$  ( $a_{1r}$ ).

Para inverter o rebatimento dos pontos **A** e **D** recorreu-se à reta  $b$ , que contém aqueles pontos (a reta  $b$  é a reta suporte da diagonal [AD] do hexágono) – a reta  $b_{1r}$  é a projeção horizontal da reta  $b$ , em rebatimento, e passa por  $A_{1r}$  e por  $D_{1r}$  (a reta  $b$  está definida por dois pontos). Salienta-se que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , porque a diagonal [AD] é paralela ao lado [BC]. A reta  $b_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  no ponto  $K_{1r}$  (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto da reta  $b$  com abcissa nula). Por  $K_{1r}$  conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se  $K_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **K**) sobre a perspectiva do eixo **Y**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **K**. A reta  $b$  é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto **K** é um ponto de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto **K** situa-se sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por  $K_{1r}$ . Já temos um ponto para definir a reta  $b$ , que é o ponto **K**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta  $b$  é paralela à reta  $a$ , também já temos a direção que nos faltava para definir a reta  $b$ . Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_{1r}$ ), bem como a sua perspectiva propriamente dita ( $b$ ). A perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_{1r}$ ) está definida por um ponto ( $K_1$ , que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **K**) e por uma direção (é paralela a  $a_{1r}$ , a perspectiva da projeção horizontal da reta  $a$ ). A perspectiva propriamente dita da reta  $b$  está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto **K**) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta  $a$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $A_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se  $A_1$  (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**), sobre  $b_{1r}$  (a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$ ), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **A** sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ , na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto **D** (conduzindo, por  $D_{1r}$ , uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **D** (sobre a perspectiva propriamente dita da reta  $b$ ), bem como a perspectiva da projeção horizontal do ponto **D** ( $D_{1r}$ ), sobre a perspectiva da projeção horizontal da reta  $b$  ( $b_{1r}$ ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para inverter o rebatimento dos pontos **E** e **F** recorreu-se à reta **c**, que contém aqueles pontos (a reta **c** é a reta suporte do lado **[EF]** do hexágono) – a reta **c<sub>1r</sub>** é a projeção horizontal da reta **c**, em rebatimento, e passa por **E<sub>1r</sub>** e por **F<sub>1r</sub>** (a reta **c** está definida por dois pontos). Salienta-se que a reta **c** é paralela às retas **a** e **b**, porque o lado **[EF]** do hexágono é paralelo à diagonal **[AD]** e ao lado **[BC]** da figura. A reta **c<sub>1r</sub>** interseca o eixo **Y<sub>r</sub>'** no ponto **L<sub>1r</sub>** (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto da reta **c** com abcissa nula). Por **L<sub>1r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se **L<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **L**) sobre a perspectiva do eixo **Y**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **L**. A reta **c** é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto **L** é um ponto de **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto **L** situa-se sobre a perspectiva de **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por **L<sub>1r</sub>**. Já temos um ponto para definir a reta **c**, que é o ponto **L**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta **c** é paralela às retas **a** e **b**, também já temos a direção que nos faltava para definir a reta **c**. Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção horizontal da reta **c** (**c<sub>1</sub>**), bem como a sua perspectiva propriamente dita (**c**). A perspectiva da projeção horizontal da reta **c** (**c<sub>1</sub>**) está definida por um ponto (**L<sub>1</sub>**, que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **L**) e por uma direção (é paralela a **a<sub>1</sub>**, a perspectiva da projeção horizontal da reta **a**). A perspectiva propriamente dita da reta **c** está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto **L**) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta **a**).

Por fim, conduziu-se, por **E<sub>1r</sub>**, uma perpendicular à charneira e determinou-se **E<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **E**), sobre **c<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal da reta **c**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **E** sobre a perspectiva propriamente dita da reta **c**, na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto **F** (conduzindo, por **F<sub>1r</sub>**, uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **F** (sobre a perspectiva propriamente dita da reta **c**), bem como a perspectiva da projeção horizontal do ponto **F** (**F<sub>1</sub>**), sobre a perspectiva da projeção horizontal da reta **c** (**c<sub>1</sub>**).

O hexágono (irregular) **[ABCDEF]** é a perspectiva da base superior do prisma, enquanto o hexágono (irregular) **[A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>]** é a perspectiva da base inferior do prisma.

### Determinação da perspectiva do quadrado **[EFGH]**:

Tendo em conta que os vértices **E** e **F** são dois vértices comuns ao hexágono e ao quadrado, cujas perspectivas já foram determinadas, para se construir a perspectiva do quadrado falta-nos, apenas, determinar as perspectivas dos pontos **G** e **H**.

Para inverter o rebatimento dos pontos **G** e **H** recorreu-se à reta **d**, que contém aqueles pontos (a reta **d** é a reta suporte do lado **[GH]** do quadrado) – a reta **d<sub>1r</sub>** é a projeção horizontal da reta **d**, em rebatimento, e passa por **G<sub>1r</sub>** e por **H<sub>1r</sub>** (a reta **d** está definida por dois pontos). Salienta-se que a reta **d** é paralela à reta **c** (e às retas **a** e **b**), porque o lado **[GH]** do quadrado é paralelo ao lado **[EF]** da figura. A reta **d<sub>1r</sub>** interseca o eixo **Y<sub>r</sub>'** no ponto **T<sub>1r</sub>** (que é a projeção horizontal, em rebatimento, do ponto da reta **d** com abcissa nula). Por **T<sub>1r</sub>**, conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinou-se **T<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **T**) sobre a perspectiva do eixo **Y**. Essa mesma perpendicular à charneira permite-nos determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **T**. A reta **d** é uma reta do plano  $v$ , pelo que o ponto **T** é um ponto de **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano  $v$ ). Assim, a perspectiva do ponto **T** situa-se sobre a perspectiva de **p<sub>v</sub>** (o traço lateral do plano  $v$ ), na perpendicular à charneira que passa por **T<sub>1r</sub>**. Já temos um ponto para definir a reta **d**, que é o ponto **T**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta.

Uma vez que a reta **d** é paralela à reta **c**, também já temos a direção que nos faltava para definir a reta **d**. Assim, desenharam-se a perspectiva da projeção horizontal da reta **d** (**d<sub>1</sub>**), bem como a sua perspectiva propriamente dita (**d**). A perspectiva da projeção horizontal da reta **d** (**d<sub>1</sub>**) está definida por um ponto (**T<sub>1</sub>**, que é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **T**) e por uma direção (é paralela a **c<sub>1</sub>**, a perspectiva da projeção horizontal da reta **c**). A perspectiva propriamente dita da reta **d** está igualmente definida por um ponto (a perspectiva do ponto **T**) e por uma direção (é paralela à perspectiva da reta **c**).

Por fim, conduziu-se, por **G<sub>1r</sub>**, uma perpendicular à charneira e determinou-se **G<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **G**), sobre **d<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal da reta **d**), determinando-se, também, a perspectiva propriamente dita do ponto **G** sobre a perspectiva propriamente dita da reta **d**, na mesma perpendicular à charneira. Repetiu-se este procedimento para o ponto **H** (conduzindo, por **H<sub>1r</sub>**, uma perpendicular à charneira), o que nos permitiu determinar a perspectiva propriamente dita do ponto **H** (sobre a perspectiva propriamente dita da reta **d**), bem como a perspectiva da projeção horizontal do ponto **H** (**H<sub>1</sub>**), sobre a perspectiva da projeção horizontal da reta **d** (**d<sub>1</sub>**).

### Determinação das perspectivas do ponto **V**:

Uma vez que o ponto **V** se situa na mesma projetante horizontal do ponto **F** (como atrás se referiu), os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes (como atrás se referiu), o que se assinalou convenientemente em perspectiva – tem-se, imediatamente, **V<sub>1</sub> ≡ F<sub>1</sub>**.

Assim, por **V<sub>1</sub>** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V**) conduziu-se uma paralela à perspectiva do eixo **Y** e determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, a perspectiva da sua **abcissa**. Atendendo a que já havia sido determinada a cota do ponto **V**, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir das perspectivas da abcissa e da cota do ponto **V** construiu-se o paralelogramo de que as perspectivas da abcissa e da cota são dois lados, o que nos permitiu determinar **V<sub>2</sub>** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **V**) – a perspectiva do ponto **O** e **V<sub>2</sub>** são dois vértices opostos desse paralelogramo.

Note que não se determinou a perspectiva da projeção lateral do ponto **V** (**V<sub>3</sub>**), por tal não ser determinante para a resolução do exercício.

Por fim, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **V**. Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de **V<sub>1</sub>**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**) e pela perspectiva de **V<sub>2</sub>** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **V** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) – as duas retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **V**.

### Determinação das perspectivas do sólido final:

Por fim, a partir das perspectivas dos quinze vértices do sólido, desenharam-se o contorno aparente da perspectiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as **arestas visíveis**. Sublinha-se que o enunciado refere expressamente para serem identificadas, apenas, as **arestas visíveis** do sólido. Nesse sentido, não há lugar à representação de quaisquer arestas do sólido que sejam invisíveis.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Salienta-se ainda que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um prisma hexagonal regular e uma pirâmide quadrangular oblíqua), as faces do objeto que resultam de duas faces complanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso do segmento de reta [EF]. De facto, o segmento de reta [EF] **não é** uma aresta do sólido, porque não resulta da interseção entre duas faces distintas (aquele segmento é, apenas, uma linha auxiliar que está contida numa determinada face do objeto e, por isso, não é uma aresta do sólido).

Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções laterais nem das projeções frontais dos vértices de qualquer dos sólidos (à exceção do vértice **V**), por não serem necessárias. Nesse sentido, também não se representaram as perspectivas de qualquer das projeções dos dois sólidos. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto pelo prisma e pela pirâmide, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

#### Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano que contém a base superior do prisma e a base da pirâmide), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que as perspectivas dos seus traços (frontal e horizontal) se representaram a **leve**. A perspectiva do sólido final representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do plano coordenado **XY**, da translação do plano **XY** rebatido, da construção das projeções horizontais dos dois sólidos em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento (as retas **a**, **b**, **c** e **d**) e, ainda, dos arcos de transporte das cotas do plano  $v$  e do vértice **V** para o eixo **Z**.

## 1297.

#### Dados:

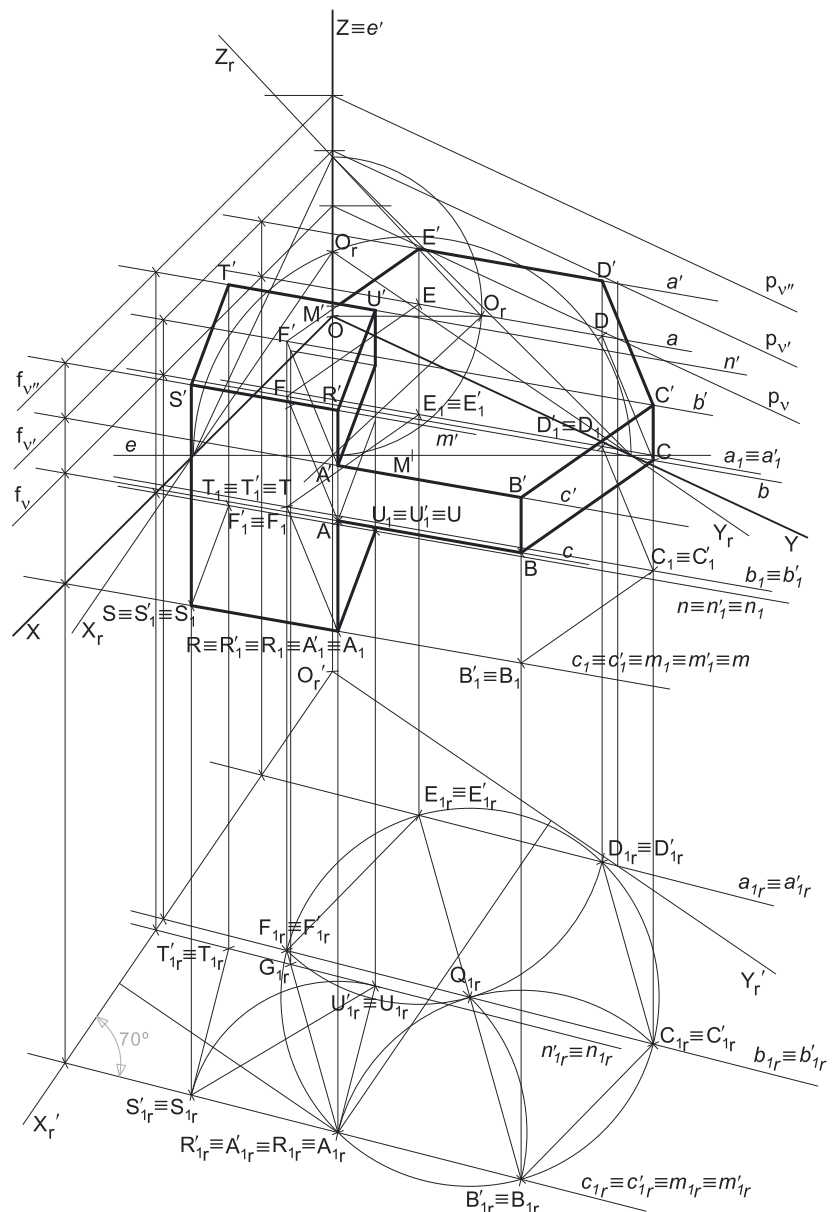
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de  $110^\circ$  com a perspectiva do eixo **Y** e um ângulo de  $135^\circ$  com a perspectiva do eixo **Z**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de  $125^\circ$ , que é o ângulo restante ( $110^\circ + 135^\circ + 125^\circ = 360^\circ$ ). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, **cujos vértices não se identificaram** para evitar sobrecarregar a resolução gráfica com excesso de notações (recorde que as dimensões do *triângulo fundamental* são arbitrárias).

#### Resolução:

O quadrado [RSTU] e o hexágono [ABCDEF] estão contidos em planos horizontais (de nível), que não são paralelos ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que **nenhuma das duas figuras se projeta em verdadeira grandeza** (as perspectivas do hexágono e do quadrado não estão em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o hexágono [ABCDEF] está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao plano coordenado **XY**, sabe-se que o hexágono se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado **XY** – o hexágono [ABCDEF] e a sua projeção horizontal são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o hexágono se projeta em verdadeira grandeza).

No mesmo sentido, tendo em conta que o quadrado [RSTU] está contido no plano coordenado horizontal (o plano **XY**), sabe-se que o quadrado está em verdadeira grandeza no plano coordenado **XY** – o quadrado [RSTU] e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado **XY**) são a mesma figura. Assim, mais uma vez, o processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o quadrado está em verdadeira grandeza).



(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O rebatimento do plano coordenado  $XY$  pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

*Rebatimento do plano coordenado  $XY$ :*

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado  $XY$ ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta  $e$ ), que é a reta suporte do lado do triângulo fundamental que se opõe à perspetiva do eixo  $Z$ .

O rebatimento do plano coordenado  $XY$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano  $XY$ . Nesse sentido, determinou-se o ponto  $M$ , o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1091. e respetivo relatório).

Em seguida, determinou-se  $O_r$  (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por  $O$  (que é a própria perspetiva do eixo  $Z$ ). O eixo  $X_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo  $Y_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo que ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo  $X_r$  e o eixo  $Y_r$  são perpendiculares entre si no ponto  $O_r$ .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano  $XY$  rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo  $Z$ . O ponto  $O_r'$  é o ponto  $O$  rebatido após a translação efetuada. O eixo  $X_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $X_r$ . O eixo  $Y_r'$  passa por  $O_r'$  e é paralelo ao eixo  $Y_r$ .

*Construção do hexágono  $[ABCDEF]$  e do quadrado  $[RSTU]$ , em projeção horizontal, em verdadeira grandeza:*

No plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $X_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** dos pontos  $A$  e  $R$  em verdadeira grandeza (10 cm). Em seguida, no plano  $XY$  rebatido e transladado, sobre o eixo  $Y_r'$ , a partir de  $O_r'$  e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** dos pontos  $A$  e  $R$  em verdadeira grandeza (7 cm). A partir da abscissa e do afastamento dos dois pontos, em verdadeira grandeza, foi possível determinar as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $R$ , em rebatimento ( $A_{1r}$  e  $R_{1r}$ , respetivamente).

Os dois pontos têm a mesma abscissa e o mesmo afastamento, pelo que os dois pontos se situam necessariamente na mesma reta vertical (que é projetante horizontal), pelo que os dois pontos têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou convenientemente o desenho – tem-se  $A_{1r} \equiv R_{1r}$ .

A partir de  $R_{1r}$  foi possível, em verdadeira grandeza, medir o ângulo de  $70^\circ$  que o lado  $[RS]$  faz com o plano coordenado  $XZ$ , que é o ângulo que o lado  $[RS]$  faz com o eixo  $X$ . Esse ângulo está, em verdadeira grandeza, no ângulo que o segmento  $[R_{1r}S_{1r}]$  (a projeção horizontal do lado  $[RS]$ , em rebatimento) faz com o eixo  $X_r'$ . Assim, a partir de  $R_{1r}$  desenhou-se a reta suporte da projeção horizontal (em rebatimento) do lado  $[RS]$ , com o ângulo referido (um ângulo de  $70^\circ$ , de abertura para a direita). Em seguida, sobre essa reta suporte mediram-se 4 cm (o comprimento do lado do quadrado) e determinou-se  $S_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $S$ , em rebatimento).

A partir de  $R_{1r}$  e  $S_{1r}$ , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ), o que nos permitiu determinar  $T_{1r}$  e  $U_{1r}$  (as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento) – o quadrado  $[R_{1r}S_{1r}T_{1r}U_{1r}]$  é a projeção horizontal do quadrado  $[RSTU]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento). Note que se garantiu, na construção do quadrado, que o ponto  $R$  é o vértice de maior afastamento do polígono, como o enunciado refere expressamente.

Uma vez que os pontos  $A$  e  $R$  têm as suas projeções horizontais coincidentes e que o lado  $[AB]$  do hexágono faz, também, um ângulo de  $70^\circ$  (de abertura para a direita) com o plano  $XZ$ , a reta suporte da projeção horizontal do lado  $[RS]$  do quadrado é a mesma reta suporte da projeção horizontal do lado  $[AB]$  do hexágono. Assim, sobre essa reta suporte mediram-se 4 cm (o comprimento do lado do hexágono) e determinou-se  $B_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $B$ , em rebatimento). Tendo em conta que, como o enunciado refere expressamente, o ponto  $A$  é o vértice de maior abscissa do hexágono, o ponto  $B$  tem abscissa inferior a  $A$ , pelo que os 5 cm foram médios no sentido posto àquele em que se mediu o lado do quadrado.

Em seguida, a partir de  $A_{1r}$  e de  $B_{1r}$  (as projeções horizontais dos pontos  $A$  e  $B$ , em rebatimento), efetuaram-se os traçados necessários à construção da projeção horizontal do hexágono, em rebatimento, para o que foi necessário, em primeiro lugar, determinar  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do centro do hexágono, em rebatimento). Salienta-se que a determinação de  $Q_{1r}$  se processou através da construção de um triângulo equilátero, de que  $A_{1r}$ ,  $B_{1r}$  e  $Q_{1r}$  são os vértices.

Por fim, com o compasso, fazendo centro em  $Q_{1r}$  (a projeção horizontal do ponto  $Q$ , em rebatimento) e com raio até  $A_{1r}$  e  $B_{1r}$ , desenhou-se a circunferência circunscrita ao hexágono (em verdadeira grandeza, em rebatimento) e efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, inscrita na circunferência, o que nos permitiu concluir a construção da **projeção horizontal do hexágono**, em verdadeira grandeza e, dessa forma, determinar os restantes quatro vértices do polígono (em rebatimento) – o hexágono  $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}E_{1r}F_{1r}]$  é a projeção horizontal do hexágono  $[ABCDEF]$ , em verdadeira grandeza (em rebatimento), no rebatimento do plano  $XY$ .

Note que, na construção da projeção horizontal do hexágono em rebatimento (no rebatimento do plano  $XY$ ), se respeitou mais uma vez que o ponto  $A$  é o vértice de maior abscissa do polígono. Tendo-se respeitado todos os dados nas construções efetuadas, constata-se que o hexágono e o quadrado se interpenetram, o que está de acordo com o enunciado, em que se refere expressamente que os dois prismas se interpenetram.

Salienta-se que a circunferência circunscrita ao hexágono pode parecer tangente ao eixo  $Y_r'$ , mas, na realidade, não é, se bem que seja por uma diferença ínfima.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

*Construção das projeções horizontais dos dois prismas, em verdadeira grandeza:*

A partir das projeções horizontais das duas figuras (em rebatimento), construíram-se as projeções horizontais (em rebatimento) dos dois sólidos.

O prisma hexagonal é um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases (que são planos horizontais). Assim, as arestas laterais do sólido estão contidas em retas verticais, que são retas projetantes horizontais. Nesse sentido, os vértices da base superior do prisma (a base  $[A'B'C'D'E'F']$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da base  $[ABCDEF]$ , o que se assinalou imediatamente –  $A'_{1r} \equiv A_{1r}$ ,  $B'_{1r} \equiv B_{1r}$ ,  $C'_{1r} \equiv C_{1r}$ ,  $D'_{1r} \equiv D_{1r}$ ,  $E'_{1r} \equiv E_{1r}$  e  $F'_{1r} \equiv F_{1r}$ . Este raciocínio permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do prisma (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ).

O prisma quadrangular é outro **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais estão igualmente contidas em retas ortogonais aos planos das bases (que são planos horizontais). Assim, as arestas laterais do sólido estão igualmente contidas em retas verticais, que são retas projetantes horizontais. Nesse sentido, os vértices da base superior do prisma (a base  $[R'S'T'U']$ ) têm as suas projeções horizontais coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da base inferior, o que se assinalou imediatamente –  $R'_{1r} \equiv R_{1r}$ ,  $S'_{1r} \equiv S_{1r}$ ,  $T'_{1r} \equiv T_{1r}$  e  $U'_{1r} \equiv U_{1r}$ . Este raciocínio permitiu-nos concluir a construção da projeção horizontal do prisma (em rebatimento, no rebatimento do plano  $XY$ ).

Para determinar as perspetivas do hexágono  $[ABCDEF]$ , do quadrado  $[RSTU]$  e dos dois prismas é necessário inverter o rebatimento e é necessário, ainda, representar o plano  $v$  (o plano horizontal que contém o hexágono), o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma hexagonal) e, ainda, o plano  $v''$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma quadrangular).

*Determinação das perspetivas das cotas dos planos  $v$ ,  $v'$  e  $v''$ :*

O plano  $v$  (o plano horizontal (de nível) que contém o hexágono  $[ABCDEF]$ ) tem 4 cm de cota, que é a cota do ponto  $A$  (dada no enunciado).

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases o que, no caso do prisma hexagonal, corresponde à diferença entre as cotas dos planos horizontais (de nível) que contêm as bases. O prisma hexagonal tem 2 cm de altura e a sua base inferior tem 4 cm de cota (a cota do ponto  $A$ ), pelo que o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma) tem necessariamente 6 cm de cota ( $4 + 2 = 6$ ).

Tendo, de novo, em conta que a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases, no caso do prisma quadrangular, corresponde também à diferença entre as cotas dos planos horizontais (de nível) que contêm as bases. O prisma quadrangular tem 8 cm de altura e a sua base inferior tem cota nula (pois está contida no plano  $XY$ ), pelo que o plano  $v''$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma) tem necessariamente 8 cm de cota ( $0 + 8 = 8$ ).

Assim, há que determinar, sobre a perspetiva do eixo  $Z$ , um ponto com 4 cm de cota (a cota do plano  $v$ ), outro ponto com 6 cm de cota (a cota do plano  $v'$ ) e, ainda, um ponto com 8 cm de cota (a cota do plano  $v''$ ). Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo  $Z$  sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo  $Z$ , para determinar a perspetiva da cota do plano  $v$ .

O rebatimento do eixo  $Z$  pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo  $Z$ , o **rebatimento dos planos coordenados** (um plano coordenado que contenha o eixo  $Z$ ) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo  $Z$ .

Nesse sentido, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (a reta  $e'$ ), que é a perspetiva do eixo  $Z$ . O rebatimento do plano projetante do eixo  $Z$  processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que tem um vértice no ponto  $O$  e cuja hipotenusa está contida na perspetiva do eixo  $Z$ . A hipotenusa desse triângulo retângulo tem um extremo no ponto em que o plano axonométrico intersecta o eixo  $Z$  (ponto esse que não se identificou) e o outro extremo no ponto em que o plano projetante do eixo  $Z$  intersecta o lado do triângulo fundamental que se opõe ao eixo  $Z$  (e que também não se identificou). Estes dois pontos, porque pertencem à charneira, rodam sobre si próprios.

Em seguida, determinou-se o ponto  $M'$  (o ponto médio da hipotenusa) e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 1033. e respetivo relatório).

Depois, conduziu-se, pela perspetiva do ponto  $O$ , uma perpendicular à charneira (a reta  $e'$ ) e determinou-se  $O_r$ , (o ponto  $O$  rebatido), sobre a semicircunferência. O eixo  $Z_r$  fica definido por  $O_r$  e pelo extremo da hipotenusa que pertence ao eixo  $Z$ , que é um ponto fixo. A reta que passa por  $O_r$  e pelo outro extremo da hipotenusa (que é outro ponto fixo) é, em rebatimento, a reta de interseção do plano projetante do eixo  $Z$  com o plano coordenado  $XY$  (mas não se identificou essa reta). Salienta-se que o eixo  $Z_r$  é perpendicular à reta de interseção atrás referida no ponto  $O_r$ .

Em seguida, sobre o eixo  $Z_r$ , a partir de  $O_r$  e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 4 cm (a cota do plano  $v$ ), os 6 cm (a cota do plano  $v'$ ) e os 8 cm (a cota do plano  $v''$ ), determinando-se três pontos, que não se identificaram. Por cada um desses pontos conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta  $e'$ ) e determinou-se a perspetiva de cada um desses pontos, sobre a perspetiva do eixo  $Z$ .

*Representação dos planos horizontais (de nível)  $v$ ,  $v'$  e  $v''$ :*

Em seguida, pela perspetiva do ponto do eixo  $Z$  que tem 4 cm de cota conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $v$  –  $f_v$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v$ ) e  $p_v$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v$ ). Note que  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v$ , com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) é uma reta de topo do plano  $v$ , com abcissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Y$ .

De forma semelhante, pela perspetiva do ponto do eixo  $Z$  que tem 6 cm de cota conduziram-se as perspetivas dos traços do plano  $v'$  –  $f_{v'}$  (a perspetiva do traço frontal do plano  $v'$ ) e  $p_{v'}$  (a perspetiva do traço lateral do plano  $v'$ ). Também nesta situação  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v'$ , com afastamento nulo – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $X$ . Pelo seu lado,  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ) é uma reta de topo do plano  $v'$ , com abcissa nula – a sua perspetiva é necessariamente paralela à perspetiva do eixo  $Y$ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, pela perspectiva do ponto do eixo **Z** que tem 8 cm de cota conduziram-se as perspectivas dos traços do plano  $v'' - f_{v''}$  (a perspectiva do traço frontal do plano  $v''$ ) e  $p_{v''}$  (a perspectiva do traço lateral do plano  $v''$ ). Também nesta situação  $f_{v''}$  (o traço frontal do plano  $v''$ ) é uma reta fronto-horizontal do plano  $v''$ , com afastamento nulo – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **X**. Pelo seu lado,  $p_{v''}$  (o traço lateral do plano  $v''$ ) é uma reta de topo do plano  $v''$ , com abcissa nula – a sua perspectiva é necessariamente paralela à perspectiva do eixo **Y**.

Os planos  $v, v'$  e  $v''$  são planos projetantes frontais (pois são ortogonais ao plano coordenado **XZ**) – projetam todas as suas retas e pontos no plano coordenado **XZ**, sobre os seus traços frontais. Por outro lado, os planos  $v, v'$  e  $v''$  são, também, planos projetantes laterais (são ortogonais ao plano coordenado **YZ**) – projetam todas as suas retas e pontos no plano coordenado **YZ**, sobre os seus traços laterais.

### Determinação das perspectivas dos vértices **D, E, D'** e **E'** do sólido:

Para inverter o rebatimento dos vértices **D, E, D'** e **E'** do prisma optou-se por recorrer a retas dos planos  $v$  e  $v'$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas **a** e **a'**. A reta **a** é uma reta do plano  $v$  e contém os pontos **D** e **E** (é a reta suporte do lado **[DE]** do hexágono **[ABCDEF]**). A reta **a'** é uma reta do plano  $v'$  e contém e contém os pontos **D'** e **E'** (é a reta suporte do lado **[D'E']** do hexágono **[A'B'C'D'E'F']**). As duas retas têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano **XY** rebatido) – a reta  $a_{1r} \equiv a'_{1r}$  é a projeção horizontal (em rebatimento) das retas **a** e **a'** e está definida por dois pontos (passa por  $D_{1r} \equiv D'_{1r}$  e por  $E_{1r} \equiv E'_{1r}$ ). Cada uma das retas (**a** e **a'**) está definida por dois pontos.

A reta  $a_{1r} \equiv a'_{1r}$  interseca o eixo  $Y_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção horizontal dos traços laterais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspectivas desses pontos, sobre a perspectiva de  $p_v$  (o traço lateral do plano  $v$ ) e sobre a perspectiva de  $p_{v'}$  (o traço lateral do plano  $v'$ ). Já temos um ponto para definir a perspectiva de cada uma das duas retas (as retas **a** e **a'**). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta  $a_{1r} \equiv a'_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção horizontal dos traços frontais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspectivas desses pontos, sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) e sobre a perspectiva de  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ). Já temos o ponto que nos faltava para definir cada uma das duas retas (em perspectiva).

Assim, a perspectiva da reta **a** fica definida pela perspectiva do seu traço lateral (que não se identificou e que se situa sobre a perspectiva de  $p_v$ ) e pela perspectiva do seu traço frontal (que também não se identificou e que se situa sobre a perspectiva de  $f_v$ ). A perspectiva da reta **a'** fica definida pela perspectiva do seu traço lateral (que não também se identificou e que se situa sobre a perspectiva de  $p_{v'}$ ) e pela perspectiva do seu traço frontal (que também não se identificou e que se situa sobre a perspectiva de  $f_{v'}$ ).

Por fim, conduziu-se, por  $D_{1r} \equiv D'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva do ponto **D** sobre a perspectiva da reta **a**, bem como a perspectiva do ponto **D'** sobre a perspectiva da reta **a'**. De forma semelhante, conduziu-se, por  $E_{1r} \equiv E'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva do ponto **E** sobre a perspectiva da reta **a**, bem como a perspectiva do ponto **E'** sobre a perspectiva da reta **a'**.

### Determinação das perspectivas dos vértices **C, F, C'** e **F'** do sólido:

Para inverter o rebatimento dos vértices **C, F, C'** e **F'** do sólido recorreu-se igualmente a retas dos planos  $v$  e  $v'$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas **b** e **b'**. A reta **b** é uma reta do plano  $v$  e contém os pontos **C** e **F** (é a reta suporte da diagonal **[CF]** do hexágono **[ABCDEF]**). A reta **b'** é uma reta do plano  $v'$  e contém e contém os pontos **C'** e **F'** (é a reta suporte da diagonal **[C'F']** do hexágono **[A'B'C'D'E'F']**). As duas retas têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano **XY** rebatido) – a reta  $b_{1r} \equiv b'_{1r}$  é a projeção horizontal (em rebatimento) das retas **b** e **b'** e está definida por dois pontos (passa por  $C_{1r} \equiv C'_{1r}$  e por  $F_{1r} \equiv F'_{1r}$ ). Cada uma das retas (**b** e **b'**) está definida por dois pontos e, ainda, por uma direção, pois são paralelas às retas **a** e **a'**.

A reta  $b_{1r} \equiv b'_{1r}$  interseca o eixo  $X_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção horizontal dos traços frontais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspectivas desses pontos, sobre a perspectiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) e sobre a perspectiva de  $f_{v'}$  (o traço frontal do plano  $v'$ ). Já temos um ponto para definir a perspectiva de cada uma das duas retas (as retas **b** e **b'**). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Tendo em conta que as retas **b** e **b'** são paralelas às retas **a** e **a'**, já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das duas retas. A perspectiva da reta **b** fica definida pela perspectiva do seu traço frontal (que não se identificou e que se situa sobre a perspectiva de  $f_v$ ) e pela direção das perspectivas das retas **a** e **a'**. A perspectiva da reta **b'** fica definida pela perspectiva do seu traço frontal (que não também se identificou e que se situa sobre a perspectiva de  $f_{v'}$ ) e pela direção das perspectivas das retas **a** e **a'**.

Por fim, conduziu-se, por  $C_{1r} \equiv C'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva do ponto **C** sobre a perspectiva da reta **b**, bem como a perspectiva do ponto **C'** sobre a perspectiva da reta **b'**. De forma semelhante, conduziu-se, por  $F_{1r} \equiv F'_{1r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspectiva do ponto **F** sobre a perspectiva da reta **b**, bem como a perspectiva do ponto **F'** sobre a perspectiva da reta **b'**.

### Determinação das perspectivas dos vértices **A, B, A', B', R, S, R'** e **S'** do sólido:

Para inverter o rebatimento dos vértices **A, B, A', B'** do sólido recorreu-se igualmente a retas dos planos  $v$  e  $v'$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas **c** e **c'**. A reta **c** é uma reta do plano  $v$  e contém os pontos **A** e **B** (é a reta suporte do lado **[AB]** do hexágono **[ABCDEF]**). A reta **c'** é uma reta do plano  $v'$  e contém e contém os pontos **A'** e **B'** (é a reta suporte do lado **[A'B']** do hexágono **[A'B'C'D'E'F']**). As duas retas têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano **XY** rebatido) – a reta  $c_{1r} \equiv c'_{1r}$  é a projeção horizontal (em rebatimento) das retas **c** e **c'** e está definida por dois pontos (passa por  $A_{1r} \equiv A'_{1r}$  e por  $B_{1r} \equiv B'_{1r}$ ). Cada uma das retas (**c** e **c'**) está definida por dois pontos e, ainda, por uma direção, pois são paralelas às retas **a, a', b** e **b'**.

Para inverter o rebatimento dos vértices **R, S, R'** e **S'** do sólido recorreu-se igualmente a retas do plano **XY** e do plano  $v''$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas **m** e **m'**. A reta **m** é uma reta do plano **XY** e contém os pontos **R** e **S** (é a reta suporte do lado **[RS]** do quadrado **[RSTU]**). A reta **m'** é uma reta do plano  $v''$  e contém os pontos **R'** e **S'** (é a reta suporte do lado **[R'S']** do quadrado **[R'S'T'U']**). As duas retas têm as suas projeções horizontais coincidentes (e coincidentes com as projeções horizontais das retas **c** e **c'**), o que se assinalou em rebatimento (no plano **XY** rebatido) – a reta  $m_{1r} \equiv m'_{1r}$  é a projeção horizontal (em rebatimento) das retas **m** e **m'** e está definida por dois pontos (passa por  $R_{1r} \equiv R'_{1r}$  e por  $S_{1r} \equiv S'_{1r}$ ). Cada uma das retas (**m** e **m'**) está definida por dois pontos e, ainda, por uma direção, pois são paralelas às retas **a, a', b** e **b'**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta  $c_r \equiv c'_r$  interseca o eixo  $X_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção horizontal dos traços frontais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspetivas desses pontos, sobre a perspetiva de  $f_v$  (o traço frontal do plano  $v$ ) e sobre a perspetiva de  $f_v'$  (o traço frontal do plano  $v'$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva de cada uma das duas retas (as retas  $c$  e  $c'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Tendo em conta que as retas  $c$  e  $c'$  são paralelas às retas  $a$  e  $a'$ , já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das duas retas. A perspetiva da reta  $c$  fica definida pela perspetiva do seu traço frontal (que não se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $f_v$ ) e pela direção das perspetivas das retas  $a$  e  $a'$ . A perspetiva da reta  $c'$  fica definida pela perspetiva do seu traço frontal (que não também se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $f_v'$ ) e pela direção das perspetivas das retas  $a$  e  $a'$ .

Por fim, conduziu-se, por  $A_{1_r} \equiv A'_{1_r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva do ponto  $A$  sobre a perspetiva da reta  $c$ , bem como a perspetiva do ponto  $A'$  sobre a perspetiva da reta  $c'$ . De forma semelhante, conduziu-se, por  $B_{1_r} \equiv B'_{1_r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva do ponto  $B$  sobre a perspetiva da reta  $c$ , bem como a perspetiva do ponto  $B'$  sobre a perspetiva da reta  $c'$ .

A reta  $m_{1_r} \equiv m'_{1_r}$  interseca o eixo  $X_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção horizontal dos traços frontais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspetivas desses pontos, sobre a perspetiva do eixo  $X$  e sobre a perspetiva de  $f_v'$  (o traço frontal do plano  $v'$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva de cada uma das duas retas (as retas  $m$  e  $m'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Tendo em conta que as retas  $m$  e  $m'$  são paralelas às retas  $a$ ,  $a'$ ,  $b$  e  $b'$ , já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das duas retas. A perspetiva da reta  $m$  fica definida pela perspetiva do seu traço frontal (que não se identificou e que se situa sobre a perspetiva do eixo  $X$ ) e pela direção das perspetivas das retas  $a$  e  $a'$ . A perspetiva da reta  $m'$  fica definida pela perspetiva do seu traço frontal (que não também se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $f_v'$ ) e pela direção das perspetivas das retas  $a$  e  $a'$ .

Por fim, conduziu-se, por  $R_{1_r} \equiv R'_{1_r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva do ponto  $R$  sobre a perspetiva da reta  $m$ , bem como a perspetiva do ponto  $R'$  sobre a perspetiva da reta  $m'$ . De forma semelhante, conduziu-se, por  $S_{1_r} \equiv S'_{1_r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva do ponto  $S$  sobre a perspetiva da reta  $m$ , bem como a perspetiva do ponto  $S'$  sobre a perspetiva da reta  $m'$ .

Uma vez que o ponto  $R$  é um ponto do plano  $XY$  (porque tem cota nula), o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou convenientemente em perspetiva – tem-se, imediatamente,  $R_1 \equiv R$ . O mesmo acontece com o ponto  $S$ , pelo que se tem, imediatamente,  $S_1 \equiv S$ .

#### Determinação das perspetivas dos vértices $T$ , $U$ , $T'$ e $U'$ , do sólido:

Para inverter o rebatimento dos vértices  $T$ ,  $U$ ,  $T'$  e  $U'$  do sólido recorreu-se igualmente a retas do plano  $XY$  e do plano  $v'$ , às quais aqueles pontos pertençam – as retas  $n$  e  $n'$ . A reta  $n$  é uma reta do plano  $XY$  e contém os pontos  $T$  e  $U$  (é a reta suporte do lado  $[TU]$  do quadrado  $[RSTU]$ ). A reta  $n'$  é uma reta do plano  $v'$  e contém os pontos  $T'$  e  $U'$  (é a reta suporte do lado  $[T'U']$  do quadrado  $[R'S'T'U']$ ). As duas retas têm as suas projeções horizontais coincidentes, o que se assinalou em rebatimento (no plano  $XY$  rebatido) – a reta  $n_{1_r} \equiv n'_{1_r}$  é a projeção horizontal (em rebatimento) das retas  $n$  e  $n'$  e está definida por dois pontos (passa por  $T_{1_r} \equiv T'_{1_r}$  e por  $U_{1_r} \equiv U'_{1_r}$ ). Cada uma das retas ( $n$  e  $n'$ ) está definida por dois pontos e, ainda, por uma direção, pois são paralelas às retas  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ ,  $m$  e  $m'$ .

A reta  $n_{1_r} \equiv n'_{1_r}$  interseca o eixo  $X_r'$  num ponto que não se identificou (e que é a projeção horizontal dos traços frontais das duas retas). Por esse ponto conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se as perspetivas desses pontos, sobre a perspetiva do eixo  $X$  e sobre a perspetiva de  $f_v'$  (o traço frontal do plano  $v'$ ). Já temos um ponto para definir a perspetiva de cada uma das duas retas (as retas  $n$  e  $n'$ ). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Tendo em conta que as retas  $n$  e  $n'$  são paralelas às retas  $m$  e  $m'$ , já temos a direção que nos faltava para definir cada uma das duas retas. A perspetiva da reta  $n$  fica definida pela perspetiva do seu traço frontal (que não se identificou e que se situa sobre a perspetiva do eixo  $X$ ) e pela direção das perspetivas das retas  $m$  e  $m'$ . A perspetiva da reta  $n'$  fica definida pela perspetiva do seu traço frontal (que não também se identificou e que se situa sobre a perspetiva de  $f_v'$ ) e pela direção das perspetivas das retas  $a$  e  $a'$ .

Por fim, conduziu-se, por  $T_{1_r} \equiv T'_{1_r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva do ponto  $T$  sobre a perspetiva da reta  $n$ , bem como a perspetiva do ponto  $T'$  sobre a perspetiva da reta  $n'$ . De forma semelhante, conduziu-se, por  $U_{1_r} \equiv U'_{1_r}$ , uma perpendicular à charneira e determinou-se a perspetiva do ponto  $U$  sobre a perspetiva da reta  $n$ , bem como a perspetiva do ponto  $U'$  sobre a perspetiva da reta  $n'$ .

Uma vez que o ponto  $T$  é um ponto do plano  $XY$  (porque tem cota nula), o ponto está coincidente com a sua projeção horizontal, o que se assinalou convenientemente em perspetiva – tem-se, imediatamente,  $T_1 \equiv T$ . O mesmo acontece com o ponto  $U$ , pelo que se tem, imediatamente,  $U_1 \equiv U$ .

#### Determinação das perspetivas do sólido:

Por fim, a partir das perspetivas dos vinte e dois vértices do sólido, desenhou-se o contorno aparente da perspetiva do sólido e assinalaram-se convenientemente as **arestas visíveis**. Sublinha-se que o enunciado refere expressamente para serem identificadas, apenas, as **arestas visíveis** do sólido. Nesse sentido, não há lugar à representação de quaisquer arestas do sólido que sejam invisíveis, sejam as arestas invisíveis por estarem ocultas, sejam as arestas invisíveis por estarem no interior do sólido (uma vez que os dois sólidos se interpenetram).

Salienta-se ainda que, tratando-se de **um único objeto** (embora composto por dois sólidos – um prisma hexagonal regular e um prisma quadrangular regular), as faces do objeto que resultam de duas faces coplanares daqueles objetos **não apresentam** qualquer linha divisória – é o caso do segmento de reta  $[AA']$ . De facto, o segmento de reta  $[AA']$  **não é** uma aresta do sólido, porque não resulta da interseção entre duas faces distintas (aquele segmento é, apenas, uma linha auxiliar que está contida numa determinada face do objeto e, por isso, não é uma aresta do sólido).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que não se representaram as perspectivas nem das projeções frontais nem das projeções laterais nem, sequer, das projeções horizontais dos vértices de qualquer dos sólidos (à exceção dos vértices **R**, **S**, **T** e **U**, devidamente referidos no relatório), por não serem necessárias. Nesse sentido, também não se representaram as perspectivas de qualquer das projeções do objeto final. Sublinha-se que o objetivo do programa da disciplina, em termos da **representação axonométrica**, é exclusivamente a representação de um dado objeto (o sólido composto, neste caso) pela sua perspectiva propriamente dita. Nesse sentido, a eventual identificação das perspectivas das projeções desse objeto deve ser entendida como um traçado auxiliar, necessário à resolução do exercício e que permita uma melhor compreensão e visualização da situação apresentada.

## Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O plano  $v$  (o plano horizontal que contém a base inferior do prisma hexagonal), o plano  $v'$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma hexagonal) e o plano  $v''$  (o plano horizontal que contém a base superior do prisma quadrangular), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que as perspectivas dos respetivos traços (frontal e lateral) se representaram a **leve**. As perspectivas do sólido representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares representaram-se a **leve** – caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, da translação do plano **XY** rebatido, da construção das projeções horizontais dos dois sólidos em rebatimento, das perpendiculares à charneira, das retas que nos permitiram inverter o rebatimento e, ainda, os traçados referentes ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, para a determinação das perspectivas das cotas dos planos horizontais (de nível).